



FELIPE ANDRADE VELOZO

**ESTUDO PROBABILÍSTICO DE SISTEMAS
QUÂNTICOS: RELAÇÕES ENTRE
DESIGUALDADES TIPO BELL**

LAVRAS – MG

2016

FELIPE ANDRADE VELOZO

**ESTUDO PROBABILÍSTICO DE SISTEMAS QUÂNTICOS: RELAÇÕES
ENTRE DESIGUALDADES TIPO BELL**

Tese apresentada à Universidade Federal de Lavras, como parte das exigências do Programa de Pós-Graduação em Estatística e Experimentação Agropecuária, área de concentração em Estatística e Experimentação Agropecuária, para a obtenção do título de Doutor.

Orientador

Dr. Marcelo Silva de Oliveira

Coorientador

Dr. José Alberto Casto Nogales Vera

LAVRAS – MG

2015

**Ficha catalográfica elaborada pelo Sistema de Geração de Ficha Catalográfica da Biblioteca
Universitária da UFLA, com dados informados pelo(a) próprio(a) autor(a).**

Veloze, Felipe Andrade.

Estudo probabilístico de sistemas quânticos: relações entre desigualdades tipo Bell / Felipe Andrade Vellozo. – Lavras : UFLA, 2016.

169 p. : il.

Tese (doutorado) – Universidade Federal de Lavras, 2015.

Orientador: Marcelo Silva de Oliveira.

Bibliografia.

1. Axiomas de Kolmogorov. 2. Desigualdades de Bell. 3. Sistemas quânticos. I. Universidade Federal de Lavras. II. Título.

FELIPE ANDRADE VELOZO

**ESTUDO PROBABILÍSTICO DE SISTEMAS QUÂNTICOS: RELAÇÕES
ENTRE DESIGUALDADES TIPO BELL**

Tese apresentada à Universidade Federal de Lavras, como parte das exigências do Programa de Pós-Graduação em Estatística e Experimentação Agropecuária, área de concentração em Estatística e Experimentação Agropecuária, para a obtenção do título de Doutor.

APROVADA em 3 de agosto de 2015.

Dr. José Alberto Casto Nogales Vera	UFLA
Dr. Devanil Jaques de Souza	UFLA
Dr. Lucas Monteiro Chaves	UFLA
Dr. Francesco Toppan	CBPF
Dra. Zhanna Gennadyevna Kuznetsova	UFABC
Dr. Moisés Porfírio Rojas Leyva	UFLA

Dr. Marcelo Silva de Oliveira
Orientador

LAVRAS – MG

2015

RESUMO

Em 1964, John S. Bell (em resposta ao paradoxo de Einstein, Podolsky e Rosen) publica um artigo em que desenvolve uma desigualdade envolvendo correlação estatística, partindo da suposição de que a Mecânica Quântica seria uma teoria estatística. Então, dever-se-ia possuir uma variável aleatória envolvida com as observações em que, se houvesse a possibilidade de conhecer seu valor, o resultado do experimento seria completamente previsível. Assim, a falta de previsibilidade do experimento seria devida à ignorância sobre o valor que tal variável assume na realização do experimento. Porém, ao usar a fórmula obtida pelo cálculo de probabilidades no experimento de Mecânica Quântica, encontra um conjunto de valores em que a desigualdade é violada, e logo concluiu que os axiomas de probabilidade de Kolmogorov não são suficientes para descrever fenômenos quânticos. Em 1969 J. F. Clauser, M. A. Horne, A. Shimony e R. A. Holt adaptam a desigualdade de Bell para um experimento viável. Nesta tese, comparam-se as regiões de violação das desigualdades de Wigner e de Bell e, verifica-se que são iguais e que equivalem à violação de um dos axiomas de Kolmogorov. Também se verifica que é possível criar funções de probabilidade para experimentos quânticos coerentes com as desigualdades de Bell e de Clauser-Horne-Shimony-Holt, mas a custo de probabilidades negativas. A tese visa tratar algumas incompatibilidades da Teoria Quântica com a Teoria de Probabilidade encontradas na literatura, analisando estatisticamente as fórmulas encontradas.

Palavras-chave: Axiomas de Kolmogorov. Desigualdades de Bell. Sistemas quânticos.

ABSTRACT

In 1964, John S. Bell publishes an article in response to the Einstein, Podolsky and Rosen paradox, in which he develops an inequality involving statistical correlation, basing on the supposition that Quantum Mechanics is a statistical theory. There should, therefore, exist a random variable related to the observations, in which, if there was the possibility of knowing its value, the result of the experiment would be completely predictable. Thus, the lack of predictability of the experiment would be due to the ignorance regarding the value that such variable assumes during the experiment. However, when using the formula obtained by calculating the probabilities of the Quantum Mechanic experiment, we find a set of values in which the inequality is violated. Thus, we concluded that the Kolmogorov probability axioms are not enough to describe quantum phenomena. In 1969, J. F. Clauser, M. A. Horne, A. Shimony and R. A. Holt adapted Bell's inequality for a viable experiment. In this dissertation, we compared the violation regions of the Wigner and Bell inequalities, verifying that they are equal and equivalent to the violation of one of the Kolmogorov axioms. We also verified that it is possible to create probability functions for quantum experiments that represent the Bell and Clauser-Horne-Shimony-Holt inequalities if compatible for changing a Kolmogorov axiom. The dissertation aims at regarding a few incompatibilities of the Quantum Theory with the Probability Theory found in literature, statistically analyzing the formulas obtained.

Keywords: Kolmogorov's Axioms. Bell's inequalities. Quantum systems.

LISTA DE FIGURAS

- Figura 1 Fonte de elétrons (amarelo) no centro com dois aparatos (vermelho e azul) que geram campo magnético em que os elétrons irão se desviar em uma das trajetórias (linhas) e colidir com um detector (plano cinza)52
- Figura 2 Dois aparatos de Stern-Gerlach: um orientado na vertical (esquerda) e o outro na horizontal (direita).....53
- Figura 3 Após o elétron passar pelo primeiro aparato (esq.), se desvia para uma das trajetórias (linhas). Ao se desviar para cima, passa pelo segundo aparato (alinhado com o primeiro) e se desvia para cima (como antes). Caso análogo ocorre quando se desvia para baixo.....53
- Figura 4 Sequência de aparatos: ao passar pelo primeiro, se desvia para um dos dois caminhos que levarão a dois aparatos, cada um produzindo um desvio para um dos dois caminhos novos (totalizando até agora quatro) que passarão por mais quatro aparatos, cada um produzindo um desvio para um dos dois caminhos, totalizando assim oito caminhos possíveis para o elétron.....54
- Figura 5 Analogia para entender a passagem do fóton (análogo à corda) por um polarizador (análogo aos cercados), como a polarização (vibração do campo elétrico) responde55
- Figura 6 Figura extraída de Aspect, Dalibard e Roger (1982) do experimento em que: S é a fonte de fótons, **CI** e **CII** são instrumentos que servem para desviar os fótons ou não (tornando possível 2 percursos diferentes), em cada percurso haverá um polarizador com um determinado sentido da

polarização, para o fóton 1 (ν_1) há os polarizadores Ia e $I'a'$ (cujas orientações são θ_1 e θ_2), para o fóton2 (ν_2) há os polarizadores Ib e $I'b'$ (cujas orientações são θ_3 e θ_4), PM1 e PM2 são os detectores (fotomultiplicadores).....84

Figura 7 Figura extraída de Aspect, Dalibard e Roger (1982)..... 128

LISTA DE GRÁFICOS

- Gráfico 1 Gráficos dos valores assumidos pelo primeiro termo da desigualdade de Wigner para os diferentes parâmetros θ_2 e θ_3 , sendo $\theta_1 = 0$. Sendo que: em (i) e em (iii) estão os gráficos para a correlação negativa ($t_1 z_1, z_2, z_3, 0, \theta_2, \theta_3$ com $z_1, z_2, z_3 = -1, -1, -1$) e em (ii), e (iv), estão os gráficos para a correlação positiva ($t_2 z_1, z_2, z_3, 0, \theta_2, \theta_3$ com $z_1, z_2, z_3 = -1, -1, -1$). Em (i) e (ii), tem-se as superfícies e em (iii) e (iv) tem-se as curvas de níveis. Valores abaixo de 0 são violações da desigualdade.....74
- Gráfico 2 Gráficos de curvas de níveis dos valores assumidos pelo primeiro termo da desigualdade de Wigner, para os diferentes parâmetros θ_2 e θ_3 , sendo $\theta_1 = 0$, com correlação negativa ($t_1 z_1, z_2, z_3, 0, \theta_2, \theta_3$ para todas as combinações de valores de z_1, z_2, z_3). Valores abaixo de 0 são violações da desigualdade.....76
- Gráfico 3 Gráficos de curvas de níveis dos valores assumidos pelo primeiro termo da desigualdade de Wigner, para os diferentes parâmetros θ_2 e θ_3 , sendo $\theta_1 = 0$, com correlação positiva ($t_2 z_1, z_2, z_3, 0, \theta_2, \theta_3$ para todas as combinações de valores de z_1, z_2, z_3). Valores abaixo de 0 são violações da desigualdade.....77
- Gráfico 4 Gráficos (de superfície e de curvas de nível) dos valores assumidos por t_1, θ_2, θ_3 , para partículas negativamente correlacionadas. Valores abaixo de 0 representam violações da desigualdade80

Gráfico 5	Gráficos (de superfície e de curvas de nível) dos valores assumidos por t_0, θ_2, θ_3 , para partículas positivamente correlacionadas. Valores abaixo de 0 representam violações da desigualdade	82
Gráfico 6	Regiões de violação da desigualdade, com parâmetro $\theta_1 = 0$, e demais parâmetros (θ_2, θ_3 e θ_4) variando, portanto trata-se de um gráfico no espaço tridimensional, em que a cada $\theta_2, \theta_3, \theta_4$ é associado um valor (valor correspondente ao primeiro termo da desigualdade apresentada logo acima do gráfico)	86
Gráfico 7	Gráfico dos valores assumidos pelo primeiro membro da desigualdade de Bell, usando as probabilidades condicionais, assumindo $p_1 = p_2 = 1/3$	122
Gráfico 8	Gráfico das superfícies de nível dos valores assumidos pelo primeiro membro da desigualdade de Clauser-Horne-Shimony-Holt.....	133
Gráfico 9	Região de integração da integral dupla da função $\cos\theta_2 + \theta_1 \cdot \cos\theta_2 - \theta_1$, com $\theta_j = \theta_{j,2} - \theta_{j,1}$ e $\theta_{j,1} = 0$	138
Gráfico 10	Região de integração da integral dupla da função $\sin\theta_2 + \theta_1 \cdot \sin\theta_2 - \theta_1$, com $\theta_j = \theta_{j,2} - \theta_{j,1}$ e $\theta_{j,1} = 0$	139
Gráfico 11	Região de integração das novas variáveis, em que o integrando é $\cos^2 \cdot \delta_2 \cdot \cos^2 \cdot \mu_2$	140
Gráfico 12	Região de integração das novas variáveis, em que o integrando é $\sin^2 \cdot \delta_2 \cdot \sin^2 \cdot \mu_2$	141
Gráfico 13	Gráficos das faixas (a uma distância de π , uma da outra) referentes ao intervalo de integração com relação à variável μ_2 , dependendo do valor atribuído à variável δ_2	152

Gráfico 14 Transformação da região de integração de um losango para um retângulo, através do uso das propriedades de simetria e periodicidade das variáveis e do integrando 154

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	13
1.1	Caracterização do problema de pesquisa	16
1.2	Objetivos da pesquisa	17
1.3	Objetivos da tese	19
2	REFERENCIAL TEÓRICO	20
2.1	Notação	21
2.2	Probabilidade	33
2.2.1	σ-Álgebra	33
2.2.2	Probabilidade axiomática	34
2.2.3	Probabilidade condicional	36
2.2.4	Teorema da probabilidade total	39
2.2.5	Variáveis aleatórias	41
2.2.6	Função de distribuição acumulada	41
2.2.7	Técnica da transformação de variáveis aleatórias	42
2.2.7.1	Transformação integral	43
2.2.7.2	Transformação de variáveis aleatórias contínuas	44
2.3	Sistemas quânticos correlacionados	47
2.3.1	O experimento com spin dos elétrons e o experimento com polarização dos fótons	48
2.3.1.1	As configurações do experimento com elétrons	51
2.3.1.2	As configurações do experimento com fótons	54
2.3.1.3	Espaço amostral	56
2.3.1.4	Variáveis aleatórias	57
2.3.1.5	Probabilidade conjunta	58
2.3.1.6	Probabilidade marginal	60
2.4	Teoria das variáveis ocultas na Mecânica Quântica	61
2.4.1	Desigualdade de Wigner	61
2.4.2	Desigualdade de Bell	64
2.4.3	Desigualdade de Clauser-Horne-Shimony-Holt	67
2.4.4	Aplicação da desigualdade de Wigner	71
2.4.5	Aplicação da desigualdade de Bell	78
2.4.6	Aplicação da desigualdade de Clauser-Horne-Shimony-Holt	83
3	METODOLOGIA	88
4	RESULTADOS E DISCUSSÃO	89
4.1	Valor esperado	89
4.2	Desigualdade de Wigner	94
4.3	O sistema linear de equações envolvendo as probabilidades	96
4.4	Desigualdade básica	99
4.4.1	Uso da desigualdade básica	102

4.4.2	Desigualdade de Bell.....	103
4.4.2.1	Relação entre a desigualdade de Bell e a desigualdade de Wigner	104
4.4.2.2	Modelagem via probabilidade condicional	117
4.4.2.3	Conclusão acerca da violação da desigualdade de Bell	122
4.4.3	Desigualdade de Clauser-Horne-Shimony-Holt	123
4.4.3.1	Relação entre a desigualdade de Clauser-Horne-Shimony-Holt e a desigualdade de Bell	125
4.4.3.2	Relação entre a desigualdade de Clauser-Horne-Shimony-Holt e a desigualdade de Wigner.....	127
4.4.3.3	Modelagem via probabilidade condicional	128
4.4.3.4	Conclusão acerca da violação da desigualdade de Clauser-Horne-Shimony-Holt	134
4.4.4	Desigualdade de Leggett.....	134
4.4.4.1	Aplicação na Física: Fótons Polarizados.....	136
4.4.4.2	Transformação de variáveis	137
4.4.4.3	Regiões de integração	138
4.4.4.4	Valor esperado condicional	141
4.4.4.5	Periodicidade do integrando	144
4.4.4.6	Distribuição de probabilidade dos ângulos das orientações dos aparatos.....	148
4.4.4.7	Valor esperado condicional nas novas variáveis.....	155
4.4.4.8	Eliminando a necessidade de se conhecer a distribuição de probabilidade das diferenças das orientações das propriedades das partículas (orientações das polarizações dos fótons).....	160
4.4.4.9	Conclusões acerca da demonstração da desigualdade de Leggett	166
5	CONCLUSÃO	167
	REFERÊNCIAS	169

1 INTRODUÇÃO

A Mecânica Quântica é considerada a área da Física Moderna mais importante, pois subsidia toda a Química Moderna e as aplicações da Eletrônica e da Física Nuclear. Porém, sua natureza é probabilística (ou estatística), e, por causa disto, faz com que a Estatística esteja ligada às explicações fundamentais da estrutura da matéria e da energia. Esclarecer esta inter-relação é de fundamental importância para as duas ciências, e é este esclarecimento que abordamos nesta tese.

A Mecânica Quântica (ou Física Quântica, ou, ainda, Teoria Quântica) é o ramo da Física que estuda os fenômenos a níveis microscópicos, atômicos e nucleares. A palavra mecânica é designada para o estudo dos efeitos de forças sobre o movimento de corpos.

O estudo a esses níveis tomou bases rigorosamente científicas no período compreendido pelo final do século XIX e início do século XX, e levou os cientistas a impasses em relação a teorias bem estabelecidas na época. Os modelos daquela época eram baseados na Mecânica Clássica e na Teoria Eletromagnética. Niels Bohr (ENCICLOPÉDIA..., 1993), na criação de seu modelo, necessitou de postulados que estivessem de acordo com a Mecânica Clássica, mas por outro lado, iam de encontro à Teoria Eletromagnética. Embora tal modelo fosse insatisfatório em vários aspectos, impulsionou os estudos acrescentando a noção de quantização dada por Max Planck na análise da radiação do corpo negro.

Louis de Broglie (ENCICLOPÉDIA..., 1993) postulou a existência da dualidade de comportamento de partícula e de onda para o movimento dos elétrons no átomo, levado pela explicação de Albert Einstein sobre o efeito fotoelétrico, na qual a luz em certas circunstâncias possui características de onda, e em outras possui características de partícula. Este postulado mostrou que

a Mecânica Clássica não era apta para descrever o movimento dos elétrons atômicos.

Erwin Schrödinger (ENCICLOPÉDIA..., 1993) formulou uma equação de movimento de acordo com a hipótese de comportamento ondulatório dos elétrons, surgindo assim, em 1926, a Mecânica Ondulatória, onde suas equações nos níveis macroscópicos levam às equações da Mecânica Clássica (princípio da correspondência), estabelecendo, assim, uma espécie de coerência (ou consistência) entre as duas mecânicas.

Werner Heisenberg (ENCICLOPÉDIA..., 1993), na mesma época, descreveu as transições atômicas de forma mais eficiente que a descrição dada pelo modelo de Bohr (que empregava quantidades não acessíveis à experimentação) empregando quantidades acessíveis por meio de um algoritmo que logo foi reconhecido como matrizes, surgindo assim a Mecânica das Matrizes, que mais tarde mostrou-se equivalente à Mecânica Ondulatória.

Enquanto não se introduz conceitos e resultados da Teoria da Relatividade na Mecânica Quântica, esta se denomina Mecânica Quântica Não-Relativística. A junção da Mecânica Quântica com a Teoria da Relatividade Especial denomina-se Mecânica Quântica Relativística. A junção com a Teoria da Relatividade Geral ainda resiste a ser feita, constituindo hoje em um dos maiores problemas não resolvidos da Física. Esta tese abordará apenas a Mecânica Quântica Não Relativística.

Em 1935, A. Einstein, juntamente com B. Podolsky e N. Rosen publicam um artigo sobre Mecânica Quântica, cujo título traduzido é: “Pode a descrição da Mecânica Quântica sobre a realidade física ser considerada completa?”. Argumentando a possibilidade de haver “variáveis escondidas” (variáveis aleatórias) que, se seus valores fossem conhecidos, um experimento da Mecânica Quântica deixaria de ser aleatório e passaria a ser determinístico,

ou seja, a aleatoriedade do experimento quântico vem da falta de informação de tais variáveis.

Em 1964, John S. Bell (em resposta ao paradoxo de Einstein, Podolsky e Rosen) publica um artigo em que desenvolve uma desigualdade envolvendo correlação estatística e, a partir da suposição de que a Mecânica Quântica seria uma teoria estatística, dever-se-ia possuir uma variável aleatória envolvida com as observações. Assim, uma variável em que, se houvesse a possibilidade de conhecer seu valor, o resultado do experimento seria completamente previsível. Portanto, a falta de previsibilidade do experimento seria devida à ignorância sobre o valor que tal variável assume na realização do experimento. Porém, John S. Bell ao usar a fórmula obtida pelo cálculo de probabilidades no experimento de Mecânica Quântica, encontra um conjunto de valores em que a desigualdade é violada, e logo conclui que os axiomas de probabilidade de Kolmogorov não são suficientes para descrever fenômenos quânticos.

Em 1969 J. F. Clauser, M. A. Horne, A. Shimony e R. A. Holt adaptam a desigualdade de Bell para um experimento viável. Aspect, Dalibard e Roger (1982) realizaram um experimento para observar a violação da desigualdade de Clauser-Horne-Shimony-Holt na prática. Após realizar o experimento, usaram os dados na desigualdade e concluíram que a desigualdade, obtida por meio de argumentos probabilísticos, era violada. Confirma-se, portanto, as conclusões obtidas por John S. Bell de que não era possível uma teoria de variáveis ocultas nas condições propostas por Einstein, Podolsky e Rosen.

Além de introduzir o conceito de quantização, todos esses estudos levaram finalmente a uma declaração de aleatoriedade fundamental nos sistemas físicos, formalizada através do postulado de Max Born (GRIFFITHS, 1995), o qual declara que a quantidade fundamental da Mecânica Quântica, denominada função de onda, deve ser interpretada como associada a uma probabilidade de ocorrência de resultados observados. Este postulado, longe de ser apenas um

detalhe, introduziu definitivamente conceitos probabilísticos e estatísticos dentro da Mecânica Quântica, e, em certo sentido, de um modo muito mais profundo e intrínseco, do que tais conceitos existentes na Mecânica Estatística por exemplo. Em função disso, há na literatura duas tendências para tratar os conceitos probabilísticos:

- a) a criação do “cálculo quântico de probabilidade”, que altera os postulados de Kolmogorov para adequar-se aos estranhos fenômenos quânticos;
- b) a manutenção do cálculo clássico de probabilidades, tomando-se cuidado em uma exata e adequada definição de espaços amostrais e σ -álgebras, e esta é a tendência que será adotada neste projeto.

1.1 Caracterização do problema de pesquisa

Na literatura de Mecânica Quântica, encontra-se uma discussão sobre a natureza aleatória encontrada em fenômenos observados no mundo quântico. Nessa discussão, há quem defenda que:

- a) A aleatoriedade na mecânica quântica, encontradas nos modelos matemáticos, são frutos de certo desconhecimento atual da comunidade científica (seja devido ao atual estágio da tecnologia presente, seja devido ao atual estágio do intelecto humano), portanto, possui a mesma justificativa presente no uso do Cálculo de Probabilidades;
- b) A aleatoriedade é uma propriedade inerente à matéria, escapando, portanto, dos domínios do Cálculo de Probabilidade, constituindo assim uma aleatoriedade da qual o Cálculo de Probabilidades

clássico não contempla, sendo necessário então ampliá-lo, surgindo a Probabilidade Quântica, que contempla os casos atendidos pelo Cálculo de Probabilidades clássico e os casos apresentados pela Mecânica Quântica.

O grupo que defende a necessidade de uma Probabilidade Quântica se apoia nas violações (teóricas em alguns casos, experimentais em outros casos) de desigualdades (de Bell, de Wigner, de Clauser-Horne-Shimony-Holt e de Leggett, entre outras) que teriam sido desenvolvidas sobre condições presentes no Cálculo de Probabilidades clássico, concluindo-se, portanto, que as violações decorrem da insuficiência do Cálculo de Probabilidades clássico em tratar o mundo quântico.

Há tentativas de se descartar uma ou outra violação, porém tem encontrado diversas barreiras, uma delas é o fato de que algumas dessas violações possuem condições mais amplas, tornando-se mais difíceis de serem descartadas do que aquelas que possuem condições mais restritivas.

Entre o grupo que defende a suficiência do Cálculo de Probabilidades Clássico, há aqueles que se apoiam em modelos (como a de David Bohm) em que é possível descrever alguns fenômenos quânticos através dos conceitos clássicos, encontrados na Mecânica Clássica, unidos com os conceitos clássicos encontrados no Cálculo de Probabilidades.

1.2 Objetivos da pesquisa

Os objetivos visados ao se estudar as desigualdades de Bell, de Clauser-Horne-Shimony-Holt, de Wigner e de Leggett, eram:

- a) Analisar as condições matemáticas necessárias e/ou suficientes para a validade das fórmulas, verificando o cumprimento (ou não) destas, em suas aplicações, para se poder justificar (ou não) as conclusões obtidas:
- Caso as condições estivessem satisfeitas, então dever-se-ia analisar até onde o Cálculo de Probabilidades clássico poderia ser utilizado na Mecânica Quântica, sem que houvesse qualquer inconsistência;
 - Caso se verificasse que as condições não estavam sendo satisfeitas, então dever-se-ia verificar para que conjunto de valores, ou de fórmulas (presentes na literatura), tais condições não poderiam ser satisfeitas, implicando em uma inconsistência lógica e, portanto, invalidando as justificativas sustentadas.
- b) Adequar o uso das fórmulas às condições matemáticas necessárias e/ou suficientes para a consistência das fórmulas, e interpretando os novos resultados obtidos a partir desta adequação:
- Uma adequação pode se dar através da proposta de um novo modelo que descreva o fenômeno, sendo esse modelo justificado pelo esquema experimental e pelo cumprimento das condições para se tornar válida a fórmula;
 - Outra adequação pode se dar através de uma análise na fórmula e nas suas condições, procurando desenvolvê-la mantendo a consistência lógica com a teoria utilizada no seu desenvolvimento. Visando, assim, obter uma nova fórmula que atenda aos propósitos da fórmula anterior e cujas condições sejam satisfeitas pelos conjuntos de valores e/ou fórmulas encontradas na literatura.

1.3 Objetivos da tese

Os dois objetivos da pesquisa orientaram os estudos realizados, de forma que os objetivos da tese são apresentar os resultados obtidos na pesquisa da seguinte forma:

- a) Apresentar as condições matemáticas que foram desrespeitadas e como ocorreu esse descumprimento nas aplicações dadas às fórmulas, que acabaram por resultar nas violações das desigualdades estudadas;
- b) Apresentar outras formas de se modelar os problemas, seja mudando as relações funcionais atribuídas às funções de probabilidade, ou mudando as que foram atribuídas nas variáveis aleatórias, de forma a respeitarem as condições necessárias e/ou suficientes para a validade das desigualdades;
- c) Apresentar as implicações lógicas decorrentes dessas novas formas de se modelar os problemas.

2 REFERENCIAL TEÓRICO

As várias seções desta tese estão descritas a seguir.

A seção de **Notação** apresenta a notação que será usada nesta tese.

No início da seção **Teoria das variáveis ocultas na Mecânica Quântica**, encontram-se as demonstrações das desigualdades e suas aplicações, encontradas na literatura de Mecânica Quântica. Em Khrennikov (2009), há uma seção dedicada às desigualdades de Bell, de Wigner e de Clauser-Horne-Shimony-Holt, de onde foram retiradas as demonstrações apresentadas nessa seção. As aplicações das desigualdades foram retiradas dos seguintes artigos: Com relação à teoria relacionada à Mecânica Quântica, pode-se encontrá-la em Griffiths (2001) e Shankar (1994).

- a) A subseção **Aplicação da desigualdade de Bell** foi retirada do artigo de Bell (1964);
- b) A subseção **Aplicação da desigualdade de Clauser-Horne-Shimony-Holt** foi retirada do artigo de Aspect, Dalibard e Roger (1982).

As soluções de equações diferenciais podem ser encontradas em Kreyszig (2006), em que o método de resolução por meio das séries de potências é mais bem descrito. Por meio deste método também é possível obter outra forma para se resolver o sistema do oscilador harmônico. Em Kreyszig (2006), também se encontra o método da separação de variáveis para a resolução de equações diferenciais parciais e um capítulo sobre funções ortogonais.

Os polinômios e suas formas diferentes de se representarem, assim como diversas equações diferenciais, e também a parte de comutadores entre outras áreas da Matemática utilizadas nesta dissertação, podem ser encontradas em

Weisstein (2003), o qual nada mais é que uma enciclopédia contendo diversas demonstrações das mais diversas áreas da Matemática.

Conceitos de operadores, lógica, espaços vetoriais entre outros, pode ser encontrados em Loomis e Sternberg (1990).

2.1 Notação

O valor lógico verdadeiro é indicado pelo símbolo \top . O valor lógico falso é indicado pelo símbolo \perp .

A relação de identidade é indicada pelo símbolo \equiv , que se lê “é idêntico a”. Esse símbolo será usado da seguinte forma

$$a \equiv b$$

Significando que a é idêntico a b , ou seja, se a for uma função de n variáveis, b também o será, e ambas as funções (a e b) serão definidas com o mesmo domínio e terão a mesma imagem, e para cada valor que as n variáveis assumirem, ao se substituir nas funções, o resultado será o mesmo, tanto em a como em b . No caso de a e b serem fórmulas, então $a \equiv b$ significa que as fórmulas são idênticas, ou seja, as variáveis livres presentes em uma serão as mesmas presentes na outra fórmula, o conjunto dos valores que as variáveis podem assumir numa fórmula será o mesmo conjunto na outra e os valores atribuídos às variáveis, para os quais uma fórmula é verdadeira, serão os mesmos para a outra.

O símbolo $\stackrel{\text{def}}{=}$, que se lê “é igual, por definição, a”, será usado para indicar que o membro esquerdo (do lado esquerdo do símbolo $\stackrel{\text{def}}{=}$) é definido pelo membro direito, ou seja, o membro esquerdo é somente outra forma de se representar o membro direito. Exemplo:

$$\frac{d}{dx}(f(x)) \stackrel{\text{def}}{=} \lim_{h \rightarrow 0} \left(\frac{f(x+h) - f(x)}{h} \right)$$

Ou seja, sempre que se observar $\frac{d}{dx}(f(x))$ numa fórmula, entende-se que se trata de $\lim_{h \rightarrow 0} \left(\frac{f(x+h) - f(x)}{h} \right)$.

O símbolo $:=$, que se lê “atribui-se”, será usado para atribuir momentaneamente algum valor, função ou fórmula a alguma variável. Exemplo:

$$x := 2$$

$$x + 3 \equiv 5$$

$$x := -1$$

$$x + 3 \equiv 2$$

Observe que à variável x atribui-se o valor 2, depois se usa essa variável numa operação, até uma nova atribuição de valor, atribuindo o valor -1, para usá-la novamente, porém agora com um novo valor.

O conectivo de negação é indicado pelo símbolo \neg . Esse símbolo será usado da seguinte forma:

$$\neg a$$

Significando que se a for verdadeiro, então $\neg a$ será falso, e se a for falso, então $\neg a$ será verdadeiro, portanto,

$$\neg(\perp) \equiv \top$$

$$\neg(\top) \equiv \perp$$

O conectivo de conjunção é indicado pelo símbolo \wedge , que se lê “e”. Esse símbolo será usado da seguinte forma

$$p \wedge q$$

Significando: p e q . A fórmula $p \wedge q$ será verdadeira somente quando ambas as variáveis forem verdadeiras e falsa caso uma das variáveis, ou as duas, assumirem o valor lógico falso, portanto,

$$(\perp \wedge \perp) \equiv \perp$$

$$(\perp \wedge \top) \equiv \perp$$

$$(\top \wedge \perp) \equiv \perp$$

$$(\top \wedge \top) \equiv \top$$

O conectivo de disjunção é indicado pelo símbolo \vee , que se lê “ou”. Esse símbolo será usado da seguinte forma:

$$p \vee q$$

Significando: p ou q . A fórmula $p \vee q$ será falsa somente quando ambas as variáveis lógicas forem falsas e verdadeira caso uma das variáveis lógicas, ou as duas, assumirem o valor lógico verdadeiro, portanto,

$$(\perp \vee \perp) \equiv \perp$$

$$(\perp \vee \top) \equiv \top$$

$$(\top \vee \perp) \equiv \top$$

$$(\top \vee \top) \equiv \top$$

O conectivo de implicação (ou conectivo condicional) é indicado pelo símbolo \Rightarrow , que se lê “implica em”. Esse símbolo será usado da seguinte forma:

$$p \Rightarrow q$$

Significando que p implica em q , ou seja, a fórmula $p \Rightarrow q$ será falsa se a variável p for verdadeira e a variável q for falsa e a fórmula $p \Rightarrow q$ será verdadeira para os casos restantes, portanto,

$$(\perp \Rightarrow \perp) \equiv \top$$

$$(\perp \Rightarrow \top) \equiv \top$$

$$(\top \Rightarrow \perp) \equiv \perp$$

$$(\top \Rightarrow \top) \equiv \top$$

As fórmulas $p \Rightarrow q$ e $q \Leftarrow p$ são relacionadas da seguinte forma:

$$(p \Rightarrow q) \equiv (q \Leftarrow p)$$

Ou seja, as duas fórmulas são idênticas. Em caso de haver uma sequência de implicações, tem-se a seguinte identidade:

$$(p \Rightarrow q \Rightarrow r) \equiv ((p \Rightarrow q) \Rightarrow r)$$

O conectivo de bi-implicação (ou conectivo bicondicional) é indicado pelo símbolo \Leftrightarrow , que se “é logicamente equivalente a” (ou “se, e somente se”). Esse símbolo será usado da seguinte forma:

$$p \Leftrightarrow q$$

Significando: p é logicamente equivalente a q . A fórmula $p \Leftrightarrow q$ será verdadeira somente quando ambas as variáveis possuírem o mesmo valor lógico,

e será falsa quando uma variável possuir um valor lógico diferente da outra, portanto,

$$\begin{aligned}(\perp \Leftrightarrow \perp) &\equiv \top \\(\perp \Leftrightarrow \top) &\equiv \perp \\(\top \Leftrightarrow \perp) &\equiv \perp \\(\top \Leftrightarrow \top) &\equiv \top\end{aligned}$$

O quantificador universal é indicado pelo símbolo \forall , que se lê “para todo”. Esse símbolo será usado da seguinte forma:

$$(\forall x)(\varphi(x))$$

Significando que para todo x , a fórmula $\varphi(x)$ é verdadeira.

Tem-se a seguinte identidade:

$$\left((\forall x \in X)(\varphi(x)) \right) \equiv \left(\bigwedge_{x \in X} (\varphi(x)) \right) \equiv \left((\forall x) \left((x \in X) \Rightarrow (\varphi(x)) \right) \right)$$

A fórmula $(\forall x \in X)(\varphi(x))$ significa “para todo x pertencente ao conjunto X , a fórmula $\varphi(x)$ é verdadeira”, ou seja, a fórmula restringe-se apenas aos elementos do conjunto X .

O quantificador existencial é indicado pelo símbolo \exists , que se lê “existe ao menos um”. Esse símbolo será usado da seguinte forma:

$$(\exists x)(\varphi(x))$$

Significando que existe ao menos um x em que a fórmula $\varphi(x)$ é verdadeira.

As seguintes identidades relacionam o quantificador universal como quantificador existencial:

$$\begin{aligned}((\exists x)(\varphi(x))) &\equiv (\neg(\forall x)(\neg\varphi(x))) \\ ((\forall x)(\varphi(x))) &\equiv (\neg(\exists x)(\neg\varphi(x)))\end{aligned}$$

Tem-se a seguinte identidade:

$$((\exists x \in X)(\varphi(x))) \equiv \left(\bigvee_{x \in X} (\varphi(x)) \right) \equiv ((\exists x) ((x \in X) \wedge (\varphi(x))))$$

A fórmula $(\exists x \in X)(\varphi(x))$ significa “existe ao menos um x pertencente ao conjunto X , em que a fórmula $\varphi(x)$ é verdadeira”, ou seja, a fórmula restringe-se apenas aos elementos do conjunto X .

O quantificador existencial estrito é indicado pelo símbolo $\exists!$, que se lê “existe somente um”. Esse símbolo será usado da seguinte forma:

$$(\exists! x)(\varphi(x))$$

Significando: existe somente um x em que a fórmula $\varphi(x)$ é verdadeira.

Tem-se a seguinte identidade:

$$((\exists! x)(\varphi(x))) \equiv \left((\exists x) \left((\varphi(x)) \wedge \neg(\exists y) \left((\varphi(y)) \wedge (y \neq x) \right) \right) \right)$$

O operador de descrição (ou descritor) é indicado pelo símbolo $|$, que se lê “tal que”. Esse símbolo será usado da seguinte forma:

$$x|_{\varphi(x)}$$

Ou

$$x|_{\varphi(x)}$$

Significando que x é o valor, atribuído à variável x , tal que a fórmula $\varphi(x)$ se torna verdadeira. Se houver mais um valor que torne $\varphi(x)$ verdadeira, então a expressão $x|_{\varphi(x)}$ é indefinida, portanto, $x|_{\varphi(x)}$ só assume algum valor x se esse for o único valor que torne $\varphi(x)$ verdadeira.

A substituição de uma variável x por um valor constante c em uma função f será indicada por:

$$(f(x))|_{x:=c}$$

E a substituição de uma variável x por um valor constante c em uma fórmula φ será indicada por:

$$(\varphi(x))|_{x:=c}$$

Numa relação de identidade (\equiv), a presença de chaves, com um conteúdo disposto em linhas, representa o seguinte:

$$(p \equiv \{q\}) \equiv (\{p \equiv q\})$$

Isto é,

$$\left(p \equiv \begin{Bmatrix} q \\ r \end{Bmatrix}\right) \equiv ((p \equiv q) \wedge (p \equiv r))$$

Ou seja, repete-se o(s) membro(s) anterior(es) (nesse caso o p) e o sinal (nesse caso a identidade \equiv) sucedido do conteúdo presente em cada linha (nesse caso o q e o r). Da mesma forma, a presença de chaves em desigualdades deve ser interpretada da seguinte forma:

$$\left(p < \begin{Bmatrix} q \\ r \end{Bmatrix}\right) \equiv \left(\begin{Bmatrix} p < q \\ p < r \end{Bmatrix}\right) \equiv ((p < q) \wedge (p < r))$$

Um conjunto cujos elementos x pertencem ao conjunto X e que tornam a fórmula φ verdadeira é representado da seguinte forma:

$$\{x \in X: \varphi(x)\}$$

O símbolo $:$ (dois pontos) separa a primeira parte, em que se apresenta os elementos e o conjunto a que pertencem, da segunda parte, que apresenta a fórmula.

Os conjuntos numéricos são:

- a) Conjuntos dos números naturais: \mathbb{N} ;
- b) Conjunto dos números inteiros: \mathbb{Z} ;
- c) Conjunto dos números racionais: \mathbb{Q} ;
- d) Conjunto dos números reais: \mathbb{R} ;
- e) Conjunto dos números complexos: \mathbb{C} .

No índice (subscrito) desses conjuntos, podem aparecer os símbolos: * (asterisco), – (menos) e + (mais).

- a) O símbolo * será usado para denotar o mesmo conjunto, só que sem o elemento nulo. Exemplo: o conjunto dos números reais não nulos é indicado por $\mathbb{R}_* \equiv \{x \in \mathbb{R}: x \neq 0\}$;
- b) O símbolo – será usado para denotar o mesmo conjunto, só que sem os elementos positivos. Exemplo: o conjunto dos números reais não positivos é indicado por $\mathbb{R}_- \equiv \{x \in \mathbb{R}: x \leq 0\}$;
- c) O símbolo + será usado para denotar o mesmo conjunto, só que sem os elementos negativos. Exemplo: o conjunto dos números reais não negativos é indicado por $\mathbb{R}_+ \equiv \{x \in \mathbb{R}: x \geq 0\}$.

Assim, o conjunto dos números reais positivos será:

$$\mathbb{R}_{*,+} \equiv \{x \in \mathbb{R}: x > 0\}$$

Pode aparecer uma constante no índice, indicando que se trata do mesmo conjunto, porém apenas os valores não negativos menores que o índice. Exemplos:

$$\mathbb{N}_4 \equiv \{x \in \mathbb{N}: 0 \leq x < 4\} \equiv \{0,1,2,3\}$$

$$\mathbb{Q}_n \equiv \{x \in \mathbb{Q}: 0 \leq x < n\}$$

O conjunto das partes de um conjunto A é indicado por $\mathbb{P}(A)$.

O complemento de um conjunto A em B é indicado por:

$$C_B(A) \stackrel{\text{def}}{=} \{x \in B: x \notin A\}.$$

Uma matriz é representada da seguinte forma:

$$[y(r, s)]_{(r,s) \in \{1,2\} \times \{1,2,3\}} \equiv \begin{bmatrix} y(1,1) & y(1,2) & y(1,3) \\ y(2,1) & y(2,2) & y(2,3) \end{bmatrix}$$

Portanto,

$$[y(r, s)]_{(r,s) \in \mathbb{N}_m \times \mathbb{N}_n}$$

É uma matriz com m linhas e n colunas. O conjunto de matrizes de m linhas e n , cujos elementos pertencem ao conjunto Y é indicado por: $\mathcal{M}_{m,n}(Y)$, ou seja,

$$y \in \mathcal{M}_{m,n}(Y)$$

A notação usada para função será:

$$A \ni u \mapsto f(u) \in B$$

Em que A é o domínio da função f e B é o contradomínio, ou seja,

$$\text{Dom}(f) \equiv A$$

$$\text{CDom}(f) \equiv B$$

A imagem da função será:

$$\text{Im}(f) \equiv \{v \in B: (\exists u \in A)(f(u) = v)\}$$

O valor que a função f associa ao argumento u é indicado por $f(u)$. A função inversa, se existir, é indicada por f^{-1} , e é definida pela fórmula:

$$B \ni u \mapsto f^{-1}(u) = \{v \mid f(v) = u\} \subseteq A$$

Portanto,

- a) $f^{-1}(u)$ é o valor da função inversa de f associado ao valor do argumento u ;
- b) $f(u^{-1})$ é o valor da função f associado ao inverso do valor do argumento u e
- c) $f(u)^{-1}$ é o inverso do valor da função f associado ao valor do argumento u .

O conjunto das funções de domínio A e contradomínio B é indicado por B^A .

A função definida por:

$$A \ni u \mapsto f(u) \equiv \begin{cases} g(u) \Leftarrow u \in B \\ h(u) \Leftarrow u \in C_A(B) \end{cases}$$

ou

$$(\forall u \in A) \left(\left((f(u) \equiv g(u)) \Leftarrow (u \in B) \right) \wedge \left((f(u) \equiv h(u)) \Leftarrow (u \in C_A(B)) \right) \right)$$

Significa que $f(u)$ será idêntico a $g(u)$ se $u \in B$ e, $f(u)$ será idêntico a $h(u)$ se $u \in C_A(B)$, ou seja, dependendo do valor que o argumento u assumir, a função f tomará uma forma. Assim, pode-se definir uma função recursiva por:

$$\mathbb{N} \ni n \mapsto f(n) \equiv \begin{cases} g(n, f(n-1)) & \Leftarrow n \geq 1 \\ c & \Leftarrow n = 0 \end{cases}$$

Em que g é uma função envolvendo n e o valor da função f para o argumento $(n-1)$.

A composição de funções é indicada pelo símbolo \circ , que será usado da seguinte forma:

$$f \circ g(u) \equiv f(g(u))$$

Portanto,

$$f^2(u) \equiv f \circ f(u) \equiv f(f(u))$$

Produto tensorial é indicado pelo símbolo \otimes , que no caso de um produto tensorial de duas variáveis, tem-se:

$$x \otimes y \stackrel{\text{def}}{=} (x, y)$$

E no caso mais geral, tem-se:

$$\bigotimes_{k=m}^{k=n} (x_k) \stackrel{\text{def}}{=} \begin{cases} x_m \otimes \left(\bigotimes_{k=m+1}^{k=n} (x_k) \right) & \Leftarrow ((n > m + 1) \wedge (m \in \mathbb{Z}) \wedge (n \in \mathbb{Z})) \\ x_m \otimes x_n \equiv (x_m, x_n) & \Leftarrow ((n = m + 1) \wedge (m \in \mathbb{Z}) \wedge (n \in \mathbb{Z})) \end{cases}$$

Significando uma sequência, da mesma forma que:

$$(x_k)_{k=m}^{k=n} \equiv \bigotimes_{k=m}^{k=n} (x_k)$$

O produto direto de dois conjuntos é indicado por:

$$X_1 \times X_2 \equiv \{(x_1, x_2): (x_1 \in X_1) \wedge (x_2 \in X_2)\}$$

$$\prod_{k=m}^{k=n} (X_k) \stackrel{\text{def}}{=} \left\{ \bigotimes_{k=m}^{k=n} (x_k) : \bigwedge_{k=m}^{k=n} (x_k \in X_k) \right\}$$

O produto de Kronecker de duas matrizes é indicado por:

$$\begin{bmatrix} x_{1,1} & x_{1,2} \\ x_{2,1} & x_{2,2} \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} y_{1,1} & y_{1,2} \\ y_{2,1} & y_{2,2} \end{bmatrix} \equiv \begin{bmatrix} x_{1,1} \cdot y_{1,1} & x_{1,1} \cdot y_{1,2} & x_{1,2} \cdot y_{1,1} & x_{1,2} \cdot y_{1,2} \\ x_{1,1} \cdot y_{2,1} & x_{1,1} \cdot y_{2,2} & x_{1,2} \cdot y_{2,1} & x_{1,2} \cdot y_{2,2} \\ x_{2,1} \cdot y_{1,1} & x_{2,1} \cdot y_{1,2} & x_{2,2} \cdot y_{1,1} & x_{2,2} \cdot y_{1,2} \\ x_{2,1} \cdot y_{2,1} & x_{2,1} \cdot y_{2,2} & x_{2,2} \cdot y_{2,1} & x_{2,2} \cdot y_{2,2} \end{bmatrix}$$

2.2 Probabilidade

Nesta seção, serão introduzidos os conceitos de Estatística que serão usados nesta dissertação. Maiores detalhes podem ser obtidos em Magalhães (2006) e Mood, Graybill e Boes (1973).

2.2.1 σ -Álgebra

Seja \mathcal{A} um conjunto de subconjuntos de Ω , então \mathcal{A} será considerada uma σ -álgebra se obedecer as seguintes propriedades:

- a) $\Omega \in \mathcal{A}$;

- a) $(A \in \mathcal{A}) \Rightarrow (C_\Omega A \in \mathcal{A})$;
- b) $(\{A_k\}_{k \in \mathbb{N}} \subseteq \mathcal{A}) \Rightarrow (\bigcup_{k \in \mathbb{N}} A_k \in \mathcal{A})$, se $\{A_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ for uma família de conjuntos disjuntos.

Propriedade 1: *O conjunto vazio \emptyset pertence à σ -álgebra \mathcal{A} .*

Propriedade 2: *Se um conjunto de conjuntos A_k (com k pertencente a \mathbb{N}) está contido na σ -álgebra \mathcal{A} , então a interseção $\bigcap_{k \in \mathbb{N}} A_k$ também pertencerá à σ -álgebra \mathcal{A} .*

2.2.2 Probabilidade axiomática

Os axiomas de Kolmogorov definem probabilidade numa formulação rigorosa, permitindo generalizar o conceito, definindo conceitos que anteriormente eram não rigorosos e firmados principalmente na intuição.

Seja uma função \mathcal{P} com domínio definido na σ -álgebra \mathcal{A} de subconjuntos Ω e contradomínio no intervalo fechado $[0; 1]$, ou seja,

$$\mathcal{P}: \mathcal{A} \rightarrow [0; 1].$$

Tal função será considerada uma função de probabilidade se obedecer aos seguintes axiomas:

- a) $\mathcal{P}(\Omega) = 1$;
- b) $\mathcal{P}(A) \geq 0$;
- c) $(\{A_k\}_{k \in \mathbb{N}} \subseteq \mathcal{A}) \Rightarrow (\mathcal{P}(\bigcup_{k \in \mathbb{N}} A_k) = \sum_{k \in \mathbb{N}} \mathcal{P}(A_k))$, se $\{A_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ for uma família de conjuntos disjuntos.

Denomina-se espaço de probabilidade à trinca $(\Omega, \mathcal{A}, \mathcal{P})$.

Propriedade 1: A probabilidade do complementar de um conjunto A é dada por

$$\mathcal{P}(C_{\Omega}A) = 1 - \mathcal{P}(A)$$

Para todo conjunto A pertencente à σ -álgebra \mathcal{A} .

Propriedade 2: A probabilidade do conjunto vazio é dada por

$$\mathcal{P}(\emptyset) = 0$$

Propriedade 3: A probabilidade de um conjunto A pode ser reescrito na forma de soma de probabilidades

$$\mathcal{P}(A) = \mathcal{P}(A \cap B) + \mathcal{P}(A \cap C_{\Omega}B)$$

Quaisquer que sejam os conjuntos A e B pertencentes à σ -álgebra \mathcal{A} .

Propriedade 4: A probabilidade do conjunto $C_A B$ é dada por

$$\mathcal{P}(C_A B) = \mathcal{P}(A) - \mathcal{P}(A \cap B)$$

Para quaisquer conjuntos A e B pertencentes à σ -álgebra \mathcal{A} .

Propriedade 5: A probabilidade da união de dois conjuntos A e B é dada por

$$\mathcal{P}(A \cup B) = \mathcal{P}(A) + \mathcal{P}(B) - \mathcal{P}(B \cap A)$$

Para quaisquer conjuntos A e B pertencentes à σ -álgebra \mathcal{A} .

Propriedade 6: A probabilidade de um conjunto A subconjunto ou igual a B é restringida pela desigualdade

$$\mathcal{P}(A) \leq \mathcal{P}(B)$$

Para qualquer conjunto B pertencente à σ -álgebra e para qualquer conjunto A subconjunto ou igual a B .

Propriedade 7: *A probabilidade de um conjunto A é restringida pela desigualdade*

$$0 \leq \mathcal{P}(A) \leq 1$$

Para todo conjunto A pertencente à σ -álgebra \mathcal{A} .

2.2.3 Probabilidade condicional

Para se calcular a probabilidade de um evento representado pelo conjunto A uma vez que um determinado evento representado pelo conjunto B já ocorreu (em que todos os elementos dos conjuntos A e B pertencem ao mesmo conjunto Ω), define-se a probabilidade condicional em:

$$\mathcal{P}(A; B) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\mathcal{P}(A \cap B)}{\mathcal{P}(B)}$$

Uma vez que o evento representado pelo conjunto B ocorreu, está claro que a probabilidade $\mathcal{P}(B)$ deve ser diferente de 0, caso contrário o evento representado pelo conjunto B seria um evento impossível de ocorrer e não seria possível calcular a probabilidade condicional $\mathcal{P}(A; B)$ pois o denominador da fórmula não pode ser nulo.

A probabilidade condicional $\mathcal{P}(A; B)$ é frequentemente referida como a *probabilidade de A dado B* , ou seja, a probabilidade de ocorrer o evento representado pelo conjunto A dado que o evento representado pelo conjunto B já ocorreu.

Propriedade 1: *A probabilidade condicional do conjunto B dado B é dada por*

$$\mathcal{P}(B; B) = 1$$

Para todo conjunto B pertencente à σ -álgebra \mathcal{A} cuja probabilidade $\mathcal{P}(B)$ seja diferente de 0.

Propriedade 2: A probabilidade condicional do conjunto A dado B é restringido pela desigualdade

$$0 \leq \mathcal{P}(A; B) \leq 1$$

para quaisquer conjuntos A e B pertencentes à σ -álgebra \mathcal{A} , sendo B um conjunto cuja probabilidade $\mathcal{P}(B)$ seja diferente de 0.

Propriedade 3: A probabilidade da interseção dos conjuntos A e B é dada por

$$\mathcal{P}(A \cap B) = \mathcal{P}(A; B) \cdot \mathcal{P}(B)$$

Para quaisquer conjuntos A e B pertencentes à σ -álgebra \mathcal{A} , sendo B um conjunto cuja probabilidade $\mathcal{P}(B)$ seja diferente de 0.

Propriedade 4: A probabilidade condicional da interseção $(A \cap B)$ dado B é dada por

$$\mathcal{P}(A \cap B; B) = \mathcal{P}(A; B)$$

Para quaisquer conjuntos A e B pertencentes à σ -álgebra \mathcal{A} , sendo B um conjunto cuja probabilidade $\mathcal{P}(B)$ seja diferente de 0.

Propriedade 5: A probabilidade condicional da interseção $(A \cap B)$ dado a união $(A \cup B)$ é dada por

$$\mathcal{P}(A \cap B; A \cup B) = \frac{\mathcal{P}(A \cap B)}{\mathcal{P}(A \cup B)}$$

Para quaisquer conjuntos A e B pertencentes à σ -álgebra \mathcal{A} , sendo A e B conjuntos cuja probabilidade $\mathcal{P}(A \cup B)$ seja diferente de 0.

Propriedade 6: A probabilidade condicional do conjunto Ω dado B é dada por

$$\mathcal{P}(\Omega; B) = 1$$

Para qualquer conjunto B pertencente à σ -álgebra \mathcal{A} , sendo B um conjunto cuja probabilidade $\mathcal{P}(B)$ seja diferente de 0.

Propriedade 7: A probabilidade condicional do conjunto vazio \emptyset dado B é dada por

$$\mathcal{P}(\emptyset; B) = 0$$

Para qualquer conjunto B pertencente à σ -álgebra \mathcal{A} , sendo B um conjunto cuja probabilidade $\mathcal{P}(B)$ seja diferente de 0.

Propriedade 8: A probabilidade condicional da união de conjuntos disjuntos $\bigcup_{k \in \mathbb{N}^*} A_k$ dado B é dada por

$$\mathcal{P}\left(\bigcup_{k \in \mathbb{N}^*} A_k; B\right) = \sum_{k \in \mathbb{N}^*} \mathcal{P}(A_k; B)$$

Para quaisquer conjuntos A_k e B pertencentes à σ -álgebra \mathcal{A} , sendo B um conjunto cuja probabilidade $\mathcal{P}(B)$ seja diferente de 0.

Propriedade 9: A probabilidade condicional do complementar $C_B A$ dado B é dada por

$$\mathcal{P}(C_B A; B) = 1 - \mathcal{P}(A; B)$$

Para quaisquer conjuntos A e B pertencentes à σ -álgebra \mathcal{A} , sendo B um conjunto cuja probabilidade $\mathcal{P}(B)$ seja diferente de 0.

Propriedade 10: A probabilidade condicional de A dado B pode ser reescrita na forma de soma de duas probabilidades condicionais

$$\mathcal{P}(A; B) = \mathcal{P}(A \cap C; B) + \mathcal{P}(A \cap C_B C; B)$$

Para quaisquer conjuntos A , B e C pertencentes à σ -álgebra \mathcal{A} , sendo B um conjunto cuja probabilidade $\mathcal{P}(B)$ seja diferente de 0.

Propriedade 11: A probabilidade condicional da união $(A \cup C)$ dado B é dada por

$$\mathcal{P}(A \cup C; B) = \mathcal{P}(A; B) + \mathcal{P}(C; B) - \mathcal{P}(A \cap C; B)$$

para quaisquer conjuntos A , B e C pertencentes à σ -álgebra \mathcal{A} , sendo B um conjunto cuja probabilidade $\mathcal{P}(B)$ seja diferente de 0.

Propriedade 12: A probabilidade condicional de A dado B , sendo A subconjunto ou igual a C é restringida pela desigualdade

$$\mathcal{P}(A; B) \leq \mathcal{P}(C; B)$$

Para quaisquer conjuntos A , B e C pertencentes à σ -álgebra \mathcal{A} , sendo B um conjunto cuja probabilidade $\mathcal{P}(B)$ seja diferente de 0 e sendo A um subconjunto ou igual a C .

2.2.4 Teorema da probabilidade total

Considere uma família $\{B_k\}_{k=1}^{k=n}$ de conjuntos B_k que formem uma partição de Ω , em que todo B_k pertence à σ -álgebra \mathcal{A} . Considerando um conjunto A pertencente à σ -álgebra \mathcal{A} , portanto A é subconjunto ou é igual a Ω

$$A \subseteq \Omega \therefore A \cap \Omega = A$$

mas como $\bigcup_{k=1}^{k=n} B_k = \Omega$, tem-se:

$$A = A \cap \Omega = A \cap \left(\bigcup_{k=1}^{k=n} (B_k) \right) = \bigcup_{k=1}^{k=n} (A \cap B_k)$$

Realizando a interseção dos conjuntos $(A \cap B_{k_1})$ e $(A \cap B_{k_2})$ para todo k_1 e k_2 , tem-se:

$$(A \cap B_{k_1}) \cap (A \cap B_{k_2}) = A \cap (B_{k_1} \cap B_{k_2}),$$

Mas como

$$(k_1 \neq k_2) \Rightarrow (B_{k_1} \cap B_{k_2} = \emptyset)$$

Portanto,

$$(k_1 \neq k_2) \Rightarrow ((A \cap B_{k_1}) \cap (A \cap B_{k_2}) = A \cap (B_{k_1} \cap B_{k_2}) = A \cap \emptyset = \emptyset)$$

Assim, os conjuntos formados por $(A \cap B_{k_1}) \cap (A \cap B_{k_2})$ são disjuntos e, portanto, pode-se aplicar o axioma (c) da função de probabilidade:

$$\mathcal{P}(A) = \mathcal{P} \left(\bigcup_{k=1}^{k=n} (A \cap B_k) \right) = \sum_{k=1}^{k=n} (\mathcal{P}(A \cap B_k))$$

Se as probabilidades dos conjuntos B_k forem diferentes de 0, para todo k , então existirá a probabilidade condicional $\mathcal{P}(A; B_k)$ para todo k , assim, tem-se

$$\mathcal{P}(A; B_k) = \frac{\mathcal{P}(A \cap B)}{\mathcal{P}(B)} \therefore \mathcal{P}(A \cap B) = \mathcal{P}(A; B_k) \cdot \mathcal{P}(B_k)$$

Portanto,

$$\mathcal{P}(A) = \sum_{k=1}^{k=n} (\mathcal{P}(A; B_k) \cdot \mathcal{P}(B_k))$$

Desta forma, pode-se obter a probabilidade de qualquer evento a partir de uma soma de probabilidades condicionais, desde que elas existam.

2.2.5 Variáveis aleatórias

Denomina-se variável aleatória, toda função $X: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ tal que a pré-imagem de $X(w)$ pertença à σ -álgebra \mathcal{A} , ou seja,

$$\{w \in \Omega: X(w) \in \mathbb{I}\} \in \mathcal{A}$$

Em que $\mathbb{I} \subseteq \mathbb{R}$ é um intervalo.

2.2.6 Função de distribuição acumulada

Seja X uma variável aleatória. A função de distribuição acumulada de probabilidade $\mathcal{P}_{\leq, X}$ é dada por

$$\mathcal{P}_{\leq, X}(x) \stackrel{\text{def}}{=} \mathcal{P}_X(\{X \in \mathbb{R}: X \leq x\}).$$

Se X for uma variável aleatória discreta, então

$$\mathcal{P}_{\leq, X}(x) = \sum_{u \leq x} (\mathcal{P}_X(u)).$$

Se X for uma variável aleatória contínua, então

$$\mathcal{P}_{\leq, X}(x) = \int_{u \leq x} p_X(u) \cdot du,$$

Em que p_X é a função de densidade de probabilidade, tendo as propriedades de que

- a) $p_X(x) \geq 0$ e
- b) $\int_{-\infty}^{+\infty} p_X(x) \cdot dx = 1$.

As propriedades da função de distribuição acumulada são

- a) $\lim_{x \rightarrow -\infty} (\mathcal{P}_{\leq, X}(x)) = 0$;
- b) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\mathcal{P}_{\leq, X}(x)) = 1$ e
- c) $\mathcal{P}_{\leq, X}$ é contínua à direita e é não decrescente.

2.2.7 Técnica da transformação de variáveis aleatórias

A técnica da transformação é uma técnica para, a partir da densidade de probabilidade $p_X(x)$ da variável aleatória X , encontrar a densidade de probabilidade $p_Y(y)$ da variável aleatória $Y = g(X)$ que é uma função da variável aleatória X .

2.2.7.1 Transformação integral

Seja a variável aleatória X

$$\Omega \ni \omega \mapsto X(\omega) \in \mathbb{R}$$

E seja a variável aleatória U , dada por

$$U := \mathcal{P}_{\leq, X}(X) \Leftrightarrow X = \mathcal{P}_{\leq, X}^{-1}(U)$$

Sendo $\mathcal{P}_{\leq, X}$ a função acumulada de probabilidade da variável aleatória X .

A função acumulada de probabilidade possui as seguintes propriedades:

$$\left\{ \begin{array}{l} \lim_{X \rightarrow -\infty} (\mathcal{P}_{\leq, X}(X)) = 0 \\ \lim_{X \rightarrow +\infty} (\mathcal{P}_{\leq, X}(X)) = 1 \end{array} \right\} \Rightarrow U \in \{u \in \mathbb{R}: 0 \leq u \leq 1\}$$

Ou seja, os valores que a variável aleatória U pode assumir são os pertencentes ao intervalo fechado dos números reais maiores ou iguais a 0 e menores ou iguais a 1.

Calculando a função de probabilidade acumulada de U , tem-se:

$$\mathcal{P}_{\leq, U}(U) = \mathcal{P}_{\leq, \mathcal{P}_{\leq, X}(X)}(U) = \mathcal{P}_{\leq, \mathcal{P}_{\leq, X}^{-1}(\mathcal{P}_{\leq, X}(X))}(\mathcal{P}_{\leq, X}^{-1}(U)) = \mathcal{P}_{\leq, X}(\mathcal{P}_{\leq, X}^{-1}(U)) = U$$

Portanto, a transformação da variável aleatória $U := \mathcal{P}_{\leq, X}(X)$ leva a uma função acumulada de probabilidade da variável aleatória U igual a função acumulada de probabilidade da distribuição uniforme

$$\mathcal{P}_{\leq, \mathcal{P}_{\leq, X}(X)}(u) = \mathcal{P}_{\leq, \text{"Unif."}}(u)$$

2.2.7.2 Transformação de variáveis aleatórias contínuas

Seja a variável aleatória X

$$\Omega \ni \omega \mapsto X(\omega) \in \mathbb{R}$$

E seja a função biunívoca (para que haja a sua inversa)

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbb{R} \ni x \mapsto f(x) \in \mathbb{R} \\ (\forall u \in \mathbb{R})(\forall v \in \mathbb{R}) \left((u \neq v) \Leftrightarrow (f(u) \neq f(v)) \right) \end{array} \right\}$$

E seja a variável aleatória Y , definida por:

$$Y := f(X) \Leftrightarrow X = f^{-1}(Y)$$

Sendo f uma função biunívoca.

Calculando a probabilidade acumulada de Y

$$\mathcal{P}_{\leq, X}(x) = \int_{X \rightarrow -\infty}^{X=x} (\mathcal{P}_X(X)) \cdot dX = \int_{Y \rightarrow \lim_{X \rightarrow -\infty} (f(X))}^{Y=f(x)} (\mathcal{P}_X(f^{-1}(Y))) \cdot \frac{df^{-1}(Y)}{dY} \cdot dY$$

Dois casos devem ser considerados:

- a) A função f é decrescente $(\forall u \in \mathbb{R})(\forall v \in \mathbb{R}) \left((u < v) \Leftrightarrow (f(u) > f(v)) \right)$ e contínua, neste caso $\frac{df^{-1}(Y)}{dY} \in \mathbb{R}_-$, como \mathcal{P}_Y é

uma função de densidade de probabilidade, então é não negativo $(\forall \omega \in \Omega)(p_X(f^{-1}(Y)) \in \mathbb{R}_+)$, portanto, o produto é não positivo $(p_X(f^{-1}(Y))) \cdot \frac{df^{-1}(Y)}{dY} \in \mathbb{R}_-$, ou seja, apresentado uma contradição à definição de função densidade de probabilidade.

- b) A função f é crescente $(\forall u \in \mathbb{R})(\forall v \in \mathbb{R})((u < v) \Leftrightarrow (f(u) < f(v)))$ e contínua, neste caso $\frac{df^{-1}(Y)}{dY} \in \mathbb{R}_+$, como p_Y é uma função densidade de probabilidade, então é não negativo $(\forall \omega \in \Omega)(p_X(f^{-1}(Y)) \in \mathbb{R}_+)$, portanto, o produto é não negativo $(p_X(f^{-1}(Y))) \cdot \frac{df^{-1}(Y)}{dY} \in \mathbb{R}_+$, ou seja, não apresenta contradição à definição de função densidade de probabilidade.

Supondo o caso em que a função f é decrescente, tem-se:

$$\begin{aligned} & (\forall u \in \mathbb{R})(\forall v \in \mathbb{R})((u < v) \Leftrightarrow (f(u) > f(v))) \Rightarrow \\ & \Rightarrow \left(\left(\lim_{X \rightarrow -\infty} (X) < x \right) \Leftrightarrow \left(\lim_{X \rightarrow -\infty} (f(X)) > f(x) \right) \right) \end{aligned}$$

Ou seja, o limite inferior da integral em Y é maior que o limite superior, além disso, $\frac{df^{-1}(Y)}{dY} \in \mathbb{R}_-$, portanto,

$$\begin{aligned}
\mathcal{P}_{\leq, X}(x) &= \int_{Y = \lim_{X \rightarrow -\infty} (f(X))}^{Y=f(x)} \underbrace{\left(\varphi_X(f^{-1}(Y)) \right) \cdot \frac{df^{-1}(Y)}{dY}}_{\in \mathbb{R}_-} \cdot dY = \\
&= - \int_{Y=f(x)}^{Y = \lim_{X \rightarrow -\infty} (f(X))} \left(\varphi_X(f^{-1}(Y)) \right) \cdot \frac{df^{-1}(Y)}{dY} \cdot dY = \\
&= \int_{Y=f(x)}^{Y = \lim_{X \rightarrow -\infty} (f(X))} \underbrace{\left(\varphi_X(f^{-1}(Y)) \right) \cdot \left(-\frac{df^{-1}(Y)}{dY} \right)}_{\in \mathbb{R}_+} \cdot dY
\end{aligned}$$

Observa-se que agora o limite inferior $Y = f(x)$ da integral em Y é menor que o limite superior $Y = \lim_{X \rightarrow -\infty} (f(X))$ e que o integrando é não negativo $\left(\varphi_X(f^{-1}(Y)) \right) \cdot \left(-\frac{df^{-1}(Y)}{dY} \right) \in \mathbb{R}_+$.

Supondo o caso em que a função f é crescente, tem-se

$$\begin{aligned}
&(\forall u \in \mathbb{R})(\forall v \in \mathbb{R}) \left((u < v) \Leftrightarrow (f(u) > f(v)) \right) \Rightarrow \\
&\Rightarrow \left(\left(\lim_{X \rightarrow -\infty} (X) < x \right) \Leftrightarrow \left(\lim_{X \rightarrow -\infty} (f(X)) < f(x) \right) \right)
\end{aligned}$$

Ou seja, o limite inferior da integral em Y é menor que o limite superior, além disso, $\frac{df^{-1}(Y)}{dY} \in \mathbb{R}_+$, portanto,

$$\mathcal{P}_{\leq, X}(x) = \int_{Y = \lim_{X \rightarrow -\infty} (f(X))}^{Y=f(x)} \underbrace{\left(\varphi_X(f^{-1}(Y)) \right) \cdot \frac{df^{-1}(Y)}{dY}}_{\in \mathbb{R}_+} \cdot dY$$

Observe que

$$\left| \frac{df^{-1}(Y)}{dY} \right| = \begin{cases} -\frac{df^{-1}(Y)}{dY} \leftarrow \frac{df^{-1}(Y)}{dY} \in \mathbb{R}_{*,-} \\ \frac{df^{-1}(Y)}{dY} \leftarrow \frac{df^{-1}(Y)}{dY} \in \mathbb{R}_+ \end{cases}$$

Portanto, a função densidade de probabilidade da variável aleatória Y pode ser escrita como:

$$p_Y(Y) = p_X(f^{-1}(Y)) \cdot \left| \frac{df^{-1}(Y)}{dY} \right|$$

E o intervalo de integração será:

$$X \in \{u \in \mathbb{R}: u \leq x\} \Leftrightarrow Y \in \{u \in \mathbb{R}: \text{mín}(\{f(x), \lim_{X \rightarrow -\infty} (f(X))\}) \leq u \leq \text{máx}(\{f(x), \lim_{X \rightarrow -\infty} (f(X))\})\}$$

Portanto,

$$\begin{aligned} & \int_{X \in \{x \in \mathbb{R}: a < x < b\}} (p_X(X)) \cdot dX = \\ & = \int_{Y \in \{y \in \mathbb{R}: \text{mín}(\{f(a), f(b)\}) < y < \text{máx}(\{f(a), f(b)\})\}} \left(p_X(f^{-1}(Y)) \cdot \left| \frac{df^{-1}(Y)}{dY} \right| \right) \cdot dY \end{aligned}$$

2.3 Sistemas quânticos correlacionados

Nesta seção, será descrito os experimentos quânticos em que há uma determinada quantidade física correlacionada e em que configurações podem-se encontrar esses experimentos. As diferentes configurações são usadas na

literatura para se obter os dados que são usadas nas fórmulas relacionadas às “variáveis ocultas” (variáveis aleatórias).

2.3.1 O experimento com spin dos elétrons e o experimento com polarização dos fótons

O experimento consiste de uma fonte de partículas, de um aparato que servirá para separar partículas que possuam uma determinada medida (de certa grandeza física das partículas) das que possuam outra medida (da mesma grandeza física) e de um detector, para detectar as partículas que passaram pelo aparato (que detectará qual a medida assumida pela grandeza na partícula).

Há dois tipos de experimentos:

- a) O experimento com fonte de elétrons, que emite um conjunto de elétrons. Cada elétron possui a quantidade física spin, correlacionada com a quantidade física spin do(s) outro(s) elétron(s). Cada elétron emitido passa por um campo magnético não homogêneo (cuja intensidade ou aumenta, ou diminui, no sentido do campo gerado pelo aparato, porém não se modifica com o passar do tempo) produzido pelo aparato de Stern-Gerlach. Ao passar pelo campo magnético, cada elétron tem uma probabilidade de ser atraído ou repelido, dependendo do sentido de seu spin e do sentido do campo magnético, causando um desvio na trajetória do elétron ao passar pelo aparato (um desvio no sentido do campo magnético ou um desvio no sentido oposto do campo magnético). Os desvios, ou seja, as trajetórias dos elétrons ficam concentradas em duas regiões do espaço. Portanto, a correlação entre as quantidades físicas spin de cada elétron do conjunto emitido, é inferido a partir dos desvios de

cada elétron. Assim, para o caso de emissão de pares de elétrons, a partir de uma amostra, infere-se:

- Se, para a maioria das emissões de pares de elétrons, em cada par ambos se desviam no sentido do campo (ou ambos se desviam no sentido contrário), diz-se que os elétrons têm a quantidade física spin positivamente correlacionados;
 - Se, para a maioria das emissões de pares de elétrons, em cada par um elétron se desvia no sentido do campo e o outro elétron se desvia no sentido contrário, diz-se que os elétrons têm a quantidade física spin negativamente correlacionados;
 - Se, para a metade das emissões de pares de elétrons, em cada par um elétron se desvia no sentido do campo e o outro elétron se desvia no sentido contrário e, na outra metade das emissões de pares de elétrons, em cada par, ambos se desviam no sentido do campo (ou ambos se desviam no sentido contrário), diz-se que os elétrons têm a quantidade física spin não correlacionados (ou com correlação nula).
- b) Experimento com fonte de fótons emite um conjunto de fótons. Cada fóton possui a quantidade física de polarização de seu campo elétrico, que é correlacionada com a quantidade física de polarização do(s) campo(s) elétrico(s) do(s) outro(s) fóton(s) e, cada fóton passa por um polarizador. Ao passar pelo polarizador, cada fóton tem uma probabilidade de ser absorvido ou de passar, dependendo do sentido da polarização de seu campo elétrico e do sentido da polarização do polarizador, causando a absorção do fóton ao passar pelo polarizador ou a passagem direta. Assim, têm-se duas trajetórias, uma se finda no polarizador e a outra continua através dele. Portanto, a correlação entre as quantidades físicas de polarização do campo elétrico de cada

conjunto de fótons emitidos é inferida a partir das absorções (ou passagens) de cada fóton. Dessa maneira, a partir de uma amostra de pares de fótons infere-se:

- Se, para a maioria das emissões de pares de fótons, em cada par, ambos os fótons são absorvidos pelo polarizador (ou passam direto pelo polarizador), diz-se que possuem a quantidade física de polarização de seus campos elétricos positivamente correlacionados;
- Se, para a maioria das emissões de pares de fótons, em cada par, um dos fótons é absorvido pelo polarizador e o outro passa direto pelo polarizador, diz-se que possuem a quantidade física de polarização de seus campos elétricos negativamente correlacionados;
- Se, para a metade das emissões de pares de fótons, em cada par um dos fótons é absorvido pelo polarizador e o outro passa direto pelo polarizador, e para a outra metade das emissões de pares de fótons, em cada par, ambos os fótons são absorvidos pelo polarizador (ou passam direto pelo polarizador), diz-se que possuem a quantidade física de polarização de seus campos elétricos não correlacionados (ou com correlação nula).

Assim, resumindo, em cada experimento há:

- a) Uma fonte de
 - Elétrons e ;
 - Fótons.
- b) Uma quantidade física para cada tipo de experimento:
 - Spin dos elétrons e ;

- Polarização dos fótons.
- c) Um aparato para cada tipo de experimento:
 - Aparato de Stern-Gerlach que gera um campo magnético não homogêneo (cuja intensidade ou aumenta, ou diminui, no sentido do campo gerado pelo aparato). O elétron ao passar pelo campo magnético tem uma probabilidade de ser atraído ou repellido, dependendo do sentido de seu spin e do sentido do campo magnético;
 - Polarizador, feito de um cristal que absorve com certa probabilidade o fóton cuja polarização (direção da oscilação do campo elétrico da luz) seja perpendicular à do polarizador e que permite a passagem do fóton cuja polarização é paralela à do polarizador.

A detecção pode ser feita através de um filme fotográfico, na qual o fóton, ou o elétron, ao se chocar, deixa uma impressão no local do choque, permitindo concluir se a partícula passou (ou não) ou se desviou por um trajeto ou pelo outro.

2.3.1.1 As configurações do experimento com elétrons

O experimento com elétrons pode ser disposto em quatro configurações possíveis:

- a) A fonte emite um elétron por vez, que atravessa um aparato de Stern-Gerlach no trajeto e colide com um detector;

- b) A fonte emite dois elétrons por vez, que atravessam, cada um, um aparato de Stern-Gerlach em seus respectivos trajetos e colidem, cada um, com um detector;
- c) A fonte emite um elétron por vez, que atravessa uma sequência de aparatos de Stern-Gerlach dispostos:
- em todos os seus trajetos possíveis e;
 - em apenas um trajeto.
- d) A fonte emite dois elétrons por vez, que atravessam, cada um, uma sequência de aparatos de Stern-Gerlach dispostos:
- em todos os seus trajetos possíveis e;
 - em apenas um trajeto.

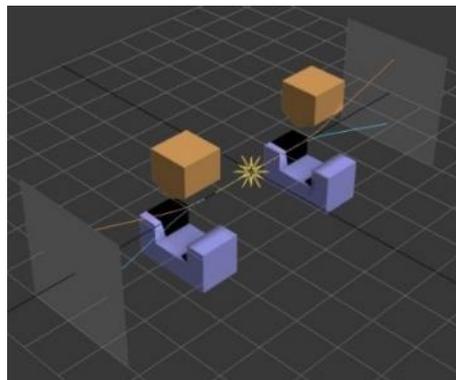


Figura 1 Fonte de elétrons (amarelo) no centro com dois aparatos (vermelho e azul) que geram campo magnético em que os elétrons irão se desviar em uma das trajetórias (linhas) e colidir com um detector (plano cinza)

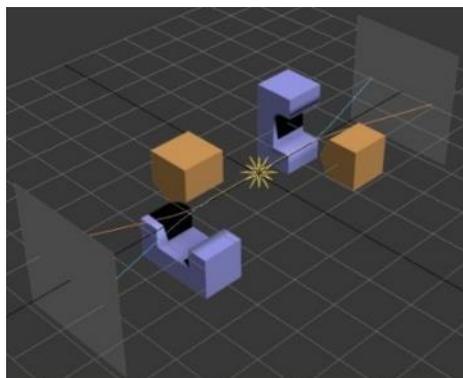


Figura 2 Dois aparatos de Stern-Gerlach: um orientado na vertical (esquerda) e o outro na horizontal (direita)

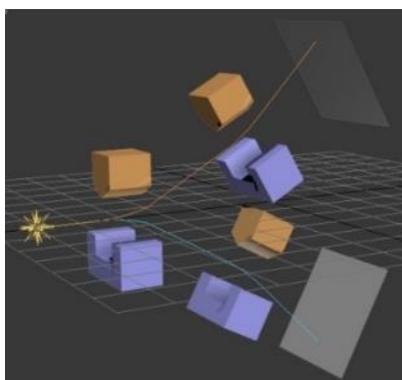


Figura 3 Após o elétron passar pelo primeiro aparato (esq.), se desvia para uma das trajetórias (linhas). Ao se desviar para cima, passa pelo segundo aparato (alinhado com o primeiro) e se desvia para cima (como antes). Caso análogo ocorre quando se desvia para baixo

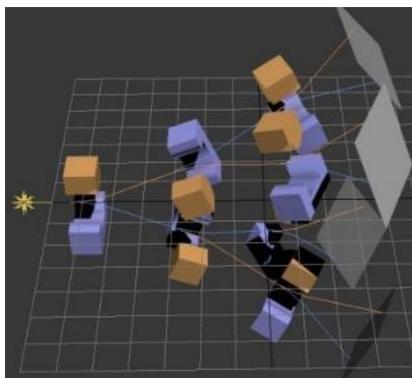


Figura 4 Sequência de aparatos: ao passar pelo primeiro, se desvia para um dos dois caminhos que levarão a dois aparatos, cada um produzindo um desvio para um dos dois caminhos novos (totalizando até agora quatro) que passarão por mais quatro aparatos, cada um produzindo um desvio para um dos dois caminhos, totalizando assim oito caminhos possíveis para o elétron

2.3.1.2 As configurações do experimento com fótons

O experimento com fótons possui quatro configurações possíveis:

- a) A fonte emite um fóton por vez que atravessa um polarizador no trajeto e colide com um detector;
- b) A fonte emite dois fótons por vez que atravessam, cada um, um polarizador em seus respectivos trajetos e colidem, cada um, com um detector;
- c) A fonte emite um fóton por vez que atravessa uma sequência de polarizadores;
- d) A fonte emite dois fótons por vez que atravessam, cada um, uma sequência de polarizadores.

Para entender como o fóton interage com o polarizador, considere a seguinte analogia, em que um indivíduo que esteja segurando uma extremidade

de uma corda, que passa por três cercados e cuja outra extremidade encontra-se amarrada em uma pilastra. Ao girar a corda, o movimento propaga-se pela corda até atingir o primeiro cercado. O primeiro cercado possui tábuas dispostas verticalmente, portanto, a corda só possui a liberdade de movimento vertical, ao passar pelo cercado, desta forma, do cercado em diante, a corda movimentar-se-á verticalmente. O segundo cercado também possui tábuas dispostas verticalmente e como a corda está se movimentando verticalmente (todo movimento horizontal foi absorvido), todo movimento gerado a partir do primeiro cercado irá passar livremente pelo segundo. Agora suponha que o terceiro cercado tenha tábuas dispostas horizontalmente, então não passará movimento algum, pois toda componente horizontal do movimento foi anulado na passagem pelo primeiro cercado.

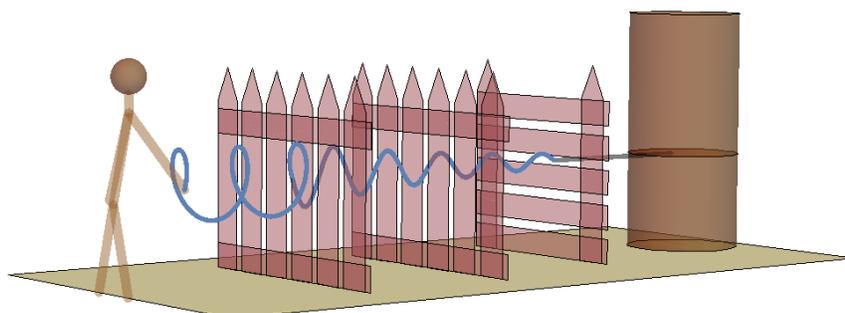


Figura 5 Analogia para entender a passagem do fóton (análogo à corda) por um polarizador (análogo aos cercados), como a polarização (vibração do campo elétrico) responde¹

A analogia funciona bem quando se tem uma população grande de fótons passando pelo polarizador. Porém, quando se tem um fóton por vez

¹ Esta figura foi retirada do site da Wolfram (<http://demonstrations.wolfram.com/UnderstandingPolarizationWithAnAnalogy/>), e pode ser animado com o auxílio do programa Wolfram CDF Player, de distribuição gratuita pelo site da própria Wolfram (<http://demonstrations.wolfram.com/download-cdf-player.html>).

passando pelo polarizador, não se pode dividir o fóton em duas componentes e interpretar que uma parte do fóton passa e outra é absorvida, pois o fóton é uma partícula, ou ele passa por inteiro ou é absorvido por inteiro. Deste dilema surge a interpretação estatística de que a polarização do fóton e a orientação do polarizador influenciam na probabilidade do fóton passar. Mais adiante a função de probabilidade será apresentada.

2.3.1.3 Espaço amostral

O espaço amostral compreende os resultados possíveis ao se realizar o experimento. No experimento, o espaço amostral trata-se de dois elementos (resultados do experimento):

- a) O resultado em que a partícula se desvia para um dos dois trajetos possíveis;
- b) O resultado em que a partícula se desvia para o outro trajeto.

Na desigualdade de Leggett, surge mais uma medida, além do desvio no trajeto da partícula, que pode ser examinada no experimento: a orientação da propriedade medida na partícula, que influencia em seu desvio. Nesse caso, será considerada a possibilidade de ocorrer qualquer um dos valores pertencentes ao intervalo $\{r \in \mathbb{R}: 0 \leq r < 2 \cdot \pi\}$, que representa o ângulo, em radianos, relacionado à orientação de tal propriedade, que no caso do fóton é a polarização, no caso do elétron é o spin.

Assim, só existem dois resultados possíveis quanto ao trajeto tomado pela partícula ao interagir com o aparato, mas quanto à orientação atribuída à propriedade em questão, os resultados pertencem a um conjunto com infinitos valores não enumeráveis.

2.3.1.4 Variáveis aleatórias

A variável aleatória que será associada à detecção da partícula j será a variável Z_j , com valores pertencentes ao conjunto $\{-1, +1\}$ (-1 para o desvio da partícula, ao passar pelo aparato, para um dos caminhos e, +1 para quando se desviar para o outro caminho).

$$Z_j \in \{-1, +1\}.$$

A multiplicação de Z_j com Z_k será denominado por $M_{j,k}$, cujos valores são:

$$M_{j,k} := Z_j \cdot Z_k \in \{-1, +1\}$$

$$M_{j,j} = Z_j^2 = 1.$$

Para o par de variáveis aleatórias $\check{Z}_{j,k} := (Z_j, Z_k)$, os valores assumidos são:

$$\check{Z}_{j,k} \in \{(-1, -1), (-1, +1), (+1, -1), (+1, +1)\}.$$

Denominando os seguintes conjuntos da seguinte forma:

$$C := \{(-1, -1), (+1, +1)\}, \quad \bar{C} := \{(-1, +1), (+1, -1)\}.$$

Tem-se que o conjunto denominado por C , trata-se do evento em que há concordância entre as medidas do par de partículas e, o conjunto denominado por \bar{C} , trata-se do evento em que há discordância.

O parâmetro do experimento será representado pela variável θ_j , com valores reais entre 0 e $2 \cdot \pi$

$$\theta_j \in \{u \in \mathbb{R}: 0 \leq u < 2 \cdot \pi\}$$

2.3.1.5 Probabilidade conjunta

A probabilidade conjunta de partículas correlacionadas positivamente é dada por:

$$\mathcal{P}_{Z_j, Z_k}(Z_j, Z_k) = \begin{cases} \frac{\cos^2(\bar{\theta}_{j,k})}{2} \Leftarrow (Z_j, Z_k) \in C \\ \frac{\sin^2(\bar{\theta}_{j,k})}{2} \Leftarrow (Z_j, Z_k) \in \bar{C} \end{cases}, \quad \bar{\theta}_{j,k} := \theta_k - \theta_j$$

E a probabilidade conjunta de partículas correlacionadas negativamente é dada por:

$$\mathcal{P}_{Z_j, Z_k}(Z_j, Z_k) = \begin{cases} \frac{\cos^2(\bar{\theta}_{j,k})}{2} \Leftarrow (Z_j, Z_k) \in \bar{C} \\ \frac{\sin^2(\bar{\theta}_{j,k})}{2} \Leftarrow (Z_j, Z_k) \in C \end{cases}, \quad \bar{\theta}_{j,k} := \theta_k - \theta_j$$

Portanto, a probabilidade depende da diferença entre os parâmetros e, devido às propriedades das funções trigonométricas ($\cos(-u) = \cos(u)$ e $\sin(-u) = -\sin(u)$), e ao fato de ambas estarem elevadas ao quadrado, tem-se que se substituirmos $(\theta_k - \theta_j)$ por $(\theta_j - \theta_k)$ na função de probabilidade, o resultado seria o mesmo.

Fazendo uso das identidades trigonométricas:

$$\cos^2(a) = \frac{1 + \cos(2 \cdot a)}{2}, \quad \sin^2(a) = \frac{1 - \cos(2 \cdot a)}{2}$$

Tem-se que para partículas positivamente correlacionadas, a função de probabilidade pode ser reescrita como:

$$\mathcal{P}_{Z_j, k; \theta_{j, k}}(Z_j, Z_k; \theta_{j, k}) = \begin{cases} \frac{\cos^2(\bar{\theta}_{j, k})}{2} = \frac{1 + \cos(2 \cdot \bar{\theta}_{j, k})}{4} \Leftarrow (Z_j, Z_k) \in C \\ \frac{\sin^2(\bar{\theta}_{j, k})}{2} = \frac{1 - \cos(2 \cdot \bar{\theta}_{j, k})}{4} \Leftarrow (Z_j, Z_k) \in \bar{C} \end{cases}$$

E para partículas negativamente correlacionadas, tem-se que:

$$\mathcal{P}_{Z_j, k; \theta_{j, k}}(Z_j, Z_k; \theta_{j, k}) = \begin{cases} \frac{\sin^2(\bar{\theta}_{j, k})}{2} = \frac{1 - \cos(2 \cdot \bar{\theta}_{j, k})}{4} \Leftarrow (Z_j, Z_k) \in C \\ \frac{\cos^2(\bar{\theta}_{j, k})}{2} = \frac{1 + \cos(2 \cdot \bar{\theta}_{j, k})}{4} \Leftarrow (Z_j, Z_k) \in \bar{C} \end{cases}$$

Em ambos os casos, observa-se que quaisquer que sejam os valores do par (Z_j, Z_k) , a função de probabilidade é uma função periódica para o parâmetro $\bar{\theta}_{j, k}$, com período igual a π . Tal período faz sentido, uma vez que, por exemplo, dizer que um fóton tem sua polarização orientada de θ é igual à polarização orientada de $(\theta \pm \pi)$, da mesma forma com relação ao spin do elétron (tomando o cuidado de lembrar que o parâmetro é dividido por dois).

Tanto no caso em que há partículas com suas propriedades físicas positivamente correlacionadas, como no caso em que são negativamente relacionadas, podem ser usadas para demonstrar como que se obteve as violações presentes em trabalhos encontrados na literatura de Mecânica Quântica sobre variáveis ocultas.

Assim, pode-se escolher apenas o caso em que são negativamente correlacionados, mesmo porque, basta uma transformação simples de variáveis aleatórias para se passar de um caso para o outro.

Tal transformação se dá apenas trocando uma das variáveis aleatórias pelo seu oposto aditivo, por exemplo: escolhendo-se a variável aleatória Z_k para a transformação, basta trocá-la por $(-Z_k)$ e realizar o restante do procedimento, que pode ser encontrado na literatura de Teoria da Probabilidade. Outra forma é através de uma nova parametrização, trocando $\bar{\theta}_{j,k}$ por $(\frac{\pi}{2} - \bar{\theta}_{j,k})$, obtém-se também os mesmos resultados obtidos pela transformação das variáveis aleatórias.

2.3.1.6 Probabilidade marginal

A probabilidade marginal de Z_j é obtida somando-se as probabilidades de cada valor de Z_k , para cada valor de Z_j

$$\mathcal{P}_{Z_j}(Z_j) = \sum_{Z_k \in \{-1, +1\}} \left(\mathcal{P}_{Z_{j,k}}(Z_j, Z_k) \right) = \begin{cases} \frac{\cos^2(\bar{\theta}_{j,k})}{2} + \frac{\sin^2(\bar{\theta}_{j,k})}{2} \Leftarrow Z_j = -1 \\ \frac{\sin^2(\bar{\theta}_{j,k})}{2} + \frac{\cos^2(\bar{\theta}_{j,k})}{2} \Leftarrow Z_j = +1 \end{cases}$$

Usando a identidade trigonométrica $(\cos^2(u) + \sin^2(u) = 1)$, tem-se:

$$\mathcal{P}_{Z_j}(Z_j) = \frac{1}{2}, \quad Z_j \in \{-1, +1\}$$

Portanto a probabilidade de qualquer uma das partículas (pertencentes ao par) é equiprovável, ou seja, não depende de parâmetro nenhum, é um valor constante e é o mesmo valor para qualquer valor da variável aleatória Z_j .

2.4 Teoria das variáveis ocultas na Mecânica Quântica

A seguir serão apresentadas as desigualdades presentes na literatura, cujas aplicações feitas, têm levado a conclusões de que a Teoria da Probabilidade não é suficiente para os sistemas quânticos emaranhados.

Inicialmente, serão demonstradas as desigualdades, para após serem apresentadas as aplicações. As demonstrações baseiam-se apenas na Teoria da Probabilidade, já as aplicações feitas das desigualdades, levam em conta os sistemas quânticos.

2.4.1 Desigualdade de Wigner

A desigualdade de Wigner é uma desigualdade envolvendo apenas a função de probabilidade, dependente de três ou mais variáveis aleatórias. Assim, os valores das variáveis aleatórias, não influenciam na desigualdade, apenas há a influência dos eventos escolhidos. Portanto, não importa se a dois eventos são associados valores 0 e 1, ou se são associados valores -1 e $+1$, apenas importa as probabilidades de cada evento. Assim, o enunciado da desigualdade de Wigner não possui nenhuma consideração sobre quais os valores assumidos pelas variáveis aleatórias.

Teorema: *Considere uma função de probabilidade de três variáveis aleatórias, tem-se a desigualdade de Wigner:*

$$\mathcal{P}_{\tilde{W}}(w_1, w_2, W_3(\Omega_3)) + \mathcal{P}_{\tilde{W}}(W_1(\Omega_1), \bar{w}_2, w_3) - \mathcal{P}_{\tilde{W}}(w_1, W_2(\Omega_2), w_3) \geq 0$$

Em que

$$\tilde{W} := (W_1, W_2, W_3), \quad \bar{w}_j := C_{W_j(\Omega_j)}(w_j), \quad W_j(\Omega_j) := \text{Im}(W_j)$$

Demonstração: A demonstração consiste apenas em somar funções de probabilidade de três variáveis aleatórias, de forma a obter marginais de duas variáveis aleatórias, somando-se a probabilidade de um evento w_j à probabilidade do evento complementar $C_{W_j(\Omega_j)}(w_j)$.

Considere as variáveis aleatórias:

$$(\forall j \in \{1,2,3\})(\Omega_j \ni \omega \mapsto W_{j,\omega})$$

e os eventos

$$(w_1, w_2, w_3) \in \mathbb{P}(W_1(\Omega_1) \times W_2(\Omega_2) \times W_3(\Omega_3))$$

Ou seja, w_j (com $j \in \{1, 2, 3\}$) é um subconjunto de $W_j(\Omega_j)$ (conjunto imagem de W_j).

Para facilitar a escrita, denominar-se-á:

$$\dot{W}_{j,k} := (W_j, W_k), \quad \ddot{W} := (W_1, W_2, W_3), \quad \bar{w}_j := C_{W_j(\Omega_j)}(w_j)$$

Feitas as considerações iniciais, agora considere as seguintes probabilidades:

$$\mathcal{P}_{\dot{W}_{1,2}}(w_1, w_2) = \mathcal{P}_{\ddot{W}}(w_1, w_2, \bar{w}_3) + \mathcal{P}_{\ddot{W}}(w_1, w_2, w_3)$$

$$\mathcal{P}_{\dot{W}_{2,3}}(\bar{w}_2, w_3) = \mathcal{P}_{\ddot{W}}(w_1, \bar{w}_2, w_3) + \mathcal{P}_{\ddot{W}}(\bar{w}_1, \bar{w}_2, w_3)$$

$$\mathcal{P}_{\dot{W}_{1,3}}(w_1, w_3) = \mathcal{P}_{\ddot{W}}(w_1, w_2, w_3) + \mathcal{P}_{\ddot{W}}(w_1, \bar{w}_2, w_3)$$

Somando as duas primeiras, tem-se a seguinte relação com a terceira:

$$\begin{aligned}
& \mathcal{P}_{\dot{W}_{1,2}}(w_1, w_2) + \mathcal{P}_{\dot{W}_{2,3}}(\bar{w}_2, w_3) = \\
& = \mathcal{P}_{\dot{W}}(w_1, w_2, \bar{w}_3) + \underbrace{\mathcal{P}_{\dot{W}}(w_1, w_2, w_3) + \mathcal{P}_{\dot{W}}(w_1, \bar{w}_2, w_3)}_{=\mathcal{P}_{\dot{W}_{1,3}}(w_1, w_3)} + \mathcal{P}_{\dot{W}}(\bar{w}_1, \bar{w}_2, w_3) = \\
& = \underbrace{\mathcal{P}_{\dot{W}}(w_1, w_2, \bar{w}_3)}_{\geq 0} + \mathcal{P}_{\dot{W}_{1,3}}(w_1, w_3) + \underbrace{\mathcal{P}_{\dot{W}}(\bar{w}_1, \bar{w}_2, w_3)}_{\geq 0} \geq \mathcal{P}_{\dot{W}_{1,3}}(w_1, w_3) \therefore \\
& \therefore \mathcal{P}_{\dot{W}_{1,2}}(w_1, w_2) + \mathcal{P}_{\dot{W}_{2,3}}(\bar{w}_2, w_3) \geq \mathcal{P}_{\dot{W}_{1,3}}(w_1, w_3)
\end{aligned}$$

Assim, surge a desigualdade, pois as duas parcelas subtraídas ($\mathcal{P}_{\dot{W}}(w_1, w_2, \bar{w}_3)$ e $\mathcal{P}_{\dot{W}}(\bar{w}_1, \bar{w}_2, w_3)$) são maiores ou iguais a zero, portanto, retiraram-se duas parcelas não negativas, sendo assim, o resultado será menor ou igual do que seria se as duas parcelas ainda estivessem presentes. Tem-se, portanto, a desigualdade de Wigner:

$$\mathcal{P}_{\dot{W}_{1,2}}(w_1, w_2) + \mathcal{P}_{\dot{W}_{2,3}}(\bar{w}_2, w_3) \geq \mathcal{P}_{\dot{W}_{1,3}}(w_1, w_3).$$

Rearranjando os termos, tem-se:

$$\mathcal{P}_{\dot{W}_{1,2}}(w_1, w_2) + \mathcal{P}_{\dot{W}_{2,3}}(\bar{w}_2, w_3) - \mathcal{P}_{\dot{W}_{1,3}}(w_1, w_3) \geq 0$$

Por questão de notação, definir-se-á o primeiro membro da desigualdade por:

$$\begin{aligned}
& \dagger_{\text{Wigner} \geq 0}((W_1, W_2, W_3), (w_1, w_2, w_3)) := \\
& := \mathcal{P}_{\dot{W}}(w_1, w_2, W_3(\Omega_3)) + \mathcal{P}_{\dot{W}}(W_1(\Omega_1), \bar{w}_2, w_3) - \mathcal{P}_{\dot{W}}(w_1, W_2(\Omega_2), w_3)
\end{aligned}$$

E a fórmula será denominada por:

$$\begin{aligned} \mathfrak{f}^{\text{Wigner} \geq 0^n}((W_1, W_2, W_3), (w_1, w_2, w_3)) &:= \\ &:= (\mathfrak{t}^{\text{Wigner} \geq 0^n}((W_1, W_2, W_3), (w_1, w_2, w_3)) \geq 0) \end{aligned}$$

Na demonstração da desigualdade de Wigner, não é explicitado nenhuma distribuição de probabilidade e não é colocada nenhuma condição, portanto, ela vale para qualquer distribuição de probabilidade dependente de três ou mais variáveis aleatórias.

2.4.2 Desigualdade de Bell

A desigualdade de Bell possui uma condição sobre o conjunto dos valores assumidos pelas variáveis aleatórias, e depende de como a variável aleatória associa esses valores aos eventos (pois leva em consideração valores esperados de produtos de duas variáveis aleatórias). Assim, o enunciado da desigualdade de Bell vem com condições para os valores assumidos pelas variáveis aleatórias.

Teorema (Desigualdade de Bell): *Considere as variáveis aleatórias cujos valores pertencem ao conjunto $\{-1, +1\}$*

$$(\forall j \in \{1,2,3\})(W_j \in \{-1, +1\}),$$

Portanto,

$$\begin{aligned} (\forall j \in \{1,2,3\})(W_j \in \{-1, +1\}) &\Rightarrow \\ \Rightarrow (1 - \mathcal{E}_{\tilde{W}}(W_1 \cdot W_2) - |\mathcal{E}_{\tilde{W}}(W_1 \cdot W_3) - \mathcal{E}_{\tilde{W}}(W_2 \cdot W_3)| &\geq 0) \end{aligned}$$

Em que

$$\tilde{W} := (W_1, W_2, W_3)$$

Demonstração: Considere as seguintes variáveis aleatórias com valores pertencentes ao conjunto $\{-1, +1\}$

$$\underbrace{(\forall j \in \{1,2,3\})(W_j \in \{-1, +1\})}_{\tilde{f}_1 :=}$$

E denominando (apenas para facilitar a escrita)

$$\tilde{W} := (W_1, W_2, W_3)$$

A demonstração parte do cálculo do valor esperado da expressão $W_1 \cdot W_3 - W_2 \cdot W_3$, e da manipulação da expressão da seguinte forma:

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_{\tilde{W}}(W_1 \cdot W_3 - W_2 \cdot W_3) &= \mathcal{E}_{\tilde{W}}((W_1 - W_2) \cdot W_3) \leq \\ &\leq \mathcal{E}_{\tilde{W}}\left(\left(W_1 - \underbrace{W_1^2}_{=1 \cdot \tilde{f}_1} \cdot W_2\right) \cdot W_3\right) = \mathcal{E}_{\tilde{W}}((1 - W_1 \cdot W_2) \cdot W_1 \cdot W_3) \end{aligned}$$

Aplicando o módulo (valor absoluto) na equação anterior e sabendo que $|\sum_x(f(x))| \leq \sum_x(|f(x)|)$, tem-se:

$$\begin{aligned} |\mathcal{E}_{\tilde{W}}(W_1 \cdot W_3 - W_2 \cdot W_3)| &\leq \\ &\leq \sum_{w \in \Omega} (|1 - W_1 \cdot W_2| \cdot |W_1| \cdot |W_3| \cdot |\mathcal{P}_{\tilde{W}}(W_1, W_2, W_3)|) \end{aligned}$$

Considerando a condição \tilde{f}_1 , tem-se:

$$\left\{ \begin{array}{l} |W_1| = 1 \\ |W_3| = 1 \\ \underbrace{|1 - W_1 \cdot W_2|}_{\geq 0} = 1 - W_1 \cdot W_2 \end{array} \right.$$

Considerando o axioma de Kolmogorov, em que a função de probabilidade é maior ou igual a 0, tem-se que:

$$|\mathcal{P}_{\tilde{W}}(W_1, W_2, W_3)| = \mathcal{P}_{\tilde{W}}(W_1, W_2, W_3)$$

Então, substituindo no valor esperado, tem-se a seguinte desigualdade:

$$\begin{aligned} |\mathcal{E}_{\tilde{W}}(W_1 \cdot W_3 - W_2 \cdot W_3)| &\leq \sum_{w \in \Omega} ((1 - W_1 \cdot W_2) \cdot \mathcal{P}_{\tilde{W}}(W_1, W_2, W_3)) = \\ &= 1 - \mathcal{E}_{\tilde{W}}(W_1 \cdot W_2) \end{aligned}$$

Portanto, tem-se a desigualdade de Bell:

$$\tilde{f}_1 \Rightarrow |\mathcal{E}_{\tilde{W}}(W_1 \cdot W_3) - \mathcal{E}_{\tilde{W}}(W_2 \cdot W_3)| \leq 1 - \mathcal{E}_{\tilde{W}}(W_1 \cdot W_2),$$

Ou seja, considerando variáveis aleatórias cujos valores assumidos pertencem ao conjunto $\{-1, +1\}$:

$$(\forall j \in \{1, 2, 3\})(W_j \in \{-1, +1\})$$

Tem-se que a seguinte desigualdade é válida:

$$1 - \mathcal{E}_{\tilde{W}}(W_1 \cdot W_2) - |\mathcal{E}_{\tilde{W}}(W_1 \cdot W_3) - \mathcal{E}_{\tilde{W}}(W_2 \cdot W_3)| \geq 0$$

Resumindo numa única fórmula, tem-se:

$$\begin{aligned}
& (\forall j \in \{1,2,3\})(W_j \in \{-1, +1\}) \Rightarrow \\
& \Rightarrow (1 - \mathcal{E}_{\dot{W}}(W_1 \cdot W_2) - |\mathcal{E}_{\dot{W}}(W_1 \cdot W_3) - \mathcal{E}_{\dot{W}}(W_2 \cdot W_3)| \geq 0)
\end{aligned}$$

Por questão de notação, definir-se-á o primeiro membro da desigualdade por:

$$t_{\text{Bell} \geq 0}(W_1, W_2, W_3) := 1 - \mathcal{E}_{\dot{W}}(W_1 \cdot W_2) - |\mathcal{E}_{\dot{W}}(W_1 \cdot W_3) - \mathcal{E}_{\dot{W}}(W_2 \cdot W_3)|$$

E a fórmula será denominada por:

$$\begin{aligned}
& \check{f}_{\text{Bell} \geq 0}(W_1, W_2, W_3) := \\
& := \left((\forall j \in \{1,2,3\})(W_j \in \{-1, +1\}) \Rightarrow t_{\text{Bell} \geq 0}(W_1, W_2, W_3) \geq 0 \right)
\end{aligned}$$

Na demonstração da desigualdade de Bell, não foi explicitada nenhuma distribuição de probabilidade, a única condição é que as variáveis aleatórias possuam apenas os valores pertencentes ao conjunto $\{-1, +1\}$.

2.4.3 Desigualdade de Clauser-Horne-Shimony-Holt

A desigualdade de Clauser-Horne-Shimony-Holt possui uma condição sobre o conjunto dos valores assumidos pelas variáveis aleatórias, e depende de como as variáveis aleatórias associam valores aos eventos (pois a desigualdade está relacionada a valores esperados de produtos de variáveis aleatórias).

Teorema: *Considere as variáveis aleatórias cujos valores pertencem ao conjunto $\{w \in \mathbb{R}: -1 \leq w \leq 1\}$*

$$(\forall j \in \{1,2,3,4\})(W_j \in \{w \in \mathbb{R}: -1 \leq w \leq 1\})$$

Portanto,

$$\begin{aligned}
 & (\forall j \in \{1,2,3,4\})(|W_j| \leq 1) \Rightarrow \\
 & \Rightarrow (2 - |\mathcal{E}_{\check{W}}(W_1 \cdot W_3) - \mathcal{E}_{\check{W}}(W_1 \cdot W_4) + \mathcal{E}_{\check{W}}(W_2 \cdot W_3) + \mathcal{E}_{\check{W}}(W_2 \cdot W_4)| \geq 0)
 \end{aligned}$$

Demonstração: Sejam as variáveis aleatórias cujos valores pertencem ao conjunto dos números reais, cujos valores absolutos são menores ou iguais a 1 (ou seja, cujos valores são maiores ou iguais a -1 e menores ou iguais a 1)

$$\underbrace{(\forall j \in \{1,2,3,4\})(|W_j| \leq 1)}_{\check{f}_1 :=}$$

E, denominando

$$\check{W} := (W_1, W_2, W_3, W_4)$$

Considere a fórmula seguinte, envolvendo as variáveis aleatórias W_j , com $j \in \{1,2,3,4\}$:

$$\begin{aligned}
 & \underbrace{t_1 = W_1 \cdot (W_3 - W_4) + W_2 \cdot (W_3 + W_4)}_{\check{f}_2 :=} \\
 & t_1 := W_1 \cdot W_3 - W_1 \cdot W_4 + W_2 \cdot W_3 + W_2 \cdot W_4
 \end{aligned}$$

A desigualdade é demonstrada considerando as condições presentes na fórmula \check{f}_1 , no cálculo do valor esperado da expressão t_1 . Para se encontrar a desigualdade, primeiro consideram-se os valores máximo e mínimo que a variável aleatória W_3 pode assumir, conforme a fórmula \check{f}_1

$$\left\{ \begin{array}{l} W_3 - W_4 \leq \underset{w \in \Omega}{\text{máx}}(W_3) - W_4 = +1 - W_4 \\ W_3 + W_4 \leq \underset{w \in \Omega}{\text{máx}}(W_3) + W_4 = +1 + W_4 \\ W_3 - W_4 \geq \underset{w \in \Omega}{\text{mín}}(W_3) - W_4 = -1 - W_4 \\ W_3 + W_4 \geq \underset{w \in \Omega}{\text{mín}}(W_3) + W_4 = -1 + W_4 \end{array} \right\}$$

Agora, verificam-se os valores assumidos pelas expressões obtidas, substituindo os valores máximo e mínimo que a variável aleatória W_4 pode assumir, concluindo que

$$\left\{ \begin{array}{l} +1 - W_4 \geq +1 + \underset{w \in \Omega}{\text{mín}}(-W_4) = +1 - 1 = 0 \\ +1 + W_4 \geq +1 + \underset{w \in \Omega}{\text{mín}}(+W_4) = +1 - 1 = 0 \\ -1 - W_4 \leq -1 + \underset{w \in \Omega}{\text{máx}}(-W_4) = -1 + 1 = 0 \\ -1 + W_4 \leq -1 + \underset{w \in \Omega}{\text{máx}}(+W_4) = -1 + 1 = 0 \end{array} \right\}$$

Conforme as desigualdades obtidas, substituindo na fórmula f_2 , tem-se o limite superior da desigualdade

$$\begin{aligned} W_1 \cdot \underbrace{(W_3 - W_4)}_{\leq 1 - W_4} + W_2 \cdot \underbrace{(W_3 + W_4)}_{\leq 1 + W_4} &\leq \underbrace{W_1}_{\leq 1} \cdot \underbrace{(1 - W_4)}_{\geq 0} + \underbrace{W_2}_{\leq 1} \cdot \underbrace{(1 + W_4)}_{\geq 0} \leq \\ &\leq 1 \cdot (1 - W_4) + 1 \cdot (1 + W_4) = 2 \end{aligned}$$

E o limite inferior da desigualdade:

$$\begin{aligned} W_1 \cdot \underbrace{(W_3 - W_4)}_{\geq -1 - W_4} + W_2 \cdot \underbrace{(W_3 + W_4)}_{\geq -1 + W_4} &\geq \underbrace{W_1}_{\leq 1} \cdot \underbrace{(-1 - W_4)}_{\leq 0} + \underbrace{W_2}_{\leq 1} \cdot \underbrace{(-1 + W_4)}_{\leq 0} \geq \\ &\geq 1 \cdot (-1 - W_4) + 1 \cdot (-1 + W_4) = -2 \end{aligned}$$

Portanto, os limites inferior e superior para a fórmula f_2 , resultam na seguinte desigualdade:

$$-2 \leq W_1 \cdot W_3 - W_1 \cdot W_4 + W_2 \cdot W_3 + W_2 \cdot W_4 \leq 2$$

Calculando o valor esperado de todos os membros da desigualdade, tem-se:

$$\mathcal{E}_{\tilde{W}}(-2) \leq \mathcal{E}_{\tilde{W}}(W_1 \cdot W_3 - W_1 \cdot W_4 + W_2 \cdot W_3 + W_2 \cdot W_4) \leq \mathcal{E}_{\tilde{W}}(2)$$

Assim, obtém-se a desigualdade de Clauser-Horne-Shimony-Holt:

$$-2 \leq \mathcal{E}_{\tilde{W}}(W_1 \cdot W_3) - \mathcal{E}_{\tilde{W}}(W_1 \cdot W_4) + \mathcal{E}_{\tilde{W}}(W_2 \cdot W_3) + \mathcal{E}_{\tilde{W}}(W_2 \cdot W_4) \leq 2$$

Ou seja, escrevendo a desigualdade, juntamente com sua condição de validade, tem-se:

$$\begin{aligned} & (\forall j \in \{1,2,3,4\})(|W_j| \leq 1) \Rightarrow \\ & \Rightarrow (2 - |\mathcal{E}_{\tilde{W}}(W_1 \cdot W_3) - \mathcal{E}_{\tilde{W}}(W_1 \cdot W_4) + \mathcal{E}_{\tilde{W}}(W_2 \cdot W_3) + \mathcal{E}_{\tilde{W}}(W_2 \cdot W_4)| \geq 0) \end{aligned}$$

Denomina-se o primeiro membro da desigualdade por:

$$\begin{aligned} & t_{\text{CHSH} \geq 0}(W_1, W_2, W_3, W_4) := \\ & := 2 - |\mathcal{E}_{\tilde{W}}(W_1 \cdot W_3) - \mathcal{E}_{\tilde{W}}(W_1 \cdot W_4) + \mathcal{E}_{\tilde{W}}(W_2 \cdot W_3) + \mathcal{E}_{\tilde{W}}(W_2 \cdot W_4)| \end{aligned}$$

E denomina-se a fórmula por:

$$\frac{(\forall j \in \{1,2,3,4\})(|W_j| \leq 1) \Rightarrow \mathfrak{I}^{\text{CHSH} \geq 0}(W_1, W_2, W_3, W_4) \geq 0}{\mathfrak{I}^{\text{CHSH} \geq 0}(W_1, W_2, W_3, W_4) :=}$$

Assim, ficará mais fácil se referir tanto à desigualdade, como à expressão, que deve ser maior, ou igual a 0.

Na demonstração da desigualdade de Clauser-Horne-Shimony-Holt, não se explicita nenhuma distribuição de probabilidade, a única condição é que as variáveis aleatórias assumam apenas valores pertencentes ao intervalo $\{w \in \mathbb{R}: -1 \leq w \leq 1\}$.

2.4.4 Aplicação da desigualdade de Wigner

Nesta seção, tem-se a substituição das funções de probabilidade de partículas correlacionadas, diretamente na desigualdade de Wigner, sendo observada nos gráficos, a violação da desigualdade para um determinado conjunto de valores assumidos pelos parâmetros (orientações dos aparatos).

Substituindo na desigualdade de Wigner, dada por:

$$\mathcal{P}_{W_1, W_2}(w_1, w_2) + \mathcal{P}_{W_2, W_3}(C_{W_2(\Omega_2)}(w_2), w_3) - \mathcal{P}_{W_1, W_3}(w_1, w_3) \geq 0$$

Sendo que as funções de probabilidade serão substituídas da seguinte forma:

$$\begin{aligned} \mathcal{P}_{W_1, W_2}(\{z_1\}, \{z_2\}) &:= \mathcal{P}_{Z_1, Z_2}(\{(z_1, z_2)\}; \theta_1, \theta_2) \\ \mathcal{P}_{W_1, W_3}(\{z_1\}, \{z_3\}) &:= \mathcal{P}_{Z_1, Z_3}(\{(z_1, z_3)\}; \theta_1, \theta_3) \\ \mathcal{P}_{W_2, W_3}\left(\underbrace{C_{\{-1, +1\}}(\{z_2\})}_{=\{-z_2\}}, \{z_3\}\right) &:= \mathcal{P}_{Z_2, Z_3}(\{(-z_2, z_3)\}; \theta_2, \theta_3) \end{aligned}$$

Portanto, têm-se três funções de probabilidade, ou seja, serão considerados três pares de partículas, correlacionadas negativamente, com aparatos em configurações distintas (configurações indicadas por $(0, \theta_3)$, (θ_3, θ_2) e $(0, \theta_2)$). Cada um dos z_j (com $j \in \{1, 2, 3\}$) podem assumir dois valores (-1 e $+1$), portanto, o par (z_1, z_2) poderá assumir quatro valores. Sobre z_3 , que ao assumir um dos valores, deixa apenas outro valor para pertencer ao conjunto $C_{\{-1, +1\}}(\{z_3\})$. Portanto, no total são oito os valores que a tripla (z_1, z_2, z_3) assume. Observe que em nenhum momento foi explicitado uma distribuição para três variáveis aleatórias, o que foi feito é substituir as distribuições para duas variáveis aleatórias com diferentes parâmetros.

A desigualdade de Wigner, realizadas as substituições, será da seguinte forma:

$$\begin{aligned} & \mathcal{P}_{z_1, z_2}(\{(z_1, z_2)\}; \theta_1, \theta_2) + \mathcal{P}_{z_2, z_3}(\{(-z_2, z_3)\}; \theta_2, \theta_3) + \\ & - \mathcal{P}_{z_1, z_3}(\{(z_1, z_3)\}; \theta_1, \theta_3) \geq 0 \end{aligned}$$

A probabilidade de partículas correlacionadas negativamente é dada por

$$\mathcal{P}_{z_j, z_k}(\{(z_j, z_k)\}; \theta_j, \theta_k) = \begin{cases} \frac{1}{2} \cdot \text{sen}(\bar{\theta}_{j,k})^2 & \Leftrightarrow (z_j, z_k) \in C \\ \frac{1}{2} \cdot \text{cos}(\bar{\theta}_{j,k})^2 & \Leftrightarrow (z_j, z_k) \in \bar{C} \end{cases}$$

Assim, denominar-se-á o primeiro membro da desigualdade de Wigner, em que se é substituída as funções de probabilidades relacionadas a pares de partículas correlacionadas negativamente por

$$\begin{aligned}
t_1((z_1, z_2, z_3), (\theta_1, \theta_2, \theta_3)) &:= \\
&:= \mathcal{P}_{z_1, z_2}(\{(z_1, z_2)\}; \theta_1, \theta_2) + \mathcal{P}_{z_2, z_3}(\{(-z_2, z_3)\}; \theta_2, \theta_3) + \\
&- \mathcal{P}_{z_1, z_3}(\{(z_1, z_3)\}; \theta_1, \theta_3)
\end{aligned}$$

Para partículas correlacionadas positivamente, a probabilidade é dada por:

$$\mathcal{P}_{z_j, z_k}(\{(z_j, z_k)\}; \theta_j, \theta_k) = \begin{cases} \frac{1}{2} \cdot \cos(\bar{\theta}_{j,k})^2 & \Leftarrow (z_j, z_k) \in C \\ \frac{1}{2} \cdot \text{sen}(\bar{\theta}_{j,k})^2 & \Leftarrow (z_j, z_k) \in \bar{C} \end{cases}$$

Denominando-se, realizadas as substituições, por:

$$\begin{aligned}
t_2((z_1, z_2, z_3), (\theta_1, \theta_2, \theta_3)) &:= \\
&:= \mathcal{P}_{z_1, z_3}(\{(z_1, z_2)\}; \theta_1, \theta_3) + \mathcal{P}_{z_3, z_2}(\{(z_3, z_2)\}; \theta_3, \theta_2) + \\
&- \mathcal{P}_{z_1, z_3}(\{(z_1, z_3)\}; \theta_1, \theta_3)
\end{aligned}$$

A seguir, apresenta-se uma lista de gráficos, tanto para partículas correlacionadas negativamente quanto positivamente, demonstrando que, em ambos os casos, existem regiões em que a desigualdade é violada (cujos valores são menores que 0), quando feita a substituição como é encontrada na literatura.

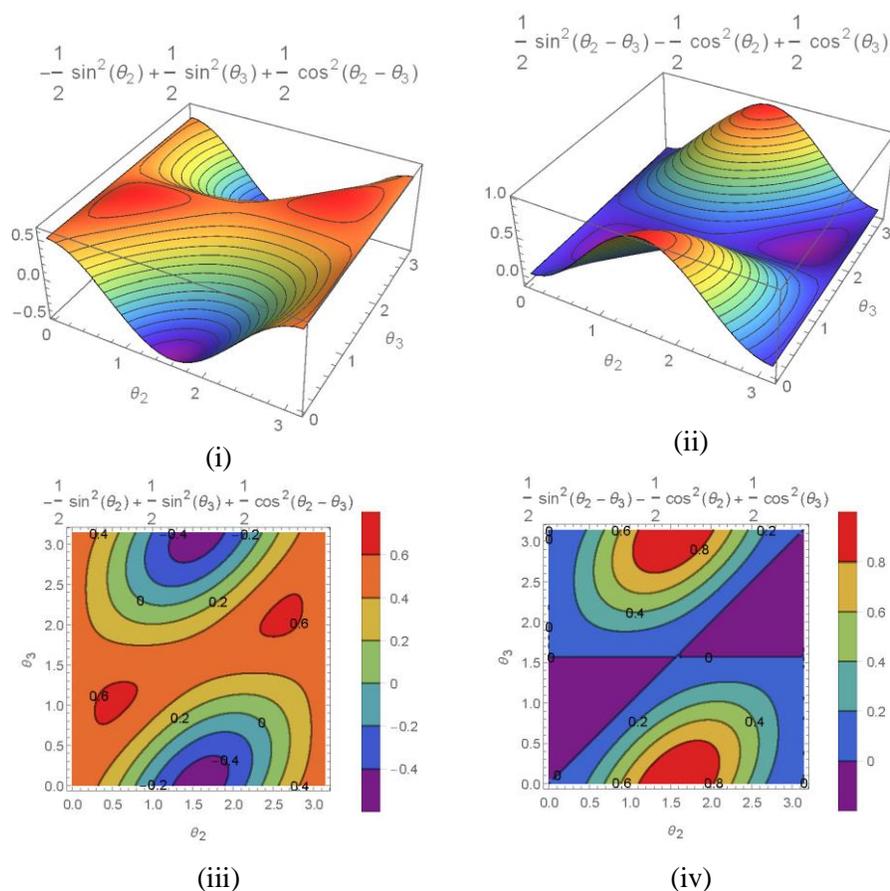


Gráfico 1 Gráficos dos valores assumidos pelo primeiro termo da desigualdade de Wigner para os diferentes parâmetros θ_2 e θ_3 , sendo $\theta_1 = 0$. Sendo que: em (i) e em (iii) estão os gráficos para a correlação negativa $(t_1((z_1, z_2, z_3), (0, \theta_2, \theta_3)))$ com $(z_1, z_2, z_3) = (-1, -1, -1,))$ e em (ii), e (iv), estão os gráficos para a correlação positiva $(t_2((z_1, z_2, z_3), (0, \theta_2, \theta_3)))$ com $(z_1, z_2, z_3) = (-1, -1, -1,))$. Em (i) e (ii), tem-se as superfícies e em (iii) e (iv) tem-se as curvas de níveis. Valores abaixo de 0 são violações da desigualdade

A seguir, apresentam-se duas tabelas com os gráficos de curvas de níveis para todas as combinações de valores de $(z_1, z_2, z_3) \in \{-1, +1\}^3$. A primeira tabela é para partículas negativamente correlacionadas e a segunda é para

partículas positivamente correlacionadas. Observam-se nas tabelas que os gráficos são apenas translações dos gráficos anteriores, portanto, as interpretações são idênticas. Dessa forma, ao substituir as probabilidades de pares de partículas diretamente na desigualdade, têm-se regiões em que, para certos valores dos parâmetros, a desigualdade é violada, qualquer que seja o valor assumido de (z_1, z_2, z_3) .

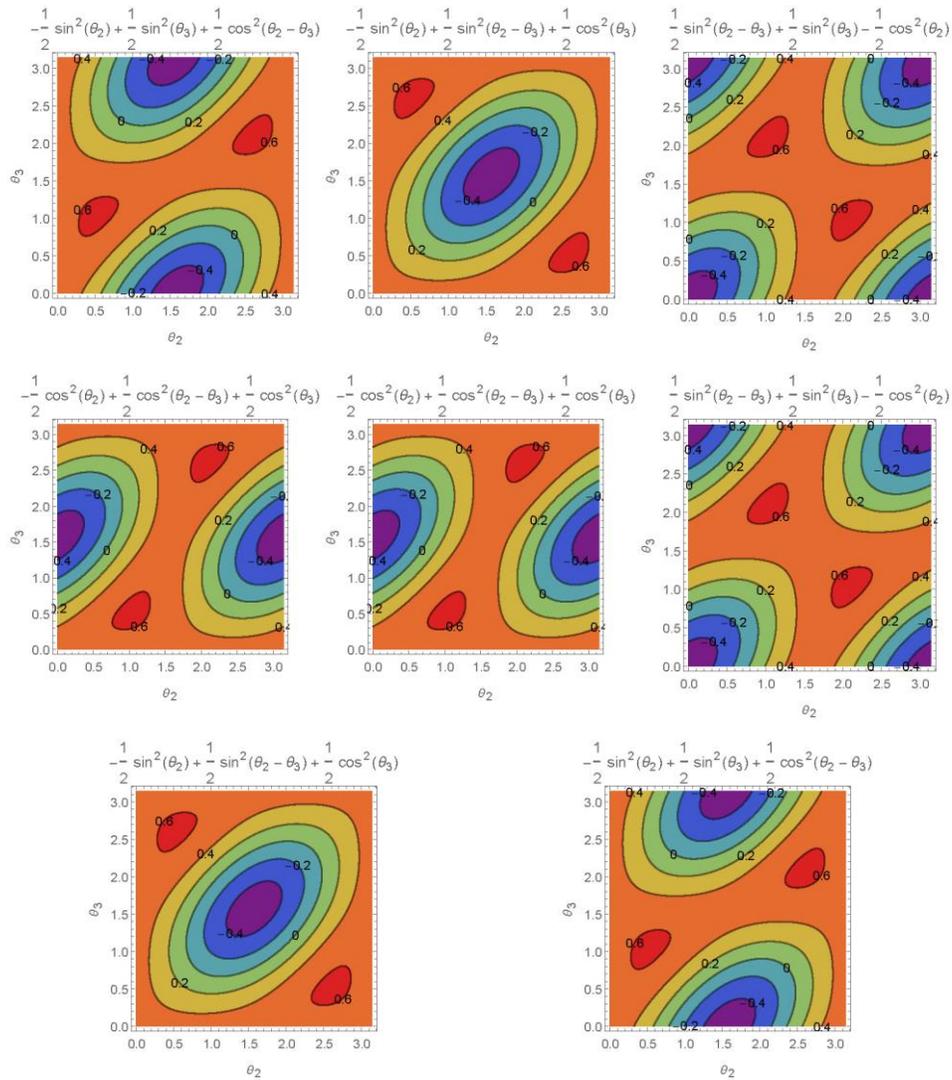


Gráfico 2 Gráficos de curvas de níveis dos valores assumidos pelo primeiro termo da desigualdade de Wigner, para os diferentes parâmetros θ_2 e θ_3 , sendo $\theta_1 = 0$, com correlação negativa $(t_1((z_1, z_2, z_3), (0, \theta_2, \theta_3)))$ para todas as combinações de valores de (z_1, z_2, z_3) . Valores abaixo de 0 são violações da desigualdade

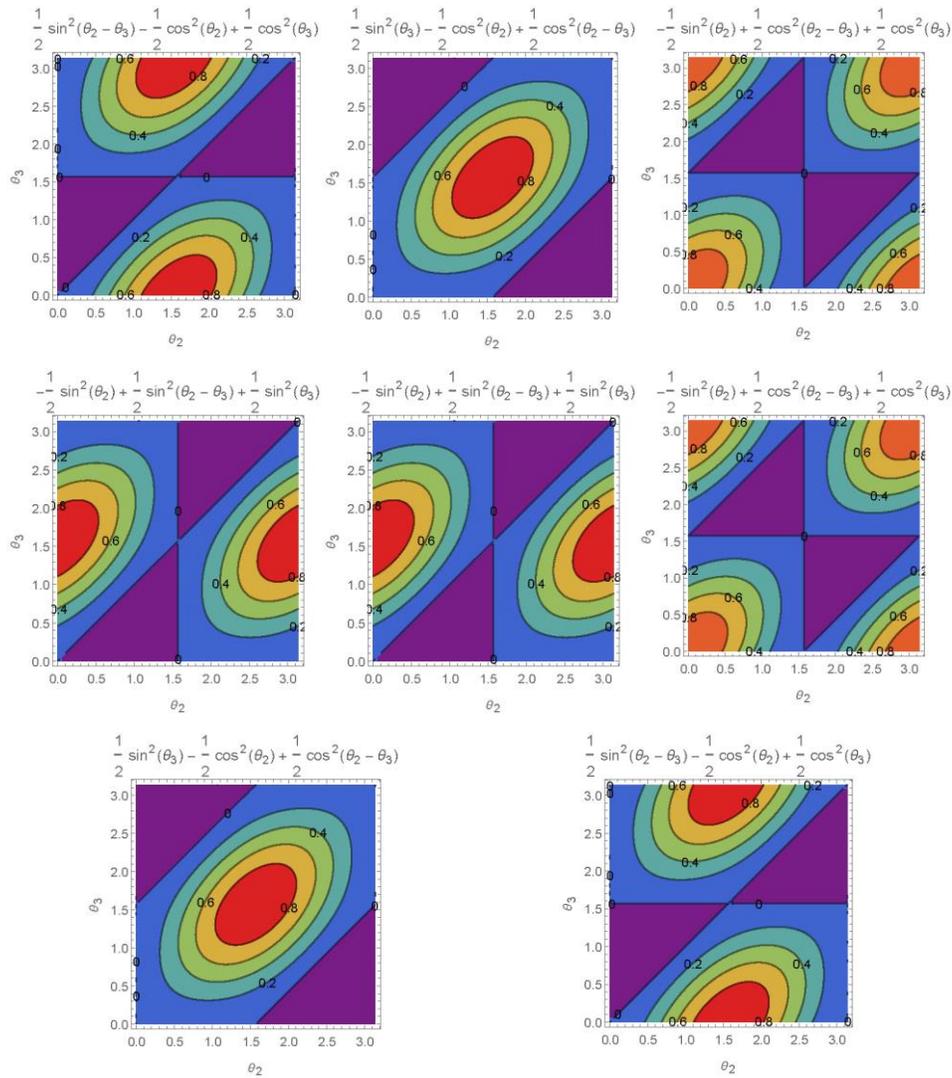


Gráfico 3 Gráficos de curvas de níveis dos valores assumidos pelo primeiro termo da desigualdade de Wigner, para os diferentes parâmetros θ_2 e θ_3 , sendo $\theta_1 = 0$, com correlação positiva ($t_2((z_1, z_2, z_3), (0, \theta_2, \theta_3))$ para todas as combinações de valores de (z_1, z_2, z_3)). Valores abaixo de 0 são violações da desigualdade

Lembrando que, em nenhum momento, foi proposta qualquer função de probabilidade $\mathcal{P}_{\vec{z}}(z_1, z_2, z_3)$, cujas probabilidades marginais $\mathcal{P}_{z_j, z_k}(z_j, z_k)$ resultassem nas funções fornecidas pelo experimento com duas partículas correlacionadas.

2.4.5 Aplicação da desigualdade de Bell

Nesta seção, tem-se a substituição das covariâncias, calculadas para o experimento, diretamente na desigualdade de Bell. Observa-se que para um conjunto de valores atribuídos aos parâmetros, a desigualdade é violada. Os diferentes valores de parâmetros representam diferentes configurações do experimento (diferentes orientações do aparato). A verificação da violação foi feita teoricamente.

Na Teoria de Probabilidade, uma variável aleatória é uma função de ω (que é elemento do espaço amostral Ω), da qual não se tem nenhuma informação antes da realização do experimento, ou seja, se o valor de ω fosse conhecido, já se saberia qual seria o valor da variável aleatória com 100% de probabilidade, portanto, a aleatoriedade vem, basicamente, de nossa falta de conhecimento do valor que ω assumirá no experimento, conseqüentemente, não se sabe qual será o valor da variável aleatória.

A violação da desigualdade de Bell foi interpretada como uma impossibilidade de se modelar certos problemas da Mecânica Quântica através da Teoria de Probabilidade clássica. Assim, não haveria uma relação entre uma variável aleatória (na literatura física encontra-se o termo “variável oculta”), construída com base na Teoria de Probabilidade clássica, e um experimento quântico envolvendo partículas emaranhadas (partículas que possuiriam uma correlação não clássica), impossibilitando tal modelagem do problema pela Teoria da Probabilidade clássica.

Agora, iniciando as substituições dos resultados na desigualdade de Bell, seguem-se com as seguintes substituições das covariâncias calculadas:

$$\mathcal{E}_{\dot{W}}(W_1 \cdot W_2) := \mathcal{E}_{\dot{Z}}(Z_1, Z_2) = -\cos(2 \cdot (\theta_2 - 0))$$

$$\mathcal{E}_{\dot{W}}(W_1 \cdot W_3) := \mathcal{E}_{\dot{Z}}(Z_1, Z_3) = -\cos(2 \cdot (\theta_3 - 0))$$

$$\mathcal{E}_{\dot{W}}(W_2 \cdot W_3) := \mathcal{E}_{\dot{Z}}(Z_2, Z_3) = -\cos(2 \cdot (\theta_3 - \theta_2))$$

Ou seja, percebe-se que serão considerados três pares de partículas, correlacionadas negativamente, com aparatos em configurações distintas (configurações indicadas por $(0, \theta_3)$, (θ_3, θ_2) e $(0, \theta_2)$).

Na desigualdade de Bell,

$$|\mathcal{E}_{\dot{W}}(W_1 \cdot W_3) - \mathcal{E}_{\dot{W}}(W_2 \cdot W_3)| \leq 1 - \mathcal{E}_{\dot{W}}(W_1 \cdot W_2), \quad \dot{W} := (W_1, W_2, W_3)$$

Tem-se, após as substituições, a seguinte desigualdade:

$$\begin{aligned} & |-\cos(2 \cdot (\theta_3 - \theta_1)) + \cos(2 \cdot (\theta_3 - \theta_2))| \leq 1 + \cos(2 \cdot (\theta_2 - \theta_1)) \\ & 1 + \cos(2 \cdot (\theta_2 - \theta_1)) - |-\cos(2 \cdot (\theta_3 - \theta_1)) + \cos(2 \cdot (\theta_3 - \theta_2))| \geq 0 \end{aligned}$$

E, denomina-se o primeiro termo da desigualdade por

$$\begin{aligned} & t_1(\theta_1, \theta_2, \theta_3) := \\ & := 1 + \cos(2 \cdot (\theta_2 - \theta_1)) - |-\cos(2 \cdot (\theta_3 - \theta_1)) + \cos(2 \cdot (\theta_3 - \theta_2))| \end{aligned}$$

A tabela de figuras a seguir, constitui-se de gráficos de superfície e também o de curva de nível dos valores de $t_1(\theta_1, \theta_2, \theta_3)$, com $\theta_1 = 0$ (sem perda de generalidade). Valores abaixo de 0 implicam na violação da desigualdade aplicada por John S. Bell.

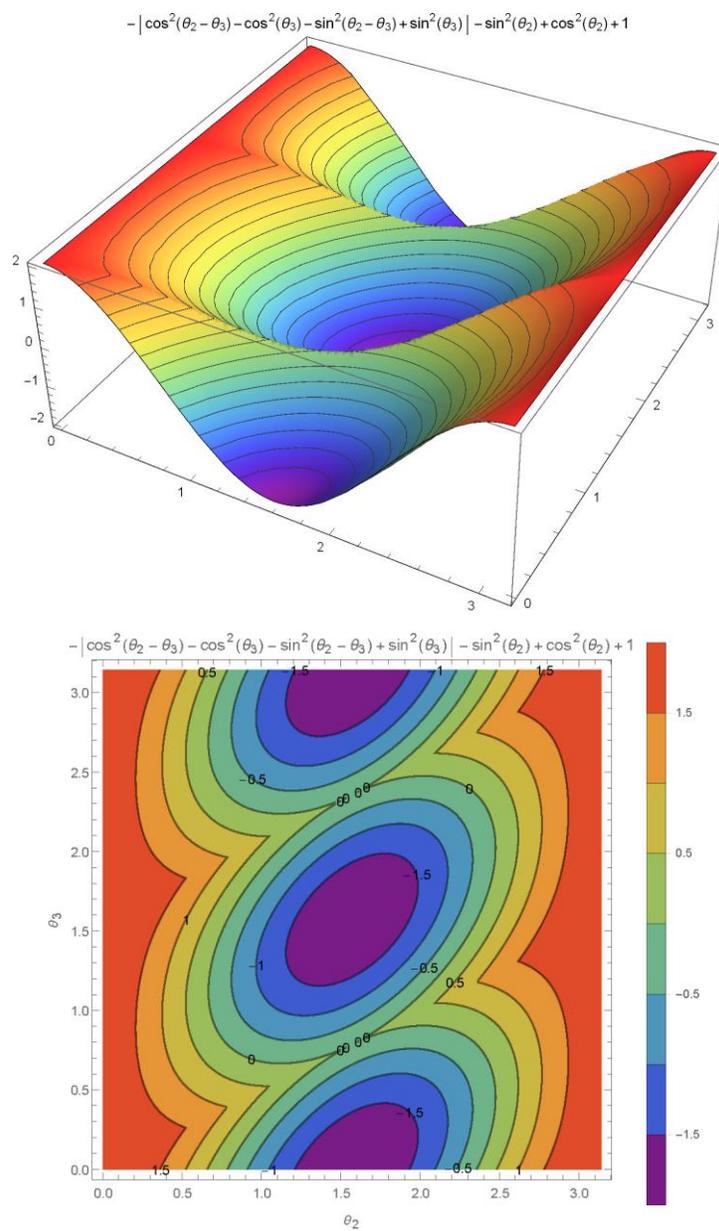


Gráfico 4 Gráficos (de superfície e de curvas de nível) dos valores assumidos por $t_1(0, \theta_2, \theta_3)$, para partículas negativamente correlacionadas. Valores abaixo de 0 representam violações da desigualdade

Considerando a possibilidade de partículas correlacionadas positivamente, cujos valores esperados calculados (teoricamente) são usados nas seguintes substituições:

$$\begin{aligned}\mathcal{E}_{\tilde{W}}(W_1 \cdot W_2) &:= \mathcal{E}_{\tilde{Z}}(Z_1, Z_2) = \cos(2 \cdot (\theta_2 - 0)) \\ \mathcal{E}_{\tilde{W}}(W_1 \cdot W_3) &:= \mathcal{E}_{\tilde{Z}}(Z_1, Z_3) = \cos(2 \cdot (\theta_3 - 0)) \\ \mathcal{E}_{\tilde{W}}(W_2 \cdot W_3) &:= \mathcal{E}_{\tilde{Z}}(Z_2, Z_3) = \cos(2 \cdot (\theta_3 - \theta_2))\end{aligned}$$

Tem-se, após as substituições, a seguinte desigualdade:

$$\begin{aligned}& |\cos(2 \cdot (\theta_3 - \theta_1)) - \cos(2 \cdot (\theta_3 - \theta_2))| \leq 1 - \cos(2 \cdot (\theta_2 - \theta_1)) \\ & 1 - \cos(2 \cdot (\theta_2 - \theta_1)) - |\cos(2 \cdot (\theta_3 - \theta_1)) - \cos(2 \cdot (\theta_3 - \theta_2))| \geq 0\end{aligned}$$

E, denominando o primeiro termo da desigualdade por:

$$\begin{aligned}t_2(\theta_1, \theta_2, \theta_3) &:= \\ &:= 1 - \cos(2 \cdot (\theta_2 - \theta_1)) - |\cos(2 \cdot (\theta_3 - \theta_1)) - \cos(2 \cdot (\theta_3 - \theta_2))|\end{aligned}$$

A tabela de figuras a seguir constitui-se de gráficos de curva de nível dos valores de $t_2(\theta_1, \theta_2, \theta_3)$, com $\theta_1 = 0$ (sem perda de generalidade). Valores abaixo de 0 implicam na violação da desigualdade de Bell para partículas positivamente correlacionadas.

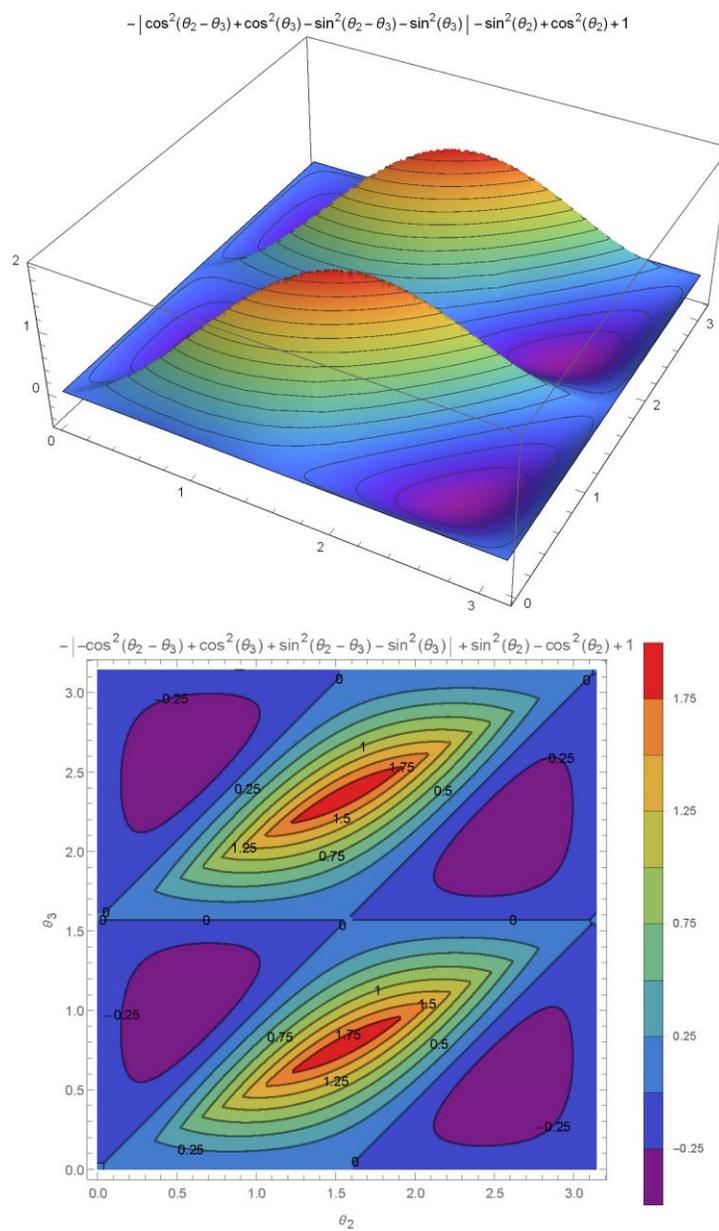


Gráfico 5 Gráficos (de superfície e de curvas de nível) dos valores assumidos por $t_2(0, \theta_2, \theta_3)$, para partículas positivamente correlacionadas. Valores abaixo de 0 representam violações da desigualdade

Observa-se, portanto, que tanto quando há uma correlação positiva como quando há uma correlação negativa, em ambos os casos há um conjunto de valores dos parâmetros, para os quais há violação da desigualdade de Bell.

Observa-se, também, que em nenhum momento, foi proposta qualquer função de probabilidade da tripla (Z_1, Z_2, Z_3) , cujas marginas resultassem nas funções de probabilidade de duplas (Z_j, Z_k) , que foram usadas nos cálculos dos valores esperados.

2.4.6 Aplicação da desigualdade de Clauser-Horne-Shimony-Holt

Nesta seção, tem-se a substituição das covariâncias, calculadas para o experimento, diretamente na desigualdade de Clauser-Horne-Shimony-Holt. Verifica-se, através do gráfico, que para um conjunto de valores assumidos pelos parâmetros, a desigualdade é violada.

A violação da desigualdade de Bell, apresentada na literatura, foi interpretada como uma impossibilidade de se ter “variáveis ocultas” na Mecânica Quântica. Da mesma forma, a violação da desigualdade de Clauser-Horne-Shimony-Holt também foi interpretada como uma impossibilidade de se modelar certos problemas quânticos através da Teoria de Probabilidade clássica. Porém, dessa vez, a desigualdade de Clauser-Horne-Shimony-Holt foi utilizada num experimento prático por Aspect, Dalibard e Roger (1982), não ficando apenas na teoria, mas fazendo o uso de dados experimentais.

Em busca de determinar o w , associado ao experimento de medir a travessia, ou não, dos fótons (que tenham sido emitidos com a propriedade de polarização correlacionados), admitir-se-á mais duas orientações de polarizadores (totalizando quatro orientações: $\theta_1, \theta_2, \theta_3$ e θ_4) e mais duas medidas (totalizando quatro variáveis aleatórias: $(Z_1, Z_2, Z_3, Z_4) \in \{-1, +1\}^4$). Portanto, no experimento será feito o mesmo número de vezes, para pares de

fótons que atravessam os polarizadores com os seguintes sentidos: a) Sentido θ_1 no polarizador I e θ_3 no II ; b) Sentido θ_1 no polarizador I e θ_4 no II' ; c) Sentido θ_2 no polarizador I' e θ_3 no II ; d) Sentido θ_2 no polarizador I' e θ_4 no II' .

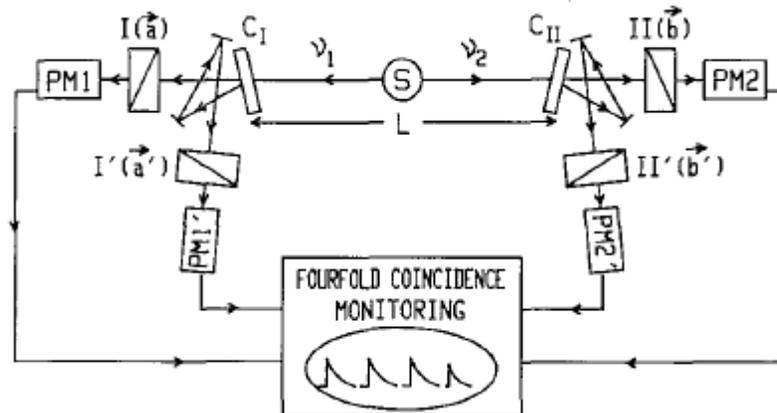


Figura 6 Figura extraída de Aspect, Dalibard e Roger (1982) do experimento em que: S é a fonte de fótons, C_I e C_{II} são instrumentos que servem para desviar os fótons ou não (tornando possível 2 percursos diferentes), em cada percurso haverá um polarizador com um determinado sentido da polarização, para o fóton 1 (v_1) há os polarizadores $I(\vec{a})$ e $I'(\vec{a}')$ (cujas orientações são θ_1 e θ_2), para o fóton 2 (v_2) há os polarizadores $II(\vec{b})$ e $II'(\vec{b}')$ (cujas orientações são θ_3 e θ_4), PM1 e PM2 são os detectores (fotomultiplicadores)

Na figura anterior, tem-se que:

- o vetor \vec{a} (que representa o direcionamento da polarização do polarizador I) será retratado pelo ângulo θ_1 de inclinação do sentido de polarização.
- o vetor \vec{a}' (que representa o direcionamento da polarização do polarizador I') será retratado pelo ângulo θ_2 de inclinação do sentido de polarização.

- c) o vetor \vec{b} (que representa o direcionamento da polarização do polarizador II) será retratado pelo ângulo θ_3 de inclinação do sentido de polarização.
- d) o vetor \vec{b}' (que representa o direcionamento da polarização do polarizador II') será retratado pelo ângulo θ_4 de inclinação do sentido de polarização.

Na desigualdade, será feita a seguinte substituição:

$$\mathcal{E}_{\vec{W}}(W_j \cdot W_k) = \mathcal{E}_{\vec{Z}}(Z_j \cdot Z_k)$$

Com $j \in \{1,2\}$ e $k \in \{3,4\}$. Calculado a partir das funções de probabilidade fornecidas, tem-se que o valor esperado é dado por:

$$\mathcal{E}_{\vec{Z}}(Z_j \cdot Z_k) := \cos(2 \cdot (\theta_j - \theta_k)) = \cos(2 \cdot \bar{\theta}_{j,k}), \quad \bar{\theta}_{j,k} := \theta_j - \theta_k$$

Substituindo na desigualdade, tem-se:

$$|\cos(2 \cdot \bar{\theta}_{1,3}) - \cos(2 \cdot \bar{\theta}_{1,4}) + \cos(2 \cdot \bar{\theta}_{2,3}) + \cos(2 \cdot \bar{\theta}_{2,4})| \leq 2$$

Ao escolher $\theta_1 = -\frac{1}{3} \cdot \pi$, $\theta_2 = 0$, $\theta_3 = \frac{1}{3} \cdot \pi$ e $\theta_4 = \frac{2}{3} \cdot \pi$, tem-se $\bar{\theta}_{1,3} = \frac{2}{3} \cdot \pi$, $\bar{\theta}_{1,4} = \pi$, $\bar{\theta}_{2,3} = \frac{1}{3} \cdot \pi$, $\bar{\theta}_{2,4} = \frac{2}{3} \cdot \pi$, portanto,

$$\left| \underbrace{\cos(2 \cdot \bar{\theta}_{1,3})}_{=-1/2} - \underbrace{\cos(2 \cdot \bar{\theta}_{1,4})}_{=1} + \underbrace{\cos(2 \cdot \bar{\theta}_{2,3})}_{=-1/2} + \underbrace{\cos(2 \cdot \bar{\theta}_{2,4})}_{=-1/2} \right| \leq 2$$

$=5/2$

Mas $\frac{5}{2} = 2,5$ é maior que 2, portanto a desigualdade não é obedecida na Mecânica Quântica.

Na figura a seguir, tem-se um gráfico de curvas de nível para valores dos ângulos em que a desigualdade de Clauser-Horne-Shimony-Holt é violada.

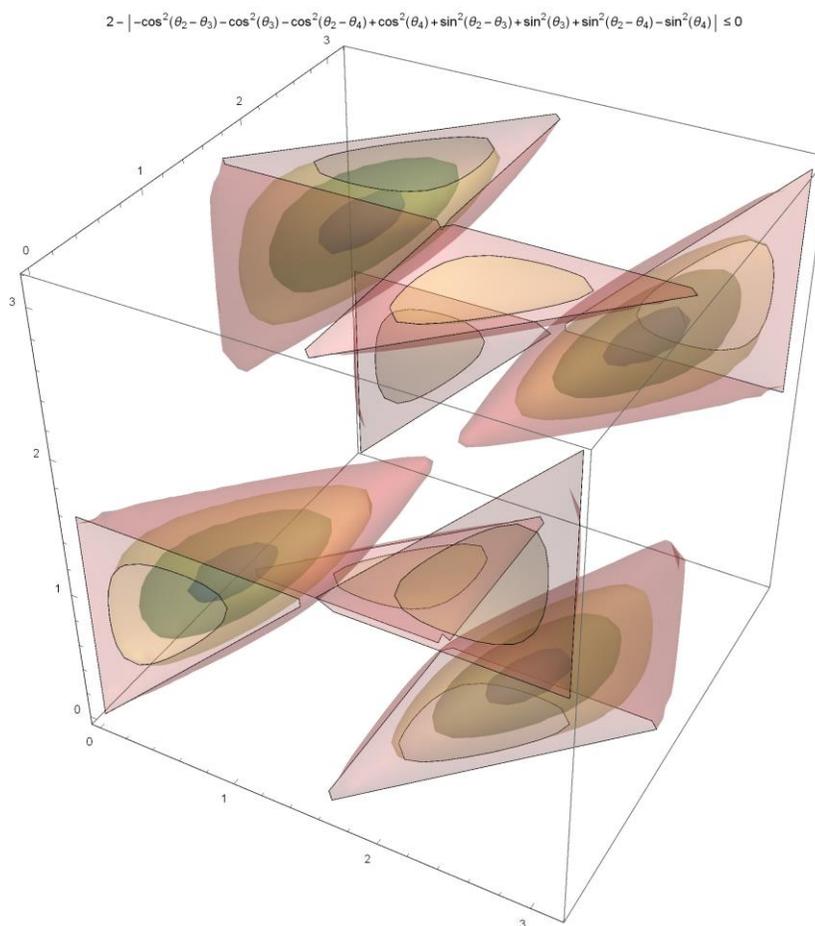


Gráfico 6 Regiões de violação da desigualdade, com parâmetro $\theta_1 = 0$, e demais parâmetros (θ_2 , θ_3 e θ_4) variando, portanto trata-se de um gráfico no espaço tridimensional, em que a cada $(\theta_2, \theta_3, \theta_4)$ é associado um valor (valor correspondente ao primeiro termo da desigualdade apresentada logo acima do gráfico)

Observa-se que para os valores dos parâmetros que estejam dentro dessas superfícies de nível, há violação da desigualdade de Clauser-Horne-Shimony-Holt.

Lembrando que, no caso da aplicação da desigualdade de Clauser-Horne-Shimony-Holt, seria necessária uma função de probabilidade de uma quádrupla de variáveis (Z_1, Z_2, Z_3, Z_4) cujas marginais das duplas (Z_j, Z_k) (com $j \in \{1,2\}$ e $k \in \{3,4\}$) resultassem nas funções de probabilidades usadas. Tal função de probabilidade em função das variáveis (Z_1, Z_2, Z_3, Z_4) , em nenhum momento foi apresentada.

3 METODOLOGIA

O delineamento da pesquisa consiste de Pesquisa Bibliográfica, em que foi utilizado o acervo bibliográfico em Estatística, Matemática e Física, teórica e aplicada, existente na Universidade Federal de Lavras, da biblioteca particular do orientador e orientado e acervo de outras bibliotecas disponíveis na Internet.

A revisão foi realizada durante os estudos pessoais e em equipe, e a reorganização dos textos lidos e discutidos consiste na própria proposta do trabalho, junto com todas as demonstrações realizadas.

4 RESULTADOS E DISCUSSÃO

As demonstrações das desigualdades foram alteradas, de forma que as condições adotadas contivessem as condições encontradas na literatura como caso particular. Além disso, foram demonstradas relações entre as desigualdades que não foram encontradas na literatura de Teoria Quântica até o momento, possibilitando que as interpretações e os ajustes propostos nesta tese, para cada uma das desigualdades, pudessem ser tratados de forma mais integrada, possibilitando uma justificativa mais abrangente. Assim, as incompatibilidades apresentadas por cada desigualdade puderam ser tratadas de forma unificada, tornando-se claro que cada desigualdade apresentava os mesmos problemas em suas aplicações, ou seja, essas desigualdades são uma mesma forma de incompatibilidade.

4.1 Valor esperado

Nesta seção, será analisada como a dependência da variável aleatória pela variável (oculta) λ e pelo parâmetro θ , influencia o cálculo do valor esperado, ou seja, se o valor esperado é dependente, ou não, de como a variável aleatória Z depende de λ .

O estudo da dependência entre as variáveis começa supondo que as variáveis aleatórias dependam de uma variável aleatória contínua λ e um parâmetro θ :

$$Z_j = Z_j(\lambda, \theta), \quad \lambda \in \Lambda, \quad \theta \in \Theta$$

Agora, calcula-se o valor esperado de $M_{j,k} := Z_j \cdot Z_k$, que será dado por:

$$\varepsilon_\lambda \left(Z_j(\lambda, \theta) \cdot Z_k(\lambda, \theta) \right) = \int_{\lambda \in \Lambda} \left(Z_j(\lambda, \theta) \cdot Z_k(\lambda, \theta) \cdot \rho(\lambda; \theta) \right) d\lambda$$

Sendo θ um parâmetro, tem-se que seu valor é fixo e determinado, portanto, trata-se de uma constante. Porém, já a variável aleatória λ , essa não é fixa, ela assume diversos valores em Λ no cálculo da integral. Uma vez que a função $M_{j,k}$ depende de Z_j e Z_k (ou seja, não depende explicitamente de λ), pode-se particionar a integral com base nos valores assumidos pelas variáveis Z

$$\Lambda_{a,b} = \{ \lambda \in \Lambda: (Z_j(\lambda, \theta) = a) \wedge (Z_k(\lambda, \theta) = b) \}$$

Que se trata do conjunto de valores de λ no qual ocorrem as seguintes igualdades: $Z_j(\lambda, \theta) = a$ e $Z_k(\lambda, \theta) = b$.

Os valores que as variáveis Z assumem são: -1 e $+1$. Portanto, têm-se os seguinte conjuntos,

$$\Lambda_{-1,-1} = \{ \lambda \in \Lambda: (Z_j(\lambda, \theta) = -1) \wedge (Z_k(\lambda, \theta) = -1) \}$$

$$\Lambda_{-1,+1} = \{ \lambda \in \Lambda: (Z_j(\lambda, \theta) = -1) \wedge (Z_k(\lambda, \theta) = +1) \}$$

$$\Lambda_{+1,-1} = \{ \lambda \in \Lambda: (Z_j(\lambda, \theta) = +1) \wedge (Z_k(\lambda, \theta) = -1) \}$$

$$\Lambda_{+1,+1} = \{ \lambda \in \Lambda: (Z_j(\lambda, \theta) = +1) \wedge (Z_k(\lambda, \theta) = +1) \}$$

Portanto, Λ será a união desses conjuntos

$$\Lambda = \Lambda_{-1,-1} \cup \Lambda_{-1,+1} \cup \Lambda_{+1,-1} \cup \Lambda_{+1,+1}$$

Assim, a integral do produto $M_{j,k}$ para valores de $\lambda \in \Lambda_{a,b}$ será

$$\begin{aligned} \int_{\lambda \in \Lambda_{a,b}} (Z_j(\lambda, \theta) \cdot Z_k(\lambda, \theta) \cdot \rho(\lambda, \theta)) d\lambda &= \int_{\lambda \in \Lambda_{a,b}} (a \cdot b \cdot \rho(\lambda, \theta)) d\lambda = \\ &= a \cdot b \cdot \int_{\lambda \in \Lambda_{a,b}} (\rho(\lambda, \theta)) d\lambda \end{aligned}$$

Observa-se que o parâmetro está presente somente na função de densidade de probabilidade (ou seja, se a variável aleatória Z_j não dependesse de θ , a conclusão seria a mesma, pois a probabilidade é que carrega a informação do parâmetro) e que a integral $\int_{\lambda \in \Lambda_{a,b}} (\rho(\lambda, \theta)) d\lambda$, nada mais é do que a probabilidade de ocorrer o evento $\Lambda_{a,b}$

$$\mathcal{P}_\lambda(\Lambda_{a,b}) = \int_{\lambda \in \Lambda_{a,b}} (\rho(\lambda, \theta)) d\lambda$$

Mas $\lambda \in \Lambda_{a,b}$ equivale a $((Z_j(\lambda, \theta) = a) \wedge (Z_k(\lambda, \theta) = b))$, ou seja, o par possui os valores $(Z_j, Z_k) \in \{(a, b)\}$, portanto,

$$\mathcal{P}_\lambda(\Lambda_{a,b}) = \mathcal{P}_{Z_j, k}(a, b; \theta)$$

Assim o valor esperado do produto é

$$\begin{aligned}
\varepsilon_\lambda \left(Z_j(\lambda, \theta) \cdot Z_k(\lambda, \theta) \right) &= \int_{\lambda \in \Lambda} \left(Z_j(\lambda, \theta) \cdot Z_k(\lambda, \theta) \cdot \rho(\lambda; \theta) \right) d\lambda = \\
&= \int_{\lambda \in \Lambda_{-1,-1} \cup \Lambda_{-1,+1} \cup \Lambda_{+1,-1} \cup \Lambda_{+1,+1}} \left(Z_j(\lambda, \theta) \cdot Z_k(\lambda, \theta) \cdot \rho(\lambda; \theta) \right) d\lambda = \\
&= \sum_{a \in \{-1,+1\}} \left(\sum_{b \in \{-1,+1\}} \left(\int_{\lambda \in \Lambda_{a,b}} \left(Z_j(\lambda, \theta) \cdot Z_k(\lambda, \theta) \cdot \rho(\lambda; \theta) \right) d\lambda \right) \right) = \\
&= \sum_{a \in \{-1,+1\}} \left(\sum_{b \in \{-1,+1\}} \left(\int_{\lambda \in \Lambda_{a,b}} \left(a \cdot b \cdot \rho(\lambda; \theta) \right) d\lambda \right) \right) = \\
&= \sum_{a \in \{-1,+1\}} \left(\sum_{b \in \{-1,+1\}} \left(a \cdot b \cdot \int_{\lambda \in \Lambda_{a,b}} \left(\rho(\lambda; \theta) \right) d\lambda \right) \right) = \\
&= \sum_{a \in \{-1,+1\}} \left(\sum_{b \in \{-1,+1\}} \left(a \cdot b \cdot \mathcal{P}_{Z_{j,k}}(a, b; \theta) \right) \right) = \varepsilon_{Z_{j,k}}(Z_j \cdot Z_k)
\end{aligned}$$

Logo, o valor esperado na variável contínua λ , torna-se um valor esperado na variável discreta Z , assim a integral dá lugar para a somatória. Observe que, o parâmetro θ está presente na função de probabilidade, e que as variáveis aleatórias Z_j e Z_k são substituídas pelas variáveis aleatórias a e b , que não possuem qualquer dependência com a variável (oculta) λ ou com o parâmetro θ .

Assim, verifica-se que a expressão do valor esperado que levava em consideração a dependência das variáveis aleatórias Z com relação à variável oculta λ e o parâmetro θ , pode ser substituída pela expressão do valor esperado que não levava em consideração qualquer dependência das variáveis aleatórias pela variável oculta λ ou pelo parâmetro θ .

Conclui-se, portanto, que no cálculo do valor esperado de qualquer expressão de variáveis aleatórias, o que acaba importando são os valores que as variáveis assumem ($Z_j(\lambda, \theta) \in \{-1, +1\}$) e a probabilidade associada diretamente às variáveis Z , não importando para quais valores que a variável λ assuma e de que forma acontece. Portanto, no cálculo do valor esperado, a dependência com relação à variável λ (que se dá por meio das variáveis Z), acaba sendo equivalente a calcular o valor esperado com relação às variáveis Z , desprezando a relação com a variável λ . No resultado, permanece a dependência com relação ao parâmetro θ justamente pelo fato da função de probabilidade depender explicitamente dele, diferentemente de λ , cuja dependência ocorre por meio das variáveis Z (lembrando que λ trata-se de uma variável aleatória e θ é um parâmetro, sendo que este último é fixo).

O valor esperado do produto pode ser expresso em termos das probabilidades

$$\begin{aligned}
 \mathcal{E}_{Z_j, k}(Z_j \cdot Z_k) &= \\
 &= (-1) \cdot (-1) \cdot \mathcal{P}_{Z_j, k}(-1, -1) + (+1) \cdot (+1) \cdot \mathcal{P}_{Z_j, k}(+1, +1) + (-1) \cdot (+1) \cdot \\
 &\cdot \mathcal{P}_{Z_j, k}(-1, +1) + (+1) \cdot (-1) \cdot \mathcal{P}_{Z_j, k}(+1, -1) = \\
 &= \mathcal{P}_{Z_j, k}(\{(-1, -1), (+1, +1)\}) - \mathcal{P}_{Z_j, k}(\{(-1, +1), (+1, -1)\}) = \\
 &= \mathcal{P}_{Z_j, k}(C) - \mathcal{P}_{Z_j, k}(\bar{C})
 \end{aligned}$$

Uma vez que os eventos C e \bar{C} são complementares, então

$$\mathcal{P}_{Z_j, k}(\bar{C}) = 1 - \mathcal{P}_{Z_j, k}(C)$$

Desse modo, o valor esperado do produto pode ser expresso apenas em termos da probabilidade de concordância

$$\varepsilon_{Z_j, k}(Z_j \cdot Z_k) = \mathcal{P}_{Z_j, k}(C) - \left(1 - \mathcal{P}_{Z_j, k}(C)\right) = 2 \cdot \mathcal{P}_{Z_j, k}(C) - 1$$

Usando a mesma argumentação, para o valor esperado de Z_j tem-se a substituição da integral em λ pela somatória

$$\varepsilon_\lambda(Z_j(\lambda, \theta)) = \varepsilon_{Z_j}(Z_j) = \sum_{Z_j \in \{-1, +1\}} \left(Z_j \cdot \mathcal{P}_{Z_j}(Z_j)\right) = (-1) \cdot \frac{1}{2} + (+1) \cdot \frac{1}{2} = 0$$

Portanto, o valor esperado é nulo.

Nesta seção, conclui-se que o valor esperado para as variáveis aleatórias Z_j e para o produto $(Z_j \cdot Z_k)$ são somatórios dos valores assumidos pelas variáveis aleatórias Z , sendo então desnecessária a discussão sobre a dependência das variáveis aleatórias Z com relação à qualquer outra variável, inclusive a dependência do parâmetro, pois esse se manifesta na função de probabilidade.

4.2 Desigualdade de Wigner

Considere os eventos w_j , sendo que, para cada j , tem-se que $W_j \in w_j$ (uma vez que os eventos são definidos por conjuntos, mesmo que sejam de um só elemento).

Denominando o evento complementar de w_j por \bar{w}_j

$$\bar{w}_j := C_\Omega(w_j) = \{u \in \Omega: u \notin w_j\}$$

E denominando a n-uplas de variáveis aleatórias W por

$$\dot{W}_{j,k} := (W_j, W_k), \quad \dot{W}_{j,kl} := (W_j, W_k, W_l)$$

Tem-se que, as seguintes probabilidades podem ser reescritas como as somas de duas probabilidades de eventos disjuntos:

$$\begin{aligned} \mathcal{P}_{\dot{W}_{1,2}}(w_1, w_2) &= \mathcal{P}_{\dot{W}_{1,2,3}}(w_1, w_2, \bar{w}_3) + \mathcal{P}_{\dot{W}_{1,2,3}}(w_1, w_2, w_3) \\ \mathcal{P}_{\dot{W}_{2,3}}(\bar{w}_2, w_3) &= \mathcal{P}_{\dot{W}_{1,2,3}}(w_1, \bar{w}_2, w_3) + \mathcal{P}_{\dot{W}_{1,2,3}}(\bar{w}_1, \bar{w}_2, w_3) \\ \mathcal{P}_{\dot{W}_{1,3}}(w_1, w_3) &= \mathcal{P}_{\dot{W}_{1,2,3}}(w_1, w_2, w_3) + \mathcal{P}_{\dot{W}_{1,2,3}}(w_1, \bar{w}_2, w_3) \end{aligned}$$

Portanto, somando-se as duas primeiras equações, tem-se:

$$\begin{aligned} &\mathcal{P}_{\dot{W}_{1,2}}(w_1, w_2) + \mathcal{P}_{\dot{W}_{2,3}}(\bar{w}_2, w_3) = \\ &= \mathcal{P}_{\dot{W}_{1,2,3}}(w_1, w_2, \bar{w}_3) + \mathcal{P}_{\dot{W}_{1,2,3}}(w_1, w_2, w_3) + \mathcal{P}_{\dot{W}_{1,2,3}}(w_1, \bar{w}_2, w_3) + \\ &+ \mathcal{P}_{\dot{W}_{1,2,3}}(\bar{w}_1, \bar{w}_2, w_3) = \\ &= \mathcal{P}_{\dot{W}_{1,2,3}}(w_1, w_2, \bar{w}_3) + \mathcal{P}_{\dot{W}_{1,3}}(w_1, w_3) + \mathcal{P}_{\dot{W}_{1,2,3}}(\bar{w}_1, \bar{w}_2, w_3) \end{aligned}$$

Isolando os termos dependentes dos ternos de variáveis aleatórias dos termos dependentes de duplas de variáveis aleatórias, tem-se a seguinte equação:

$$\begin{aligned} &\mathcal{P}_{\dot{W}_{1,2,3}}(w_1, w_2, \bar{w}_3) + \mathcal{P}_{\dot{W}_{1,2,3}}(\bar{w}_1, \bar{w}_2, w_3) = \\ &= \mathcal{P}_{\dot{W}_{1,2}}(w_1, w_2) + \mathcal{P}_{\dot{W}_{2,3}}(\bar{w}_2, w_3) - \mathcal{P}_{\dot{W}_{1,3}}(w_1, w_3) \end{aligned}$$

De acordo com os axiomas de Kolmogorov, a função de probabilidade deve ser não negativa (maior ou igual a zero), e como o primeiro membro é a soma de duas probabilidades, tem-se que:

$$\begin{aligned}
& \mathcal{P}_{\dot{W}_{1,2,3}}(w_1, w_2, \bar{w}_3) + \mathcal{P}_{\dot{W}_{1,2,3}}(\bar{w}_1, \bar{w}_2, w_3) = \\
& = \mathcal{P}_{\dot{W}_{1,2}}(w_1, w_2) + \mathcal{P}_{\dot{W}_{2,3}}(\bar{w}_2, w_3) - \mathcal{P}_{\dot{W}_{1,3}}(w_1, w_3) \geq 0
\end{aligned}$$

Assim, a violação da desigualdade de Wigner (denominada por $\Phi_0(\dot{W}_{1,2,3}, w_1, w_2, w_3)$) ocorre se, e somente se, for violado o segundo axioma de Kolmogorov que diz que para todo evento A , $\mathcal{P}(A) \geq 0$.

Para facilitar, será feita a seguinte denominação:

$$\begin{aligned}
\Phi_0(\dot{W}_{j,k,l}, w_j, w_k, w_l) & := \\
& := \left(\mathcal{P}_{\dot{W}_{1,2,3}}(w_1, w_2, \bar{w}_3) + \mathcal{P}_{\dot{W}_{1,2,3}}(\bar{w}_1, \bar{w}_2, w_3) = \right. \\
& \left. = \mathcal{P}_{\dot{W}_{1,2}}(w_1, w_2) + \mathcal{P}_{\dot{W}_{2,3}}(\bar{w}_2, w_3) - \mathcal{P}_{\dot{W}_{1,3}}(w_1, w_3) \right)
\end{aligned}$$

Assim, Φ_0 representará a fórmula que liga o membro da desigualdade de Wigner (que deve ser maior que 0) com a soma de duas funções de probabilidade.

4.3 O sistema linear de equações envolvendo as probabilidades

Nesta seção, será analisado o sistema de equações fornecidas pelas funções de probabilidades conjuntas de pares de variáveis aleatórias. Assim, verifica-se se a partir do sistema fornecido, pode-se determinar os valores das funções de probabilidades conjuntas de triplas de variáveis, ou seja, se o sistema fornecido é possível (podendo ser determinado ou indeterminado) ou impossível. A partir das equações que são fornecidas, pode-se montar um sistema linear e, então, procurar determinar quais seriam os valores que as probabilidades deveriam assumir, para que o sistema seja resolvível.

O sistema que se tem é o seguinte:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}}_{\Sigma:=} \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} \mathcal{P}_{\dot{z}}(-1, -1, -1) \\ \mathcal{P}_{\dot{z}}(-1, -1, +1) \\ \mathcal{P}_{\dot{z}}(-1, +1, -1) \\ \mathcal{P}_{\dot{z}}(-1, +1, +1) \\ \mathcal{P}_{\dot{z}}(+1, -1, -1) \\ \mathcal{P}_{\dot{z}}(+1, -1, +1) \\ \mathcal{P}_{\dot{z}}(+1, +1, -1) \\ \mathcal{P}_{\dot{z}}(+1, +1, +1) \end{bmatrix}}_{\mathcal{P}:=} =$$

$$= \begin{bmatrix} \mathcal{P}_{\dot{z}}(-1, -1, -1) + \mathcal{P}_{\dot{z}}(-1, -1, +1) \\ \mathcal{P}_{\dot{z}}(+1, +1, -1) + \mathcal{P}_{\dot{z}}(+1, +1, +1) \\ \mathcal{P}_{\dot{z}}(-1, -1, -1) + \mathcal{P}_{\dot{z}}(-1, +1, -1) \\ \mathcal{P}_{\dot{z}}(+1, -1, +1) + \mathcal{P}_{\dot{z}}(+1, +1, +1) \\ \mathcal{P}_{\dot{z}}(-1, -1, -1) + \mathcal{P}_{\dot{z}}(+1, -1, -1) \\ \mathcal{P}_{\dot{z}}(-1, +1, +1) + \mathcal{P}_{\dot{z}}(+1, +1, +1) \\ \mathcal{P}_{\dot{z}}(-1, +1, -1) + \mathcal{P}_{\dot{z}}(-1, +1, +1) \\ \mathcal{P}_{\dot{z}}(+1, -1, -1) + \mathcal{P}_{\dot{z}}(+1, -1, +1) \\ \mathcal{P}_{\dot{z}}(-1, -1, +1) + \mathcal{P}_{\dot{z}}(-1, +1, +1) \\ \mathcal{P}_{\dot{z}}(+1, -1, -1) + \mathcal{P}_{\dot{z}}(+1, +1, -1) \\ \mathcal{P}_{\dot{z}}(-1, -1, +1) + \mathcal{P}_{\dot{z}}(+1, -1, +1) \\ \mathcal{P}_{\dot{z}}(-1, +1, -1) + \mathcal{P}_{\dot{z}}(+1, +1, -1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathcal{P}_{\dot{z}_{1,2}}(-1, -1) \\ \mathcal{P}_{\dot{z}_{1,2}}(+1, +1) \\ \mathcal{P}_{\dot{z}_{1,3}}(-1, -1) \\ \mathcal{P}_{\dot{z}_{1,3}}(+1, +1) \\ \mathcal{P}_{\dot{z}_{2,3}}(-1, -1) \\ \mathcal{P}_{\dot{z}_{2,3}}(+1, +1) \\ \mathcal{P}_{\dot{z}_{1,2}}(-1, +1) \\ \mathcal{P}_{\dot{z}_{1,2}}(+1, -1) \\ \mathcal{P}_{\dot{z}_{1,3}}(-1, +1) \\ \mathcal{P}_{\dot{z}_{1,3}}(+1, -1) \\ \mathcal{P}_{\dot{z}_{2,3}}(-1, +1) \\ \mathcal{P}_{\dot{z}_{2,3}}(+1, -1) \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} \text{sen}^2(\bar{\theta}_{1,2})/2 \\ \text{sen}^2(\bar{\theta}_{1,2})/2 \\ \text{sen}^2(\bar{\theta}_{1,3})/2 \\ \text{sen}^2(\bar{\theta}_{1,3})/2 \\ \text{sen}^2(\bar{\theta}_{2,3})/2 \\ \text{sen}^2(\bar{\theta}_{2,3})/2 \\ \text{cos}^2(\bar{\theta}_{1,2})/2 \\ \text{cos}^2(\bar{\theta}_{1,2})/2 \\ \text{cos}^2(\bar{\theta}_{1,3})/2 \\ \text{cos}^2(\bar{\theta}_{1,3})/2 \\ \text{cos}^2(\bar{\theta}_{2,3})/2 \\ \text{cos}^2(\bar{\theta}_{2,3})/2 \end{bmatrix}}_{\Xi:=}$$

Sendo que a seguinte matriz faz a operação de escalonamento (pré-multiplicando esta matriz com a dos coeficientes e com a aumentada)

$$\eta := \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & -1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 1 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & -1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & -1 & 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

Quando multiplicada com a matriz de coeficientes, resulta na seguinte matriz:

$$\eta \cdot \Sigma = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

E, quando multiplicada com a matriz aumentada, resulta em

$$\eta \cdot [\Sigma \quad \Xi] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{\text{sen}^2(\bar{\theta}_{1,3}) + \text{sen}^2(\bar{\theta}_{2,3}) - \text{cos}^2(\bar{\theta}_{1,2})}{2} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & \frac{-\text{sen}^2(\bar{\theta}_{1,3}) - \text{sen}^2(\bar{\theta}_{2,3}) + 1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & \frac{\text{cos}^2(\bar{\theta}_{1,2}) - \text{sen}^2(\bar{\theta}_{2,3})}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{\text{sen}^2(\bar{\theta}_{2,3})}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & \frac{\text{cos}^2(\bar{\theta}_{1,2}) - \text{sen}^2(\bar{\theta}_{1,3})}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & \frac{\text{sen}^2(\bar{\theta}_{1,3})}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & \frac{\text{sen}^2(\bar{\theta}_{1,2})}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Observa-se que as últimas cinco linhas, tanto da matriz de coeficiente como a aumentada, são nulas, portanto, o posto das matrizes são iguais a $12 - 5 = 7$. Uma vez que ambas as matrizes possuem o mesmo posto, então o sistema é possível. Porém, são oito as funções de probabilidades que se devem atribuir-lhes valores, portanto, uma vez que o posto é menor que o número de variáveis, tem-se que o sistema é indeterminado.

4.4 Desigualdade básica

Nesta seção, será desenvolvida uma desigualdade da qual se pode obter as demais desigualdades (as desigualdades de Bell, a de Clauser-Horne-Shimony-Holt e a de Leggett), apenas fazendo substituições de variáveis aleatórias, além disso, a própria desigualdade básica pode ser diretamente aplicada na Mecânica Quântica.

Começando por supor a variável aleatória W_j com valores

$$W_j \in \{-1, +1\}$$

Portanto, tem-se

$$W_j^2 = 1 = |W_j|, \quad W_j \cdot W_k \in \{-1, +1\}$$

Usando esses resultados na seguinte expressão, tem-se que

$$\begin{aligned} |W_1 + W_2| &= |W_1 + W_1^2 \cdot W_2| = |W_1 \cdot (1 + W_1 \cdot W_2)| = \\ &= |W_1| \cdot \left| \underbrace{1 + W_1 \cdot W_2}_{\in \{0, +2\}} \right| = 1 + W_1 \cdot W_2 \end{aligned}$$

Assim chega-se à seguinte identidade

$$|W_1 + W_2| = 1 + W_1 \cdot W_2$$

Substituindo W_2 por $(-W_2)$, e observando que

$$W_2 \in \{-1, +1\} \Leftrightarrow (-W_2) \in \{-1, +1\}$$

Tem-se, portanto,

$$\begin{aligned} |W_1 - W_2| &= |W_1 - W_1^2 \cdot W_2| = |W_1 \cdot (1 - W_1 \cdot W_2)| = \\ &= |W_1| \cdot \left| \underbrace{1 - W_1 \cdot W_2}_{\in \{0, +2\}} \right| = 1 - W_1 \cdot W_2 \end{aligned}$$

Chegando mais esta identidade

$$|W_1 - W_2| = 1 - W_1 \cdot W_2$$

Portanto, tem-se o seguinte sistema com as identidades obtidas

$$\begin{cases} |W_1 + W_2| = 1 + W_1 \cdot W_2 \\ |W_1 - W_2| = 1 - W_1 \cdot W_2 \end{cases}$$

E, realizando o cálculo do valor esperado do segundo membro de cada equação, e a partir da desigualdade $|\mathcal{E}_{\dot{W}}(f(\ddot{W}))| \leq \mathcal{E}_{\dot{W}}(|f(\ddot{W})|)$, tem-se que:

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_{\dot{W}}(1 + W_1 \cdot W_2) &= \mathcal{E}_{\dot{W}}(|W_1 + W_2|) \geq |\mathcal{E}_{\dot{W}}(W_1 + W_2)| \\ \mathcal{E}_{\dot{W}}(1 - W_1 \cdot W_2) &= \mathcal{E}_{\dot{W}}(|W_1 - W_2|) \geq |\mathcal{E}_{\dot{W}}(W_1 - W_2)| \end{aligned}$$

Portanto, têm-se as seguintes desigualdades:

$$\begin{cases} \underbrace{\mathcal{E}_{\dot{W}}(1 + W_1 \cdot W_2) \geq |\mathcal{E}_{\dot{W}}(W_1 + W_2)|}_{\Phi_1^+(W_1, W_2) :=} \\ \underbrace{\mathcal{E}_{\dot{W}}(1 - W_1 \cdot W_2) \geq |\mathcal{E}_{\dot{W}}(W_1 - W_2)|}_{\Phi_1^-(W_1, W_2) :=} \end{cases}$$

Denominando cada uma por $\Phi_1^+(W_1, W_2)$ e por $\Phi_1^-(W_1, W_2)$, e o sistema por $\Phi_1(W_1, W_2)$, tem-se então

$$\Phi_1(W_1, W_2) = \begin{cases} \Phi_1^+(W_1, W_2) \\ \Phi_1^-(W_1, W_2) \end{cases}$$

Cujas condições suficientes para sua validade são que, para todo j , a variável aleatória W_j deve assumir valores no conjunto $\{-1, +1\}$, ou seja,

$$(\forall j)(W_j \in \{-1, +1\}) \Rightarrow \Phi_1(W_1, W_2)$$

O sistema de desigualdades Φ_1 será denominado de sistema de desigualdades básicas, do qual serão obtidas as demais desigualdades.

4.4.1 Uso da desigualdade básica

A partir das desigualdades básicas, substituindo o par (W_1, W_2) pelo par (Z_1, Z_2) , tem-se que:

$$\begin{aligned}\Phi_1^+(Z_1, Z_2) &= (|\mathcal{E}_{\dot{Z}}(Z_1) + \mathcal{E}_{\dot{Z}}(Z_2)| \leq 1 + \mathcal{E}_{\dot{Z}}(Z_1 \cdot Z_2)) \\ \Phi_1^-(Z_1, Z_2) &= (|\mathcal{E}_{\dot{Z}}(Z_1) - \mathcal{E}_{\dot{Z}}(Z_2)| \leq 1 - \mathcal{E}_{\dot{Z}}(Z_1 \cdot Z_2))\end{aligned}$$

Têm-se os valores esperados $\mathcal{E}_{\dot{Z}}(Z_1)$, $\mathcal{E}_{\dot{Z}}(Z_2)$ e $\mathcal{E}_{\dot{Z}}(Z_1 \cdot Z_2)$, que já foram calculados:

$$\mathcal{E}_{\dot{Z}}(Z_j) = 0, \quad \mathcal{E}_{\dot{Z}}(Z_1 \cdot Z_2) = \cos(2 \cdot \bar{\theta}_{1,2})$$

Portanto, pela substituição desses valores nas desigualdades, tem-se:

$$\left| \underbrace{\mathcal{E}_{\dot{Z}}(Z_1)}_{=0} + \underbrace{\mathcal{E}_{\dot{Z}}(Z_2)}_{=0} \right| \leq 1 + \underbrace{\mathcal{E}_{\dot{Z}}(Z_1 \cdot Z_2)}_{=\cos(2 \cdot \bar{\theta}_{1,2})} \therefore -1 \leq \cos(2 \cdot \bar{\theta}_{1,2})$$

E

$$\left| \underbrace{\mathcal{E}_{\vec{z}}(Z_1)}_{=0} - \underbrace{\mathcal{E}_{\vec{z}}(Z_2)}_{=0} \right| \leq 1 - \underbrace{\mathcal{E}_{\vec{z}}(Z_1 \cdot Z_2)}_{=\cos(2 \cdot \bar{\theta}_{1,2})} \therefore 1 \geq \cos(2 \cdot \bar{\theta}_{1,2})$$

Logo

$$-1 \leq \cos(2 \cdot \bar{\theta}_{1,2}) \leq 1$$

Tal desigualdade é mantida para quaisquer valores dos parâmetros θ_1 e θ_2 , além disso, a função de probabilidade associada ao cálculo dos valores esperados é especificada (é a função $\mathcal{P}_{Z_{1,2}}$), da qual, pela marginalização de uma das variáveis aleatórias, encontram-se as outras (que são as funções \mathcal{P}_{Z_j} , com $j \in \{+1, +2\}$).

Dessa forma, as funções de probabilidade estão bem definidas, respeitam todos os axiomas de Kolmogorov e tratam de partículas emaranhadas na Mecânica Quântica, portanto, não houve nenhuma suposição de existência de uma função de probabilidade nessa substituição que fosse inconsistente com o Cálculo de Probabilidade.

4.4.2 Desigualdade de Bell

A partir da desigualdade básica Φ_1 , fazendo apenas a substituição do par (W_1, W_2) pelo par $(Z_1 \cdot Z_3, Z_3 \cdot Z_2)$, obtêm-se as seguintes desigualdades:

$$\underbrace{|\mathcal{E}_{\vec{z}}(Z_1 \cdot Z_3) + \mathcal{E}_{\vec{z}}(Z_3 \cdot Z_2)|}_{\equiv \Phi_1^+(Z_1 \cdot Z_3, Z_3 \cdot Z_2)} \leq 1 + \mathcal{E}_{\vec{z}}\left(Z_1 \cdot \underbrace{Z_3 \cdot Z_3}_{=1} \cdot Z_2\right)$$

$$\underbrace{|\mathcal{E}_{\vec{z}}(Z_1 \cdot Z_3) - \mathcal{E}_{\vec{z}}(Z_3 \cdot Z_2)|}_{\equiv \Phi_1^-(Z_1 \cdot Z_3, Z_3 \cdot Z_2)} \leq 1 - \mathcal{E}_{\vec{z}}\left(Z_1 \cdot \underbrace{Z_3 \cdot Z_3}_{=1} \cdot Z_2\right)$$

Portanto,

$$\begin{cases} |\mathcal{E}_{\tilde{Z}}(Z_1 \cdot Z_3) + \mathcal{E}_{\tilde{Z}}(Z_3 \cdot Z_2)| \leq 1 + \mathcal{E}_{\tilde{Z}}(Z_1 \cdot Z_2) \\ |\mathcal{E}_{\tilde{Z}}(Z_1 \cdot Z_3) - \mathcal{E}_{\tilde{Z}}(Z_3 \cdot Z_2)| \leq 1 - \mathcal{E}_{\tilde{Z}}(Z_1 \cdot Z_2) \end{cases}$$

Essas desigualdades são as desigualdades de Bell, obtidas através da desigualdade básica. Elas possuem as mesmas condições para sua validade (ou seja, as variáveis aleatórias devem assumir valores no conjunto $\{-1, +1\}$) quando comparada com as condições na demonstração encontrada na literatura da desigualdade de Bell.

Reescrevendo as desigualdades da seguinte forma:

$$\begin{cases} 0 \leq 1 + \mathcal{E}_{\tilde{Z}}(Z_1 \cdot Z_2) - |\mathcal{E}_{\tilde{Z}}(Z_1 \cdot Z_3) + \mathcal{E}_{\tilde{Z}}(Z_3 \cdot Z_2)| \\ 0 \leq 1 - \mathcal{E}_{\tilde{Z}}(Z_1 \cdot Z_2) - |\mathcal{E}_{\tilde{Z}}(Z_1 \cdot Z_3) - \mathcal{E}_{\tilde{Z}}(Z_3 \cdot Z_2)| \end{cases}$$

Assim, haverá violação se o segundo membro da desigualdade for menor que 0.

Observa-se que, através de uma substituição, obteve-se a desigualdade de Bell a partir da desigualdade básica Φ_1 , lembrando que tanto as variáveis aleatórias Z_j como $M_{j,k}$ assumem valores no conjunto $\{-1, +1\}$, respeitando portanto as condições suficientes para a validade da fórmula Φ_1 .

4.4.2.1 Relação entre a desigualdade de Bell e a desigualdade de Wigner

Nesta seção, serão apresentadas as relações entre as desigualdades de Bell e a de Wigner, começando por escrever as desigualdades de Bell:

$$\begin{cases} |\mathcal{E}_Z(Z_1 \cdot Z_3) + \mathcal{E}_Z(Z_3 \cdot Z_2)| \leq 1 + \mathcal{E}_Z(Z_1 \cdot Z_2) \\ |\mathcal{E}_Z(Z_1 \cdot Z_3) - \mathcal{E}_Z(Z_3 \cdot Z_2)| \leq 1 - \mathcal{E}_Z(Z_1 \cdot Z_2) \end{cases}$$

Que serão reescritas da seguinte forma:

$$\begin{aligned} \underbrace{-(1 + \mathcal{E}_Z(Z_1 \cdot Z_2)) \leq \mathcal{E}_Z(Z_1 \cdot Z_3) + \mathcal{E}_Z(Z_3 \cdot Z_2) \leq 1 + \mathcal{E}_Z(Z_1 \cdot Z_2)}_{\Phi_2^+ :=} \\ \underbrace{-(1 - \mathcal{E}_Z(Z_1 \cdot Z_2)) \leq \mathcal{E}_Z(Z_1 \cdot Z_3) - \mathcal{E}_Z(Z_3 \cdot Z_2) \leq 1 - \mathcal{E}_Z(Z_1 \cdot Z_2)}_{\Phi_2^- :=} \end{aligned}$$

Agora, parte-se para a fórmula Φ_2^- (que se trata da desigualdade de Bell em que, dentro do valor absoluto, há uma soma de valores esperados).

Relembrando que $\mathcal{E}_{Z_j, Z_k}(Z_j \cdot Z_k) = (2 \cdot \mathcal{P}_{Z_j, k}(C) - 1)$ e substituindo em Φ_2^+ , tem-se:

$$\begin{aligned} -\left(1 + (2 \cdot \mathcal{P}_{Z_{1,2}}(C) - 1)\right) &\leq (2 \cdot \mathcal{P}_{Z_{1,3}}(C) - 1) + (2 \cdot \mathcal{P}_{Z_{2,3}}(C) - 1) \leq \\ &\leq 1 + (2 \cdot \mathcal{P}_{Z_{1,2}}(C) - 1) \\ -2 \cdot \mathcal{P}_{Z_{1,2}}(C) &\leq 2 \cdot \mathcal{P}_{Z_{1,3}}(C) + 2 \cdot \mathcal{P}_{Z_{2,3}}(C) - 2 \leq 2 \cdot \mathcal{P}_{Z_{1,2}}(C) \end{aligned}$$

Chega-se na seguinte desigualdade, idêntica à desigualdade de Bell, mas expressa apenas em termos das probabilidades:

$$-\mathcal{P}_{Z_{1,2}}(C) \leq \mathcal{P}_{Z_{1,3}}(C) + \mathcal{P}_{Z_{2,3}}(C) - 1 \leq \mathcal{P}_{Z_{1,2}}(C)$$

Portanto, têm-se duas desigualdades que serão denominadas por $\Phi_{2,1}^+$ e $\Phi_{2,2}^+$

$$\left\{ \begin{array}{l} \underbrace{-\mathcal{P}_{Z_{1,2}}(C) \leq \mathcal{P}_{Z_{1,3}}(C) + \mathcal{P}_{Z_{2,3}}(C) - 1}_{\Phi_{2,1}^+ :=} \\ \underbrace{\mathcal{P}_{Z_{1,3}}(C) + \mathcal{P}_{Z_{2,3}}(C) - 1 \leq \mathcal{P}_{Z_{1,2}}(C)}_{\Phi_{2,2}^+ :=} \end{array} \right.$$

Assim, a desigualdade de Bell Φ_2^+ é válida se, e somente se as duas desigualdades, $\Phi_{2,1}^+$ e $\Phi_{2,2}^+$ forem válidas:

$$\Phi_2^+ \Leftrightarrow (\Phi_{2,1}^+ \wedge \Phi_{2,2}^+)$$

Agora, parte-se para a fórmula $\Phi_{2,1}^+$, que se trata dos dois primeiros membros da desigualdade.

Rearranjando os termos de $\Phi_{2,1}^+$, tem-se:

$$\begin{aligned} -\mathcal{P}_{\dot{z}_{1,2}}(C) &\leq \mathcal{P}_{\dot{z}_{1,3}}(C) + \mathcal{P}_{\dot{z}_{2,3}}(C) - 1 \\ 0 &\leq \mathcal{P}_{\dot{z}_{1,3}}(C) + \mathcal{P}_{\dot{z}_{2,3}}(C) - 1 + \mathcal{P}_{\dot{z}_{1,2}}(C) \end{aligned}$$

Lembrando que $\mathcal{P}_{\dot{z}_{j,k}}(\bar{C}) = 1 - \mathcal{P}_{\dot{z}_{j,k}}(C)$, têm-se as seguintes desigualdades:

$$\left\{ \begin{array}{l} 0 \leq +\mathcal{P}_{\dot{z}_{1,3}}(C) + \mathcal{P}_{\dot{z}_{2,3}}(C) - \underbrace{\mathcal{P}_{\dot{z}_{1,2}}(\bar{C})}_{=\mathcal{P}_{\dot{z}_{1,2}}(C)-1} \\ 0 \leq +\mathcal{P}_{\dot{z}_{1,3}}(C) - \underbrace{\mathcal{P}_{\dot{z}_{2,3}}(\bar{C})}_{=\mathcal{P}_{\dot{z}_{2,3}}(C)-1} + \mathcal{P}_{\dot{z}_{1,2}}(C) \\ 0 \leq -\underbrace{\mathcal{P}_{\dot{z}_{1,3}}(\bar{C})}_{=\mathcal{P}_{\dot{z}_{1,3}}(C)-1} + \mathcal{P}_{\dot{z}_{2,3}}(C) + \mathcal{P}_{\dot{z}_{1,2}}(C) \end{array} \right.$$

Como as três desigualdades são idênticas, será usada a terceira:

$$0 \leq -\mathcal{P}_{\dot{z}_{1,3}}(\bar{C}) + \mathcal{P}_{\dot{z}_{2,3}}(C) + \mathcal{P}_{\dot{z}_{1,2}}(C)$$

Que ao ser reescrita, fica com a seguinte forma:

$$\begin{aligned}
0 &\leq \\
&\leq - \underbrace{\left(\mathcal{P}_{\dot{Z}_{1,3}}(-1, +1) + \mathcal{P}_{\dot{Z}_{1,3}}(+1, -1) \right)}_{=\mathcal{P}_{\dot{Z}_{1,3}}(C)} + \underbrace{\left(\mathcal{P}_{\dot{Z}_{2,3}}(-1, -1) + \mathcal{P}_{\dot{Z}_{2,3}}(+1, +1) \right)}_{=\mathcal{P}_{\dot{Z}_{2,3}}(C)} + \\
&+ \underbrace{\left(\mathcal{P}_{\dot{Z}_{1,2}}(-1, -1) + \mathcal{P}_{\dot{Z}_{1,2}}(+1, +1) \right)}_{=\mathcal{P}_{\dot{Z}_{1,2}}(C)}
\end{aligned}$$

Agora, observa-se que é possível encontrar, na fórmula anterior, termos da desigualdade de Wigner (fórmula $\Phi_0(\dot{Z}_{1,2,3}, -1, -1, +1)$)

$$\begin{aligned}
&\mathcal{P}_{\dot{Z}_{1,2,3}}(-1, -1, -1) + \mathcal{P}_{\dot{Z}_{1,2,3}}(+1, +1, +1) = \\
&= \mathcal{P}_{\dot{Z}_{1,2}}(-1, -1) + \mathcal{P}_{\dot{Z}_{2,3}}(+1, +1) - \mathcal{P}_{\dot{Z}_{1,3}}(-1, +1) \geq 0
\end{aligned}$$

E da desigualdade de Wigner (fórmula $\Phi_0(\dot{Z}_{1,2,3}, +1, +1, -1)$)

$$\begin{aligned}
&\mathcal{P}_{\dot{Z}_{1,2,3}}(+1, +1, +1) + \mathcal{P}_{\dot{Z}_{1,2,3}}(-1, -1, -1) = \\
&= \mathcal{P}_{\dot{Z}_{1,2}}(+1, +1) + \mathcal{P}_{\dot{Z}_{2,3}}(-1, -1) - \mathcal{P}_{\dot{Z}_{1,3}}(+1, -1) \geq 0
\end{aligned}$$

Portanto, $\Phi_{2,1}^+$ (que é parte da desigualdade de Bell expressada em termos de probabilidades) nada mais é que a soma dos membros de duas desigualdades de Wigner:

$$\begin{aligned}
& 0 \leq \\
& \leq -\left(\mathcal{P}_{\dot{z}_{1,3}}(-1, +1) + \mathcal{P}_{\dot{z}_{1,3}}(+1, -1)\right) + \left(\mathcal{P}_{\dot{z}_{2,3}}(-1, -1) + \mathcal{P}_{\dot{z}_{2,3}}(+1, +1)\right) + \\
& + \left(\mathcal{P}_{\dot{z}_{1,2}}(-1, -1) + \mathcal{P}_{\dot{z}_{1,2}}(+1, +1)\right) = \\
& = 2 \cdot \left(\underbrace{\mathcal{P}_{\dot{z}_{1,2,3}}(-1, -1, -1) + \mathcal{P}_{\dot{z}_{1,2,3}}(+1, +1, +1)}_{=\mathcal{P}_{\dot{z}_{1,2,3}}(\{(-1, -1, -1), (+1, +1, +1)\})} \right)
\end{aligned}$$

Ou seja,

$$\Phi_{2,1}^+ \Leftrightarrow \left(\mathcal{P}_{\dot{z}_{1,2,3}}(\{(-1, -1, -1), (+1, +1, +1)\}) \geq 0 \right)$$

Assim, fica demonstrado que a desigualdade $\Phi_{2,1}^+$ é válida se, e somente se, o segundo axioma de Kolmogorov for válido (axioma que diz que a probabilidade $\mathcal{P}_{\dot{z}_{1,2,3}}(\{(-1, -1, -1), (+1, +1, +1)\})$ é sempre maior que, ou igual a, 0).

Agora, parte-se para a fórmula $\Phi_{2,2}^+$, que trata dos dois últimos membros da desigualdade.

Rearranjando os termos de $\Phi_{2,2}^+$, tem-se:

$$\begin{aligned}
& \mathcal{P}_{\dot{z}_{1,3}}(C) + \mathcal{P}_{\dot{z}_{2,3}}(C) - 1 \leq \mathcal{P}_{\dot{z}_{1,2}}(C) \\
& 0 \leq \mathcal{P}_{\dot{z}_{1,2}}(C) - \mathcal{P}_{\dot{z}_{1,3}}(C) + 1 - \mathcal{P}_{\dot{z}_{2,3}}(C)
\end{aligned}$$

Lembrando que $\mathcal{P}_{\dot{z}_{j,k}}(\bar{C}) = 1 - \mathcal{P}_{\dot{z}_{j,k}}(C)$, tem-se as seguintes desigualdades

$$\begin{cases} 0 \leq \mathcal{P}_{\dot{Z}_{1,2}}(C) + \underbrace{\mathcal{P}_{\dot{Z}_{1,3}}(\bar{C})}_{=1-\mathcal{P}_{\dot{Z}_{1,3}}(C)} - \mathcal{P}_{\dot{Z}_{2,3}}(C) \\ 0 \leq \mathcal{P}_{\dot{Z}_{1,2}}(C) - \mathcal{P}_{\dot{Z}_{1,3}}(C) + \underbrace{\mathcal{P}_{\dot{Z}_{2,3}}(\bar{C})}_{=1-\mathcal{P}_{\dot{Z}_{2,3}}(C)} \end{cases}$$

Como as duas desigualdades são idênticas, será usada a segunda:

$$0 \leq \mathcal{P}_{\dot{Z}_{1,2}}(C) - \mathcal{P}_{\dot{Z}_{1,3}}(C) + \mathcal{P}_{\dot{Z}_{2,3}}(\bar{C})$$

Que ao ser reescrita, fica com a seguinte forma:

$$\begin{aligned} 0 &\leq \\ &\leq \underbrace{\left(\mathcal{P}_{\dot{Z}_{1,2}}(-1, -1) + \mathcal{P}_{\dot{Z}_{1,2}}(+1, +1) \right)}_{=\mathcal{P}_{\dot{Z}_{1,2}}(C)} - \underbrace{\left(\mathcal{P}_{\dot{Z}_{1,3}}(-1, -1) + \mathcal{P}_{\dot{Z}_{1,3}}(+1, +1) \right)}_{=\mathcal{P}_{\dot{Z}_{1,3}}(C)} + \\ &+ \underbrace{\left(\mathcal{P}_{\dot{Z}_{2,3}}(-1, +1) + \mathcal{P}_{\dot{Z}_{2,3}}(+1, -1) \right)}_{=\mathcal{P}_{\dot{Z}_{2,3}}(\bar{C})} \end{aligned}$$

Agora, observa-se que é possível encontrar termos da desigualdade de Wigner (fórmula $\Phi_0(\dot{Z}_{1,2,3}, -1, -1, -1)$)

$$\begin{aligned} &\mathcal{P}_{\dot{Z}_{1,2,3}}(-1, -1, +1) + \mathcal{P}_{\dot{Z}_{1,2,3}}(+1, +1, -1) = \\ &= \mathcal{P}_{\dot{Z}_{1,2}}(-1, -1) + \mathcal{P}_{\dot{Z}_{2,3}}(+1, -1) - \mathcal{P}_{\dot{Z}_{1,3}}(-1, -1) \geq 0 \end{aligned}$$

E da desigualdade de Wigner (fórmula $\Phi_0(\dot{Z}_{1,2,3}, +1, +1, +1)$)

$$\begin{aligned} &\mathcal{P}_{\dot{Z}_{1,2,3}}(+1, +1, -1) + \mathcal{P}_{\dot{Z}_{1,2,3}}(-1, -1, +1) = \\ &= \mathcal{P}_{\dot{Z}_{1,2}}(+1, +1) + \mathcal{P}_{\dot{Z}_{2,3}}(-1, +1) - \mathcal{P}_{\dot{Z}_{1,3}}(+1, +1) \geq 0 \end{aligned}$$

Portanto, $\Phi_{2,2}^+$ (que é parte da desigualdade de Bell expressada em termos de probabilidades) nada mais é que a soma dos membros de duas desigualdades de Wigner:

$$\begin{aligned}
0 &\leq \\
&\leq \left(\mathcal{P}_{\dot{Z}_{1,2}}(-1, -1) + \mathcal{P}_{\dot{Z}_{1,2}}(+1, +1) \right) - \left(\mathcal{P}_{\dot{Z}_{1,3}}(-1, -1) + \mathcal{P}_{\dot{Z}_{1,3}}(+1, +1) \right) + \\
&+ \left(\mathcal{P}_{\dot{Z}_{2,3}}(-1, +1) + \mathcal{P}_{\dot{Z}_{2,3}}(+1, -1) \right) = \\
&= 2 \cdot \left(\underbrace{\mathcal{P}_{\dot{Z}_{1,2,3}}(-1, -1, +1) + \mathcal{P}_{\dot{Z}_{1,2,3}}(+1, +1, -1)}_{=\mathcal{P}_{\dot{Z}_{1,2,3}}(\{(-1, -1, +1), (+1, +1, -1)\})} \right)
\end{aligned}$$

Ou seja,

$$\Phi_{2,2}^+ \Leftrightarrow \left(\mathcal{P}_{\dot{Z}_{1,2,3}}(\{(-1, -1, +1), (+1, +1, -1)\}) \geq 0 \right).$$

Assim, fica demonstrado que a desigualdade $\Phi_{2,2}^+$ é válida se, e somente se o segundo axioma de Kolmogorov for válido (axioma que diz que a probabilidade $\mathcal{P}_{\dot{Z}_{1,2,3}}(\{(-1, -1, +1), (+1, +1, -1)\})$ é sempre maior que, ou igual a 0).

Portanto, a validade da desigualdade de Bell (fórmula Φ_2^+) será dada por

$$\begin{aligned}
&(|\mathcal{E}_Z(Z_1 \cdot Z_3) + \mathcal{E}_Z(Z_3 \cdot Z_2)| \leq 1 + \mathcal{E}_Z(Z_1 \cdot Z_2)) \Leftrightarrow \\
&\Leftrightarrow \begin{cases} \mathcal{P}_{\dot{Z}_{1,2,3}}(\{(-1, -1, -1), (+1, +1, +1)\}) \geq 0 \\ \mathcal{P}_{\dot{Z}_{1,2,3}}(\{(-1, -1, +1), (+1, +1, -1)\}) \geq 0 \end{cases}
\end{aligned}$$

Agora, parte-se para a fórmula Φ_2^- (que se trata da desigualdade de Bell em que, dentro do valor absoluto, há uma diferença de valores esperados).

Relembrando que $\mathcal{E}_{Z_j, Z_k}(Z_j \cdot Z_k) = (2 \cdot \mathcal{P}_{Z_j, k}(C) - 1)$ e substituindo em Φ_2^- , tem-se:

$$\begin{aligned} -\left(1 - \left(2 \cdot \mathcal{P}_{Z_{1,2}}(C) - 1\right)\right) &\leq \left(2 \cdot \mathcal{P}_{Z_{1,3}}(C) - 1\right) - \left(2 \cdot \mathcal{P}_{Z_{2,3}}(C) - 1\right) \leq \\ &\leq 1 - \left(2 \cdot \mathcal{P}_{Z_{1,2}}(C) - 1\right) \\ 2 \cdot \mathcal{P}_{Z_{1,2}}(C) - 2 &\leq 2 \cdot \mathcal{P}_{Z_{1,3}}(C) - 2 \cdot \mathcal{P}_{Z_{2,3}}(C) \leq 2 - 2 \cdot \mathcal{P}_{Z_{1,2}}(C) \end{aligned}$$

Chega-se na seguinte desigualdade, idêntica à desigualdade de Bell, mas expressa apenas em termos das probabilidades

$$\mathcal{P}_{Z_{1,2}}(C) - 1 \leq \mathcal{P}_{Z_{1,3}}(C) - \mathcal{P}_{Z_{2,3}}(C) \leq 1 - \mathcal{P}_{Z_{1,2}}(C)$$

Portanto, têm-se duas desigualdades que serão denominadas por $\Phi_{2,1}^-$ e $\Phi_{2,2}^-$

$$\left\{ \begin{array}{l} \underbrace{\mathcal{P}_{Z_{1,2}}(C) - 1 \leq \mathcal{P}_{Z_{1,3}}(C) - \mathcal{P}_{Z_{2,3}}(C)}_{\Phi_{2,1}^- :=} \\ \underbrace{\mathcal{P}_{Z_{1,3}}(C) - \mathcal{P}_{Z_{2,3}}(C) \leq 1 - \mathcal{P}_{Z_{1,2}}(C)}_{\Phi_{2,2}^- :=} \end{array} \right.$$

Assim, a desigualdade de Bell Φ_2^- é válida se, e somente se as duas desigualdades, $\Phi_{2,1}^-$ e $\Phi_{2,2}^-$ forem válidas

$$\Phi_2^- \Leftrightarrow (\Phi_{2,1}^- \wedge \Phi_{2,2}^-).$$

Agora, parte-se para a fórmula $\Phi_{2,1}^-$, que trata dos dois primeiros membros da desigualdade.

Rearranjando os termos de $\Phi_{2,1}^-$, tem-se:

$$\begin{aligned} \mathcal{P}_{\dot{z}_{1,2}}(C) - 1 &\leq \mathcal{P}_{\dot{z}_{1,3}}(C) - \mathcal{P}_{\dot{z}_{2,3}}(C) \\ 0 &\leq \mathcal{P}_{\dot{z}_{1,3}}(C) - \mathcal{P}_{\dot{z}_{2,3}}(C) + 1 - \mathcal{P}_{\dot{z}_{1,2}}(C) \end{aligned}$$

Lembrando que $\mathcal{P}_{\dot{z}_{j,k}}(\bar{C}) = 1 - \mathcal{P}_{\dot{z}_{j,k}}(C)$, tem-se as seguintes desigualdades:

$$\begin{cases} 0 \leq \mathcal{P}_{\dot{z}_{1,3}}(C) + \underbrace{\mathcal{P}_{\dot{z}_{2,3}}(\bar{C})}_{=1-\mathcal{P}_{\dot{z}_{2,3}}(C)} - \mathcal{P}_{\dot{z}_{1,2}}(C) \\ 0 \leq \mathcal{P}_{\dot{z}_{1,3}}(C) - \mathcal{P}_{\dot{z}_{2,3}}(C) + \underbrace{\mathcal{P}_{\dot{z}_{1,2}}(\bar{C})}_{=1-\mathcal{P}_{\dot{z}_{1,2}}(C)} \end{cases}$$

Como as duas desigualdades são idênticas, será usada a primeira:

$$0 \leq \mathcal{P}_{\dot{z}_{1,3}}(C) + \mathcal{P}_{\dot{z}_{2,3}}(\bar{C}) - \mathcal{P}_{\dot{z}_{1,2}}(C)$$

Que ao ser reescrita, tem a seguinte forma:

$$\begin{aligned} 0 &\leq \\ &\leq \underbrace{\left(\mathcal{P}_{\dot{z}_{1,3}}(-1, -1) + \mathcal{P}_{\dot{z}_{1,3}}(+1, +1) \right)}_{=\mathcal{P}_{\dot{z}_{1,3}}(C)} + \underbrace{\left(\mathcal{P}_{\dot{z}_{2,3}}(-1, +1) + \mathcal{P}_{\dot{z}_{2,3}}(+1, -1) \right)}_{=\mathcal{P}_{\dot{z}_{2,3}}(\bar{C})} + \\ &- \underbrace{\left(\mathcal{P}_{\dot{z}_{1,2}}(-1, -1) + \mathcal{P}_{\dot{z}_{1,2}}(+1, +1) \right)}_{=\mathcal{P}_{\dot{z}_{1,2}}(C)} \end{aligned}$$

Agora, observa-se que é possível encontrar termos da desigualdade de Wigner (fórmula $\Phi_0(\dot{Z}_{1,3,2}, -1, -1, -1)$)

$$\begin{aligned} & \frac{\mathcal{P}_{\dot{Z}_{1,3,2}}(-1, -1, +1)}{=\mathcal{P}_{\dot{Z}_{1,2,3}}(-1,+1,-1)} + \frac{\mathcal{P}_{\dot{Z}_{1,3,2}}(+1, +1, -1)}{=\mathcal{P}_{\dot{Z}_{1,2,3}}(+1,-1,+1)} = \\ & = \mathcal{P}_{\dot{Z}_{1,3}}(-1, -1) + \underbrace{\mathcal{P}_{\dot{Z}_{3,2}}(+1, -1)}_{=\mathcal{P}_{\dot{Z}_{2,3}}(-1,+1)} - \mathcal{P}_{\dot{Z}_{1,2}}(-1, -1) \geq 0 \end{aligned}$$

E da desigualdade de Wigner (fórmula $\Phi_0(\dot{Z}_{1,3,2}, +1, +1, +1)$)

$$\begin{aligned} & \Phi_0(\dot{Z}_{1,3,2}, +1, +1, +1) := \\ & := \left(\mathcal{P}_{\dot{Z}_{1,3,2}}(+1, +1, -1) + \mathcal{P}_{\dot{Z}_{1,3,2}}(-1, -1, +1) = \right. \\ & \left. = \mathcal{P}_{\dot{Z}_{1,3}}(+1, +1) + \underbrace{\mathcal{P}_{\dot{Z}_{3,2}}(-1, +1)}_{=\mathcal{P}_{\dot{Z}_{2,3}}(+1,-1)} - \mathcal{P}_{\dot{Z}_{1,2}}(+1, +1) \geq 0 \right) \end{aligned}$$

Portanto, $\Phi_{2,1}^-$ (que é parte da desigualdade de Bell expressada em termos de probabilidades) nada mais é que a soma dos membros de duas desigualdades de Wigner:

$$\begin{aligned} & 0 \leq \\ & \leq \left(\mathcal{P}_{\dot{Z}_{1,3}}(-1, -1) + \mathcal{P}_{\dot{Z}_{1,3}}(+1, +1) \right) + \left(\mathcal{P}_{\dot{Z}_{2,3}}(-1, +1) + \mathcal{P}_{\dot{Z}_{2,3}}(+1, -1) \right) + \\ & - \left(\mathcal{P}_{\dot{Z}_{1,2}}(-1, -1) + \mathcal{P}_{\dot{Z}_{1,2}}(+1, +1) \right) = \\ & = 2 \cdot \left(\frac{\mathcal{P}_{\dot{Z}_{1,2,3}}(-1, +1, -1) + \mathcal{P}_{\dot{Z}_{1,2,3}}(+1, -1, +1)}{=\mathcal{P}_{\dot{Z}_{1,2,3}}(\{(-1,+1,-1),(+1,-1,+1)\})} \right) \end{aligned}$$

Ou seja,

$$\Phi_{2,1}^- \Leftrightarrow \left(\mathcal{P}_{\dot{z}_{1,2,3}}(\{(-1, +1, -1), (+1, -1, +1)\}) \geq 0 \right)$$

Assim, fica demonstrado que a desigualdade $\Phi_{2,1}^-$ é válida se, e somente se o segundo axioma de Kolmogorov for válido (axioma que diz que a probabilidade $\mathcal{P}_{\dot{z}_{1,2,3}}(\{(-1, +1, -1), (+1, -1, +1)\})$ é sempre maior que, ou igual a, 0).

Agora, parte-se para a fórmula $\Phi_{2,2}^-$, que trata dos dois últimos membros da desigualdade.

Rearranjando os termos de $\Phi_{2,2}^-$, tem-se:

$$\begin{aligned} \mathcal{P}_{\dot{z}_{1,3}}(C) - \mathcal{P}_{\dot{z}_{2,3}}(C) &\leq 1 - \mathcal{P}_{\dot{z}_{1,2}}(C) \\ 0 &\leq 1 - \mathcal{P}_{\dot{z}_{1,2}}(C) - \mathcal{P}_{\dot{z}_{1,3}}(C) + \mathcal{P}_{\dot{z}_{2,3}}(C) \end{aligned}$$

Lembrando que $\mathcal{P}_{\dot{z}_{j,k}}(\bar{C}) = 1 - \mathcal{P}_{\dot{z}_{j,k}}(C)$, tem-se as seguintes desigualdades:

$$\left\{ \begin{array}{l} 0 \leq \underbrace{+\mathcal{P}_{\dot{z}_{1,2}}(\bar{C})}_{=1-\mathcal{P}_{\dot{z}_{1,2}}(C)} - \mathcal{P}_{\dot{z}_{1,3}}(C) + \mathcal{P}_{\dot{z}_{2,3}}(C) \\ 0 \leq -\mathcal{P}_{\dot{z}_{1,2}}(C) + \underbrace{+\mathcal{P}_{\dot{z}_{1,3}}(\bar{C})}_{=1-\mathcal{P}_{\dot{z}_{1,3}}(C)} + \mathcal{P}_{\dot{z}_{2,3}}(C) \end{array} \right.$$

Como as duas desigualdades são idênticas, será usada a segunda:

$$0 \leq -\mathcal{P}_{\dot{z}_{1,2}}(C) + \mathcal{P}_{\dot{z}_{1,3}}(\bar{C}) + \mathcal{P}_{\dot{z}_{2,3}}(C)$$

Que ao ser reescrita, fica com a seguinte forma:

$$\begin{aligned}
& 0 \leq \\
& \leq -\left(\mathcal{P}_{\dot{Z}_{1,2}}(-1, -1) + \mathcal{P}_{\dot{Z}_{1,2}}(+1, +1)\right) + \left(\mathcal{P}_{\dot{Z}_{1,3}}(-1, +1) + \mathcal{P}_{\dot{Z}_{1,3}}(+1, -1)\right) + \\
& + \left(\mathcal{P}_{\dot{Z}_{2,3}}(-1, -1) + \mathcal{P}_{\dot{Z}_{2,3}}(+1, +1)\right)
\end{aligned}$$

Agora, observa-se que é possível encontrar termos da desigualdade de Wigner (fórmula $\Phi_0(\dot{Z}_{1,3,2}, -1, +1, -1)$)

$$\begin{aligned}
& \underbrace{\mathcal{P}_{\dot{Z}_{1,3,2}}(-1, +1, +1)}_{=\mathcal{P}_{\dot{Z}_{1,2,3}}(-1,+1,+1)} + \underbrace{\mathcal{P}_{\dot{Z}_{1,3,2}}(+1, -1, -1)}_{=\mathcal{P}_{\dot{Z}_{1,2,3}}(+1,-1,-1)} = \\
& = \mathcal{P}_{\dot{Z}_{1,3}}(-1, +1) + \underbrace{\mathcal{P}_{\dot{Z}_{3,2}}(-1, -1)}_{=\mathcal{P}_{\dot{Z}_{2,3}}(-1,-1)} - \mathcal{P}_{\dot{Z}_{1,2}}(-1, -1) \geq 0
\end{aligned}$$

E da desigualdade de Wigner (fórmula $\Phi_0(\dot{Z}_{1,3,2}, +1, -1, +1)$)

$$\begin{aligned}
& \underbrace{\mathcal{P}_{\dot{Z}_{1,3,2}}(+1, -1, -1)}_{=\mathcal{P}_{\dot{Z}_{1,2,3}}(+1,-1,-1)} + \underbrace{\mathcal{P}_{\dot{Z}_{1,3,2}}(-1, +1, +1)}_{=\mathcal{P}_{\dot{Z}_{1,2,3}}(-1,+1,+1)} = \\
& = \mathcal{P}_{\dot{Z}_{1,3}}(+1, -1) + \underbrace{\mathcal{P}_{\dot{Z}_{3,2}}(+1, +1)}_{=\mathcal{P}_{\dot{Z}_{2,3}}(+1,+1)} - \mathcal{P}_{\dot{Z}_{1,2}}(+1, +1) \geq 0
\end{aligned}$$

Portanto, $\Phi_{2,2}^-$ (que é parte da desigualdade de Bell expressada em termos de probabilidades) nada mais é que a soma dos membros de duas desigualdades de Wigner:

$$\begin{aligned}
& 0 \leq \\
& \leq - \left(\mathcal{P}_{\dot{Z}_{1,2}}(-1, -1) + \mathcal{P}_{\dot{Z}_{1,2}}(+1, +1) \right) + \left(\mathcal{P}_{\dot{Z}_{1,3}}(-1, +1) + \mathcal{P}_{\dot{Z}_{1,3}}(+1, -1) \right) + \\
& + \left(\mathcal{P}_{\dot{Z}_{2,3}}(-1, -1) + \mathcal{P}_{\dot{Z}_{2,3}}(+1, +1) \right) = \\
& = 2 \cdot \left(\underbrace{\mathcal{P}_{\dot{Z}_{1,2,3}}(-1, +1, +1) + \mathcal{P}_{\dot{Z}_{1,2,3}}(+1, -1, -1)}_{=\mathcal{P}_{\dot{Z}_{1,2,3}}(\{(-1, +1, +1), (+1, -1, -1)\})} \right)
\end{aligned}$$

Ou seja,

$$\Phi_{2,2}^- \Leftrightarrow \left(\mathcal{P}_{\dot{Z}_{1,2,3}}(\{(-1, +1, +1), (+1, -1, -1)\}) \geq 0 \right)$$

Assim, fica demonstrado que a desigualdade $\Phi_{2,2}^-$ é válida se, e somente se o segundo axioma de Kolmogorov for válido (axioma que diz que a probabilidade $\mathcal{P}_{\dot{Z}_{1,2,3}}(\{(-1, +1, +1), (+1, -1, -1)\})$ é sempre maior que, ou igual a, 0).

Portanto, a validade da desigualdade de Bell $\Phi_{2,2}^-$ será dada por:

$$\begin{aligned}
& (|\mathcal{E}_Z(Z_1 \cdot Z_3) - \mathcal{E}_Z(Z_3 \cdot Z_2)| \leq 1 - \mathcal{E}_Z(Z_1 \cdot Z_2)) \Leftrightarrow \\
& \Leftrightarrow \begin{cases} \mathcal{P}_{\dot{Z}_{1,2,3}}(\{(-1, +1, -1), (+1, -1, +1)\}) \geq 0 \\ \mathcal{P}_{\dot{Z}_{1,2,3}}(\{(-1, +1, +1), (+1, -1, -1)\}) \geq 0 \end{cases}
\end{aligned}$$

Conclui-se, portanto, que a validade das desigualdades de Bell está ligada com a validade do segundo axioma de Kolmogorov, pela seguinte fórmula:

$$(|\mathcal{E}_Z(Z_1 \cdot Z_3) + \mathcal{E}_Z(Z_3 \cdot Z_2)| \leq 1 + \mathcal{E}_Z(Z_1 \cdot Z_2)) \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \mathcal{P}_{Z_{1,2,3}}(\{(-1, -1, -1), (+1, +1, +1)\}) \geq 0 \\ \mathcal{P}_{Z_{1,2,3}}(\{(-1, -1, +1), (+1, +1, -1)\}) \geq 0 \end{array} \right\}$$

Que será denominada por $\Phi_3^+(Z_1, Z_2, Z_3)$, e a seguinte fórmula:

$$(|\mathcal{E}_Z(Z_1 \cdot Z_3) - \mathcal{E}_Z(Z_3 \cdot Z_2)| \leq 1 - \mathcal{E}_Z(Z_1 \cdot Z_2)) \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \mathcal{P}_{Z_{1,2,3}}(\{(-1, +1, -1), (+1, -1, +1)\}) \geq 0 \\ \mathcal{P}_{Z_{1,2,3}}(\{(-1, +1, +1), (+1, -1, -1)\}) \geq 0 \end{array} \right\}$$

Que será denominada por $\Phi_3^-(Z_1, Z_2, Z_3)$.

Assim, conclui-se que violar a desigualdade de Bell é o mesmo que violar o segundo axioma de Kolmogorov para a probabilidade, que afirma que a probabilidade de qualquer evento é sempre maior que, ou igual a 0.

4.4.2.2 Modelagem via probabilidade condicional

Nesta seção, será demonstrado, a partir da noção de probabilidade condicional, como se pode criar funções de probabilidade de forma a não violar a desigualdade de Bell, quaisquer que sejam os valores assumidos pelos parâmetros. Nessa modelagem, torna-se necessária a introdução de novos parâmetros para distinguir as configurações em que o experimento pode estar.

Supondo que há uma probabilidade associada para cada configuração possível (seja devido a algum tipo de controle, como a determinação da frequência com que se repetirá o experimento em cada configuração, ou através de algum processo aleatório da qual se saiba com que probabilidade cada configuração se repetirá), tem-se que

- a) p_1 (sendo $0 \leq p_1 \leq 1$) é a probabilidade para ocorrer a configuração do experimento em que o par de partículas interage com aparatos com parâmetros θ_1 e θ_2 ,
- b) p_2 (sendo $0 \leq p_2 \leq 1 - p_1$) é a probabilidade para ocorrer a configuração do experimento em que o par de partículas interage com aparatos com parâmetros θ_1 e θ_3 ,
- c) $(1 - p_1 - p_2)$ é a probabilidade para ocorrer a configuração do experimento em que o par de partículas interage com aparatos com parâmetros θ_2 e θ_3 .

Portanto, pode-se associar aos trajetos uma variável aleatória Y , com $Y \in \{1, 2, 3\}$, em que:

- a) $Y = 1$ que corresponde à configuração com parâmetros θ_1 e θ_2
- b) $Y = 2$ que corresponde à configuração com parâmetros θ_1 e θ_3
- c) $Y = 3$ que corresponde à configuração com parâmetros θ_2 e θ_3

Dessa forma, tem-se na função de probabilidade as variáveis aleatórias referentes à passagem das partículas pelos aparatos (Z_1, Z_2, Z_3) e as referentes ao trajeto percorrido (Y) até chegarem aos polarizadores:

$$\mathcal{P}_{Z_{1,2,3}, Y}(Z_1, Z_2, Z_3, Y) = \begin{cases} \mathcal{P}_Y(Y) \cdot \mathcal{P}_{Z_{1,2}}(Z_1, Z_2) \Leftarrow (Y, Z_3) = (3, 0) \\ \mathcal{P}_Y(Y) \cdot \mathcal{P}_{Z_{1,3}}(Z_1, Z_3) \Leftarrow (Y, Z_2) = (2, 0) \\ \mathcal{P}_Y(Y) \cdot \mathcal{P}_{Z_{2,3}}(Z_2, Z_3) \Leftarrow (Y, Z_1) = (1, 0) \end{cases},$$

$$\mathcal{P}_Y(Y) \equiv \begin{cases} p_1 \Leftarrow Y = 1 \\ p_2 \Leftarrow Y = 2 \\ 1 - p_1 - p_2 \Leftarrow Y = 3 \end{cases}, \quad 0 \leq p_1 \leq 1, \quad 0 \leq p_2 \leq 1 - p_1$$

Em que $Z_j = 0$, com $j \in \{1, 2, 3\}$, significa a ausência de detecção, ou seja, o trajeto percorrido foi o correspondente a $Y = j$. A variável Z_k (com $k \neq j$) possuirá valor pertencente a $\{-1, +1\}$, pois a partícula deverá ter passado pelos outros detectores, presentes na configuração e $Z_j = 0$ é a falta de interação entre a partícula e o aparato devido ao fato da partícula não ter passado por esse aparato.

Portanto, a probabilidade condicional (dado que os fótons percorreram pelos trajetos relacionados com a variável aleatória Y) será:

$$\mathcal{P}_{\dot{Z}_{1,2,3};Y}(Z_1, Z_2, Z_3; Y) = \begin{cases} \mathcal{P}_{\dot{Z}_{1,2}}(Z_1, Z_2) \Leftarrow (Y, Z_3) = (3, 0) \\ \mathcal{P}_{\dot{Z}_{1,3}}(Z_1, Z_3) \Leftarrow (Y, Z_2) = (2, 0) \\ \mathcal{P}_{\dot{Z}_{2,3}}(Z_2, Z_3) \Leftarrow (Y, Z_1) = (1, 0) \end{cases}$$

A esperança condicional (o sinal de ponto e vírgula separa as variáveis aleatórias $\dot{Z}_{1,2,3}$ da observada Y) do produto $Z_j \cdot Z_k$ será:

$$\mathcal{E}_{\dot{Z}_{1,2,3};Y}(Z_j \cdot Z_k; Y) = \sum_{Z_j=-1}^1 \sum_{Z_k=-1}^1 (Z_j \cdot Z_k \cdot \mathcal{P}_{\dot{Z}_{1,2,3};Y}(Z_1, Z_2, Z_3; Y))$$

Portanto,

$$\mathcal{E}_{\dot{Z}_{1,2,3};Y}(Z_j \cdot Z_k; Y) = \cos(2 \cdot \bar{\theta}_{j,k}), \quad \{j, k\} = \{1, 2, 3\} - \{Y\}, \quad Y \in \{1, 2, 3\}$$

Assim, com esse entendimento, a substituição feita na desigualdade seria proveniente não da esperança $\mathcal{E}_{\dot{Z}_{1,2,3}}$, mas sim da esperança condicional $\mathcal{E}_{\dot{Z}_{1,2,3};Y}$, desse modo:

$$\left| \mathcal{E}_{\dot{Z}_{1,2,3};Y}(Z_1 \cdot Z_3; 2) \pm \mathcal{E}_{\dot{Z}_{1,2,3};Y}(Z_2 \cdot Z_3; 1) \right| \leq 1 \pm \mathcal{E}_{\dot{Z}_{1,2,3};Y}(Z_1 \cdot Z_2; 3)$$

O que não faz sentido na Teoria da Probabilidade misturar dessa forma esperanças condicionais em que os eventos dados são diferentes. Sabe-se que a probabilidade condicional de um dado evento ocorrido, possui as mesmas propriedades da probabilidade (demonstradas a partir dos axiomas de probabilidade), mas o evento ocorrido é mantido fixo.

O cálculo da esperança de $Z_j \cdot Z_k$ com tal função de probabilidade seria dado por:

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_{Z_{1,2,3},Y}(Z_j \cdot Z_k) &= \mathcal{E}_Y \left(\mathcal{E}_{Z_{1,2,3},Y}(Z_j \cdot Z_k; Y) \right) \\ \mathcal{E}_{Z_{1,2,3},Y}(Z_j \cdot Z_k) &= \begin{cases} \mathcal{P}_Y(Y) \cdot \cos(2 \cdot \bar{\theta}_{j,k}) & \Leftarrow \{j, k\} = \{1, 2, 3\} - \{Y\} \\ 0 & \Leftarrow \neg(\{j, k\} = \{1, 2, 3\} - \{Y\}) \end{cases} \end{aligned}$$

Portanto, a desigualdade seria

$$|p_2 \cdot \cos(2 \cdot \bar{\theta}_{1,3}) \pm p_1 \cdot \cos(2 \cdot \bar{\theta}_{2,3})| \leq 1 \pm (1 - p_1 - p_2) \cdot \cos(2 \cdot \bar{\theta}_{1,2})$$

Lembrando que

$$\begin{aligned} -1 \leq \cos(u) \leq +1, \quad 0 \leq p_1 \leq 1, \quad 0 \leq p_2 \leq 1 - p_1, \\ 0 \leq 1 - p_1 - p_2 \end{aligned}$$

Portanto, se o maior valor assumido pelo primeiro membro

$$\sup_{(\theta_1, \theta_2, \theta_3) \in \Theta^3} (|p_2 \cdot \cos(2 \cdot \bar{\theta}_{1,3}) \pm p_1 \cdot \cos(2 \cdot \bar{\theta}_{2,3})|) = |p_2 + p_1|$$

For menor que o menor valor assumido pelo segundo membro da desigualdade

$$\inf_{(\theta_1, \theta_2) \in \Theta^2} (1 \pm (1 - p_1 - p_2) \cdot \cos(2 \cdot \bar{\theta}_{1,2})) = 1 - (1 - p_1 - p_2) = p_2 + p_1$$

A desigualdade será mantida para os demais valores.

Portanto, se a seguinte fórmula for verdadeira:

$$|p_2 + p_1| \leq p_2 + p_1$$

Não haverá violação da desigualdade. Como p_1 e p_2 são maiores ou iguais a zero, tem-se que:

$$|p_2 + p_1| = p_2 + p_1$$

Para quaisquer valores de p_1 , no conjunto em que foi definido (o conjunto $\{u \in \mathbb{R}: 0 \leq u \leq 1\}$) e para quaisquer valores de p_2 , no conjunto em que foi definido (o conjunto $\{u \in \mathbb{R}: 0 \leq u \leq 1 - p_1\}$), a desigualdade de Bell é sempre válida com a modelagem via probabilidade condicional.

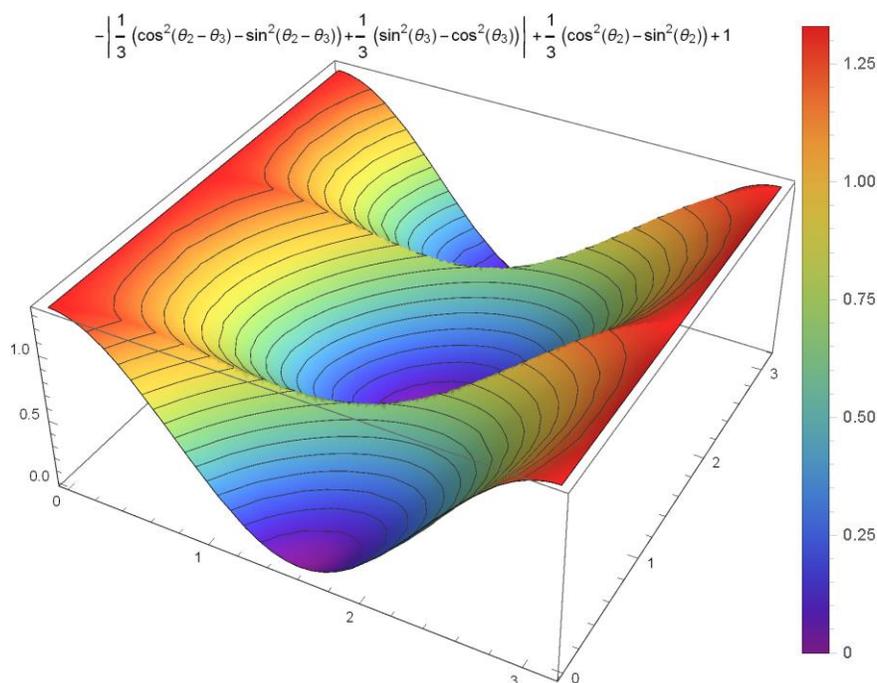


Gráfico 7 Gráfico dos valores assumidos pelo primeiro membro da desigualdade de Bell, usando as probabilidades condicionais, assumindo $p_1 = p_2 = \frac{1}{3}$

Observa-se no gráfico que não há violação da desigualdade de Bell para quaisquer que sejam os valores assumidos pelos parâmetros θ_j , pois em nenhum momento assume valores menores que 0.

4.4.2.3 Conclusão acerca da violação da desigualdade de Bell

Conclui-se que a “violação da desigualdade de Bell” surge com o uso de funções de probabilidade marginais, sem apresentação de nenhuma função de probabilidade conjunta que satisfaça as marginais. Assim, apesar das funções de probabilidade dos pares de partículas serem semelhantes quanto à dependência dos parâmetros θ_j , é impossível encontrar uma função de probabilidade conjunta

(para triplas de partículas) tal que suas marginais resultem nas funções de probabilidade marginais (para duplas de partículas) fornecidas.

Portanto, se trata de uma desigualdade que ocorre com funções de probabilidade marginais com parâmetros diferentes, sendo que nos axiomas de Kolmogorov apenas as variáveis aleatórias variam e os parâmetros são considerados sempre fixos.

Porém, caso se considere que haja “probabilidade negativa”, isto é, uma violação do segundo axioma de Kolmogorov, então haveria uma violação das desigualdades. Ao se violar a desigualdade de Bell, com a suposição de existência de probabilidade negativa, os resultados concordam com o apresentado por John S. Bell em seu artigo.

Ao se analisar o experimento idealizado como sendo três experimentos (cada um com uma configuração dos parâmetros), e que cada configuração é repetida um determinado número de vezes (conforme suas probabilidades de ocorrerem), então os valores esperados apresentados nos artigos se tornam valores esperados condicionais, e os valores esperados devidamente calculados, quando substituídos na desigualdade de Bell, não há violação, quaisquer que sejam os parâmetros.

4.4.3 Desigualdade de Clauser-Horne-Shimony-Holt

A partir de duas desigualdades de Bell, com argumentos $(Z_1 \cdot Z_3, Z_1 \cdot Z_4)$ em uma e $(Z_2 \cdot Z_3, Z_2 \cdot Z_4)$ em outra desigualdade, tem-se:

$$\frac{|\mathcal{E}_Z(Z_1 \cdot Z_3) - \mathcal{E}_Z(Z_1 \cdot Z_4)| \leq 1 - \mathcal{E}_Z(Z_3 \cdot Z_4)}{\equiv \Phi_1^-(Z_1 \cdot Z_3, Z_1 \cdot Z_4)}$$

$$\frac{|\mathcal{E}_Z(Z_2 \cdot Z_3) + \mathcal{E}_Z(Z_2 \cdot Z_4)| \leq 1 + \mathcal{E}_Z(Z_3 \cdot Z_4)}{\equiv \Phi_1^+(Z_2 \cdot Z_3, Z_2 \cdot Z_4)}$$

Ou seja,

$$\begin{aligned} -(1 - \varepsilon_Z(Z_3 \cdot Z_4)) &\leq \varepsilon_Z(Z_1 \cdot Z_3) - \varepsilon_Z(Z_1 \cdot Z_4) \leq 1 - \varepsilon_Z(Z_3 \cdot Z_4) \\ -(1 + \varepsilon_Z(Z_3 \cdot Z_4)) &\leq \varepsilon_Z(Z_2 \cdot Z_3) + \varepsilon_Z(Z_2 \cdot Z_4) \leq 1 + \varepsilon_Z(Z_3 \cdot Z_4) \end{aligned}$$

Pode-se obter a desigualdade de Clauser-Horne-Shimony-Holt somando-se os membros de Φ_1^- com Φ_1^+

$$\begin{aligned} &-(1 - \varepsilon_Z(Z_3 \cdot Z_4)) - (1 + \varepsilon_Z(Z_3 \cdot Z_4)) \leq \\ &\leq \varepsilon_Z(Z_1 \cdot Z_3) - \varepsilon_Z(Z_1 \cdot Z_4) + \varepsilon_Z(Z_2 \cdot Z_3) + \varepsilon_Z(Z_2 \cdot Z_4) \leq \\ &\leq 1 - \varepsilon_Z(Z_3 \cdot Z_4) + 1 + \varepsilon_Z(Z_3 \cdot Z_4) \end{aligned}$$

Portanto,

$$-2 \leq \varepsilon_Z(Z_1 \cdot Z_3) - \varepsilon_Z(Z_1 \cdot Z_4) + \varepsilon_Z(Z_2 \cdot Z_3) + \varepsilon_Z(Z_2 \cdot Z_4) \leq 2$$

Ou seja,

$$|\varepsilon_Z(Z_1 \cdot Z_3) - \varepsilon_Z(Z_1 \cdot Z_4) + \varepsilon_Z(Z_2 \cdot Z_3) + \varepsilon_Z(Z_2 \cdot Z_4)| \leq 2$$

Que é a desigualdade de Clauser-Horne-Shimony-Holt, com a condição de que as variáveis aleatórias $Z_j \in \{-1, +1\}$, com $j \in \{1,2,3,4\}$.

Reescrevendo da seguinte forma:

$$0 \leq 2 - |\varepsilon_Z(Z_1 \cdot Z_3) - \varepsilon_Z(Z_1 \cdot Z_4) + \varepsilon_Z(Z_2 \cdot Z_3) + \varepsilon_Z(Z_2 \cdot Z_4)|$$

Assim, para que haja violação, basta que o segundo membro seja menor que 0.

4.4.3.1 Relação entre a desigualdade de Clauser-Horne-Shimony-Holt e a desigualdade de Bell

Suponha que uma das desigualdades de Bell, por exemplo, $\Phi_1^-(Z_1 \cdot Z_3, Z_1 \cdot Z_4)$

$$|\mathcal{E}_Z(Z_1 \cdot Z_3) - \mathcal{E}_Z(Z_1 \cdot Z_4)| \leq 1 - \mathcal{E}_Z(Z_3 \cdot Z_4)$$

Seja violada, portanto,

$$|\mathcal{E}_Z(Z_1 \cdot Z_3) - \mathcal{E}_Z(Z_1 \cdot Z_4)| > 1 - \mathcal{E}_Z(Z_3 \cdot Z_4)$$

Ou seja, existe uma constante positiva a , tal que o primeiro membro seja igual ao segundo acrescido desta constante:

$$(\exists a > 0)(|\mathcal{E}_Z(Z_1 \cdot Z_3) - \mathcal{E}_Z(Z_1 \cdot Z_4)| = 1 - \mathcal{E}_Z(Z_3 \cdot Z_4) + a).$$

Suponha também que a desigualdade de Bell $\Phi_1^+(Z_2 \cdot Z_3, Z_2 \cdot Z_4)$ seja mantida:

$$|\mathcal{E}_Z(Z_2 \cdot Z_3) + \mathcal{E}_Z(Z_2 \cdot Z_4)| \leq 1 + \mathcal{E}_Z(Z_3 \cdot Z_4)$$

Ou seja, que exista uma constante positiva b , tal que o primeiro membro seja igual ao segundo subtraído desta constante:

$$(\exists b \geq 0)(|\mathcal{E}_Z(Z_2 \cdot Z_3) + \mathcal{E}_Z(Z_2 \cdot Z_4)| = 1 + \mathcal{E}_Z(Z_3 \cdot Z_4) - b)$$

Somando, tem-se:

$$\begin{aligned} & |\mathcal{E}_Z(Z_1 \cdot Z_3) - \mathcal{E}_Z(Z_1 \cdot Z_4)| + |\mathcal{E}_Z(Z_2 \cdot Z_3) + \mathcal{E}_Z(Z_2 \cdot Z_4)| = \\ & = 1 - \mathcal{E}_Z(Z_3 \cdot Z_4) + a + 1 + \mathcal{E}_Z(Z_3 \cdot Z_4) - b = 2 + a - b \end{aligned}$$

Portanto,

$$a \leq b \Rightarrow |\mathcal{E}_Z(Z_1 \cdot Z_3) - \mathcal{E}_Z(Z_1 \cdot Z_4)| + |\mathcal{E}_Z(Z_2 \cdot Z_3) + \mathcal{E}_Z(Z_2 \cdot Z_4)| \leq 2$$

Ou seja, a violação de uma das desigualdades de Bell não implica na violação da desigualdade de Clauser-Horne-Shimony-Holt, pois a violação de uma pode ser compensada pela outra desigualdade que foi mantida. Porém, se ambas as desigualdade de Bell forem violadas, então a desigualdade de Clauser-Horne-Shimony-Holt também será violada. Em outras palavras, se ambas as desigualdades de Bell forem mantidas:

$$\begin{cases} |\mathcal{E}_Z(Z_1 \cdot Z_3) - \mathcal{E}_Z(Z_1 \cdot Z_4)| \leq 1 - \mathcal{E}_Z(Z_3 \cdot Z_4) \\ |\mathcal{E}_Z(Z_2 \cdot Z_3) + \mathcal{E}_Z(Z_2 \cdot Z_4)| \leq 1 + \mathcal{E}_Z(Z_3 \cdot Z_4) \end{cases}$$

Então a desigualdade de Clauser-Horne-Shimony-Holt também será mantida. A desigualdade será violada caso:

$$\begin{cases} |\mathcal{E}_Z(Z_1 \cdot Z_3) - \mathcal{E}_Z(Z_1 \cdot Z_4)| > 1 - \mathcal{E}_Z(Z_3 \cdot Z_4) \\ |\mathcal{E}_Z(Z_2 \cdot Z_3) + \mathcal{E}_Z(Z_2 \cdot Z_4)| > 1 + \mathcal{E}_Z(Z_3 \cdot Z_4) \end{cases}$$

Expressando numa única fórmula, tem-se que, se ambas as desigualdades de Bell forem mantidas, então a desigualdade de Clauser-Horne-Shimony-Holt também será mantida:

$$\begin{aligned} & \left\{ \begin{array}{l} |\mathcal{E}_Z(Z_1 \cdot Z_3) - \mathcal{E}_Z(Z_1 \cdot Z_4)| \leq 1 - \mathcal{E}_Z(Z_3 \cdot Z_4) \\ |\mathcal{E}_Z(Z_2 \cdot Z_3) + \mathcal{E}_Z(Z_2 \cdot Z_4)| \leq 1 + \mathcal{E}_Z(Z_3 \cdot Z_4) \end{array} \right\} \Rightarrow \\ & \Rightarrow (|\mathcal{E}_Z(Z_1 \cdot Z_3) - \mathcal{E}_Z(Z_1 \cdot Z_4)| + |\mathcal{E}_Z(Z_2 \cdot Z_3) + \mathcal{E}_Z(Z_2 \cdot Z_4)| \leq 2) \end{aligned}$$

E se ambas as desigualdades de Bell forem violadas, então a desigualdade de Clauser-Horne-Shimony-Holt também será violada

$$\begin{aligned} & \left\{ \begin{array}{l} |\mathcal{E}_Z(Z_1 \cdot Z_3) - \mathcal{E}_Z(Z_1 \cdot Z_4)| > 1 - \mathcal{E}_Z(Z_3 \cdot Z_4) \\ |\mathcal{E}_Z(Z_2 \cdot Z_3) + \mathcal{E}_Z(Z_2 \cdot Z_4)| > 1 + \mathcal{E}_Z(Z_3 \cdot Z_4) \end{array} \right\} \Rightarrow \\ & \Rightarrow (|\mathcal{E}_Z(Z_1 \cdot Z_3) - \mathcal{E}_Z(Z_1 \cdot Z_4)| + |\mathcal{E}_Z(Z_2 \cdot Z_3) + \mathcal{E}_Z(Z_2 \cdot Z_4)| > 2) \end{aligned}$$

4.4.3.2 Relação entre a desigualdade de Clauser-Horne-Shimony-Holt e a desigualdade de Wigner

Através da identidade que há entre a desigualdade de Bell e a desigualdade de Wigner, expressa pela fórmula $\Phi_3^-(Z_3, Z_4, Z_1)$

$$\begin{aligned} & (|\mathcal{E}_Z(Z_1 \cdot Z_3) - \mathcal{E}_Z(Z_1 \cdot Z_4)| \leq 1 - \mathcal{E}_Z(Z_3 \cdot Z_4)) \Leftrightarrow \\ & \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \mathcal{P}_{Z_{3,4,1}}^{\dot{Z}}(\{(-1, +1, -1), (+1, -1, +1)\}) \geq 0 \\ \quad = \mathcal{P}_{Z_{1,3,4}}^{\dot{Z}}(\{(-1, -1, +1), (+1, +1, -1)\}) \\ \mathcal{P}_{Z_{3,4,1}}^{\dot{Z}}(\{(-1, +1, +1), (+1, -1, -1)\}) \geq 0 \\ \quad = \mathcal{P}_{Z_{1,3,4}}^{\dot{Z}}(\{(+1, -1, +1), (-1, +1, -1)\}) \end{array} \right\} \end{aligned}$$

E pela fórmula $\Phi_3^+(Z_3, Z_4, Z_2)$

$$\begin{aligned} & (|\mathcal{E}_Z(Z_2 \cdot Z_3) + \mathcal{E}_Z(Z_2 \cdot Z_4)| \leq 1 + \mathcal{E}_Z(Z_3 \cdot Z_4)) \Leftrightarrow \\ & \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \mathcal{P}_{Z_{3,4,2}}^{\dot{Z}}(\{(-1, -1, -1), (+1, +1, +1)\}) \geq 0 \\ \quad = \mathcal{P}_{Z_{2,3,4}}^{\dot{Z}}(\{(-1, -1, -1), (+1, +1, +1)\}) \\ \mathcal{P}_{Z_{3,4,2}}^{\dot{Z}}(\{(-1, -1, +1), (+1, +1, -1)\}) \geq 0 \\ \quad = \mathcal{P}_{Z_{2,3,4}}^{\dot{Z}}(\{(+1, -1, -1), (-1, +1, +1)\}) \end{array} \right\} \end{aligned}$$

Portanto, a desigualdade de Clauser-Horne-Shimony-Holt será mantida se ambas as desigualdades de Bell forem mantidas, o que significa que as seguintes desigualdades devem ser mantidas:

$$\begin{cases} \mathcal{P}_{\dot{z}_{1,3,4}}(\{(-1, -1, +1), (+1, +1, -1)\}) \geq 0 \\ \mathcal{P}_{\dot{z}_{1,3,4}}(\{(+1, -1, +1), (-1, +1, -1)\}) \geq 0 \\ \mathcal{P}_{\dot{z}_{2,3,4}}(\{(-1, -1, -1), (+1, +1, +1)\}) \geq 0 \\ \mathcal{P}_{\dot{z}_{2,3,4}}(\{(+1, -1, -1), (-1, +1, +1)\}) \geq 0 \end{cases}$$

Logo, a validade da desigualdade de Clauser-Horne-Shimony-Holt está ligada à validade do segundo axioma de Kolmogorov.

4.4.3.3 Modelagem via probabilidade condicional

Observando o esquema do experimento

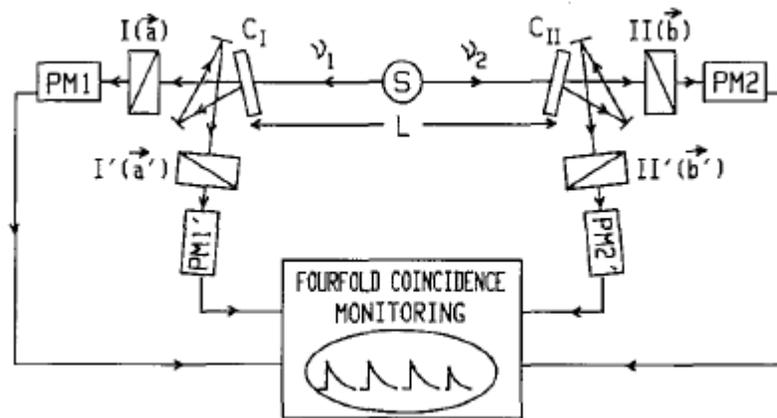


Figura 7 Figura extraída de Aspect, Dalibard e Roger (1982)

Observa-se que há uma probabilidade associada para cada trajeto possível, sendo que em cada trajeto há um aparato e no final um detector. Assim,

dependendo do trajeto percorrido por cada partícula (sendo que cada trajeto levará a partícula a um aparato com uma determinada orientação), tem-se uma configuração diferente dos parâmetros.

Tem-se, portanto, estes novos parâmetros (relacionados com a probabilidade de se tomar um determinado trajeto):

- a) a probabilidade p_1 , com $0 \leq p_1 \leq 1$, de nenhuma partícula se desviar;
- b) a probabilidade p_2 , com $0 \leq p_2 \leq 1 - p_1$, de somente a partícula 2 se desviar;
- c) a probabilidade p_3 , com $0 \leq p_3 \leq 1 - p_1 - p_2$, de somente a partícula 1 se desviar e
- d) a probabilidade $(1 - p_1 - p_2 - p_3)$ das partículas 1 e 2 se desviarem.

Portanto, pode-se associar uma variável aleatória Y , cujo valor corresponde aos trajetos percorridos pelas partículas. O evento em que o fóton k se desvia para o trajeto que tem o polarizador y_k corresponde a $Y_k = y_k$. Dessa forma, tem-se, na função de probabilidade, as variáveis aleatórias referentes à passagem dos fótons pelos polarizadores (Z_j com $j \in \{1,2,3,4\}$) e as referentes ao trajeto percorrido (Y_1, Y_2) até chegarem aos polarizadores.

$$\begin{aligned} \mathcal{P}_{Z_{1,2,3,4}, Y_{1,2}}(Z_1, Z_2, Z_3, Z_4, Y_1, Y_2) &= \mathcal{P}_{Y_{1,2}}(Y_1, Y_2) \cdot \mathcal{P}_{Z_{Y_1, Y_2}}(Z_{Y_1}, Z_{Y_2}; \theta_{Y_1, Y_2}) = \\ &= \begin{cases} \mathcal{P}_{Y_{1,2}}(1,3) \cdot \mathcal{P}_{Z_{1,3}}(Z_1, Z_3, \theta_{1,3}) \Leftarrow (Y_1, Y_2, Z_2, Z_4) = (1,3,0,0) \\ \mathcal{P}_{Y_{1,2}}(1,4) \cdot \mathcal{P}_{Z_{1,4}}(Z_1, Z_4, \theta_{1,4}) \Leftarrow (Y_1, Y_2, Z_2, Z_3) = (1,4,0,0) \\ \mathcal{P}_{Y_{1,2}}(2,3) \cdot \mathcal{P}_{Z_{2,3}}(Z_2, Z_3, \theta_{2,3}) \Leftarrow (Y_1, Y_2, Z_1, Z_4) = (2,3,0,0) \\ \mathcal{P}_{Y_{1,2}}(2,4) \cdot \mathcal{P}_{Z_{2,4}}(Z_2, Z_4, \theta_{2,4}) \Leftarrow (Y_1, Y_2, Z_1, Z_3) = (2,4,0,0) \end{cases} \end{aligned}$$

Em que $Z_j = 0$ significa a ausência de fótons, ou seja, o trajeto percorrido não foi o correspondente a $Y_k = j$ (o outro trajeto que foi percorrido).

Portanto, as variáveis aleatórias Z possuem valores pertencentes ao conjunto $\{-1, 0, +1\}$, e a função de probabilidade é reescrita levando em consideração a possibilidade de uma variável aleatória Z_j ser igual a zero, ficando da seguinte forma:

$$\mathcal{P}_{Z_{Y_1, Y_2}}(Z_{Y_1}, Z_{Y_2}; \theta_{Y_1, Y_2}) = \begin{cases} \frac{\cos^2(\bar{\theta}_{Y_1, Y_2})}{2} \Leftarrow (Z_{Y_1}, Z_{Y_2}) \in C \\ \frac{\sin^2(\bar{\theta}_{Y_1, Y_2})}{2} \Leftarrow (Z_{Y_1}, Z_{Y_2}) \in \bar{C}, \\ \quad 0 \Leftarrow Z_{Y_1} = 0 \\ \quad 0 \Leftarrow Z_{Y_2} = 0 \end{cases}$$

$$\bar{\theta}_{Y_1, Y_2} := \theta_{Y_2} - \theta_{Y_1}, \quad C := \{(-1, -1), (+1, +1)\},$$

$$\bar{C} := \{(-1, +1), (+1, -1)\}$$

Observa-se que, uma vez que o evento relacionado ao percurso esteja fixo (ocorreu (Y_1, Y_2)), a probabilidade condicional relacionada a esse evento é semelhante ao que se tinha antes dessa modelagem, com a diferença de se atribuir a probabilidade zero para os eventos em que um $Z_j = 0$ (o que não muda nada, pois o que se está dizendo é que o evento acrescido tem probabilidade nula, é o mesmo que dizer que não existe tal possibilidade).

A função de probabilidade para os trajetos é dada por:

$$\mathcal{P}_{\dot{Y}_{1,2}}(Y_1, Y_2) = \begin{cases} p_1 \Leftarrow (Y_1, Y_2) = (1, 3) \\ p_2 \Leftarrow (Y_1, Y_2) = (1, 4) \\ p_3 \Leftarrow (Y_1, Y_2) = (2, 3) \\ 1 - p_1 - p_2 - p_3 \Leftarrow (Y_1, Y_2) = (2, 4) \end{cases}, \quad 0 \leq p_1 \leq 1,$$

$$0 \leq p_2 \leq 1 - p_1, \quad 0 \leq p_3 \leq 1 - p_1 - p_2$$

Portanto, a probabilidade condicional (dado que os fótons percorreram pelos trajetos relacionados com as variáveis aleatórias (Y_1, Y_2)) será:

$$\begin{aligned} \mathcal{P}_{\dot{Z}_{1,2,3,4}; \dot{Y}_{1,2}}(Z_1, Z_2, Z_3, Z_4; Y_1, Y_2) &= \mathcal{P}_{\dot{Z}_{Y_1, Y_2}}(Z_{Y_1}, Z_{Y_2}; \theta_{Y_1, Y_2}) = \\ &= \begin{cases} \mathcal{P}_{\dot{Z}_{1,3}}(Z_1, Z_3, \theta_{1,3}) \Leftarrow (Y_1, Y_2, Z_2, Z_4) = (1, 3, 0, 0) \\ \mathcal{P}_{\dot{Z}_{1,4}}(Z_1, Z_4, \theta_{1,4}) \Leftarrow (Y_1, Y_2, Z_2, Z_3) = (1, 4, 0, 0) \\ \mathcal{P}_{\dot{Z}_{2,3}}(Z_2, Z_3, \theta_{2,3}) \Leftarrow (Y_1, Y_2, Z_1, Z_4) = (2, 3, 0, 0) \\ \mathcal{P}_{\dot{Z}_{2,4}}(Z_2, Z_4, \theta_{2,4}) \Leftarrow (Y_1, Y_2, Z_1, Z_3) = (2, 4, 0, 0) \end{cases} \end{aligned}$$

A esperança condicional (o sinal de ponto e vírgula separa as variáveis aleatórias Z das observadas Y) do produto $Z_{Y_1} \cdot Z_{Y_2}$ será:

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_{\dot{Z}_{1,2,3,4}; \dot{Y}_{1,2}}(Z_{Y_1} \cdot Z_{Y_2}; Y_1, Y_2) &= \\ &= \sum_{Z_{Y_1}=-1}^1 \sum_{Z_{Y_2}=-1}^1 \left(Z_{Y_1} \cdot Z_{Y_2} \cdot \mathcal{P}_{\dot{Z}_{1,2,3,4}; \dot{Y}_{1,2}}(Z_1, Z_2, Z_3, Z_4; Y_1, Y_2) \right) \end{aligned}$$

Portanto,

$$\mathcal{E}_{\dot{Z}_{1,2,3,4}; \dot{Y}_{1,2}}(Z_{Y_1} \cdot Z_{Y_2}; Y_1, Y_2) = \cos(2 \cdot \bar{\theta}_{Y_1, Y_2})$$

Assim, com esse entendimento, a substituição feita na desigualdade não seria proveniente da esperança $\mathcal{E}_{\dot{Z}_{1,2,3,4}}$, mas sim da esperança condicional $\mathcal{E}_{\dot{Z}_{1,2,3,4}; \dot{Y}_{1,2}}$, portanto,

$$\begin{aligned} &\cos(2 \cdot \bar{\theta}_{1,3}) - \cos(2 \cdot \bar{\theta}_{1,4}) + \cos(2 \cdot \bar{\theta}_{2,3}) + \cos(2 \cdot \bar{\theta}_{2,4}) = \\ &= \mathcal{E}_{\dot{Z}_{1,2,3,4}; \dot{Y}_{1,2}}(Z_1 \cdot Z_3; 1, 3) - \mathcal{E}_{\dot{Z}_{1,2,3,4}; \dot{Y}_{1,2}}(Z_1 \cdot Z_4; 1, 4) + \\ &+ \mathcal{E}_{\dot{Z}_{1,2,3,4}; \dot{Y}_{1,2}}(Z_2 \cdot Z_3; 2, 3) + \mathcal{E}_{\dot{Z}_{1,2,3,4}; \dot{Y}_{1,2}}(Z_2 \cdot Z_4; 2, 4) \end{aligned}$$

O que não faz muito sentido na Estatística, pois há uma mistura de esperanças condicionais em que os eventos dados são diferentes.

O cálculo da esperança de $Z_{Y_1} \cdot Z_{Y_2}$, com tal função de probabilidade, seria dado por:

$$\begin{aligned}\mathcal{E}_{\dot{Z}_{1,2,3,4}, \dot{Y}_{1,2}}(Z_j \cdot Z_k) &= \mathcal{E}_{\dot{Y}_{1,2}} \left(\mathcal{E}_{\dot{Z}_{1,2,3,4}, \dot{Y}_{1,2}}(Z_j \cdot Z_k; Y_1, Y_2) \right) \\ \mathcal{E}_{\dot{Z}_{1,2,3,4}, \dot{Y}_{1,2}}(Z_j \cdot Z_k; Y_1, Y_2) &= \begin{cases} \cos(2 \cdot \bar{\theta}_{Y_1, Y_2}) & \Leftarrow (Y_1, Y_2) = (j, k) \\ 0 & \Leftarrow (Y_1, Y_2) \neq (j, k) \end{cases} \\ \mathcal{E}_{\dot{Z}_{1,2,3,4}, \dot{Y}_{1,2}}(Z_j \cdot Z_k) &= \mathcal{P}_{\dot{Y}_{1,2}}(Y_1, Y_2) \cdot \cos(2 \cdot \bar{\theta}_{Y_1, Y_2})\end{aligned}$$

Portanto, a desigualdade seria:

$$\begin{aligned}& \left| \underbrace{p_1}_{\geq 0} \cdot \underbrace{\cos(2 \cdot \bar{\theta}_{1,3})}_{\geq -1} - \underbrace{p_2}_{\geq 0} \cdot \underbrace{\cos(2 \cdot \bar{\theta}_{1,4})}_{\geq -1} + \underbrace{p_3}_{\geq 0} \cdot \underbrace{\cos(2 \cdot \bar{\theta}_{2,3})}_{\geq -1} + \right. \\ & \left. + \underbrace{(1 - p_1 - p_2 - p_3)}_{\geq 0} \cdot \underbrace{\cos(2 \cdot \bar{\theta}_{2,4})}_{\geq -1} \right| \leq \\ & \leq \left| \underbrace{p_1 \cdot (+1)}_{\geq 0} + \underbrace{(-p_2) \cdot (-1)}_{\geq 0} + \underbrace{p_3 \cdot (+1)}_{\geq 0} + \underbrace{(1 - p_1 - p_2 - p_3) \cdot (+1)}_{\geq 0} \right| = \\ & = p_1 + p_2 + p_3 + 1 - p_1 - p_2 - p_3 = 1 \leq 2\end{aligned}$$

Ou seja, com o entendimento acerca das probabilidades condicionais e o cálculo correto dos valores esperados, a desigualdade de Clauser-Horne-Shimony-Holt nunca é violada, quaisquer que sejam os valores dos parâmetros θ_j e p_k (com $j \in \{1,2,3,4\}$ e $k \in \{1,2,3\}$).

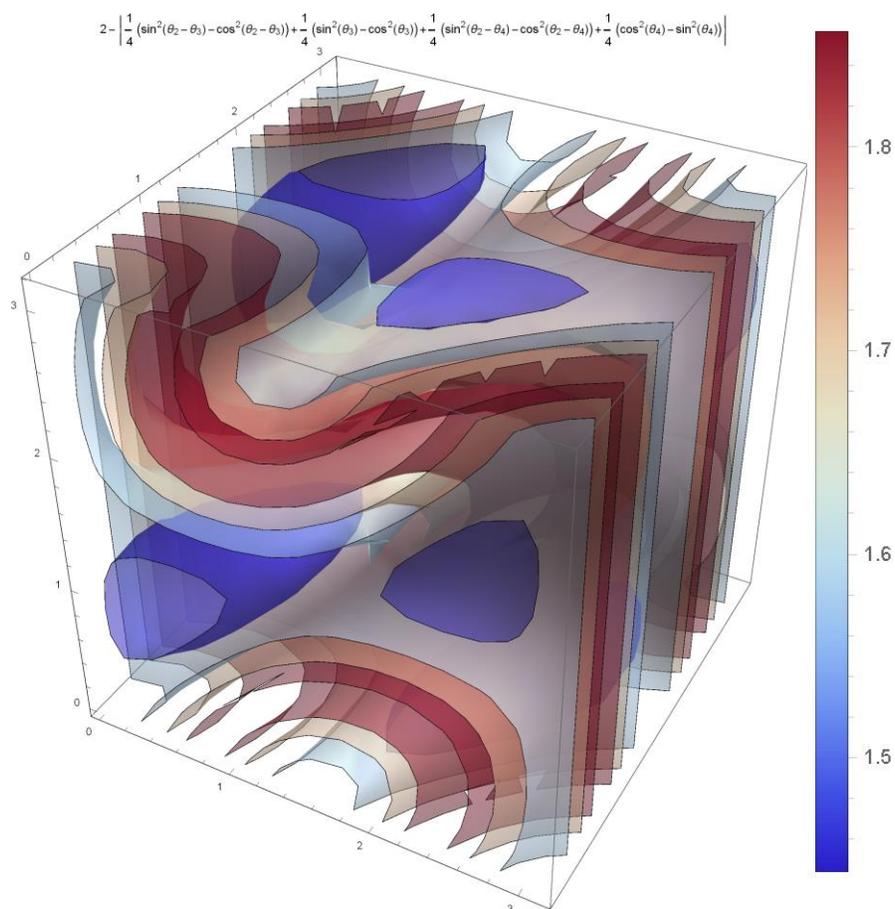


Gráfico 8 Gráfico das superfícies de nível dos valores assumidos pelo primeiro membro da desigualdade de Clauser-Horne-Shimony-Holt

Observa-se na legenda do gráfico que as superfícies de nível, apesar de serem iguais às do gráfico em que há a violação, agora estão associadas a valores que não violam, pois todas as superfícies estão associadas a valores que são maiores ou iguais a 0.

4.4.3.4 Conclusão acerca da violação da desigualdade de Clauser-Horne-Shimony-Holt

Conclui-se que a desigualdade de Clauser-Horne-Shimony-Holt pode ser gerada através da soma de duas desigualdades de Bell e, portanto, só será violada se for violado o segundo axioma de Kolmogorov, como ocorre com a desigualdade de Bell.

Ao se analisar o esquema do experimento realizado como sendo quatro experimentos (cada um com uma configuração dos parâmetros), e que cada configuração é repetida um determinado número de vezes (conforme suas probabilidades de ocorrerem), então os valores esperados apresentados nos artigos se tornam valores esperados condicionais, e os valores esperados devidamente calculados, quando substituídos na desigualdade de Clauser-Horne-Shimony-Holt, não há violação, quaisquer que sejam os parâmetros.

4.4.4 Desigualdade de Leggett

Utilizando a desigualdade básica, apenas substituindo o par (W_1, W_2) pelo par $(Z_{1,1} \cdot Z_{1,2}, Z_{2,1} \cdot Z_{2,2})$, obtêm-se as seguintes desigualdades:

$$\begin{aligned} \underbrace{|\mathcal{E}_{\vec{z}}(Z_{1,1} \cdot Z_{1,2}) + \mathcal{E}_{\vec{z}}(Z_{2,1} \cdot Z_{2,2})|}_{=\Phi_1^+(Z_{1,1} \cdot Z_{1,2}, Z_{2,1} \cdot Z_{2,2})} &\leq 1 + \mathcal{E}_{\vec{z}}(Z_{1,1} \cdot Z_{1,2} \cdot Z_{2,1} \cdot Z_{2,2}) \\ \underbrace{|\mathcal{E}_{\vec{z}}(Z_{1,1} \cdot Z_{1,2}) - \mathcal{E}_{\vec{z}}(Z_{2,1} \cdot Z_{2,2})|}_{=\Phi_1^-(Z_{1,1} \cdot Z_{1,2}, Z_{2,1} \cdot Z_{2,2})} &\leq 1 - \mathcal{E}_{\vec{z}}(Z_{1,1} \cdot Z_{1,2} \cdot Z_{2,1} \cdot Z_{2,2}) \end{aligned}$$

Que podem ser reescritas como:

$$\begin{aligned} -1 + |\mathcal{E}_{\vec{z}}(Z_{1,1} \cdot Z_{1,2}) + \mathcal{E}_{\vec{z}}(Z_{2,1} \cdot Z_{2,2})| &\leq \mathcal{E}_{\vec{z}}(Z_{1,1} \cdot Z_{1,2} \cdot Z_{2,1} \cdot Z_{2,2}) \\ +1 - |\mathcal{E}_{\vec{z}}(Z_{1,1} \cdot Z_{1,2}) - \mathcal{E}_{\vec{z}}(Z_{2,1} \cdot Z_{2,2})| &\geq \mathcal{E}_{\vec{z}}(Z_{1,1} \cdot Z_{1,2} \cdot Z_{2,1} \cdot Z_{2,2}) \end{aligned}$$

Donde surge a desigualdade que originará a desigualdade de Leggett

$$\begin{aligned} -1 + |\mathcal{E}_{\vec{z}}(Z_{1,1} \cdot Z_{1,2}) + \mathcal{E}_{\vec{z}}(Z_{2,1} \cdot Z_{2,2})| &\leq \mathcal{E}_{\vec{z}}(Z_{1,1} \cdot Z_{1,2} \cdot Z_{2,1} \cdot Z_{2,2}) \leq \\ \leq 1 - |\mathcal{E}_{\vec{z}}(Z_{1,1} \cdot Z_{1,2}) - \mathcal{E}_{\vec{z}}(Z_{2,1} \cdot Z_{2,2})|. \end{aligned}$$

A desigualdade anterior tem por parâmetros os ângulos $\theta_{j,k}$, em que $\theta_{j,2}$ (para $j \in \{1,2\}$) trata-se dos ângulos referentes às orientações dos aparatos, já os ângulos $\theta_{j,1}$ são os possíveis ângulos referentes às propriedades das partículas (orientação do spin ou da polarização).

Admitindo que haja uma distribuição de ângulos prováveis, pode-se, portanto, dizer que os valores esperado $\mathcal{E}_{\vec{z}}$ (cujos ângulos $\theta_{j,k}$ surgem como parâmetros) são esperanças condicionais dos ângulos (que agora são interpretados como variáveis aleatórias $\theta_{j,k}$)

$$\mathcal{E}_{\vec{z}}(Z_{j,1} \cdot Z_{j,2}) \equiv \mathcal{E}_{\vec{z};\vec{\theta}}(Z_{j,1} \cdot Z_{j,2}; \vec{\theta}), \quad \vec{\theta} := (\theta_{1,1}, \theta_{1,2}, \theta_{2,1}, \theta_{2,2}).$$

Assim, a desigualdade pode ser reescrita como

$$\begin{aligned} -1 + |\mathcal{E}_{\vec{z};\vec{\theta}}(Z_{1,1} \cdot Z_{1,2}; \vec{\theta}) + \mathcal{E}_{\vec{z};\vec{\theta}}(Z_{2,1} \cdot Z_{2,2}; \vec{\theta})| &\leq \\ \leq \mathcal{E}_{\vec{z};\vec{\theta}}(Z_{1,1} \cdot Z_{1,2} \cdot Z_{2,1} \cdot Z_{2,2}; \vec{\theta}) &\leq \\ \leq 1 - |\mathcal{E}_{\vec{z};\vec{\theta}}(Z_{1,1} \cdot Z_{1,2}; \vec{\theta}) - \mathcal{E}_{\vec{z};\vec{\theta}}(Z_{2,1} \cdot Z_{2,2}; \vec{\theta})| \end{aligned}$$

4.4.4.1 Aplicação na Física: Fótons Polarizados

De acordo com a teoria física, o valor esperado do produto $Z_{j,1} \cdot Z_{j,2}$, para o experimento com fótons polarizados é dado por

$$\mathcal{E}_{\bar{z},\bar{\theta}}(Z_{j,1} \cdot Z_{j,2}; \bar{\theta}) = \cos(2 \cdot \bar{\theta}_j), \quad \bar{\theta}_j := \theta_{j,2} - \theta_{j,1}$$

Portanto, tem-se que a seguinte soma de valores esperados resulta em:

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_{\bar{z},\bar{\theta}}(Z_{1,1} \cdot Z_{1,2}; \bar{\theta}) + \mathcal{E}_{\bar{z},\bar{\theta}}(Z_{2,1} \cdot Z_{2,2}; \bar{\theta}) &= \cos(2 \cdot \bar{\theta}_1) + \cos(2 \cdot \bar{\theta}_2) = \\ &= 2 \cdot \cos(\bar{\theta}_2 + \bar{\theta}_1) \cdot \cos(\bar{\theta}_2 - \bar{\theta}_1) = \\ &= 2 \cdot \cos(\theta_{2,2} - \theta_{2,1} + \theta_{1,2} - \theta_{1,1}) \cdot \cos(\theta_{2,2} - \theta_{2,1} - \theta_{1,2} + \theta_{1,1}). \end{aligned}$$

E que a seguinte diferença de valores esperados resulta em:

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_{\bar{z},\bar{\theta}}(Z_{1,1} \cdot Z_{1,2}; \bar{\theta}) - \mathcal{E}_{\bar{z},\bar{\theta}}(Z_{2,1} \cdot Z_{2,2}; \bar{\theta}) &= \cos(2 \cdot \bar{\theta}_1) - \cos(2 \cdot \bar{\theta}_2) = \\ &= 2 \cdot \sin(\bar{\theta}_2 + \bar{\theta}_1) \cdot \sin(\bar{\theta}_2 - \bar{\theta}_1) = \\ &= 2 \cdot \sin(\theta_{2,2} - \theta_{2,1} + \theta_{1,2} - \theta_{1,1}) \cdot \sin(\theta_{2,2} - \theta_{2,1} - \theta_{1,2} + \theta_{1,1}). \end{aligned}$$

Dessa forma, a soma e a subtração das esperanças, que resultaram na soma e subtração de funções cosseno, acabam se transformando em produto dessas funções trigonométricas. Esta forma de escrever as somas dessas funções trigonométricas como produtos será útil quando for aplicado o valor absoluto, pois o valor absoluto de um produto é idêntico ao produto dos valores esperados.

4.4.4.2 Transformação de variáveis

Nesta seção, será feita uma mudança de variáveis, que refletirá no cálculo do valor esperado que será feito, resultando na desigualdade de Leggett. A mudança que será feita é a seguinte:

$$\left\{ \begin{array}{l} \mu_k := \frac{\theta_{2,k} + \theta_{1,k}}{2} \\ \delta_k := \frac{\theta_{2,k} - \theta_{1,k}}{2} \end{array} \right\}$$

Portanto,

$$\left\{ \begin{array}{l} \theta_{1,k} = \mu_k - \delta_k \\ \theta_{2,k} = \mu_k + \delta_k \end{array} \right\}$$

A interpretação das novas variáveis é:

- a) μ_1 trata-se da média dos ângulos relacionados à orientação da propriedade da partícula (polarização);
- b) μ_2 trata-se da média dos ângulos relacionados à orientação da propriedade do aparato;
- c) δ_1 trata-se da semiamplitude (metade da diferença) dos ângulos relacionados à orientação da propriedade da partícula (polarização) e
- d) δ_2 trata-se da semiamplitude (metade da diferença) dos ângulos relacionados à orientação da propriedade do aparato.

4.4.4.3 Regiões de integração

Feita a transformação de variáveis, deve-se encontrar o conjunto de valores que tais variáveis podem assumir, para isso, primeiro será definido o conjunto de valores que as variáveis $\theta_{j,k}$ podem assumir, que será:

$$(\forall j)(\forall k)(0 \leq \theta_{j,k} < 2 \cdot \pi).$$

Uma vez que as variáveis $\theta_{j,k}$ tratam-se de ângulos, é razoável que assumam valores entre 0 e $2 \cdot \pi$.

A seguir, têm-se dois gráficos em que se tem a superfície correspondente à função da qual se integra. A região de tonalidade mais forte corresponde à região de integração. Os ângulos $\theta_{j,1}$ foram considerados nulos (pode-se observar que esses ângulos, com outros valores, transladam o gráfico) sem perda de generalidade.

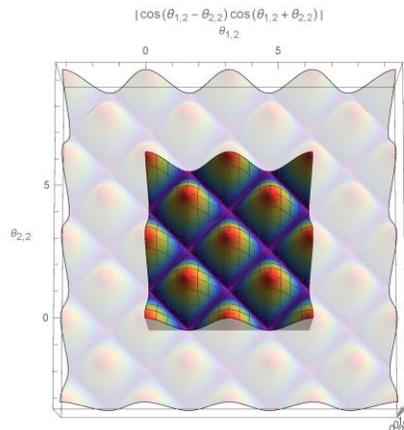


Gráfico 9 Região de integração da integral dupla da função $|\cos(\bar{\theta}_2 + \bar{\theta}_1) \cdot \cos(\bar{\theta}_2 - \bar{\theta}_1)|$, com $\bar{\theta}_j = \theta_{j,2} - \theta_{j,1}$ e $\theta_{j,1} = 0$

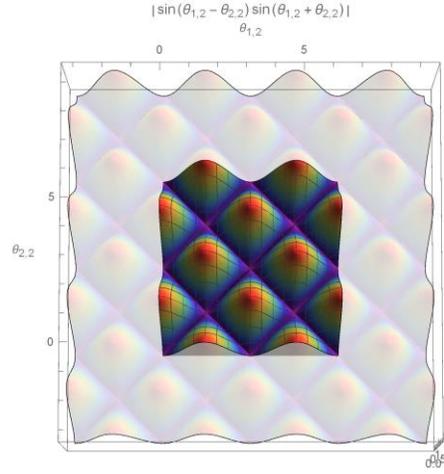


Gráfico 10 Região de integração da integral dupla da função $|\text{sen}(\bar{\theta}_2 + \bar{\theta}_1) \cdot \text{sen}(\bar{\theta}_2 - \bar{\theta}_1)|$, com $\bar{\theta}_j = \theta_{j,2} - \theta_{j,1}$ e $\theta_{j,1} = 0$

Com base nos valores assumidos pelas variáveis $\theta_{j,k}$, e nas relações entre elas e as variáveis μ_k e δ_k , tem-se as seguintes relações:

$$(\forall k) \left(\left(\begin{array}{l} 0 \leq \theta_{1,k} = \mu_k - \delta_k < 2 \cdot \pi \\ 0 \leq \theta_{2,k} = \mu_k + \delta_k < 2 \cdot \pi \\ \delta_k \geq \inf_{(\forall j)(0 \leq \theta_{j,k} < 2 \cdot \pi)} \left(\frac{\theta_{2,k} - \theta_{1,k}}{2} \right) \\ \delta_k \leq \sup_{(\forall j)(0 \leq \theta_{j,k} < 2 \cdot \pi)} \left(\frac{\theta_{2,k} - \theta_{1,k}}{2} \right) \end{array} \right) \right)$$

Portanto,

$$(\forall k) \left(\left(\begin{array}{l} +\delta_k \leq \mu_k < 2 \cdot \pi + \delta_k \\ -\delta_k \leq \mu_k < 2 \cdot \pi - \delta_k \\ \delta_k > -\pi \\ \delta_k < +\pi \end{array} \right) \right)$$

Assim, tem-se a seguinte região para os valores que μ_k e δ_k devem assumir:

$$(\forall k) \left(\left\{ \begin{array}{l} |\delta_k| \leq \mu_k < 2 \cdot \pi - |\delta_k| \\ -\pi < \delta_k < +\pi \end{array} \right\} \right)$$

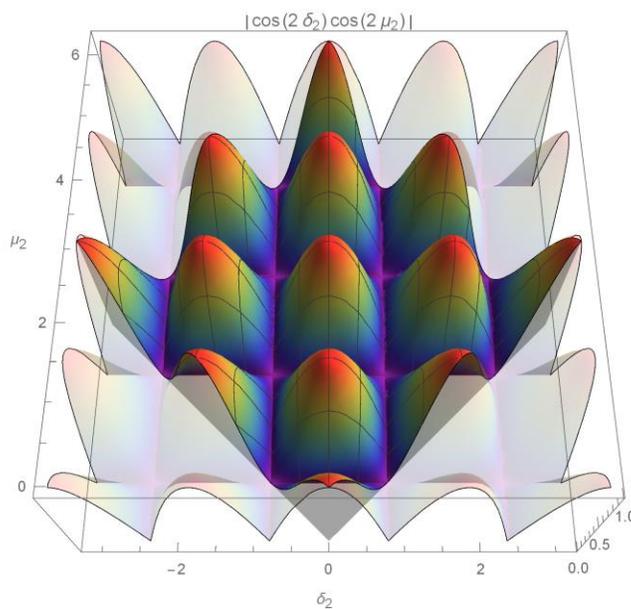


Gráfico 11 Região de integração das novas variáveis, em que o integrando é $|\cos(2 \cdot \delta_2) \cdot \cos(2 \cdot \mu_2)|$

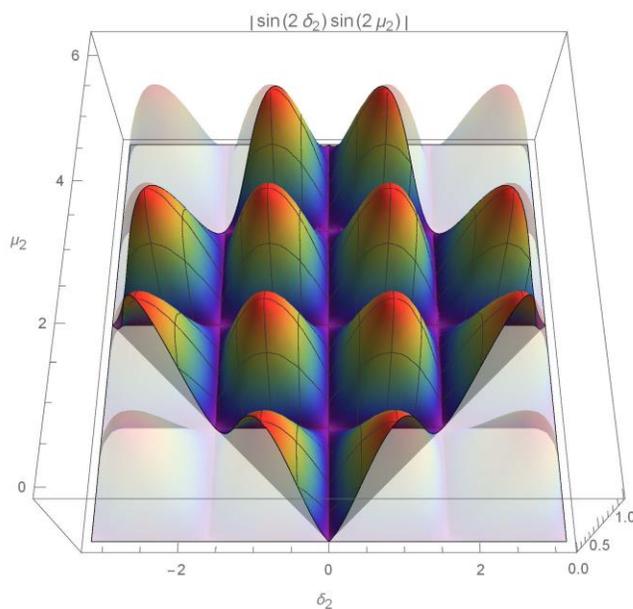


Gráfico 12 Região de integração das novas variáveis, em que o integrando é $|\sin(2 \cdot \delta_2) \cdot \sin(2 \cdot \mu_2)|$

Deve-se prestar atenção no fato de que os valores assumidos pela variável μ_k dependem de qual valor a variável δ_k for assumir.

4.4.4.4 Valor esperado condicional

Uma vez feita a mudança de variáveis, tem-se que a soma dos valores esperados será dada por:

$$\begin{aligned}
& \mathcal{E}_{\ddot{z};\ddot{\theta}}(Z_{1,1} \cdot Z_{1,2}; \ddot{\theta}) + \mathcal{E}_{\ddot{z};\ddot{\theta}}(Z_{2,1} \cdot Z_{2,2}; \ddot{\theta}) = \\
& = 2 \cdot \cos(\theta_{2,2} - \theta_{2,1} + \theta_{1,2} - \theta_{1,1}) \cdot \cos(\theta_{2,2} - \theta_{2,1} - \theta_{1,2} + \theta_{1,1}) = \\
& = 2 \cdot \cos\left(\underbrace{\theta_{2,2} + \theta_{1,2}}_{=2 \cdot \mu_2} - \underbrace{\theta_{2,1} - \theta_{1,1}}_{=-2 \cdot \mu_1}\right) \cdot \cos\left(\underbrace{\theta_{2,2} - \theta_{1,2}}_{=2 \cdot \delta_2} - \underbrace{\theta_{2,1} + \theta_{1,1}}_{=-2 \cdot \delta_1}\right) = \\
& = 2 \cdot \cos(2 \cdot (\mu_2 - \mu_1)) \cdot \cos(2 \cdot (\delta_2 - \delta_1))
\end{aligned}$$

E a diferença dos valores esperados será dada por:

$$\begin{aligned}
& \mathcal{E}_{\ddot{z};\ddot{\theta}}(Z_{1,1} \cdot Z_{1,2}; \ddot{\theta}) - \mathcal{E}_{\ddot{z};\ddot{\theta}}(Z_{2,1} \cdot Z_{2,2}; \ddot{\theta}) = \\
& = 2 \cdot \sin(\theta_{2,2} - \theta_{2,1} + \theta_{1,2} - \theta_{1,1}) \cdot \sin(\theta_{2,2} - \theta_{2,1} - \theta_{1,2} + \theta_{1,1}) = \\
& = 2 \cdot \sin\left(\underbrace{\theta_{2,2} + \theta_{1,2}}_{=2 \cdot \mu_2} - \underbrace{\theta_{2,1} - \theta_{1,1}}_{=-2 \cdot \mu_1}\right) \cdot \sin\left(\underbrace{\theta_{2,2} - \theta_{1,2}}_{=2 \cdot \delta_2} - \underbrace{\theta_{2,1} + \theta_{1,1}}_{=-2 \cdot \delta_1}\right) = \\
& = 2 \cdot \sin(2 \cdot (\mu_2 - \mu_1)) \cdot \sin(2 \cdot (\delta_2 - \delta_1))
\end{aligned}$$

Portanto, denominando as diferenças das novas variáveis por:

$$\bar{\mu} := \mu_2 - \mu_1, \quad \bar{\delta} := \delta_2 - \delta_1$$

E considerando que os valores esperados das variáveis antigas ($\ddot{\theta}$) se relacionam com os valores esperados das novas ($\ddot{\mu}$ e $\ddot{\delta}$) pelas seguintes equações

$$\begin{aligned}
\mathcal{E}_{\ddot{z};\ddot{\theta}}(Z_{1,1} \cdot Z_{1,2}; \ddot{\theta}) &= \mathcal{E}_{\ddot{z};\ddot{\mu},\ddot{\delta}}(Z_{1,1} \cdot Z_{1,2}; \ddot{\mu}, \ddot{\delta}) \\
\mathcal{E}_{\ddot{z};\ddot{\theta}}(Z_{2,1} \cdot Z_{2,2}; \ddot{\theta}) &= \mathcal{E}_{\ddot{z};\ddot{\mu},\ddot{\delta}}(Z_{2,1} \cdot Z_{2,2}; \ddot{\mu}, \ddot{\delta})
\end{aligned}$$

Portanto, tem-se que a soma dos valores esperados, expressa com as novas variáveis, será dada por:

$$\begin{aligned} & \varepsilon_{\check{Z};\check{\theta}}(Z_{1,1} \cdot Z_{1,2}; \check{\theta}) + \varepsilon_{\check{Z};\check{\theta}}(Z_{2,1} \cdot Z_{2,2}; \check{\theta}) = \\ & = \varepsilon_{\check{Z};\check{\mu},\check{\delta}}(Z_{1,1} \cdot Z_{1,2}; \check{\mu}, \check{\delta}) + \varepsilon_{\check{Z};\check{\mu},\check{\delta}}(Z_{2,1} \cdot Z_{2,2}; \check{\mu}, \check{\delta}) = 2 \cdot \cos(2 \cdot \bar{\mu}) \cdot \cos(2 \cdot \bar{\delta}) \end{aligned}$$

E a diferença dos valores esperados será dada por:

$$\begin{aligned} & \varepsilon_{\check{Z};\check{\theta}}(Z_{1,1} \cdot Z_{1,2}; \check{\theta}) - \varepsilon_{\check{Z};\check{\theta}}(Z_{2,1} \cdot Z_{2,2}; \check{\theta}) = \\ & = \varepsilon_{\check{Z};\check{\mu},\check{\delta}}(Z_{1,1} \cdot Z_{1,2}; \check{\mu}, \check{\delta}) - \varepsilon_{\check{Z};\check{\mu},\check{\delta}}(Z_{2,1} \cdot Z_{2,2}; \check{\mu}, \check{\delta}) = 2 \cdot \text{sen}(2 \cdot \bar{\mu}) \cdot \text{sen}(2 \cdot \bar{\delta}) \end{aligned}$$

Agora, expressam-se os valores esperados condicionais, dado um valor de δ_2 , por:

$$\begin{aligned} & \varepsilon_{\check{Z};\check{\mu},\delta_1;\delta_2}(Z_{1,1} \cdot Z_{1,2} + Z_{2,1} \cdot Z_{2,2}; \delta_2) = \\ & = \varepsilon_{\delta_1}(\varepsilon_{\mu_1;\delta_1}(\varepsilon_{\mu_2;\mu_1,\delta_1}(\varepsilon_{\check{Z};\check{\mu},\delta_2}(Z_{1,1} \cdot Z_{1,2} + Z_{2,1} \cdot Z_{2,2}; \check{\mu}, \delta_2); \mu_2); \mu_1); \delta_2) \\ & \varepsilon_{\check{Z};\check{\mu},\delta_1;\delta_2}(Z_{1,1} \cdot Z_{1,2} - Z_{2,1} \cdot Z_{2,2}; \delta_2) = \\ & = \varepsilon_{\delta_1}(\varepsilon_{\mu_1;\delta_1}(\varepsilon_{\mu_2;\mu_1,\delta_1}(\varepsilon_{\check{Z};\check{\mu},\delta_2}(Z_{1,1} \cdot Z_{1,2} - Z_{2,1} \cdot Z_{2,2}; \check{\mu}, \delta_2); \mu_2); \mu_1); \delta_2) \end{aligned}$$

Evidenciando a ordem em que as novas variáveis aleatórias aparecem nos valores esperados condicionais.

Portanto, a desigualdade de Leggett, cujo valor esperado com relação às variáveis Z , condicionada às variáveis θ , que era dada por:

$$\begin{aligned} & -1 + |\varepsilon_{\check{Z};\check{\theta}}(Z_{1,1} \cdot Z_{1,2}; \check{\theta}) + \varepsilon_{\check{Z};\check{\theta}}(Z_{2,1} \cdot Z_{2,2}; \check{\theta})| \leq \\ & \leq \varepsilon_{\check{Z};\check{\theta}}(Z_{1,1} \cdot Z_{1,2} \cdot Z_{2,1} \cdot Z_{2,2}; \check{\theta}) \leq \\ & \leq 1 - |\varepsilon_{\check{Z};\check{\theta}}(Z_{1,1} \cdot Z_{1,2}; \check{\theta}) - \varepsilon_{\check{Z};\check{\theta}}(Z_{2,1} \cdot Z_{2,2}; \check{\theta})| \end{aligned}$$

Com a mudança de variáveis e o cálculo dos valores esperados condicionais com relação às variáveis (μ_1, μ_2, δ_1) , torna-se

$$\begin{aligned}
& -1 + \\
& + \varepsilon_{\delta_1}(\varepsilon_{\mu_1; \delta_1}(\varepsilon_{\mu_2; \mu_1, \delta_1}(|\varepsilon_{\ddot{z}; \ddot{\mu}, \delta_2}(Z_{1,1} \cdot Z_{1,2} + Z_{2,1} \cdot Z_{2,2}; \ddot{\mu}, \delta_2)|; \mu_2); \mu_1); \delta_2) \leq \\
& \leq \varepsilon_{\ddot{z}; \ddot{\theta}}(Z_{1,1} \cdot Z_{1,2} \cdot Z_{2,1} \cdot Z_{2,2}; \ddot{\theta}) \leq \\
& \leq 1 + \\
& - \varepsilon_{\delta_1}(\varepsilon_{\mu_1; \delta_1}(\varepsilon_{\mu_2; \mu_1, \delta_1}(|\varepsilon_{\ddot{z}; \ddot{\mu}, \delta_2}(Z_{1,1} \cdot Z_{1,2} - Z_{2,1} \cdot Z_{2,2}; \ddot{\mu}, \delta_2)|; \mu_2); \mu_1); \delta_2)
\end{aligned}$$

4.4.4.5 Periodicidade do integrando

Nesta seção, estuda-se a periodicidade do integrando (uma vez que o valor esperado de uma variável contínua é calculado através de uma integração), para poder utilizá-la no cálculo dos valores esperados, facilitando no desenvolvimento da desigualdade de Leggett.

Os integrandos podem ser reescritos usando o fato de que o valor absoluto de um valor pode ser representado como a raiz quadrada do quadrado do valor, e a partir daí, usa-se também algumas identidades trigonométricas, obtendo-se a seguinte identidade para o valor absoluto do produto de funções cosseno.

$$\begin{aligned}
& |\cos(2 \cdot (\mu_2 - \mu_1)) \cdot \cos(2 \cdot (\delta_2 - \delta_1))| = \\
& = \sqrt{\cos^2(2 \cdot (\mu_2 - \mu_1))} \cdot \sqrt{\cos^2(2 \cdot (\delta_2 - \delta_1))} = \\
& = \sqrt{\frac{1 + \cos(4 \cdot (\mu_2 - \mu_1))}{2}} \cdot \sqrt{\frac{1 + \cos(4 \cdot (\delta_2 - \delta_1))}{2}} = \\
& = \underbrace{\sqrt{\frac{1 + \cos(4 \cdot \mu_2 - 4 \cdot \mu_1)}{2}} \cdot \sqrt{\frac{1 + \cos(4 \cdot \delta_2 - 4 \cdot \delta_1)}{2}}}_{t_1(\mu_2, \delta_2; \mu_1, \delta_1) :=}
\end{aligned}$$

E a seguinte identidade para o valor absoluto para o produto de funções seno:

$$\begin{aligned}
& |\sen(2 \cdot (\mu_2 - \mu_1)) \cdot \sen(2 \cdot (\delta_2 - \delta_1))| = \\
& = \sqrt{\sen^2(2 \cdot (\mu_2 - \mu_1))} \cdot \sqrt{\sen^2(2 \cdot (\delta_2 - \delta_1))} = \\
& = \sqrt{\frac{1 - \cos(4 \cdot (\mu_2 - \mu_1))}{2}} \cdot \sqrt{\frac{1 - \cos(4 \cdot (\delta_2 - \delta_1))}{2}} = \\
& = \underbrace{\sqrt{\frac{1 - \cos(4 \cdot \mu_2 - 4 \cdot \mu_1)}{2}} \cdot \sqrt{\frac{1 - \cos(4 \cdot \delta_2 - 4 \cdot \delta_1)}{2}}}_{t_2(\mu_2, \delta_2; \mu_1, \delta_1) :=}
\end{aligned}$$

Portanto, das identidades obtidas, observa-se que:

$$\begin{aligned}
t_1(\mu_2, \delta_2; \mu_1, \delta_1) &= t_1(\mu_2 - \mu_1, \delta_2; 0, \delta_1) = t_1(\mu_2, \delta_2 - \delta_1; \mu_1, 0) = \\
&= t_1(\mu_2 - \mu_1, \delta_2 - \delta_1; 0, 0)
\end{aligned}$$

Assim, μ_1 e δ_1 fazem o papel de transladar a função.

Uma vez que $\cos(x \pm \pi) = -\cos(x)$, e conforme as fórmulas acima, têm-se as seguintes identidades:

$$\begin{aligned} t_2\left(\mu_2 \pm \frac{\pi}{4}, \delta_2 \pm \frac{\pi}{4}; \mu_1, \delta_1\right) &= \\ &= \sqrt{\frac{1 - \cos(4 \cdot \mu_2 \pm \pi - 4 \cdot \mu_1)}{2}} \cdot \sqrt{\frac{1 - \cos(4 \cdot \delta_2 \pm \pi - 4 \cdot \delta_1)}{2}} = \\ &= \sqrt{\frac{1 + \cos(4 \cdot \mu_2 - 4 \cdot \mu_1)}{2}} \cdot \sqrt{\frac{1 + \cos(4 \cdot \delta_2 - 4 \cdot \delta_1)}{2}} = t_1(\mu_2, \delta_2; \mu_1, \delta_1) \end{aligned}$$

E

$$\begin{aligned} t_2\left(\mu_2, \delta_2; \mu_1 \pm \frac{\pi}{4}, \delta_1 \pm \frac{\pi}{4}\right) &= \\ &= \sqrt{\frac{1 - \cos(4 \cdot \mu_2 - 4 \cdot \mu_1 \mp \pi)}{2}} \cdot \sqrt{\frac{1 - \cos(4 \cdot \delta_2 - 4 \cdot \delta_1 \mp \pi)}{2}} = \\ &= \sqrt{\frac{1 + \cos(4 \cdot \mu_2 - 4 \cdot \mu_1)}{2}} \cdot \sqrt{\frac{1 + \cos(4 \cdot \delta_2 - 4 \cdot \delta_1)}{2}} = t_1(\mu_2, \delta_2; \mu_1, \delta_1) \end{aligned}$$

De uma forma mais geral tem-se:

$$\begin{aligned} t_2\left(\mu_1 - \mu_1 + \frac{(2 \cdot j + 1) \cdot \pi}{4}, \delta_2 - \delta_1 + \frac{(2 \cdot k + 1) \cdot \pi}{4}; 0, 0\right) &= t_1(\mu_2, \delta_2; \mu_1, \delta_1), \quad j \in \mathbb{Z}, \\ k &\in \mathbb{Z} \end{aligned}$$

Portanto, pode-se estudar apenas uma das funções, pois a partir de uma translação obtém-se a outra.

Uma vez que $\cos(x \pm 2 \cdot \pi) = \cos(x)$, tem-se a seguinte identidade

$$\begin{aligned}
& t_1\left(\mu_2 - \mu_1 \pm \frac{\pi}{2}, \delta_2 - \delta_1 \pm \frac{\pi}{2}; 0,0\right) = \\
& = \sqrt{\frac{1 + \cos(4 \cdot \mu_2 - 4 \cdot \mu_1 \pm 2 \cdot \pi)}{2}} \cdot \sqrt{\frac{1 + \cos(4 \cdot \delta_2 - 4 \cdot \delta_1 \pm 2 \cdot \pi)}{2}} = \\
& = t_1(\mu_2, \delta_2; \mu_1, \delta_1)
\end{aligned}$$

De uma forma mais geral:

$$\begin{aligned}
& t_1\left(\mu_2 - \mu_1 + \frac{j \cdot \pi}{2}, \delta_2 - \delta_1 + \frac{k \cdot \pi}{2}; 0,0\right) = t_1(\mu_2, \delta_2; \mu_1, \delta_1), \quad \forall k_1 \in \mathbb{Z}, \\
& \forall k_2 \in \mathbb{Z}, \quad \forall k_3 \in \mathbb{Z}, \quad \forall k_4 \in \mathbb{Z}
\end{aligned}$$

Assim, tem-se uma periodicidade nessa função. Dessa forma, basta estudar a função dentro de um intervalo igual ao seu período, pois em qualquer intervalo maior (de tamanho múltiplo inteiro de seu período), a função se repetirá.

A partir de simetrias das funções trigonométricas, como por exemplo $\cos(-x) = \cos(x)$, tem-se que:

$$\begin{aligned}
& t_1(\pm(\mu_2 - \mu_1), \pm(\delta_2 - \delta_1); 0,0) = t_1(\mu_2 - \mu_1, \delta_2 - \delta_1; 0,0) \\
& t_1(\mu_2, \delta_2; \mu_1, \delta_1) = t_1(-\mu_2, \delta_2; -\mu_1, \delta_1) = t_1(\mu_2, -\delta_2; \mu_1, -\delta_1) = \\
& = t_2(-\mu_2, -\delta_2; -\mu_1, -\delta_1)
\end{aligned}$$

Assim, sabe-se que, dependendo do ponto de partida, o intervalo de integração pode caminhar tanto para um lado como para o outro, obtendo-se assim um mesmo resultado. Esse resultado será observado mais adiante quando for feita a transformação de variáveis, resultando numa região semelhante a um losango, e com base nesse resultado, observar-se-á que faixas que distam de um múltiplo de π , se complementarão.

4.4.4.6 Distribuição de probabilidade dos ângulos das orientações dos aparatos

Feita a transformação de variáveis, e calculado a região de integração, falta determinar a distribuição de probabilidade, para se poder calcular o valor esperado. Primeiramente, supõem-se que os ângulos referentes às orientações dos aparatos ($\theta_{1,2}$ e $\theta_{2,2}$) sejam independentes, ou seja, que a probabilidade de se preparar um aparato numa determinada orientação independe da orientação que o outro aparato esteja. Portanto a densidade de probabilidade será dada pelo produto da densidade de cada variável

$$\rho_{\theta_{1,2}, \theta_{2,2}}(\theta_{1,2}, \theta_{2,2}) = \rho_{\theta_{1,2}}(\theta_{1,2}) \cdot \rho_{\theta_{2,2}}(\theta_{2,2})$$

Em segundo lugar, supõe-se que qualquer orientação tenha a mesma chance de ocorrer, ou seja, que as orientações são equiprováveis, para ambos os ângulos de orientação dos aparatos:

$$\rho_{\theta_{j,2}}(\theta_{j,2}) = (2 \cdot \pi)^{-1} \cdot \chi_{\{r \in \mathbb{R}: 0 \leq r < 2 \cdot \pi\}}(\theta_{j,2}).$$

Tem-se, portanto, uma distribuição de probabilidade uniforme para os valores dos ângulos $\theta_{j,2}$ (com $j \in \{1,2\}$) entre 0 e $2 \cdot \pi$.

A independência estocástica entre duas variáveis aleatórias surgirá sempre que se puder escrever a função de probabilidade conjunta delas como produto de duas funções de probabilidade, em que cada uma só dependa de uma das variáveis. Assim, supor que a distribuição conjunta seja uma uniforme bivariada:

$$\rho_{\theta_{1,2}, \theta_{2,2}}(\theta_{1,2}, \theta_{2,2}) = (2 \cdot \pi)^{-2} \cdot \chi_{\{r \in \mathbb{R}: 0 \leq r < 2 \cdot \pi\}}(\theta_{1,2}) \cdot \chi_{\{r \in \mathbb{R}: 0 \leq r < 2 \cdot \pi\}}(\theta_{2,2})$$

É supor uma distribuição que tenha essa possibilidade de ser reescrita num produto de outras duas, de forma que se alcança a condição de independência estocástica entre as variáveis $\theta_{1,2}$ e $\theta_{2,2}$. Assim, tal suposição de independência estocástica está presente na demonstração da desigualdade de Leggett.

Agora surge um problema, por se tratar de ângulos, deve-se perguntar o que acontece quando se tem um valor maior que $2 \cdot \pi$, ou menor que 0. Nestes casos, sabe-se que quaisquer valores que difiram de um múltiplo inteiro de $2 \cdot \pi$ devem representar o mesmo ângulo, portanto, faz-se necessária mais uma mudança de variáveis.

Antes de realizar tal mudança, deve-se lembrar de que está sendo considerado o experimento com fótons polarizados, e que dizer que um fóton possui uma polarização θ , é o mesmo que dizer que possui uma polarização $(\theta \pm \pi)$, portanto, a nova variável pode associar o mesmo significado a quaisquer valores $\theta_{j,k}$ que difiram de um múltiplo inteiro de π , o que pode ser observado, a partir da função de probabilidade:

$$\mathcal{P}_{Z_j, \theta_j}(Z_j, Z_k; \theta_{j,k}) = \begin{cases} \frac{\cos^2(\bar{\theta}_{j,k})}{2} = \frac{1 + \cos(2 \cdot \bar{\theta}_{j,k})}{4} \Leftarrow (Z_j, Z_k) \in C \\ \frac{\text{sen}^2(\bar{\theta}_{j,k})}{2} = \frac{1 - \cos(2 \cdot \bar{\theta}_{j,k})}{4} \Leftarrow (Z_j, Z_k) \in \bar{C} \end{cases}$$

Em que tais valores também possuem a mesma probabilidade, o que é de se esperar uma vez que se trata de um mesmo evento. Tendo em mente tais informações, realiza-se a seguinte transformação de variável:

$$\vartheta_{j,k} := \text{mod}_{\pi}(\theta_{j,k})$$

Portanto, a nova variável $\vartheta_{j,k}$ será igual ao resto da divisão de $\theta_{j,k}$ por π .

Levando em consideração o fato das variáveis $\theta_{j,k}$ representarem as polarizações dos fótons, pode-se estender a distribuição de probabilidade para quaisquer intervalos de valores entre 0 e $2 \cdot \pi \cdot n$ (com n pertencente ao conjunto dos números inteiros).

$$\rho_{\theta_{j,2}}(\theta; n) = \frac{1}{n \cdot \pi} \cdot \chi_{\{r \in \mathbb{R}: 0 \leq r < n \cdot \pi\}}(\theta_{j,2}), \quad k \in \mathbb{Z}$$

Sendo que o evento de se ter um determinado valor θ para o ângulo $\theta_{j,2}$ será dado pela soma de todos os valores dentro do intervalo que diferem uns dos outros por um múltiplo de π :

$$\rho_{\theta_{j,2}}(\{\theta + k \cdot \pi\}_{k=0}^{k=n-1}; n) = \sum_{k=0}^{k=n-1} \left(\rho_{\theta_{j,2}}(\theta + k \cdot \pi; n) \right)$$

Em que $\{\theta + k \cdot \pi\}_{k=0}^{k=n-1}$ representa o conjunto de valores $\{\theta, \theta + \pi, \theta + 2 \cdot \pi, \theta + 3 \cdot \pi, \dots, (n-1) \cdot 2 \cdot \pi\}$, que diferem uns dos outros por um múltiplo de π .

Portanto, a distribuição de probabilidade da nova variável será dada por:

$$\rho_{\vartheta_{j,2}}(\theta) = \rho_{\theta_{j,2}}(\{\theta + k \cdot \pi\}_{k=0}^{k=n-1}; n)$$

No caso particular de que as variáveis $\theta_{j,k}$ possuam valores entre 0 e $2 \cdot \pi$, tem-se que:

$$\rho_{\vartheta_{j,2}}(\theta) = \rho_{\theta_{j,2}}(\{\theta, \theta + \pi\}; 2)$$

E a distribuição conjunta será dada pelo produto, resultando em:

$$\begin{aligned} \rho_{\vartheta_{1,2}, \vartheta_{2,2}}(\vartheta_{1,2}, \vartheta_{2,2}) &= \pi^{-2} \cdot \chi_{\{r \in \mathbb{R}: 0 \leq r < \pi\}^2}(\vartheta_{1,2}, \vartheta_{2,2}) = \\ &= \left\{ \begin{array}{l} \pi^{-2} \Leftarrow (\forall j \in \{1,2\})(0 \leq \vartheta_{j,2} < \pi) \\ 0 \Leftarrow (\forall j \in \{1,2\})((\vartheta_{j,2} < 0) \vee (\pi \leq \vartheta_{j,2})) \end{array} \right\} \end{aligned}$$

Analisando a transformação de variáveis feitas:

$$\mu_2 = \frac{\theta_{2,2} + \theta_{1,2}}{2}, \quad \delta_2 = \frac{\theta_{2,2} - \theta_{1,2}}{2}, \quad \theta_{1,2} = \mu_2 - \delta_2, \quad \theta_{2,2} = \mu_2 + \delta_2$$

Percebe-se que o mesmo problema que se observou nas variáveis aleatórias $\theta_{j,k}$ (que valores que diferenciam por múltiplos inteiros de π devem ser considerados como um mesmo evento), também ocorre para as variáveis μ_k e δ_k . Assim, deve-se esperar que se:

$$\mu_k \in \left\{ \frac{\theta_{2,2} + j \cdot \pi + \theta_{1,2}}{2} \right\}_{j \in \mathbb{Z}}, \quad \delta_k \in \left\{ \frac{\theta_{2,2} + j \cdot \pi - \theta_{1,2}}{2} \right\}_{j \in \mathbb{Z}}$$

Então, tratam-se dos mesmos eventos.

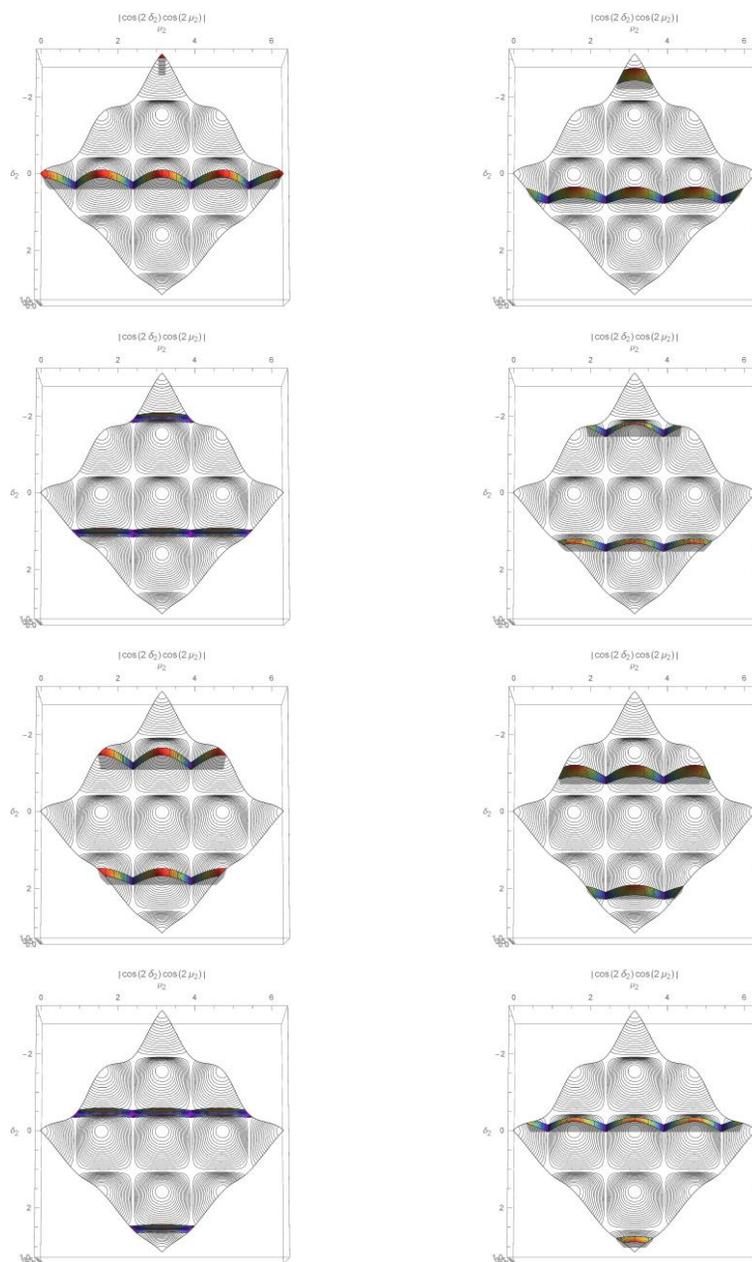


Gráfico 13 Gráficos das faixas (a uma distância de π , uma da outra) referentes ao intervalo de integração com relação à variável μ_2 , dependendo do valor atribuído à variável δ_2

Pelos gráficos, pode-se observar que ao calcular os valores esperados, o intervalo de integração da variável μ_2 depende do valor assumido por δ_2 , porém as características das variáveis acabam por compensar tal variação. Pode-se, portanto, realizar uma integração cujos intervalos de μ_2 não dependam dos valores de δ_2 , pois ao somar a contribuição que cada faixa dá, verifica-se que uma complementa a outra, devido às propriedades de simetria e periodicidade estudadas anteriormente.

Partindo para a determinação da distribuição de probabilidade para o par de variáveis (μ_2, δ_2) , tem-se que:

$$\begin{aligned}
 \rho_{\theta_{1,2}, \theta_{2,2}}(\theta_{1,2}, \theta_{2,2}) &= \\
 &= (2 \cdot \pi)^{-2} \cdot \chi_{\{r \in \mathbb{R}: |\delta_2| \leq r < 2 \cdot \pi - |\delta_2|\}}(\mu_2) \cdot \chi_{\{r \in \mathbb{R}: -\pi < r < \pi\}}(\delta_2) = \\
 &= \left\{ \begin{array}{l} (2 \cdot \pi)^{-2} \Leftrightarrow ((-\pi < \delta_2 < \pi) \wedge (|\delta_2| \leq \mu_2 < 2 \cdot \pi - |\delta_2|)) \\ 0 \Leftrightarrow \neg((-\pi < \delta_2 < \pi) \wedge (|\delta_2| \leq \mu_2 < 2 \cdot \pi - |\delta_2|)) \end{array} \right\} = \\
 &= \rho_{\mu_2, \delta_2}(\mu_2, \delta_2)
 \end{aligned}$$

Porém, como foi visto, valores que diferem por um múltiplo inteiro de π tratam-se do mesmo evento, portanto:

$$\rho_{\mu_2, \delta_2}(\mu_2, \delta_2) = (2 \cdot \pi)^{-1} \cdot \pi^{-1} \cdot \chi_{\{r \in \mathbb{R}: 0 \leq r < 2 \cdot \pi\}}(\mu_2) \cdot \chi_{\{r \in \mathbb{R}: 0 < r < \pi\}}(\delta_2)$$

Assim, as marginais serão dadas por:

$$\begin{aligned}
 \rho_{\mu_2}(\mu_2) &= (2 \cdot \pi)^{-1} \cdot \chi_{\{r \in \mathbb{R}: 0 \leq r < 2 \cdot \pi\}}(\mu_2), \\
 \rho_{\delta_2}(\delta_2) &= \pi^{-1} \cdot \chi_{\{r \in \mathbb{R}: 0 < r < \pi\}}(\delta_2)
 \end{aligned}$$

E a distribuição conjunta será o produto das marginais. Portanto, tem-se a independência estocástica das variáveis μ_2 e δ_2 .

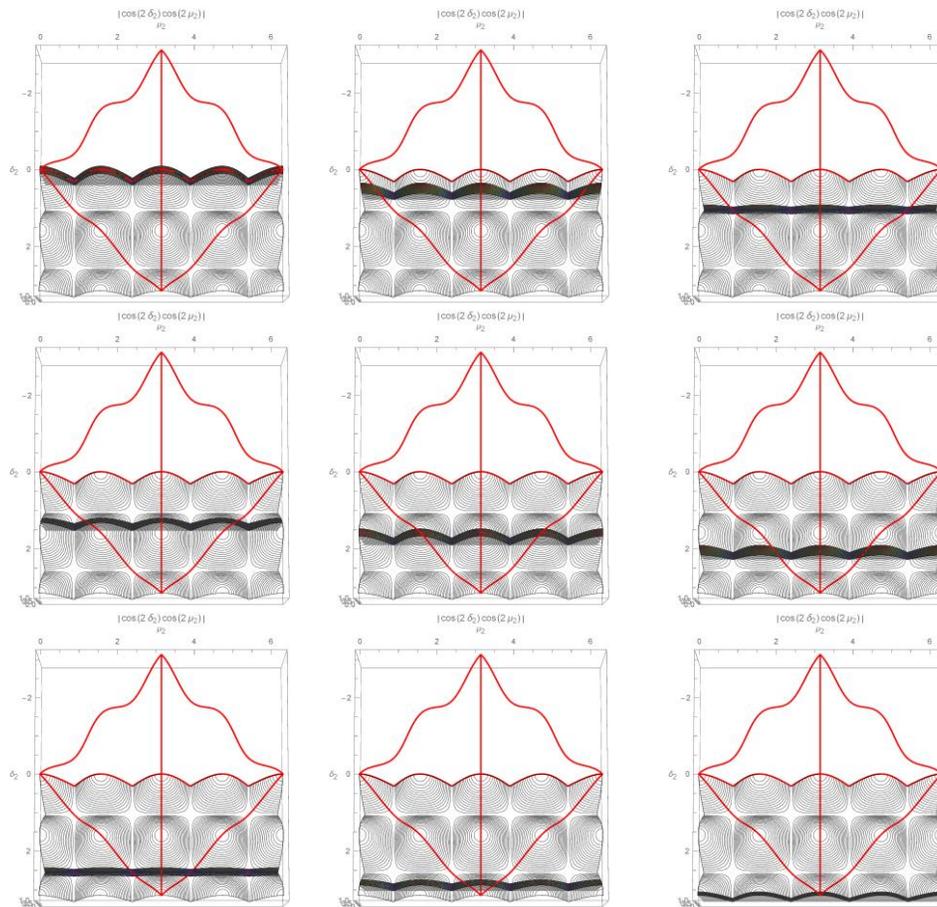


Gráfico 14 Transformação da região de integração de um losango para um retângulo, através do uso das propriedades de simetria e periodicidade das variáveis e do integrando

Nos gráficos acima, observa-se que as faixas presentes na região que era antes um losango são as mesmas na nova região, semelhante a um retângulo. Assim a nova região permite integrar em relação às variáveis μ_2 e δ_2 ,

independentemente da ordem, pois a fronteira da nova região já não limita μ_2 em função de δ_2 (e vice-versa).

4.4.4.7 Valor esperado condicional nas novas variáveis

Agora, tendo a função densidade de probabilidade e as novas variáveis aleatórias, pode-se partir para o cálculo do valor esperado condicional, que é usado na demonstração da desigualdade de Leggett. Mas antes de calcular os valores esperados, observa-se a ordem estabelecida, em que serão calculados, usando o conceito de valor esperado condicional.

Primeiramente, calcula-se o valor esperado com relação às variáveis Z , dado $(\ddot{\mu}, \ddot{\delta})$

$$\begin{aligned}\mathcal{E}_{\ddot{Z}, \ddot{\vartheta}}(Z_{1,1} \cdot Z_{1,2}) &= \mathcal{E}_{\ddot{\vartheta}}\left(\mathcal{E}_{\ddot{Z}, \ddot{\vartheta}}(Z_{1,1} \cdot Z_{1,2}; \ddot{\vartheta})\right) = \mathcal{E}_{\ddot{\mu}, \ddot{\delta}}\left(\mathcal{E}_{\ddot{Z}, \ddot{\mu}, \ddot{\delta}}(Z_{1,1} \cdot Z_{1,2}; \ddot{\mu}, \ddot{\delta})\right) \\ \mathcal{E}_{\ddot{Z}, \ddot{\vartheta}}(Z_{2,1} \cdot Z_{2,2}) &= \mathcal{E}_{\ddot{\vartheta}}\left(\mathcal{E}_{\ddot{Z}, \ddot{\vartheta}}(Z_{2,1} \cdot Z_{2,2}; \ddot{\vartheta})\right) = \mathcal{E}_{\ddot{\mu}, \ddot{\delta}}\left(\mathcal{E}_{\ddot{Z}, \ddot{\mu}, \ddot{\delta}}(Z_{2,1} \cdot Z_{2,2}; \ddot{\mu}, \ddot{\delta})\right)\end{aligned}$$

Assim, a partir do valor esperado do valor absoluto (presente na desigualdade de Leggett), e através das seguintes desigualdades

$$\mathcal{E}_{\ddot{Z}, \ddot{\mu}, \ddot{\delta}}(|Z_{1,1} \cdot Z_{1,2} + Z_{2,1} \cdot Z_{2,2}|; \ddot{\mu}, \ddot{\delta}) \geq |\mathcal{E}_{\ddot{Z}, \ddot{\mu}, \ddot{\delta}}(Z_{1,1} \cdot Z_{1,2} + Z_{2,1} \cdot Z_{2,2}; \ddot{\mu}, \ddot{\delta})|$$

E

$$\mathcal{E}_{\ddot{Z}, \ddot{\mu}, \ddot{\delta}}(|Z_{1,1} \cdot Z_{1,2} - Z_{2,1} \cdot Z_{2,2}|; \ddot{\mu}, \ddot{\delta}) \geq |\mathcal{E}_{\ddot{Z}, \ddot{\mu}, \ddot{\delta}}(Z_{1,1} \cdot Z_{1,2} - Z_{2,1} \cdot Z_{2,2}; \ddot{\mu}, \ddot{\delta})|$$

Obtêm-se as seguinte desigualdades:

$$\begin{aligned}
& \mathcal{E}_{\bar{\mu}, \bar{\delta}} \left(\mathcal{E}_{Z; \bar{\mu}, \bar{\delta}} (|Z_{1,1} \cdot Z_{1,2} + Z_{2,1} \cdot Z_{2,2}|; \bar{\mu}, \bar{\delta}) \right) \geq \\
& \geq \mathcal{E}_{\bar{\mu}, \bar{\delta}} (|\mathcal{E}_{Z; \bar{\mu}, \bar{\delta}} (Z_{1,1} \cdot Z_{1,2} + Z_{2,1} \cdot Z_{2,2}; \bar{\mu}, \bar{\delta})|) = \\
& = \mathcal{E}_{\bar{\mu}, \bar{\delta}} (|2 \cdot \cos(2 \cdot \bar{\mu}) \cdot \cos(2 \cdot \bar{\delta})|) = \\
& = \mathcal{E}_{\mu_1 \delta_1} \left(\mathcal{E}_{\mu_2, \delta_2; \mu_1 \delta_1} (|2 \cdot \cos(2 \cdot \bar{\mu}) \cdot \cos(2 \cdot \bar{\delta})|; \mu_1 \delta_1) \right)
\end{aligned}$$

E

$$\begin{aligned}
& \mathcal{E}_{\bar{\mu}, \bar{\delta}} \left(\mathcal{E}_{Z; \bar{\mu}, \bar{\delta}} (|Z_{1,1} \cdot Z_{1,2} - Z_{2,1} \cdot Z_{2,2}|; \bar{\mu}, \bar{\delta}) \right) \geq \\
& \geq \mathcal{E}_{\bar{\mu}, \bar{\delta}} (|\mathcal{E}_{Z; \bar{\mu}, \bar{\delta}} (Z_{1,1} \cdot Z_{1,2} - Z_{2,1} \cdot Z_{2,2}; \bar{\mu}, \bar{\delta})|) = \\
& = \mathcal{E}_{\bar{\mu}, \bar{\delta}} (|2 \cdot \text{sen}(2 \cdot \bar{\mu}) \cdot \text{sen}(2 \cdot \bar{\delta})|) = \\
& = \mathcal{E}_{\mu_1 \delta_1} \left(\mathcal{E}_{\mu_2, \delta_2; \mu_1 \delta_1} (|2 \cdot \text{sen}(2 \cdot \bar{\mu}) \cdot \text{sen}(2 \cdot \bar{\delta})|; \mu_1 \delta_1) \right)
\end{aligned}$$

Agora, utilizando-se do que se sabe sobre a região de integração, têm-se que os valores esperados serão as seguintes integrais

$$\begin{aligned}
& \mathcal{E}_{\mu_2; \mu_1, \bar{\delta}} (|2 \cdot \cos(2 \cdot \bar{\mu}) \cdot \cos(2 \cdot \bar{\delta})|; \mu_1, \bar{\delta}) = \\
& = 2 \cdot \mathcal{E}_{\mu_2; \mu_1, \bar{\delta}} (|\cos(2 \cdot \bar{\mu}) \cdot \cos(2 \cdot \bar{\delta})|; \mu_1, \bar{\delta}) = \\
& = 2 \cdot \int_{-\pi}^{+\pi} \left(\frac{1}{2 \cdot \pi} \cdot |\cos(2 \cdot \bar{\mu}) \cdot \cos(2 \cdot \bar{\delta})| \right) \cdot d\mu_2 = \\
& = \frac{1}{\pi} \cdot |\cos(2 \cdot \bar{\delta})| \cdot \int_{-\pi}^{+\pi} (|\cos(2 \cdot \bar{\mu})|) \cdot d\mu_2
\end{aligned}$$

E

$$\begin{aligned}
& \mathcal{E}_{\mu_2; \mu_1, \delta}(|2 \cdot \text{sen}(2 \cdot \bar{\mu}) \cdot \text{sen}(2 \cdot \bar{\delta})|; \mu_1, \delta) = \\
& = 2 \cdot \mathcal{E}_{\mu_2; \mu_1, \delta}(|\text{sen}(2 \cdot \bar{\mu}) \cdot \text{sen}(2 \cdot \bar{\delta})|; \mu_1, \delta) = \\
& = 2 \cdot \int_{-\pi}^{+\pi} \left(\frac{1}{2 \cdot \pi} \cdot |\text{sen}(2 \cdot \bar{\mu}) \cdot \text{sen}(2 \cdot \bar{\delta})| \right) \cdot d\mu_2 = \\
& = \frac{1}{\pi} \cdot |\text{sen}(2 \cdot \bar{\delta})| \cdot \int_{-\pi}^{+\pi} (|\text{sen}(2 \cdot \bar{\mu})|) \cdot d\mu_2
\end{aligned}$$

Os integrandos internos possuem o mesmo valor

$$\int_{-\pi}^{+\pi} (|\cos(2 \cdot \bar{\mu})|) \cdot d\mu_2 = \int_{-\pi}^{+\pi} (|\text{sen}(2 \cdot \bar{\mu})|) \cdot d\mu_2 = 4$$

Portanto,

$$\mathcal{E}_{\mu_2; \mu_1, \delta}(|2 \cdot \cos(2 \cdot \bar{\mu}) \cdot \cos(2 \cdot \bar{\delta})|; \mu_1, \delta) = \frac{4}{\pi} \cdot |\cos(2 \cdot \bar{\delta})|$$

E

$$\mathcal{E}_{\mu_2; \mu_1, \delta}(|2 \cdot \text{sen}(2 \cdot \bar{\mu}) \cdot \text{sen}(2 \cdot \bar{\delta})|; \mu_1, \delta) = \frac{4}{\pi} \cdot |\text{sen}(2 \cdot \bar{\delta})|$$

Agora, calculam-se os próximos valores esperados condicionais

$$\begin{aligned} & \mathcal{E}_{\mu_1; \delta}(\mathcal{E}_{\mu_2; \mu_1, \delta}(|2 \cdot \cos(2 \cdot \bar{\mu}) \cdot \cos(2 \cdot \bar{\delta})|; \mu_1, \delta); \delta) = \\ & = \mathcal{E}_{\mu_1; \delta}\left(\frac{4}{\pi} \cdot |\cos(2 \cdot \bar{\delta})|; \delta\right) = \frac{4}{\pi} \cdot |\cos(2 \cdot \bar{\delta})| \end{aligned}$$

E

$$\begin{aligned} & \mathcal{E}_{\mu_1; \delta}(\mathcal{E}_{\mu_2; \mu_1, \delta}(|2 \cdot \sin(2 \cdot \bar{\mu}) \cdot \sin(2 \cdot \bar{\delta})|; \mu_1, \delta); \delta) = \\ & = \mathcal{E}_{\mu_1; \delta}\left(\frac{4}{\pi} \cdot |\sin(2 \cdot \bar{\delta})|; \delta\right) = \frac{4}{\pi} \cdot |\sin(2 \cdot \bar{\delta})| \end{aligned}$$

Como os valores esperados são com relação à variável μ_1 e as funções das quais se calculam os valores esperados são independentes de μ_1 (pois só dependem de δ_1 e δ_2), por causa disso obteve-se o resultado demonstrado.

Já foram calculados os valores esperados com relação às variáveis (μ_1, μ_2) , falta agora calcular o valor esperado condicional com relação à variável δ_1 , referente à metade da diferença dos ângulos das orientações das propriedades das partículas, que neste caso, escolheu-se a polarização do fóton.

Calculando o valor esperado condicional com relação à variável δ_1 , desconhecendo qual a distribuição que as orientações das propriedades das partículas possam ter, tem-se que

$$\begin{aligned} & \mathcal{E}_{\delta_1; \delta_2}(\mathcal{E}_{\mu_1; \delta}(\mathcal{E}_{\mu_2; \mu_1, \delta}(|2 \cdot \cos(2 \cdot \bar{\mu}) \cdot \cos(2 \cdot \bar{\delta})|; \mu_1, \delta); \delta); \delta_2) = \\ & = \int_{-\pi}^{+\pi} \left(\frac{4}{\pi} \cdot |\cos(2 \cdot \bar{\delta})| \cdot \rho_{\delta_1}(\delta_1) \right) \cdot d\delta_1 \end{aligned}$$

E

$$\begin{aligned} & \mathcal{E}_{\delta_1; \delta_2} \left(\mathcal{E}_{\mu_1; \delta} \left(\mathcal{E}_{\mu_2; \mu_1, \delta} \left(|2 \cdot \text{sen}(2 \cdot \bar{\mu}) \cdot \text{sen}(2 \cdot \bar{\delta})|; \mu_1, \delta \right); \delta \right); \delta_2 \right) = \\ & = \int_{-\pi}^{+\pi} \left(\frac{4}{\pi} \cdot |\text{sen}(2 \cdot \bar{\delta})| \cdot \rho_{\delta_1}(\delta_1) \right) \cdot d\delta_1 \end{aligned}$$

Substituindo na desigualdade de Leggett, calculada anteriormente, quando se aplicou a transformação de variáveis:

$$\begin{aligned} & -1 + \\ & + \mathcal{E}_{\delta_1} \left(\mathcal{E}_{\mu_1; \delta_1} \left(\mathcal{E}_{\mu_2; \mu_1, \delta_1} \left(|\mathcal{E}_{\ddot{z}; \ddot{\mu}, \delta_2} (Z_{1,1} \cdot Z_{1,2} + Z_{2,1} \cdot Z_{2,2}; \ddot{\mu}, \delta_2)|; \mu_2 \right); \mu_1 \right); \delta_2 \right) \leq \\ & \leq \mathcal{E}_{\ddot{z}; \ddot{\theta}} (Z_{1,1} \cdot Z_{1,2} \cdot Z_{2,1} \cdot Z_{2,2}; \ddot{\theta}) \leq \\ & \leq 1 + \\ & - \mathcal{E}_{\delta_1} \left(\mathcal{E}_{\mu_1; \delta_1} \left(\mathcal{E}_{\mu_2; \mu_1, \delta_1} \left(|\mathcal{E}_{\ddot{z}; \ddot{\mu}, \delta_2} (Z_{1,1} \cdot Z_{1,2} - Z_{2,1} \cdot Z_{2,2}; \ddot{\mu}, \delta_2)|; \mu_2 \right); \mu_1 \right); \delta_2 \right) \end{aligned}$$

Tem-se:

$$\begin{aligned} & -1 + \int_{-\pi}^{+\pi} \left(\frac{4}{\pi} \cdot |\cos(2 \cdot \bar{\delta})| \cdot \rho_{\delta_1}(\delta_1) \right) \cdot d\delta_1 \leq \\ & \leq \mathcal{E}_{\ddot{z}; \ddot{\mu}, \delta_1, \delta_2} (Z_{1,1} \cdot Z_{1,2} \cdot Z_{2,1} \cdot Z_{2,2}; \delta_2) \leq \\ & \leq 1 - \int_{-\pi}^{+\pi} \left(\frac{4}{\pi} \cdot |\text{sen}(2 \cdot \bar{\delta})| \cdot \rho_{\delta_1}(\delta_1) \right) \cdot d\delta_1 \end{aligned}$$

Porém, como não se fixou nenhuma distribuição ρ_{δ_1} , não é possível calcular os valores esperados, em vez disso, substituir-se-á o integrando por outro, de forma a conseguir uma desigualdade.

4.4.4.8 Eliminando a necessidade de se conhecer a distribuição de probabilidade das diferenças das orientações das propriedades das partículas (orientações das polarizações dos fótons)

Através da seguinte identidade trigonométrica

$$\begin{aligned} \cos(2 \cdot \delta_2 - 2 \cdot \delta_2') &= \cos(2 \cdot \delta_2 - 2 \cdot \delta_1 + 2 \cdot \delta_1 - 2 \cdot \delta_2') = \\ &= \cos(2 \cdot \delta_2 - 2 \cdot \delta_1) \cdot \cos(2 \cdot \delta_1 - 2 \cdot \delta_2') - \operatorname{sen}(2 \cdot \delta_2 - 2 \cdot \delta_1) \cdot \\ &\cdot \operatorname{sen}(2 \cdot \delta_1 - 2 \cdot \delta_2') \end{aligned}$$

Calculando o valor absoluto, tem-se a seguinte desigualdade:

$$\begin{aligned} |\cos(2 \cdot \delta_2 - 2 \cdot \delta_2')| &= \\ &= |\cos(2 \cdot \delta_2 - 2 \cdot \delta_1) \cdot \cos(2 \cdot \delta_1 - 2 \cdot \delta_2') - \operatorname{sen}(2 \cdot \delta_2 - 2 \cdot \delta_1) \cdot \\ &\cdot \operatorname{sen}(2 \cdot \delta_1 - 2 \cdot \delta_2')| \leq \\ &\leq |\cos(2 \cdot \delta_2 - 2 \cdot \delta_1) \cdot \cos(2 \cdot \delta_1 - 2 \cdot \delta_2')| + \\ &+ |\operatorname{sen}(2 \cdot \delta_2 - 2 \cdot \delta_1) \cdot \operatorname{sen}(2 \cdot \delta_1 - 2 \cdot \delta_2')| = \\ &= |\cos(2 \cdot \delta_2 - 2 \cdot \delta_1)| \cdot |\cos(2 \cdot \delta_1 - 2 \cdot \delta_2')| + |\operatorname{sen}(2 \cdot \delta_2 - 2 \cdot \delta_1)| \cdot \\ &\cdot |\operatorname{sen}(2 \cdot \delta_1 - 2 \cdot \delta_2')| = \\ &= |\cos(2 \cdot \delta_2 - 2 \cdot \delta_1)| \cdot |\cos(2 \cdot \delta_2' - 2 \cdot \delta_1)| + |\operatorname{sen}(2 \cdot \delta_2 - 2 \cdot \delta_1)| \cdot \\ &\cdot |\operatorname{sen}(2 \cdot \delta_2' - 2 \cdot \delta_1)| \leq \begin{cases} |\cos(2 \cdot \delta_2 - 2 \cdot \delta_1)| + |\operatorname{sen}(2 \cdot \delta_2' - 2 \cdot \delta_1)| \\ |\cos(2 \cdot \delta_2' - 2 \cdot \delta_1)| + |\operatorname{sen}(2 \cdot \delta_2 - 2 \cdot \delta_1)| \end{cases} \end{aligned}$$

De forma semelhante, usando a seguinte identidade trigonométrica:

$$\begin{aligned} \cos(2 \cdot \delta_2 - 2 \cdot \delta_2') &= \operatorname{sen}(2 \cdot \delta_2 - 2 \cdot \delta_1 + 2 \cdot \delta_1 - 2 \cdot \delta_2') = \\ &= \operatorname{sen}(2 \cdot \delta_2 - 2 \cdot \delta_1) \cdot \cos(2 \cdot \delta_1 - 2 \cdot \delta_2') + \cos(2 \cdot \delta_2 - 2 \cdot \delta_1) \cdot \\ &\cdot \operatorname{sen}(2 \cdot \delta_1 - 2 \cdot \delta_2') \end{aligned}$$

Calculando o valor absoluto, tem-se a seguinte desigualdade:

$$\begin{aligned}
& |\text{sen}(2 \cdot \delta_2 - 2 \cdot \delta'_2)| = \\
& = |\text{sen}(2 \cdot \delta_2 - 2 \cdot \delta_1) \cdot \cos(2 \cdot \delta_1 - 2 \cdot \delta'_2) + \cos(2 \cdot \delta_2 - 2 \cdot \delta_1) \cdot \\
& \cdot \text{sen}(2 \cdot \delta_1 - 2 \cdot \delta'_2)| \leq \\
& \leq |\text{sen}(2 \cdot \delta_2 - 2 \cdot \delta_1) \cdot \cos(2 \cdot \delta_1 - 2 \cdot \delta'_2)| + \\
& + |\cos(2 \cdot \delta_2 - 2 \cdot \delta_1) \cdot \text{sen}(2 \cdot \delta_1 - 2 \cdot \delta'_2)| = \\
& = |\text{sen}(2 \cdot \delta_2 - 2 \cdot \delta_1)| \cdot |\cos(2 \cdot \delta_1 - 2 \cdot \delta'_2)| + |\cos(2 \cdot \delta_2 - 2 \cdot \delta_1)| \cdot \\
& \cdot |\text{sen}(2 \cdot \delta_1 - 2 \cdot \delta'_2)| = \\
& = |\text{sen}(2 \cdot \delta_2 - 2 \cdot \delta_1)| \cdot |\cos(2 \cdot \delta'_2 - 2 \cdot \delta_1)| + |\cos(2 \cdot \delta_2 - 2 \cdot \delta_1)| \cdot \\
& \cdot |\text{sen}(2 \cdot \delta'_2 - 2 \cdot \delta_1)| \leq \begin{cases} |\text{sen}(2 \cdot \delta_2 - 2 \cdot \delta_1)| + |\text{sen}(2 \cdot \delta'_2 - 2 \cdot \delta_1)| \\ |\cos(2 \cdot \delta'_2 - 2 \cdot \delta_1)| + |\cos(2 \cdot \delta_2 - 2 \cdot \delta_1)| \end{cases}
\end{aligned}$$

Observa-se que o aparecimento do ângulo δ'_2 nas fórmulas, que deve representar a metade da diferença entre ângulos relacionados a outra configuração do experimento, com ângulos $(\theta_{1,1}, \theta'_{1,2}, \theta_{2,1}, \theta'_{2,2})$, lembrando que os ângulos $(\theta_{1,1}, \theta_{2,1})$ são referentes à propriedade das partículas (nesse caso, a polarização dos fótons), portanto, não faz parte da configuração, pois não será controlado. As variáveis $(\theta_{1,1}, \theta_{2,1})$ serão consideradas as mesmas, pois se supõem que qualquer par de fótons preparados de uma mesma forma, tenha as mesmas propriedades, portanto, não é necessário distinguir as variáveis relacionadas a um par ou a outro.

Uma vez que se têm duas configurações, tem-se, portanto, um sistema com duas desigualdades:

$$\begin{aligned}
& -1 + \int_{-\pi}^{+\pi} \left(\frac{4}{\pi} \cdot |\cos(2 \cdot (\delta_2 - \delta_1))| \cdot \rho_{\delta_1}(\delta_1) \right) \cdot d\delta_1 \leq \\
& \leq \mathcal{E}_{\check{z}, \check{\mu}, \delta_1; \delta_2}(Z_{1,1} \cdot Z_{1,2} \cdot Z_{2,1} \cdot Z_{2,2}; \delta_2) \leq \\
& \leq 1 - \int_{-\pi}^{+\pi} \left(\frac{4}{\pi} \cdot |\text{sen}(2 \cdot (\delta_2 - \delta_1))| \cdot \rho_{\delta_1}(\delta_1) \right) \cdot d\delta_1
\end{aligned}$$

E

$$\begin{aligned}
& -1 + \int_{-\pi}^{+\pi} \left(\frac{4}{\pi} \cdot |\cos(2 \cdot (\delta'_2 - \delta_1))| \cdot \rho_{\delta_1}(\delta_1) \right) \cdot d\delta_1 \leq \\
& \leq \mathcal{E}_{\check{z}, \check{\mu}, \delta_1; \delta'_2}(Z_{1,1} \cdot Z_{1,2} \cdot Z_{2,1} \cdot Z_{2,2}; \delta'_2) \leq \\
& \leq 1 - \int_{-\pi}^{+\pi} \left(\frac{4}{\pi} \cdot |\text{sen}(2 \cdot (\delta'_2 - \delta_1))| \cdot \rho_{\delta_1}(\delta_1) \right) \cdot d\delta_1
\end{aligned}$$

E multiplicando por -1 a segunda desigualdade tem-se:

$$\begin{aligned}
& 1 - \int_{-\pi}^{+\pi} \left(\frac{4}{\pi} \cdot |\cos(2 \cdot (\delta'_2 - \delta_1))| \cdot \rho_{\delta_1}(\delta_1) \right) \cdot d\delta_1 \geq \\
& \geq -\mathcal{E}_{\check{z}, \check{\mu}, \delta_1; \delta'_2}(Z_{1,1} \cdot Z_{1,2} \cdot Z_{2,1} \cdot Z_{2,2}; \delta'_2) \geq \\
& \geq -1 + \int_{-\pi}^{+\pi} \left(\frac{4}{\pi} \cdot |\text{sen}(2 \cdot (\delta'_2 - \delta_1))| \cdot \rho_{\delta_1}(\delta_1) \right) \cdot d\delta_1
\end{aligned}$$

Somando-se os membros, tem-se para o primeiro membro:

$$\begin{aligned}
& -1 + \int_{-\pi}^{+\pi} \left(\frac{4}{\pi} \cdot |\cos(2 \cdot (\delta_2 - \delta_1))| \cdot \rho_{\delta_1}(\delta_1) \right) \cdot d\delta_1 - 1 + \\
& + \int_{-\pi}^{+\pi} \left(\frac{4}{\pi} \cdot |\cos(2 \cdot (\delta'_2 - \delta_1))| \cdot \rho_{\delta_1}(\delta_1) \right) \cdot d\delta_1 = \\
& = -2 + \frac{4}{\pi} \cdot \\
& \cdot \int_{-\pi}^{+\pi} \left((|\cos(2 \cdot (\delta_2 - \delta_1))| + |\cos(2 \cdot (\delta'_2 - \delta_1))|) \cdot \rho_{\delta_1}(\delta_1) \right) \cdot d\delta_1 \geq \\
& \geq -2 + \frac{4}{\pi} \cdot \int_{-\pi}^{+\pi} \left(|\text{sen}(2 \cdot \delta_2 - 2 \cdot \delta'_2)| \cdot \rho_{\delta_1}(\delta_1) \right) \cdot d\delta_1 = \\
& = -2 + \frac{4}{\pi} \cdot |\text{sen}(2 \cdot \delta_2 - 2 \cdot \delta'_2)|
\end{aligned}$$

Tem-se para o terceiro membro:

$$\begin{aligned}
& 1 - \int_{-\pi}^{+\pi} \left(\frac{4}{\pi} \cdot |\text{sen}(2 \cdot (\delta_2 - \delta_1))| \cdot \rho_{\delta_1}(\delta_1) \right) \cdot d\delta_1 + 1 + \\
& - \int_{-\pi}^{+\pi} \left(\frac{4}{\pi} \cdot |\text{sen}(2 \cdot (\delta'_2 - \delta_1))| \cdot \rho_{\delta_1}(\delta_1) \right) \cdot d\delta_1 = \\
& = 2 - \frac{4}{\pi} \cdot \int_{-\pi}^{+\pi} \left((|\text{sen}(2 \cdot (\delta_2 - \delta_1))| + |\text{sen}(2 \cdot (\delta'_2 - \delta_1))|) \cdot \rho_{\delta_1}(\delta_1) \right) \cdot d\delta_1 \leq \\
& \leq 2 - \frac{4}{\pi} \cdot \int_{-\pi}^{+\pi} \left(|\text{sen}(2 \cdot \delta_2 - 2 \cdot \delta'_2)| \cdot \rho_{\delta_1}(\delta_1) \right) \cdot d\delta_1 = \\
& = 2 - \frac{4}{\pi} \cdot |\text{sen}(2 \cdot \delta_2 - 2 \cdot \delta'_2)|
\end{aligned}$$

Somando-se os membros da primeira desigualdade com a terceira (que foi multiplicada por -1), tem-se para o primeiro membro:

$$\begin{aligned}
& -1 + \int_{-\pi}^{+\pi} \left(\frac{4}{\pi} \cdot |\cos(2 \cdot (\delta_2 - \delta_1))| \cdot \rho_{\delta_1}(\delta_1) \right) \cdot d\delta_1 - 1 + \\
& + \int_{-\pi}^{+\pi} \left(\frac{4}{\pi} \cdot |\sin(2 \cdot (\delta_2' - \delta_1))| \cdot \rho_{\delta_1}(\delta_1) \right) \cdot d\delta_1 = \\
& = -2 + \frac{4}{\pi} \cdot \\
& \cdot \int_{-\pi}^{+\pi} \left((|\cos(2 \cdot (\delta_2 - \delta_1))| + |\sin(2 \cdot (\delta_2' - \delta_1))|) \cdot \rho_{\delta_1}(\delta_1) \right) \cdot d\delta_1 \geq \\
& \geq -2 + \frac{4}{\pi} \cdot \int_{-\pi}^{+\pi} \left(|\cos(2 \cdot \delta_2 - 2 \cdot \delta_2')| \cdot \rho_{\delta_1}(\delta_1) \right) \cdot d\delta_1 = \\
& = -2 + \frac{4}{\pi} \cdot |\cos(2 \cdot \delta_2 - 2 \cdot \delta_2')|
\end{aligned}$$

E para o terceiro membro, tem-se:

$$\begin{aligned}
& 1 - \int_{-\pi}^{+\pi} \left(\frac{4}{\pi} \cdot |\text{sen}(2 \cdot (\delta_2 - \delta_1))| \cdot \rho_{\delta_1}(\delta_1) \right) \cdot d\delta_1 + 1 + \\
& - \int_{-\pi}^{+\pi} \left(\frac{4}{\pi} \cdot |\text{cos}(2 \cdot (\delta'_2 - \delta_1))| \cdot \rho_{\delta_1}(\delta_1) \right) \cdot d\delta_1 = \\
& = 2 - \frac{4}{\pi} \cdot \int_{-\pi}^{+\pi} \left((|\text{sen}(2 \cdot (\delta_2 - \delta_1))| + |\text{cos}(2 \cdot (\delta'_2 - \delta_1))|) \cdot \rho_{\delta_1}(\delta_1) \right) \cdot d\delta_1 \leq \\
& \leq 2 - \frac{4}{\pi} \cdot \int_{-\pi}^{+\pi} \left(|\text{cos}(2 \cdot \delta_2 - 2 \cdot \delta'_2)| \cdot \rho_{\delta_1}(\delta_1) \right) \cdot d\delta_1 = \\
& = 2 - \frac{4}{\pi} \cdot |\text{cos}(2 \cdot \delta_2 - 2 \cdot \delta'_2)|
\end{aligned}$$

Portanto, após somar as desigualdades, têm-se as seguintes desigualdades:

$$\begin{aligned}
& -2 + \frac{4}{\pi} \cdot |\text{sen}(2 \cdot \delta_2 - 2 \cdot \delta'_2)| \leq \\
& \leq \mathcal{E}_{\check{z}, \check{\mu}, \delta_1; \delta_2}(Z_{1,1} \cdot Z_{1,2} \cdot Z_{2,1} \cdot Z_{2,2}; \delta_2) + \mathcal{E}_{\check{z}, \check{\mu}, \delta_1; \delta'_2}(Z_{1,1} \cdot Z_{1,2} \cdot Z_{2,1} \cdot Z_{2,2}; \delta'_2) \leq \\
& \leq 2 - \frac{4}{\pi} \cdot |\text{sen}(2 \cdot \delta_2 - 2 \cdot \delta'_2)| \\
& -2 + \frac{4}{\pi} \cdot |\text{cos}(2 \cdot \delta_2 - 2 \cdot \delta'_2)| \leq \\
& \leq \mathcal{E}_{\check{z}, \check{\mu}, \delta_1; \delta_2}(Z_{1,1} \cdot Z_{1,2} \cdot Z_{2,1} \cdot Z_{2,2}; \delta_2) - \mathcal{E}_{\check{z}, \check{\mu}, \delta_1; \delta'_2}(Z_{1,1} \cdot Z_{1,2} \cdot Z_{2,1} \cdot Z_{2,2}; \delta'_2) \leq \\
& \leq 2 - \frac{4}{\pi} \cdot |\text{cos}(2 \cdot \delta_2 - 2 \cdot \delta'_2)|
\end{aligned}$$

Assim, tem-se a desigualdade de Leggett.

4.4.4.9 Conclusões acerca da demonstração da desigualdade de Leggett

Observa-se que ao demonstrar a desigualdade de Leggett, em nenhum momento foi estabelecido qualquer distribuição de probabilidades que envolvesse todas as variáveis presentes na fórmula, ou seja, uma função de probabilidade conjunta das variáveis $(Z_{1,1}, Z_{1,2}, Z_{2,1}, Z_{2,2}, \mu_1, \mu_2, \delta_1, \delta_2)$.

Com relação à correlação, fica claro que as variáveis μ_2 e δ_2 são estocasticamente independentes, portanto, a correlação delas é nula, logo, a probabilidade de ocorrer um valor de uma, não sofre interferência do valor atribuída a outra.

Observa-se também que a desigualdade básica origina a desigualdade de Leggett, assim como origina a desigualdade de Bell e de Clauser-Horne-Shimony-Holt

5 CONCLUSÃO

Na literatura encontrada na Mecânica Quântica, frequentemente encontra-se uma abordagem mais física do que estatística, e portanto, detalhes como a classificação das variáveis em variáveis aleatórias e em parâmetros, encontradas na Estatística, não são levadas em consideração, o que pode levar a uma confusão com relação ao que é considerado parâmetro ou variável na Física. Um esclarecimento melhor é necessário para se poder utilizar corretamente as propriedades obtidas na Estatística.

Demonstrou-se que somente com a violação do segundo axioma de Kolmogorov, isto é, supondo a existência de probabilidades negativas, é possível compatibilizar a Teoria de Probabilidade com a modelagem quântica dos resultados observados nos experimentos de, por exemplo, Aspect, Dalibard e Roger (1982).

Foi desenvolvida uma desigualdade básica a partir da qual, por dedução algébrica, foram demonstradas as desigualdades de Bell, a de Clauser-Horne-Shimony-Holt e a de Leggett, e cujas condições para sua validade, continham as condições para a validade das outras desigualdades.

Foi visto que não há a necessidade de se discutir a dependência das variáveis aleatórias com relação a quaisquer parâmetros, apenas deve-se prestar atenção na dependência que ocorre na função de probabilidade.

Esta formalização encontrada nesta tese está longe de abranger toda a Mecânica Quântica, mas trata-se de uma abordagem inicial a este vasto campo. Esta explicitação dos conceitos nativos da Estatística já tem sido também encontrada em trabalhos recentes de diversos físicos, como em Griffiths (2001), que demonstram não ser necessário um novo cálculo de probabilidades, como havia proposto alguns outros físicos, visto em Pitowsky (1989) (que apresenta a probabilidade quântica), sendo somente necessária uma melhor formalização da

Mecânica Quântica com respeito às definições estatísticas para que não haja conflitos.

Como continuação deste trabalho, pretende-se estudar as noções de separabilidade de sistemas quânticos, verificando se há alguma correspondência com o conceito clássico de correlação, encontrado na literatura de Estatística. O estudo sobre a desigualdade de Leggett deverá se estender para verificar como propor um modelo probabilístico clássico na qual a desigualdade de Leggett não seja violada, para qualquer valor dos parâmetros. O estudo sobre teorema de Kochen-Specker e outros teoremas relacionados com a questão de “variáveis ocultas” na Mecânica Quântica serão realizados na continuação deste trabalho, e se possível, pretende-se ao menos apontar algumas possibilidades de uso da Mecânica Quântica na Estatística.

REFERÊNCIAS

ASPECT, A.; DALIBARD, J.; ROGER, G. Experimental test of Bell's inequalities using time-varying analyzers. **Physical Review Letters**, New York, v. 49, n. 25, p. 1804-1807, 1982.

BELL, J. S. On the Einstein Podolsky Rosen paradox. **Physics**, New York, v. 1, n. 3, p. 195, 1964.

ENCICLOPÉDIA Mirador Internacional. São Paulo: Encyclopaedia Britannica do Brasil, 1993. 14 v.

GRIFFITHS, D. J. **Introduction to quantum mechanics**. Englewood Cliffs: Prentice Hall, 1995. 394 p.

GRIFFITHS, R. B. **Consistent quantum theory**. Cambridge: Cambridge University, 2001. 408 p.

KHRENNIKOV, A. I. U. **Contextual approach to quantum formalism**. New York: Springer, 2009. 353 p.

KREYSZIG, E. **Advanced engineering mathematics**. 9th ed. Hoboken: J. Wiley, 2006. 1094 p.

LOOMIS, L. H.; STERNBERG, S. **Advanced calculus**. Boston: J. Bartlett, 1990. 580 p.

MAGALHÃES, M. N. **Probabilidade e variáveis aleatórias**. 2. ed. São Paulo: USP, 2006. 428 p.

MOOD, A. M.; GRAYBILL, F. A.; BOES, D. C. **Introduction to the theory of statistics**. 3rd ed. New York: McGraw-Hill, 1973. 564 p.

PITOWSKY, I. **Quantum probability: quantum logic**. Berlin: Springer-Verlag, 1989. 209 p.

SHANKAR, R. **Principles of quantum mechanics**. 2nd ed. New York: Plenum, 1994. 676 p.

WEISSTEIN, E. W. **CRC concise encyclopedia of mathematics**. 2nd ed. Boca Raton: Chapman & Hall; CRC, 2003. 3242 p.