



**RICARDO WAGNER PACOPAHYBA DE MATTOS**

**AJUSTE DE MODELOS NÃO LINEARES AO  
CRESCIMENTO E GANHO DE MASSA DE  
FRUTOS DE PEQUI**

**LAVRAS – MG**

**2016**

**RICARDO WAGNER PACOPAHYBA DE MATTOS**

**AJUSTE DE MODELOS NÃO LINEARES AO CRESCIMENTO E  
GANHO DE MASSA DE FRUTOS DE PEQUI**

Dissertação apresentada à Universidade Federal de Lavras como parte das exigências do programa de Pós-Graduação em Estatística e Experimentação Agropecuária, área de concentração em Estatística e Experimentação Agropecuária, para a obtenção do título de Mestre.

Orientador

Dr. Augusto Ramalho de Moraes

**LAVRAS – MG**

**2016**

**Ficha catalográfica elaborada pelo Sistema de Geração de Ficha  
Catalográfica da Biblioteca Universitária da UFLA, com dados  
informados pelo (a) próprio(a) autor(a).**

Mattos, Ricardo Wagner Pacopahyba de.

Ajuste de modelos não lineares ao crescimento e ganho de massa de  
frutos de pequi / Ricardo Wagner Pacopahyba de Mattos. – Lavras:  
UFLA, 2016.

74 p.

Dissertação (mestrado acadêmico) – Universidade Federal de Lavras,  
2015.

Orientador(a): Augusto Ramalho de Moraes.

Bibliografia.

1. Estimativa de parâmetro. 2. Regressão não linear. 3. Curva de  
crescimento. I. Universidade Federal de Lavras. II. Título.

**RICARDO WAGNER PACOPAHYBA DE MATTOS**

**AJUSTE DE MODELOS NÃO LINEARES AOS DADOS DE  
CRESCIMENTO E GANHO DE MASSA DE FRUTOS DE PEQUI**

Dissertação apresentada à Universidade Federal de Lavras como parte das exigências do programa de Pós-Graduação em Estatística e Experimentação Agropecuária, área de concentração em Estatística e Experimentação Agropecuária, para a obtenção do título de Mestre.

APROVADA em 15 de junho de 2015.

Dr. Ângelo Albérico Alvarenga

EPAMIG

Dr. Joel Augusto Muniz

UFLA

Dr. Augusto Ramalho de Moraes

Orientador

**LAVRAS – MG**

**2016**

*A minha mãe, Legner; ao meu pai, Ricardo; aos meus irmãos, Rafael, Julio e Lucas; aos meus avós, Legner, Edna e Juracy (in memoriam) e minha namorada, Kristin, pelo apoio, carinho e auxílio em todos os momentos desta jornada.*

## RESUMO

O pequi, fruto nativo do Cerrado, apresenta uso alimentício com grande potencial de expansão na culinária brasileira, sendo apreciado por suas agradáveis peculiaridades de cor, aroma e sabor. A espécie tem ampla distribuição dentro do cerrado brasileiro assumindo importante papel na vida dos habitantes desta região, economicamente, com a venda do fruto *in natura*, ou mesmo para o seu próprio consumo. Neste projeto foram avaliadas a utilização dos modelos não lineares Gompertz, Logístico, Brody e von Bertalanffy, considerando erros independentes e erros autorregressivos de primeira ordem, na descrição do crescimento dos frutos de pequi em diâmetro e em ganho de massa ao longo de seu desenvolvimento. O modelo Brody não convergiu para os dados de ganho de massa dos frutos de pequi. Os modelos Gompertz, Logístico e von Bertalanffy obtiveram bons ajustes, sendo o modelo Gompertz o que obteve um melhor ajuste aos dados de ganho de massa segundo os avaliadores da qualidade do ajuste. Em relação ao aumento do diâmetro longitudinal e diâmetro transversal, todos os modelos convergiram e obtiveram bons ajustes. O modelo von Bertalanffy foi considerado o mais indicado em ambos casos segundo os avaliadores da qualidade de ajuste.

Palavras-chave: *Caryocar brasiliense*. Estimação de parâmetro. Regressão não linear. Curva de crescimento. Crescimento de fruto.

## ABSTRACT

The pequi, native fruit of the Cerrado, presents alimentary use with great potential for expansion in Brazilian cuisine, being appreciated for its pleasing color, aroma and flavor peculiarities. The specie is widely distributed in the Brazilian cerrado taking important role in the lives of the inhabitants of this region, economically, with the sale of the fruit in natura, or even for their own consumption. In this project were evaluated the use of the nonlinear models Brody, Gompertz, Logistic and von Bertalanffy considering independent errors and first order autoregressive errors, in the growth description of the pequi fruit in diameter and mass increase over its development. Brody model has not converged for the pequi fruit weight gain data. Gompertz, Logistic and von Bertalanffy models obtained good fits, and the Gompertz model obtained a better fit to mass increase data according to the adjustment quality evaluators. Regarding the increase in longitudinal diameter and transverse diameter, all models converged and achieved good adjustments. The von Bertalanffy model was considered the most suitable in both cases according to the adjustment quality evaluators.

Keywords: *Caryocar brasiliense*. Parameter estimation. Nonlinear regression. Growth curve. Fruit development.

## SUMÁRIO

|              |   |    |
|--------------|---|----|
| <b>1</b>     | <b>INTRODUÇÃO</b> .....                                 | 8  |
| <b>2</b>     | <b>REFERENCIAL TEÓRICO</b> .....                        | 10 |
| <b>2.1</b>   | <b>Características do pequizeiro</b> .....              | 10 |
| <b>2.2</b>   | <b>Importância econômica</b> .....                      | 12 |
| <b>2.3</b>   | <b>Curvas de crescimento</b> .....                      | 15 |
| <b>2.4</b>   | <b>Modelos não lineares</b> .....                       | 19 |
| <b>2.5</b>   | <b>Método de estimação por mínimos quadrados</b> .....  | 23 |
| <b>2.6</b>   | <b>Método dos mínimos quadrados generalizados</b> ..... | 24 |
| <b>2.7</b>   | <b>Processos iterativos</b> .....                       | 26 |
| <b>2.8</b>   | <b>Autocorrelação dos resíduos</b> .....                | 28 |
| <b>2.9</b>   | <b>Avaliadores da qualidade de ajuste</b> .....         | 29 |
| <b>2.9.1</b> | <b>Coefficiente de determinação ajustado</b> .....      | 30 |
| <b>2.9.2</b> | <b>Desvio padrão residual (DPR)</b> .....               | 31 |
| <b>2.9.3</b> | <b>Crítério de informação Akaike</b> .....              | 32 |
| <b>2.9.4</b> | <b>Curvatura de Bates e Watts</b> .....                 | 32 |
| <b>2.9.5</b> | <b>Viés de Box</b> .....                                | 34 |
| <b>3</b>     | <b>METODOLOGIA</b> .....                                | 36 |
| <b>4</b>     | <b>RESULTADOS E DISCUSSÃO</b> .....                     | 40 |
| <b>4.1</b>   | <b>Ganho de massa</b> .....                             | 40 |
| <b>4.2</b>   | <b>Diâmetro longitudinal</b> .....                      | 47 |
| <b>4.3</b>   | <b>Diâmetro transversal</b> .....                       | 56 |
| <b>4.4</b>   | <b>Considerações Finais</b> .....                       | 64 |
| <b>5</b>     | <b>CONCLUSÃO</b> .....                                  | 66 |
|              | <b>REFERÊNCIAS</b> .....                                | 67 |

## 1 INTRODUÇÃO

O pequi é uma árvore nativa e símbolo do cerrado brasileiro, cujo nome científico é *Caryocar brasiliense* Camb. Seu fruto, o pequi, é muito apreciado pela população como alimento, na medicina caseira e para o consumo na forma de cozido, com arroz, em pratos salgados, licores e extração de óleo. É também conhecido como piqui, piquiá, pequerim, amêndoa-de-espinho, grão-de-cavalo, suarí. A palavra pequi, na língua indígena, significa "casca espinhosa".

Está presente com mais intensidade nos estados de Minas Gerais, Goiás, Distrito Federal, São Paulo e Bahia. Em muitas regiões, como a do norte de Minas Gerais, a sua exploração extrativa constitui importante ocupação para inúmeras famílias, que têm essa cultura como fonte de renda e de emprego através da colheita, processamento e comercialização do pequi, pelo menos durante quatro meses no ano.

Conforme Medeiros e Raseira (1998), em relação a frutos de pêssego, para o mercado local ou venda direta ao consumidor, os frutos devem ser colhidos maduros, com certa firmeza e resistindo bem ao manuseio e ao transporte, e com as condições organolépticas desejáveis pelo consumidor. No caso dos frutos de pequi, uma relação parecida pode ser estabelecida, pois os frutos devem estar maduros para seu consumo. No entanto, seu manuseio é dificultado uma vez que seus frutos, no geral, se abrem ou se desprendem da planta quando atingem tal ponto.

A determinação de curvas de crescimento é um aspecto importante nos trabalhos com fruteiras, pois contribui com informações que auxiliam na definição do ponto mais adequado para a colheita. O ponto de colheita é um dos principais fatores que afetam a perda de qualidade em pós-colheita, o qual na maioria das vezes é determinado de maneira subjetiva, considerando coloração

externa e o tamanho do fruto, não havendo uma padronização consensual entre os produtores (CAVALINI et al., 2006).

Assim, a utilização de modelos na descrição do crescimento de frutos permite, por meio das estimativas dos parâmetros, que se conheça o ponto de colheita adequado para cada situação mercadológica.

Conhecer o crescimento de plantas e frutos é de grande importância para o manejo adequado e a detecção de problemas no desenvolvimento das culturas. Pode contribuir para o estabelecimento de estádios de maturação mais adequados à colheita, avaliar o risco de incidência de desordens nutricionais, a necessidade de adoção de medidas preventivas para a correção de deficiência e auxiliar no aperfeiçoamento de metodologias de pesquisa sobre a cultura (TERRA; MUNIZ; SAVIAN, 2010).

Vários tipos de modelos estatísticos podem ser usados para estudar os processos de crescimento envolvidos no sistema de produção vegetal. Em diversas situações, as pesquisas que avaliam crescimento e desenvolvimento de frutos, utilizam modelos de regressão polinomial, e em alguns casos não tem sido adequado para descrever os fenômenos. Estudos têm mostrado que o crescimento e desenvolvimento de frutos têm comportamento sigmoideal descrito por modelos não lineares. Esses modelos fornecem informações e estimativas úteis, particularmente se forem baseados em parâmetros que permitem interpretação biológica.

Pretende-se neste projeto estudar o ajuste dos modelos não lineares Logístico, Gompertz, Von Bertalanffy e Brody aos dados de crescimento e desenvolvimento de frutos de pequi, considerando-se o método de mínimos quadrados, estruturas de erros independentes e erros autorregressivos de primeira ordem.

## **2 REFERENCIAL TEÓRICO**

Conhecer o objeto de estudo, morfologia e fisiologia da planta é de grande importância na descrição da curva de crescimento, pois dessa forma a detecção da relação entre os parâmetros e suas interpretações biológicas é facilitada.

### **2.1 Características do pequi**

O pequi pode ser encontrado em diversos estados brasileiros (principalmente no Pará, Mato Grosso, Goiás, São Paulo e Paraná) e no Distrito Federal, embora o estado de Minas Gerais (MG) seja o maior produtor e consumidor desse fruto (CORDEIRO et al., 2012; VERA et al., 2007). Nas terras altas, arenosas e secas produz frutos uma vez por ano e, com mais abundância, nos anos secos.

É uma árvore nativa, bastante ramificada, de caule tortuoso, cujo porte varia de quatro a dez metros de altura. Sua epiderme ou casca, de aspecto escamoso e pardo-escuro, fendida em todos os sentidos, quebradiça, de grossura de um centímetro, mais ou menos, e de um tom róseo, na parte aderente ao cerne, desagrega-se facilmente e renova-se em período de tempo bastante curto. A copa é larga e os galhos estendem-se pela lateral. As folhas são compostas, trifoliadas, opostas, limbo oval, base aguda e obtusa no folíolo central e desigual nos folíolos laterais, verdes e brilhantes, com ausência de pelos e de glândulas, com bordas serradas, denteadas ou crenadas (SILVA et al., 1994). O plantio por sementes ocorre na estação chuvosa. Prefere climas quentes, sendo ideais as regiões Norte, Nordeste e Centro-Oeste do Brasil. O desenvolvimento das mudas é lento.

Particularmente, o pequi é constituído por diferentes partes, sendo: exocarpo, mesocarpo externo, mesocarpo interno (parte comestível) e endocarpo (espinhoso). Popularmente, as folhas e flores do pequizeiro e o óleo da polpa do pequi são utilizados no tratamento de algumas enfermidades, como doenças respiratórias e do fígado, além de ser usado como substância afrodisíaca. Na culinária, a polpa do fruto é utilizada em distintas preparações, tais como: arroz com pequi, frango com pequi, farofas, paçocas, licores, entre outras (CARRAZA; ÁVILA, 2010).

As flores são grandes, amarelas e se apresentam no racemo terminal dos galhos, com 10 a 30 unidades. São hermafroditas e actinomorfas, possuindo sépalas avermelhadas e arredondadas, ligadas 5 a 6 pela base. Corola alva com 5 a 6 pétalas livres, levemente aderentes e caducas. Anteras são pequenas, ovais, filetes filiformes, apresentando grande quantidade de estames em 2 ou 3 séries. Ovário súpero, globoso e livre, apresentando óvulos solitários por lóculo (SILVA et al., 1994).

O fruto do pequizeiro, ora esférico, ora oval, e que se desprende espontaneamente da árvore depois de sua completa maturação, é formado pela junção de dois, três e às vezes mais alojamentos, em cada um dos quais se encontra um caroço arredondado do tamanho de um limão comum, revestido exteriormente de uma polpa butirosa, amarelo-alaranjada ou branca, conforme a variedade (MATOS, 2007).

Dentro desse fruto, que se come cru, cozido ou simplesmente assado, encontra-se às vezes um só caroço e uma amêndoa única, branca, pouco menor que a azeitona, de gosto muito agradável mesmo crua e rica em princípios gordurosos altamente nutritivos. Essa amêndoa é coberta por uma película delgada, branca, protegida exteriormente por caprichoso e compacto tecido concêntrico de pequeninos cerdos rijos, facilmente penetrantes na língua e nas

gengivas, onde a sua presença causa dores intensas às crianças, mas perfeitamente suportáveis pelos adultos (MATOS, 2007).

A colheita dos frutos é feita diretamente da árvore quando se iniciam a abertura espontânea de sua casca, ou recolhe-se no chão após a queda. Em seguida leva-se ao sol para completar a abertura e liberação dos caroços; a verdadeira semente encontra-se no interior do caroço e é difícil de ser retirada. Em ambos os casos leva-se os caroços ao sol para secar a polpa amarela que a envolve. Um quilograma de caroços assim preparados contém aproximadamente 145 unidades. Sua viabilidade em armazenamento é curta. Cada planta fornece em média 6 mil frutos ao ano (MATOS, 2007).

A polpa de coloração amarela intensa envolve um caroço duro formado por grande quantidade de pequenos espinhos. Frutifica-se de outubro a março. Em cem gramas de polpa de pequi podemos encontrar 20 mil microgramas de vitamina A. Em relação ao seu valor nutricional, o pequi apresenta considerável teor de lipídios (33,4%), compostos fenólicos (209,0 mg.100g<sup>-1</sup>) e carotenoides (7,2 mg.100g<sup>-1</sup>). A elevada quantidade de lipídios presentes no pequi confere maior valor energético ao fruto, possibilitando a complementação da dieta de populações de baixa renda (LIMA et al., 2007). Já os compostos fenólicos e os carotenoides presentes na polpa do pequi atuam como antioxidantes, podendo diminuir a formação de radicais livres e, até mesmo, o risco de desenvolvimento de câncer (CORDEIRO et al., 2012; OLIVEIRA et al., 2010).

## **2.2 Importância econômica**

O pequizeiro é conhecido como ouro-do-cerrado, devido à sua significativa importância econômico, social e ambiental. O elevado valor nutricional da polpa dos frutos e o grande número de aplicações de seus subprodutos a colocam entre as espécies de importância prioritária, em termos

de domesticação e melhoramento genético, entre todas as espécies nativas do Cerrado.

É considerada uma espécie de interesse econômico, principalmente devido ao uso de seus frutos na culinária, como fonte de vitaminas e na extração de óleos para a fabricação de cosméticos. Na culinária, a polpa do fruto é utilizada em distintas preparações, tais como: arroz com pequi, frango com pequi, farofas, paçocas, licores, entre outras (CARRAZA; ÁVILA, 2010). O caroço, com a polpa (mesocarpo), é cozido com arroz; feijão; carnes; batido com leite; usado para o preparo de licor e para extração de manteiga. O óleo da polpa tem efeito tonificante, além de atuar contra bronquites, gripes, resfriados e no controle de tumores. Os frutos contêm vitamina A e C, tiamina, proteínas e sais minerais, sendo o óleo de pequi utilizado na medicina popular para sanar problemas oftalmológicos relacionados à deficiência de vitamina A, uma vez que a planta apresenta altíssimo teor de carotenoides.

Na indústria cosmética, fabricam-se cremes para a pele tendo o pequi como componente. Na medicina popular, é utilizado para tratamento de problemas respiratórios; afrodisíaco; e suas folhas são adstringentes, além de estimular a produção da bÍlis. A casca do pequizeiro, além de ser utilizada em curtumes é tintorial, fornecendo tinta amarelo-castanha, bastante empregada pelos tecelões artesanais. É considerada planta ornamental pela beleza de suas copas e flores. Os frutos são consumidos por várias espécies da fauna regional, auxiliando a disseminação da espécie (SILVA NETO; COSTA, 2010).

Segundo Silva Neto e Costa (2010) em estudos realizados nas comunidades do norte de Minas Gerais, foi observado que a vegetação do Cerrado nas proximidades dessas comunidades é explorada de forma extrativista. O pequizeiro é um exemplo dessa realidade, sendo uma espécie bastante promissora que pode ser empregada em programas de revegetação de áreas degradadas e em programas de renda familiar. A utilização do pequi na

culinária é bastante difundida entre os povos habitantes do Cerrado brasileiro, assim pode ser encontrada uma grande variedade de pratos típicos confeccionados com o caroço do pequi.

Além de auxiliar na complementação alimentar da população, os produtos obtidos pelo processamento culinário do pequi propiciam o aumento da renda familiar. A exploração de frutos do Cerrado é importante para a renda familiar da comunidade rural, ela pode representar até 57% da renda anual do trabalhador, o que corresponde a 500 reais por safra. No caso de Goiás a renda obtida com a venda do pequi corresponde de 2 a 80% da renda do agricultor familiar (GOMES, 2000; OLIVEIRA, 2006).

O valor econômico do pequizeiro é notado pela presença de fábricas de licor de pequi no norte de Minas Gerais, que produzem milhares de caixas de licor por ano, o que representa dezenas de empregos permanentes e uma expressiva contribuição anual em ICMS e IPI. Outro subproduto do pequi, a castanha, pode ser utilizado como ingrediente de farofas, doces e paçocas, comercializada *in natura*. Das castanhas também se extrai óleo. O fruto *in natura* sem casca é ofertado por dúzia ou por litro (equivalente a 1,5 dúzias (SILVA NETO; COSTA, 2010).

Para os produtores rurais do norte de Minas Gerais, o pequi contribui com 17,73% da renda familiar, atrás apenas do feijão (33,52%) e da mandioca (32,64%). Embora a produção anual de frutos seja irregular entre safras, estima-se a produção extrativista com base em 45 indivíduos/ha e com 180 kg/ha de polpa, 33 kg/ha de amêndoas, 199 kg/ha de óleo de polpa e 15 kg de óleo de amêndoas (SILVA NETO; COSTA, 2010).

### 2.3 Curvas de crescimento

O estudo do crescimento de espécies vegetais possibilita ao pesquisador comparar o comportamento de uma planta, ou de suas partes (folhas, colmos, raízes e frutos), frente às mais diversas situações empregadas.

As técnicas de análise de crescimento foram desenvolvidas, no início do século XX, por investigadores britânicos (BLACKMAN, 1919; BRIGGS; KIDD; WEST, 1920; WEST; BRIGGS; KIDD, 1920), que além de apresentarem as fórmulas de análise de crescimento, suas derivações e condições necessárias para seu uso correto, discutem alternativas e métodos que envolvem uma descrição matemática do peso da matéria seca e da área foliar em função do tempo, seguida de cálculos de diferentes parâmetros de crescimento. O fundamento dessa análise é a medida sequencial da acumulação de matéria orgânica na planta, sendo que a sua determinação é feita, normalmente, considerando a massa da matéria seca ou a sua fitomassa (MAGALHÃES, 1985). Entretanto, devido ao fato desse procedimento ser destrutivo, as plantas tomadas como amostra a cada tempo devem representar a população em estudo.

O estudo de curvas de crescimento é importante uma vez que pode ser realizado em situações em que a informação contida numa sequência de pontos “tamanho-tempo” do crescimento de uma espécie seja reduzida e sintetizada num conjunto de parâmetros, os quais tenham interpretação prática e preditiva. Mazzini et al. (2005) em seu trabalho com crescimento animal, comentam que os parâmetros dos modelos de crescimento são utilizados para inferir sobre taxa de crescimento, resposta à seleção, peso à maturidade e grau de amadurecimento. Os mesmos parâmetros têm interpretações análogas para o crescimento vegetal.

Cardoso et al. (2006) destacaram que uma forma de maximizar a eficiência de plantas em captação dos recursos limitantes (nutrientes, luz, água

entre outros) ao crescimento, desenvolvimento e produção, é manejar adequadamente a cultura, com a utilização de espaçamento e/ou arranjo espacial eficientes, uma população de plantas adequada, cultivar adaptada ao local específico, entre outros. A análise de crescimento neste caso entra como uma ferramenta importante que avalia a eficiência desses manejos, sendo bastante utilizada por pesquisadores das Ciências Agrárias.

No estudo de crescimento de plantas de feijoeiro, Urchei, Rodrigues e Stone (2000) citam que para avaliar os efeitos de sistemas de manejo sobre as plantas, a análise de crescimento é fundamental, pois descreve as mudanças na produção vegetal em função do tempo, o que não é possível com o simples registro do rendimento. O estudo do crescimento de comunidades vegetais é um dos primeiros passos na análise de produção primária, caracterizando-se como o elo entre o simples registro do rendimento das culturas e a análise destas por meio de métodos fisiológicos, podendo ser utilizada para conhecer a adaptação ecológica das plantas a novos ambientes, a competição interespecífica, os efeitos de sistemas de manejo e a capacidade produtiva de diferentes genótipos (KVET et al., 1971).

O conhecimento do crescimento de plantas e frutos é fundamental para o manejo adequado e a detecção de problemas no desenvolvimento das culturas, podendo, ainda, contribuir para se estabelecerem estádios de maturação mais adequados à colheita, avaliar se o risco de incidência de desordens nutricionais, a necessidade de adoção de medidas preventivas para a correção de deficiência e auxiliar no aperfeiçoamento de metodologias de pesquisa sobre a cultura, como, por exemplo, na identificação de parâmetros mais adequados para a avaliação do crescimento da planta nas diversas fases do ciclo (TERRA; MUNIZ; SAVIAN, 2010). De acordo com Cavalini et al. (2006), apesar de ser um dos principais fatores de perda pós-colheita, o ponto ideal de colheita é, geralmente, determinado de forma subjetiva por meio da observação visual da coloração

externa e tamanho do fruto. Portanto, o estudo de curvas de crescimento do fruto pode servir como uma ferramenta para a padronização da época de colheita.

A avaliação do crescimento representa a referência inicial na análise de produção das espécies vegetais, requerendo informações que podem ser obtidas sem a necessidade de equipamentos sofisticados (PEREIRA; MACHADO, 1987). Tais informações são a quantidade de material contido na planta toda e em suas partes (folhas, colmos, raízes e frutos), e o tamanho do aparelho fotossintetizante (área foliar), obtidas a intervalos de tempo regulares durante o desenvolvimento fenológico da planta. Os trabalhos encontrados na área vegetal destacam que análise de crescimento é fundamental, pois descreve as mudanças na produção vegetal em função do tempo. Porém, a maioria desses trabalhos faz uso de modelos de regressão linear ou polinomial o que não é adequado neste tipo de estudo. Os modelos não lineares cujos parâmetros apresentam interpretação biológica e que descrevem as curvas de crescimento são amplamente utilizados no estudo de curvas de crescimento.

A diversidade de modelos e a necessidade de se comparar curvas originadas de diferentes tratamentos fazem com que pesquisas nesta área tenham grande demanda de métodos estatísticos. Os princípios e práticas de análise do crescimento têm como objetivo descrever e interpretar o desempenho das espécies, produzidas em ambiente protegido ou campo (HUNT, 1990). O interesse pelas curvas de crescimento vem aumentando nos últimos anos, principalmente pelo desenvolvimento de novas técnicas computacionais que permitem maior rapidez e precisão das análises (SILVA; AQUINO; OLIVEIRA, 2001).

Alvarez e Castro (1999) analisaram o comportamento do crescimento de cana crua e cana queimada nos primeiro e segundo anos de rebrota por meio de curvas adaptadas e verificaram que a altura das plantas apresentou curvas de crescimento de formato sigmoidal. Oliveira (1992) ajustou, dentre outros

modelos, o modelo de crescimento de Gompertz aos dados de matéria seca de folha e colmo, índice de área foliar e acúmulos de graus-dia para cana-de-açúcar.

Pereira et al. (2000) estudaram o comportamento da bananeira, (*Musa* spp.) ‘Prata Anã’, no primeiro ciclo de produção sob diferentes espaçamentos e verificaram um padrão sigmoidal para o crescimento das plantas, desse modo ajustaram o modelo logístico para a característica altura das plantas. Corsato (2004), estudando a fenologia e carboidratos de reserva do caquizeiro (*Diospyros kaki* L.), ‘Rama Forte’, em clima tropical no Brasil encontrou para as curvas de crescimento do fruto um padrão sigmoidal duplo.

Rodrigues (2005) avaliou frutos de caqui ao longo do ciclo vital, procurando caracterizar o desenvolvimento físico e físico-químico. Foram feitas medidas do crescimento após a antese até a colheita aos 84 dias. Verificou-se que a intensificação da cor amarela, bem como os teores de acidez titulável, sólidos solúveis e vitaminas seguiram padrão sigmoidal. Foi feito o ajuste de modelo polinomial quadrático tentado explicar o comportamento das diversas características de crescimento.

Cunha Junior et al. (2007) realizaram a descrição da curva de maturação de frutos de pêssigo da cultivar ‘Aurora-1’ por meio de avaliações da altura e diâmetro, da coloração interna e externa e de componentes químicos durante a formação e crescimento, sem fazer ajuste de equações de regressão. Os autores afirmaram que o padrão de crescimento para as medidas físicas seguiu uma curva sigmoidal dupla com três estádios. No estádio I e III o crescimento foi exponencial. No estádio II houve diminuição do crescimento com a lignificação do caroço.

Vários tipos de modelos estatísticos podem ser usados, de acordo com suas habilidades, para facilitar a interpretação dos processos envolvidos no sistema de produção vegetal. Esses modelos podem fornecer também informações e estimativas úteis, particularmente se forem baseados em

parâmetros que permitem interpretação biológica. Os modelos empíricos usados frequentemente para estimar o crescimento de frutas incluem a função Logística e de Gompertz e em contrapartida não são encontrados trabalhos que abordam os modelos de Brody e Von Bertalanffy na descrição do crescimento de frutos.

Esses modelos são amplamente usados em estudos com animais relacionando peso-idade. Alves (1986) e Berg e Butterfield (1976) descrevem que a curva típica de crescimento, durante a vida animal, apresenta uma forma sigmoide, ou seja, o crescimento durante a primeira etapa da vida é lento, seguido de um período de autoaceleração, até atingir o ponto máximo da taxa de crescimento quando, então, ocorre uma fase de autodesaceleração. Esse padrão de crescimento muitas vezes é mencionado em trabalhos sobre desenvolvimento de frutos e alguns autores já têm trabalhado, na área vegetal, com modelos não lineares em detrimento aos lineares.

De modo geral, na literatura diversos trabalhos abordam a importância de se estudar o modelo de crescimento de animais. Brown et al. (1972 citado por MAZZINI, 2001), utilizaram a função Brody para obter estimativas do peso assintótico e da taxa de maturidade em bovinos da raça Hereford e Angus. Denise e Brinks (1985), analisando as mesmas raças, compararam as funções de Brody e Richards em relação à qualidade do ajuste dos parâmetros da curva de crescimento. Bergamasco et al. (2001) compararam os modelos Logístico, Brody e Gompertz, na descrição do crescimento de fêmeas da raça Holandesa, do nascimento aos 2 anos de idade.

## **2.4 Modelos não lineares**

Em regressão, os modelos são classificados basicamente como: modelos lineares (aqueles que são lineares em relação aos parâmetros, ou seja, suas derivadas parciais em relação aos parâmetros do modelo não dependem de

nenhum parâmetro); modelos não lineares (modelos em que pelo menos uma das derivadas parciais depende de algum parâmetro do modelo e não existe transformação capaz de torná-lo linear) e modelos linearizáveis, estes não são lineares em sua forma inicial, mas podem se tornar lineares a partir de alguma transformação). Os modelos de crescimento de um modo geral são classificados como modelos de regressão não linear e apresentam algumas peculiaridades quanto ao procedimento de ajuste (DRAPER; SMITH, 1998).

O ajuste de modelos não lineares é comumente utilizado em situações experimentais como o estudo da dinâmica e disponibilização de nutrientes no sistema solo-planta (PEREIRA; MUNIZ; SILVA, 2005), estudo do crescimento de espécies vegetais (MARTINS FILHO et al., 2008) e em estudos de velocidade de reações químicas (MACHADO, 2006).

Por apresentarem parâmetros que podem ser interpretados biologicamente, modelos de regressão não lineares são mais indicados frente aos modelos lineares, facilitando o entendimento a respeito do processo de crescimento. Esses modelos fornecem informações e estimativas úteis de grande importância para a avaliação do crescimento, particularmente se forem baseados em parâmetros que permitem interpretação biológica (MENDES et al., 2008).

Dentre essas funções não lineares, podem-se citar os modelos de: Brody ou Monomolecular (BRODY, 1945), Gompertz (WINSOR, 1932), Logístico (NELDER, 1961) e von Bertalanffy (VON BERTALANFFY, 1957).

Sob o ponto de vista da inferência estatística clássica, para os modelos de regressão linear, os estimadores de mínimos quadrados apresentam propriedades ótimas, isto é, são não viesados, normalmente distribuídos, e ainda possuem variância mínima entre qualquer outra classe de estimadores. Essas propriedades são consideradas como as melhores que uma classe de estimadores pode apresentar (SEARLE, 1971). Já no caso de modelos não lineares, as propriedades somente são válidas assintoticamente, isto é, quando o tamanho da

amostra é suficientemente grande. Em geral, em pequenas amostras essas propriedades não são satisfeitas.

Para os modelos de regressão mais simples, assume-se que os erros sejam independentes, o que não é apropriado quando se trabalha com séries cronológicas de dados, em que o erro da observação relativa a um período está correlacionado com o erro da observação anterior (HOFFMANN; VIEIRA, 1998). Segundo Morettin e Tolo (2004), a característica geral da dependência dos resíduos é a de existir uma variação sistemática dos valores em observações sucessivas. Quando isso ocorre, diz-se que os resíduos são autocorrelacionados. Hoffman e Vieira (1998) consideram que, além da autocorrelação residual pode ocorrer heterogeneidade de variâncias.

Segundo Mazzini (2001), o uso do método dos quadrados mínimos ordinário, nos casos de regressão com erros autocorrelacionados positivamente têm sérias consequências, como: os estimadores dos coeficientes não são tendenciosos, apesar de levarem à superestimação da variância, podendo ser completamente ineficientes; o quadrado médio do resíduo pode subestimar a variância dos erros; em consequência, o desvio padrão calculado de acordo com o método dos mínimos quadrados ordinários pode subestimar o verdadeiro desvio padrão do coeficiente de regressão estimado, invalidando os intervalos de confiança e testes usando as distribuições t e F.

Em estudo de modelos não lineares que descrevem o crescimento vegetal é bastante razoável incorporar a autocorrelação, tendo em vista que as medidas de crescimento são tomadas em uma mesma unidade experimental, planta ou fruto, ao longo do tempo, estando, portanto, provavelmente correlacionadas. O teste de Durbin-Watson é utilizado para detectar a presença de autocorrelação (dependência) nos resíduos de uma análise de regressão. Este teste é baseado na suposição de que os erros no modelo de regressão são gerados por um processo autorregressivo de primeira ordem.

Na área de produção vegetal, em diversas situações experimentais, os fenômenos são descritos por modelos não lineares como, por exemplo: o ajuste de curvas para dinâmica e disponibilização de nutrientes no sistema solo-planta; modelos de crescimento de espécies vegetais, de uma maneira geral, bem como de sementes e frutos; estudos de velocidade de reações químicas – cinética enzimática (Modelo de Michaelis-Menten); processos que descrevem fenômenos envolvidos na fotossíntese (PRADO, 2011).

Toralles et al. (2004) utilizaram o modelo de Michaelis-Menten para estudar o escurecimento enzimático “*in vitro*” em pêssegos e encontraram que o coeficiente de especificidade, função dos parâmetros do modelo, é um bom indicador cinético do estudo “*in vitro*” e, portanto, possível de ser utilizado como indicador de escurecimento em polpa.

Na área vegetal alguns autores têm trabalhado com modelos não lineares em detrimento aos lineares. Vieira Junior et al. (1999) estudaram o potencial total de água em sementes; Correa, Araújo e Afonso Júnior (2003) na determinação dos parâmetros de secagem de sementes de milho doce (*Zea mays* L.); Paixão et al. (2004) ao estimarem a infiltração de água no solo por meio de ajustes de funções não lineares e de modelos empíricos; Fideles Filho et al. (2005) ao avaliarem o índice de massa foliar e biomassa aérea da cultura do feijoeiro irrigado; Carlesso et al. (2007) compararam cinco modelos não lineares com o objetivo de determinar o modelo que melhor descreve a secagem por convecção em camada fina de sementes de maracujá-amarelo; Prado (2011) estudou o ajuste de modelos não lineares aos dados de crescimento de coqueiro anão verde; Fernandes (2014) realizou a seleção de modelos não lineares para a descrição das curvas de crescimento do fruto do cafeeiro; Muianga (2014) realizou o ajuste de modelos não lineares na descrição do crescimento do fruto do cajueiro; Ribeiro (2015) estudou o ajuste dos modelos não lineares na descrição da cinética da secagem de polpa de jabuticaba.

## 2.5 Método de estimação por mínimos quadrados

Segundo Gallant (1987) o método dos quadrados mínimos é utilizado na estimação dos parâmetros em modelos não lineares, da mesma maneira que em modelos lineares.

Seja uma equação de regressão não linear

$$Y_t = f(X_t, \theta) + e_t$$

em que:  $t = 1, 2, 3, \dots, n$ .

Assumindo-se que  $E(e_t) = 0$ ,  $\text{Var}(e_t) = \sigma^2$  e  $e_t \sim N(0, \sigma^2)$ , esta função pode ser reescrita na forma matricial

$$Y = f(\theta) + e,$$

$$\text{em que: } Y = \begin{bmatrix} Y_1 \\ Y_2 \\ \cdot \\ Y_n \end{bmatrix}; f(\theta) = \begin{bmatrix} f(X_1, \theta) \\ f(X_2, \theta) \\ \cdot \\ f(X_n, \theta) \end{bmatrix}; e = \begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \\ \cdot \\ e_n \end{bmatrix}.$$

A estimativa para  $\theta$  é dada pelo vetor  $\theta$  que minimiza a soma de quadrados do resíduo,

$$S(\theta) = \sum_{t=1}^n [Y_t - f(X_t; \theta)]^2$$

Escrevendo-se  $S(\theta)$  na forma matricial, tem-se:

$$SQR = S(\theta) = [Y - f(\theta)]' [Y - f(\theta)]$$

Derivando  $S(\theta)$  em relação à  $\theta$ , igualando-se a zero obtém-se o sistema de equações normal (SEN) não linear:

$$X'f(\tilde{\theta}) = X'Y$$

o qual não possui uma solução explícita para o parâmetro  $\theta$ . As estimativas dos parâmetros são obtidas por meio da utilização de métodos iterativos.

## 2.6 Método dos mínimos quadrados generalizados

Segundo Crocci (1984), na presença de heterogeneidade de variâncias e autocorrelação residual, o método dos quadrados mínimos generalizados é mais eficiente do que o método dos quadrados mínimos ponderados e ordinários.

Para o modelo linear

$$Y = X\beta + u$$

supondo-se que  $\varepsilon \sim N(0; W\sigma^2)$ , em que  $W$  é uma matriz simétrica, positiva definida, que representa as variâncias e covariâncias dos erros. Admitindo-se que os erros são autocorrelacionados na forma de um processo autorregressivo estacionário de primeira ordem AR (1),

$$u_t = \phi_1 u_{t-1} + \varepsilon_t$$

em que  $E(\varepsilon_t) = 0, E(\varepsilon_t^2) = \sigma_\varepsilon^2, E(\varepsilon_t \varepsilon_{t-h}) = 0$  se  $h \neq 0$ .

O modelo  $u_t$  será estacionário se

$$-1 \leq \phi_1 \leq +1$$

para  $t = 1, 2, \dots, n$ .

Nessas condições,  $\sigma_u^2 = \frac{\sigma_\varepsilon^2}{1-\phi_1^2}$  e  $Cov_u = \frac{\sigma_\varepsilon^2}{1-\phi_1^2} \cdot \phi_1^h = \sigma_u^2 \phi_1^h$ .

Conforme Draper e Smith (1998) e Hoffman e Vieira (1998) analogamente ao método dos quadrados mínimos ponderados, o vetor de estimativas dos parâmetros é dado por:

$$\hat{\beta} = (X'W^{-1}X)^{-1}X'W^{-1}Y$$

em que:

$$W = \frac{\sigma_\varepsilon^2}{1-\phi_1^2} \begin{bmatrix} 1 & \phi_1 & \phi_1^2 & \cdots & \phi_1^{n-1} \\ \phi_1 & 1 & \phi_1 & \cdots & \phi_1^{n-2} \\ \phi_1^2 & \phi_1 & 1 & \cdots & \phi_1^{n-3} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \phi_1^{n-1} & \phi_1^{n-2} & \phi_1^{n-3} & \cdots & 1 \end{bmatrix}$$

Conforme Moretin e Toloi (2004) se os erros forem autocorrelacionados na forma de um processo autorregressivo estacionário de segunda ordem AR (2).

$$u_t = \phi_1 u_{t-1} + \phi_2 u_{t-2} + \varepsilon_t$$

em que  $u_t$  é estacionário se

$$\begin{aligned} \phi_1 + \phi_2 &< 1 \\ \phi_1 - \phi_2 &< 1 \\ -1 &< \phi_2 < 1 \end{aligned}$$

em que  $\phi_1$  e  $\phi_2$  são os parâmetros de autocorrelação.

Desta forma, tem-se que

$$\sigma_u^2 = \frac{\sigma_\varepsilon^2}{1 - \phi_1 \rho_1 - \phi_2 \rho_2},$$

enquanto as funções de autocorrelação são dadas por

$$\rho_j = \phi_1 \rho_{j-1} + \phi_2 \rho_{j-2}, \quad j > 0,$$

sendo

$$\rho_1 = \frac{\phi_1}{1 - \phi_2} \quad e \quad \rho_2 = \frac{\phi_1^2}{1 - \phi_2} + \phi_2$$

## 2.7 Processos iterativos

Diversos métodos iterativos são propostos para obtenção das estimativas de mínimos quadrados dos parâmetros de um modelo de regressão não linear. Os métodos mais utilizados são os de Gauss-Newton ou método da linearização, o método de Newton, o método Steepest-Descent ou método gradiente e o método de Marquardt (BATES; WATTS, 1988), esses métodos se diferem na forma como  $\theta - \theta^0$  é calculado para propiciar as atualizações no vetor de parâmetros, sendo estas formas básicas dadas por:

$$\text{Gradiente: } \theta = X' \varepsilon + \theta^0$$

$$\text{Gauss - Newton: } \theta = (X'X)X' \varepsilon + \theta^0$$

$$\text{Newton: } \theta = G^- X' \varepsilon + \theta^0$$

$$\text{Maquardt: } \theta = [X'X + \delta \text{diag}(X'X)] X' \varepsilon + \theta^0$$

em que,  $G^- = (X'X)^-$  é uma inversa generalizada.

O método Gradiente é baseado no gradiente ou grau de variação dos resíduos  $\varepsilon'$ . Os métodos Gauss-Newton e Marquardt realizam a regressão dos resíduos em relação às primeiras derivadas do modelo não linear em relação aos parâmetros, até que haja a convergência. O método de Newton faz a regressão desses resíduos em relação a uma função das segundas derivadas do modelo não linear com relação aos parâmetros.

Segundo Souza (1998) o sucesso na convergência de um algoritmo para um método iterativo, no processo de estimação não linear, está diretamente associado ao uso de uma função resposta apropriada e de valores iniciais adequados ao procedimento numérico. Uma escolha não adequada dos valores iniciais pode resultar em um número muito grande de interações até atingir a convergência, ou convergir ao um mínimo local, ou mesmo, não convergir. Entretanto, valores iniciais adequados podem levar ao mínimo global, mesmo com a existência de vários mínimos locais.

No caso do método Gauss-Newton, este usa a expansão em série de Taylor de primeira ordem do vetor de funções:  $f(\theta) = f(\theta^0) + F(\theta^0)(\theta - \theta^0) + \dots$  em que  $F(\theta^0)$  é a matriz de primeiras derivadas de  $X$ , avaliada no ponto  $\theta^0$ .

Substituindo os termos dessa expansão de  $f(\theta)$ , na expressão do SEM não linear, obtém-se:

$$X' f(\theta^0) = X' Y$$

$$X' [f(\theta^0) + F(\theta^0)(\theta - \theta^0)] = X' Y$$

Substituindo  $F(\theta^0)$  por  $X$ , pois  $F(\theta^0)$  desempenha o mesmo papel que a matriz  $X$  no processo de estimação linear  $y = X\beta + \varepsilon$ , tem-se

$$X' [f(\theta^0) + X(\theta - \theta^0)] = X' Y$$

$$X' X(\theta - \theta^0) = X' Y - X' f(\theta^0)$$

$$X'[Y - f(\theta^0)] = X'\varepsilon$$

Pré-multiplicando por  $(X'X)^{-1}$  ou por  $(X'X)^G$ , obtém-se

$$(\theta' - \theta^0) = (X'X)^{-1} X'\varepsilon$$

Portanto, a fórmula iterativa conhecida como método de Gauss-Newton é:

$$\theta^1 = \theta^0 + (X'X)^G X'\varepsilon$$

O processo é repetido colocando-se  $\theta^1$  no lugar de  $\theta^0$  (vetor de valores iniciais que podem ser obtidos de estudos anteriores, conhecimentos teóricos ou por uma grade de valores que minimize a soma de quadrados dos resíduos), repetindo um determinado número de vezes até que o vetor de estimativas não se altere mais dentro de uma precisão pré-estipulada.

## 2.8 Autocorrelação dos resíduos

Geralmente, em modelos básicos de regressão assume-se que os erros não estão correlacionados, isto é, que os erros sejam independentes. Em curvas de crescimento, em que o mesmo fruto é medido em vários tempos diferentes, a hipótese de independência dos erros não é apropriada. O problema de autocorrelação dos erros surge, geralmente, quando se trabalha com séries cronológicas de dados, em que o erro da observação relativa a um período está correlacionado como erro da observação anterior (HOFFMAN; VIEIRA, 1998).

Em seu estudo para avaliar a qualidade e as características do ajuste da função logística monofásica e difásica, com estrutura de erros independentes e autorregressivos de primeira e segunda ordem, AR (1) e AR (2), em dados

simulados e reais de vacas leiteiras, Medeiros et al. (2000) verificaram que a introdução da estrutura de autocorrelação nos erros melhorou o ajuste, tendo considerado as medidas repetidas.

No caso do estudo dos modelos não lineares na descrição do crescimento e ganhos de massa de frutos de pequi, é razoável incorporar a autocorrelação, tendo em vista que as medidas do nitrogênio acumulado são tomadas nos diversos tempos na mesma parcela, estando, portanto, correlacionadas.

## **2.9 Avaliadores da qualidade de ajuste**

Devido às diferenças entre os modelos de regressão não linear, quando estes são ajustados a um mesmo conjunto de dados, torna-se necessário utilizar ferramentas estatísticas com o intuito de compará-los e indicar o melhor modelo (SILVEIRA et al., 2009). Tais ferramentas são denominadas de avaliadores da qualidade de ajuste, e na literatura são apresentadas várias propostas para os mesmos.

Na literatura especializada, a maioria dos trabalhos envolvendo comparação de modelos de crescimento utiliza apenas o coeficiente de determinação ajustado ( $R^2_a$ ) e o desvio padrão residual como avaliadores da qualidade de ajuste. Tal procedimento pode ser explicado pelo fato desses avaliadores serem apresentados diretamente nos arquivos de saídas de *softwares* estatísticos como SAS® e R (SILVEIRA et al., 2009).

De acordo com Silveira et al. (2009) se outros importantes avaliadores como o critério de informação de Akaike, AIC, (AKAIKE, 1974), critério de informação bayesiano, BIC, (SCHWARZ, 1978), erro de predição médio (EPM), coeficiente de determinação predito e percentual de convergência também forem considerados, a indicação do melhor modelo pode ser mais

precisa, uma vez que esses avaliadores levam em consideração outros fatores como a análise da independência residual e o grau de parametrização dos modelos comparados.

A ideia de se explorar vários avaliadores com o intuito de selecionar os melhores modelos de regressão não linear vem perpetuando no decorrer da última década.

Segundo Silveira et al. (2009), quanto maior o número de avaliadores considerados, mais adequada é a indicação dos melhores modelos. Porém, quando um grande número de avaliadores é considerado, a escolha dos modelos se transforma em um processo complexo, uma vez que um mesmo modelo pode apresentar alto desempenho para um avaliador, por exemplo, coeficiente de determinação, e baixa para outros, por exemplo, AIC e BIC, os quais penalizam modelos muito parametrizados.

### **2.9.1 Coeficiente de determinação ajustado**

Autores como Draper e Smith (1998) afirmam que o coeficiente de determinação, embora seja largamente utilizado para a escolha do melhor modelo, não faz ponderações sobre o número de componentes utilizados para o modelo matemático estimado. Portanto, na comparação dos modelos com base no coeficiente de determinação, utiliza-se o coeficiente de determinação ajustado, que faz uma ponderação pelo número de parâmetros e é dado por (TERRA; MUNIZ; SAVIAN, 2010):

$$R_a^2 = 1 - \frac{(1 - R^2)(n - i)}{n - p}$$

em que,  $n$  é o número de observações;  $i$  está relacionado com o ajuste do intercepto da curva, sendo igual a 1, se houver intercepto e igual a 0 se não

houver intercepto no modelo;  $p$  é a quantidade de parâmetros e  $R^2$  é o coeficiente de determinação.

$$R^2 = 1 - \frac{SQR}{SQTot}$$

em que,  $SQR$  se refere à soma de quadrados dos resíduos e  $SQTot$  à soma de quadrados total.

É importante ressaltar que o  $R^2_a$  não tem a mesma interpretação do coeficiente de determinação ( $R^2$ ), que indica o quanto da variação dos dados foi explicado pelo modelo. O  $R^2_a$  perde esta interpretação sendo utilizado apenas para a seleção de modelos, de forma que o maior valor de  $R^2_a$  indica melhor ajuste.

### 2.9.2 Desvio padrão residual (DPR)

Este avaliador indica a distância entre as estimativas do modelo e os valores observados, gerando o valor do desvio residual. A estimativa do DPR é obtida pela seguinte expressão:

$$DPR = \sqrt{\frac{QMR}{n-p}}$$

em que:

$QMR$  = quadrado médio do resíduo;

$n$  = número de observações;

$p$  = número de parâmetros do modelo.

Segundo Sousa et al. (2014) quanto menor for o desvio padrão residual, melhor será o modelo ajustado.

### 2.9.3 Critério de informação Akaike

O critério de Informação de Akaike (AIC) (AKAIKE, 1974) é uma estatística que serve como medida de comparação da qualidade de ajuste do modelo baseado no máximo da função de verossimilhança (MFV), sendo dependente do número de observações e parâmetros do modelo em estudo.

A estimativa do AIC é dada pela seguinte fórmula:

$$AIC = \ln(\hat{\sigma}^2) + \frac{2(p+1)}{n}$$

na qual:

$\hat{\sigma}^2$  : é a estimativa da variância dos resíduos;

p: o número de parâmetros no modelo;

n: o número de observações.

O Critério de Informação de Akaike (AIC) admite a existência de um modelo real que descreve os dados que são desconhecidos, e tenta escolher dentre um grupo de modelos avaliados, o que minimiza a divergência de Kullback-Leibler (K-L). Essa divergência está relacionada à informação perdida por se usar um modelo aproximado e não o "real". O AIC é usado para comparar modelos não aninhados e o melhor modelo, considerando o ajuste, será aquele que apresentar menor valor.

### 2.9.4 Curvatura de Bates e Watts

Os estimadores dos parâmetros dos modelos não lineares não são obtidos analiticamente, como realizado para modelos lineares. Segundo Fernandes (2014) são obtidos por métodos numéricos que, no geral, consistem

em fazer uma aproximação linear por série de Taylor em torno do valor estimado e, só então, aplicar mínimos quadrados.

Segundo o mesmo autor, conforme o tamanho amostral aumenta tem-se uma aproximação linear cada vez melhor, no entanto, para amostras pequenas, essa aproximação pode não ser ótima. Dessa forma, quanto maior a não linearidade do modelo testado, maior a distância desse modelo com a aproximação linear, conferindo menor confiabilidade para as estimativas obtidas pelo método de mínimos quadrados.

A curva de Bates e Watts mede o quão próximo de um modelo linear os modelos não lineares estão. Bates e Watts (1980) em seu trabalho, propõem seus critérios e medidas utilizando o conceito geométrico de curvatura. Tais medidas não dependem da escala das respostas do experimento, desse modo pode-se usar tais medidas para diferentes parametrizações de um dado modelo, assim como para diferentes conjuntos de dados e modelos (SEBER; WILD, 1989).

A não linearidade de um modelo pode ser dividida em duas componentes, sendo elas:

**a) Não linearidade intrínseca ( $\gamma^N$ )**

Está associada à falta de planicidade da superfície resposta e analisa a curvatura do espaço de estimação no espaço amostral, em que o espaço de estimação se refere a todas as soluções do problema de mínimos quadrados. Em regressão linear a não linearidade é nula, dado que o espaço de estimação é uma reta em um plano ou hiperplano. Para a regressão não linear, o espaço de estimação é uma curva e a não linearidade intrínseca mede a extensão dessa curva e não se altera conforme a reparametrização do modelo (FERNANDES, 2014; RIBEIRO, 2015; ZEVIANI et al., 2012).

### b) Não linearidade devido ao efeito dos parâmetros ( $\gamma^T$ )

Representa o valor máximo do efeito da parametrização do modelo na não linearidade deste. Seu valor aumenta conforme o comportamento se afasta de um modelo linear (FERNANDES, 2014; RIBEIRO, 2015; ZEVIANI et al., 2012). Essa curvatura depende da parametrização escolhida, logo uma reparametrização pode mudar consideravelmente a curvatura do efeito do parâmetro (SOUSA et al., 2014).

Fernandes (2014) comenta que uma forma mais simples para o estudo da não linearidade dos modelos, segundo os componentes propostos por Bates e Watts, é a utilização da medida de curvatura quadrática média (CQM ou RMS), sendo a notação utilizada para a curvatura CQM intrínseca é  $\gamma^N$  e para a curvatura CQM devido ao efeito dos parâmetros  $\gamma^T$ . Calculam-se então as estatísticas  $\gamma^N \sqrt{F_{(p,n-p)}}$  e  $\gamma^T \sqrt{F_{(p,n-p)}}$ , em que  $F_{(p,n-p)}$  é o quantil da distribuição de F com p e (n-p) graus de liberdade.

De acordo com Fernandes (2014) e Gazola et al. (2011) grandes valores para a curvatura intrínseca indicam a intensidade da não linearidade da variável resposta, enquanto grandes valores para a curvatura devido ao efeito dos parâmetros indica um afastamento da linearidade. Para Fernandes (2014) e Ribeiro (2015) melhores são os modelos quanto menores forem os valores estimados para as componentes de curvatura.

### 2.9.5 Viés de Box

A medida de viés de Box, proposta por Box (1971), consiste em quantificar o viés dos estimadores de mínimos quadrados dos parâmetros e desta forma é possível detectar quais parâmetros, individualmente, causam um excesso de curvatura (RIBEIRO, 2015). Tal medida é obtida por

$$\begin{aligned} & \text{Vício}(\hat{\theta}) \\ &= -\frac{\sigma^2}{2} [\sum_{i=1}^n F(\theta) F^T(\theta)]^{-1} \sum_{i=1}^n F(\theta) \text{tr}\{[\sum_{i=1}^n F(\theta) F^T(\theta)]^{-1} \sum_{i=1}^n H(\theta)\} \end{aligned}$$

na qual:  $F(\theta)$  é o vetor ( $p \times 1$ ) de primeiras derivadas de  $f(x_i; \theta)$  ou vetor de velocidade e  $H(\theta)$  é uma matriz ( $p \times p$ ) de segundas derivadas com relação a cada elemento de  $\theta$  e  $\sigma^2$  refere-se à variância dos dados.

Normalmente, para o cálculo de  $(XX)$ , utilizam-se  $\hat{\theta}$  e  $\hat{\sigma}^2$  como sendo valores verdadeiros de  $\theta$  e  $\sigma^2$ , respectivamente (MAZUCHELI; ACHCAR, 2002).

O cálculo do viés de Box é mais comumente apresentado em porcentagem, dado por

$$\%Vício(\hat{\theta}) = \frac{100 \text{Vício}(\hat{\theta})}{\hat{\theta}}$$

Ratkowski (1993) sugere um valor padrão de 1% (0,01) para a determinação da não linearidade. Assim como para as medidas de curvatura de Bates e Watts, menores valores de viés de Box implicam em um melhor modelo. Se necessário, pode-se fazer uma reparametrização levando em consideração os valores do viés anterior para a estimativa de um novo viés (RIBEIRO, 2015).

### 3 METODOLOGIA

Os dados analisados foram extraídos de Rodrigues et al. (2009) e se referem ao diâmetro transversal e longitudinal em cm, e massa em gramas, de frutos de pequi.

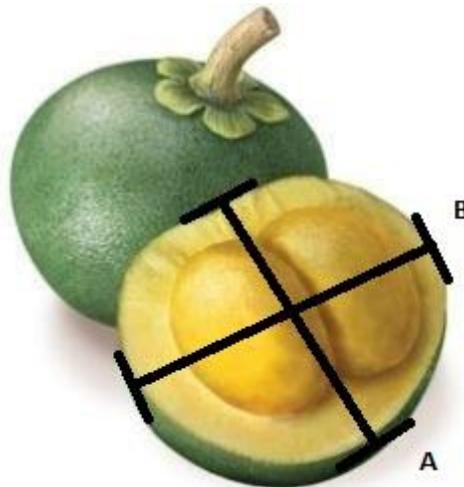


Figura 1 Fruto de pequi, evidenciados seus diâmetros transversal (A) e longitudinal (B)

Fonte: GLUTADELA... (2015)

Os frutos foram colhidos em uma área de pastagem nativa com formação típica do cerrado e com predomínio da espécie *Caryocar brasiliense* Camb., localizada a 12km do município de Itumirim, sul do estado de Minas Gerais. O experimento foi conduzido em delineamento inteiramente casualizado (DIC), disposto por um fatorial simples, sendo constituído por oito períodos de coletas, com três repetições. Foram selecionados 60 exemplares ao acaso da espécie, o mais homogêneos possível quanto ao porte. Para identificação, as flores abertas por ocasião da antese foram marcadas, em posições distintas na planta. Imediatamente após a formação dos frutos foram colhidos 150 deles, divididos

em três lotes iguais, representando as repetições. Com o crescimento dos frutos a quantidade coletada foi diminuída, sendo cada repetição constituída de 25 unidades. O crescimento dos frutos foi avaliado quinzenalmente a partir da antese, até a abscisão dos frutos. O período compreendido entre a antese e a abscisão dos frutos foi de 117 dias.

No caso dos frutos de pequi o crescimento segue a forma sigmoidal. A estimação dos parâmetros nestes modelos pode ser feita utilizando-se diferentes procedimentos da Estatística, como: método de mínimos quadrados, método da máxima verossimilhança, método bayesiano, considerando-se diferentes estruturas de erros.

Aos dados de crescimento e desenvolvimento dos frutos de pequi foram ajustados os modelos de crescimento não linear: Logístico, Gompertz, Brody e von Bertalanffy, considerando erros independentes e erros autorregressivos de primeira ordem, descritos pelas seguintes expressões:

**a. Modelo Logístico:**

$$Y_i = A/[1+B*exp(-K*t_i)] + \varphi_1 e_{i-1};$$

**b. Modelo Gompertz:**

$$Y_i = A*exp[-B*exp(-K*t_i)] + \varphi_1 e_{i-1};$$

**c. Modelo Brody:**

$$Y_i = A*[1-B*exp(-K*t_i)] + \varphi_1 e_{i-1};$$

**d. Modelo von Bertalanffy:**

$$Y_i = A*[1-B*exp(-K*t_i)]^3 + \varphi_1 e_{i-1};$$

nos quais:  $\mathbf{Y}$  é a medida do fruto observada no tempo  $t$ ;  $\mathbf{A}$  é o parâmetro correspondente ao valor máximo assintótico;  $\mathbf{K}$  é a taxa de crescimento;  $\mathbf{B}$  constante matemática relacionada à disposição da curva;  $\mathbf{t}$  a idade do fruto em dias;  $\mathbf{e}_t$  o resíduo no tempo  $t$ ;  $\mathbf{e}_{t-1}$  o resíduo no tempo  $t-1$ ;  $\boldsymbol{\varphi}_1$  o parâmetro de autocorrelação de primeira ordem.

Para o ajuste das funções aos dados foi aplicado o procedimento PROC MODEL do *software* Statistical Analysis System (SAS, 1999) através do método de Gauss-Newton (NETER et al., 1985). A seleção do modelo mais adequado para explicar o crescimento dos frutos foi feita com base na precisão dos ajustes e obedecendo aos seguintes critérios:

- Coeficiente de determinação ajustado ( $R^2_{aj}$ )

$$R^2_{aj} = 1 - \frac{(1-R^2)(n-i)}{n-p};$$

- Desvio padrão residual ( $DPR$ )

$$DPR = \sqrt{\frac{QMR}{n-p}};$$

- Critério de informação de Akaike ( $AIC$ )

$$AIC = \ln(\hat{\sigma}^2) + \frac{2(p+1)}{n};$$

- Intervalo de confiança assintótico ( $IC$ )

$$IC_{(1-\alpha)} = \lambda \pm t_{\left(\frac{\alpha}{2}\right)} \sqrt{(\hat{\sigma}^2/n)}$$

O teste de Durbin-Watson,  $DW$ , foi utilizado para verificar a autocorrelação de primeira ordem entre os resíduos.

$$DW = \frac{\sum_{t=2}^n (e_t - e_{t-1})^2}{\sum_{t=1}^n e_t^2}$$

na qual:  $e_t$  : o resíduo no tempo  $t$ ;  $e_{t-1}$  : o resíduo no tempo  $t - 1$ .

## 4 RESULTADOS E DISCUSSÃO

Os dados coletados referem-se às medidas de ganho de massa e aumento de diâmetro longitudinal e transversal e foram analisados com o auxílio do programa computacional SAS. Cada conjunto de dados foi avaliado separadamente e os modelos propostos testados.

### 4.1 Ganho de massa

Depois de realizados os ajustes dos modelos aos dados de ganho de massa dos frutos de pequi, constatou-se que o modelo Brody não apresentou convergência, segundo os critérios apresentados pelo software SAS. Dessa forma, o modelo não será representado nas tabelas.

A análise do ajuste dos modelos foi realizada através da análise dos resíduos, considerando-se erros independentes, com distribuição normal, média zero e variância constante. As estatísticas obtidas para os modelos em análise estão representadas na Tabela 1.

Tabela 1 Estimativas das estatísticas do teste de Shapiro-Wilk e Breusch-Pagan com os respectivos valores-p dos resíduos dos modelos Gompertz, Logístico e von Bertalanffy ajustados para os dados de ganho de massa

| Modelos         | Shapiro-Wilk | valor p | Breusch-Pagan | valor p |
|-----------------|--------------|---------|---------------|---------|
| Gompertz        | 0,91         | 0,3928  | 0,77          | 0,3788  |
| Logístico       | 0,98         | 0,9308  | 1,87          | 0,1712  |
| von Bertalanffy | 0,96         | 0,7944  | 0,00          | 0,9619  |

Em relação à normalidade foi observado, através do teste de Shapiro-Wilk, que o valor p do teste foi maior que 0,05 para todos os modelos

apresentados, percebendo-se assim que a pressuposição da normalidade residual foi atendida para todos os modelos. O teste de Breusch-Pagan foi não significativo para os modelos testados, ou seja, não se rejeitou a hipótese de variância residual constante para estes modelos.

Para Fernandes et al. (2014), verificar as pressuposições de normalidade e homogeneidade dos resíduos são de suma importância, pois, uma vez que não atendidas, diz-se que o modelo não é adequado, devendo este desvio ser considerado no modelo ou corrigido.

Os dados da estatística do teste de Durbin-Watson apresentados na Tabela 2, mostram que foi observada presença de autocorrelação residual ao nível de 5% de significância de acordo com o procedimento PROC MODEL do *software* Statistical Analysis System (SAS, 1999) para os modelos Gompertz e Logístico referente aos dados de ganho de massa, ou seja, os erros se comportam de forma dependente ao longo do tempo para esses modelos e por este motivo será incluído o parâmetro de autocorrelação de primeira ordem  $\Phi_1$  no ajuste dos parâmetros destes modelos. Para o modelo von Bertalanffy a autocorrelação residual não foi encontrada, ou seja, os erros se comportam de forma independente ao longo do tempo.

Tabela 2 Valores referentes ao número de parâmetros e ao teste de Durbin-Watson com seus respectivos valores tabelados para o limite superior (LS) e limite inferior (LI) aplicados aos modelos Gompertz, Logístico e von Bertalanffy ajustados aos dados de ganho de massa dos frutos de pequi

| Modelos         | Nº de parâmetros | Durbin-Watson | LI    | LS    |
|-----------------|------------------|---------------|-------|-------|
| Gompertz        | 3                | 3,2487*       | 0,367 | 2,287 |
| Logístico       | 3                | 2,4764*       | 0,367 | 2,287 |
| von Bertalanffy | 3                | 1,5516        | 0,367 | 2,287 |

\* - há dependência

Quando adicionados os parâmetros autorregressivos de primeira ordem, devido ao baixo número de observações, o teste de Durbin-Watson torna-se inconclusivo e inconsistente, pois não há como se estabelecer os valores dos limites superior e inferior para esta quantidade de observações e parâmetros. No entanto os parâmetros autorregressivos de primeira ordem serão considerados para o ajuste dos modelos.

A Tabela 3 representa as estimativas para os parâmetros dos modelos considerando erros autorregressivos de primeira ordem para os modelos Gompertz e Logístico e erros independentes para o modelo von Bertalanffy ajustados aos dados de ganho de massa.

Tabela 3 Estimativas para os parâmetros dos modelos Gompertz, Logístico, considerando estrutura de erros autorregressivos de primeira ordem e von Bertalanffy, considerando estrutura de erros independentes, e seus respectivos intervalos de confiança assintóticos de 95%, no ajuste aos dados de ganho de massa de frutos de pequi

| Modelos         | Estimativa | LI      | LS      | Pr >   t |
|-----------------|------------|---------|---------|----------|
| Gompertz        |            |         |         |          |
| A               | 112,3291   | 111,3   | 113,7   | < 0,0001 |
| B               | 24,5105    | 20,5131 | 28,5079 | 0,0003   |
| K               | 0,0699     | 0,0663  | 0,0734  | < 0,0001 |
| $\Phi_1$        | -0,8901    | -1,5830 | -0,1972 | 0,0655   |
| Logístico       |            |         |         |          |
| A               | 109,7974   | 106,8   | 112,8   | < 0,0001 |
| B               | 267,6350   | 35,6229 | 499,6   | 0,0866   |
| K               | 0,1078     | 0,0905  | 0,1252  | 0,0003   |
| $\Phi_1$        | -0,3204    | -1,4008 | 0,7599  | 0,5922   |
| von Bertalanffy |            |         |         |          |
| A               | 117,9801   | 110,3   | 125,7   | < 0,0001 |
| B               | 2,2873     | 1,7135  | 2,8610  | 0,0006   |
| K               | 0,0464     | 0,0394  | 0,0535  | < 0,0001 |

Na tabela 3 pode-se observar que para o modelo logístico a estimativa do parâmetro B, o qual é uma constante para ajuste da fórmula, foi não significativa. Todos os demais valores de interpretação biológica foram significativos. Ambos os parâmetros autorregressivos de primeira ordem foram não significativos, sendo que no modelo Gompertz este parâmetro foi considerado não significativo por uma pequena margem. As estimativas dos modelos estão relativamente próximas, acarretando em uma sobreposição das curvas ajustadas. Resultados semelhantes foram encontrados por Fernandes (2014), Muianga (2014), Ribeiro (2015) e Terra, Muniz e Savian (2010).

No modelo Gompertz, a estimativa do K, 0,0694 cm corresponde à taxa de crescimento do modelo. A mudança de concavidade do crescimento do fruto ocorreu por volta do quinquagésimo dia, quando o comprimento do fruto tinha aproximadamente 55 gramas. A partir deste período a taxa de crescimento foi reduzindo até próxima de 0, quando o fruto atingiu cerca de 112,32 gramas, seu peso máximo assintótico segundo o modelo proposto, momento cujo o fruto tinha aproximadamente 117 dias de idade. O modelo Logístico, em comparação com o modelo Gompertz, subestimou o peso máximo do fruto no mesmo período, sendo este estimado em cerca de 109,79 gramas. O contrário ocorreu com o modelo von Bertalanffy, este superestimou o peso assintótico do fruto em 117,98 gramas.

A Tabela 4 representa os valores das estimativas para os avaliadores da qualidade de ajuste. Os avaliadores da qualidade de ajuste, representados na Tabela 4, indicam o ajuste dos modelos aos dados de ganho de massa dos frutos. Fernandes (2014), em seu trabalho com frutos de cafeeiro, utiliza o critério AIC para encontrar o modelo mais indicado. Ribeiro (2015) também utiliza o critério para selecionar o modelo mais indicado na descrição da cinética de secagem de frutos de jabuticaba.

Tabela 4 Valores referentes ao número de parâmetros, coeficiente de determinação ajustado ( $R^2_{aj}$ ), desvio padrão residual (DPR) e critério de informação Akaike (AIC) para os modelos Gompertz e Logístico considerando erros autorregressivos de primeira ordem e von Bertalanffy ajustados aos dados de ganho de massa dos frutos de pequi

| Modelos         | Nº de parâmetros | $R^2_{aj}$ | DPR    | AIC    |
|-----------------|------------------|------------|--------|--------|
| Gompertz        | 4                | 0,9994     | 0,5889 | 1,5774 |
| Logístico       | 4                | 0,9964     | 1,4446 | 3,3720 |
| von Bertalanffy | 3                | 0,9911     | 2,0224 | 4,0180 |

Segundo os critérios utilizados para a seleção do modelo mais adequado nota-se relativa diferença entre os resultados, favorecendo o modelo Gompertz quanto à medida de ganho de massa dos frutos. Tal modelo apresentou maior valor do coeficiente de determinação ajustado, menor desvio padrão residual e menor valor para o critério de informação Akaike. Segundo Freitas (2005), em estudos com curvas de crescimento animal os modelos não lineares, entre estes o de Gompertz, produziu ajustes com  $R^2$  acima de 92%, sendo considerados como um bom ajuste.

Na tabela 5 são observadas as estimativas para a curvatura de Bates e Watts e viés de Box para os modelos testados.

De acordo com Fernandes (2014), Gazola et al. (2011) e Ribeiro (2015) menores valores para as estimativas das medidas de curvatura de Bates e Watts, assim como para o viés de Box, indicam um melhor modelo.

O modelo Gompertz obteve o menor valor para a não linearidade intrínseca, sendo este o mais próximo do linear dentre os demais. Já o modelo von Bertalanffy obteve estimativas menores para a não linearidade devido ao efeito dos parâmetros, sendo considerado o melhor modelo segundo este critério.

Tabela 5 Estimativas para os critérios de seleção dos modelos, curvatura de Bates e Watts e viés de Box para os modelos Gompertz, Logístico e von Bertalanffy no ajuste aos dados de ganho de massa de frutos de pequi

| Modelos         | $\gamma^N$ | $\gamma^T$ | Parâmetro | Viés de Box |
|-----------------|------------|------------|-----------|-------------|
| Gompertz        | 0,1589     | 1,7520     | A         | -0,2148     |
|                 |            |            | B         | 0,6759      |
|                 |            |            | K         | 0,4153      |
|                 |            |            | $\Phi_1$  | -0,0302     |
| Logístico       | 0,1648     | 3,6923     | A         | 0,5960      |
|                 |            |            | B         | 0,5503      |
|                 |            |            | K         | -0,7229     |
|                 |            |            | $\Phi_1$  | 0,7191      |
| von Bertalanffy | 0,8771     | 1,1215     | A         | 0,3121      |
|                 |            |            | B         | -1,4237     |
|                 |            |            | K         | -0,8120     |

O viés de Box é comparado com o valor estabelecido por Ratkawski (1983) de 1% (0,01). Tal critério tem capacidade de identificar os parâmetros que, individualmente, são responsáveis pelo excesso de curvatura (GAZOLA et al., 2011). Dessa forma, se o valor estimado para o parâmetro foi maior que o valor de referência 0,01, diz-se que o parâmetro é o responsável, ou um dos responsáveis, pela não linearidade do modelo, sendo valores menores indicadores de melhores modelos (RIBEIRO, 2015).

O modelo Gompertz obteve menores valores no geral para o viés de Box, principalmente para os parâmetros com interpretação biológica A e K, sendo as estimativas do critério para todos os parâmetros do modelo superiores ao valor de 0,01, assim todos os parâmetros são responsáveis pela não linearidade do modelo. Em relação aos demais modelos, todos os valores para o viés de Box também foram superiores ao valor de 0,01.

As figuras seguintes demonstram o ajuste dos modelos aos dados de ganho de massa dos frutos de pequi.

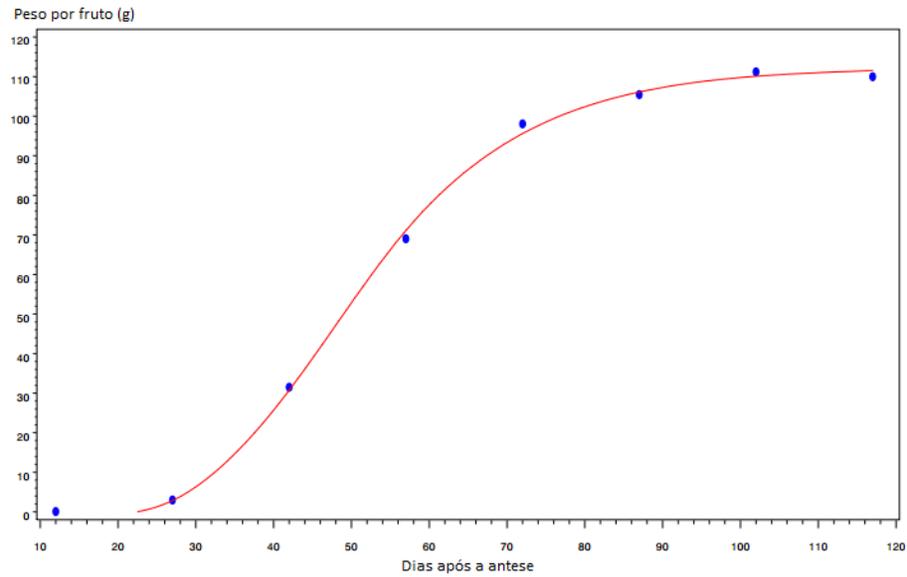


Figura 2 Ajuste do modelo Gompertz aos dados de massa (em g) por fruto de pequi em relação ao tempo (em dias após a antese) considerando estrutura de erros autorregressivos de primeira ordem

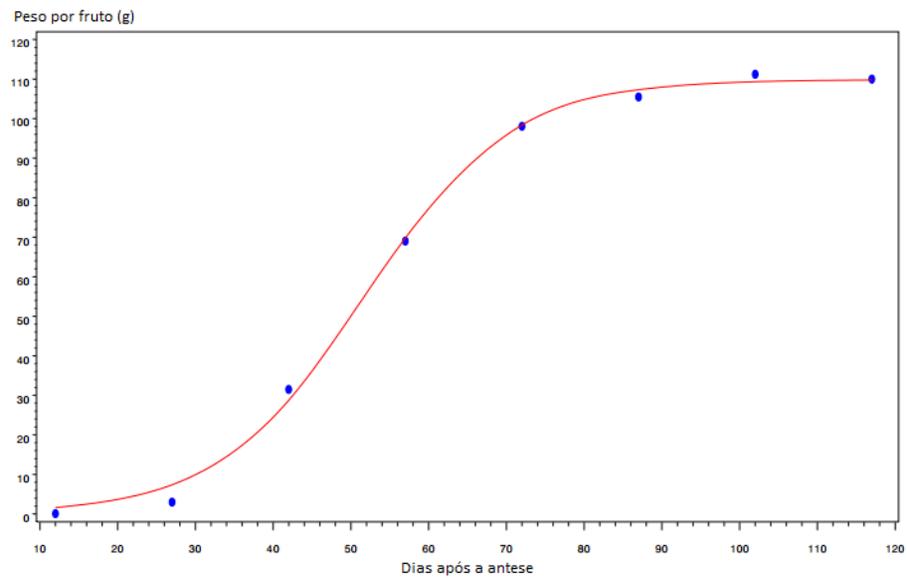


Figura 3 Ajuste do modelo Logístico aos dados de massa (em g) por fruto de pequi em relação ao tempo (em dias após a antese) considerando estrutura de erros autorregressivos de primeira ordem

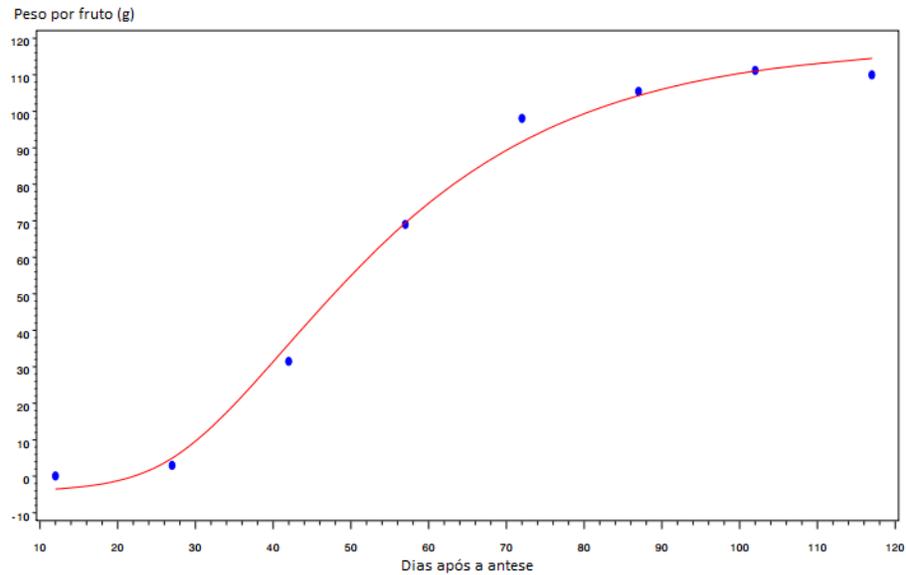


Figura 4 Ajuste do modelo von Bertalanffy aos dados de massa (em g) por fruto de pequi em relação ao tempo (em dias após a antese) considerando estrutura de erros independentes

Através de uma análise visual, todos os modelos aproximam-se dos valores observados. Podendo-se verificar um ganho de massa inicialmente lento, seguido por um estágio de ganho de massa acelerado e por fim a desaceleração deste ganho até seu ponto máximo, variando a estimativa para cada modelo.

#### 4.2 Diâmetro longitudinal

Assim como realizado para os dados de ganho de massa, para o diâmetro longitudinal a análise do ajuste dos modelos foi realizada através da análise dos resíduos, considerando-se erros independentes, com distribuição normal, média zero e variância constante. As estatísticas dos testes realizados para verificar as pressuposições de normalidade e homogeneidade são representadas na Tabela 6.

Tabela 6 Estimativas das estatísticas do teste de Shapiro-Wilk e Breusch-Pagan com os respectivos valores-p dos resíduos dos modelos Brody, Gompertz, Logístico e von Bertalanffy para os dados de diâmetro longitudinal

| Modelos         | Shapiro-Wilk | valor p | Breusch-Pagan | valor p |
|-----------------|--------------|---------|---------------|---------|
| Brody           | 0,95         | 0,7503  | 1,47          | 0,2246  |
| Gompertz        | 0,90         | 0,3068  | 2,49          | 0,1146  |
| Logístico       | 0,97         | 0,8667  | 4,47          | 0,0345  |
| von Bertalanffy | 0,85         | 0,1072  | 0,03          | 0,8617  |

Observa-se pelas estimativas do teste de Shapiro-Wilk que o valor p foi maior que 0,05 para todos os modelos testados, sendo assim, a pressuposição da normalidade residual foi atendida para todos os modelos. Em relação ao teste de Breusch-Pagan foi não significativo para os modelos Brody, Gompertz e von Bertalanffy, ou seja, não se rejeitou a hipótese de variância constante para estes modelos. Entretanto, para o modelo Logístico o valor p do teste de Breusch-Pagan foi menor que 0,05, sendo assim considerado significativo, apontando heterogeneidade de variância.

Ribeiro et al. (2015) e Sousa et al. (2014) em seus respectivos trabalhos também encontraram resultados semelhantes aos apresentados na Tabela 6 quanto a heterogeneidade de variâncias. As estimativas dos parâmetros para estes modelos devem ser feita utilizando-se do método dos mínimos quadrados generalizados (HOFFMAN; VIEIRA, 1998; MAZZINI et al., 2005; SOUSA et al., 2014).

Tabela 7 Valores referentes ao número de parâmetros e ao teste de Durbin-Watson, com seus respectivos valores tabelados para o limite superior (LS) e limite inferior (LI) aplicados aos modelos Brody, Gompertz, Logístico e von Bertalanffy ajustados aos dados de diâmetro longitudinal dos frutos de pequi

| Modelos         | Nº de parâmetros | Durbin-Watson | LI    | LS    |
|-----------------|------------------|---------------|-------|-------|
| Brody           | 3                | 1,3081        | 0,367 | 2,287 |
| Gompertz        | 3                | 2,4232*       | 0,367 | 2,287 |
| Logístico       | 3                | 2,1478        | 0,367 | 2,287 |
| von Bertalanffy | 3                | 2,2416        | 0,367 | 2,287 |

\* - há dependência

As estatísticas do teste de Durbin-Watson representadas na Tabela 7 demonstram que foi observada a presença de autocorrelação residual ao nível de 5% de significância de acordo com o procedimento PROC MODEL do SAS, para o modelo Gompertz ajustado aos dados de diâmetro longitudinal, indicando que os erros se comportam de forma dependente ao longo do tempo. Por este motivo será incluído o parâmetro de autocorrelação de primeira ordem  $\Phi_1$  no ajuste dos parâmetros deste modelo. Para os modelos Brody, Logístico, von Bertalanffy a autocorrelação residual não foi encontrada, ou seja, os erros se comportam de forma independente ao longo do tempo.

Da mesma forma como ocorrido quando em ocasião da análise do ajuste dos modelos aos dados de ganho de massa, quando adicionado o parâmetro autorregressivo de primeira ordem, o teste de Durbin-Watson torna-se inconclusivo e inconsistente devido ao fato de não conseguirmos estabelecer os valores para o limite superior e inferior. No entanto o parâmetro será considerado para o ajuste do modelo.

A Tabela 8 representa as estimativas dos parâmetros dos modelos considerando erros autorregressivos de primeira ordem para o modelo

Gompertz, e erros independentes para os modelos Brody, Logístico e von Bertalanffy ajustados aos dados de diâmetro longitudinal dos frutos de pequi.

Tabela 8 Estimativas para os parâmetros dos modelos Brody, Logístico e von Bertalanffy considerando estrutura de erros independentes e modelo Gompertz, considerando estrutura de erros autorregressivos de primeira ordem, e seus respectivos intervalos de confiança assintóticos de 95%, no ajuste aos dados de diâmetro longitudinal de frutos de pequi

| Modelos         | Estimativa | LI      | LS      | Pr >  t  |
|-----------------|------------|---------|---------|----------|
| Brody           |            |         |         |          |
| A               | 7,7197     | 6,6701  | 8,7692  | < 0,0001 |
| B               | 1,2561     | 1,0977  | 1,4145  | < 0,0001 |
| K               | 0,0202     | 0,0135  | 0,0268  | 0,0019   |
| Gompertz        |            |         |         |          |
| A               | 6,8296     | 6,4640  | 7,1952  | < 0,0001 |
| B               | 4,5046     | 3,3124  | 5,6968  | 0,0018   |
| K               | 0,0441     | 0,0361  | 0,0522  | 0,0004   |
| $\Phi_1$        | -0,4291    | -1,3865 | 0,5284  | 0,4294   |
| Logístico       |            |         |         |          |
| A               | 6,5761     | 6,1322  | 7,0199  | < 0,0001 |
| B               | 17,8929    | 4,9941  | 30,7916 | 0,0418   |
| K               | 0,0675     | 0,0494  | 0,0856  | 0,0008   |
| von Bertalanffy |            |         |         |          |
| A               | 6,9351     | 6,4667  | 7,4035  | < 0,0001 |
| B               | 0,9826     | 0,7433  | 1,2218  | 0,0005   |
| K               | 0,0370     | 0,0290  | 0,0451  | 0,0003   |

Na Tabela 8 observa-se que para o modelo logístico a estimativa do parâmetro B, que é uma constante de ajuste do modelo e sem interpretação biológica, foi não significativa. O parâmetro autorregressivo de primeira ordem estimado para o modelo Gompertz também foi não significativo. As demais estimativas dos parâmetros dos modelos, inclusive para os parâmetros que

possuem interpretação biológica, foram significativas ao nível de 5% de significância. As estimativas dos mesmos parâmetros dos modelos podem ser consideradas próximas umas das outras, o que acarreta em uma aproximação e sobreposição das curvas ajustadas.

A estimativa do parâmetro  $K$ , referente à taxa de crescimento, foi estimada para o modelo von Bertalanffy em 0,0370. A mudança de concavidade da curva para o mesmo modelo ocorreu por volta do trigésimo quarto dia, quando o fruto media em seu diâmetro longitudinal aproximadamente 2,60 cm. Deste momento em diante a taxa de crescimento foi reduzindo até o fim das medições aos 117 dias, em que o diâmetro longitudinal assintótico do fruto foi estimado em 6,94 cm. Os demais modelos não se distanciam muito desta estimativa em comparação com o modelo von Bertalanffy, no entanto o modelo Brody superestimou o diâmetro longitudinal assintótico do fruto em aproximadamente 7,72 cm. O modelo Gompertz estimou o parâmetro em cerca de 6,83 cm e o Logístico subestimou o diâmetro longitudinal assintótico em 6,57 cm.

Por meio da Tabela 9 podemos realizar a verificação das estimativas dos avaliadores da qualidade de ajuste para os quatro modelos analisados.

Tabela 9 Valores referentes ao número de parâmetros, coeficiente de determinação ajustado ( $R^2_{aj}$ ), desvio padrão residual (DPR) e critério de informação Akaike (AIC) para os modelos Brody, Logístico e von Bertalanffy considerando erros independentes e Gompertz considerando erros autorregressivos de primeira ordem, ajustados aos dados de diâmetro longitudinal dos frutos de pequi

| Modelos         | Nº de parâmetros | $R^2_{aj}$ | DPR    | AIC     |
|-----------------|------------------|------------|--------|---------|
| Brody           | 3                | 0,9865     | 0,1226 | -1,5889 |
| Gompertz        | 4                | 0,9894     | 0,1209 | -1,5887 |
| Logístico       | 3                | 0,9823     | 0,1399 | -1,3238 |
| von Bertalanffy | 3                | 0,9914     | 0,0977 | -2,0428 |

Os avaliadores da qualidade de ajuste, presentes da Tabela 9, indicam que o modelo von Bertalanffy obteve um melhor ajuste aos dados de diâmetro longitudinal dos frutos de pequi. O modelo apresentou maior coeficiente de determinação, menor desvio padrão residual e menor valor para o critério de informação Akaike. Todos os modelos obtiveram elevados valores para  $R^2_{aj}$ , apresentando valores superiores a 98%. Os valores do desvio padrão residual ficaram bem próximos e podem ser considerados relativamente pequenos.

A importância da utilização de mais de um avaliador da qualidade de ajuste pode ser observada neste caso, pois o modelo Gompertz obteve maior valor para o critério de informação Akaike, devido à penalização do critério a modelos que contêm um maior número de parâmetros, que o modelo Brody, embora o modelo Gompertz tenha obtido um maior valor do coeficiente de determinação e menor valor do desvio padrão residual inicialmente indicando um melhor ajuste.

Tabela 10 Estimativas para os critérios de seleção dos modelos, curvatura de Bates e Watts e viés de Box para os modelos Brody, Gompertz, Logístico e von Bertalanffy no ajuste aos dados de diâmetro longitudinal de frutos de pequi

| Modelos         | $\gamma^N$ | $\gamma^T$ | Parâmetro | Viés de Box |
|-----------------|------------|------------|-----------|-------------|
| Brody           | 0,1099     | 2,0682     | A         | 0,8060      |
|                 |            |            | B         | 0,3417      |
|                 |            |            | K         | 0,1294      |
| Gompertz        | 0,1808     | 1,0989     | A         | 0,1889      |
|                 |            |            | B         | 0,6148      |
|                 |            |            | K         | 0,2289      |
|                 |            |            | $\Phi_1$  | 0,0182      |
| Logístico       | 0,2362     | 2,1037     | A         | 0,2596      |
|                 |            |            | B         | 1,5529      |
|                 |            |            | K         | 0,4291      |
| von Bertalanffy | 0,1813     | 1,0223     | A         | 0,3880      |
|                 |            |            | B         | 0,7846      |
|                 |            |            | K         | 0,2892      |

De acordo com os dados representados na Tabela 10 o modelo Brody obteve o menor valor para a não linearidade intrínseca, sendo este o mais próximo do linear dentre os demais. Já o modelo von Bertalanffy obteve estimativas menores para a não linearidade devido ao efeito dos parâmetros, sendo considerado o melhor modelo segundo este critério.

Em relação ao viés de Box o modelo Gompertz obteve menores valores no geral para o viés de Box, principalmente para os parâmetros com interpretação biológica A e K, sendo as estimativas do critério para todos os parâmetros do modelo superiores ao valor de 0,01, desta forma todos os parâmetros são responsáveis pela não linearidade do modelo. Em relação aos demais modelos, todos os valores para o viés de Box também foram superiores ao valor de 0,01.

As figuras seguintes demonstram o ajuste dos modelos aos dados de diâmetro longitudinal dos frutos de pequi.

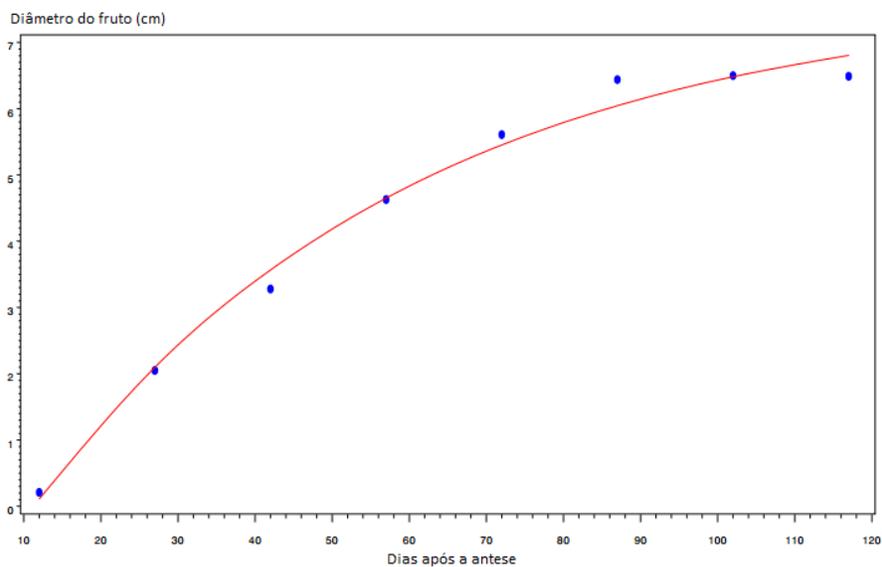


Figura 5 Ajuste do modelo Brody aos dados de diâmetro longitudinal (em cm) do fruto de pequi em relação ao tempo (em dias após a antese) considerando estrutura de erros independentes

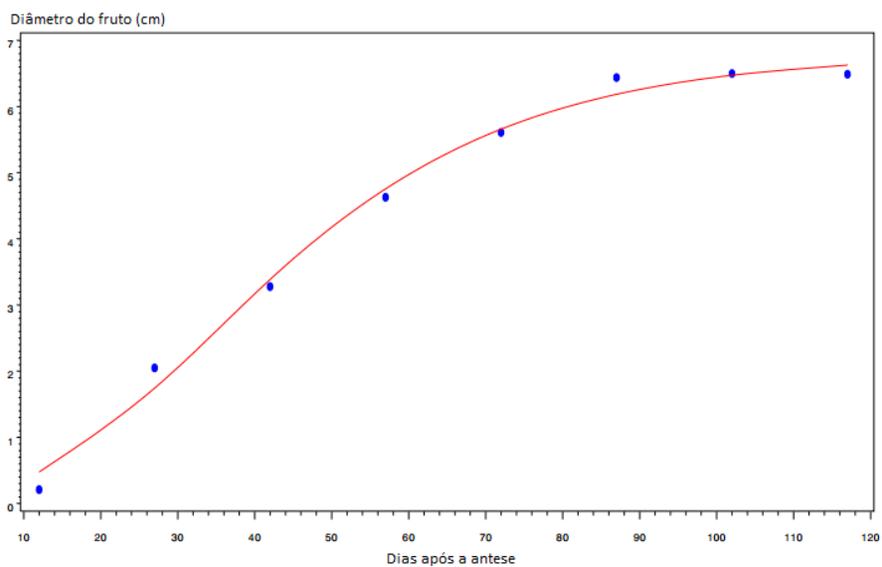


Figura 6 Ajuste do modelo Gompertz aos dados de diâmetro longitudinal (em cm) por fruto de pequi em relação ao tempo (em dias após a antese) considerando estrutura de erros autorregressivos de primeira ordem

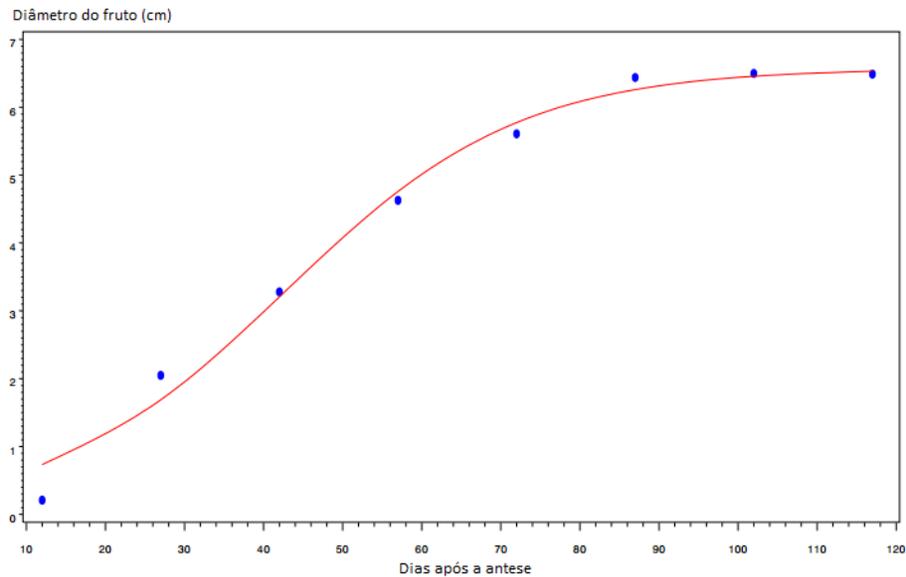


Figura 7 Ajuste do modelo Logístico aos dados de diâmetro longitudinal (em cm) por fruto de pequi em relação ao tempo (em dias após a antese) considerando estrutura de erros independentes

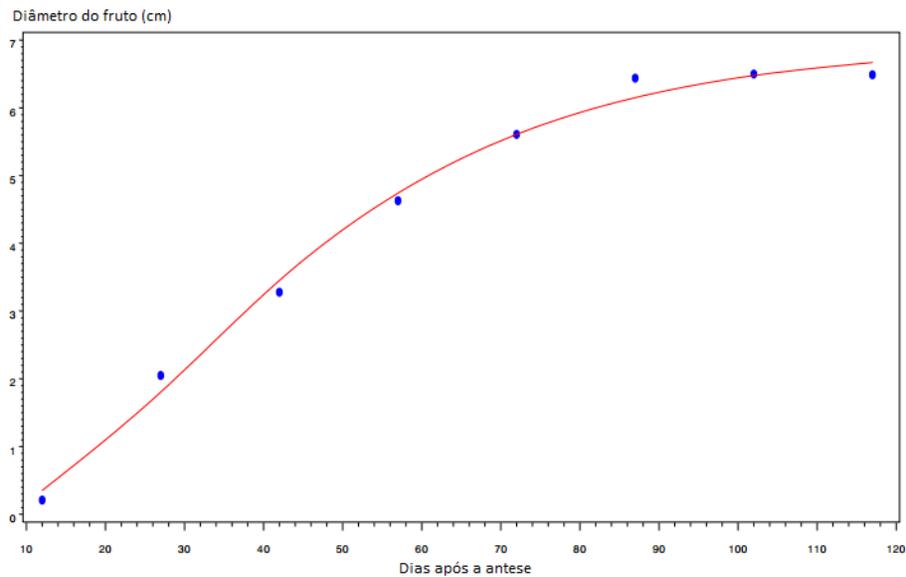


Figura 8 Ajuste do modelo von Bertalanffy aos dados de diâmetro longitudinal (em cm) por fruto de pequi em relação ao tempo (em dias após a antese) considerando estrutura de erros independentes

Visualmente todos os modelos aproximam-se dos valores observados. Pode-se verificar um aumento no diâmetro longitudinal dos frutos mais acentuado até aproximadamente seus 70 dias de idade, quando já próximo de seu tamanho máximo este aumento de diâmetro ocorre em uma menor taxa.

### 4.3 Diâmetro transversal

Como nos tópicos anteriores, a análise do ajuste dos modelos aos dados de aumento de diâmetro transversal também foi realizada através da análise dos resíduos, considerando erros independentes, com distribuição normal, média zero e variância constante. A Tabela 11 representa os valores estimados para os testes de Shapiro-Wilk e Breusch-Pagan, utilizados para verificar respectivamente as pressuposições de normalidade e homogeneidade.

Tabela 11 Estimativas das estatísticas do teste de Shapiro-Wilk e Breusch-Pagan com os respectivos valores-p dos resíduos dos modelos Brody, Gompertz, Logístico e von Bertalanffy para os dados de diâmetro transversal

| Modelos         | Shapiro-Wilk | valor p | Breusch-Pagan | valor p |
|-----------------|--------------|---------|---------------|---------|
| Brody           | 0,95         | 0,7235  | 1,42          | 0,2326  |
| Gompertz        | 0,92         | 0,4363  | 3,02          | 0,0821  |
| Logístico       | 0,96         | 0,7797  | 4,36          | 0,0368  |
| von Bertalanffy | 0,86         | 0,1176  | 0,13          | 0,7165  |

O teste de Shapiro-Wilk mostra que a pressuposição de normalidade residual foi atendida para todos os modelos, uma vez que para todos os modelos o valor p foi superior a 0,05. Em relação à homogeneidade das variâncias residuais, através do teste de Breusch-Pagan podemos verificar, através do valor

p, que para os modelos Brody, Gompertz e von Bertalanffy não rejeitou-se a hipótese de variância constante dos resíduos. No entanto, para o modelo Logístico o valor p foi menor que 0,05, apontando heterogeneidade de variância.

Tabela 12 Valores referentes ao número de parâmetros e ao teste de Durbin-Watson, com seus respectivos valores tabelados para o limite superior (LS) e limite inferior (LI) aplicados aos modelos Brody, Gompertz, Logístico e von Bertalanffy ajustados aos dados de diâmetro transversal dos frutos de pequi

| Modelos         | Nº de parâmetros | Durbin-Watson | LI    | LS    |
|-----------------|------------------|---------------|-------|-------|
| Brody           | 3                | 1,3145        | 0,367 | 2,287 |
| Gompertz        | 3                | 2,4600*       | 0,367 | 2,287 |
| Logístico       | 3                | 2,1156        | 0,367 | 2,287 |
| von Bertalanffy | 3                | 2,3084*       | 0,367 | 2,287 |

\* - há dependência

Os dados da estatística do teste de Durbin-Watson, representados na Tabela 12, demonstram que foi observada a presença de autocorrelação residual ao nível de 5% de significância de acordo com o procedimento PROC MODEL do *software* Statistical Analysis System (SAS, 1999) para os modelos Gompertz e von Bertalanffy referentes aos dados de aumento de diâmetro transversal. Ou seja, para estes modelos os erros se comportam de forma dependente ao longo do tempo e por este motivo será incluído o parâmetro autorregressivo de primeira ordem  $\Phi_1$ . No caso dos modelos Brody e Logístico não foi encontrada autocorrelação residual, ou seja, os erros se comportam de forma independente ao longo do tempo.

Da mesma forma como ocorrido para a análise do ajuste aos dados de ganho de massa e aumento do diâmetro longitudinal, quando adicionado o parâmetro autorregressivo de primeira ordem, o teste de Durbin-Watson torna-se inconclusivo e inconsistente por não conseguirmos estabelecer os valores do

limite inferior e superior do teste. Mas, novamente, os parâmetros serão considerados para o ajuste dos modelos.

As estimativas dos parâmetros dos modelos ajustados aos dados de aumento de diâmetro dos frutos de pequi podem ser encontradas na Tabela 13. Para os modelos Brody e Logístico foram considerados estrutura de erros independentes e para os modelos Gompertz e von Bertalanffy foram consideradas estruturas de erros autorregressivos de primeira ordem.

Tabela 13 Estimativas para os parâmetros dos modelos Brody e Logístico considerando estrutura de erros independentes e modelos Gompertz e von Bertalanffy considerando estrutura de erros autorregressivos de primeira ordem, e seus respectivos intervalos de confiança assintóticos de 95%, no ajuste aos dados de diâmetro transversal de frutos de pequi

| Modelos         | Estimativa | LI      | LS      | Pr >  t  |
|-----------------|------------|---------|---------|----------|
| Brody           |            |         |         |          |
| A               | 7,7909     | 6,7100  | 8,8717  | < 0,0001 |
| B               | 1,2611     | 1,1031  | 1,4191  | < 0,0001 |
| K               | 0,0199     | 0,0133  | 0,264   | 0,0019   |
| Gompertz        |            |         |         |          |
| A               | 6,8495     | 6,4999  | 7,1991  | < 0,0001 |
| B               | 4,6698     | 3,4706  | 5,8690  | 0,0016   |
| K               | 0,0444     | 0,0367  | 0,0521  | 0,0004   |
| $\Phi_1$        | -0,4664    | -1,4068 | 0,4739  | 0,3860   |
| Logístico       |            |         |         |          |
| A               | 6,5896     | 6,1446  | 7,0347  | < 0,0001 |
| B               | 19,1210    | 5,0114  | 33,2308 | 0,0451   |
| K               | 0,0683     | 0,0499  | 0,0866  | 0,0008   |
| von Bertalanffy |            |         |         |          |
| A               | 7,0029     | 6,5707  | 7,4351  | < 0,0001 |
| B               | 1,0034     | 0,7895  | 1,2173  | 0,0008   |
| K               | 0,0367     | 0,0297  | 0,0438  | 0,0005   |
| $\Phi_1$        | -0,3645    | -1,4357 | 0,7068  | 0,5414   |

Conforme representado na Tabela 13 todos os parâmetros de interpretação biológica foram significativos ao nível de 5% de significância para todos os modelos. No caso dos modelos Gompertz e von Bertalanffy, os parâmetros autorregressivos de primeira ordem  $\Phi_1$  foram não significativos. As estimativas do diâmetro transversal assintótico do fruto e da taxa de crescimento podem ser consideradas próximas, acarretando em uma sobreposição das curvas ajustadas.

Para o modelo von Bertalanffy, a estimativa do parâmetro K, correspondente à taxa de crescimento, foi de 0,0367. A mudança de concavidade do crescimento em diâmetro transversal do fruto ocorreu por volta do trigésimo quinto dia, quando o fruto estava com aproximadamente 2,70 cm de diâmetro transversal. Desse ponto em diante a taxa de crescimento foi reduzindo até o momento em que o fruto obteve seu diâmetro transversal máximo, estimado pelo parâmetro A em aproximadamente 7 cm, quando o fruto tinha cerca de 117 dias de idade. O modelo Brody superestimou o diâmetro transversal assintótico do fruto em 7,79 cm. Já os modelos Gompertz e Logístico subestimaram a mesma medida em 6,85 cm e 6,59 cm, respectivamente.

A Tabela 14 representa os valores das estimativas para os avaliadores da qualidade de ajuste.

Tabela 14 Valores referentes ao número de parâmetros, coeficiente de determinação ajustado ( $R^2_{aj}$ ), desvio padrão residual (DPR) e critério de informação Akaike (AIC) para os modelos Brody, Logístico e von Bertalanffy considerando erros independentes e Gompertz considerando erros autorregressivos de primeira ordem, ajustados aos dados de diâmetro longitudinal dos frutos de pequi

| Modelos         | Nº de parâmetros | $R^2_{aj}$ | DPR    | AIC     |
|-----------------|------------------|------------|--------|---------|
| Brody           | 3                | 0,9867     | 0,1230 | -1,5810 |
| Gompertz        | 4                | 0,9903     | 0,1176 | -1,6450 |
| Logístico       | 3                | 0,9826     | 0,1406 | -1,3147 |
| von Bertalanffy | 4                | 0,9909     | 0,1137 | -1,7104 |

Os avaliadores da qualidade de ajuste, representados na Tabela 14, indicam o ajuste dos modelos testados aos dados de aumento de diâmetro transversal dos frutos. Segundo os critérios utilizados para a seleção do modelo mais adequado nota-se uma pequena diferença entre os resultados, favorecendo o modelo von Bertalanffy quanto ao ajuste aos dados de aumento de diâmetro transversal. Este modelo apresentou maior valor para o coeficiente de determinação ajustado, menor desvio padrão residual e também menor valor para o critério de informação Akaike. Todos os modelos podem ser considerados como tendo obtido um bom ajuste dos dados de acordo com o coeficiente de determinação, tendo em vista que todos os modelos obtiveram valores superiores a 98%.

Tabela 15 Estimativas para os critérios de seleção dos modelos, curvatura de Bates e Watts e viés de Box para os modelos Brody, Gompertz, Logístico e von Bertalanffy no ajuste aos dados de diâmetro transversal de frutos de pequi

| Modelos         | $\gamma^N$ | $\gamma^T$ | Parâmetro | Viés de Box |
|-----------------|------------|------------|-----------|-------------|
| Brody           | 0,1087     | 2,1084     | A         | 0,8139      |
|                 |            |            | B         | 0,3390      |
|                 |            |            | K         | 0,1265      |
| Gompertz        | 0,1859     | 1,1104     | A         | 0,1886      |
|                 |            |            | B         | 0,5845      |
|                 |            |            | K         | 0,2084      |
|                 |            |            | $\Phi_1$  | 0,0225      |
| Logístico       | 0,2383     | 2,1817     | A         | 0,2560      |
|                 |            |            | B         | 1,5864      |
|                 |            |            | K         | 0,4353      |
| von Bertalanffy | 0,1953     | 1,0246     | A         | 2,1128      |
|                 |            |            | B         | 1,4076      |
|                 |            |            | K         | 1,1889      |
|                 |            |            | $\Phi_1$  | -3,6241     |

A Tabela 15 representa as estimativas para curvatura de Bates e Watts e viés de Box, o modelo Brody obteve o menor valor para a não linearidade intrínseca, sendo este o mais próximo do linear dentre os demais. Já o modelo von Bertalanffy obteve estimativas menores para a não linearidade devido ao efeito dos parâmetros, sendo considerado o melhor modelo segundo este critério.

Para o viés de Box o modelo Gompertz obteve menores valores no geral para o viés de Box, principalmente para os parâmetros com interpretação biológica A e K, sendo as estimativas do critério para todos os parâmetros do modelo superiores ao valor de 0,01, desta forma todos os parâmetros são responsáveis pela não linearidade do modelo. Em relação aos demais modelos, todos os valores para o viés de Box também foram superiores ao valor de 0,01.

As figuras seguintes demonstram o ajuste dos modelos aos dados de diâmetro transversal dos frutos de pequi.

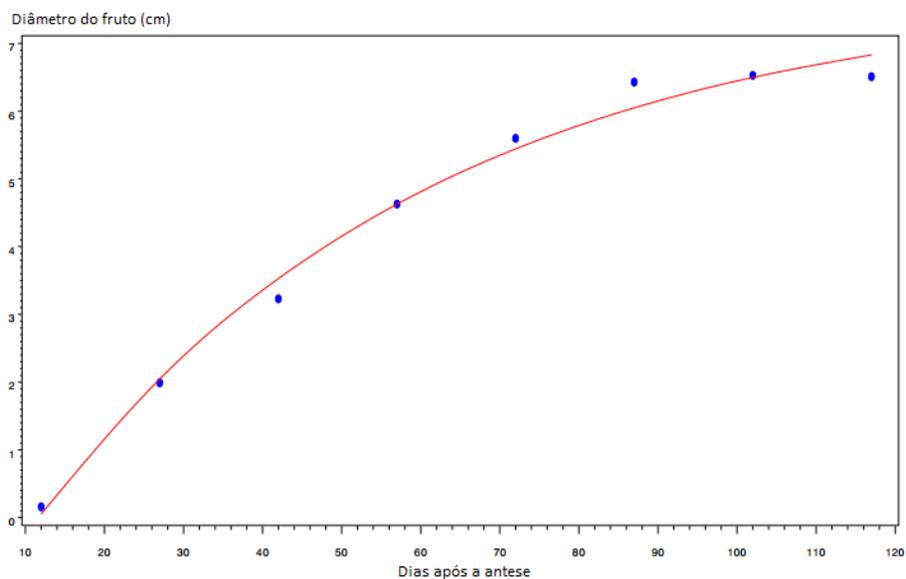


Figura 9 Ajuste do modelo Brody aos dados de diâmetro longitudinal (em cm) por fruto de pequi em relação ao tempo (em dias após a antese) considerando estrutura de erros independentes

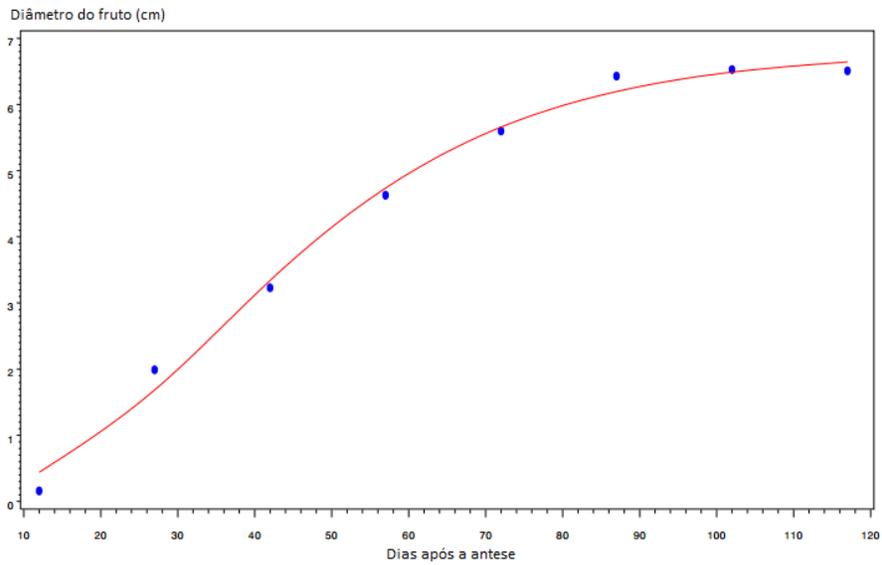


Figura 10 Ajuste do modelo Gompertz aos dados de diâmetro longitudinal (em cm) por fruto de pequi em relação ao tempo (em dias após a antese) considerando estrutura de erros autorregressivos de primeira ordem

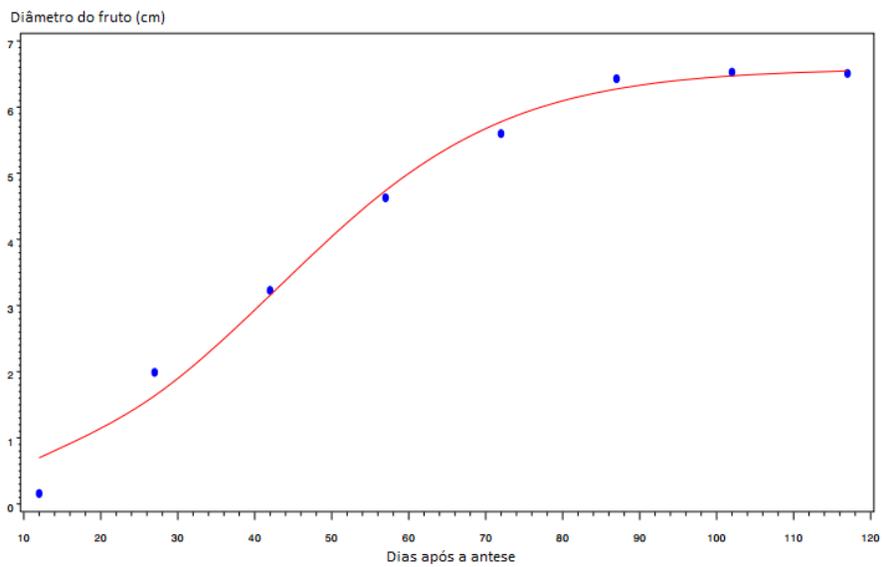


Figura 11 Ajuste do modelo Logístico aos dados de diâmetro longitudinal (em cm) por fruto de pequi em relação ao tempo (em dias após a antese) considerando estrutura de erros independentes

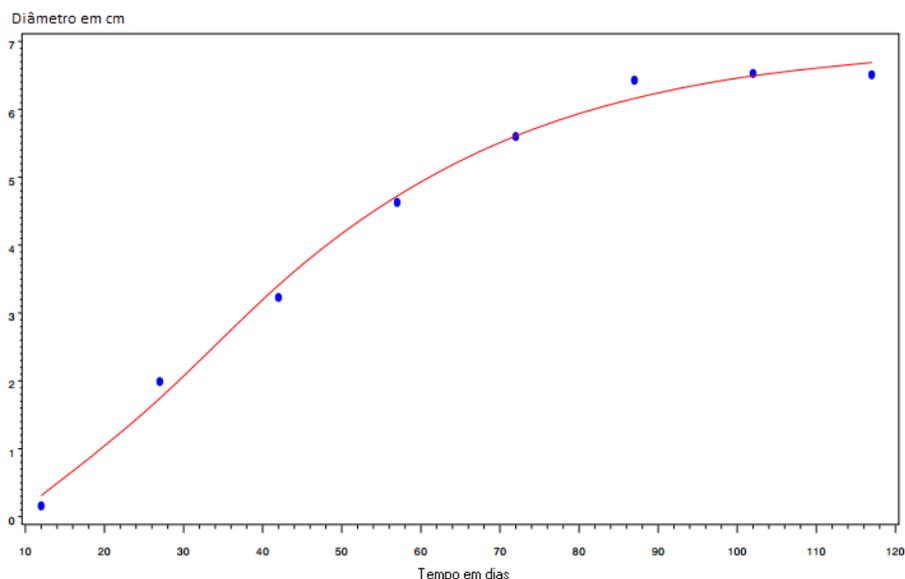


Figura 12 Ajuste do modelo von Bertalanffy aos dados de diâmetro longitudinal (em cm) por fruto de pequi em relação ao tempo (em dias após a antese) considerando estrutura de erros autorregressivos de primeira ordem

Por uma análise visual, podemos verificar que todos os modelos aproximam-se aos dados observados. Pode-se verificar um crescimento inicialmente mais acentuado, até aproximadamente os 70 dias de idade do fruto, quando então este crescimento é reduzido.

#### 4.4 Considerações Finais

Em alguns casos houve dependência residual com autocorrelação negativa de primeira ordem ( $\Phi_1$ ) entre os resíduos. No entanto, em nenhum dos modelos o valor estimado foi significativo.

As taxas de crescimento dos frutos para os modelos melhor ajustados foram de 0,0694 para o modelo Gompertz em relação ao ganho de massa, 0,0370 para o modelo von Bertalanffy em relação ao aumento do diâmetro longitudinal

e 0,0367 para o modelo von Bertalanffy em relação ao aumento de diâmetro transversal dos frutos de pequi.

O peso e tamanho assintótico dos frutos para os modelos melhor ajustados foram de 112,32 gramas para o modelo Gompertz em relação ao ganho de massa, 6,67 cm para o modelo von Bertalanffy em relação ao aumento do diâmetro longitudinal e 7,00 cm para o modelo von Bertalanffy em relação ao aumento de diâmetro transversal dos frutos de pequi.

## 5 CONCLUSÃO

O modelo Brody não convergiu para os dados de ganho de massa dos frutos de pequi. Os modelos Gompertz, Logístico e von Bertalanffy obtiveram bons ajustes, sendo o modelo Gompertz o que obteve um melhor ajuste aos dados de ganho de massa segundo os avaliadores da qualidade do ajuste.

Em relação ao aumento do diâmetro longitudinal e diâmetro transversal, todos os modelos convergiram e obtiveram bons ajustes. O modelo von Bertalanffy foi considerado o mais indicado em ambos casos segundo os avaliadores da qualidade de ajuste.

A utilização de modelos não lineares, com interpretação biológica teve sua importância justificada, pois os parâmetros estimados podem auxiliar na tomada de decisão do produtor quanto à época mais adequada para a colheita.

## REFERÊNCIAS

- AKAIKE, H. A new look at the statistical model identification. **IEEE Transaction on Automatic Control**, Notre Dame, v.19, p. 716-723, 1974.
- ALVAREZ, I. A.; CASTRO, P. R. C. Crescimento da parte aérea de cana crua e queimada. **Scientia Agrícola**, Piracicaba, v. 56, n. 4, p. 1069-1079, 1999.
- ALVES, R. G. O. **Estudo genético de características reprodutivas em suínos e avaliação de curvas de crescimento em cruzamentos dialélicos**. 1986. 129 p. Tese (Doutorado em Genética e Melhoramento) – Universidade Federal de Viçosa, Viçosa, MG, 1986.
- BERGAMASCO, A. F. et al. Ajuste de modelos não-lineares a dados de crescimento de fêmeas da raça holandesa. **Ciência e Agrotecnologia**, Lavras, v. 25, n. 2, p. 235-241, abr./jun. 2001.
- BERG, R. T.; BUTTERFIELD, R. M. **New concepts of cattle growth**. Sydney: Sydney University, 1976. 240 p.
- BLACKMAN, V. H. The compound interest law and plant growth. **Annals of Botany**, London, v. 33, p. 353-60, 1919.
- BOX, M. J. Bias in nonlinear estimation. **Journal of the Royal Statistical Society, Serie B**, London, v. 33, p. 171-201, 1971.
- BRIGGS, G. E.; KIDD, F. A.; WEST, C. **A quantitative analysis of plant growth**. **Annals of Applied Biology**, Warwick, v. 7, p. 202-223, 1920.
- BRODY, S. **Bioenergetics and growth**. New York: Reinhold Publishing Corp, 1945. 645 p.
- CARDOSO, G. D. et al. Uso da análise de crescimento não destrutiva como ferramenta para avaliação de cultivares. **Revista de Biologia e Ciências da Terra**, São Cristóvão, v. 6, n. 2, p. 79-84, 2006.
- CARLESSO, V. O. et al. Avaliação de modelos de secagem em camada fina de sementes de maracujá amarelo. **Revista Brasileira de Sementes**, Brasília, v. 29, n. 2, p. 28-37, 2007.

CARRAZA, L. R.; ÁVILA, J. C. C. **Manual tecnológico de aproveitamento integral do fruto do pequi (Caryocar brasiliense)**. 2. ed. Brasília: Instituto Sociedade, População e Natureza, 2010.

CAVALINI, F. C. et al. Maturity indexes for 'Kumagai' and 'Paluma' guavas. **Revista Brasileira de Fruticultura**, Cruz das Almas, v. 28, p. 176-179, 2006.

CORDEIRO, M. W. S. **Caracterização física e química de frutos de pequi (Caryocar brasiliense Camb.) de diferentes regiões do estado de Mato Grosso**. 2012. 51 p. Dissertação (Mestrado em Ciência e Tecnologia de Alimentos) – Universidade Federal de Goiás, Goiânia, 2012.

CORRÊA, P. C.; ARAÚJO, E. F.; AFONSO JÚNIOR, P. C. Determinação dos parâmetros de secagem em camada delgada de sementes de milho doce (*Zea mays* L.). **Revista Brasileira de Milho e Sorgo**, Sete Lagoas, v. 2, n. 2, p. 110-119, 2003.

CORSATO, C. E. **Fenologia e carboidratos de reserva do caqui (Diospyros kaki L.) 'Rama Forte' em clima tropical no Brasil**. 2004. 54 p. Tese (Doutorado em Horticultura) – Escola Superior de Agricultura 'Luiz de Queiroz', Universidade de São Paulo, Piracicaba, 2004.

CROCCI, A. J. **Modelo autorregressivo para análise de experimentos com vacas em lactação**. 1984. 86 p. Tese (Doutorado em Agronomia) – Escola Superior de Agricultura Luiz de Queiroz, Universidade de São Paulo, 1984.

CUNHA JUNIOR, L. C. et al. Caracterização da curva de maturação de pêssegos 'Aurora-1' na Região de Jaboticabal-SP. **Revista Brasileira de Fruticultura**, Cruz das Almas, v. 29, n. 3, p. 661-665, 2007.

DENISE, R. S. K.; BRINKS, J. S. Genetic and Environmental Aspects of the Growth Curve parameters in beef cows. **Journal of Animal Science**, Champaign, v. 61, n. 6, p. 1431-1440, July 1985.

DRAPER, N. R.; SMITH, H. **Applied regression analysis**. 3th ed. New York: J. Wiley, 1998. 706 p.

FERNANDES, T. J. et al. Seleção de modelos não lineares para a descrição das curvas de crescimento do fruto do cafeeiro. **Coffee Science**, Lavras, v. 9, n. 2, p. 207-215, abr./jun. 2014.

FIDELES FILHO, J. et al. Monitoramento de área foliar e biomassa do feijoeiro usando índice de vegetação por diferença normalizada. **Revista Brasileira de Agrometeorologia**, Sete Lagoas, v. 13, n. 2, p. 212-218, 2005.

FREITAS, A. R. Curvas de crescimento na produção animal. **Revista Brasileira de Zootecnia**, Viçosa, MG, v. 34, n. 3, p. 786-795, 2005

GALLANT, A. R. **Nonlinear statistical models**. New York: J. Wiley, 1987. 610 p.

GAZOLA, S. et al. Proposta de modelagem não-linear do desempenho germinativo de sementes de milho híbrido. **Ciência Rural**, Santa Maria, v. 41, n. 4, p. 551-556, abr. 2011.

GLUTADELA sabor caqui. Disponível em: <<http://www.guiavegano.com.br/vegan/glutadela/alimentos/glutadela/glutadela-sabor-pequi>>. Acesso em: 21 jun. 2015.

GOMES, C. J. Extrativismo e biodiversidade: o caso da fava d'anta. **Ciência Hoje**, Rio de Janeiro, v. 27, p. 66-69, 2000.

HOFFMANN, R.; VIEIRA, S. **Análise de regressão**: uma introdução à econometria. 3. ed. São Paulo: HUCITEC, 1998. 379 p.

HUNT, R. **Basic growth analysis**. London: U. Hyman, 1990. 112 p.

KVET, J. et al. Methods of growth analysis. In: SESTÁK, Z.; CATSKÝ, J.; JARVIS, P. G. (Ed.). **Plant photosynthetic production**: manual of methods. The Hague : W. Junk, 1971. p. 343-391.

LIMA, A. et al. Composição química e compostos bioativos presentes na polpa e na amêndoa do pequi (*Caryocar brasiliense* Camb.). **Revista Brasileira de Fruticultura**, Cruz das Almas, v. 29, n. 3, p. 695-698, 2007.

MACHADO, E. J. **Uso do 'Bootstrap' na estimação de parâmetros em modelos não-lineares**: uma aplicação em mecanismos cinéticos de Michaelis-Menten. 2006. 131 p. Dissertação (Mestrado em Estatística e Experimentação Agropecuária) – Universidade Federal de Lavras, Lavras, 2006.

MAGALHÃES, A. C. N. Análise quantitativa do crescimento. In: FERRI, M. G. **Fisiologia vegetal**. São Paulo: EPU, 1985. v. 1, p. 363.

MARTINS FILHO, S. et al. Abordagem bayesiana das curvas de crescimento de duas cultivares de feijoeiro. **Ciência Rural**, Santa Maria, v.38, n. 6, p. 1516-1521, 2008.

MAZUCHELI, J.; ACHCAR, J. A. Algumas considerações em regressão não-linear. **Acta Scientiarum**, Maringá, v. 24, n. 6, p. 1761-1770, 2002.

MAZZINI, A. R. A. **Análise da curva de crescimento de machos Hereford considerando heterogeneidade de variâncias e autocorrelação dos erros**. 2001. 94 p Dissertação (Mestrado em Estatística e Experimentação Agropecuária) – Universidade Federal de Lavras, Lavras, 2001.

MAZZINI, A. R. A. et al. Curva de crescimento de novilhos Hereford: heterocedasticidade e resíduos autoregressivos. **Ciência Rural**, Santa Maria, v. 35, p. 422-427, 2005.

MEDEIROS, C. A. B.; RASEIRA, M. C. B. **A cultura do pessegueiro**. Brasília: Embrapa, 1998. 350 p.

MEDEIROS, S. R. et al. The effect of long term supplementation of conjugated linoleic acid (CLA) to dairy cows grazing tropical pasture. **Journal of Dairy Science**, Champaign, v. 83, n. 1, p. 169, 2000.

MENDES, P. N. et al. Modelo logístico difásico no estudo de crescimento de fêmeas da raça Hereford. **Ciência Rural**, Santa Maria, v. 38, p. 1984-1990, 2008.

MORETTIN, P. A.; TOLOI, C. M. C. **Previsão de séries temporais**. 3. ed. São Paulo: Atual, 2004. 436 p.

MUIANGA, C. A. **Ajuste de modelos não lineares na descrição do crescimento do fruto do cajueiro do tipo anão precoce**. 2014. 51p. Dissertação (Mestrado Acadêmico) – Universidade Federal de Lavras, Lavras, 2014.

NELDER, J. A. The fitting of a generalization of the logistic curve. **Biometrics**, Washington, v. 17, p. 89-110, 1961.

NETER, J. et al. **Applied linear statistical models: regression, analysis of variance, and experimental design**. 2<sup>nd</sup> ed. Illinois: R. D. Irwin, 1985, 1.125 p.

OLIVEIRA, E. **Exploração de espécies nativas como uma estratégia de sustentabilidade socioambiental: o caso do pequi (*Caryocar brasiliense* Camb.) em Goiás.** 2006. 294 p. Tese (Doutorado em Desenvolvimento sustentável) - Universidade de Brasília, Brasília, 2006.

OLIVEIRA, M. E. B. et al. Características químicas e físico-químicas de pequis da chapada do Araripe, Ceará. *Revista Brasileira de Fruticultura*, Cruz das Almas, v. 32, n. 1, p. 114-125, 2010.

OLIVEIRA, P. **Ajustamento de alguns modelos exponenciais a dados de crescimento de cana-de-açúcar.** 1992. 72 p. Dissertação (Mestrado em Agronomia) – Escola Superior de Agricultura ‘Luiz de Queiroz’, Universidade de São Paulo, Piracicaba, 1992.

PAIXÃO, F. J. R. et al. Estimativa da infiltração da água no solo através de modelos empíricos e funções não-lineares. **Revista de Biologia e Ciências da Terra**, São Cristóvão, v. 5, n. 1, p. 1-12, 2004.

PEREIRA, A. R.; MACHADO, E. C. **Análise quantitativa do crescimento de comunidades vegetais.** Campinas: IAC, 1987. 33 p. (Boletim Técnico, 114).

PEREIRA, J. M.; MUNIZ, J. A.; SILVA, C. A.; Nonlinear models to predict nitrogen mineralization in an Oxisol. **Scientia Agricola**, Piracicaba, v. 62, n. 4, p. 548-554, 2005.

PEREIRA, M. C. T. et al. Crescimento e produção de primeiro ciclo da bananeira ‘Prata Anã’(AAB) em sete espaçamentos. **Pesquisa Agropecuária Brasileira**, Brasília, v. 35, n. 7, p. 1377-1387, 2000.

PRADO, T. K. L. **Modelos não-lineares no crescimento de frutos de coqueiro.** 2011. 91 p. Dissertação (Mestrado em Estatística e Experimentação Agropecuária) – Universidade Federal de Lavras, Lavras, 2011.

RIBEIRO, T. D. **Modelos de regressão não linear na descrição da cinética de secagem de polpa de jaboticaba.** 2015. 95 p. Dissertação (Mestrado Acadêmico) – Universidade Federal de Lavras, Lavras, 2015.

RODRIGUES, L. J. Caracterização do desenvolvimento de pequi (*Caryocar brasiliense*) temporão do sul de Minas Gerais. **Pesquisa Agropecuária Tropical**, Goiânia, v. 39, n. 3, p. 260-265, jul./set. 2009.

RODRIGUES, L. J. **O pequi (Cariocar brasiliense Camb.)**: ciclo vital e agregação de valor pelo processamento mínimo. 2005. 152 p. Dissertação (Mestrado em Ciências de Alimentos) - Universidade Federal de Lavras. Lavras, 2005.

SAS INSTITUTE. **SAS Procedures guide for computers**. 6th ed. Cary, 1999. v. 3, 373 p.

SCHWARZ, G. Estimating the dimension of a model. **Annals of Statistics**, Hayward, v. 6, p. 461-464, 1978.

SEARLE, S. R. **Linear models**. New York: J. Wiley, 1971. 532 p.

SILVA, F. F.; AQUINO, L. H.; OLIVEIRA, A. I. G. Influência de fatores genéticos e ambientais sobre as estimativas dos parâmetros das funções de crescimento em gado nelore. **Ciência e Agrotecnologia**, Lavras, v. 25, n. 5, p.1195-1205, set./out. 2001.

SILVA, J. A. **Frutas nativas do cerrado**. Brasília: Embrapa, 1994. 166 p.

SILVA NETO, S. P.; COSTA, C. J. **Importância econômica, social e ambiental do pequi**. Planaltina: Embrapa Cerrados, 2010. Disponível em: <<http://www.cpac.embrapa.br/noticias/artigosmidia/publicados/279/>>. Acesso em: 27 maio 2014.

SILVEIRA, F. G. et al. Classificação multivariada de modelos de crescimento para grupos genéticos de ovinos de corte. In: REUNIÃO ANUAL DA REGIÃO BRASILEIRA DA SOCIEDADE INTERNACIONAL DE BIOMETRIA, 54; e SIMPÓSIO DE ESTATÍSTICA APLICADA À EXPERIMENTAÇÃO AGRONÔMICA, 13., 2009, São Carlos. **Anais...** São Carlos: UFScar, 2009. 1 CD ROM.

SOUSA, I. F. et al. Fitting nonlinear autoregressive models to describe coffee seed germination. **Ciência Rural**, Santa Maria, v. 44, n. 11, p. 2016-2021, nov. 2014.

SOUZA, G. S. **Introdução aos modelos de regressão linear e não linear**. Brasília: EMBRAPA-SPI; EMBRAPA-SEA, 1998. 489 p.

TERRA, M. F.; MUNIZ, J. A.; SAVIAN, T. V. Ajuste dos modelos Logístico e Gompertz aos dados de crescimento de frutos da tamareira-anã (*Phoenix roebelenii* O'BRIEN). **Magistra**, Cruz das Almas, v. 22, n.1, p. 1-7, 2010.

TORALLES, R. P. et al. Caracterização parcial do escurecimento enzimático pela polifenoloxidase em pêssegos das cv. Granada, Jade, Esmeralda e Maciel. **Revista Brasileira de Agrociência**, Pelotas, v. 10, n. 1, p. 241-244, 2004.

URCHEI, M. A.; RODRIGUES, J. D.; STONE, L. F. Análise de crescimento de duas cultivares de feijoeiro sob irrigação, em plantio direto e preparo convencional. **Pesquisa Agropecuária Brasileira**, Brasília, v. 35, n. 3, p. 497-506, 2000.

VERA, R. et al. Caracterização física e química de frutos do pequi (Caryocar brasiliense Camb.) oriundos de duas regiões no estado de Goiás, Brasil. **Pesquisa Agropecuária Tropical**, Goiânia, v. 37, n. 2, p. 93-99, 2007.

VIEIRA JUNIOR, P. A. et al. Estimativas do potencial total de água em sementes, usando modelos não-lineares. **Revista Brasileira de Sementes**, Brasília, v. 21, n. 1, p. 87-92, 1999.

VIEIRA, S.; MISCHAN, M. M. A Logística e a Gompertz: duas funções alternativas no estudo de dados de crescimento. **Ciência e Cultura**, São Paulo, v. 28, n. 8, p. 950-952, ago. 1976.

VON BERTALANFFY, L. Quantitative laws in metabolism and growth. **Quarterly Review Biology**, Chicago, v. 32, p. 217, 1957.

WEST, C.; BRIGGS, G. E.; KIDD, F. Methods and significant relations in the quantitative analysis of planta growth. **New Physiologist**, Oxford, v. 19, p. 200-207, 1920.

WINSOR, C. P. The Gompertz curve as a growth curve. **Proceedings of the National Academy of Science**, Washington, v. 18, p. 1-17, 1932.

ZEVIANI, W. M. et al. Modelos não lineares para a liberação de potássio de esterco animal em latossolos. **Ciência Rural**, Santa Maria, v. 42, n. 10, p. 1789-1796, out. 2012.