

**ANÁLISE DA CURVA DE CRESCIMENTO DE  
MACHOS HEREFORD CONSIDERANDO  
HETEROGENEIDADE DE VARIÂNCIAS E  
AUTOCORRELAÇÃO DOS ERROS**

**ANA RITA DE ASSUMPÇÃO MAZZINI**

2001

**ANA RITA DE ASSUMÇÃO MAZZINI**

**ANÁLISE DA CURVA DE CRESCIMENTO DE  
MACHOS HEREFORD CONSIDERANDO  
HETEROGENEIDADE DE VARIÂNCIAS E  
AUTOCORRELAÇÃO DOS ERROS**

Dissertação apresentada à Universidade Federal de Lavras, como parte das exigências do Curso de Mestrado em Agronomia, área de concentração em Estatística e Experimentação Agropecuária, para obtenção do título de "Mestre".

**Orientador**

**Prof. Joel Augusto Muniz**

**LAVRAS  
MINAS GERAIS - BRASIL  
2001**

**Ficha Catalográfica Preparada pela Divisão de Processos Técnicos da  
Biblioteca Central da UFLA**

**Mazzini, Ana Rita de Assumpção**

**Análise da curva de crescimento de machos hereford considerando  
heterogeneidade de variâncias e autocorrelação dos erros / Ana Rita de Assumpção  
Mazzini. -- Lavras : UFLA, 2001.**

94 p. : il.

**Orientador: Joel Augusto Muniz.**

**Dissertação (Mestrado) – UFLA.**

**Bibliografia.**

**1. Curva de crescimento. 2. Heterogeneidade de variância. 3. Autocorrelação de  
erros. 4. Regressão não-linear. 5. Bovinos de corte. 6. Raça Hereford.  
I. Universidade Federal de Lavras. II. Título.**

**CDD-630.2195**

**ANA RITA DE ASSUMPCÃO MAZZINI**

**ANÁLISE DA CURVA DE CRESCIMENTO DE MACHOS HEREFORD  
CONSIDERANDO HETEROGENEIDADE DE VARIÂNCIAS E  
AUTOCORRELAÇÃO DOS ERROS**

Dissertação apresentada à Universidade Federal de Lavras, como parte das exigências do Curso de Mestrado em Agronomia, área de concentração em Estatística e Experimentação Agropecuária, para obtenção do título de “Mestre”.

**APROVADA em 1º de fevereiro de 2001**

**Prof. Amauri Almeida Machado**

**UFPEL**

**Prof. Antonio Ilson Gomes de Oliveira**

**UFLA**

**Prof. Luiz Henrique de Aquino**

**UFLA**



**Prof. Joel Augusto Muniz**

**UFLA**

**(Orientador)**

**LAVRAS  
MINAS GERAIS - BRASIL**

**A minha mãe, Ivone, pelo seu amor, equilíbrio e força em todos os momentos;**

**A minha avó, Zilda (*in memorian*), pelo exemplo de vida e fé;**

## **OFEREÇO**

**Aos meus irmãos, Antônio Augusto e Ana Carolina, pelo apoio e amizade;**

**Ao grande amigo e padrasto, Gilberto, pelo seu desprendimento e dedicação;**

**A minha querida Lôlo, pelo carinho e amizade;**

**A minha “avó”, Inês (*in memorian*), pelo amor e dedicação;**

## **DEDICO**

## **AGRADECIMENTOS**

À Universidade Federal de Lavras pela oportunidade de realização do curso.

À CAPES e CNPq pelas bolsas de estudos concedidas, em períodos distintos.

Aos meus orientadores, professores Joel Augusto Muniz e Luiz Henrique de Aquino, pela orientação, ensinamentos e amizade durante todo o curso.

A todos os funcionários do DEX, em especial a Maria e Maristela, pela boa vontade.

Ao bolsista de iniciação científica, Fabyano, pelo grande auxílio na organização do trabalho.

Aos professores do curso de Pós graduação do DEX, Thelma, Daniel , Eduardo, Júlio, Augusto e Lucas, pela amizade e ensinamentos transmitidos durante o curso.

Aos meus professores da UFPEL, Paulo Silveira Jr., Amauri Almeida Machado, Fernando Diaz e João Gilberto Corrêa, sem o incentivo e apoio dos quais jamais teria realizado o curso.

Aos Pesquisadores Eduardo Salomoni e Roberto Collares, da Embrapa Pecuária Sul (Bagé, RS), pelo fornecimento dos dados.

Aos grandes amigos, Miguel, Cláudio e Rangel, pelo apoio e incentivo durante toda minha vida profissional.

Às minhas queridas amigas, Anna Joaquina, Déborah, Luludi, Márcia, Marisa, Maria Lúcia, Ritinha e Silvia, pelo carinho, apoio e amizade.

Aos colegas de curso, Aladir, Alex, Adriano, Cristiane, Everton, Francisco, Iara, Moisés e Nagib, pelo agradável convívio e espírito de companheirismo durante todo curso.

**À colega Andréa (Déinha), amiga de todas as horas e grande companheira de estudos.**

**Ao amigo e colega de graduação, Leonardo, pelo companheirismo e grande auxílio em momentos decisivos do trabalho.**

**As amigas Rúbia e Cíntia pela alegria, carinho e companheirismo.**

**Aos amigos que aqui encontrei: Renata, Cilinha, Andréa, Monica, Paulo, Ivani, Marcelo, Carlos, Letícia, Janáina, João Luis, Jorge e Breno.**

# SUMÁRIO

RESUMO .....	i
ABSTRACT .....	ii
1 - INTRODUÇÃO .....	1
2 - REFERENCIAL TEÓRICO .....	3
2.1 - Curva de Crescimento .....	3
2.2 - Estatísticas usadas na comparação entre as curvas de crescimento .....	11
2.3 - Modelos não-lineares .....	14
2.4 - Autocorrelação .....	19
3 - MATERIAL E MÉTODOS .....	22
3.1 - Material .....	22
3.2 - Métodos .....	22
3.2.1 - Estimação dos parâmetros de modelos não-lineares .....	22
3.2.1.1 - Método dos Quadrados Mínimos Ordinários .....	22
3.2.1.2 - Método dos Quadrados Mínimos Ponderados .....	24
3.2.1.3 - Método dos Quadrados Mínimos Generalizados .....	26
3.2.2 - Processo Iterativo .....	28
3.2.2.1 - Método de Gauss-Newton .....	28
3.2.2.2 - Método de Marquardt .....	29
3.2.3 - Funções não-lineares de crescimento, derivadas parciais e elementos da matriz $X'X$ para as funções em estudo .....	30
3.2.3.1 - Função de Brody .....	30
3.2.3.2 - Função de Gompertz .....	32
3.2.3.3 - Função Logística .....	33
3.2.3.4 - Função de Richards .....	35

3.2.3.5 - Função de von Bertalanffy .....	37
3.2.4 - Ajuste dos modelos não-lineares .....	39
3.2.5 - Comparação entre os modelos .....	40
<b>4 - RESULTADOS E DISCUSSÃO .....</b>	<b>42</b>
4.1 - Considerações iniciais .....	42
4.2 - Avaliadores .....	44
4.2.1 - Percentual de Convergência .....	44
4.2.2 - Quadrado Médio do Resíduo (QMR) .....	46
4.2.3 - Coeficiente de Determinação Ajustado ( $R^2_{Aj}$ ) .....	48
4.2.4 - Teste t de Student .....	50
4.2.5 - Erro de Predição Médio (EPM) .....	52
4.3 - Ajuste das curvas médias e individuais .....	55
4.3.1 - Ajuste das curvas médias e individuais para o modelo não ponderado sem estrutura de erros autorregressivos .....	55
4.3.2 - Ajuste das curvas médias e individuais para o modelo não ponderado com estrutura de erros autorregressivos .....	56
4.3.3 - Ajuste das curvas médias e individuais para o modelo ponderado sem estrutura de erros autorregressivos .....	58
4.3.4 - Ajuste das curvas médias e individuais para o modelo ponderado com estrutura de erros autorregressivos .....	59
4.3.5 - Considerações gerais sobre as estimativas dos parâmetros .....	61
<b>5 - CONCLUSÕES .....</b>	<b>76</b>
<b>REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS .....</b>	<b>77</b>
<b>ANEXOS A .....</b>	<b>82</b>

## LISTA DE TABELAS

TABELA 1 - Equações e propriedades para os casos especiais da função de Richards .....	5
TABELA 2 - Valores médios dos pesos observados respectivas variâncias no decorrer do tempo e ponderação .....	43
TABELA 3 - Percentual de convergência para as cinco funções, nos diferentes modelos ajustados .....	45
TABELA 4 - Percentuais de animais que apresentaram ajuste com estrutura de erros autorregressivos, para os diferentes modelos em todas as funções estudadas .....	46
TABELA 5 - Quadrado Médio do Resíduo (QMR) para os diferentes modelos, no ajuste das curvas médias .....	47
TABELA 6 - Médias do Quadrado Médio do Resíduo (QMR), para os diferentes modelos, no ajuste das curvas individuais .....	48
TABELA 7 - Coeficiente de Determinação Ajustado ( $R^2_{Aj.}$ ), para os diferentes modelos, no ajuste das curvas médias .....	48
TABELA 8 - Médias dos Coeficientes de Determinação Ajustadas ( $R^2_{Aj.}$ ), para os diferentes modelos, no ajuste das curvas individuais .....	49
TABELA 9 - Teste t de Student, para os valores paramétricos de "A" e "K" das funções estudadas, para os modelos não ponderados e ponderados, no ajuste das curvas médias .....	50
TABELA 10 - Teste t de Student, para os valores paramétricos de "A" e "K" das funções estudadas, para os modelos não ponderados e ponderados, no ajuste das curvas individuais .....	51
TABELA 11 - Erro de Predição Médio (EPM), para os diferentes modelos, no ajuste das curvas médias .....	53

<b>TABELA 12 - Médias dos Erros de Predição Médios (EPM), para os diferentes modelos, no ajuste das curvas individuais .....</b>	<b>54</b>
<b>TABELA 13 - Estimativas dos parâmetros A, B, K e M, para as cinco funções estudadas, considerando o ajuste das curvas médias .....</b>	<b>55</b>
<b>Tabela 14 - Estimativas médias dos parâmetros A, B, K e M, para as cinco funções estudadas, considerando o ajuste das curvas individuais .....</b>	<b>56</b>
<b>TABELA 15 - Estimativas dos parâmetros A, B, K e M, para as cinco funções estudadas, considerando o ajuste das curvas médias .....</b>	<b>57</b>
<b>TABELA 16 - Médias das estimativas dos parâmetros A, B, K e M, para as cinco funções, considerando o ajuste das curvas individuais com AR(1) .....</b>	<b>58</b>
<b>TABELA 17 - Médias das estimativas dos parâmetros A, B, K e M para as cinco funções, considerando o ajuste das curvas individuais com AR(2) .....</b>	<b>58</b>
<b>TABELA 18 - Estimativas dos parâmetros A, B, K e M para as cinco funções, considerando o ajuste das curvas médias .....</b>	<b>59</b>
<b>TABELA 19 - Médias das estimativas dos parâmetros A, B, K e M para as cinco funções, considerando o ajuste das curvas individuais .....</b>	<b>59</b>
<b>TABELA 20 - Estimativas dos parâmetros A, B, K e M para as cinco funções, considerando o ajuste das curvas médias .....</b>	<b>60</b>
<b>TABELA 21 - Médias das estimativas dos parâmetros A, B, K e M para as cinco funções, considerando o ajuste das curvas individuais com AR(1) .....</b>	<b>60</b>
<b>TABELA 22 - Médias das estimativas dos parâmetros A, B, K e M para as cinco funções, considerando o ajuste das curvas individuais com AR(2) .....</b>	<b>61</b>

## LISTA DE FIGURAS

FIGURA 1 - Média e variância dos pesos observados, dentro de cada período, dos machos Hereford .....	42
FIGURA 2 - Função de Brody: comparação entre os modelos ponderado com AR(1) e não ponderado sem AR .....	63
FIGURA 3 - Função de Gompertz: comparação entre os modelos ponderado com AR(1) e não ponderado sem AR .....	64
FIGURA 4 - Função Logística: comparação entre os modelos ponderado com AR(1) e não ponderado sem AR .....	65
FIGURA 5 - Função de Richards: comparação entre os modelos ponderado com AR(1) e não ponderado sem AR .....	66
FIGURA 6 - Função de von Bertalanffy: comparação entre os modelos ponderados com AR(1) e não ponderado sem AR .....	67
FIGURA 7 - Box Plot para o modelo não ponderado sem AR, parâmetro A .....	68
FIGURA 8- Box Plot para o modelo não ponderado sem AR, parâmetro K .....	68
FIGURA 9- Box Plot para o modelo ponderado com AR(1) parâmetro A .....	69
FIGURA 10 - Box Plot para o modelo ponderado com AR(1), parâmetro K .....	70
FIGURA 11 - Função de autocorrelação parcial ajustada para função de von Bertalanffy no modelo não ponderado sem AR .....	71
FIGURA 12 - Função de autocorrelação ajustada para função de von Bertalanffy no modelo não ponderado com AR(1) .....	71
FIGURA 13 - Função de autocorrelação parcial ajustada para função de von Bertalanffy no modelo ponderado sem AR. ....	72
FIGURA 14 - Função de autocorrelação ajustada para função de von Bertalanffy no modelo ponderado com AR(1) .....	72
FIGURA 15 - Função de autocorrelação parcial ajustada para função de Gompertz no modelo não ponderado sem AR .....	73

<b>FIGURA 16 - Função de autocorrelação ajustada para função de Gompertz no modelo não ponderado com AR(1) .....</b>	<b>73</b>
<b>FIGURA 17 - Função de autocorrelação parcial ajustada para função de Gompertz no modelo ponderado sem AR .....</b>	<b>74</b>
<b>FIGURA 18 - Função de autocorrelação ajustada para função de Gompertz no modelo ponderado sem AR .....</b>	<b>75</b>
<b>FIGURA 19 - Função de autocorrelação ajustada para função de Gompertz no modelo ponderado com AR(2) .....</b>	<b>75</b>

## RESUMO

**MAZZINI, Ana Rita de Assumpção. Análise da curva de crescimento de machos Hereford considerando heterogeneidade de variâncias e autocorrelação dos erros. LAVRAS: UFLA, 2001. 94p. (Dissertação - Mestre)\***

Para estudar a função de melhor ajustamento ao crescimento de bovinos Hereford, foram utilizados dados de 160 machos, ajustando-se as funções de Brody, Gompertz, Logística, Richards e von Bertalanffy. A estimação dos parâmetros para modelos de regressão não-linear foi feita pelo método dos quadrados mínimos ordinário e pelo método dos quadrados mínimos generalizados. Para isto utilizou-se o procedimento MODEL do Software Statistical Analysis System (SAS). Foram obtidos ajustes médios e individuais para os animais, em quatro diferentes modelos: ponderado pelo inverso da variância com erros autorregressivos (AR) e sem erros autorregressivos, não ponderado com erros autorregressivos e sem erros autorregressivos. A comparação entre os modelos foi feita através da interpretação biológica dos parâmetros e dos avaliadores da qualidade de ajuste (Coeficiente de Determinação Ajustado, Quadrado Médio do Resíduo, Erro de Predição Médio, Teste t de Student, para as estimativas dos parâmetros A e K e Percentual de Convergência, no caso de ajustes individuais). O melhor modelo obtido foi o ponderado pelo inverso da variância com erros autorregressivos. As funções que melhor ajustaram os dados foram as de Gompertz e von Bertalanffy, seguidas pela Logística. As funções de Brody e Richards apresentaram um baixo percentual de convergência, mostrando-se inadequadas para descrever os dados em estudo. Os ajustes individuais foram mais precisos que os ajustes médios.

---

\* Comitê Orientador: Joel Augusto Muniz-UFLA (Orientador), Luiz Henrique de Aquino-UFLA.

## ABSTRACT

**MAZZINI, Ana Rita de Assumpção. Growth curve analysis for Hereford males considering heterogeneity of variances and autocorrelation of the errors. LAVRAS: UFLA, 2001. 94p. (Dissertation – Master Program in Agronomy / major in Statistics and Agricultural Experimentation)\***

A weight-age growth curve was studied in 160 Hereford males. It was adjusted by using the Brody, Gompertz, Logistic, Richards and von Bertalanffy functions. The parameter estimates for the non-linear regression model were calculated by the ordinary minimum square and generalized minimum square methods (MODEL, SAS/ETS, 1995). The animal's individual and mean adjustments were obtained by using the following models: weighing the inverse of variance with and without autoregressive error (AR) and by non-weighing with and without AR. The comparison among the above models was made by the parameters biological interpretations and by the quality adjustment evaluators (Adjusted determination coefficient, error mean square, mean predicted error, student's t-test for the parameters A and K estimates and convergency percent in the case of individual adjustments). The best fitted model was of that weighted by the inverse of variance with AR. The functions that best fitted the data were those of Gompertz and von Bertalanffy followed by Logistic. Brody and Richards functions presented a low convergency percent, being shown inadequate to describe the data in study. The individual fittings were more precise than the median fittings.

---

\* Guidance Committee: Joel Augusto Muniz - UFLA (Major Professor), Luiz Henrique de Aquino - UFLA.

# 1 INTRODUÇÃO

O rebanho de gado de corte brasileiro é constituído basicamente por duas origens raciais: as européias e as asiáticas. A maioria das raças européias é criada na região Sul do Brasil, e o Rio Grande do Sul detém 10-12% do rebanho efetivo nacional. Dentre as raças européias, destaca-se a raça Hereford, originária da Inglaterra. Suas principais vantagens são a adaptação aos mais diversos ambientes e sistemas de produção, graças à docilidade e rusticidade; índice de fertilidade dos mais altos da espécie, quando favorecidos com manejo e alimentação adequados; bom ganho de peso a pasto, sendo comum novilhos de 450Kg aos 18-24 meses; preponderância nos cruzamentos com outras raças, especialmente as zebuínas; alta lucratividade para criadores, invernadores e frigoríficos, graças ao insuperável índice de rendimento de carcaça, entre as raças européias (Associação Brasileira de Hereford e Braford, 2000).

Na pecuária de corte, os criadores estão cada vez mais conscientes da importância do crescimento dos bovinos para gerenciar e avaliar a rentabilidade da atividade econômica. Em um sistema de produção de carne, crescimento é uma função primordial, pois apresenta relação direta com a quantidade e qualidade da carne, produto final da exploração.

Os órgãos ou tecidos apresentam diferentes taxas e velocidades de crescimento e maturação, sendo influenciados pelo nível nutricional, ocorrendo por ordem prioritária o crescimento do tecido nervoso, ósseo, muscular e adiposo. O aumento do peso de um animal reflete o crescimento do mesmo e ocorre por retenção de água, proteína, gordura e minerais em quantidades variáveis. É uma função básica da alimentação que o animal recebe, das condições climáticas em que se encontra, de seu estado sanitário e das características inerentes a sua genética, biótipo, raça, sexo, peso, idade e estado

corporal. A representação gráfica do peso ou massa corporal em relação à idade resulta na curva de crescimento (Gottschall, 1999).

A utilização de modelos não-lineares na análise de dados de crescimento é de grande utilidade, uma vez que sintetizam um grande número de medidas, em apenas alguns parâmetros interpretáveis biologicamente (Brown, Fitzhugh e Cartwright, 1976; DeNise e Brinks, 1985).

Algumas informações que auxiliam no manejo da propriedade são obtidas através da curva de crescimento, quais sejam: maior precocidade; redução no tempo para atingir a maturidade sexual, antecipando desta forma a idade de entrar em reprodução, e diminuição no percentual de gordura da carcaça em função do aumento da precocidade (Tedeschi, 1996). Outro emprego da curva de crescimento é no melhoramento genético, o qual torna possível obter previsões do tamanho das matrizes e touros que serão mantidos no plantel de reprodução, sendo que, em rebanhos especializados, isto representa um alto valor na produção (Ludwig, Silva e Oliveira, 1981).

No estudo da curva de crescimento pode ocorrer heterogeneidade das variâncias dos pesos corporais, pois à medida que a idade aumenta, a variância dos pesos corporais também aumenta e há a autocorrelação dos resíduos.

O presente trabalho teve como objetivo comparar as cinco funções de crescimento mais utilizadas para descrever as relações peso-idade dos animais, em ajustes de curvas individuais e médias, em quatro modelos diferentes: não ponderado e ponderado pelo inverso da variância dos pesos, com e sem estrutura de erros autorregressivos.

## 2 REFERENCIAL TEÓRICO

### 2.1 Curva de Crescimento

De acordo com Fitzhugh (1976), o termo curva de crescimento, usualmente evoca a imagem de uma curva sigmóide, descrevendo o tempo de vida em uma seqüência de medidas de tamanho, freqüentemente peso corporal. A terminologia mais geral pode ser curva peso-idade. Dados do tipo peso-idade podem ser: a) estáticos, quando uma medida é tomada apenas uma única vez, para um determinado grupo de animais que possuem a mesma idade ou estágio de crescimento, como por exemplo a coleta de pesos à desmama; b) seção transversal em que, cada indivíduo é medido apenas uma única vez, entretanto as mesmas medidas são feitas em outras idades, em animais distintos da mesma população, como por exemplo a estimativa de composição corporal, realizada através de abates consecutivos de animais da mesma população (porém estes dados não consideram a variação individual); c) longitudinais, aqueles em que todas as medidas utilizadas são obtidas do mesmo animal, em todas as idades avaliadas. Esse tipo de dado compreende todas as informações que podem ser obtidas com dados estáticos ou de seção transversal. Os objetivos principais dentro da análise de dados longitudinais são: a) descritivos, ou seja, a informação contida em uma seqüência de dados tamanho-idade é reduzida a poucos parâmetros; b) preditivos, aqueles em que os parâmetros da curva de crescimento são utilizados ora separadamente ora combinados para predizer taxas de crescimento, requerimento alimentar, respostas

parâmetros devem ser biologicamente interpretáveis e o ajuste dos dados deve ser adequado, sendo que a dificuldade computacional também deve ser considerada. Há casos em que as funções podem ser ajustadas matematicamente, mas não apresentam uma interpretação biológica.

Kshirsagar e Smith (1995) consideram que a premissa básica em modelos de curvas de crescimento é que existe uma relação funcional entre um efeito de tratamento e sua aplicação no tempo e esta relação pode ser modelada. O estudo da curva de crescimento, conforme Rosa, Silva e Ludwig (1978), é útil para prever características importantes, como taxas de crescimento, respostas à seleção, peso à maturidade e graus de maturidade.

As funções utilizadas para ajustar peso em relação à idade podem ser lineares e não-lineares (Tedeschi, 1996). A vantagem de utilizar funções não-lineares é devida à interpretação biológica de seus parâmetros, vantagem esta que não ocorre no caso da regressão linear, a qual proporciona um bom ajuste, porém seus parâmetros não possuem significado biológico (Braccini Neto et al., 1996)

Dentre as funções não-lineares mais utilizadas para ajustar as relações peso-idade destaca-se a função de Richards, a qual se caracteriza por apresentar quatro parâmetros. Outras funções, como as de Brody, Gompertz, Logística e von Bertalanffy, com três parâmetros e classificadas como casos especiais da função de Richards, são também muito utilizadas (Tabela 1).

TABELA 1 – Equações e propriedades para os casos especiais da função de Richards.

Função	Equações	M
Brody	$A(1 - Be^{-Kt})$	1
von Bertalanffy	$A(1 - Be^{-Kt})^3$	3
Logística	$A(1 + Be^{-Kt})^{-1}$	-1
Gompertz	$A \exp(-Be^{-Kt})$	$\infty$
Richards	$A(1 - Be^{-Kt})^M$	variável

Fonte: Fitzhugh (1976).

De acordo com Denise e Brinks (1985), a dificuldade de ajuste é maior na função de Richards do que em seus casos especiais, provavelmente devido à variabilidade do seu ponto de inflexão.

Todas as funções não-lineares usadas para descrever o crescimento animal apresentam, pelo menos, dois parâmetros representados por A e K, os quais possuem importantes interpretações sob o ponto de vista biológico (Elias, 1998). Para Brown, Fitzhugh e Cartwright (1976), o parâmetro “A” representa o peso adulto do animal. Sua estimativa é obtida fazendo-se o tempo (t) tender para infinito, entretanto não significando o maior peso alcançado pelo animal, pois a variação do peso é devida a flutuações na composição corporal em um curto período de tempo. O parâmetro “K” representa a taxa de maturidade, ou seja, é a relação entre a taxa de crescimento relativo e o peso adulto do animal. Quanto maior o valor de K, mais precoce é o animal. O parâmetro “M”, conhecido como ponto de inflexão, indica a maior taxa de crescimento. De acordo com Brody (1945), citado por Elias (1998), este ponto de inflexão divide

a curva de crescimento em duas fases distintas, a fase de “crescimento acelerado” e a fase de “crescimento inibitório”, nas quais a velocidade da taxa de crescimento é aumentada e reduzida, respectivamente

O parâmetro “B” é o parâmetro escala (constante de integração), estabelecido pelos valores iniciais de Y e t, que ajusta a situação quanto  $Y \neq 0$  e ou  $t \neq 0$ . Não tem interpretação biológica. (Alves, 1986).

Brown, Brown e Butts (1972a) utilizaram a função de Brody para obter estimativas do peso adulto e taxa de maturidade em animais Hereford e Angus, encontrando uma correlação negativa entre os dois parâmetros (A e K). Os animais da raça Hereford apresentaram uma maior estimativa do peso adulto (A), acompanhada de uma menor estimativa da taxa de maturidade (K), do que os animais da raça Angus.

Brown, Brown e Butts (1972b) compararam cinco funções não-lineares para o ajuste das curvas peso-idade em fêmeas de diversas raças. As funções de von Bertalanffy, Gompertz e Logística superestimaram os pesos iniciais, enquanto a função Logística subestimou o peso adulto. A função de Brody ajustou bem os dados a partir do sexto mês, mas mostrou uma tendência de sub ou superestimar os pesos anteriores aos seis meses. A função de Richards mostrou um bom ajuste para todas as idades, especialmente até o décimo mês, entretanto mostrou dificuldade de convergência. Segundo os autores, a dificuldade no processo iterativo foi devida à alta correlação negativa entre os parâmetros B e M.

Estudando alguns modelos exponenciais no crescimento de bovinos da raça Ibagé, Silveira Jr. (1976) concluiu que o modelo de Brody foi o que melhor se ajustou aos dados, seguido do modelo de von Bertalanffy.

Em trabalho com fêmeas da raça Angus, Morrow, McLaren e Butts (1978) estudaram o comportamento dos parâmetros da curva de crescimento da função de Brody em 7 idades diferentes, todas avaliadas do nascimento até a

idade específica de 2,5; 3,5; 4,5; 5,5; 6,5; 7,5 e 8,5 anos. A mais alta média da estimativa do parâmetro A foi obtida quando os pesos foram coletados até os 2,5 anos de idade, e o valor médio mais alto de K na idade de 3,5 anos, para a qual a média estimada do parâmetro A foi menor. Os autores ainda observaram que as correlações entre as estimativas A e K, para as várias idades, foram geralmente negativas e as correlações foram maiores entre as estimativas de A e K na mesma idade.

Ludwig, Silva e Oliveira (1981), em ajuste de modelos estatísticos exponenciais do crescimento de gado Nelore, compararam os modelos de Brody, Gompertz, Logístico e von Bertalanffy, linearizados pela série de Taylor. Observaram, no ajuste do modelo de Brody, estimativas biologicamente “absurdas” para o peso adulto e, em alguns casos, as estimativas de A alcançaram valores superiores a 10.000 kg. Valores muito pequenos também ocorreram, sendo que 20% dos ajustes apresentaram valores de A abaixo de 300 kg. Estes resultados não foram observados nos demais modelos ajustados.

Goonewardene, Berg e Hardin (1981), em estudo com dois grupos raciais, Hereford e o cruzamento Charolês x Angus x Galloway, objetivaram comparar quatro funções de crescimento. Concluíram que a função de Richards foi a melhor para ambos os grupos, sendo a única que estimou o peso adulto e ao nascer com certo grau de precisão; a função de Brody também apresentou um bom ajuste, sendo melhor para os animais da raça Hereford; as funções Logística e von Bertalanffy não se ajustaram bem aos dados, superestimando o peso ao nascer e subestimando o peso adulto.

Em estudo conduzido com as raças Red Angus e Hereford, Denise e Brinks (1985), comparando as funções de Brody e Richards em relação à qualidade do ajuste dos parâmetros da curva de crescimento, obtiveram um melhor ajuste para a função de Richards, embora a função de Brody tenha sido mais fácil de trabalhar, com menos problemas computacionais. Os autores

relataram que algumas fêmeas não tiveram seu peso ao nascer mensurado, ocasionando uma baixa qualidade no ajuste de suas curvas.

Braccini Neto et al. (1996), comparando as cinco funções de crescimento para aves de postura, observaram que a função de Richards não apresentou convergência com as estimativas iniciais, sendo, desta forma, excluída da análise de comparação. Também constataram, para as demais funções ajustadas, que a menor estimativa de K foi associada com o maior peso assintótico.

Nobre et al. (1987), objetivando avaliar as diferenças de ajuste das curvas de crescimento aplicados a dados de pesagens mensais, bimestrais e trimestrais de gado Nelore, compararam as funções de Brody, Gompertz, Logística, Richards e von Bertalanffy. Observaram que os modelos de Brody e Richards apresentaram os melhores ajustes em relação às estimativas dos pesos às várias idades dos animais, embora a convergência na função de Brody tenha sido mais lenta do que na função de Richards. Uma possível explicação para esta situação deve-se ao fato de que o processo iterativo fornece estimativas do parâmetro K que posicionam o expoente  $-Kt$  fora do intervalo, excedendo a capacidade operacional do computador.

A função de Brody, considerando a raiz cúbica do peso adicionado de um componente sazonal, ajustou-se aos dados de desenvolvimento ponderal de búfalos da raça Murrah (Silveira Jr., Machado e da Silva, 1990), de bovinos Ibagé (Silveira Jr. e Machado, 1990) e bovinos Hereford e Charolês (Silveira Jr. et al., 1993). Os autores observaram, de modo geral, que a transformação dos pesos, além de facilitar o tratamento teórico do modelo, homogeneizou as variâncias dos pesos corporais.

Perotto, Cue e Lee (1992), em estudo de curvas de crescimento com fêmeas de raças leiteiras, com três genótipos diferentes, compararam as funções de Richards, Gompertz, Brody e Logística. Concluíram que a função de Brody superestimou o peso adulto, enquanto a Logística tendeu a subestimá-lo. A

função de Richards foi escolhida para descrever as curvas de crescimento individuais.

Segundo Pasternak e Shalev (1994), o método de estimação de parâmetros usualmente utilizado para modelos de regressão não-linear pode se tornar ineficiente quando a variância dos pesos corporais aumenta muito com a idade. Ocorre, desta forma, a heterocedasticidade, o que os autores denominam “distúrbios de regressão”.

Os mesmos autores, avaliando o efeito do caráter “distúrbios de regressão” na eficiência do ajuste da curva de crescimento, utilizando a função de Gompertz, compararam os métodos de regressão não-linear, regressão não-linear ponderada pelo inverso da variância e algoritmo de “pocket-calculator”, para a estimação dos parâmetros. A eficiência dos três métodos utilizados foi comparada através do coeficiente de variação dos parâmetros estimados. A regressão não-linear ponderada foi a mais eficiente para estimar os parâmetros da curva de crescimento, já que apresentou um menor coeficiente de variação em relação aos demais métodos avaliados. Seria esperado que o método da regressão não-linear fosse mais eficiente que o algoritmo “pocket-calculator”, porém estes dois métodos apresentaram eficiência similar. Uma explicação para este fato pode ser em função de que o algoritmo “pocket-calculator” não é baseado no método dos quadrados mínimos, sendo, desta forma, menos afetado pelo “distúrbio de regressão”. Os autores também concluíram que a regressão não-linear ponderada pode ser usada não só para a função de Gompertz, como também para as demais funções de curvas de crescimento.

Tedeschi (1996) conduziu um trabalho com a finalidade de estudar o comportamento dos parâmetros da curva de crescimento em bovinos da raça Guzera e seus cruzamentos, ajustando as funções de Brody, Richards, Gompertz, Logística, von Bertalanffy e algumas variações de Brody e Gompertz. Todas as funções de crescimento puderam ser ajustadas. O nível de dificuldade de ajuste

foi maior para a função de Richards, sendo que, através dos índices de comparação entre curvas, a função selecionada foi a de Gompertz. O autor concluiu, ainda, que os parâmetros “A” e “K” apresentaram alta correlação negativa.

Perotto et al. (1997), estudando os efeitos genéticos sobre as estimativas dos parâmetros das curvas de crescimento em fêmeas bovinas das raças Gir, Guzerá, Holandês x Gir e Holandês x Guzerá, utilizando o modelo de Richards para estimação dos parâmetros A, B, K e M, concluíram que o modelo proposto mostrou-se adequado para descrever a maior parte das características estudadas, exceto aquelas relacionadas ao ponto de inflexão da curva, tais como: ponto de inflexão (M); peso no ponto de inflexão (PPI); grau de maturidade no ponto de inflexão (GMI) e idade no ponto de inflexão (IPI).

Braccini Neto et al. (1997), estudando a estimativa de parâmetros genéticos e fenotípicos da curva de crescimento de galinhas poedeiras, ajustada por meio da função de von Bertalanffy, citam que as correlações genéticas estimadas entre peso assintótico e índice de maturidade e os caracteres de produção mostram que programas de seleção podem ser desenvolvidos com base nos referidos parâmetros.

Elias (1998), em estudo de curvas de crescimento com raças zebuínas, comparou as funções não-lineares de Brody, Gompertz, Logística, Richards e von Bertalanffy, ajustadas de forma não ponderada e ponderada pelo inverso das variâncias dos pesos. De maneira geral, todas as funções se ajustaram bem aos dados, destacando-se o modelo de Brody ponderado.

Oliveira, Lôbo e Pereira (2000), estudando o crescimento de fêmeas da raça Guzerá com o objetivo de estabelecer um padrão médio de crescimento, compararam quanto à qualidade de ajuste as funções de Brody, von Bertalanffy, Logística, Gompertz e Richards. A função escolhida para representar a curva média de crescimento dos animais foi a de von Bertalanffy.

Mendes, Aquino e Muniz (2001), em estudo de curvas de crescimento com novilhas Nelore, ajustaram as funções de Brody, Gompertz, Richards e von Bertalanffy, considerando estrutura de erros autorregressivos de primeira ordem. As funções de Brody e Richards apresentaram uma boa qualidade de ajuste em todos os parâmetros interpretáveis biologicamente, sendo, desta forma, selecionadas para descrever os dados em estudo.

Com o objetivo de verificar a influência de fatores genéticos e ambientais sobre as estimativas dos parâmetros, Silva, Aquino e Oliveira (2001) conduziram um estudo de curva de crescimento com bovinos Nelore. Ajustaram as funções de Brody, Gompertz, Logística, Richards e von Bertalanffy utilizando a metodologia dos mínimos quadrados generalizados para modelos de regressão não-linear com erros autorregressivos, AR(1). Todas as funções apresentaram coeficiente de determinação próximos de 0,98 e 0,99. A função escolhida para representar o crescimento de animais Nelore do nascimento aos 550 dias de idade foi a de Brody, por apresentar um bom ajuste aos dados e uma maior velocidade de convergência.

Bergamasco et al. (2001), em estudo de curvas de crescimento com novilhas holandesas, procederam ao ajuste das funções de Brody, Gompertz e Logística através do método dos mínimos quadrados generalizados, usando modelos de regressão não-linear com erros autorregressivos, AR(1). Os três modelos estudados apresentaram coeficiente de determinação ajustado em torno de 0,99.

## **2.2 Estatísticas usadas na comparação entre as curvas de crescimento**

A maioria dos autores, em trabalhos com curvas de crescimento, avaliam os ajustes com base no coeficiente de determinação ( $R^2$ ), quadrado médio do resíduo (QMR) e erro de predição médio (EPM).

Silveira Jr. (1976) comparou quatro curvas de crescimento através do coeficiente de determinação e quadrado médio do resíduo, mostrando melhor ajuste o modelo de Brody, que apresentou um maior coeficiente de determinação, com um menor quadrado médio do resíduo.

Goonewardene, Berg e Hardin (1981), em estudo de crescimento de gado de corte com as raças Hereford e o cruzamento Charolês, Angus e Galloway, utilizaram, para escolha do modelo, os avaliadores  $R^2$  (coeficiente de determinação) e EPM (erro de predição médio) e observaram maiores valores de  $R^2$  para os modelos de Brody e Richards. Em relação ao EPM, todas as funções, em média, superestimaram o peso observado. As funções de Richards e Brody não diferiram significativamente pelo teste t entre seus EPM's calculados dentro da raça Hereford.

Ludwig, Silva e Oliveira (1981), comparando quatro modelos estatísticos exponenciais do crescimento de gado Nelore, concluíram que todos se ajustaram bem aos dados de peso-idade, apresentando coeficientes de determinação próximos a 0,99.

Freitas e Costa (1983), comparando cinco funções não-lineares para curvas de crescimento peso-idade com suínos, observaram que as funções de von Bertalanffy e Logística apresentaram valores altos para  $R^2$ .

Pesquisando modelos de curvas de crescimento em frangos de corte, Freitas et al. (1984) constataram que os modelos de Gompertz, Logístico e von Bertalanffy apresentaram os maiores valores de  $R^2$  ajustado e menores valores para o erro de predição médio.

Nobre et al. (1987), trabalhando com curvas de crescimento de gado Nelore, consideraram, para a escolha da melhor função, o coeficiente de determinação, os desvios-padrão das estimativas dos coeficientes e o número de iterações obtidas para convergência das funções em estudo.

Em estudo de curvas de crescimento com poedeiras, Braccini Neto et al. (1996) verificaram a qualidade do ajuste dessas curvas através do coeficiente de determinação, quadrado médio do resíduo e erro de predição médio. Com base no coeficiente de determinação e quadrado médio do resíduo, todas as funções apresentaram bom ajuste. Os autores aplicaram ainda o teste de Tukey ao erro de predição médio, verificando que as duas melhores curvas foram as de Brody e von Bertalanffy.

A função de Gompertz foi selecionada por apresentar menor desvio de regressão, menor variação residual, maior coeficiente de determinação, menor variação entre os parâmetros dos animais, maior convergência e valor do peso adulto "A" compatível com peso adulto observado dos animais da raça Guzerá e seus cruzamentos (Tedeschi, 1996).

Analisando cinco funções de crescimento para raças zebuínas, Elias (1998) comparou as mesmas através do percentual de convergência, coeficiente de determinação, quadrado médio do resíduo, teste t de Student e erro de predição médio, observando que a melhor função foi a de Brody ponderada.

Helmink, Shanks e Leighton (2000), objetivando construir curvas de crescimento para machos e fêmeas de cães-guia, utilizaram a função de Gompertz. Esta função foi escolhida previamente após comparada com as funções de von Bertalanffy, Logística e Logística difásica, através do quadrado médio do resíduo, coeficiente de determinação e teste de significância de Durbin Watson, para verificar a autocorrelação dos resíduos.

Oliveira, Lôbo e Pereira (2000), em estudo com fêmeas Guzerá, inicialmente compararam a qualidade do ajustamento utilizando dois critérios: quadrado médio do erro e coeficiente de determinação. Outros dois critérios utilizados na comparação da qualidade de ajustamento foram obtidos em cada classe de idade. Em cada função foram calculados o desvio médio entre o peso predito e o observado e a correlação entre os dois.

Mendes, Aquino e Muniz (2001), em estudo com novilhas Nelore, compararam as cinco funções estudadas através dos coeficientes de determinação ajustados e somas de quadrados dos resíduos.

Silva, Aquino e Oliveira (2001), em estudos com curvas de crescimento para gado Nelore, compararam as cinco funções estudadas através da soma de quadrados dos resíduos, coeficiente de determinação ajustado e estimativa do parâmetro de autocorrelação.

### 2.3 Modelos não-lineares

Avaliar a possível relação entre uma variável dependente e uma ou mais variáveis independentes é uma das tarefas mais comuns em análises estatísticas. Pode-se atingir este objetivo através dos bem conhecidos modelos de regressão, os quais se dividem em duas classes distintas: os lineares e os não-lineares. Existem muitas diferenças entre estas classes de modelos. No caso linear, a partir de um conjunto de observações, busca-se o modelo que melhor explica a relação, se existir alguma, entre as variáveis inerentes a um dado fenômeno. Os modelos não-lineares, na maioria das vezes, são baseados em considerações teóricas inerentes ao fenômeno que se tem interesse em estudar (Mazuchelli e Achcar, 1997).

Em uma regressão não-linear, de acordo com Souza (1998), respostas univariadas  $y_t$  obedecem ao modelo:

$$y_t = f(x_t, \theta^0) + \varepsilon_t \quad \text{onde } t = 1, 2, \dots, n.$$

A função resposta  $f(x_t, \theta^0)$  tem forma funcional conhecida,  $x_t$  é um vetor  $k$  dimensional formado por observações em variáveis exógenas,  $\theta^0 \in \Theta$  é um parâmetro  $p$  dimensional e  $\varepsilon_t$  é um erro experimental não observável diretamente.

Draper e Smith (1998) classificam os modelos como: a) modelos lineares: aqueles que são lineares em relação aos parâmetros, isto é:

$$\frac{\partial}{\partial \theta_j} f_i(X, \theta) = g(X)$$

para  $i = 1, 2, \dots, n$  e  $j = 1, 2, \dots, p$ ;

onde  $n$  é o número total de observações e  $p$  é o número de parâmetros do modelo; b) modelos linearizáveis: aqueles que podem ser transformados em lineares através de alguma transformação. Tem-se o modelo:

$$Y = a^X \cdot e$$

onde o erro é dito multiplicativo. Aplicando-se logaritmo à igualdade, tem-se:

$$\ln Y = \ln(a^X \cdot e)$$

$$\ln Y = \ln a^X + \ln e$$

$$\ln Y = X \ln a + \ln e$$

sendo  $Z = \ln Y$ ;  $b = \ln a$ ;  $e^* = \ln e$  o modelo fica:

$$Z = bX + e^*$$

que é linear, pois

$$\frac{\partial f}{\partial b} = X = g(X)$$

logo o modelo  $Y = a^X \cdot e$ , é dito linearizável; c) modelos não lineares: aqueles que não se enquadram nos casos a) e b). Considera-se o modelo:

$$Y = a^X + e$$

onde o erro é dito aditivo e não existe transformação capaz de tornar o modelo linear. Verifica-se que:

$$\frac{\partial f}{\partial a} = X a^{X-1} = g(X, a),$$

portanto o modelo é dito não linear.

Para Ratkowsky (1983), um modelo de regressão não-linear é aquele no qual os parâmetros apresentam não linearidade, por exemplo:  $Y_t = X_t^\theta + \varepsilon_t$ , onde  $\theta$  é o parâmetro a ser estimado. De forma semelhante aos modelos lineares, o processo de estimação do parâmetro  $\theta$  pode ser obtido através da minimização da soma de quadrados dos resíduos, obtendo-se o sistema de equações normais não-linear, o qual não apresenta uma solução explícita para  $\hat{\theta}$ , que é obtida por processos iterativos.

Souza (1998) considera modelo de regressão não-linear na forma

$$Y = f(\theta^0) + \varepsilon$$

onde  $Y$  é um vetor de componentes  $y_t$ ,  $f(\theta^0)$  tem componentes  $f(x_t, \theta^0)$  e  $\varepsilon$  tem componentes  $\varepsilon_t$ . Considere  $F(\theta)$  a matriz jacobiana de  $f(\theta)$  e  $F = F(\theta^0)$ .

O estimador  $\hat{\theta}$  de mínimos quadrados de  $\theta^0$  é obtido mediante a minimização (em  $\Theta$ ) da soma de quadrados residuais

$$SSE(\theta) = \sum_{t=1}^n [(y_t - f(x_t, \theta))]^2 = [Y - f(\theta)]' [Y - f(\theta)]$$

Por analogia com o modelo linear, como estimador de  $\sigma^2$  toma-se

$\hat{\sigma}^2 = \frac{SSE(\hat{\theta})}{n - p}$ . O estimador de mínimos quadrados  $\hat{\theta}$  satisfaz a equação

$$\frac{\partial SSE(\theta)}{\partial(\theta)} = 0, \text{ portanto deve-se ter } -2F'(\hat{\theta})[Y - f(\hat{\theta})] = 0.$$

Resulta que o vetor residual  $\hat{e} = Y - f(\hat{\theta})$  satisfaz  $F'(\hat{\theta})\hat{e} = 0$  e é, portanto, ortogonal às colunas da matriz jacobiana  $F(\theta)$  calculada em  $\theta = \hat{\theta}$ . Em regressão linear  $F = F(\hat{\theta}) = X$ , a identificação entre  $X$  no caso linear e  $F$  no caso não-linear vale em geral, isto é, as expressões utilizadas no estudo da

inferência do modelo linear e com erros normais têm uma relação para o caso não-linear, obtida por intermédio da substituição da matriz  $X$  por  $F$ . A razão disto é que a teoria de inferência estatística que se desenvolve para o modelo de regressão não-linear baseia-se essencialmente na aproximação linear por série de Taylor

$$f(\theta) \approx f(\theta^0) + F(\theta - \theta^0).$$

De acordo com o mesmo autor, o método de mínimos quadrados generalizados representa um conjunto de idéias extremamente importante para o estudo de modelos lineares e não-lineares. A abordagem se torna necessária, particularmente, na presença de heterogeneidade de variâncias.

Quando a matriz de variância dos resíduos é da forma  $\sigma^2\Omega$  com  $\Omega \neq I$ , o estimador dos mínimos quadrados de  $\beta$  não é o mais eficiente. Se  $\Omega$  é positiva definida, existe uma matriz  $P$  não-singular tal que  $\Omega^{-1} = P'P$ .

Na maioria das aplicações que exigem o uso de mínimos quadrados generalizados, a matriz  $\Omega$  não será conhecida. Nestas circunstâncias tipicamente  $\Omega = \Omega(\gamma)$ , onde  $\gamma$  tem dimensão finita e um estimador consistente de  $\gamma$  estará disponível, seja  $\gamma$  este estimador  $\hat{\Omega} = \Omega(\gamma)$ , utiliza-se  $\hat{\beta}_E = (X'\hat{\Omega}^{-1}X)^{-1}X'\hat{\Omega}^{-1}Y$ . Sob certas condições de regularidade adicionais, que devem ser verificadas em cada caso,  $\hat{\beta}_E$  será mais eficiente do que o estimador de mínimos quadrados ordinários, consistente e normal.

Chiacchio (1993) distingue a caracterização da regressão em função das suposições do vetor de erros  $\varepsilon$  da seguinte maneira: a) modelos ordinários: aqueles cuja estrutura dos erros não viola nenhuma das pressuposições. Pode ser escrito de forma mais eficiente como  $\varepsilon \sim N(\phi; I\sigma^2)$ ; b) modelos ponderados: são aqueles cuja estrutura dos erros viola a pressuposição de homogeneidade de variâncias. Nesse caso, diz-se que os erros são heterocedásticos. Escreve-se

$\varepsilon \sim N(\phi; D \sigma^2)$ , onde  $D$  é uma matriz diagonal, positiva definida, que pondera a variância  $\sigma^2$ ; c) modelos generalizados: são aqueles cuja estrutura dos erros viola a pressuposição de independência dos erros e possivelmente a de homogeneidade de variâncias. Diz-se que os erros são correlacionados (e possivelmente heterocedásticos). Escreve-se  $\varepsilon \sim N(\phi; W \sigma^2)$  onde  $W$  é uma matriz simétrica, positiva definida, que representa as variâncias e covariâncias dos erros.

Vários métodos iterativos são propostos na literatura para obtenção das estimativas de mínimos quadrados dos parâmetros de um modelo de regressão não-linear. Os mais utilizados são: o método de Gauss-Newton, o método “Steepest-Descent” ou método do Gradiente e o método de Marquardt, os quais fazem uso das derivadas parciais da função esperança  $f(x_i; \theta)$  com relação a cada parâmetro. Outro método, bastante similar ao de Gauss-Newton, exceto pelo fato de não exigir a especificação das derivadas parciais da função esperança, é chamado método de DUD (doesn't use derivatives) (Mazuchelli e Achcar, 1997). Um outro método iterativo bastante utilizado é o de Gauss-Newton modificado ou método de linearização, o qual usa o resultado de mínimos quadrados lineares em uma sucessão de passos, convertendo o problema de uma regressão não-linear para uma série de regressões lineares. Para isso faz uma expansão em série de Taylor até 1º grau e depois minimiza a soma de quadrados residual (Ogliari, 1998).

Elias (1998), em estudo de curvas de crescimento de vacas zebuínas, comparou quatro processos iterativos de estimação de parâmetros de modelos não-lineares: Gauss-Newton, Marquardt, DUD e Newton e, verificou que todos apresentaram alta taxa de convergência, com resultados semelhantes para cada modelo, sendo que as diferenças nas estimativas ocorreram no início e no final da vida do animal. Os métodos de Marquardt e Gauss-Newton forneceram

resultados quase idênticos, alta taxa de convergência e rapidez no processamento dos dados em todos os modelos estudados.

A rapidez na convergência depende da complexidade do modelo em estudo e, principalmente, da qualidade dos valores iniciais, necessários em qualquer método iterativo (Mazuchelli e Achar, 1997). Ratkowsky (1983) discute procedimentos para obtenção de bons valores iniciais para algumas classes de modelos (modelos de crescimento, modelos de regressão assintóticos, entre outros).

Silveira Jr., Machado e Silva, (1990); Silveira Jr. e Machado, (1990); Silveira Jr. et al. (1993), em trabalhos com curvas de crescimento, tomaram as diferenças entre as raízes cúbicas de dois períodos consecutivos como valores iniciais das estimativas no processo iterativo

## **2.4 Autocorrelação**

Os modelos básicos de regressão, em geral, assumem que os erros são independentes. No caso de estudo de curva de crescimento, no qual as medidas são tomadas em seqüência, no mesmo animal, a hipótese de independência dos erros é freqüentemente não apropriada (Neter, Wasserman e Kutner, 1985).

A característica geral da autocorrelação dos resíduos é a de existir uma variação sistemática dos valores em observações sucessivas. Quando isso ocorre, diz-se que os resíduos são serialmente correlacionados ou autocorrelacionados (Morettin e Tolo, 1987). Segundo Hoffman e Vieira (1998), a autocorrelação dos resíduos surge, geralmente, quando se trabalha com séries cronológicas de dados, admitindo que o erro da observação relativa a um período está correlacionado com o erro da observação anterior.

Para Neter, Wasserman e Kutner (1985), nos casos de modelos de regressão com erros autocorrelacionados positivamente, o uso do método dos quadrados mínimos ordinário tem importantes conseqüências, tais como: os

estimadores dos coeficientes são não tendenciosos, mas levam a uma subestimativa da variância, podendo ser completamente ineficientes; o quadrado médio do resíduo pode subestimar a variância dos erros; em consequência, o desvio padrão calculado de acordo com o método dos mínimos quadrados ordinários pode subestimar o verdadeiro desvio padrão do coeficiente de regressão estimado, invalidando os intervalos de confiança e testes usando as distribuições t e F.

Conforme Souza (1998), o procedimento estatístico adequado ao modelo não-linear subordinado à estrutura do AR(1) envolve a determinação de um estimador consistente  $\hat{\Omega}$  de  $\Omega$  e a busca de um estimador de  $\theta^0$  mais eficiente do que o de mínimos quadrados ordinários. Neste contexto, procura-se pelo mínimo da soma de quadrados residual “ponderada”.

$$[Y - f(\theta)]' \hat{\Omega}^{-1} [Y - f(\theta)]$$

O valor de  $\theta$  que minimiza esta soma de quadrados é o estimador de mínimos quadrados generalizados  $\hat{\theta}_G$ . Este vetor é determinado pela fatoração  $\hat{\Omega}^{-1} = P'P$  e da regressão não-linear  $PY = Pf(\theta) + v$ , onde a matriz  $P$  é determinada a partir dos resíduos de mínimos quadrados ordinários não-lineares e da solução do sistema de equações de Yule-Walker. Após as primeiras  $l$  observações, a transformação  $P$  induz o modelo  $(PY)_t = [Pf(\theta)]_t + v_t$ , onde

$$(PY)_t = y_t + \hat{\phi}_1 y_{t-1} + \hat{\phi}_2 y_{t-2} + \dots + \hat{\phi}_l y_{t-l}$$

e

$$\{P[f(\theta)]\}_t = f(x_t, \theta) + \hat{\phi}_1 f(x_{t-1}, \theta) + \hat{\phi}_2 f(x_{t-2}, \theta) + \dots + \hat{\phi}_l f(x_{t-l}, \theta).$$

Propondo um modelo autorregressivo para análise de experimentos com vacas em lactação, Crocci (1984) concluiu que o modelo autorregressivo com  $3 \leq p \leq k$  é adequado, desde que o coeficiente de correlação linear entre os períodos possa ser obtido de lactações anteriores. Observou, ainda, que em

condições ideais, os modelos autorregressivos com  $p=3$  e  $p=k$  são mais sensíveis do que os modelos dos delineamentos que não consideram o modelo autorregressivo.

Souza (1989) estudou curvas de crescimento com dados longitudinais incompletos (medidas repetidas) e informou que na análise destes dados, quase sempre é exigida a estimativa da matriz de covariâncias  $\Sigma$ , relativa ao vetor de observações.

Em estudo de crescimento de vacas leiteiras, Kroll (1990) comparou os modelos polinomial, Gompertz, Logístico e Mitscherlich com estrutura de erros independentes e autorregressivos de primeira ordem, concluindo que o processo autorregressivo diminui significativamente a autocorrelação nos modelos.

Considerando a sazonalidade no crescimento multifásico de modelos assintótico-sigmóides, Tornero (1996) afirma que embora a natureza biológica e temporal dos dados coletados no mesmo indivíduo sustente a premissa de autocorrelação, nem sempre o espaçamento entre as mensurações é suficiente para que um dado retenha informação das observações coletadas anteriormente.

Em trabalho objetivando avaliar a qualidade e as características do ajuste da função logística monofásica e difásica, com estrutura de erros independentes e autorregressivos de primeira e segunda ordens, AR(1) e AR(2), em dados simulados e reais de vacas leiteiras, Medeiros (1999) concluiu que a introdução da estrutura de autocorrelação nos erros melhorou o ajuste, minimizando o problema das medidas repetidas.

Segundo Elias (1998), embora a ponderação pelo inverso da variância melhore a qualidade das estimativas, não atende a todas as especificações, em particular a condição de independência dos erros, o que implica na necessidade de utilização de procedimentos alternativos.

## **3 MATERIAL E MÉTODOS**

### **3.1 Material**

Os dados utilizados neste trabalho provêm de animais da raça Hereford, machos não castrados, nascidos nos anos de 1992, 1993 e 1994, na Agropecuária Recreio, de propriedade do Sr. Roberto Silveira Collares, situada no município de Bagé, Estado do Rio Grande do Sul. Os mesmos foram cedidos pelo Centro de Pesquisas Pecuária Sul, pertencente à Empresa Brasileira de Pesquisa Agropecuária (EMBRAPA), situada no mesmo município.

O manejo alimentar da propriedade é basicamente pasto nativo, pastagem cultivada e suplementação a campo estratégica (do desmame até 1º ano).

As pesagens consideradas no estudo foram coletadas de 160 animais, desde o nascimento até aproximadamente 790 dias de idade, obtendo-se, no grupo, 47 animais com 16 pesagens; 30 animais com 17 pesagens; 24 animais com 18 pesagens; 51 animais com 19 pesagens e 8 animais com 20 pesagens.

### **3.2 Métodos**

#### **3.2.1 Estimação dos parâmetros de modelos não-lineares**

##### **3.2.1.1 Método dos Quadrados Mínimos Ordinários**

Para Gallant (1987), o método dos quadrados mínimos é utilizado na estimação dos parâmetros em modelos não-lineares, da mesma maneira que em modelos lineares. Seja uma equação de regressão não-linear

$$Y_t = f(X_t, \theta) + e_t,$$

onde  $t = 1, 2, 3, \dots, n$ .

Assumindo-se que  $E(e_t) = 0$ ,  $\text{Var}(e_t) = \sigma^2$  e  $e_t \sim N(0, \sigma^2)$ , esta função pode ser escrita na forma matricial

$$\mathbf{Y} = \mathbf{f}(\theta) + \mathbf{e},$$

$$\text{onde: } \mathbf{Y} = \begin{bmatrix} Y_1 \\ Y_2 \\ \vdots \\ Y_n \end{bmatrix}; \mathbf{f}(\theta) = \begin{bmatrix} f(X_1, \theta) \\ f(X_2, \theta) \\ \vdots \\ f(X_n, \theta) \end{bmatrix}; \mathbf{e} = \begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \\ \vdots \\ e_n \end{bmatrix}.$$

A estimativa para  $\theta$  é dada pelo vetor  $\hat{\theta}$  que minimiza a soma de quadrados do resíduo,

$$S(\theta) = \sum_{i=1}^n [Y_i - f(X_i; \theta)]^2$$

Escrevendo-se  $S(\theta)$  na forma matricial, tem-se:

$$S(\theta) = [\mathbf{Y} - \mathbf{f}(\theta)]' [\mathbf{Y} - \mathbf{f}(\theta)]$$

Derivando a  $S(\theta)$  em relação a  $\theta$ , tem-se:

$$\frac{\partial S(\theta)}{\partial \theta'} = \frac{\partial}{\partial \theta'} [\mathbf{Y} - \mathbf{f}(\theta)]' [\mathbf{Y} - \mathbf{f}(\theta)]$$

Fazendo

$$\frac{\partial}{\partial \theta'} \mathbf{f}(\theta) = \mathbf{F}(\theta),$$

tem-se

$$\frac{\partial S(\theta)}{\partial \theta'} = -2[\mathbf{Y} - \mathbf{f}(\theta)]' \mathbf{F}(\theta)$$

Igualando a equação acima a zero, obtém-se

$$-2[\mathbf{Y} - \mathbf{f}(\hat{\boldsymbol{\theta}})]' \mathbf{F}(\hat{\boldsymbol{\theta}}) = 0$$

$$[\mathbf{Y} - \mathbf{f}(\hat{\boldsymbol{\theta}})]' \mathbf{F}(\hat{\boldsymbol{\theta}}) = 0$$

$\mathbf{F}'(\hat{\boldsymbol{\theta}})[\mathbf{Y} - \mathbf{f}(\hat{\boldsymbol{\theta}})] = 0$ , Sistema de Equações Normais (SEN) não-linear.

Substituindo-se  $\mathbf{F}(\hat{\boldsymbol{\theta}})$  por  $\mathbf{X}$ , a equação fica

$$\mathbf{X}'[\mathbf{Y} - \mathbf{f}(\hat{\boldsymbol{\theta}})] = 0$$

$$\mathbf{X}'\mathbf{Y} - \mathbf{X}'\mathbf{f}(\hat{\boldsymbol{\theta}}) = 0$$

$$\mathbf{X}'\mathbf{f}(\hat{\boldsymbol{\theta}}) = \mathbf{X}'\mathbf{Y} \text{ (SEN) não-linear.}$$

Fazendo-se no SEN,  $[\mathbf{Y} - \mathbf{f}(\hat{\boldsymbol{\theta}})] = \hat{\mathbf{e}}$ , tem-se

$$\mathbf{X}'\hat{\mathbf{e}} = 0.$$

Em regressão linear, o erro é ortogonal às colunas da matriz  $\mathbf{X}$ ; no caso da regressão não-linear, o erro é ortogonal às colunas do jacobiano de  $\mathbf{f}(\boldsymbol{\theta})$ , estimado em  $\boldsymbol{\theta} = \hat{\boldsymbol{\theta}}$ .

Não existe uma solução explícita para o SEN não-linear; as soluções são obtidas por métodos iterativos.

### 3.2.1.2 Método dos Quadrados Mínimos Ponderados

De acordo com Hoffman e Vieira (1998), em presença de heterogeneidade de variâncias, o método dos quadrados mínimos ponderado é mais adequado por fornecer estimadores não tendenciosos e de mínima variância.

Seja o modelo linear

$$\mathbf{Y} = \mathbf{X}\boldsymbol{\beta} + \mathbf{u},$$

supondo-se que  $\boldsymbol{\varepsilon} \sim N(\mathbf{0}; \mathbf{V}\sigma^2)$ , onde  $\mathbf{V}$  é uma matriz diagonal, positiva definida, que representa as variâncias associadas a cada  $u_i$ , com  $E(\mathbf{u}) = \mathbf{0}$  e

$$E(\mathbf{u}'\mathbf{u}) = \mathbf{V}\sigma^2 = \begin{bmatrix} V_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & V_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & V_n \end{bmatrix} \sigma^2$$

O fato de serem nulos os elementos fora da diagonal principal da matriz  $\mathbf{V}$  significa que é válida a pressuposição de independência das várias observações, isto é,  $E(u_j u_h) = 0$  para  $j \neq h$ .

Define-se uma matriz diagonal  $\Lambda$ , cujos elementos são dados por

$$\lambda_j = \frac{1}{\sqrt{V_j}} \text{ ou seja,}$$

$$\Lambda = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{bmatrix}$$

Desta forma, tem-se que

$$\Lambda\Lambda = \mathbf{V}^{-1} \quad \text{e} \quad \mathbf{V} = \Lambda^{-1}\Lambda^{-1}.$$

Pré-multiplicando cada um dos termos de  $\mathbf{Y} = \mathbf{X}\beta + \mathbf{u}$  por  $\Lambda$ , obtém-se o modelo:

$$\Lambda\mathbf{Y} = \Lambda\mathbf{X}\beta + \Lambda\mathbf{u}$$

Portanto, percebe-se que no modelo  $\mathbf{Y} = \mathbf{X}\beta + \mathbf{u}$ , o vetor de erros é dado por  $\epsilon = \Lambda\mathbf{u}$ . Assim, uma vez que  $E(\mathbf{u})=0$ , tem-se que  $E(\epsilon)=0$ , e ainda

$$E(\epsilon\epsilon') = E(\Lambda\mathbf{u}\mathbf{u}'\Lambda) = \Lambda\mathbf{V}\Lambda\sigma^2$$

de acordo com

$$\mathbf{V} = \Lambda^{-1}\Lambda^{-1},$$

$$E(\epsilon\epsilon') = \Lambda\Lambda^{-1}\Lambda^{-1}\Lambda\sigma^2 = \mathbf{I}\sigma^2.$$

O modelo  $\Lambda Y = \Lambda X\beta + \Lambda u$  é homocedástico. O método dos quadrados mínimos ponderado fornece o SEN dado por

$$X'V^{-1}X\hat{\beta} = X'V^{-1}Y.$$

A solução do SEN leva ao estimador

$$\hat{\beta} = (X'V^{-1}X)^{-1}X'V^{-1}Y.$$

### 3.2.1.3 Método dos Quadrados Mínimos Generalizados

Hoffman e Vieira (1998) e Crocci (1984) consideram que em presença de heterogeneidade de variâncias e autocorrelação dos resíduos, o método dos quadrados mínimos generalizado é mais eficiente do que o método dos quadrados mínimos ponderados e ordinários.

Seja o modelo linear

$$Y = X\beta + u$$

supondo-se que  $\varepsilon \sim N(0; W \sigma^2)$ , onde  $W$  é uma matriz simétrica, positiva definida, que representa as variâncias e covariâncias dos erros. Admitindo-se que os erros são autocorrelacionados na forma de um processo autorregressivo estacionário de primeira ordem AR(1),

$$u_t = \phi_1 u_{t-1} + \varepsilon_t$$

onde  $E(\varepsilon_t) = 0$ ,  $E(\varepsilon_t^2) = \sigma_\varepsilon^2$ ,  $E(\varepsilon_t, \varepsilon_{t-h}) = 0$  se  $h \neq 0$ .

O modelo  $u_t$  será estacionário se

$$-1 \leq \phi_1 \leq +1$$

para  $t = 1, 2, \dots, n$ .

$$\text{Nestas condições, } \sigma_u^2 = \frac{\sigma_\varepsilon^2}{1 - \phi_1^2} \text{ e } \text{Cov}_u = \frac{\sigma_\varepsilon^2}{1 - \phi_1^2} \cdot \phi_1^h = \sigma_u^2 \phi_1^h.$$

De maneira análoga ao método dos quadrados mínimos ponderados, encontra-se  $\hat{\beta}$

$$\hat{\beta} = (X'W^{-1}X)^{-1}X'W^{-1}Y, \text{ onde}$$

$$W = \frac{\sigma_{\varepsilon}^2}{1 - \phi_1^2} \begin{bmatrix} 1 & \phi_1 & \phi_1^2 & \dots & \phi_1^{n-1} \\ \phi_1 & 1 & \phi_1 & \dots & \phi_1^{n-2} \\ \phi_1^2 & \phi_1 & 1 & \dots & \phi_1^{n-3} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \phi_1^{n-1} & \phi_1^{n-2} & \phi_1^{n-3} & \dots & 1 \end{bmatrix}$$

Se os erros forem autocorrelacionados na forma de um processo autorregressivo estacionário de segunda ordem AR(2) (Morettin e Tolo, 1987),

$$u_t = \phi_1 u_{t-1} + \phi_2 u_{t-2} + \varepsilon_t$$

onde  $u_t$  é estacionário se

$$\phi_1 + \phi_2 < 1$$

$$\phi_2 - \phi_1 < 1$$

$$-1 < \phi_2 < 1$$

onde  $\phi_1$  e  $\phi_2$  são os parâmetros de autocorrelação.

Logo, temos que

$$\sigma_u^2 = \frac{\sigma_{\varepsilon}^2}{1 - \phi_1 \rho_1 - \phi_2 \rho_2},$$

enquanto as funções de autocorrelação são dadas por

$$\rho_j = \phi_1 \rho_{j-1} + \phi_2 \rho_{j-2}, \quad j > 0,$$

onde

$$\rho_1 = \frac{\phi_1}{1 - \phi_2} \quad \text{e} \quad \rho_2 = \frac{\phi_1^2}{1 - \phi_2} + \phi_2$$

Outros modelos possíveis são o de médias móveis (MA) e o modelo misto, autorregressivo e médias móveis (ARMA).

### 3.2.2 Processo Iterativo

Conforme visto no item anterior, o SEN (não-linear) não apresenta solução explícita, devendo-se utilizar processos iterativos para obtenção das estimativas dos parâmetros.

O PROC MODEL (SAS/ETS, 1995) utiliza dois métodos iterativos: Gauss-Newton e Marquardt.

#### 3.2.2.1 Método de Gauss-Newton

De acordo com Gallant (1987), o método de Gauss-Newton, na forma original, consiste no desenvolvimento em série de Taylor até o termo de primeira ordem da função  $f(X_i; \theta)$  em torno do ponto  $\theta^0$ .

Considerando o modelo não-linear

$$Y_i = f(X_i; \theta) + e_i,$$

a expansão em série de Taylor é dada por

$$f(\theta) = f(\theta^0) + F(\theta^0)(\theta - \theta^0).$$

Assim, o SEN (não-linear)

$$X'f(\hat{\theta}) = X'Y$$

pode ser escrito como

$$X'[f(\theta^0) + F(\theta^0)(\theta - \theta^0)] = X'Y.$$

Mas  $F(\theta^0)$  é a matriz de derivadas parciais  $X$ . Logo, substituindo-se no SEN, obtém-se:

$$X'[f(\theta^0) + X(\theta - \theta^0)] = X'Y$$

Fazendo-se o produto matricial e reagrupando os termos semelhantes, encontra-se

$$\theta - \theta^0 = (X'X)^{-1} X'e.$$

Portanto, a fórmula iterativa conhecida como Método de Gauss-Newton é dada por:

$$\theta^1 = \theta^0 + (\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1} \mathbf{X}'\mathbf{e}$$

Este processo é repetido colocando  $\theta^1$  no lugar de  $\theta^0$  (vetor de estimativas iniciais) até que algum critério de convergência seja aceito, isto é:

$$\theta^n \rightarrow \hat{\theta} \text{ onde } n \text{ é o número de vezes que o processo foi repetido.}$$

### 3.2.2.2 Método de Marquardt

Marquardt (1963), citado por Chiacchio (1993), propõe um método baseado na interpolação entre dois métodos:

- Método de Gauss-Newton (ou “Método da Série de Taylor”)
- Método do Gradiente (ou “Steepest Descent”)

A estratégia utilizada consiste na interpolação dos parâmetros de correção  $\delta_{GN}$  e  $\delta_G$ , dados por:

$$\delta_{GN} = (\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1} \mathbf{X}'[\mathbf{Y} - \mathbf{f}(\theta^0)]$$

$$\delta_G = -\mathbf{X}'[\mathbf{Y} - \mathbf{f}(\theta^0)]$$

Da interpolação entre  $\delta_{GN}$  e  $\delta_G$ , resulta:

$$\delta = (\mathbf{X}'\mathbf{X} + \lambda\mathbf{I})^{-1} \mathbf{X}'[\mathbf{Y} - \mathbf{f}(\theta^0)],$$

onde  $\lambda$  é conhecida como constante de Marquardt. O autor demonstra que:

$$\delta \rightarrow \delta_{GN} \text{ se } \lambda \rightarrow \text{zero}$$

$$\delta \rightarrow \delta_G \text{ se } \lambda \rightarrow \infty$$

logo o algoritmo de Marquardt é dado por:

$$\theta^1 = \theta^0 + (\mathbf{X}'\mathbf{X} + \lambda\mathbf{I})^{-1} \mathbf{X}'[\mathbf{Y} - \mathbf{f}(\theta^0)]$$

No processo de estimação, deve-se estabelecer um valor de  $\lambda$ . Maiores informações sobre a obtenção desta constante podem ser encontradas no SAS/ETS (1995).

### **3.2.3 Funções não-lineares de crescimento, derivadas parciais e elementos da matriz $X'X$ para as funções em estudo**

As funções em estudo serão utilizadas para determinar as curvas de crescimento peso-idade em bovinos. Em todas as funções,  $Y$  representa o peso corporal e  $t$  representa a idade em meses a partir do nascimento.

As derivadas parciais, necessárias à obtenção das matrizes  $X$  e  $X'X$ , foram obtidas através do programa Mathematica, versão 2.2 (Wolfram, 1993).

#### **3.2.3.1 Função de Brody**

A função de Brody ou Monomolecular foi estudada inicialmente por Robertson; Brody e von Bertalanffy, todos citados por Duarte (1975) para descrever o crescimento de bovinos.

A função de Brody é escrita da seguinte forma:

$$Y_t = A - B \exp(-Kt)$$

em que

$A$  = valor assintótico;

$B$  = constante de integração;

$K$  = taxa de maturidade;

$M$  = ponto de inflexão, sendo que  $M$  é fixo e igual a 1.

Logo, seus parâmetros são  $\theta_1 = A$ ;  $\theta_2 = B$ ;  $\theta_3 = K$  e sua variável independente é  $t$ .

As derivadas parciais para esta função são:

$$\frac{\partial Y}{\partial A} = 1$$

$$\frac{\partial Y}{\partial B} = -e^{-Kt}$$

$$\frac{\partial Y}{\partial K} = Bte^{-Kt}$$

Logo, a matriz  $F(\theta^0) = X$  é uma matriz  $n \times p$  de derivadas parciais, sendo  $n$  o número de pesagens (16, 17, 18, 19 ou 20, de acordo com o animal) e  $p$  o número de parâmetros da função. Então,

$$X = \begin{bmatrix} 1 & -e^{-K_0 t_1} & B_0 t_1 e^{-K_0 t_1} \\ 1 & -e^{-K_0 t_2} & B_0 t_2 e^{-K_0 t_2} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & -e^{-K_0 t_n} & B_0 t_n e^{-K_0 t_n} \end{bmatrix}_{n \times 3}$$

Neste caso, a matriz  $X'X$  é uma matriz (3x3) simétrica, a qual pode ser escrita da seguinte forma:

$$a_{11} = n$$

$$a_{12} = a_{21} = -\sum_{i=1}^n e^{-K_0 t_i}$$

$$a_{13} = a_{31} = B_0 \sum_{i=1}^n t_i e^{-K_0 t_i}$$

$$a_{22} = \sum_{i=1}^n e^{-2K_0 t_i}$$

$$a_{23} = a_{32} = -B_0 \sum_{i=1}^n t_i e^{-2K_0 t_i}$$

$$a_{33} = B_0^2 \sum_{i=1}^n t_i^2 e^{-2K_0 t_i}$$

### 3.2.3.2 Função de Gompertz

A função de Gompertz foi estudada por Gompertz, Winsor e Laird, citados por Duarte (1975) para descrever a taxa de mortalidade numa população. Seu emprego para descrever modelos sigmoidais de crescimento foi sugerido por Wright, citado por Duarte (1975).

A função de Gompertz é escrita da seguinte forma:

$$Y_t = A \exp(-B \exp(-Kt))$$

em que

A = valor assintótico;

B = constante de integração;

K = taxa de maturidade;

M = ponto de inflexão, sendo que  $M \rightarrow \infty$ .

Logo, seus parâmetros são  $\theta_1 = A$ ;  $\theta_2 = B$ ;  $\theta_3 = K$  e sua variável independente é t.

As derivadas parciais para esta função são:

$$\frac{\partial Y}{\partial A} = e^{-Be^{-Kt}}$$

$$\frac{\partial Y}{\partial B} = -Ae^{-Be^{-Kt}} e^{-Kt}$$

$$\frac{\partial Y}{\partial K} = ABte^{-Be^{-Kt}} e^{-Kt}$$

Logo, a matriz  $F(\theta^0) = X$  é uma matriz  $n \times p$  de derivadas parciais, sendo n o número de pesagens (16, 17, 18, 19 ou 20, de acordo com o animal) e p o número de parâmetros da função. Então,

$$X = \begin{bmatrix} e^{-B_0 e^{-K_0 t_1}} & -A_0 e^{-B_0 e^{-K_0 t_1}} e^{-K_0 t_1} & A_0 B_0 t_1 e^{-B_0 e^{-K_0 t_1}} e^{-K_0 t_1} \\ e^{-B_0 e^{-K_0 t_2}} & -A_0 e^{-B_0 e^{-K_0 t_2}} e^{-K_0 t_2} & A_0 B_0 t_2 e^{-B_0 e^{-K_0 t_2}} e^{-K_0 t_2} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ e^{-B_0 e^{-K_0 t_n}} & -A_0 e^{-B_0 e^{-K_0 t_n}} e^{-K_0 t_n} & A_0 B_0 t_n e^{-B_0 e^{-K_0 t_n}} e^{-K_0 t_n} \end{bmatrix}_{n \times 3}$$

Neste caso, a matriz  $X'X$  é uma matriz (3x3) simétrica, a qual pode ser escrita da seguinte forma:

$$a_{11} = \sum_{i=1}^n e^{-2B_0 e^{-K_0 t_i}}$$

$$a_{12} = a_{21} = -A_0 \sum_{i=1}^n e^{-2B_0 e^{-K_0 t_i}} e^{-K_0 t_i}$$

$$a_{13} = a_{31} = A_0 B_0 \sum_{i=1}^n t_i e^{-2B_0 e^{-K_0 t_i}} e^{-K_0 t_i}$$

$$a_{22} = A_0^2 \sum_{i=1}^n e^{-2B_0 e^{-K_0 t_i}} e^{-2K_0 t_i}$$

$$a_{23} = a_{32} = -A_0^2 B_0 \sum_{i=1}^n t_i e^{-2B_0 e^{-K_0 t_i}} e^{-2K_0 t_i}$$

$$a_{33} = A_0^2 B_0^2 \sum_{i=1}^n t_i^2 e^{-2B_0 e^{-K_0 t_i}} e^{-2K_0 t_i}$$

### 3.2.3.3 Função Logística

Conforme Hoffmann e Vieira (1998), a função logística foi indicada para o estudo descritivo do crescimento de populações humanas por Verhulst, que o denominou de “curva logística”. Muitos anos mais tarde, Pearl e Reed, sem conhecerem a contribuição de Verhulst, obtiveram a mesma curva, a qual utilizaram para descrever o crescimento da população dos Estados Unidos, de 1870 a 1910, com base em dados censitários.

Sua função é escrita da seguinte forma:

$$Y_t = A(1 + B \exp(-Kt))^{-1}$$

em que

A = valor assintótico;

B = constante de integração;

K = taxa de maturidade;

M = ponto de inflexão, sendo que  $M = -1$ .

Logo, seus parâmetros são  $\theta_1 = A$ ;  $\theta_2 = B$ ;  $\theta_3 = K$  e sua variável independente é t.

As derivadas parciais para esta função são:

$$\frac{\partial Y}{\partial A} = 1/(1 + B e^{-Kt})^2$$

$$\frac{\partial Y}{\partial B} = -A e^{-Kt} / (1 + B e^{-Kt})^2$$

$$\frac{\partial Y}{\partial K} = A B t e^{-Kt} / (1 + B e^{-Kt})^2$$

Logo, a matriz  $F(\theta^0) = X$  é uma matriz  $n \times p$  de derivadas parciais, sendo n o número de pesagens (16, 17, 18, 19 ou 20, de acordo com o animal) e p o número de parâmetros da função. Então,

$$X = \begin{bmatrix} 1/(1 + B_0 e^{-K_0 t_1})^2 & -A_0 e^{-K_0 t_1} / (1 + B_0 e^{-K_0 t_1})^2 & A_0 B_0 t_1 e^{-K_0 t_1} / (1 + B_0 e^{-K_0 t_1})^2 \\ 1/(1 + B_0 e^{-K_0 t_2})^2 & -A_0 e^{-K_0 t_2} / (1 + B_0 e^{-K_0 t_2})^2 & A_0 B_0 t_2 e^{-K_0 t_2} / (1 + B_0 e^{-K_0 t_2})^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ 1/(1 + B_0 e^{-K_0 t_n})^2 & -A_0 e^{-K_0 t_n} / (1 + B_0 e^{-K_0 t_n})^2 & A_0 B_0 t_n e^{-K_0 t_n} / (1 + B_0 e^{-K_0 t_n})^2 \end{bmatrix}_{n \times 3}$$

Neste caso, a matriz  $X'X$  é uma matriz (3x3) simétrica, a qual pode ser escrita da seguinte forma:

$$a_{11} = \sum_{i=1}^n (1 + B_0 e^{-K_0 t_i})^{-2}$$

$$a_{12} = a_{21} = -A_0 \sum_{i=1}^n e^{-K_0 t_i} (1 + B_0 e^{-K_0 t_i})^{-3}$$

$$a_{13} = a_{31} = A_0 B_0 \sum_{i=1}^n t_i e^{-K_0 t_i} (1 + B_0 e^{-K_0 t_i})^{-3}$$

$$a_{22} = A_0^2 \sum_{i=1}^n e^{-2K_0 t_i} (1 + B_0 e^{-K_0 t_i})^{-4}$$

$$a_{23} = a_{32} = -A_0^2 B_0 \sum_{i=1}^n t_i e^{-2K_0 t_i} (1 + B_0 e^{-K_0 t_i})^{-4}$$

$$a_{33} = A_0^2 B_0^2 \sum_{i=1}^n t_i^2 e^{-2K_0 t_i} (1 + B_0 e^{-K_0 t_i})^{-4}$$

### 3.2.3.4 Função de Richards

A função de Richards (1959), citada por Elias (1998), apresenta o parâmetro “M”, que é relativo à forma, pois determina ponto de inflexão variável. Dependendo do valor de “M”, a função de Richards pode ter as formas das outras funções de ponto de inflexão fixo.

Sua função é escrita da seguinte forma:

$$Y_t = A(1 - B \exp(-Kt))^M$$

em que

A = valor assintótico;

B = constante de integração;

K = taxa de maturidade;

M = ponto de inflexão, sendo que M é variável.

Logo, seus parâmetros são  $\theta_1 = A$ ;  $\theta_2 = B$ ;  $\theta_3 = K$ ;  $\theta_4 = M$  e sua variável independente é t.

As derivadas parciais para esta função são:

$$\frac{\partial Y}{\partial A} = (1 - B e^{-Kt})^M$$

$$\frac{\partial Y}{\partial B} = -AM(1 - B e^{-Kt})^{M-1} e^{-Kt}$$

$$\frac{\partial Y}{\partial K} = AMBt(1 - B e^{-Kt})^{M-1} e^{-Kt}$$

$$\frac{\partial Y}{\partial M} = A[\ln(1 - B e^{-Kt})](1 - B e^{-Kt})^M$$

Logo, a matriz  $F(\theta^0) = X$  é uma matriz  $n \times p$  de derivadas parciais, sendo  $n$  o número de pesagens (16, 17, 18, 19 ou 20, de acordo com o animal) e  $p$  o número de parâmetros da função. Então,

$$X = \begin{bmatrix} (1 - B_0 e^{-K_0 t_1})^{M_0} & -A_0 M_0 (1 - B_0 e^{-K_0 t_1})^{M_0-1} e^{-K_0 t_1} & A_0 M_0 B_0 t_1 (1 - B_0 e^{-K_0 t_1})^{M_0-1} e^{-K_0 t_1} & A_0 [\ln(1 - B_0 e^{-K_0 t_1})] (1 - B_0 e^{-K_0 t_1})^{M_0} \\ (1 - B_0 e^{-K_0 t_2})^{M_0} & -A_0 M_0 (1 - B_0 e^{-K_0 t_2})^{M_0-1} e^{-K_0 t_2} & A_0 M_0 B_0 t_2 (1 - B_0 e^{-K_0 t_2})^{M_0-1} e^{-K_0 t_2} & A_0 [\ln(1 - B_0 e^{-K_0 t_2})] (1 - B_0 e^{-K_0 t_2})^{M_0} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ (1 - B_0 e^{-K_0 t_n})^{M_0} & -A_0 M_0 (1 - B_0 e^{-K_0 t_n})^{M_0-1} e^{-K_0 t_n} & A_0 M_0 B_0 t_n (1 - B_0 e^{-K_0 t_n})^{M_0-1} e^{-K_0 t_n} & A_0 [\ln(1 - B_0 e^{-K_0 t_n})] (1 - B_0 e^{-K_0 t_n})^{M_0} \end{bmatrix}$$

Neste caso, a matriz  $X'X$  é uma matriz (4x4) simétrica, a qual pode ser escrita da seguinte forma:

$$a_{11} = \sum_{i=1}^n (1 - B_0 e^{-K_0 t_i})^{2M_0}$$

$$a_{12} = a_{21} = -A_0 M_0 \sum_{i=1}^n e^{-K_0 t_i} (1 - B_0 e^{-K_0 t_i})^{2M_0-1}$$

$$a_{13} = a_{31} = A_0 B_0 M_0 \sum_{i=1}^n t_i e^{-K_0 t_i} (1 - B_0 e^{-K_0 t_i})^{2M_0-1}$$

$$a_{14} = a_{41} = A_0 \sum_{i=1}^n (1 - B_0 e^{-K_0 t_i})^{2M_0} \ln(1 - B_0 e^{-K_0 t_i})$$

$$a_{22} = A_0^2 M_0^2 \sum_{i=1}^n e^{-2K_0 t_i} (1 - B_0 e^{-K_0 t_i})^{2M_0 - 2}$$

$$a_{23} = a_{32} = -A_0^2 B_0 M_0^2 \sum_{i=1}^n t_i e^{-2K_0 t_i} (1 - B_0 e^{-K_0 t_i})^{2M_0 - 2}$$

$$a_{24} = a_{42} = -A_0^2 M_0 \sum_{i=1}^n e^{-K_0 t_i} (1 - B_0 e^{-K_0 t_i})^{2M_0 - 1} \ln(1 - B_0 e^{-K_0 t_i})$$

$$a_{33} = A_0^2 B_0^2 M_0^2 \sum_{i=1}^n t_i^2 e^{-2K_0 t_i} (1 - B_0 e^{-K_0 t_i})^{2M_0 - 2}$$

$$a_{34} = a_{43} = A_0^2 B_0 M_0 \sum_{i=1}^n t_i e^{-K_0 t_i} (1 - B_0 e^{-K_0 t_i})^{2M_0 - 1} \ln(1 - B_0 e^{-K_0 t_i})$$

$$a_{44} = A_0^2 \sum_{i=1}^n (1 - B_0 e^{-K_0 t_i})^{2M_0} \ln(1 - B_0 e^{-K_0 t_i})^2$$

### 3.2.3.5 Função de von Bertalanffy

A forma da função de von Bertalanffy (1957), citada por Elias (1998), é similar à de Gompertz, e foi desenvolvida com base na suposição de que o crescimento de um organismo é a diferença entre taxas de anabolismo e catabolismo de seus tecidos.

Segundo Duarte(1975), a relação entre tamanho corporal e taxa metabólica capacitou von Bertalanffy a modificar a forma geral de sua equação, tomando-a apropriada para algumas espécies ou tipos de medidas, pela mudança dos valores  $m$  e  $y$ . De acordo com o mesmo autor, o modelo de von Bertalanffy tem, talvez, o mais rigoroso suporte nas teorias biológicas, o que lhe capacita resistir melhor à interpretação de seus parâmetros.

Sua função é escrita da seguinte forma:

$$Y_t = A(1 - B \exp(-Kt))^3$$

em que

A = valor assintótico;

B = constante de integração;

K = taxa de maturidade;

M = ponto de inflexão, sendo que  $M = 3$ .

Logo, seus parâmetros são  $\theta_1 = A$ ;  $\theta_2 = B$ ;  $\theta_3 = K$  e sua variável independente é t.

As derivadas parciais para esta função são:

$$\frac{\partial Y}{\partial A} = (1 - B e^{-Kt})^3$$

$$\frac{\partial Y}{\partial B} = -3A(1 - B e^{-Kt})^2 e^{-Kt}$$

$$\frac{\partial Y}{\partial K} = 3ABt(1 - B e^{-Kt})^2 e^{-Kt}$$

Logo, a matriz  $\mathbf{F}(\theta^0) = \mathbf{X}$  é uma matriz  $n \times p$  de derivadas parciais, sendo n o número de pesagens (16, 17, 18, 19 ou 20, de acordo com o animal) e p o número de parâmetros da função. Então,

$$\mathbf{X} = \begin{bmatrix} (1 - B_0 e^{-K_0 t_1})^3 & -3A_0(1 - B_0 e^{-K_0 t_1})^2 e^{-K_0 t_1} & 3A_0 B_0 t_1 (1 - B_0 e^{-K_0 t_1})^2 e^{-K_0 t_1} \\ (1 - B_0 e^{-K_0 t_2})^3 & -3A_0(1 - B_0 e^{-K_0 t_2})^2 e^{-K_0 t_2} & 3A_0 B_0 t_2 (1 - B_0 e^{-K_0 t_2})^2 e^{-K_0 t_2} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ (1 - B_0 e^{-K_0 t_n})^3 & -3A_0(1 - B_0 e^{-K_0 t_n})^2 e^{-K_0 t_n} & 3A_0 B_0 t_n (1 - B_0 e^{-K_0 t_n})^2 e^{-K_0 t_n} \end{bmatrix}_{n \times 3}$$

Neste caso, a matriz  $\mathbf{X}'\mathbf{X}$  é uma matriz (3x3) simétrica, a qual pode ser escrita da seguinte forma:

$$a_{11} = \sum_{i=1}^n (1 - B_0 e^{-K_0 t_i})^6$$

$$a_{12} = a_{21} = -3A_0 \sum_{i=1}^n e^{-K_0 t_i} (1 - B_0 e^{-K_0 t_i})^5$$

$$a_{13} = a_{31} = 3A_0B_0 \sum_{i=1}^n t_i e^{-K_0 t_i} (1 - B_0 e^{-K_0 t_i})^5$$

$$a_{22} = 9A_0^2 \sum_{i=1}^n e^{-2K_0 t_i} (1 - B_0 e^{-K_0 t_i})^4$$

$$a_{23} = a_{32} = -9A_0^2 B_0 \sum_{i=1}^n t_i e^{-2K_0 t_i} (1 - B_0 e^{-K_0 t_i})^4$$

$$a_{33} = 9A_0^2 B_0^2 \sum_{i=1}^n t_i^2 e^{-2K_0 t_i} (1 - B_0 e^{-K_0 t_i})^4$$

### 3.2.4 Ajuste dos modelos não-lineares

Foram obtidas estimativas dos parâmetros médias para as curvas individuais e estimativas dos parâmetros para uma curva média nos quatro modelos não-lineares: não ponderado, ponderado pelo inverso da variância dos pesos, com e sem estrutura de erros autorregressivos de 1ª ordem AR(1) e 2ª ordem AR(2).

As estimativas encontradas através dos processos iterativos foram comparadas com os estabelecidos como valores médios da raça, fornecidos pela Associação Nacional de Criadores-Herd Book Collares e Associação Brasileira de Criadores de Hereford e Braford (1998-2000), nos limites de peso entre 831,78kg-1082,00kg.

Para o ajuste sem ponderação e sem autocorrelação dos resíduos, utilizou-se o PROC MODEL (SAS/ETS, 1995).

Para executar a ponderação, foi calculado, para cada intervalo de tempo,  $T_1$  (nascimento) até  $T_{20}$  (idade entre 2 a 2,5 anos), a variância dos pesos ao longo da curva. O inverso dessas variâncias foi utilizado, no caso dos modelos não-lineares ponderados, com o objetivo de se considerar a heterogeneidade. Para este ajuste, utilizou-se a opção “Weight” do PROC MODEL (SAS/ETS, 1995).

Apenas participaram do ajuste os animais que apresentaram autocorrelação de primeira ou segunda ordem, ou seja, AR(1) ou AR(2); os demais animais foram descartados. Neste ajuste também utilizou-se o PROC MODEL através da macro %AR(y,p) (SAS/ETS, 1995).

As estimativas iniciais, necessárias à obtenção das estimativas dos parâmetros através do processo iterativo, foram retiradas da literatura (Tedeschi, 1996 e Elias, 1998).

O critério de convergência utilizado foi de acordo com o estabelecido pelo PROC MODEL, o qual utiliza cinco critérios de convergência: R, S, PPC, RPC e OBJECT (SAS/ETS, 1995). Não foram considerados nos ajustes os animais que convergiram para valores muito altos (acima de 1190kg) ou muito baixos (abaixo de 450kg), baseados nos limites de pesos estabelecidos pela raça, para animais com idades entre 1,5-4,5 anos (Associação Nacional de Criadores-Herd Book Collares e Associação Brasileira de Criadores de Hereford e Braford (1998-2000)).

### 3.2.5 Comparação entre os modelos

Os modelos foram comparados quanto ao percentual de convergência, quadrado médio do resíduo (QMR), coeficiente de determinação ajustado ( $R^2_{Aj.}$ ), erro de predição médio (EPM) e teste t de Student.

O coeficiente de determinação  $R^2$  ajustado para o número de parâmetros da regressão (SAS/ETS, 1995) é dado por:

$$R^2 = 1 - \frac{SQR}{SQT}$$

$$R^2_{\text{Ajustado}} = 1 - \left[ \frac{(n-i)(1-R^2)}{(n-p)} \right],$$

onde:

SQR- Soma de quadrado do resíduo;

SQT – Soma de quadrado total;

n – número de observações utilizadas para ajustar a curva;

p – número de parâmetros na função, incluindo o intercepto.

i – ajuste de intercepto: 1 se houver intercepto e 0 se não houver intercepto na função.

A estimativa do EPM é obtida calculando-se a média de todos os erros de predição (EP), a partir de cada observação, como um desvio entre o peso observado (po) e o peso estimado (pe), dividido pelo peso observado e multiplicado por 100:

$$EP = 100 \left( \frac{po - pe}{po} \right)$$

Este valor leva um sinal, designando se a função subestimou (+) ou superestimou (-) o peso observado.

O teste “t” de Student para julgar a hipótese  $\theta = 0$  contra  $\theta \neq 0$  para um modelo não-linear, de acordo com Ratkowsky (1983), é um critério útil para avaliar o comportamento do modelo. É dado por:

$$t = \frac{\hat{\theta} - \theta}{s(\hat{\theta})},$$

onde o valor da estatística “t” é a razão entre a estimativa do parâmetro ( $\theta$ ) e seu erro padrão, obtido a partir da raiz quadrada da variância assintótica dos parâmetros.

## 4 RESULTADOS E DISCUSSÃO

### 4.1 Considerações iniciais

Na Figura 1 estão representados os valores dos pesos observados e suas variâncias em função da idade, em dias dos 160 animais em estudo

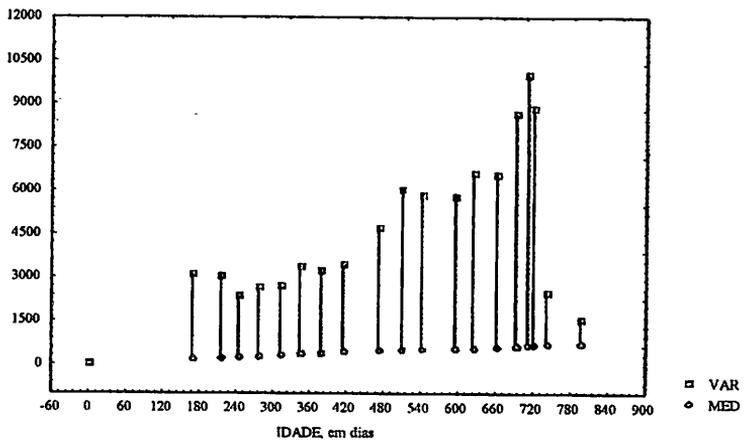


FIGURA-1: Média e variância dos pesos observados, dentro de cada período, dos machos Hereford.

Fica evidente na Figura 1 que a ênfase da discussão, dada a escala utilizada, está centrada na variabilidade dos dados. Assim, o gráfico não se presta para visualizar o acréscimo observado no ganho médio de peso dos animais.

Na Tabela 2 constam os valores dos pesos médios dos animais e suas variâncias nas diversas idades. Observa-se que a relação entre a maior e a menor variância foi de 718,72, ou seja, a menor variância é 718,72 vezes menor que a

maior variância. Esta relação cai bastante na segunda idade observada, provavelmente devido ao grande intervalo entre estas duas pesagens (168 dias).

**TABELA 2 - Valores médios dos pesos observados, respectivas variâncias no decorrer do tempo e ponderação.**

Pesagens	Idade média (dias)	Número de Animais (n)	Pesos médios (Kg)	Variância dos pesos (Kg <sup>2</sup> )	“Regressão Ponderada”
P <sub>1</sub>	0	160	35,00	13,95	718,72
P <sub>2</sub>	168	160	189,97	3105,72	3,23
P <sub>3</sub>	214	160	213,76	3037,99	3,30
P <sub>4</sub>	243	160	243,64	2383,03	4,20
P <sub>5</sub>	275	160	281,12	2657,60	3,77
P <sub>6</sub>	311	160	324,39	2704,35	3,71
P <sub>7</sub>	344	160	363,93	3372,86	2,97
P <sub>8</sub>	377	160	404,22	3238,55	3,10
P <sub>9</sub>	414	160	443,92	3468,11	2,89
P <sub>10</sub>	472	160	489,51	4722,59	2,12
P <sub>11</sub>	508	160	518,54	6041,73	1,66
P <sub>12</sub>	542	160	541,34	5853,09	1,71
P <sub>13</sub>	594	160	559,21	5788,24	1,73
P <sub>14</sub>	624	160	583,81	6578,37	1,52
P <sub>15</sub>	660	160	611,76	6542,95	1,53
P <sub>16</sub>	692	160	639,24	8667,74	1,16
P <sub>17</sub>	710	113	674,59	10026,15	1,00
P <sub>18</sub>	720	83	693,12	8833,11	1,14
P <sub>19</sub>	742	59	718,15	2493,03	4,02
P <sub>20</sub>	795	8	727,12	1546,70	6,48

Pode-se observar (Figura 1) que à medida que a idade aumentou, houve um incremento nas variâncias dos pesos corporais. Estes resultados estão de acordo com Pasternak e Shalev (1994), os quais relataram que a variância dos pesos corporais aumenta com a idade, ocorrendo a heterocedasticidade, o que os autores denominam “distúrbios de regressão”.

A heterocedasticidade também foi citada por Elias (1998), que observou um aumento das variâncias ao longo do tempo para as raças Gir, Guzerá e

Nelore. A mesma autora descreve que o modelo básico de regressão não-linear deve atender às seguintes suposições: erros com média zero; erros não correlacionados; homogeneidade de variâncias e erros com distribuição normal. No caso de dados longitudinais, as suposições de erros não correlacionados e homogeneidade de variâncias não são realísticas.

## **4.2 Avaliadores**

### **4.2.1 Percentual de Convergência**

Na Tabela 3 estão apresentados os percentuais de convergência, dos ajustes individuais para as cinco funções estudadas, considerando os modelos com e sem ponderação e com e sem estrutura de erros autorregressivos. Por esta tabela, percebe-se que de modo geral, para todas as configurações de modelos estudadas, as funções Logística, Gompertz e von Bertalanffy, respectivamente, apresentaram maiores percentuais de convergência. Resultado este que está de acordo com Oliveira, Lôbo e Pereira (2000), os quais, em trabalho com curvas de crescimento para fêmeas Guzerá, obtiveram maiores percentuais de convergência para as funções Logística, Gompertz e von Bertalanffy, e menores percentuais de convergência para as funções de Brody e Richards. Observou-se ainda uma certa ligeira tendência no aumento do percentual de convergência quando se utilizou a ponderação. Este resultado concorda com Elias(1998), que observou um aumento da convergência nas funções com a utilização da ponderação pelo inverso da variância em todas as funções avaliadas.

As funções de Brody e Richards mostraram baixos percentuais de convergência, indicando que possivelmente elas não sejam adequadas ao ajuste destes dados. Em estudo com aves de postura, Braccini Neto et al. (1996) observaram que a função de Richards não apresentou convergência das estimativas iniciais, sendo excluída da análise de comparação. Silva, Aquino e

Oliveira (2001) comentam que a função de Richards, mesmo apresentando o melhor ajuste para os dados, não foi selecionada para avaliar a influência de fatores genéticos e de meio sobre os parâmetros de crescimento, devido a um grande número de curvas que não conseguiram atingir a convergência no ajuste individual. De acordo com Richards (1959), citado por Tedeschi (1996), esta dificuldade de convergência se deve à falta de dados em períodos críticos da curva que estão ao redor do ponto de inflexão, e também à pequena longevidade dos dados de peso-idade dos animais, ou seja, animais jovens para convergência de peso adulto. Outros autores, tais como Brown, Fitzhugh Jr. e Cartwright (1976), Fitzhugh Jr. (1976), Denise e Brinks (1985) e Perotto Cue e Lee (1992), alertam sobre a dificuldade de convergência da função de Richards.

O problema ocorrido na função de Brody foi que muitos valores convergiram, porém para valores absurdos do parâmetro "A", resultado este semelhante ao observado por Ludwig, Silva e Oliveira (1981), os quais também observaram convergência desta função para valores fora da realidade.

TABELA 3- Percentual de convergência para as cinco funções, nos diferentes modelos ajustados.

Funções	Modelos não ponderados			Modelos ponderados		
	s/AR	c/AR(1)	c/AR(2)	s/AR(1)	c/AR(1)	c/AR(2)
Brody	23,13	8,12	1,25	6,87	1,25	1,25
Gompertz	92,50	31,87	2,50	95,00	23,75	6,25
Logística	100,00	20,00	10,00	100,00	12,50	13,75
Richards	46,25	13,12	8,12	41,88	21,87	6,25
von Bertalanffy	79,38	38,75	6,87	87,50	30,00	12,50

Nos modelos com AR(1) e AR(2), um grande número de animais não obtiveram estacionariedade, sendo assim descartados do ajuste, conduzindo a baixos percentuais de convergência. Neste ajuste, pode-se observar que as funções de von Bertalanffy e Gompertz apresentaram maior percentual de convergência, enquanto a função Logística reduziu drasticamente seu percentual

de convergência, sendo menor do que o percentual observado para a função de Richards. A função de Brody manteve os baixos percentuais de convergência já observados nos ajustes sem a introdução da estrutura AR. É provável que este comportamento esteja relacionado com a função ajustada, pois cada função apresenta características próprias, que conferem melhor ou pior ajuste em regiões específicas da curva. A Tabela 4 apresenta o percentual de animais que ajustaram uma estrutura de erros autorregressivos de primeira ou segunda ordem.

**TABELA 4-** Percentuais de animais que apresentaram ajuste com estrutura de erros autorregressivos, para os diferentes modelos em todas as funções estudadas.

Funções	Modelos não ponderados	Modelos ponderados
Brody	9,37	2,50
Gompertz	34,37	30,00
Logística	30,00	26,25
Richards	21,24	28,12
von Bertalanffy	45,62	42,50

#### 4.2.2 Quadrado Médio do Resíduo (QMR)

Na Tabela 5 estão apresentados os QMR's para todos os modelos, de acordo com os ajustes das curvas médias. As funções de Richards e von Bertalanffy para os modelos não ponderados sem estrutura de erros autorregressivos apresentaram um menor QMR, seguidas pela função de Brody. Observa-se que a utilização da estrutura de erros autorregressivos promoveu uma diminuição no QMR.

Para os modelos ponderados sem estrutura de erros autorregressivos, as funções de Richards e von Bertalanffy novamente mostraram um menor QMR, seguidas pela função de Gompertz. Semelhantemente ao observado para os

modelos não ponderados, ao se utilizar estrutura de erros autorregressivos, o valor do QMR diminuiu.

TABELA 5- Quadrado Médio do Resíduo (QMR), para os diferentes modelos, no ajuste das curvas médias.

Funções	Modelos não ponderados			Modelos ponderado		
	s/AR	c/AR(1)	c/AR(2)	s/AR(1)	c/AR(1)	c/AR(2)
Brody	282.19	---	125.81	0.8030	0.0514	---
Gompertz	317.75	186.84	---	0.0991	---	0.0408
Logística	547.22	---	---	0.4191	---	---
Richards	257.79	---	---	0.0596	0.0405	---
von Bertalanffy	263,68	157,43	---	0,0611	0,0386	---

A Tabela 6 apresenta as médias dos QMR's para todos os modelos estudados, de acordo com os ajustes das curvas individuais. As funções de von Bertalanffy e Gompertz apresentaram um menor QMR para o modelo não ponderado sem estrutura de erros autorregressivos. Este resultado concorda com o obtido por Tedeschi (1996); e no que diz respeito à função de von Bertalanffy, está de acordo com Oliveira, Lôbo e Pereira (2000).

Com a utilização da estrutura de erros autorregressivos, ocorre uma diminuição no QMR, conforme observado no ajuste das curvas médias; isto se deve, provavelmente, à inclusão de mais um parâmetro no processo de estimação. Mendes, Aquino e Muniz (2001), em estudo com novilhas Nelore, verificaram os menores valores para soma de quadrados dos resíduos (SQR), para as funções de Brody e Richards. Estes resultados diferem do encontrado no presente trabalho, no qual as funções de menor QMR foram as de Gompertz e von Bertalanffy.

No modelo ponderado sem AR, as funções de menor QMR foram as de Richards, von Bertalanffy e Gompertz, resultado este que concorda com Elias (1998) no que se refere às funções de Richards e von Bertalanffy. Na presença

da estrutura de erros autorregressivos, para o modelo ponderado, novamente são destacadas as funções de Richards, von Bertalanffy e Gompertz.

**TABELA 6-** Médias do Quadrado Médio do Resíduo (QMR) para os diferentes modelos, no ajuste das curvas individuais.

Funções	Modelos não ponderados			Modelos ponderado		
	s/AR	c/AR(1)	c/AR(2)	s/AR(1)	c/AR(1)	c/AR(2)
Brody	891.62	733.88	405.58	0.3416	0.1366	0.0724
Gompertz	750.16	588.06	457.70	0.2006	0.1210	0.0677
Logística	960.58	739.07	467.95	0.4066	0.2356	0.1081
Richards	797.48	643.42	268.95	0.1512	0.1320	0.0536
von Bertalanffy	724.82	530.82	382.79	0.1679	0.1120	0.0703

#### 4.2.3 Coeficiente de Determinação Ajustado ( $R^2Aj$ )

Conforme pode ser observado nas Tabelas 7 e 8, para o ajuste das curvas médias e individuais, respectivamente, o coeficiente de determinação ajustado, tanto para os modelos não ponderados quanto para os ponderados, mostrou um bom ajuste para todas as funções. Entretanto, os modelos ponderados mostraram uma tendência de maiores valores de  $R^2Aj$ , do que os modelos não ponderados, assim como a utilização da estrutura de erros autorregressivos também tendeu a um melhor ajuste nos dois casos.

**TABELA 7-** Coeficiente de determinação Ajustado ( $R^2Aj$ ), para os diferentes modelos, no ajuste das curvas médias.

Funções	Modelos não ponderados			Modelos ponderado		
	s/AR(1)	c/AR(1)	c/AR(2)	s/AR(1)	c/AR(1)	c/AR(2)
Brody	0,9929	---	0,9968	0,9985	0,9991	---
Gompertz	0,9920	0,9953	---	0,9982	---	0,9993
Logística	0,9862	---	---	0,9924	---	---
Richards	0,9945	---	---	0,9989	0,9993	---
von Bertalanffy	0,9934	0,9960	---	0,9989	0,9993	---

TABELA 8- Médias dos coeficiente de determinação Ajustados ( $R^2_{Aj.}$ ), para os diferentes modelos, no ajuste das curvas individuais.

Funções	Modelos não ponderados			Modelos ponderado		
	s/AR(1)	c/AR(1)	c/AR(2)	s/AR(1)	c/AR(1)	c/AR(2)
Brody	0.9735	0.9771	0.9880	0.9939	0.9948	0.9982
Gompertz	0.9774	0.9820	0.9868	0.9950	0.9970	0.9979
Logística	0.9719	0.9766	0.9872	0.9893	0.9945	0.9971
Richards	0.9756	0.9811	0.9910	0.9958	0.9970	0.9983
von Bertalanffy	0.9778	0.9832	0.9895	0.9956	0.9970	0.9982

Elias (1998), em análise de curvas de crescimento para vacas zebuínas, encontrou coeficiente de determinação de aproximadamente 0,999 para todas as funções, tanto para os ajustes nos modelos não ponderados quanto nos modelos ponderados. O mesmo foi observado por Mendes, Aquino e Muniz (2001) em estudo com novilhas Nelore, os quais procederam ao ajuste não ponderado com estrutura de erros autorregressivos de primeira ordem, e o coeficiente de determinação ajustado para todas as funções foi de aproximadamente 0,99. Ludwig, Silva e Oliveira (1981), em estudo com gado Nelore, concluíram que todas as funções se ajustaram bem aos dados de peso-idade, apresentando coeficientes de determinação próximos de 0,99. Silva, Aquino e Oliveira (2001), em estudo de curvas de crescimento com gado Nelore, utilizando estrutura de erros autorregressivos, encontraram coeficientes de determinação ajustados, próximos de 0,98 e 0,99, para todas as funções estudadas.

Em última instância, nas condições do presente trabalho, este avaliador não é um bom parâmetro para escolha da melhor função, já que todas as funções apresentaram valores altos. Oliveira, Lôbo e Pereira (2000) concluíram que as diferenças entre os coeficientes de determinação foram irrisórias e sem significado prático.

#### 4.2.4 Teste t de Student

As Tabelas 9 e 10 apresentam a estatística “t” para o teste sobre os valores paramétricos de “A” e “K” das funções estudadas nas diversas configurações. A Tabela 9 refere-se ao ajuste das curvas médias e a Tabela 10 refere-se ao ajuste das curvas individuais.

TABELA 9 - Teste t de Student, para os valores paramétricos de “A” e “K” das funções estudadas, para os modelos não ponderados e ponderados, no ajuste das curvas médias.

Funções	sem AR		com AR(1)		com AR(2)	
	A	K	A	K	A	K
<b>Modelos não ponderados</b>						
Brody	2.60	2.19	2.96	2.54	2.96	2.54
Gompertz	18.05	10.58	13.20	9.13	---	---
Logística	22.95	11.29	---	---	---	---
Richards	4.01	2.02	---	---	---	---
von Bertalanffy	14.73	9.40	13.83	8.41	---	---
<b>Modelos ponderados</b>						
Brody	2.44	2.25	2.05	1.74	---	---
Gompertz	42.32	33.17	9.30	13.04	9.30	13.04
Logística	37.28	24.83	---	---	---	---
Richards	6.79	3.26	5.61	2.45	---	---
von Bertalanffy	34.97	29.14	16.31	12.93	---	---

Através dos dados constantes na Tabela 9, verificou-se, para os modelos não ponderados sem estrutura de erros autorregressivos, que as funções Logística e de Gompertz apresentaram os valores mais altos da estatística “t”, tanto para o parâmetro “A” quanto para o parâmetro “K”, seguidas da função de von Bertalanffy. Este resultado está de acordo com o encontrado por Elias (1998), para a qual as duas funções que apresentaram os maiores valores da estatística “t” para os modelos não ponderados foram as funções Logística e de Gompertz. Já nos modelos não ponderados com estrutura de erros autorregressivos, os melhores ajustes foram para as funções de von Bertalanffy e Gompertz.

No caso dos modelos ponderados (Tabela 9), sem estrutura de erros autorregressivos, as funções que mostraram melhor ajuste foram as de Gompertz e Logística, seguidas pela função de von Bertalanffy. Este resultado concorda parcialmente com Elias (1998), que em estudo com raças zebuínas encontrou os mais altos valores da estatística “t” para os modelos ponderados sem estrutura de erros autorregressivos, para as funções de Brody e von Bertalanffy. Quando foram utilizados erros autorregressivos, a melhor função foi a de von Bertalanffy, seguida pela função de Gompertz, de maneira semelhante ao ocorrido no modelo não ponderado com erros autorregressivos.

TABELA 10 - Teste t de Student, para os valores paramétricos de “A” e “K” das funções estudadas, para os modelos não ponderados e ponderados, no ajuste das curvas individuais.

Funções	sem AR		com AR(1)		com AR(2)	
	A	K	A	K	A	K
<b>Modelos não ponderados</b>						
Brody	6.64	3.90	3.87	2.49	5.67	3.80
Gompertz	14.88	7.37	9.24	5.10	14.65	6.91
Logística	20.51	8.66	8.73	5.20	10.52	7.54
Richards	5.13	1.73	3.22	1.21	2.81	1.31
von Bertalanffy	12.31	6.41	7.57	4.64	13.92	7.02
<b>Modelos ponderados</b>						
Brody	7.97	5.46	3.05	2.09	6.52	4.66
Gompertz	24.43	20.61	13.05	11.96	19.73	17.80
Logística	28.05	24.19	13.03	11.89	8.85	14.82
Richards	6.35	2.40	3.57	1.43	2.77	1.35
von Bertalanffy	19.44	16.00	11.17	9.42	13.85	12.00

A estatística “t” para o teste sobre os valores paramétricos de “A” e “K” das funções estudadas, referentes aos ajustes das curvas individuais (Tabela 10), mostra que para os modelos não ponderados sem AR, o valor mais alto da estatística “t”, tanto para o parâmetro “A” quanto para o parâmetro “K”, foi na função Logística, seguida pelas funções de Gompertz e von Bertalanffy. Isto está de acordo com o ajuste das curvas médias. O mesmo comportamento ocorreu

quando utilizou-se AR(1). No caso do ajuste com AR(2), a melhor função foi a de Gompertz, seguida pela função de von Bertalanffy.

Resultados semelhantes foram encontrados para os modelos ponderados com e sem estrutura de erros autorregressivos (Tabela 10), os quais estão coerentes com o que vem sendo observado em relação aos percentuais de convergência e às estimativas dos parâmetros.

Cabe ressaltar que quando se refere a valores altos da estatística “t”, implica que o teste foi significativo. Desta forma, para as funções de Gompertz, Logística e von Bertalanffy, os valores desta estatística foram sempre significativos, ao contrário das funções de Brody e Richards.

Segundo Ratkowsky (1983), um alto valor da estatística “t” pode indicar que a estimativa do parâmetro foi bem determinada pelo modelo, e que a magnitude da estatística “t” pode ser um bom indicador do comportamento não-linear dos dados analisados.

#### **4.2.5 Erro de Predição Médio (EPM)**

Os valores apresentados nas Tabelas 11 e 12 referem-se ao erro de predição médio para os ajustes das curvas médias e individuais, respectivamente. Com base no erro de predição médio apresentado, para o modelo não ponderado sem estrutura de erros autorregressivos (Tabela 11), a função de Richards apresentou o melhor ajuste, resultado que concorda com Elias (1998). As funções Logística, Gompertz e von Bertalanffy superestimaram os pesos observados, enquanto a função de Brody subestimou.

Quando utilizou-se estrutura de erros autorregressivos (Tabela 11), todas as funções superestimaram o valor observado, sendo que a função de von Bertalanffy apresentou o melhor ajuste.

Nos modelos ponderados sem estrutura de erros autorregressivos, a melhor função foi a de Gompertz. Este resultado discorda do encontrado por

Elias(1998), para qual as funções que apresentaram menores EPM's foram as de Brody e Richards. As funções de von Bertalanffy, Richards e Brody superestimaram o valor observado, enquanto a função Logística subestimou. Já quando foram utilizados erros autorregressivos, todas as funções superestimaram os valores observados, conforme observado para os modelos não ponderados. Em estudo de crescimento de gado de corte, sem estrutura de erros autorregressivos e sem ponderação Goonewardene, Berg e Hardin (1981) constataram que em relação ao erro de predição médio, todas as funções, em média, superestimaram os pesos observados.

TABELA 11 - Erro de Predição Médio (EPM), para os diferentes modelos, no ajuste das curvas médias.

Função	Modelos não ponderados			Modelos ponderados		
	s/AR	c/AR(1)	c/AR(2)	S/AR	c/AR(1)	c/AR(2)
Brody	1,3310	---	-0,7794	-0,6306	-0,0392	---
Gompertz	-3,0029	-1,6899	---	0,0652	---	-0,1999
Logística	-6,7947	---	---	1,0429	---	---
Richards	0,2477	---	---	-0,3628	-0,2258	---
von Bertalanffy	-1,3468	-0,6021	----	-0,2263	-0,2265	---

No ajuste das curvas individuais, para os modelos não ponderados sem estrutura de erros autorregressivos (Tabela 12), as funções de Brody e Richards subestimaram o valor observado, enquanto as funções de von Bertalanffy, Gompertz e Logística superestimaram, concordando com o ajuste médio, no qual a função de Richards apresentou a menor média para o erro de predição médio, seguida da função de von Bertalanffy. Estes resultados, no que diz respeito à função de von Bertalanffy, concordam com Freitas et al. (1984), os quais, em estudo com frangos de corte, constataram que as funções de Gompertz, Logística e von Bertalanffy apresentaram as menores médias para os EPM's. Já Braccini Neto et al. (1996), em estudo com aves de postura, verificaram, através do EPM, que as duas melhores funções foram as de Brody e von Bertalanffy.

Quando utilizou-se estrutura de erros autorregressivos de 1ª ordem (Tabela 12), todas as funções superestimaram os pesos observados, com exceção da função de von Bertalanffy, que subestimou, sendo novamente a menor média observada para o EPM obtida na função de Richards, seguida pela função de von Bertalanffy. Com estrutura de erros autorregressivos de 2ª ordem, somente as funções de Brody e Logística superestimaram os pesos observados, as demais subestimaram, sendo as menores médias observadas para o EPM nas funções de von Bertalanffy, Richards e Gompertz.

No caso dos modelos ponderados (Tabela 12) sem AR, as funções de Brody e Richards superestimaram os pesos observados, enquanto as demais funções subestimaram. A menor média observada para o EPM foi na função de von Bertalanffy, seguida pelas funções de Gompertz e de Richards. Este resultado concorda com Elias (1998) no que diz respeito à função de Richards.

Na utilização de AR(1), o melhor ajuste foi para função de Gompertz. Quando utilizou-se AR(2), todas as funções superestimaram os pesos observados, sendo o melhor ajuste observado para a função Logística. Também convém chamar a atenção que neste ajuste os EPM's médios foram bastante próximos para todas as funções.

**TABELA 12 - Médias dos Erros de Predição Médios (EPM), para os diferentes modelos, no ajuste das curvas individuais.**

Função	Modelos não ponderados			Modelos ponderados		
	s/AR	c/AR(1)	c/AR(2)	s/AR	c/AR(1)	c/AR(2)
Brody	1,5774	-1,0560	-1,2293	-1,8227	-1,1836	-0,2704
Gompertz	-2,5861	-1,7667	0,3440	0,7283	0,0381	-0,2376
Logística	-6,2442	-3,8882	-2,3058	1,8057	1,6676	-0,0514
Richards	0,4348	-0,4739	0,2982	-0,7322	-0,3968	-0,3744
von Bertalanffy	-0,9989	0,9159	0,1166	0,2898	-0,1593	-0,3384

### 4.3 Ajuste das curvas médias e individuais

#### 4.3.1 Ajuste das curvas médias e individuais para o modelo não ponderado sem estrutura de erros autorregressivos

Pelas estimativas dos parâmetros para as cinco funções estudadas, utilizando-se o peso médio dos animais nas diversas idades (Tabela 13), pôde se constatar que as funções de Brody e Richards convergiram para valores muito acima do observado para a raça Hereford. As funções de Gompertz e von Bertalanffy apresentaram estimativas para o peso adulto mais condizentes com a realidade, enquanto a função Logística subestimou o mesmo.

TABELA 13 – Estimativas dos parâmetros A, B, K e M, para as cinco funções estudadas, considerando o ajuste das curvas médias.

Funções	Parâmetros			
	A	B	K	M
Brody	2767.11	0.9925	0,00038	---
Gompertz	895.26	2.7490	0,00320	---
Logística	780.04	8.1825	0,00550	---
Richards	1210.84	0,9034	0,00150	1.5573
von Bertalanffy	996.07	0,6448	0,00230	---

Na Tabela 14 estão apresentadas as médias das estimativas utilizando o ajuste das curvas individuais. Pôde se notar a mesma tendência para as estimativas dos parâmetros das funções, ocorridas no ajuste das curvas médias; porém, no ajuste das curvas individuais, todas as funções ajustadas apresentaram estimativas mais realísticas para o peso adulto, se comparadas com as obtidas considerando o ajuste das curvas médias.

TABELA 14 – Estimativas médias dos parâmetros A, B, K e M, para as cinco funções estudadas, considerando os ajustes individuais.

Funções	Parâmetros			
	A	B	K	M
Brody	1022.58	0.9843	0.0014	---
Gompertz	817.10	2.7694	0.0037	---
Logística	733.20	8.8315	0.0063	---
Richards	899.02	0.7797	0.0025	2,5571
von Bertalanffy	850.70	0.6387	0.0029	---

#### 4.3.2 Ajuste das curvas médias e individuais para o modelo não ponderado com estrutura de erros autorregressivos

De acordo com as estimativas obtidas no ajuste das curvas médias apresentadas na Tabela 15, observou-se que apenas as funções de Gompertz e von Bertalanffy apresentaram uma estrutura de erros autorregressivos de primeira ordem, sendo que a função de Gompertz tendeu a subestimar o peso adulto, enquanto a função de von Bertalanffy gerou uma estimativa do peso adulto dentro do observado pela raça (Associação Nacional de Criadores Herd-Book Collares e Associação Brasileira de Criadores de Hereford e Braford, 1998-2000). A função de Brody ajustou uma estrutura de erros autorregressivos de segunda ordem, e as funções Logística e de Richards não ajustaram nenhuma das duas estruturas de erros AR(1) ou AR(2).

As funções de Gompertz e von Bertalanffy apresentaram uma melhora na estimativa do parâmetro "A" em relação ao modelo sem AR (Tabela 15). No ajuste para o modelo não ponderado com AR(2), observou-se que apenas a função de Brody apresentou uma estrutura de erros autorregressivos de ordem 2, estimando novamente um valor absurdo para o peso adulto, porém menor do que aquele para o modelo sem AR. As funções Logística e de Richards não apresentaram estrutura de erros autorregressivos de 1ª ou 2ª ordem, indicando que possivelmente apresentem estruturas mais complexas de autocorrelação residual. Estes resultados estão de acordo com Tornero (1996), a qual relata que

embora a natureza biológica e temporal dos dados coletados no mesmo indivíduo sustente a premissa de autocorrelação, nem sempre o espaçamento entre as mensurações são suficientes para que um dado retenha informação das observações coletadas anteriormente.

**TABELA 15 – Estimativas dos parâmetros A, B, K e M, para as cinco funções estudadas, considerando o ajuste das curvas médias.**

Funções	Parâmetros			
	A	B	K	M
Brody <sup>1</sup>	2241.98	0.9840	0.00047	---
Gompertz <sup>2</sup>	787.03	2.8767	0.0041	---
Logística <sup>3</sup>	---	---	---	---
Richards <sup>3</sup>	---	---	---	---
von Bertalanffy <sup>2</sup>	908.89	0.6552	0.0027	---

<sup>1</sup> A função de Brody ajustou um modelo autorregressivo de 2ª ordem.

<sup>2</sup> As funções Gompertz e von Bertalanffy ajustaram um modelo autorregressivo de 1ª ordem.

<sup>3</sup> As funções Logística e de Richards não ajustaram um modelo autorregressivo de 1ª ou 2ª ordem.

Nas Tabelas 16 e 17 são apresentadas as médias das estimativas individuais dos parâmetros para os modelos não ponderados com estrutura de erros AR(1) e AR(2), respectivamente. Comparando o ajuste das curvas individuais com o ajuste das curvas médias, observou-se que, neste, as funções Logística e Richards não ajustaram um modelo autorregressivo de 1ª ou de 2ª ordem; porém, quando no ajuste das curvas individuais, houve animais que apresentaram estas estruturas de erros. Na função Logística, 32 animais apresentaram estrutura de erros AR(1) e 16 animais AR(2); já na função de Richards, 21 animais apresentaram estrutura de erros AR(1) e 13 animais AR(2). A função de Brody no ajuste das curvas médias não apresentou estrutura de erros AR(1), e no ajuste das curvas individuais foi constatada esta estrutura de erros, em 13 animais. De modo geral, podemos dizer que os resultados obtidos

nas Tabelas 15, 16 e 17 concordam com Medeiros (1999), o qual afirmou que a introdução da estrutura de autocorrelação nos erros melhora o ajuste, minimizando o problema de medidas repetidas.

**TABELA 16 – Médias das estimativas dos parâmetros A, B, K e M para as cinco funções, considerando o ajuste das curvas individuais com AR(1).**

Funções	Parâmetros			
	A	B	K	M
Brody	1059.02	0.9626	0.0013	---
Gompertz	785.74	2.8016	0.0040	---
Logística	679.72	9.7421	0.0073	---
Richards	911.71	0.8086	0.0024	1.9736
von Bertalanffy	867,18	0.6378	0,0028	---

**TABELA 17 – Médias das estimativas dos parâmetros A, B, K e M para as cinco funções, considerando o ajuste das curvas individuais com AR(2).**

Funções	Parâmetros			
	A	B	K	M
Brody	1091.23	0,9576	0.0013	---
Gompertz	733,37	3.0225	0,0042	---
Logística	618.21	11,8982	0.0013	---
Richards	892.54	0.8181	0.0021	2.1082
von Bertalanffy	831.59	0.6548	0,0035	---

#### **4.3.3 Ajuste das curvas médias e individuais para o modelo ponderado sem estrutura de erros autorregressivos**

A Tabela 18 mostra que a função de Brody novamente convergiu para um valor absurdo de peso adulto, enquanto as funções de Gompertz, von Bertalanffy e Richards apresentaram estimativas dentro do observado pela raça (Associação Nacional de Criadores Herd-Book Collares e Associação Brasileira

de criadores de Hereford e Braford, 1998-2000). A função Logística, como nos demais modelos, subestimou o peso adulto dos animais.

**TABELA 18 – Estimativas dos parâmetros A, B, K e M para as cinco funções, considerando o ajuste das curvas médias.**

Funções	Parâmetros			
	A	B	K	M
Brody	4227.66	0.9917	0.00023	---
Gompertz	831.93	3.1579	0.00380	---
Logística	704.67	18.1467	0.00840	---
Richards	1104.07	0.8319	0.00180	1.9358
von Bertalanffy	964.18	0.6686	0.00250	---

Os resultados da Tabela 19 foram semelhantes aos encontrados no ajuste das curvas médias; porém, neste ajuste, nenhuma das funções convergiu para valores absurdos, indicando que o ajuste das curvas individuais é mais preciso que o ajuste das curvas médias.

**TABELA 19 – Médias das estimativas dos parâmetros A, B, K e M para as cinco funções, considerando o ajuste das curvas individuais.**

Funções	Parâmetros			
	A	B	K	M
Brody	1113.02	0.9664	0.0013	---
Gompertz	774.21	3.0366	0.0042	---
Logística	651.43	16.3415	0.0091	---
Richards	890.57	0.6921	0.0026	3,5379
von Bertalanffy	863.41	0,6495	0,0029	---

#### **4.3.4 Ajuste das curvas médias e individuais para o modelo ponderado com estrutura de erros autorregressivos**

A Tabela 20 mostra as estimativas obtidas a partir do ajuste das curvas médias. As funções de Brody, Richards e von Bertalanffy apresentaram estrutura de erros autorregressivos de 1ª ordem, sendo que mais uma vez a função de Brody convergiu para um valor absurdo do peso adulto. Para as funções de

Gompertz e Logística tentou-se o ajuste com estrutura de erros autorregressivos de 2ª ordem, no qual a função de Gompertz subestimou o peso adulto e a função Logística não apresentou estrutura de erros autorregressivos de 1ª ou 2ª ordem.

TABELA 20 – Estimativas dos parâmetros A, B, K e M para as cinco funções, considerando o ajuste das curvas médias.

Funções	Parâmetros			
	A	B	K	M
Brody <sup>1</sup>	2022.84	0.9827	0.00052	---
Gompertz <sup>2</sup>	636.16	2.8982	0.00550	---
Logística <sup>3</sup>	---	---	---	---
Richards <sup>1</sup>	948.01	0.7714	0.00230	2.2357
Von Bertalanffy <sup>1</sup>	879.69	0.6586	0.00280	---

<sup>1</sup> As funções de Brody, Richards e von Bertalanffy ajustaram um modelo autorregressivo de 1ª ordem.

<sup>2</sup> A função de Gompertz ajustou um modelo autorregressivo de 2ª ordem.

<sup>3</sup> A função Logística não ajustou um modelo autorregressivo de 1ª ou 2ª ordem.

Para o ajuste das curvas individuais, conforme pode ser observado nas Tabelas 21 e 22, houve animais que ajustaram AR(1) e AR(2). Nota-se que as funções Gompertz e Logística subestimaram o peso adulto, principalmente no ajuste com AR(2) (Tabela 22).

TABELA 21 – Médias das estimativas dos parâmetros A, B, K e M para as cinco funções, considerando o ajuste das curvas individuais com AR(1).

Funções	Parâmetros			
	A	B	K	M
Brody	1069.13	0.9574	0.0014	---
Gompertz	786.85	3.0629	0.0042	---
Logística	703.58	16.6500	0.0089	---
Richards	937.52	0.7553	0.0024	2,6760
von Bertalanffy	862.26	0,6490	0,0029	---

**TABELA 22 – Médias das estimativas dos parâmetros A, B, K e M para as cinco funções, considerando o ajuste das curvas individuais com AR(2).**

Funções	Parâmetros			
	A	B	K	M
Brody	1128,06	0.9642	0.0012	---
Gompertz	687.25	2.9530	0.0045	---
Logística	568,54	14.9500	0.0119	---
Richards	964.53	0.8691	0.0018	1.6939
von Bertalanffy	848,54	0.6504	0.0032	---

Comparando este ajuste com o ajuste das curvas médias, nota-se a mesma tendência observada anteriormente no que se refere às estimativas dos parâmetros para as cinco funções, porém sem a convergência para valores absurdos. É importante mencionar que na Tabela 21, para as funções de Brody, Gompertz, Logística, Richards e von Bertalanffy, convergiram 2; 38; 20; 35 e 49 animais, respectivamente. Já na Tabela 22, para as mesmas 5 funções, convergiram 2; 10; 22; 10 e 20 animais, respectivamente.

#### **4.3.5 Considerações gerais sobre as estimativas dos parâmetros.**

Uma importante consideração a ser observada nas tabelas das estimativas dos parâmetros (Tabela 13 a Tabela 22) é que em todos os modelos ajustados verificou-se uma correlação negativa entre os parâmetros “A” e “K”, isto significa dizer que quanto mais precoce o animal, menor é seu peso adulto e vice-versa. Estes resultados estão de acordo com Brown, Brown e Butts (1972a; 1972b); Fitzhugh (1976); Morrow, McLaren e Butts (1978); Tedeschi (1996); Bracini Neto et al. (1996) e Elias (1998).

Outra observação para a qual se deve se chamar a atenção, é a estimativa do erro padrão para o parâmetro “M” da função de Richards, o qual, na maioria dos ajustes das curvas individuais, foi maior do que a estimativa do próprio parâmetro (Tabelas no anexo). Resultado semelhante foi observado por Tedeschi

(1996), o qual, em trabalho para determinação dos parâmetros da curva de crescimento com animais da raça Guzerá e seus cruzamentos, verificou que a estimativa do erro padrão dos parâmetros era maior que o próprio valor da estimativa do parâmetro, portanto mostrando que não era um valor confiável.

Também é importante salientar que a função de Brody, na maioria dos modelos ajustados, fez com que o peso adulto convergisse para valores fora do espaço paramétrico esperado. Estes resultados concordam com Ludwig, Silva e Oliveira (1981), os quais, em estudo de curvas de crescimento com gado Nelore, observaram, no ajustamento da função de Brody, estimativas biologicamente absurdas para o peso adulto.

Os resultados obtidos no ajuste com AR concordam com Medeiros (1999), o qual afirma que a introdução da estrutura AR(1) melhora a qualidade do ajuste e pouco se altera, em relação a esta, com o uso da estrutura AR(2). Isto pode ser observado nas Tabelas (15 a 17 e 20 a 22).

Observou-se, no ajuste das curvas médias, que a função de von Bertalanffy ajustou uma estrutura de erros AR(1) tanto nos modelos não ponderados quanto nos modelos ponderados. Por outro lado, a função Logística não ajustou nenhuma das duas estruturas de erros AR(1) ou AR(2).

As Figuras 2 a 6 mostram as funções ajustadas para o modelo ponderado com AR(1) e para o modelo não ponderado sem AR(1).

Através dos avaliadores de qualidade e das estimativas dos parâmetros apresentados nas Tabela 3-22, é possível observar um melhor ajuste dos dados para todas as funções quando se utilizou ponderação com erros autorregressivos. Estes resultados podem ser melhor visualizados nas Figuras 2 a 6, nas quais se nota uma superioridade desta configuração sobre a configuração normal, ou seja, sem ponderação e sem AR.

Na Figura 2 observa-se uma superestimação dos pesos finais pela função de Brody. O mesmo foi observado por Perotto, Cue e Lee (1992), que estudando

curvas de crescimento de vacas leiteiras, observaram o mesmo comportamento para esta função.

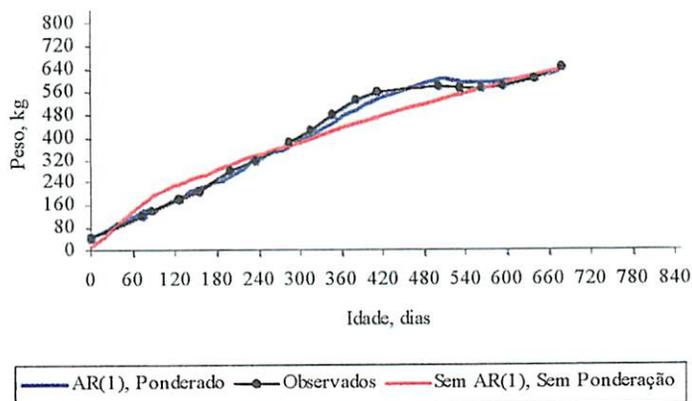


FIGURA 2 - Função de Brody: comparação entre os modelos ponderado com AR(1) e não ponderado sem AR.

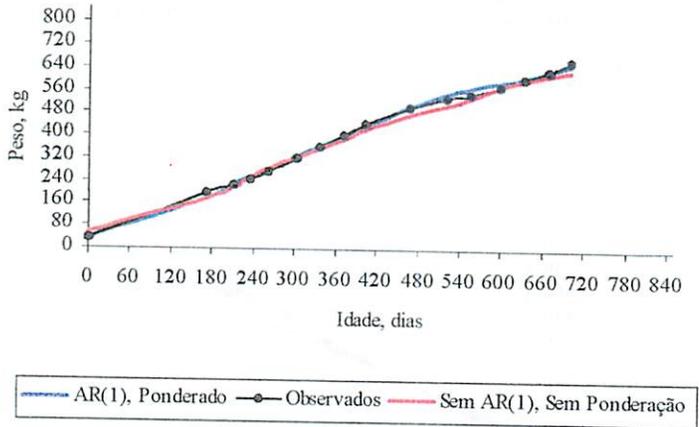


FIGURA 3 - Função de Gompertz: comparação entre os modelos ponderado com AR(1) e não ponderado sem AR.

No ajuste da função Logística apresentado na Figura 4, nota-se uma subestimação dos pesos finais, concordando com Brown, Fitzhugh e Cartwright (1976), que também tiraram estas mesmas conclusões sobre a função Logística ajustada a dados de vacas de diversas raças.

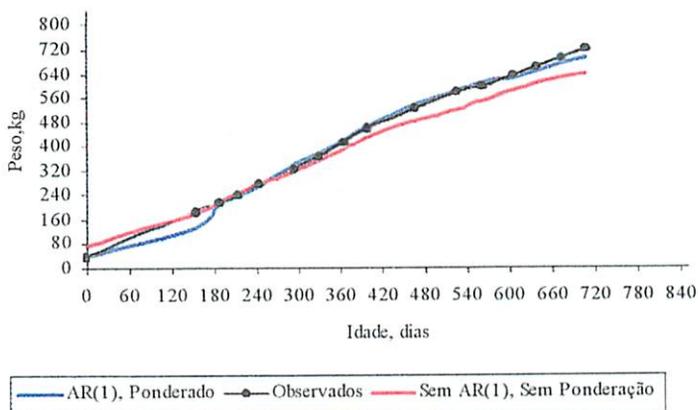


FIGURA 4 - Função Logística: comparação entre os modelos ponderado com AR(1) e não ponderado sem AR.

Na Figura 5 observa-se que a função de Richards apresentou um bom ajuste aos dados, e que não houve grande diferença entre o ajuste ponderado com AR(1) e o ajuste normal. Vários autores, entre eles Silva, Aquino e Oliveira (2001), relatam que esta função, apesar de gerar bons ajustes a dados de crescimento de bovinos, muitas vezes não é indicada por apresentar baixos percentuais de convergência.

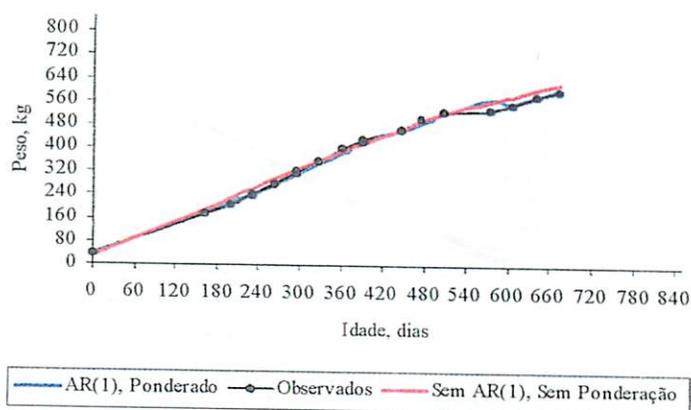


FIGURA 5 - Função de Richards: comparação entre os modelos ponderado com AR(1) e não ponderado sem AR.

Nas Figuras 3 e 6, que representam os ajustes das funções de Gompertz e von Bertalanffy, respectivamente, é mostrado que ambas apresentaram um bom ajuste, realçando os resultados obtidos nas estimativas dos parâmetros e nos avaliadores de qualidade do ajuste. Este resultado concorda com Oliveira, Lôbo e Pereira (2000), que em estudo com fêmeas Guzerá, consideraram como a função de melhor ajuste aos dados a de von Bertalanffy; estes resultados são diferentes da maioria dos encontrados na literatura, nos quais os modelos de Richards e Brody geralmente são apontados como os de melhor qualidade de ajustamento.

De modo geral, também foi observado um mesmo comportamento de todas as funções quando utilizou-se o ajuste ponderado com AR(2).

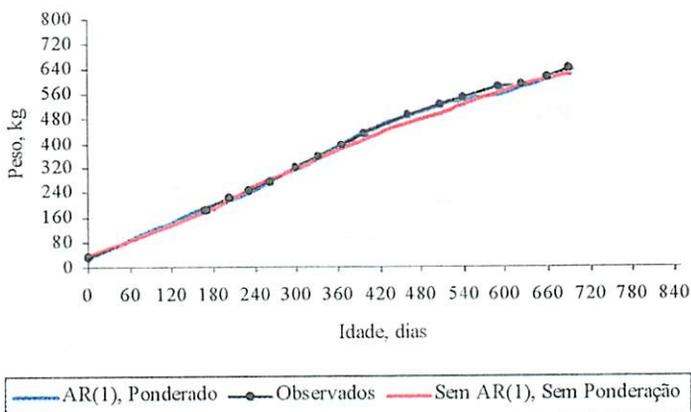


FIGURA 6 - Função de von Bertalanffy: comparação entre os modelos ponderados com AR(1) e não ponderado sem AR.

Conforme pode ser observado nos Box Plot para os modelos não ponderado sem AR e ponderado com AR(1) (Figuras 7 a 10), pode ser visualizada, de uma maneira mais clara a tendência da função de Brody de superestimar o peso adulto (parâmetro A) e da função Logística de subestimá-lo (Tabelas 7 e 9). Também podem ser observadas as correlações negativas entre os parâmetros “A” e “K” para o modelo não ponderado sem AR (Figuras 7 e 8) e para o modelo ponderado com AR(1) (Figuras 9 e 10), assim como a variabilidade das estimativas em cada função.

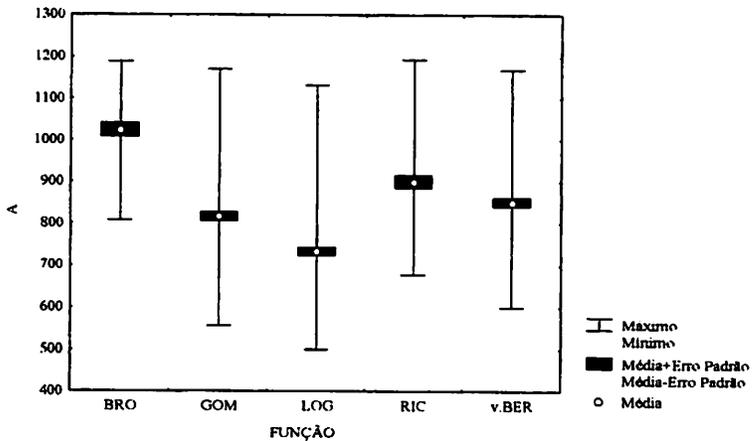


FIGURA 7 - Box Plot para o modelo não ponderado sem AR, parâmetro A.

Observando-se a Figura 7 pode se verificar que as funções de Brody e Richards apresentam uma maior variabilidade das estimativas do parâmetro A, em relação as funções de Gompertz, Logística e von Bertalanffy.

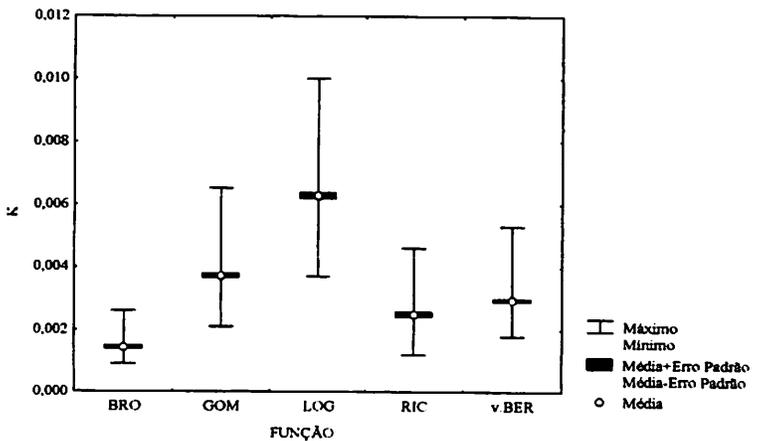


FIGURA 8 - Box Plot para o modelo não ponderado sem AR, parâmetro K.

Ao observar-se a Figura 8, nota-se que o parâmetro K apresentou baixa variabilidade entre suas estimativas para todas as funções, sendo um pouco maior na função Logística e de Richards.

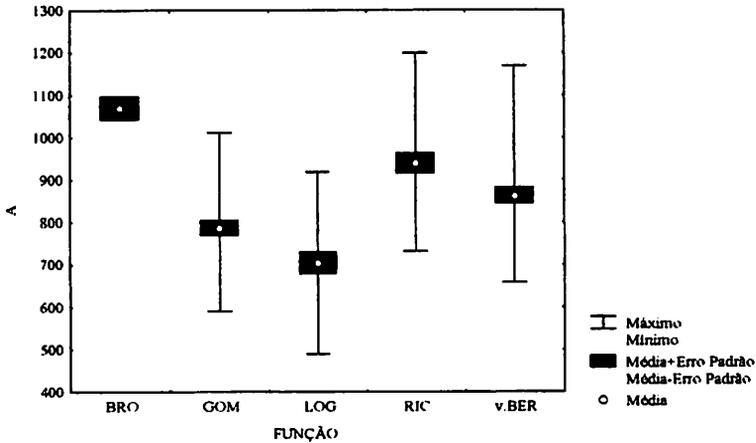


FIGURA 9 - Box Plot para o modelo ponderado com AR(1), parâmetro A.

Na Figura 9 para o modelo ponderado, observa-se que as funções de Brody e Richards, assim como a Logística apresentaram uma maior variabilidade entre as estimativas do parâmetro A. Enquanto as funções de Gompertz e von Bertalanffy apresentaram uma menor variabilidade.

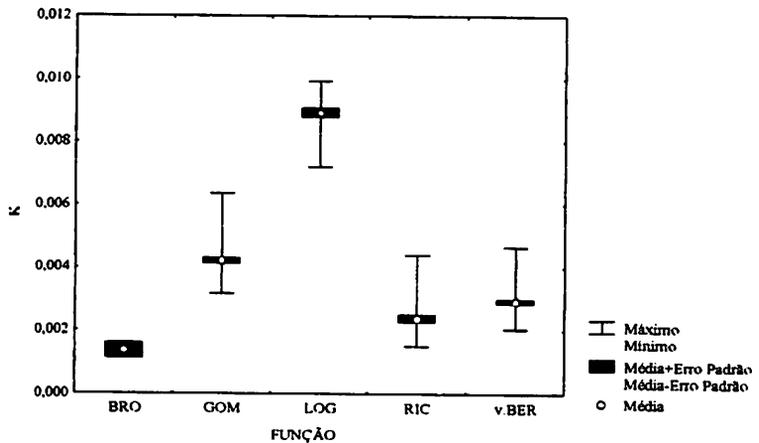
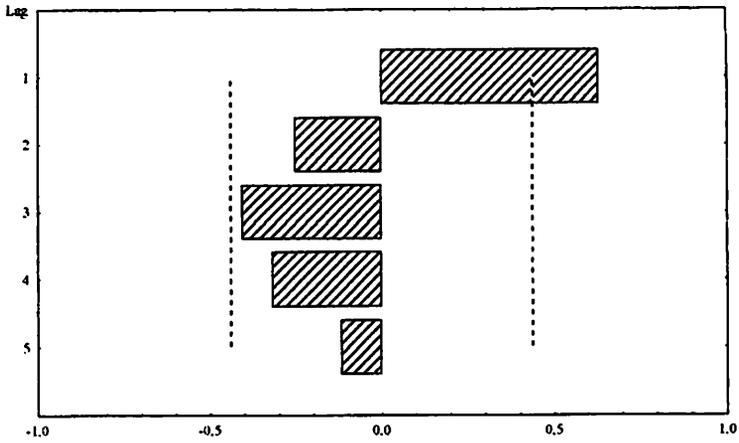


FIGURA 10 – Box Plot para o modelo ponderado com AR(1), parâmetro K.

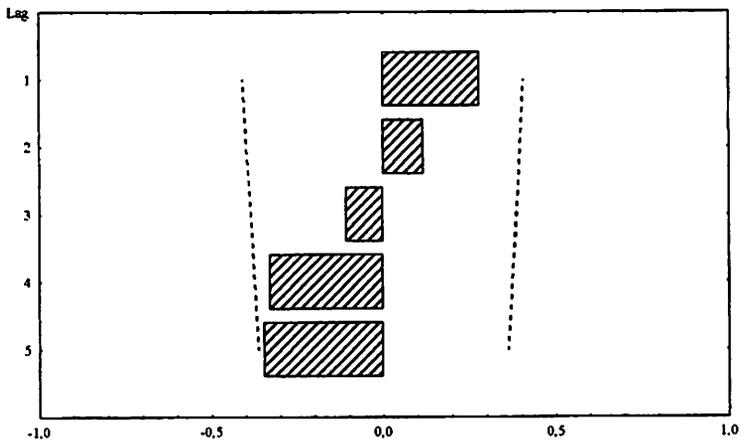
A Figura 10 mostra uma maior variabilidade entre as estimativas do parâmetro K, para as funções de Brody e Logística.

Os gráficos indicativos da autocorrelação residual para as funções de Gompertz e von Bertalanffy (funções de melhor ajuste) são apresentados nas Figuras 11 a 19.

Pode-se observar, na Figura 11, através da função de autocorrelação parcial para a função de von Bertalanffy sem ponderação e sem AR, que os resíduos apresentam uma estrutura de erros AR(1). Para esta mesma configuração, ajustando a mesma função e considerando estrutura de erros AR(1), observa-se, através da função de autocorrelação, que os resíduos tornam-se independentes (Figura 12).



**FIGURA 11 - Função de autocorrelação parcial ajustada para função de von Bertalanffy no modelo não ponderado sem AR.**



**FIGURA 12 - Função de autocorrelação ajustada para função de von Bertalanffy no modelo não ponderado com AR(1).**

A mesma situação descrita ocorreu para o modelo ponderado no ajuste da função de von Bertalanffy e para o modelo não ponderado no ajuste da função de Gompertz, conforme se observa nas Figuras 13, 14, 15 e 16.

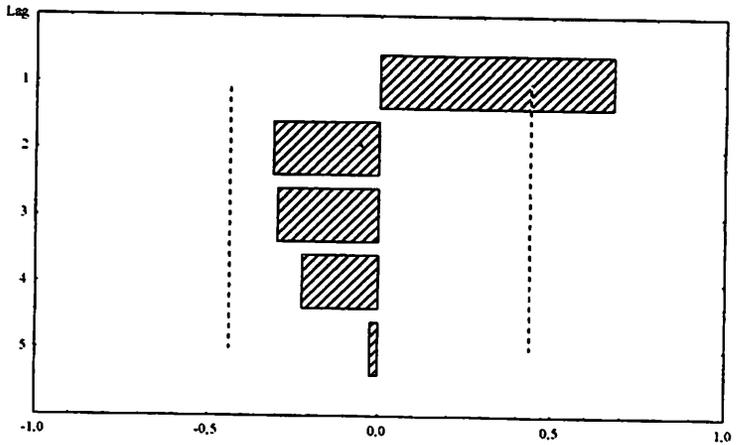


FIGURA 13 - Função de autocorrelação parcial ajustada para função de von Bertalanffy no modelo ponderado sem AR.

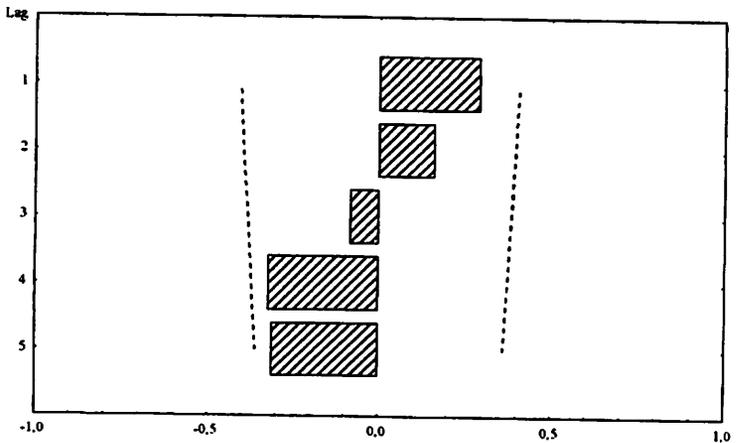
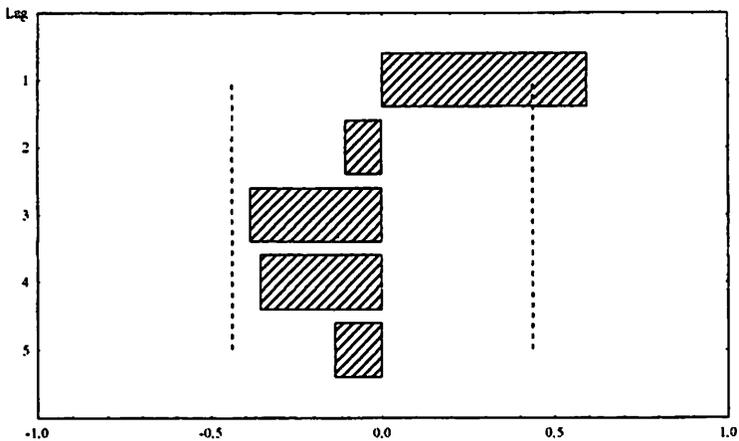
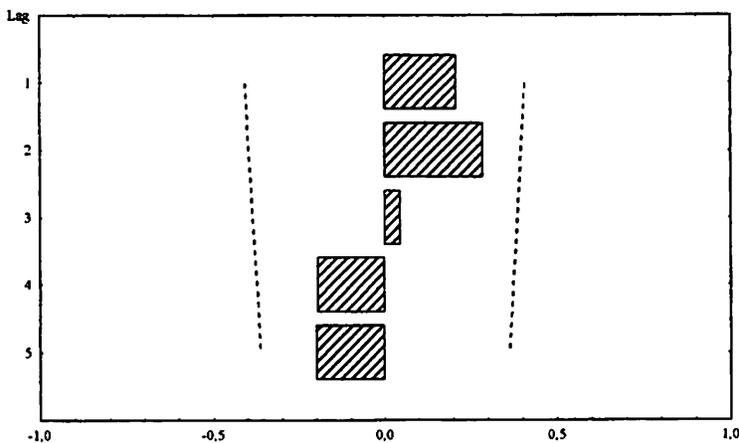


FIGURA 14 - Função de autocorrelação ajustada para função de von Bertalanffy no modelo ponderado com AR(1).



**FIGURA 15 - Função de autocorrelação parcial ajustada para função de Gompertz no modelo não ponderado sem AR.**



**FIGURA 16 - Função de autocorrelação ajustada para função de Gompertz no modelo não ponderado com AR(1).**

No modelo ponderado sem AR, ajustado para a função de Gompertz, conforme as Figuras 17 e 18, possivelmente seria ajustado um modelo

ARMA(1,1), pois há indicativos de parâmetro de médias móveis (autocorrelação) e parâmetro autorregressivo (autocorrelação parcial). Um ajuste alternativo é o modelo AR de maior ordem, como um AR(2), o qual tornou os resíduos independentes, conforme mostra a Figura 19.

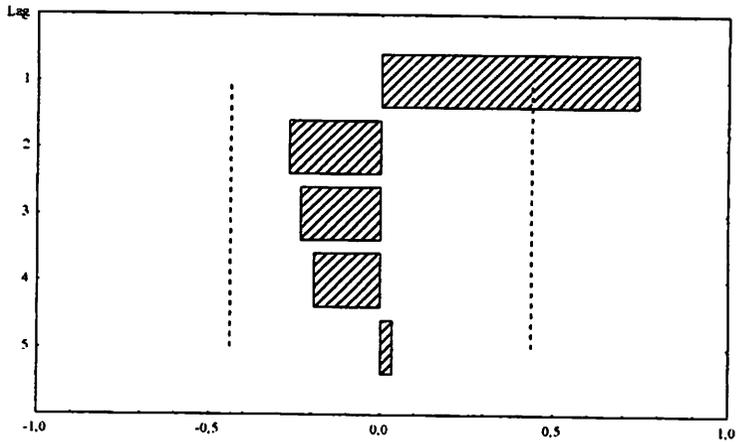
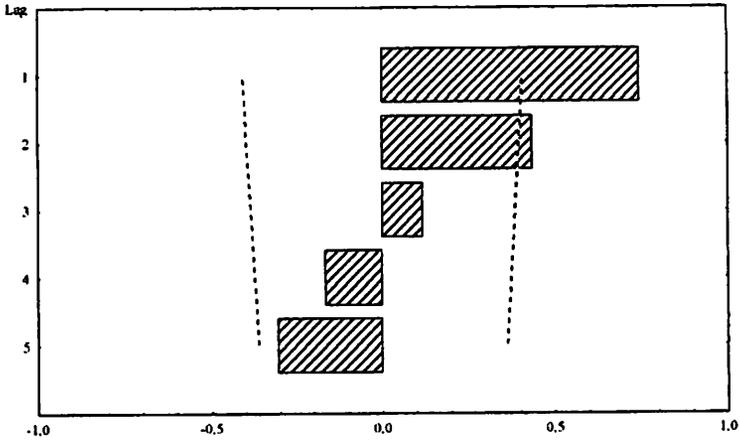
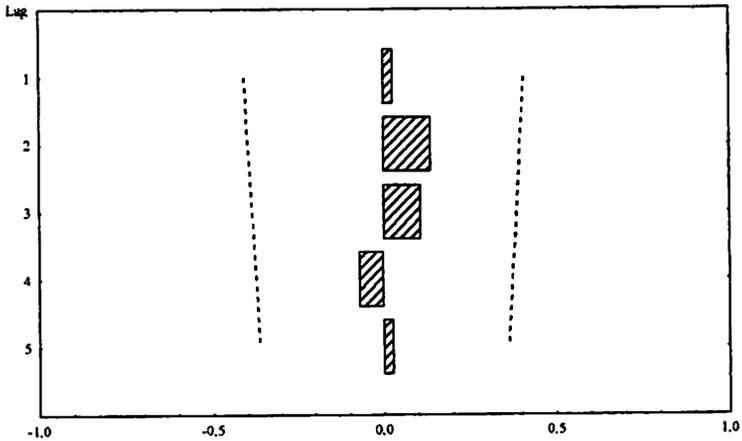


FIGURA 17 - Função de autocorrelação parcial ajustada para função de Gompertz no modelo ponderado sem AR.



**FIGURA 18 - Função de autocorrelação ajustada para função de Gompertz no modelo ponderado sem AR.**



**FIGURA 19 - Função de autocorrelação ajustada para função de Gompertz no modelo ponderado com AR(2).**

## 5 CONCLUSÕES

Nas condições do presente estudo, e de acordo com os resultados obtidos, pode-se concluir que:

- (i) O modelo que proporcionou melhor qualidade de ajuste foi o ponderado pelo inverso da variância com estrutura de erros autorregressivos;
- (ii) As funções que melhor ajustaram os dados foram as de Gompertz e von Bertalanffy, apresentando uma adequada interpretação biológica dos parâmetros;
- (iii) As funções de Brody e Richards foram as menos indicadas pelo seu pior desempenho;
- (iv) A função Logística, embora tenha mostrado um bom ajuste ao dados, tendeu a subestimar o peso adulto;
- (v) O ajuste das curvas individuais foi mais preciso que o ajuste das curvas médias.

## REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- ALVES, R.G. de O. **Estudo genético de características reprodutivas em suínos e avaliação de curvas de crescimento em cruzamentos dialélicos.** Viçosa: UFV, 1986. 124p. (Tese - Doutorado em Genética e Melhoramento).
- ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE HEREFORD & BRAFORD. [online].2000. Disponível: [http://www.hereford.com.br/ind\\_2.htm](http://www.hereford.com.br/ind_2.htm) [capturado em 7 nov. 2000].
- ASSOCIAÇÃO NACIONAL DE CRIADORES-HERD BOOK COLLARES; ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE CRIADORES DE HEREFORD E BRAFORD. **XXI-XXIII Exposição Internacional de Animais; Raça: Polled Hereford.** Pelotas, 1998-2000.
- BERGAMASCO, A. F.; AQUINO, L. H. de; MUNIZ, J. A.; SILVA, F. F. da.. **Ajuste de modelos não-lineares a dados de crescimento de fêmeas da raça holandesa.** *Ciência e Agrotecnologia*, Lavras, 2001. No prelo.
- BRACCINI NETO, J.; DIONELLO, N.J.L.; SILVEIRA Jr., P.; BONGALHARDO, D.C.; XAVIER, E. G. **Análise de curvas de crescimento de aves de postura.** *Revista Brasileira de Zootecnia*, Viçosa, v.25, n.6, p.1062-1073, nov./dez. 1996.
- BRACCINI NETO, J.; DIONELLO, N.J.L.; SILVEIRA Jr., P.; BONGALHARDO, D.C.; ESTIVALET Jr., C.N.O. **Estimativa de parâmetros genéticos e fenotípicos da curva de crescimento de galinhas poedeiras.** *Revista Brasileira de Zootecnia*, Viçosa, v.26, n.5, p.894-904, 1997.
- BROWN, J.E.; BROWN, C.J.; BUTTS, W.T. **A discussion of the genetic aspects of weight, mature weight and rate of maturing in Hereford and Angus cattle.** *Journal of Animal Science*, Champaign, v.34, n.4, p.525-537, Apr. 1972a.
- BROWN, J.E.; BROWN, C.J.; BUTTS, W.T. **Relationships among weights, gains and earliness of maturing in Hereford and Angus females.** *Journal of Animal Science*, Champaign, v.35, n.3, p.507-517, Apr. 1972b.
- BROWN, J.E.; FITZHUGH Jr., H.A.; CARTWRIGHT, T.C. **A comparison of nonlinear models for describing weight-age relationships in cattle.** *Journal of Animal Science*, Champaign, v.42, n.4, p.810-818, Apr. 1976.

- CHIACCHIO, E.J. **Regressão não-linear: desenvolvimento de um sistema computacional e aplicações.** Piracicaba: ESALQ, 1993. 149p. (Dissertação - Mestrado em Estatística e Experimentação Agronômica).
- CROCCI, J.A. **Modelo Auto-Regressivo para análise de experimentos com vacas em lactação.** Piracicaba: ESALQ, 1984. 86p. (Tese - Doutorado em Estatística e Experimentação Agronômica).
- DENISE, R.S.K.; BRINKS, J.S. Genetic and Environmental Aspects of the Growth Curve parameters in beef cows. **Journal of Animal Science**, Champaign, v.61, n.6, p.1431-1440, July. 1985.
- DRAPER, N.R.; SMITH, H. **Applied regression analysis.** 3.ed. New York: John Wiley & Sons, 1998. 706p.
- DUARTE, F.A.M. **Estudo da curva de crescimento de animais da Raça "Nelore" (*Bos taurus indicus*) através de cinco modelos estocásticos.** Ribeirão Preto: USP, 1975. 284p. (Tese - Livre Docência em Genética e Matemática aplicada à Biologia).
- ELIAS, A.M. **Análise de curvas de crescimento de vacas das Raças Nelore, Guzerá e Gir.** Piracicaba: ESALQ, 1998. 128p. (Dissertação - Mestrado em Ciência Animal e Pastagens).
- FITZHUGH Jr., H.A. Analysis of growth curves and strategies for altering their shapes. **Journal of Animal Science**, Champaign, v.42, n.4, p.1036-1051, Apr. 1976.
- FREITAS, A.R. de; ALBINO, L.F.T.; MICHELAN FILHO, T.; ROSSO, L.A. de. Modelos de curvas de crescimento em frangos de corte. **Pesquisa Agropecuária Brasileira**, Brasília, v.19, n.9, p.1057-1064, set. 1984.
- FREITAS, A.R. de; COSTA, C.N. Ajustamento de modelos não-lineares a dados de crescimento de suínos. **Pesquisa Agropecuária Brasileira**, Brasília, v.18, n.10, p.1147-1154, out. 1983.
- GALLANT, A.R. **Nonlinear statistical models.** New York: John Wiley & Sons, 1987. 610p.
- GOONEWARDENE, L.A.; BERG, R.T.; HARDIN, R.T. A growth study of beef cattle. **Canadian Journal of Animal Science**, Ottawa, v.61, n.4, p.1041-1048, Dec. 1981.

- GOTTSCHALL, C.S. Impacto nutricional na produção de carne-curva de crescimento. In: LOBATO, J.F.P.; BARCELLOS, J.O.J.; KESSLER, A.M. **Produção de bovinos de corte**. Porto Alegre: EDIPUCRS, 1999. p.169-192.
- HELMINK, S.K.; SHANKS, R.D.; LEIGHTON, E.A. Breed and sex differences in growth curves for two breeds of dog guides. **Journal of Animal Science**, Champaign, v.78, n.1, p.27-32, Jan. 2000.
- HOFFMANN, R.; VIEIRA, S. **Análise de regressão: uma introdução à econometria**. 3.ed. São Paulo: HUCITEC, 1998. 379p.
- KROLL, L.B. **Estudo do crescimento de vacas leiteiras através de modelos com autocorrelação nos erros**. Botucatu: UNESP, 1990. 96p.(Tese - Doutorado em Energia na Agricultura).
- KSHIRSAGAR, A.M.; SMITH, W.B. **Growth curves**. New York: Marcel Dekker, 1995. v.145, 359p.
- LUDWIG, A.; SILVA, M. de A.; OLIVEIRA, L.M. de. Ajustamento de modelos estatísticos exponenciais ao crescimento de gado Nelore. **Pesquisa Agropecuária Brasileira**, Brasília, v.16, n.2, p.297-302, mar. 1981.
- MAZUCHELI, J.; ACHCAR, J.A. **Modelos de Regressão não lineares: Algumas considerações importantes**. USP, 1997. p.1-32 (Notas Didáticas do Instituto de Ciências Matemáticas de São Carlos).
- MEDEIROS, H.A. **Qualidade do ajuste da função logística monofásica e difásica com estrutura de erros independentes e autoregressivos**. Lavras: UFLA, 1999. 73p. (Dissertação - Mestrado em Estatística e Experimentação Agropecuária).
- MENDES, P.R.; AQUINO, L.H. de; MUNIZ, J.A. Estudo da curva de crescimento de fêmeas da Raça Nelore. **Ciência e Agrotecnologia**, Lavras, 2001. No prelo.
- MORETTIN, P.A.; TOLOI, C.M. de C. **Previsão de séries temporais**. 2.ed. São Paulo: Atual Editora, 1987. 436p.
- MORROW, R.E.; McLAREN, J.B.; BUTTS, W.T. Effect of age on estimates of bovine growth-curve parameters. **Journal of Animal Science**, Champaign, v.47, n.2, p.352-357, Ago. 1978.

- NETER, J.; WASSERMAN, W.; KUTNER, M.H. Applied linear statistical models: regression, analysis of variance, and experimental designs. 2.ed. Homewood: Richard D. Irwin, Inc., 1985. 1127p.**
- NOBRE, P.R.C.; ROSA A. do N.; SILVA, L.O.C. da; EVANGELISTA, S.R.M. Curvas de crescimento de gado Nelore ajustadas para diferentes frequências de pesagens. Pesquisa Agropecuária Brasileira, Brasília, v.22, n.9/10, p.1027-1037, set./out. 1987.**
- OGLIARI, P.J. Modelos não lineares para dados longitudinais provenientes de experimentos em blocos casualizados. Piracicaba: ESALQ, 1998. 156p. (Tese - Doutorado em Estatística e Experimentação Agrônômica).**
- OLIVEIRA, H. N. de ; LÔBO, R. B.; PEREIRA, C. S. Comparação de modelos não-lineares para descrever o crescimento de fêmeas da raça Guzerá. Pesquisa Agropecuária Brasileira, Brasília, v.35, n.9, p.1843-1851, set. 2000.**
- PASTERNAK, H.; SHALEV, B.A. The effect of a feature of regression disturbance on the efficiency of fitting growth curves. Growth, Development & Aging, Bar Harbor, v.58, n.1, p.33-39, 1994.**
- PEROTTO, D.; CASTANHO, M.J. de P.; CUBAS, A.C.; ROCHA, J.L. da; PINTO, J.M. Efeitos genéticos sobre as estimativas dos parâmetros das curvas de crescimento de fêmeas bovinas Gir, Guzerá, Holandês x Gir e Holandês x Guzerá. Revista Brasileira de Zootecnia, Viçosa, v.26, n.4, p.719-125, 1997.**
- PEROTTO, D.; CUE, R. I.; LEE, A. J. Comparison of nonlinear functions for describing the growth curve of three genotypes of dairy cattle. Canadian Journal of Animal Science, Ottawa, v.72, n.4, p.773-782, Dec. 1992.**
- RATKOWSKY, D.A. Nonlinear regression modeling: a unified practical approach. New York: Marcel Dekker, 1983. v.48, 276p.**
- ROSA, A. do N.; SILVA M de A.; LUDWIG, A. Parâmetros genéticos e fenotípicos de pesos corporais ajustados pela curva de crescimento de animais da Raça Nelore. Revista Brasileira de Zootecnia, Viçosa, v.7, n.2, p.329-345, 1978.**
- SAS INSTITUTE Inc. SAS/ETS® User's Guide. Version 6. 2.ed. Cary: SAS Institute Inc., 1995.**

- SILVA, F. F. da; AQUINO, L. H. de; OLIVEIRA, A. I. G. de. **Influência de fatores genéticos e ambientais sobre as estimativas dos parâmetros das funções de crescimento em gado Nelore. Ciência e Agrotecnologia, Lavras, 2001. No prelo.**
- SILVEIRA Jr., P. **Estudos de alguns modelos exponenciais no crescimento de bovinos da Raça Ibagé. Piracicaba: ESALQ, 1976. 174p. (Dissertação - Mestrado em Experimentação e Estatística).**
- SILVEIRA Jr., P.; MACHADO, A.A. **Adição de componentes sazonal em modelos de crescimento. Pesquisa Agropecuária Brasileira, Brasília, v.25, n.1, p.67-75, jan. 1990.**
- SILVEIRA Jr., P.; MACHADO A.A.; SILVA, M.A. da. **Modelos exponenciais com componente sazonal ajustados ao crescimento de búfalos da Raça Murrah. Ciência e Cultura, São Paulo, v.42, n.1, p.36-47, jan. 1990.**
- SILVEIRA Jr., P.; PINHEIRO, J.E.P.; ZONTA, E.P.; GONÇALVES, I.M.G. **Modelo de crescimento sazonal em animais provenientes de testes de progênie. Pesquisa Agropecuária Brasileira, Brasília, v.28, n.9, p.1065-1076, set. 1993.**
- SOUZA, G. da S. **Introdução aos modelos de regressão linear e não-linear. Brasília: Embrapa-SPI/Embrapa-SEA, 1998. 489p.**
- SOUZA, L. de. **Curvas de crescimento: análise de dados longitudinais incompletos com resíduos autocorrelacionados. Piracicaba: ESALQ, 1989. 84p. (Tese - Doutorado em Estatística e Experimentação Agronômica).**
- TEDESCHI, L.O. **Determinação dos parâmetros da curva de crescimento de animais da Raça Guzerá e seus cruzamentos alimentados a pasto, com e sem suplementação. Piracicaba: ESALQ, 1996. 140p. (Dissertação - Mestrado em Ciência Animal e Pastagens).**
- TORNERO, M.T.T. **Utilização de modelos assintóticos-sigmóides de crescimento multifásico com sazonalidade em estudos zootécnicos. Botucatu: UNESP, 1996. 131p. (Tese - Doutorado em Nutrição e Produção Animal).**
- WOLFRAM, S. **Mathematica a system for doing mathematics by computer. Version 2.2.ed. Champaign: Addison-Wesley Publishing Company, 1993.**

## ANEXOS A

TABELA 1 A - Estimativas dos erros padrão para o ajuste das curvas médias no modelo não ponderado sem estrutura de erros autorregressivos .....	85
TABELA 2 A - Estimativas dos erros padrão para o ajuste das curvas médias, no modelo não ponderado com estrutura de erros AR(1) e AR(2) .....	85
TABELA 3 A - Estimativas dos erros padrão para o ajuste das curvas médias, no modelo ponderado sem estrutura de erros autorregressivos .....	85
TABELA 4 A - Estimativas dos erros padrão para o ajuste das curvas médias, no modelo ponderado com estrutura de erros AR(1) e AR(2) .....	86
TABELA 5 A - Médias das estimativas dos erros padrão para o ajuste das curvas individuais, no modelo não ponderado sem estrutura de erros autorregressivos .....	86
TABELA 6 A - Médias das estimativas dos erros padrão para o ajuste das curvas individuais, no modelo não ponderado com estrutura de erros AR(1) .....	86
TABELA 7 A - Médias das estimativas dos erros padrão para o ajuste das curvas individuais, no modelo não ponderado com estrutura de erros AR(2) .....	87
TABELA 8 A - Médias das estimativas dos erros padrão para o ajuste das curvas individuais, no modelo ponderado sem estrutura de erros autorregressivos .....	87
TABELA 9 A - Médias das estimativas dos erros padrão para o ajuste das curvas individuais, no modelo ponderado com estrutura de erros AR(1) .....	87
TABELA 10 A - Médias das estimativas dos erros padrão para o ajuste das curvas individuais, no modelo ponderado com estrutura de erros AR(2) .....	88
TABELA 11 A - Número de animais em que o critério de convergência foi atingido, valores máximos e mínimos de cada parâmetro estimado nos ajustamentos individuais e parâmetros da curva média, estimada com uso de	

todas as pesagens de todos os machos, para cada função utilizada, no modelo não ponderado e sem estrutura de erros autorregressivos .....	88
TABELA 12 A - Número de animais em que o critério de convergência foi atingido, valores máximos e mínimos de cada parâmetro estimado nos ajustamentos individuais e parâmetros da curva média, estimada com uso de todas as pesagens de todos os machos, para cada função utilizada, no modelo ponderado sem estrutura de erros autorregressivos .....	89
TABELA 13 A - Número de animais em que o critério de convergência foi atingido, valores máximos e mínimos de cada parâmetro estimado nos ajustamentos individuais e parâmetros da curva média, estimada com uso de todas as pesagens de todos os machos, para cada função utilizada, no modelo não ponderado com AR(1) .....	90
TABELA 14 A - Número de animais em que o critério de convergência foi atingido, valores máximos e mínimos de cada parâmetro estimado nos ajustamentos individuais e parâmetros da curva média, estimada com uso de todas as pesagens de todos os machos, para cada função utilizada, no modelo ponderado com AR(1) .....	91
TABELA 15 A - Número de animais em que o critério de convergência foi atingido, valores máximos e mínimos de cada parâmetro estimado nos ajustamentos individuais e parâmetros da curva média, estimada com uso de todas as pesagens de todos os machos, para cada função utilizada, no modelo não ponderado com AR(2) .....	92
TABELA 16 A - Número de animais em que o critério de convergência foi atingido, valores máximos e mínimos de cada parâmetro estimado nos ajustamentos individuais e parâmetros da curva média, estimada com uso de todas as pesagens de todos os machos, para cada função utilizada, no modelo ponderado com AR(2) .....	93

**TABELA 17 A - Rotina SAS, programa utilizado para obtenção das estimativas dos parâmetros para os modelos ponderados com estrutura de erros autorregressivos ..... 94**

TABELA 1A - Estimativas dos erros padrão para o ajuste das curvas médias, no modelo não ponderado sem estrutura de erros autorregressivos.

Funções	A	B	K	M
Brody	1065,90	0,0037	0,00017	---
Gompertz	49,60	0,1338	0,00030	---
Logística	33,99	0,9204	0,00050	---
Richards	301,90	0,1235	0,00073	0,6021
von Bertalanffy	67,62	0,0208	0,00025	---

TABELA 2A - Estimativas dos erros padrão para o ajuste das curvas médias, no modelo não ponderado com estrutura de erros AR(1) e AR(2).

Funções	A	B	K	M
Brody <sup>1</sup>	757,91	0,0069	0,00018	---
Gompertz	59,60	0,2791	0,00050	---
Logística	---	---	---	---
Richards	---	---	---	---
von Bertalanffy	65,73	0,0338	0,00030	---

<sup>1</sup> A função de Brody ajustou uma estrutura de erros AR(2), as demais funções ajustaram um AR(1).

TABELA 3A - Estimativas dos erros padrão para o ajuste das curvas médias, no modelo ponderado sem estrutura de erros autorregressivos.

Funções	A	B	K	M
Brody	1732,10	0,0034	0,00010	---
Gompertz	19,66	0,0368	0,00012	---
Logística	18,90	1,2549	0,00034	---
Richards	162,68	0,1034	0,00056	0,5867
von Bertalanffy	27,57	0,0039	0,00009	---

**TABELA 4A - Estimativas dos erros padrão para o ajuste das curvas médias, no modelo ponderado com estrutura de erros AR(1) e AR(2).**

Funções	A	B	K	M
Brody	988.11	0.0085	0.00030	---
Gompertz <sup>1</sup>	68.42	0.1094	0.00042	---
Logística	---	---	---	---
Richards	168.89	0.1957	0.00095	1.1857
von Bertalanffy	53.93	0.0073	0.00022	---

<sup>1</sup> A função de Gompertz ajustou um AR(2), as demais funções ajustaram um AR(1).

**TABELA 5A - Médias das estimativas dos erros padrão para o ajuste das curvas individuais, no modelo não ponderado sem estrutura de erros autorregressivos.**

Funções	A	B	K	M
Brody	169.54	0.0227	0.00037	---
Gompertz	73.70	0.2567	0.00055	---
Logística	47.90	1.5989	0.00078	---
Richards	266.33	0.4274	0.00151	5.5037
von Bertalanffy	88.49	0.0440	0.00049	---

**TABELA 6A - Médias das estimativas dos erros padrão para o ajuste das curvas individuais, no modelo não ponderado com estrutura de erros AR(1).**

Funções	A	B	K	M
Brody	295.22	0.0246	0.00053	---
Gompertz	99.05	0.4072	0.00080	---
Logística	85.76	3.7684	0.00140	---
Richards	360.40	0.3262	0.00200	2.4870
von Bertalanffy	133.03	0.0555	0.00062	---

**TABELA 7A - Médias das estimativas dos erros padrão para o ajuste das curvas individuais, no modelo não ponderado com estrutura de erros AR(2).**

Funções	A	B	K	M
Brody	194.32	0.0148	0,00033	---
Gompertz	50.14	0.3797	0,00062	---
Logística	115.74	5.0726	0,00190	---
Richards	359.73	0.2666	0,00165	2.1965
von Bertalanffy	73.41	0.0475	0,00049	---

**TABELA 8A - Médias das estimativas dos erros padrão para o ajuste das curvas individuais, no modelo ponderado sem estrutura de erros autorregressivos.**

Funções	A	B	K	M
Brody	146.77	0.0046	0,00024	---
Gompertz	38.47	0.0618	0,00022	---
Logística	24.89	1.1561	0,00040	---
Richards	212.12	0.3248	0,00122	7.2421
von Bertalanffy	51.60	0.0079	0,00019	---

**TABELA 9A - Médias das estimativas dos erros padrão para o ajuste das curvas individuais, no modelo ponderado com estrutura de erros AR(1).**

Funções	A	B	K	M
Brody	380,64	0.0150	0,00066	---
Gompertz	67,68	0,0918	0,00038	---
Logística	56.49	1,6189	0,00080	---
Richards	384,21	0,3687	0,00180	4,0743
von Bertalanffy	90,95	0,0127	0,00034	---

**TABELA 10A - Médias das estimativas dos erros padrão para o ajuste das curvas individuais, no modelo ponderado com estrutura de erros AR(2).**

Funções	A	B	K	M
Brody	178.14	0.0057	0.00026	---
Gompertz	37.32	0.0600	0.00028	---
Logística	80.32	2.3413	0.00090	---
Richards	392.40	0.1893	0.00137	1.5848
von Bertalanffy	69.66	0.0097	0.00027	---

**TABELA 11A - Número de animais em que o critério de convergência foi atingido, valores máximos e mínimos de cada parâmetro estimado no ajustamentos individuais e parâmetros da curva média, estimada com uso de todas as pesagens de todos os machos, para cada função utilizada, no modelo não ponderado e sem estrutura de erros autorregressivos.**

Função	Parâmetro	N	Máximo	Mínimo	Curva Média
Brody	A	37	1189.41	807.86	1022.58
Brody	B	37	1.0052	0.9684	0,9843
Brody	K	37	0.0026	0.0009	0,0014
Gompertz	A	148	1170.00	555.78	817.10
Gompertz	B	148	3.8447	2.2962	2.7694
Gompertz	K	148	0.0065	0.0021	0,0037
Logística	A	160	1131.59	499.95	733.20
Logística	B	160	18.6200	5.8100	8,8315
Logística	K	160	0.0100	0.0037	0,0063
Richards	A	74	1193.46	677.35	899.02
Richards	B	74	0.9735	0,1685	0,7797
Richards	K	74	0.0046	0,0012	0,0025
Richards	M	74	16.4456	1,0339	2,5571
v. Bertalanffy	A	127	1169.45	600.34	850.70
v. Bertalanffy	B	127	0.7344	0,5697	0,6387
v. Bertalanffy	K	127	0,0053	0,0018	0,0029

TABELA 12A - Número de animais em que o critério de convergência foi atingido, valores máximos e mínimos de cada parâmetro estimado nos ajustamentos individuais e parâmetros da curva média, estimada com uso de todas as pesagens de todos os machos, para cada função utilizada, no modelo ponderado sem estrutura de erros autorregressivos.

Função	Parâmetro	N	Máximo	Mínimo	Curva Média
Brody	A	11	1184.55	1043.66	1113.02
Brody	B	11	0.9703	0.9572	0.9664
Brody	K	11	0.0017	0.0010	0.0013
Gompertz	A	152	1161.98	562.10	774.21
Gompertz	B	152	3.5053	2.6136	3.0366
Gompertz	K	152	0.0064	0.0022	0.0042
Logística	A	160	890.26	477.01	651.43
Logística	B	160	21.8893	10.9514	16.3415
Logística	K	160	0.0125	0.0060	0.0091
Richards	A	67	1177.76	657.73	890.57
Richards	B	67	0.9539	0.1047	0.6921
Richards	K	67	0.0042	0.0011	0.0026
Richards	M	67	26.5376	1.1655	3.5379
v. Bertalanffy	A	140	1190.90	646.13	863.41
v. Bertalanffy	B	140	0.6914	0.5948	0.6495
v. Bertalanffy	K	140	0.0047	0.0017	0.0029

TABELA 13A - Número de animais em que o critério de convergência foi atingido, valores máximos e mínimos de cada parâmetro estimado nos ajustamentos individuais e parâmetros da curva média, estimada com o uso de todas as pesagens de todos os machos, para cada função utilizada, no modelo não ponderado com AR(1).

Função	Parâmetro	N	Máximo	Mínimo	Curva Média
Brody	A	13	1132.74	904.66	1059.02
Brody	B	13	0.9725	0.9492	0.9626
Brody	K	13	0.0018	0.0010	0.0013
Gompertz	A	51	1105.23	616.28	785.74
Gompertz	B	51	3.1518	2.5426	2.8016
Gompertz	K	51	0.0063	0.0025	0.0040
Logística	A	32	842.65	559.75	679.72
Logística	B	32	11.7342	7.6500	9.7421
Logística	K	32	0.0092	0.0053	0.0073
Richards	A	21	1178.75	686.68	911.71
Richards	B	21	0.9430	0.4746	0.8086
Richards	K	21	0.0040	0.0011	0.0024
Richards	M	21	4.4223	1.1020	1.9736
v. Bertalanffy	A	62	1101.17	642.19	867.18
v. Bertalanffy	B	62	0.6853	0.6009	0.6378
v. Bertalanffy	K	62	0.0043	0.0019	0.0028

TABELA 14A- Número de animais em que o critério de convergência foi atingido, valores máximos e mínimos da cada parâmetro estimado nos ajustamentos individuais e parâmetros da curva média estimada com o uso de todas as pesagens de todos os machos, para cada função utilizada, no modelo ponderado com AR(1).

Função	Parâmetro	N	Máximo	Mínimo	Curva Média
Brody	A	2	1096,78	1041,47	1069,13
Brody	B	2	0,9581	0,9568	0,9574
Brody	K	2	0,0016	0,0011	0,0014
Gompertz	A	38	1011,64	591,05	786,85
Gompertz	B	38	3,2960	2,7550	3,0629
Gompertz	K	38	0,0064	0,0032	0,0042
Logística	A	20	919,02	488,99	703,58
Logística	B	20	20,6621	12,5458	16,6500
Logística	K	20	0,0099	0,0072	0,0089
Richards	A	35	1199,41	730,74	937,52
Richards	B	35	0,9376	0,1937	0,7553
Richards	K	35	0,0044	0,0015	0,0024
Richards	M	35	13,4017	1,2640	2,6760
v. Bertalanffy	A	49	1169,16	657,30	862,26
v. Bertalanffy	B	49	0,6788	0,6090	0,6490
v. Bertalanffy	K	49	0,0047	0,0020	0,0029

**TABELA 15A - Número de animais em que o critério de convergência foi atingido, valores máximos e mínimos de cada parâmetro estimado nos ajustamentos individuais e parâmetros da curva média, estimada com o uso de todas as pesagens de todos os machos, para cada função utilizada, no modelo não ponderado com AR(2).**

Função	Parâmetro	N	Máximo	Mínimo	Curva Média
Brody	A	2	1056.3	1126.16	1091.23
Brody	B	2	0.9622	0.9529	0.9576
Brody	K	2	0.0014	0.0011	0.00125
Gompertz	A	4	798.99	666.43	733.37
Gompertz	B	4	3.2609	2.7409	3.0225
Gompertz	K	4	0.0046	0.0037	0.0042
Logística	A	16	740.77	546.65	618.2113
Logística	B	16	14.8547	8.6059	11.8982
Logística	K	16	0.0170	0.0083	0.0125
Richards	A	13	1096.61	691.38	892.5362
Richards	B	13	0.9614	0.5072	0.8181
Richards	K	13	0.0032	0.0013	0.0021
Richards	M	13	4.8709	1.0583	2.1082
von Bertalanffy	A	11	1191.22	674.55	831.59
von Bertalanffy	B	11	0.6976	0.6097	0.6548
von Bertalanffy	K	11	0.0049	0.0019	0.0035

**TABELA 16A - Número de animais em que o critério de convergência foi atingido, valores máximos e mínimos de cada parâmetro estimado nos ajustamentos individuais e parâmetros da curva média estimada com o uso de todas as pesagens de todos os machos, para cada função utilizada, no modelo ponderado com AR(2).**

Função	Parâmetro	N	Máximo	Mínimo	Curva Média
Brody	A	2	1183.25	1072.87	1128.06
Brody	B	2	0.9673	0.9611	0.9642
Brody	K	2	0.0014	0.0010	0.0012
Gompertz	A	10	774.36	617.52	687.25
Gompertz	B	10	3.0989	2.6812	2.9530
Gompertz	K	10	0.0058	0.0036	0.0045
Logística	A	22	711.47	429.23	568.54
Logística	B	22	19.2639	9.7140	14.9491
Logística	K	22	0.0163	0.0093	0.0119
Richards	A	10	1108.12	802.78	964.53
Richards	B	10	0.9528	0.4901	0.8691
Richards	K	10	0.0027	0.0014	0.0018
Richards	M	10	4.5691	1.1091	1.6939
von Bertalanffy	A	20	1180.68	692.49	848.54
von Bertalanffy	B	20	0.6906	0.6038	0.6504
von Bertalanffy	K	20	0.0047	0.0019	0.0032

**TABELA 17A - Rotina SAS, programa utilizado para obtenção das estimativas dos parâmetros para os modelos ponderados com estrutura de erros autorregressivos.**

---

```

Data função:
Input y animal x inversovar:
Cards:
46      1      0      0.071673
33      2      0      0.071673
48      3      0      0.071673
32      4      0      0.071673
:        :        :        :
:
:
Proc sort data=função:
By animal:
Prod model data=função:
Y=(escrever a função):
Parms A=A0  B=B0  K=K0:
%ar(y,p):
Fit y/outall out=all printall outest=estimativas:
Weight inversovar:
By animal:
Run:
Quit:
Proc print data=all:
Quit:
Proc print data=estimativas:
Quit:

```

---