LÚCIA HELENA COSTA BRAZ

UMA ABORDAGEM DIDÁTICA DA GEOMETRIA DOS PONTOS NOTÁVEIS DE TRIÂNGULOS UTILIZANDO ORIGAMI

LAVRAS – MG

2013

LÚCIA HELENA COSTA BRAZ

UMA ABORDAGEM DIDÁTICA DA GEOMETRIA DOS PONTOS NOTÁVEIS DE TRIÂNGULOS UTILIZANDO ORIGAMI

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado à Universidade Federal de Lavras, como parte das exigências do Programa de Pós- Graduação Profissional em Matemática, área de concentração em Matemática, para a obtenção do título de Mestre.

Orientador

Dr. Osnel Broche Cristo

LAVRAS – MG

2013

Ficha Catalográfica Elaborada pela Divisão de Processos Técnicos da Biblioteca da UFLA

Braz, Lúcia Helena Costa.
Uma abordagem didática da geometria dos pontos notáveis de triângulos utilizando origami / Lúcia Helena Costa Braz. – Lavras : UFLA, 2013.
76 p. : il.

Dissertação (mestrado) – Universidade Federal de Lavras, 2013.
Orientador: Osnel Broche Cristo.
Mestrado Profissional em Matemática.
Bibliografia.

1. Geometria plana. 2. Formação de professores. 3. Material didático. 4. Ensino e aprendizagem. 5. Dobraduras no ensino. I. Universidade Federal de Lavras. II. Título.

CDD – 373.133

LÚCIA HELENA COSTA BRAZ

UMA ABORDAGEM DIDÁTICA DA GEOMETRIA DOS PONTOS NOTÁVEIS DE TRIÂNGULOS UTILIZANDO ORIGAMI

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado à Universidade Federal de Lavras, como parte das exigências do Programa de Pós- Graduação Profissional em Matemática, área de concentração em Matemática, para a obtenção do título de Mestre.

APROVADO em 12 de março de 2013.

Dr. Francinildo Nobre Ferreira	UFSJ
Dr. Lucas Monteiro Chaves	UFLA

Dr. Osnel Broche Cristo
Orientador

LAVRAS – MG

2013

RESUMO

Este trabalho foi realizado com o objetivo principal de propor o uso da técnica do origami para servir de material de apoio para aulas de Geometria Euclidiana Plana do Ensino Fundamental. Para isso, foram elaboradas atividades, com instruções e ilustrações, que utilizam o origami para introduzir conceitos de Geometria, sendo o foco do trabalho, os pontos notáveis de um triângulo.

Palavras-chave: Geometria plana. Origami. Oficinas. Pontos notáveis. Triângulos.

ABSTRACT

This work presented as its main objective the proposal of using the origami technique as support material for classes in Euclidian Plane Geometry for Middle School. Thus, we elaborated activities, with instructions and illustrations, which use origami to introduce geometry concepts, with the triangle notable points as the focal point of the work.

Keywords: Plane geometry. Origami. Workshops. Notable points. Triangles.

LISTA DE FIGURAS

Figura 1 Símbolos dos caracteres da palavra origami 11
Figura 2 Tipos de dobras 14
Figura 3 Axioma 1 16
Figura 4 Axioma 2 17
Figura 5 Axioma 3: Retas r_1 e r_2 concorrentes 17
Figura 6 Axioma 3: Retas r_1 e r_2 paralelas 18
Figura 7 Axioma 4 18
Figura 8 Axioma 5 19
Figura 9 Axioma 6 19
Figura 10 Axioma 7 20
Figura 11 Dobragem simples 22
Figura 12 Dobra a ser feita 22
Figura 13 Resultado da dobra 23

SUMÁRIO

1	**INTRODUÇÃO**	8
2	**APRESENTAÇÃO E BREVE HISTÓRICO DO ORIGAMI**	11
3	**OS AXIOMAS DE HUZITA-HATORI**	16
4	**RECOMENDAÇÕES EM RELAÇÃO AO USO DA TÉCNICA DO ORIGAMI**	21
5	**OFICINAS**	25
5.1	**Dobraduras iniciais e lugares geométricos**	25
5.1.1	**Dobraduras iniciais**	26
5.1.2	**Lugares geométricos**	30
5.2	**Pontos notáveis de um triângulo**	37
5.2.1	**Introduzindo pontos notáveis de um triângulo**	39
5.3	**Triângulo acutângulo**	39
5.4	**Triângulo retângulo**	41
5.5	**Triângulo obtusângulo**	43
5.6	**Triângulo acutângulo**	53
5.7	**Triângulo retângulo**	54
5.8	**Triângulo obtusângulo**	55
5.8.1	**Relações entre pontos notáveis de um triângulo**	61
6	**CONCLUSÃO**	74
	REFERÊNCIAS	75

1 INTRODUÇÃO

Para que o ensino da Matemática contribua, para a formação do aluno, é imprescindível explorar temas que encontrem na Matemática uma ferramenta indispensável para serem compreendidos. Como o origami é um poderoso instrumento para o ensino de Geometria, forneceu-nos subsídio para elaboração do trabalho que nos foi proposto no curso de mestrado profissional de Matemática (PROFMAT), que deveria versar sobre temas específicos pertinentes ao currículo de Matemática do Ensino Básico e que tenham impacto na prática didática em sala de aula.

O Origami, por se tratar de uma arte de custo acessível, influencia positivamente no processo de ensino e aprendizagem da Geometria Euclidiana. É uma das raras oportunidades no ensino da Matemática, onde se pode pôr a "mão" no objeto de estudo. Com materiais simples, como papel A4, papel de jornal, papel reciclável, pode-se aprender Matemática de uma forma divertida. Assim o aluno percebe que, com uma simples folha de papel, pode construir, desde um simples polígono, como o hexágono, até um sólido geométrico, como o tetraedro.

Sendo assim, pode ser utilizado como recurso didático que colabora para o desenvolvimento da criatividade, do senso estético e do espírito de investigação, entre outras competências e habilidades recomendadas pelos Parâmetros Curriculares Nacionais para o Ensino Médio (BRASIL, 1998), nas categorias que dizem respeito à representação e comunicação, à investigação e compreensão e à contextualização sociocultural.

A autora do trabalho conheceu a técnica do origami para o ensino da Geometria Euclidiana por meio de uma colega de mestrado, a Eliane. Foi ouvindo-a relatar suas dificuldades, ao trabalhar com tal técnica, que a autora se interessou pelo tema e começou a pesquisar.

As pesquisas realizadas, para a elaboração das oficinas deste trabalho, centraram-se na utilização do Origami no ensino da Geometria, principalmente que tratasse de conceitos iniciais da Geometria e dos pontos notáveis de um triângulo. Houve relativa dificuldade em encontrar literatura disponível, pois existem poucos livros, principalmente publicados em português, que tratam do assunto. Assim nossa pesquisa foi considerando obras de autores como Leroy (2010) e Imenes (1994). No livro de Imenes (1994) e no trabalho de Leroy (2010), encontramos o uso das dobraduras, para introduzir noções de retas, ponto médio, bissetrizes, mediatrizes, pontos notáveis de um triângulo, entre outros.

Após a fase inicial de pesquisa e o levantamento dos materiais coletados, selecionamos os conteúdos para a elaboração das atividades que poderiam ser desenvolvidas para aplicação em sala de aula. Desta forma, as nossas pesquisas deram origem a dois trabalhos: um deles, da autora desse trabalho, voltado para a aplicação do origami no ensino da Geometria Plana com foco nos pontos notáveis de um triângulo. O outro, elaborado por Lucas (2013), que consiste em uma abordagem didática para a construção de poliedros e prismas.

Com a colaboração de Lucas (2013) e, uma vez selecionados os conteúdos dos trabalhos, elaboramos partes comuns aos dois trabalhos. Começamos pela introdução que ressaltam as motivações que nos levaram ao desenvolvimento dessa proposta de atividades educacionais. Apresentamos um breve histórico do origami, onde salientamos que a história do origami está diretamente ligada à história do papel, além de citarmos as sete possibilidades para uma única dobragem de Origami, que consistem nos axiomas de Huzita-Hatori. Como os iniciantes dessa técnica podem apresentar certa dificuldade, ao começar as primeiras dobras, trazemos recomendações e observações baseadas na nossa experiência para facilitar sua utilização em sala de aula.

Ao elaborarmos as oficinas com origami, ilustramos os diagramas de modo mais detalhado possível, levando os alunos à finalização de suas atividades e, ao mesmo tempo, permitindo a compreensão de conceitos abstratos. O trabalho está organizado em duas oficinas, onde a primeira apresenta dobraduras iniciais e lugares geométricos enquanto que a segunda trata dos pontos notáveis de um triângulo. A primeira oficina foi elaborada pensando em ser aplicada no 6º ano do ensino fundamental, pois, de acordo com a proposta do CBC (CARNEIRO, 2006), a Geometria Plana é introduzida neste ano. As atividades com origami seriam uma ferramenta, ao mesmo tempo, recreativa e educacional e que ainda poderiam contribuir facilitando na compreensão de conceitos abstratos. Em algumas atividades desta oficina elaboramos propostas de exercícios que o professor pode trabalhar em sala, assim, os alunos não só seguem as instruções e as executa, mas também têm a oportunidade de experimentar e refletir, podendo tirar suas próprias conclusões. E a segunda oficina, que trata dos pontos notáveis de um triângulo, é o foco do trabalho. Esta foi elaborada não só pensando na aplicação em sala de aula, principalmente, porque este conteúdo é tratado como complementar na proposta do CBC (CARNEIRO, 2006), pensamos que esta pode ser trabalhada, por exemplo, por grupos de estudos da OBMEP (Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas). Esta segunda oficina foi dividida em duas, onde a primeira tem como objetivo introduzir os pontos notáveis e, a segunda, estudar relações entre estes pontos.

Concluindo, acreditamos que, sendo o resultado final da dobradura um material manipulável, permite ao aluno manusear o objeto em estudo, analisar seus elementos, propriedades e características.

2 APRESENTAÇÃO E BREVE HISTÓRICO DO ORIGAMI

A origem da palavra origami advém do japonês e é composta por dois caracteres: o primeiro “Ori” deriva do desenho de uma mão e significa dobrar. O segundo, “Kami”, deriva do desenho da seda, significa papel e Deus, uma indicação da importância do papel para os japoneses. Ao juntar os dois caracteres, “cai” o K e a pronúncia fica origami.

Segundo Rafael (2011), em qualquer livro da especialidade pode-se ler que “O Origami é a arte japonesa de dobrar papel”.

Ori **Kami**

Figura 1 Símbolos dos caracteres da palavra origami

Fonte: História... (2013)

Pode-se dizer que o trabalho com origami pode ser dividido em dois tipos: o origami tradicional, que utiliza apenas uma peça de papel e não envolve o uso de cortes nem colagem, e o origami modular, que se baseia na construção de módulos ou unidades, na qual se dobram várias peças independentes transformando-as em módulos, que possuem aberturas que serão unidas entre si e cujo objetivo é dar origem, quase sempre, a corpos geométricos.

A história do origami está diretamente ligada à história do papel e, apesar de o Japão ser considerado o berço do origami, diz-se, também, que ele pode ter surgido na China, onde a história do papel é bem mais antiga. Neste país, a invenção do papel foi creditada, em 105 d.C., a T’sai Lao, alto funcionário da corte real, que começou a misturar cascas de árvores, panos e redes de pesca na tentativa de substituir a sofisticada seda que se utilizava para escrever.

O império chinês manteve segredo sobre as técnicas de fabricação do papel durante séculos, pois exportava este material a preços altos. No século VI, por intermédio de monges coreanos, a técnica para fabricar papel chegou ao Japão, país em que o origami se desenvolveu tal como se conhece hoje e, um século mais tarde, os árabes obtiveram o segredo desse processo. Na Europa, a técnica chegou por volta do século XII e, dois séculos mais tarde, já se espalhava por todos os reinos cristãos.

No Brasil, acredita-se que a arte do Origami íniciou-se por dois meios: - por nosso país vizinho, a Argentina, que possuía muita influência da cultura espanhola e por meio dos imigrantes japoneses que aqui vieram, a partir de 1908.

Segundo o artigo de Rafael (2011), a história do origami pode ser dividida em três grandes períodos:

a) o período Heian, que vai de 794 a 1185: neste período, o origami era visto como um divertimento das classes mais ricas, pois eram as únicas que tinham condições de adquirir o papel, que era um artigo de luxo;
b) período Muromachi, que vai de 1338 a 1573: neste período, o papel tornou-se um produto mais acessível e o origami começou a ser utilizado para distinguir as diversas classes sociais conforme os adornos que as pessoas usavam;
c) o período Tokugawa, que vai de 1603 a 1867: também conhecido como o período da democratização do papel. Foi neste que se deu a popularização do origami, surgiu a dobradura original do *tsuru*

> (cegonha), sem dúvida a mais popular no Japão e, também, surgiram os primeiros livros de Origami. Em 1845 foi publicado o livro *Janela Aberta à Estação do Inverno*, que incluía cerca de 150 modelos de origami. Graças a esta publicação, o origami espalhou-se no Japão como uma atividade tanto recreativa como educacional.

Muito dessa evolução se deve ao espalhamento desta arte ao redor do mundo, que só foi possivel quando foi trancendida a barreira da lingua, quando se criou um sistema de diagramação. Este sistema consiste em códigos formados por setas, linhas pontilhadas e outros símbolos, criado pelo mestre japonês Akira Yoshizawa, em 1956. Desta forma, Yoshizawa com a colaboração do americano Sam Randlett criou uma simbologia (Sistema Yoshizawa – Randlett, 1956), de instruções para dobrar os modelos que constituem a linguagem do origami.

Para finalizar este breve histórico sobre origami, não seria possível deixar de citar Humiaki Huzita, um matemático japonês- italiano (nasceu no Japão, mas viveu grande parte de sua vida na Itália), conhecido por formular, no final da década de 70 do século passado, os primeiros seis axiomas, conhecidos como axiomas de Huzita, que descreviam a Matemática de dobrar o papel para resolver problemas de construção geométrica.

De acordo com Lang (2003, p. 11), em origami, existem dois tipos de dobras que são representados no sistema de Yoshizawa por linhas tracejadas diferentemente denominadas dobra em vale e dobra em montanha (Figura 2).

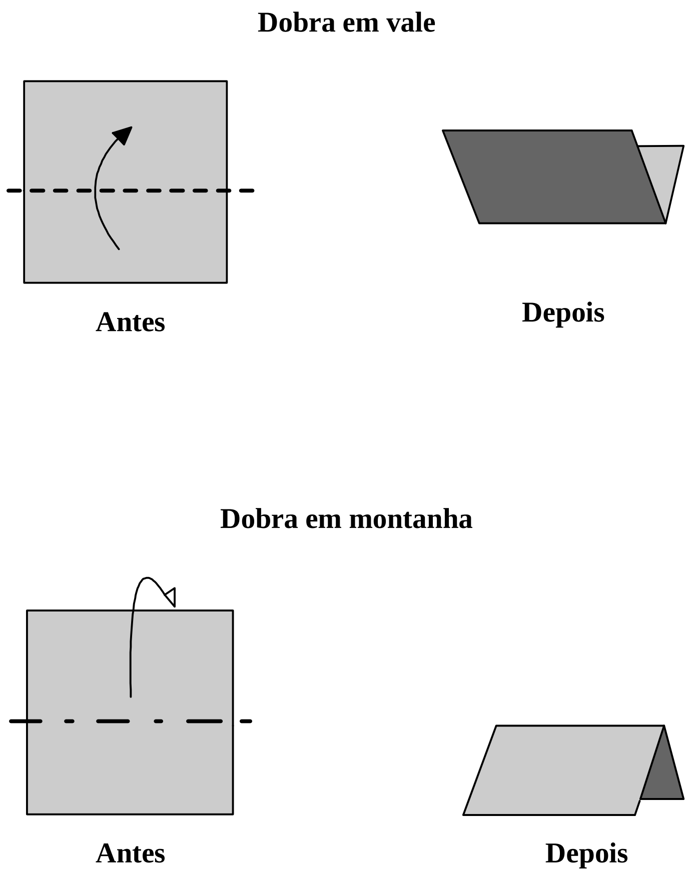


Figura 2 Tipos de dobras

Outro aspecto a considerar na história do Origami é a forma do papel utilizado nas dobragens. Durante vários anos, os modelos eram construídos a partir de um papel com formato de quadrado, mas, mais recentemente, passaram a ser utilizadas outras formas e, muitos dos modelos poliédricos são construídos a partir de retângulos semelhantes a uma folha A4, cuja razão entre o lado menor e o lado maior é $1:\sqrt{2}$.

Da mesma forma que as construções geométricas tradicionais, as construções realizadas, por meio de dobraduras, são regidas por um corpo axiomático. O conjunto de axiomas necessários, para realizar construções geométricas, por meio de dobraduras no papel, é conhecido como axiomas de Huzita-Hatori, obtidos em Lank (2012). Desta forma, os axiomas enumerados abaixo regem todas as construções realizáveis via dobraduras em papel.

3 OS AXIOMAS DE HUZITA-HATORI

As dobras que ilustram os axiomas foram feitas de maneira direta, sem o passo a passo para construí-las, pois o estudo dos axiomas não é foco do trabalho.

Axioma 1: Dados dois pontos distintos P_1 e P_2, existe apenas uma dobra que passa por eles.

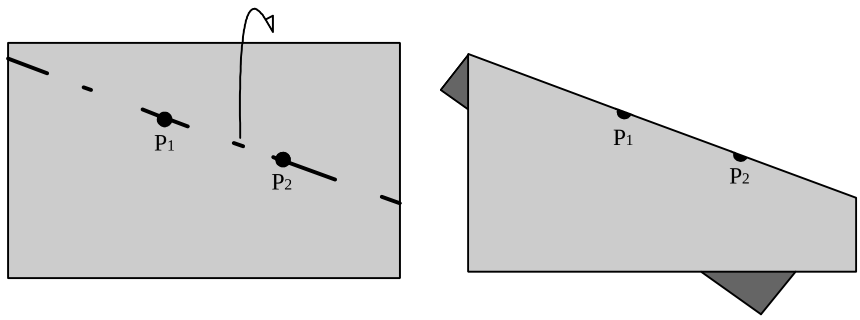


Figura 3 Axioma 1

Axioma 2: Dados dois pontos distintos P_1 e P_2, existe apenas uma dobra que faz coincidir P_1 com P_2.

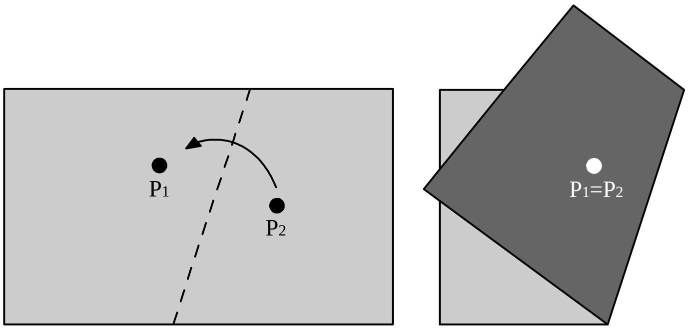


Figura 4 Axioma 2

Axioma 3: Dadas as retas r_1 e r_2, existe apenas uma dobra que faz coincidir r_1 com r_2.

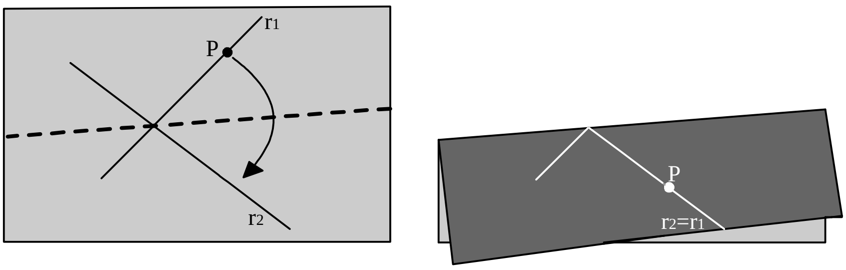


Figura 5 Axioma 3: Retas r_1 e r_2 concorrentes

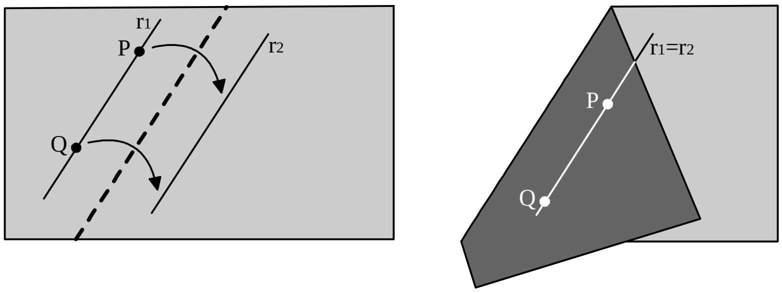


Figura 6 Axioma 3: Retas r_1 e r_2 paralelas

Axioma 4: Dados um ponto P e uma reta r, existe uma única dobra que é perpendicular a r e que passa por P.

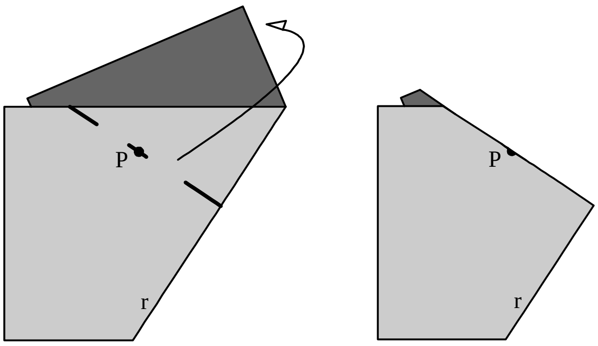


Figura 7 Axioma 4

Axioma 5: Dados dois pontos distintos P_1 e P_2 e uma reta r, existe uma dobra que faz incidir P_1 em r e que passa por P_2.

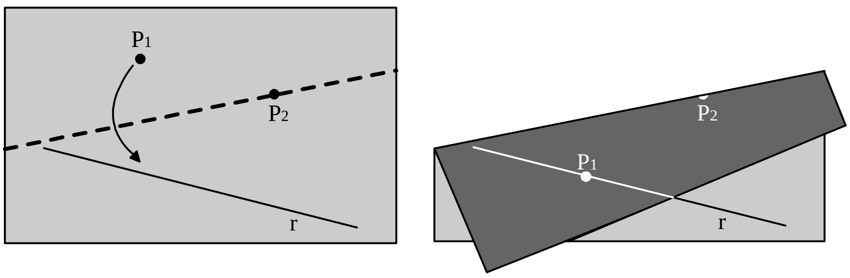


Figura 8 Axioma 5

Axioma 6: Dados dois pontos P_1 e P_2 e duas retas r_1 e r_2, existe uma dobra que faz incidir P_1 sobre r_1 e P_2 sobre r_2.

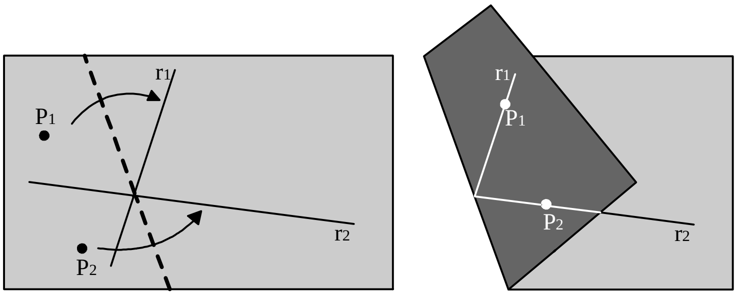


Figura 9 Axioma 6

Axioma 7: Dados um ponto P e duas retas r_1 e r_2, existe uma dobra que faz incidir P em r_1 e é perpendicular a r_2.

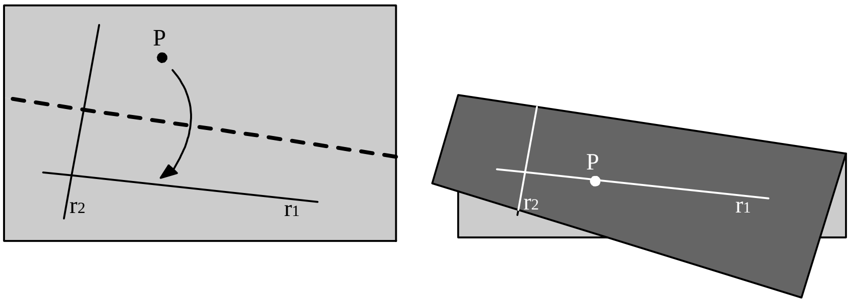


Figura 10 Axioma 7

4 RECOMENDAÇÕES EM RELAÇÃO AO USO DA TÉCNICA DO ORIGAMI

Levando em consideração que iniciantes no estudo da técnica origami podem apresentar certa dificuldade, ao começar as primeiras dobras, mostraremos abaixo algumas recomendações em relação às dobragens e observações sobre como se vão expor os passos e figuras das atividades ao longo do trabalho. Estas recomendações e observações são baseadas na nossa prática, durante o desenvolvimento deste, na nossa experiência e no livro de Mitchell (2008).

Cada passo de cada atividade, em sua maioria, está organizado em uma série de figuras que apresentam o modelo "antes" e "depois". Os símbolos que serão utilizados para ilustrar as dobragens são baseados no sistema inventado por Akira Yoshizawa.

Uma figura "antes" para uma dobragem simples pode ter o aspecto da figura da esquerda abaixo. Para fazer esta dobra (com a folha sobre a carteira), levante o lado direito do papel e, seguindo o sentido indicado pela seta, coloque-o sobre o lado esquerdo. Segure firmemente o papel e faça uma pequena dobra sobre o centro do lado direito. Se os lados não tiverem se movido, finalize a dobra passando uma unha para acentuar o papel. Se a dobra tiver sido bem feita (e espera-se que seja), o resultado tem o aspecto da figura da direita abaixo.

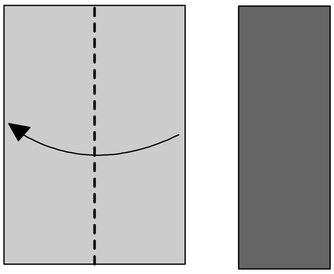


Figura 11 Dobragem simples

Depois de ter feito esta dobra e desdobrado, haverá uma linha pontilhada no meio da folha que indica a dobradura realizada (figura da esquerda abaixo). As dobras serão sempre mostradas logo a seguir a serem feitas, mas às vezes há tantas dobras que, para distinguir as que representam dobras já realizadas da que está se propondo fazer, será colocada a linha pontilhada da dobra a ser feita **em negrito**.

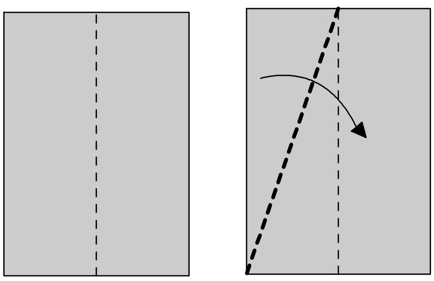


Figura 12 Dobra a ser feita

Para fazer a dobra proposta, na figura da direita acima, observe primeiro a linha que está em negrito, ela assinala onde ficará a dobra. Neste caso, a nova dobra irá da dobra central até o canto inferior esquerdo. O problema é que a seta de movimento termina num espaço vazio, por isso não se pode saber exatamente aonde o canto que vai se mover irá ficar. A melhor maneira de fazer esta dobradura é dobrar pequenas seções de cada vez. Comece da dobra existente e vá avançando mais ou menos na direção certa.

Dobre esta primeira seção, mas mantenha o resto da dobra indefinida até ter certeza de que passa exatamente no ponto do canto e vá dobrando o papel por fases, ajustando-o sempre que necessário até acertar. O resultado está ilustrado na figura abaixo.

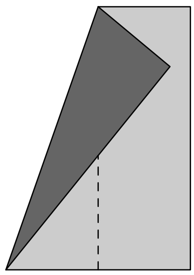


Figura 13 Resultado da dobra

É mais fácil fazer dobras com o papel sobre uma superfície lisa e dura, mas há casos em que retirá-lo da superfície, também, pode ser vantajoso. Não receie em virar a folha ao contrário para poder fazer a dobra de forma mais natural. O que pode ser fácil para uma pessoa destra, por exemplo, pode não ser para uma pessoa canhota.

Nas figuras, usamos um papel com faces de cores diferentes para ilustrar melhor as dobras. Note que, quando se faz uma dobra para frente, a face colorida fica no exterior do papel. Se a dobra for feita para trás, a face colorida fica no interior do papel. No entanto, mesmo que não se use papel de duas cores, esta distinção pode ser importante para melhor compreensão das figuras. Em alguns passos, se fará a dobra para frente (em sua maioria) e, em outros, para trás, isto se deve à nossa experiência com a técnica origami e à nossa prática, durante o desenvolvimento deste trabalho, por exemplo, ao se fazer uma dobra sobre uma reta, ou uma dobra que passe por dois pontos distintos, percebe-se que a dobragem torna-se mais fácil se for feita para trás. Cabe observar que a dobra obtida será a mesma, independente de realizar para frente ou para trás, o que muda é como chegar até tal dobra. E a própria escolha será sempre baseada na nossa prática, valendo observar, também, que há casos em que tanto uma quanto outra, o grau de dificuldade é o mesmo.

Para que o professor consiga atingir seus objetivos em uma aula de Geometria utilizando origami, é conveniente iniciá-la partindo-se de dobras mais simples, para que os alunos se familiarizem com os diagramas e dobras e vão adquirindo mais segurança para realizar as construções que incluem mais elementos. Sugere-se que o professor discuta com os alunos as relações matemáticas encontradas, durante a construção, orientando a aprendizagem da matemática por meio do origami, caso contrário o aluno apenas realizará a atividade, não associando as dobras com a matemática.

Vale ressaltar que não há obrigatoriedade em trabalhar as atividades propostas neste trabalho na sequência apresentada. O professor pode executar a atividade que melhor se encaixe no seu conteúdo. Sugere-se apenas que se dê uma pequena introdução sobre o origami.

Uma das dificuldades previstas durante a execução das atividades é que o professor poderá encontrar alunos com dificuldade motora para realizar as dobras no papel com certa perfeição, devendo, assim, dar maior assistência a estes alunos. É aconselhável que o professor tenha ajuda de alguns monitores para executar as atividades.

5 OFICINAS

5.1 Dobraduras iniciais e lugares geométricos

O objetivo principal dessa oficina é ilustrar alguns conceitos elementares da Geometria Euclidiana Plana.

De acordo com a proposta do CBC (CARNEIRO, 2006), a Geometria Plana é introduzida no 6º ano, onde o aluno começa a identificar segmento, ponto médio de um segmento, triângulo e seus elementos, polígonos, entre outros. Assim, sugerimos que as atividades apresentadas nesta oficina sejam trabalhadas em tal série, pois pensamos que as atividades com dobraduras devam ser realizadas ao iniciar o conteúdo, servindo como ferramenta para fixação de conceitos. Sugerimos ainda que, ao introduzir os pontos notáveis de um triângulo (conteúdo que é apresentado na proposta como complementar, assim, pode ser trabalhado no ano em que cada professor achar mais conveniente), o professor faça as atividades desta oficina antes de trabalhar as atividades específicas sobre pontos notáveis.

Para a realização das atividades, o professor pode utilizar folhas de papel A4 (gramatura $75g/m^2$, 210mm x 297mm), apesar de que todo papel de espessura moderada vai atender a finalidade. Escolhemos o papel A4 em função do fácil acesso e baixo custo. Utilizaremos, também, a régua em algumas atividades, assim, a forma obtida não é propriamente um origami, pois como já foi citado na introdução, o origami tradicional utiliza apenas uma peça de papel e não envolve o uso de cortes nem colagem.

Para esta oficina, recomendamos que, com a turma dividida em duplas (as duplas servem para que um aluno possa auxiliar o outro durante a aula), o professor distribua as folhas para que os alunos façam as atividades (uma folha

A4 para cada aluno é suficiente para a realização das atividades propostas nesta oficina). Neste momento, sugerimos que o professor mostre e peça aos alunos para dividir a folha em oito partes, isto porque as atividades propostas nesta oficina podem ser feitas em um pedaço pequeno da folha e, assim, ainda evitamos desperdício de material. Caso o professor tenha acesso a uma guilhotina de papel, recomendamos que ele faça os recortes e os leve prontos para a sala de aula, pois o recorte obtido assim possui uma qualidade considerável.

Para passar as instruções sugerimos o uso do data-show ou, se não for possível, que o professor imprima algumas folhas com as instruções e proponha que as atividades sejam feitas em grupo. Ressalta-se que a intenção não é apenas que os alunos sigam as instruções e as execute, mas que experimente e reflita e, sempre que possível, cheguem às suas próprias conclusões verbalizando-as para a turma.

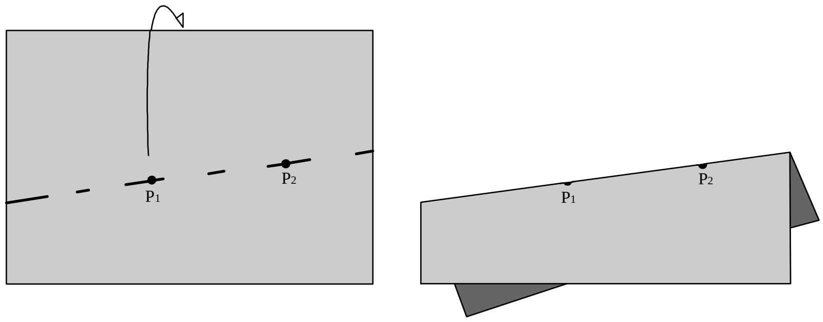
Sugerimos ainda que, ao passar as instruções, o professor vá realizando as dobras junto com a turma.

Ao fim de cada atividade, apresentamos uma justificativa que sugerimos ser apresentada e discutida com os alunos.

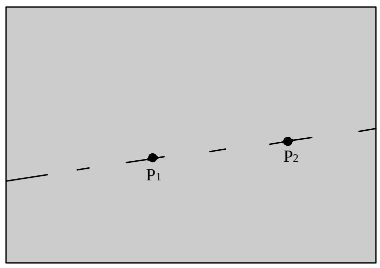
5.1.1 Dobraduras iniciais

Atividade 1: A reta que passa por dois pontos distintos

Passo 1: Sobre uma folha de papel, marque dois pontos distintos P_1 e P_2 e faça uma dobra para trás que passe por eles. (Verifique que é mais difícil obter tal dobra se tentarmos fazê-la para frente).



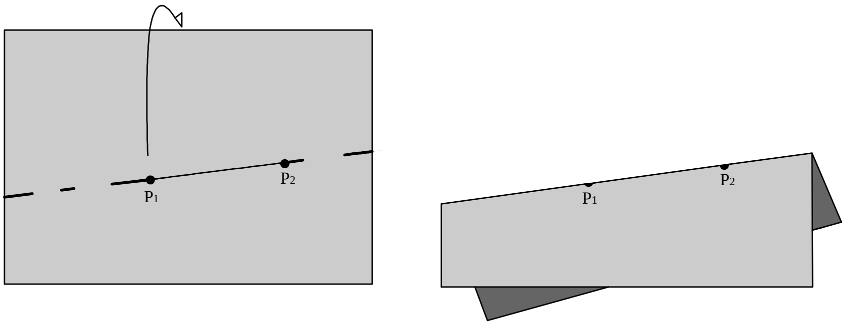
Passo 2: Desdobre. A dobra é a reta que passa pelos pontos P_1 e P_2 (dobra do axioma 1).



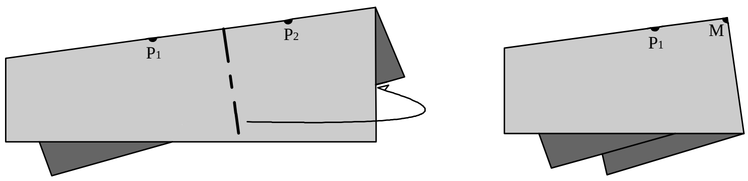
Observação: Nas próximas atividades, introduziremos o uso da régua para traçar segmentos, retas e semirretas.

Atividade 2: O ponto médio de um segmento

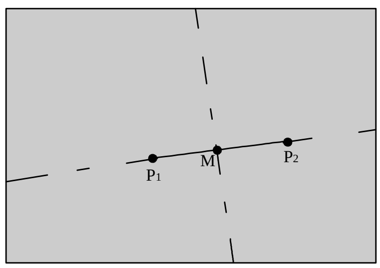
Passo 1: Com o auxílio de uma régua, trace o segmento $P_1 P_2$ e, em seguida, faça uma dobra para trás que passe por tal segmento (passo 1 da atividade 1).



Passo 2: Faça uma dobra de modo a coincidir os pontos P_1 e P_2 e marque o ponto M no canto superior da dobra obtida.



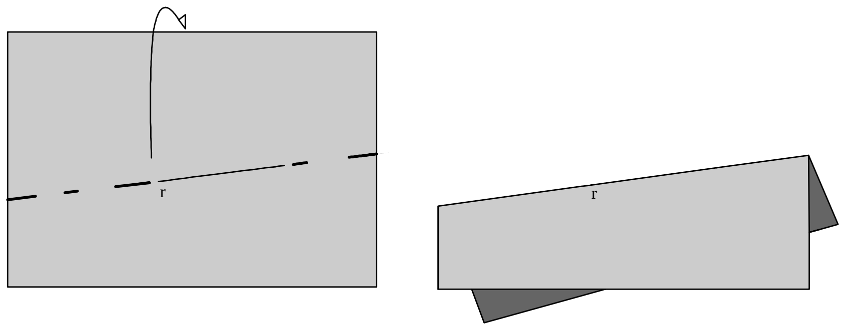
Passo 3: Desdobre as duas dobras. (dobra do axioma 2).



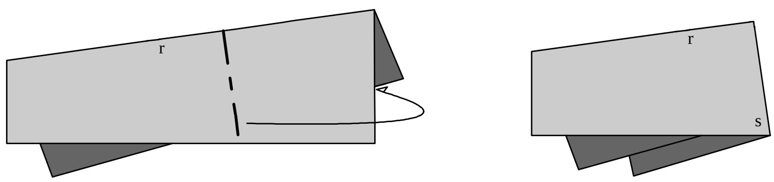
Justificativa: Observe que, no passo 2, ou seja, no momento em que fizemos coincidir os pontos P_1 e P_2, os segmentos P_1M e MP_2 se sobrepõem, o que corresponde a dizer que tais segmentos são congruentes. Logo, M é ponto médio de P_1P_2.

Atividade 3: Perpendicular a uma reta dada

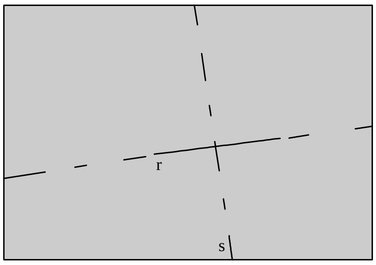
Passo 1: Com o auxílio de uma régua trace uma reta r e, em seguida, faça uma dobra sobre tal reta.



Passo 2: Faça uma dobra originando duas semirretas coincidentes em r. Denotemos por s esta dobra.



Passo 3: Desdobre as duas dobras. (dobra do axioma 4).



Justificativa: Note que os quatro ângulos formados por r e s se sobrepõem no passo 2 sendo, portanto, congruentes. Como a soma dos ângulos formados por r e s é 360º, segue que cada ângulo é de 90º. Logo, r e s são perpendiculares.

Exercícios

1) Considere uma reta r e um ponto P tal que $P \notin r$. Obtenha a perpendicular a r que passa por P.

2) Como obter a perpendicular a um segmento AB que passe por A?

5.1.2 Lugares geométricos

Definição

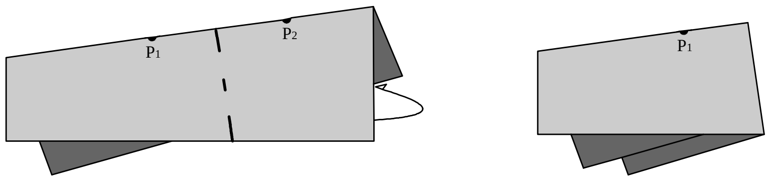
A expressão lugar geométrico nada mais é que um conjunto de pontos que satisfazem uma determinada propriedade.

Atividade 1: Mediatriz

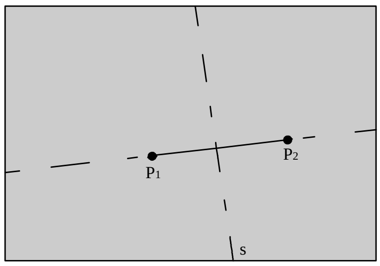
Dado um segmento P_1P_2, a mediatriz deste segmento é o lugar geométrico dos pontos do plano que equidistam de P_1 e de P_2, isto é, a reta perpendicular a P_1P_2 que passa por seu ponto médio.

Observe que esta atividade consiste na atividade 2 da oficina anterior.

Passo 1: Partindo da dobra que passa pelo segmento P_1P_2, faça uma dobra de modo a coincidir os pontos P_1 e P_2.



Passo 2: Desdobre as duas dobras. Seja s a reta determinada pela última dobradura.



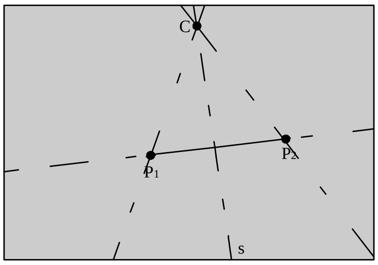
Justificativa: Observe que, no passo 1, ao coincidir os pontos P_1 e P_2, obtemos o ponto médio do segmento dado. Note, também, que os segmentos originados em P_1P_2 coincidiram, logo, a dobra determinada é perpendicular a P_1P_2. Portanto, tal dobra é a mediatriz do segmento $P_1\,P_2$.

Exercício

1) Outra maneira de justificar que a reta s é a mediatriz do segmento $P_1 P_2$ é por meio do conceito desta como lugar geométrico, para isto, propomos os seguintes procedimentos após o passo 2.

Passo 3: Marque um ponto C qualquer sobre a reta s e faça uma dobra que passe pelos pontos P_1 e C e outra que passe pelos pontos P_2 e C.

Passo 4: Faça uma dobra de modo a coincidir P_1C e P_2C.



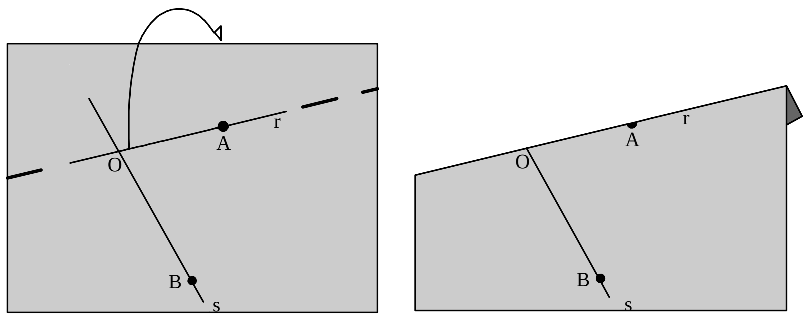
Com estes passos, os alunos observarão que P_1C e P_2C se sobrepõem sendo, portanto, congruentes. Logo, C equidista de P_1 e de P_2, e como C é um ponto qualquer de s, temos que s é a mediatriz de P_1P_2.

Atividade 2: Bissetriz

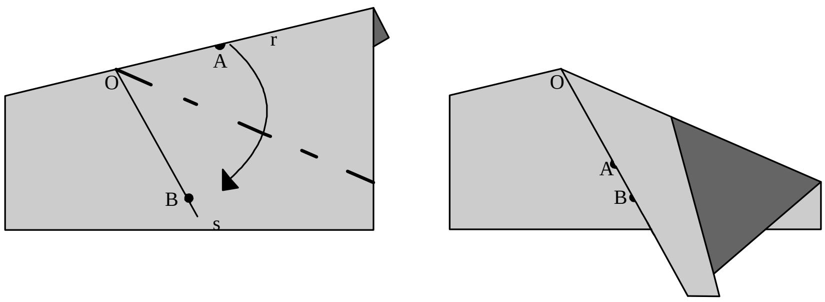
Dado um ângulo $\angle AOB$, a bissetriz deste ângulo é o lugar geométrico dos pontos do plano que equidistam das semirretas $\overrightarrow{OA}$ e $\overrightarrow{OB}$, isto é, a semirreta que divide $\angle AOB$ em dois ângulos congruentes.

Passo 1: Com o auxílio de uma régua, trace duas retas concorrentes r e s. Seja O, o ponto de interseção entre tais retas; A, um ponto pertencente a r

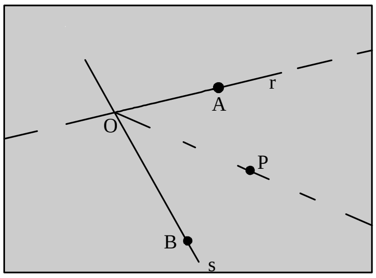
e B, um ponto pertencente a s. Vamos obter a bissetriz do ângulo $\angle AOB$. Faça uma dobra sobre a reta r.



Passo 2: Faça uma dobra sobrepondo as retas r e s. (Note que a dobra para frente aqui é melhor).



Passo 3: Desfaça as dobras e marque o ponto P sobre a dobra que ficou na região interna às semirretas $\overrightarrow{OA}$ e $\overrightarrow{OB}$.



Justificativa: Observe que, no passo dois, os ângulos $A\hat{O}P$ e $B\hat{O}P$ se sobrepõem, sendo, portanto, congruentes. Logo, a semirreta $\overrightarrow{OP}$ divide o ângulo AOB em dois ângulos congruentes, o que mostra que $\overrightarrow{OP}$ é a bissetriz do ângulo AOB.

Note que esta é a dobra do axioma três, no caso das retas serem concorrentes.

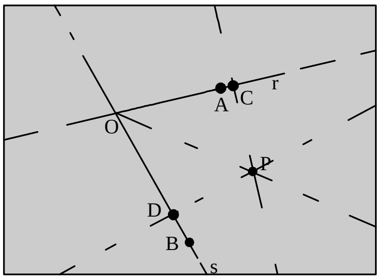
Exercícios

1) Outra maneira de justificar que semirreta $\overrightarrow{OP}$ é a bissetriz do ângulo AOB é por meio do conceito desta como lugar geométrico, para isto, propomos os seguintes procedimentos após o passo 3.

Passo 4: Faça uma dobra sobre a reta r e , em seguida, faça uma dobra de modo a obter a perpendicular a r que passa por P. Marque o ponto C obtido em r.

Passo 5: Desfaça as dobras e proceda como no passo anterior para a reta s (obtendo, assim, a perpendicular a s que passa por P e o ponto D).

Passo 6: Faça uma dobra de modo a coincidir PC e PD.



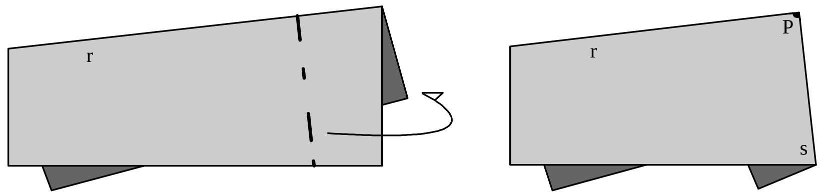
Com estes passos, os alunos observarão que PC e PD se sobrepõem sendo, portanto, congruentes. Logo, P equidista das semirretas $\overrightarrow{OA}$ e $\overrightarrow{OB}$, e, assim, $\overrightarrow{OP}$ é a bissetriz do ângulo AOB.

2) Como obter o lugar geométrico dos pontos do plano que equidistam de duas retas concorrentes?

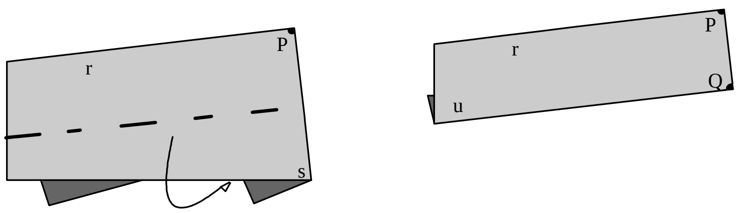
Atividade 3: Retas paralelas

O lugar geométrico dos pontos do plano que equidistam de uma reta r dada é um par de retas paralelas a r, isto é, as perpendiculares a uma perpendicular a r que equidistam de r.

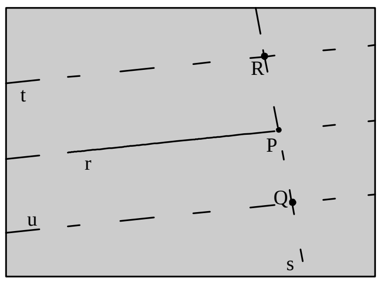
Passo 1: Partindo da dobra que passa pela reta r, obtenha uma perpendicular a ela e denote tal dobra por s. Seja P o ponto de interseção entre r e s.



Passo 2: Obtenha uma perpendicular a s e denote tal dobra por u. Seja Q o ponto de interseção entre s e u.



Passo 3: Desfaça todas as dobras. Denotemos por t a outra dobra determinada no passo 2 e R o ponto de interseção entre t e s. As dobras t e u correspondem às paralelas à reta r.



Justificativa: Observe, nos passos um e dois, as perpendiculares e a sobreposição dos segmentos PQ e PR.

Observe que, dependendo da posição de Q, a reta t pode ficar de fora da folha.

Exercício

1) Outra maneira de justificar que as dobras t e u correspondem às paralelas à reta r é por meio do conceito destas como lugar geométrico, para isto, propomos os seguintes procedimentos após o passo 3.

Passo 4: Faça uma dobra sobre a reta t e, em seguida, faça uma dobra de modo a coincidir a reta t com a reta u. (dobra do axioma 3, no caso das retas paralelas).

Com isso, os alunos observarão que a dobra "determinada" é exatamente a reta r, ou seja, t e u equidistam de r.

5.2 Pontos notáveis de um triângulo

Objetivou-se, principalmente, com essa oficina, introduzir os pontos notáveis de um triângulo e algumas propriedades. Como este conteúdo é apresentado como complementar na proposta do CBC (CARNEIRO, 2006), o professor pode trabalhar as atividades desta oficina na série em que achar mais conveniente.

Faremos uso de folha A4, régua, cola e tesoura. Recomendamos que, ao distribuir as folhas, o professor peça aos alunos para dividi-la em duas partes, isto porque as atividades propostas nesta oficina partirão de recortes de triângulos que podem ser obtidos de meia folha, ou ainda, mesmo quando estes triângulos não forem recortados, meia folha é suficiente. Não sugerimos dividir a folha em mais partes, pois isto pode dificultar em algumas dobraduras. Outra sugestão que damos e, por experiência achamos que pode tornar a aula mais prática e objetiva, é que o professor leve, para a sala de aula, os triângulos já recortados, pois a proposta de que os alunos façam tais recortes pode atrasar ou até mesmo atrapalhar a realização das atividades e, obter estes recortes, não faz parte dos objetivos das atividades.

Observação: Em algumas atividades desta oficina, trabalharemos com o triângulo recortado, enquanto que em outras, o triângulo será trabalhado em uma folha. Isto se deve ao fato de alguns pontos notáveis serem exteriores ao triângulo, à nossa experiência com a técnica origami e à nossa prática durante o desenvolvimento deste trabalho, por exemplo, para obter a bissetriz de um ângulo interno do triângulo. Caso ele não esteja recortado, temos que fazer uma dobra sobre um dos lados que forma o ângulo (pois fica mais difícil obter a bissetriz sem tal dobra) para depois fazer coincidir os dois lados, enquanto que, se o triângulo estiver recortado, é simples fazer coincidir dois lados (basta a última dobra).

Apresentaremos atividades com o circuncentro e o ortocentro nos triângulos acutângulo, retângulo e obtusângulo, pois observaremos as posições que tais pontos possuem nestes tipos de triângulos, além de um estudo de propriedades. A atividade do circuncentro no triângulo obtusângulo será proposta em um recorte de triângulo, o que pode instigar a curiosidade dos alunos para o fato: será que as três mediatrizes não concorrem em um único ponto? (pois ao fazerem as dobras no recorte, o circuncentro não surgirá por se tratar de um ponto exterior ao triângulo neste caso). A atividade do ortocentro no triângulo obtusângulo (que também é um ponto exterior neste tipo de triângulo) será proposta em uma folha sem o recorte, pois, assim, trabalhamos pontos exteriores com folhas diferentes.

Nos casos do incentro e do baricentro, por se tratarem de pontos sempre interiores ao triângulo, apresentaremos tais atividades apenas no triângulo acutângulo e, caso o professor ache interessante, pode aplicá-las nos triângulos retângulo e obtusângulo.

5.2.1 Introduzindo pontos notáveis de um triângulo

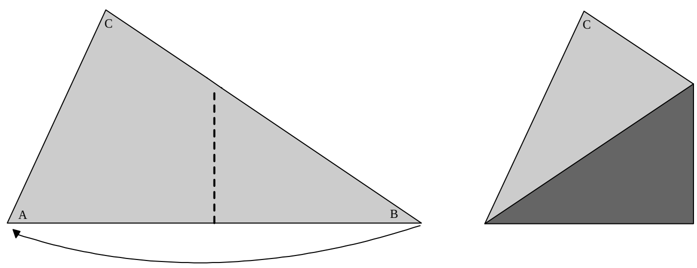
Atividade 1: Mediatrizes no triângulo - circuncentro

Objetivou-se com esta atividade ilustrar que as mediatrizes dos lados de um triângulo se intersectam em um único ponto e ilustrar que tal ponto é o centro da circunferência circunscrita a este triângulo.

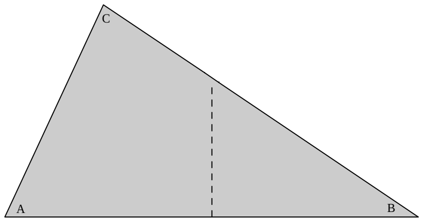
A atividade vai ser feita para os triângulos acutângulo, retângulo e obtusângulo pela posição relativa do ponto de interseção das mediatrizes em relação ao triângulo em cada caso.

5.3 Triângulo acutângulo

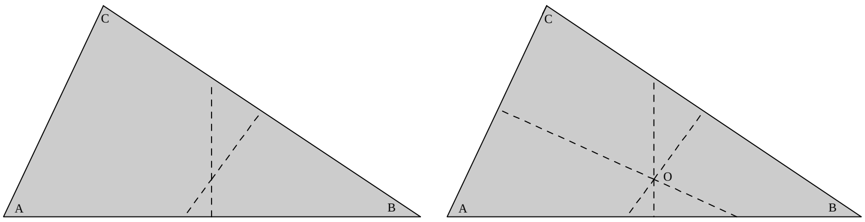
Passo 1: Partindo do recorte de um triângulo acutângulo ABC, faça uma dobra de modo a coincidir os vértices A e B.



Passo 2: Desdobre. A dobra determinada é a mediatriz do lado AB.



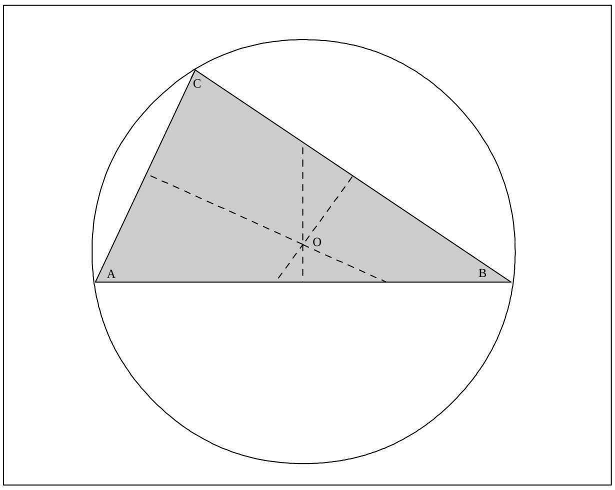
Repita os passos anteriores para os outros dois lados (BC e AC), obtendo os resultados ilustrados abaixo:



Observe que as três mediatrizes se intersectam em um único ponto, que é interior ao triângulo, chamado de *circuncentro* do triângulo e denotado por O. Este nome vem do fato do circuncentro ser o centro da circunferência circunscrita ao triângulo, a circunferência que passa pelos três vértices.

- Cole o triângulo em uma folha.

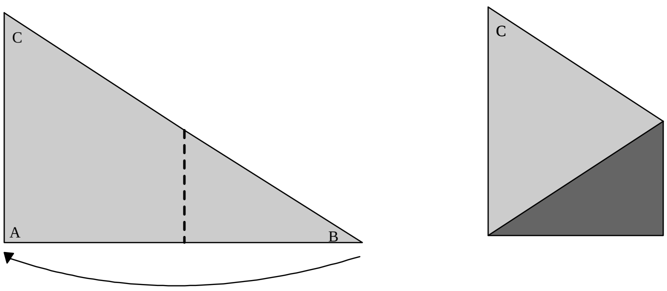
- Centre o compasso no circuncentro e, com uma abertura que vai até um dos vértices do triângulo, trace a circunferência.



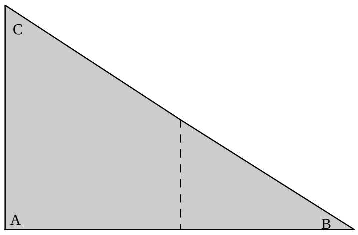
Observe que a circunferência é circunscrita ao triângulo, isto é, o circuncentro é o centro da circunferência circunscrita, o ponto que equidista dos três vértices.

5.4 Triângulo retângulo

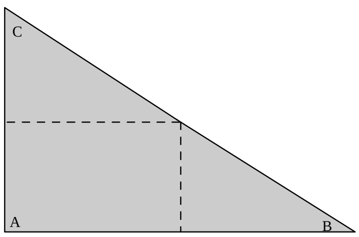
Passo 1: Partindo do recorte de um triângulo retângulo ABC, faça uma dobra de modo a coincidir os vértices A e B.

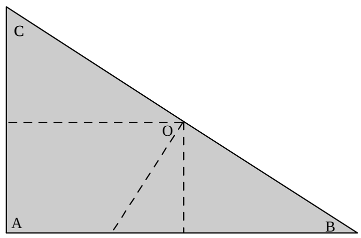


Passo 2: Desdobre. A dobra determinada é a mediatriz do lado AB.

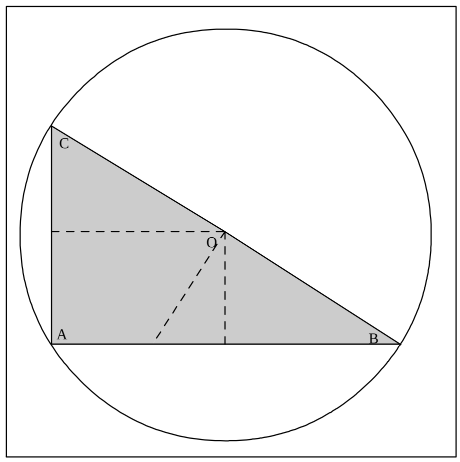


Repita os passos anteriores para os outros dois lados (BC e AC), obtendo os resultados ilustrados abaixo:



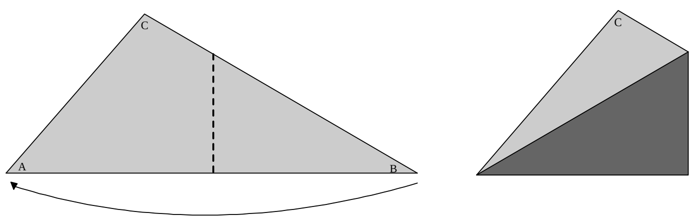


Observe que, neste caso, as três mediatrizes também se intersectam em um único ponto, o circuncentro do triângulo, mas agora o circuncentro é o ponto médio da hipotenusa. Assim a hipotenusa é um diâmetro da circunferência circunscrita.

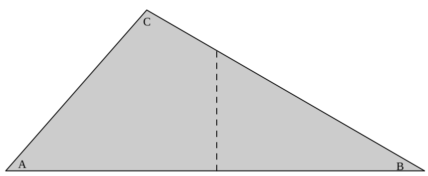


5.5 Triângulo obtusângulo

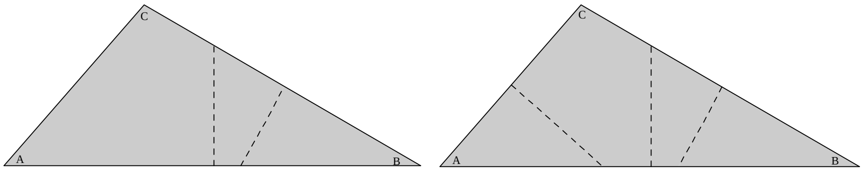
Passo 1: Partindo do recorte de um triângulo obtusângulo ABC, faça uma dobra de modo a coincidir os vértices A e B.



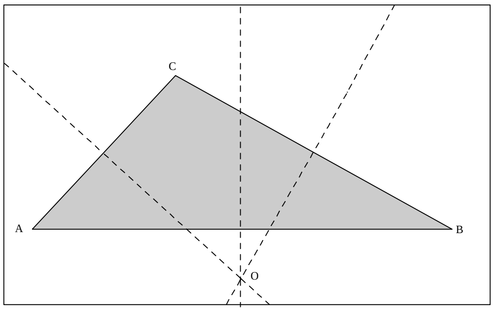
Passo 2: Desdobre. A dobra determinada é a mediatriz do lado AB.



Repita os passos anteriores para os outros dois lados (BC e AC), obtendo os resultados ilustrados abaixo:



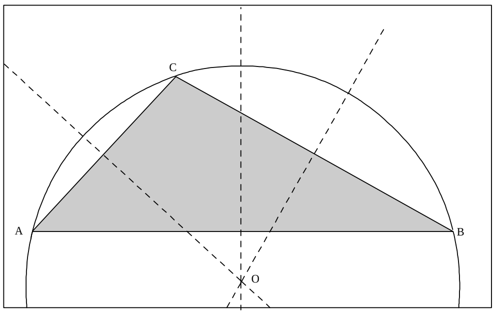
Note que não obtivemos o circuncentro. Para obtê-lo, cole o triângulo em uma folha e faça dobras por cada uma das mediatrizes.



Note que, neste caso, o ponto de interseção entre as três mediatrizes é exterior ao triângulo.

Observe que as três mediatrizes concorrem em um único ponto, mas dependendo do triângulo, pode ser um ponto deste, um ponto interior ou exterior a ele. Outra possibilidade seria trabalhar na folha sem recortar. A desvantagem de se trabalhar sem o recorte do triângulo é que se fazem mais dobras, o que pode tornar a atividade mais trabalhosa e demorada. Veja que, para obter a mediatriz de um lado qualquer do triângulo, caso ele não esteja recortado, teríamos que fazer uma dobra sobre o lado para então fazermos coincidir os vértices, isto porque fazer coincidir os vértices sem esta dobra fica bem mais difícil.

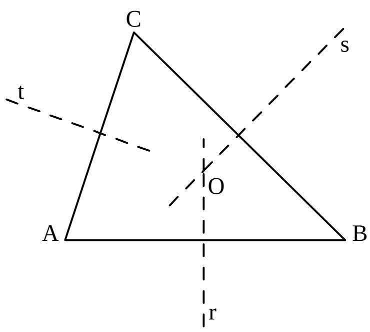
Podemos, neste caso, também, verificar que o circuncentro é o centro da circunferência circunscrita.



Justificativa

(Usaremos, sem perda de generalidade, um triângulo acutângulo na ilustração).

Sejam r, s e t, respectivamente, as mediatrizes dos lados AB, BC e AC do triângulo ABC e O o ponto de interseção das retas r e s.

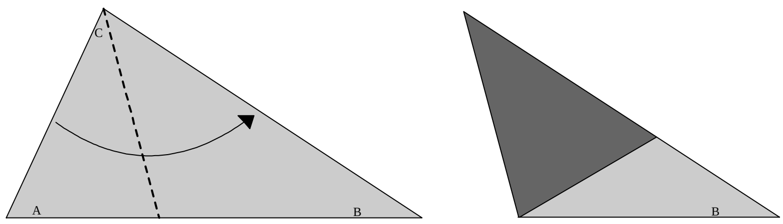


Como $O \in r$, segue da definição de mediatriz como lugar geométrico que O equidista de A e de B. Analogamente, $O \in s$ garante que O equidista de B e de C. Portanto, O equidista de A e de C e, usando novamente a definição de mediatriz, concluímos que O pertence à mediatriz de AC, ou seja, O pertence à reta t. Assim, r, s e t concorrem em O.

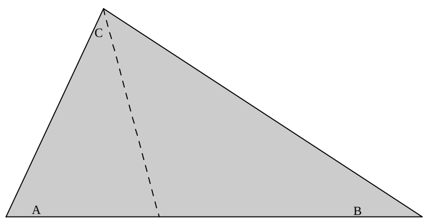
Atividade 2: Bissetrizes no triângulo - incentro

Objetivou-se com esta atividade ilustrar que as bissetrizes internas dos ângulos de um triângulo se intersectam em um único ponto e ilustrar que tal ponto é o centro da circunferência inscrita neste triângulo.

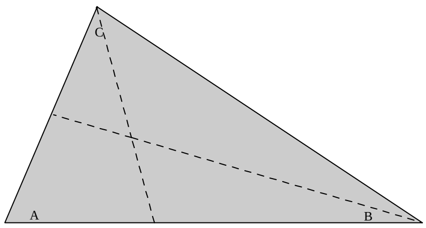
Passo 1: Partindo do recorte de um triângulo acutângulo ABC (ou um triângulo qualquer), faça uma dobra de modo a coincidir os lados AC e BC.

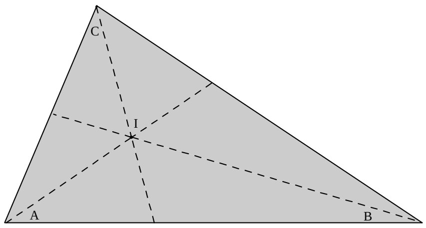


Passo 2: Desdobre. Observe que a dobra determinada é a bissetriz do ângulo $\angle ACB$.



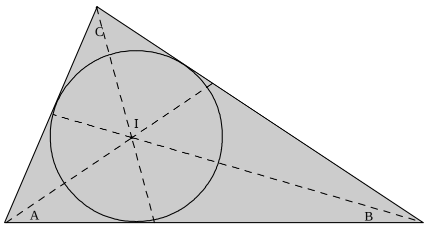
Repita os dois passos anteriores para os lados AB e BC e para os lados AC e AB, obtendo assim as outras duas bissetrizes no triângulo.





Observe que as três bissetrizes se intersectam em um único ponto, chamado de *incentro* do triângulo e denotado por I. Este nome vem do fato do incentro ser o centro da circunferência inscrita ao triângulo.

Centre o compasso no incentro e, com uma abertura que toque num único ponto um dos lados (tangencie), trace uma circunferência.

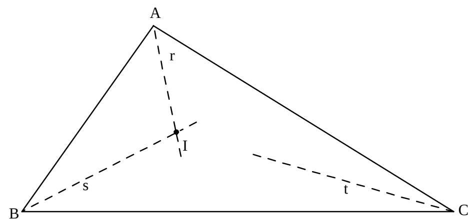


Observe que a circunferência é inscrita ao triângulo, isto é, o incentro é o centro da circunferência inscrita, o ponto que equidista dos três lados.

Justificativa

(Usaremos, sem perda de generalidade, um triângulo acutângulo na ilustração).

Sejam r, s e t, respectivamente, as bissetrizes internas dos ângulos $\angle A$, $\angle B$ e $\angle C$ do triângulo ABC e I o ponto de interseção das retas r e s.

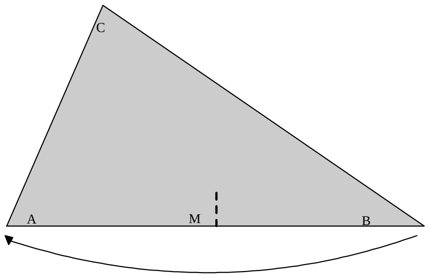


Como $I \in r$, segue da definição de bissetriz como lugar geométrico, que I equidista dos lados AB e AC. Analogamente, $I \in s$ garante que I equidista dos lados AB e BC. Portanto, I equidista de AC e BC e, usando novamente a definição de bissetriz como lugar geométrico, concluímos que I pertence à bissetriz do ângulo C, ou seja, I pertence à reta t. Assim, r, s e t concorrem em I.

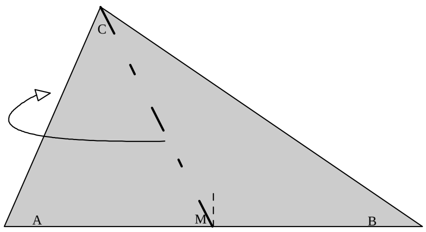
Atividade 3: Medianas dos lados de um triângulo - baricentro

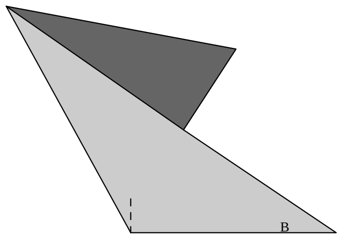
Objetivou-se com esta atividade ilustrar que as medianas de um triângulo se intersectam em um único ponto e ilustrar que tal ponto divide cada mediana na razão de 2 para 1 a partir do vértice correspondente.

Passo 1: Partindo do recorte de um triângulo acutângulo ABC (ou um triângulo qualquer), faça uma pequena dobra coincidindo os pontos A e B. Determinando assim, o ponto M, médio do segmento AB.

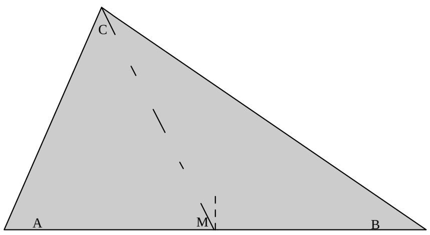


Passo 2: Desdobre e faça uma dobra que passe pelos pontos C e M .

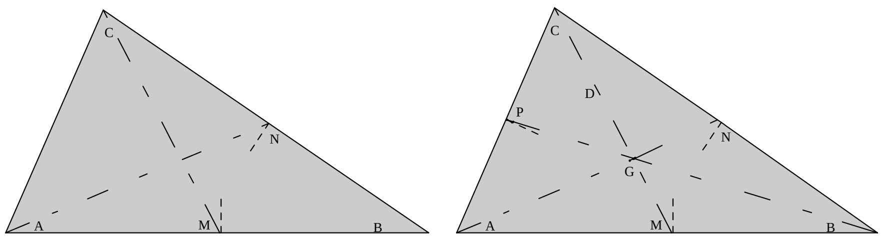




Passo 3: Desdobre. Observe que a dobra determinada parte do vértice C e vai até o ponto médio do lado oposto AB. Esta dobra corresponde à mediana relativa ao lado AB .



Repita os passos anteriores para o lado BC e o vértice A e para o lado AC e o vértice B .

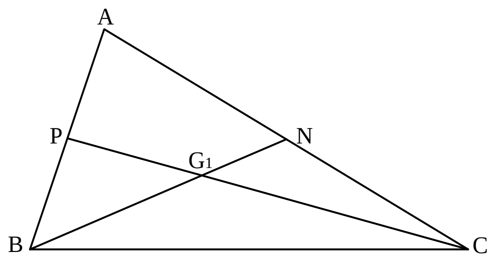


Observe que as três medianas se intersectam em um único ponto, chamado de *baricentro* do triângulo e denotado por G.

Justificativa

(Usaremos, sem perda de generalidade, um triângulo acutângulo na ilustração).

Sejam N e P, respectivamente, os pontos médios dos lados AC e AB, e seja G_1 o ponto de interseção das medianas BN e CP. Sejam, ainda, S e T os pontos médios dos segmentos BG_1 e CG_1, respectivamente.



Usando a propriedade de que o baricentro divide cada mediana na razão de 2 para 1, segue que $\overline{BG_1} = 2\overline{G_1N}$ e $\overline{CG_1} = 2\overline{G_1P}$. Agora, se M for o ponto médio de BC e G_2 for o ponto de interseção das medianas AM e BN, concluímos, usando novamente a propriedade, que G_2 divide AM e BN na razão de 2 para 1 a partir de cada vértice. Mas, daí, segue que os pontos G_1 e G_2 são tais que $\overline{BG_1} = 2\overline{G_1N}$ e $\overline{BG_2} = 2\overline{G_2N}$; isso implica em G_1 coincide com G_2. Por fim, chamando de G os pontos G_1 e G_2, segue que AM, BN e CP concorrem em G.

Propriedade: O baricentro de um triângulo divide a mediana na razão de 2 para 1, a partir do vértice correspondente.

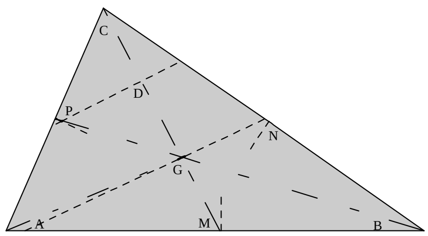
Vamos ilustrar esta propriedade.

Passo 1: Faça uma dobra para trás sobre a mediana CM.

Passo 2: Faça uma dobra originando duas semirretas coincidentes em CM com origem G.

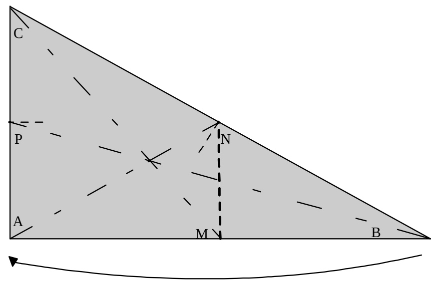
Passo 3: Faça uma dobra levando o vértice C ao ponto G. Seja D o ponto determinado por esta dobra no segmento CG.

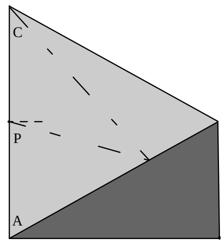
Observe que o ponto D coincide com o ponto M. Portanto $\overline{MG} = \overline{GD} = \overline{DC}$ e $\overline{CG} = 2\overline{GM}$, ou seja, o baricentro dividiu a mediana CM na razão de 2 para 1, a partir do vértice C.



Sugestão: Peça aos alunos para verificar a mesma relação para as outras duas medianas.

Exercício: Determine o baricentro em um triângulo retângulo e verifique a propriedade: a mediana relativa à hipotenusa é igual à metade da mesma. Para isto, faça uma dobra de modo a coincidir os vértices A e B.





Com esta dobra, os alunos verificarão que os segmentos AN e BN se sobrepõem, sendo, portanto, congruentes. Assim, temos: $\overline{AN} = \overline{BN} = \frac{1}{2}\overline{BC}$, pois N é ponto médio de BC.

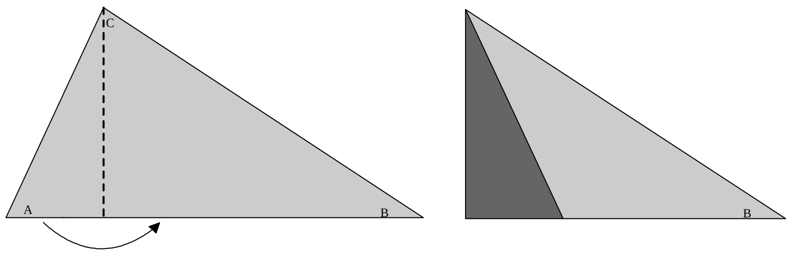
Atividade 4: Alturas no triângulo - ortocentro

Objetivou-se com esta atividade ilustrar que as três alturas em um triângulo se intersectam em um só ponto, chamado de ortocentro, e ilustrar que o circuncentro de um triângulo é o ortocentro de seu triângulo medial.

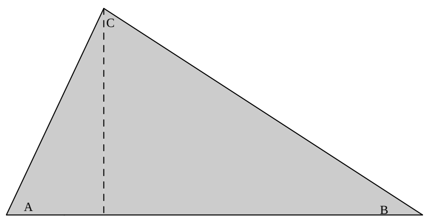
A atividade vai ser feita para os triângulos acutângulo, retângulo e obtusângulo pela posição relativa do ortocentro em relação ao triângulo em cada caso.

5.6 Triângulo acutângulo

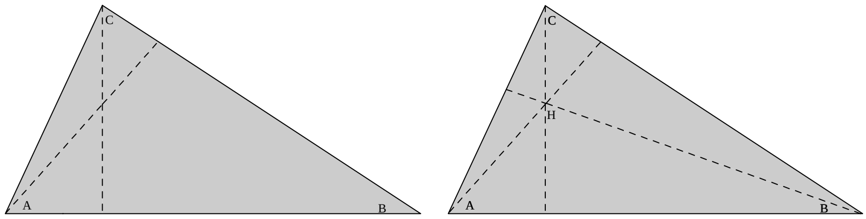
Passo 1: Partindo do recorte de um triângulo acutângulo ABC, faça uma dobra que passe pelo ponto C e de modo que as duas semirretas originadas em AB coincidam.



Passo 2: Desdobre. Observe que a dobra determinada é perpendicular a AB que passa pelo vértice C. Esta dobra corresponde à altura relativa ao lado AB.



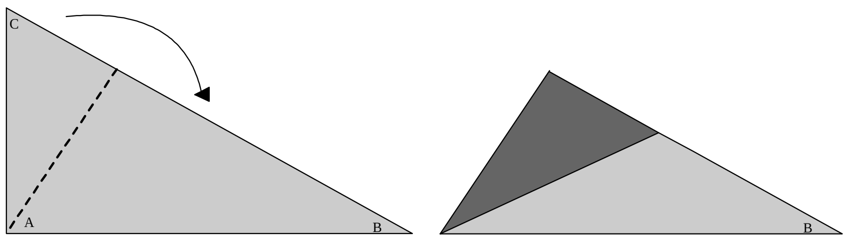
Repita os passos anteriores para o lado BC e o vértice A e para o lado AC e o vértice B.



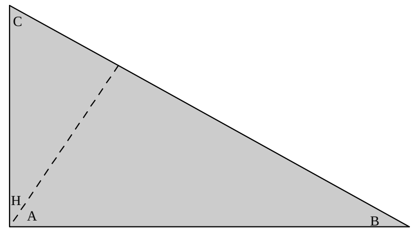
Observe que as três alturas se intersectam em um único ponto, o *ortocentro* do triângulo, denotado por H .

5.7 Triângulo retângulo

Passo 1: Partindo do recorte de um triângulo retângulo ABC , faça uma dobra que passe pelo ponto A e de modo que as duas semirretas originadas em BC coincidam.



Passo 2: Desdobre. A dobra determinada é a altura relativa ao lado BC .



Agora observe que, pela definição de altura e em razão do fato de o triângulo ser retângulo, temos:

- a altura relativa ao lado AB é o lado AC;

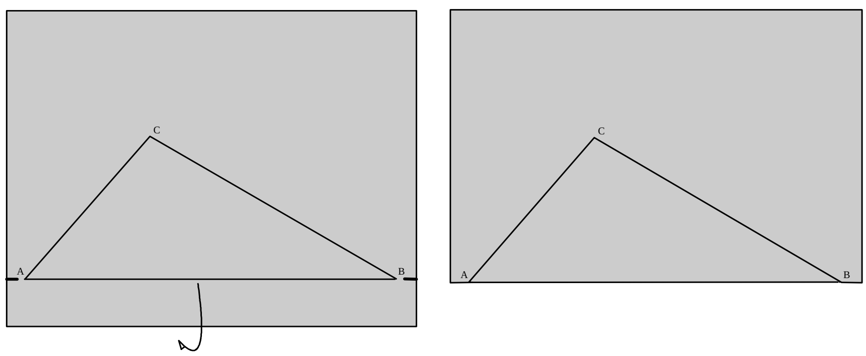
- a altura relativa ao lado AC é o lado AB.

Assim, no triângulo retângulo, os catetos são as outras duas alturas.

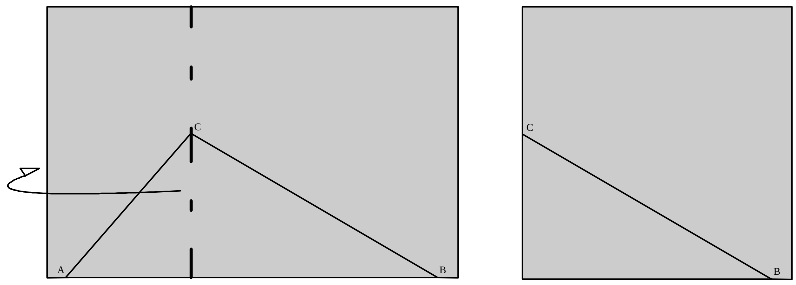
Observe que, neste caso, as três alturas também se intersectam em um único ponto, mas agora o ortocentro é o vértice do ângulo reto.

5.8 Triângulo obtusângulo

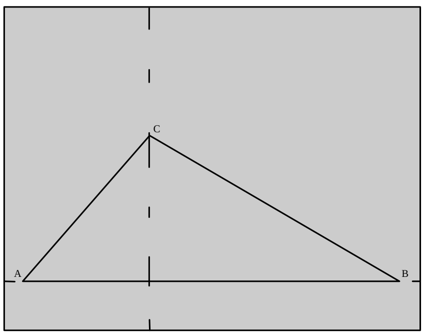
Passo 1: Com o auxílio de uma régua, trace um triângulo obtusângulo ABC e, em seguida, faça uma dobra para trás sobre o lado AB.



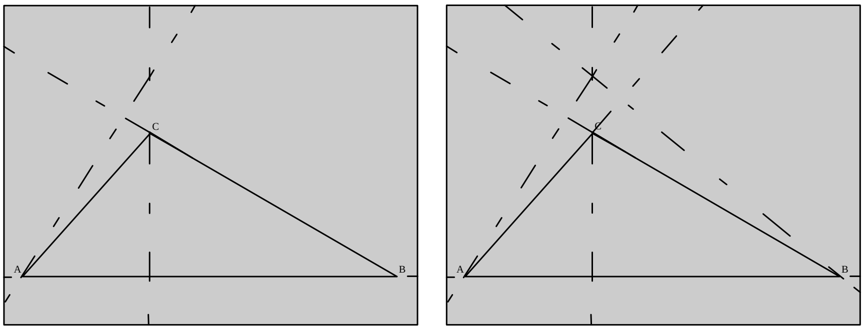
Passo 2: Faça uma dobra que passe pelo ponto C e de modo que as duas semirretas originadas em AB coincidam.



Passo 3: Desdobre as duas dobras feitas. A última dobra determinada é a altura relativa ao lado AB .



Proceda como nos três passos anteriores para os lados BC e AC obtendo, assim, as alturas relativas a estes lados.

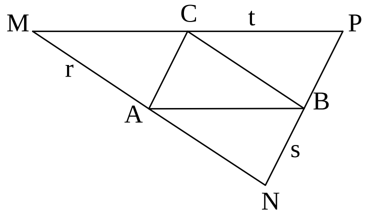


Neste caso, as três alturas também concorrem em um único ponto, sendo agora o ponto exterior ao triângulo.

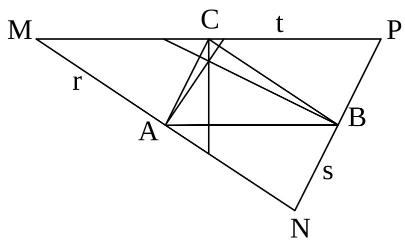
Justificativa

(Usaremos, sem perda de generalidade, triângulos acutângulos nas ilustrações).

Seja ABC um triângulo qualquer. Trace, respectivamente por A, B e C, retas r, s e t paralelas a BC, CA e AB (também respectivamente), e sejam $r \cap s = \{N\}$, $s \cap t = \{P\}$ e $t \cap r = \{M\}$.



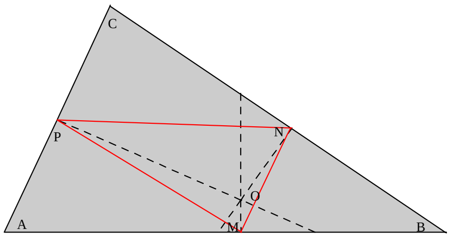
Então os quadriláteros $ABCM$ e $ABPC$ são paralelogramos, assim $\overline{CM} = \overline{AB} = \overline{CP}$ e, daí, C é o ponto médio de MP. Analogamente, B é o ponto médio de PN e A é o ponto médio de MN. Por outro lado, a altura relativa a BC, também, é perpendicular a MN, já que $\overleftrightarrow{BC}$ e $\overleftrightarrow{MN}$ são paralelas. Do mesmo modo, as alturas relativas à AC e AB são, respectivamente, perpendiculares a NP e MP. Segue que as alturas do triângulo ABC são as mediatrizes dos lados do triângulo MNP. Mas já verificamos que as mediatrizes dos lados de um triângulo são concorrentes, de modo que as alturas de ABC devem ser concorrentes.



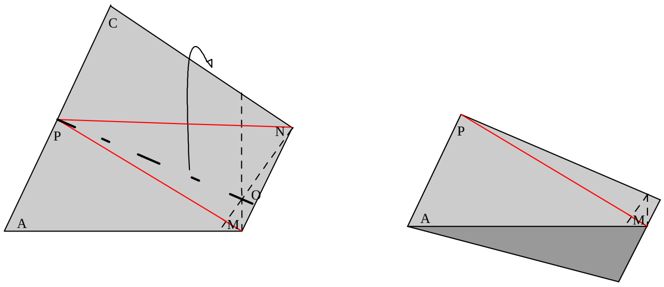
Propriedade: O circuncentro de um triângulo é o ortocentro de seu triângulo medial.

Vamos ilustrar esta propriedade. Para isto, podemos utilizar o triângulo acutângulo, obtido na atividade 1 da oficina 5.2.1, em que encontramos o circuncentro. Também poderíamos utilizar o triângulo retângulo ou obtusângulo obtidos nesta mesma atividade.

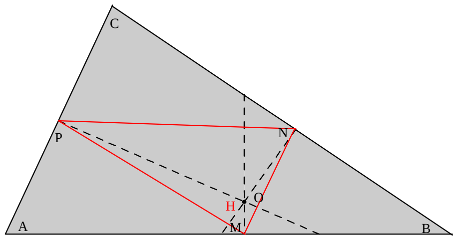
Sejam M, N e P os pés das mediatrizes dos lados AB, BC e AC, respectivamente. O *triângulo medial* do triângulo ABC é o triângulo MNP.



Faça uma dobra que passe pelos pontos M e N e uma dobra que passe pelo ponto P e de modo que as duas semirretas originadas em MN coincidam, ou seja, a perpendicular a MN que passa pelo ponto P.



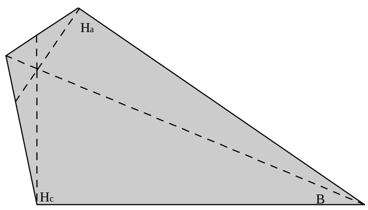
Observe que a última dobra, que corresponde à altura relativa ao lado MN do triângulo MNP, ocorre exatamente sobre a mediatriz do lado AC. De maneira análoga, podemos verificar que o mesmo ocorre com as outras mediatrizes e alturas e, assim, concluir que circuncentro de um triângulo é o ortocentro de seu triângulo medial.

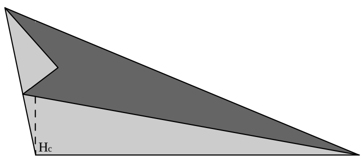


Propriedade: Verificar que o ortocentro de um triângulo é o incentro de seu triângulo órtico.

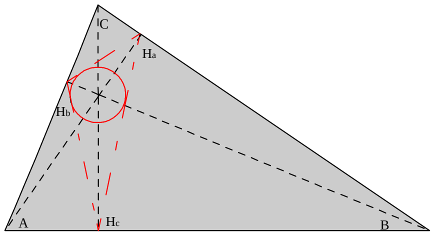
Vamos ilustrar esta propriedade. Para isto, podemos utilizar o triângulo acutângulo (poderia ser o retângulo ou o obtusângulo) em que encontramos o ortocentro.

Vamos identificar o triângulo órtico: sejam H_a, H_b e H_c os pés das alturas relativas aos vértices A, B e C, respectivamente. O triângulo órtico do triângulo ABC é o triângulo $H_aH_bH_c$. Faça uma dobra que passe pelos pontos H_a e H_b, uma dobra que passe pelos pontos H_b e H_c e, por fim, uma dobra de modo a coincidir os segmentos H_aH_b e H_bH_c.





Observe que a última dobra, que corresponde à bissetriz do ângulo $\angle H_aH_bH_c$ do triângulo $H_aH_bH_c$ (pois sobrepomos os lados H_aH_b e H_bH_c), ocorre exatamente sobre a altura relativa ao vértice B. De maneira análoga, podemos verificar que o mesmo ocorre com as outras bissetrizes e alturas e, assim, concluir que ortocentro de um triângulo é o incentro de seu triângulo órtico.

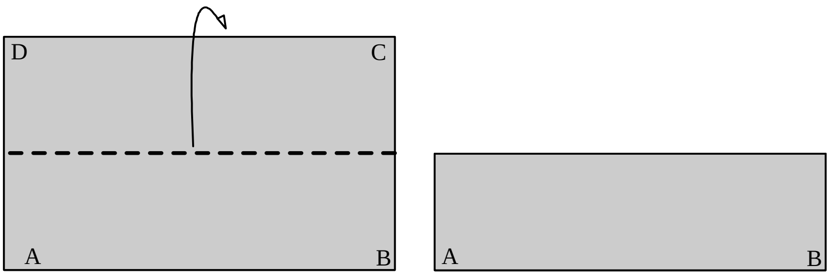


5.8.1 Relações entre pontos notáveis de um triângulo

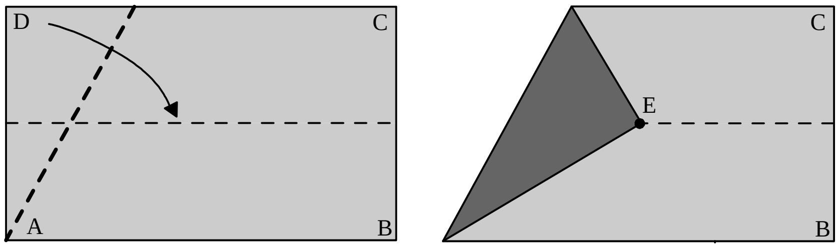
Atividade 1: Triângulos equilátero, isósceles e escaleno

Objetivou-se com esta atividade construir os triângulos equilátero, isósceles e escaleno.

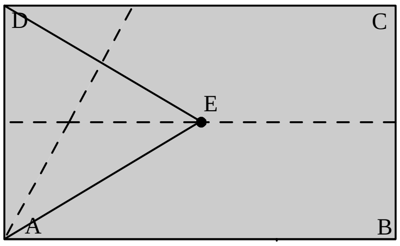
Passo 1: Seja $ABCD$ o retângulo obtido por meio do recorte de uma folha A4 ao meio. Faça uma dobra de modo a coincidir os lados AB e CD. (Note que a dobra que estamos determinando é a mediatriz do lado AD).



Passo 2: Desdobre. Faça uma dobra que passe pelo vértice A e de modo que o vértice D fique sobre a dobra obtida no passo 1. Seja E o ponto que D determina em tal dobra. Note que, ao fazermos esta dobra, obtemos o segmento AE que é congruente ao segmento AD.

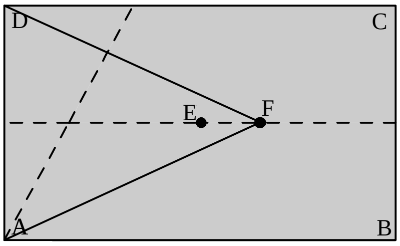


Passo 3: Desdobre. Para melhor visualizar o triângulo, o professor pode pedir aos alunos que façam uso de régua e lápis e tracem os segmentos AE e ED.



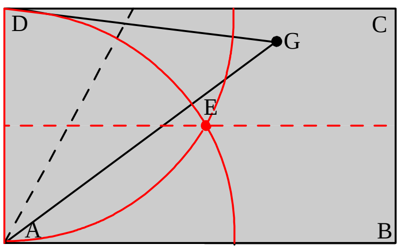
Justificativa: Observe que, como $\overline{DA} = \overline{AE}$ e o ponto E pertence à mediatriz do lado AD, ou seja, E equidista de A e de D, segue que, $\overline{DA} = \overline{AE} = \overline{ED}$.

Para obter um triângulo isósceles, basta seguir os passos 1 e 2 apresentados para construir um triângulo equilátero, mas escolher um ponto F sobre a mediatriz de AD, diferente de E e que não esteja sobre AD.



Justificativa: Como F pertence à mediatriz de AD, segue que F equidista de A e de D, logo $\overline{FA} = \overline{FD}$. Portanto, ADF é um triângulo isósceles de base AD.

Para obter um triângulo escaleno, basta também seguir os passos 1 e 2 apresentados para construir um triângulo equilátero, mas escolher um ponto G qualquer, que não pertença à AD nem à sua mediatriz e nem aos arcos de centros A e D com raio AD.

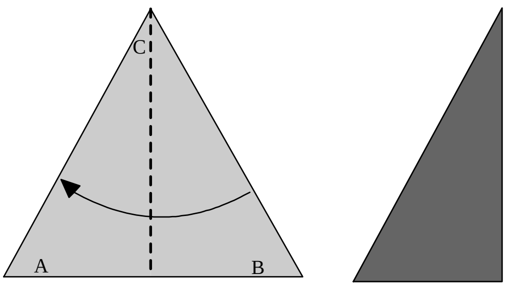


Exercício

1) Dado um segmento AB, obtenha um triângulo equilátero de lado AB.

Atividade 2: Pontos notáveis num triângulo equilátero

Passo 1: Construa um triângulo equilátero ABC. Faça uma dobra de modo a coincidir os lados AC e BC.



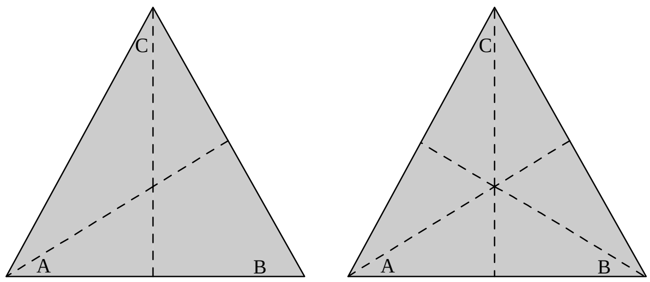
Verificamos que, ao fazer coincidir os lados AC e BC, a dobra determinada é a bissetriz do ângulo $\angle ACB$. Mas note que, ao coincidir os lados AC e BC:

- os vértices A e B também coincidiram, ou seja, a dobra determinada é também a mediatriz do lado AB;

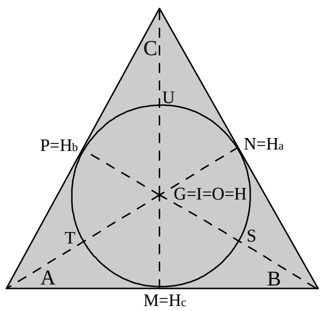
- a dobra determinada passa pelo ponto C e, como ela é perpendicular a AB (pois é mediatriz de AB), tal dobra é também a altura relativa a AB;

- a dobra passa por C e vai até o ponto médio de AB (pois a mediatriz de AB passa pelo ponto médio de AB), logo tal dobra é também mediana relativa ao lado AB.

Repetindo o procedimento do passo um para os lados AB, AC e para os lados AB, BC obtemos os resultados ilustrados abaixo:

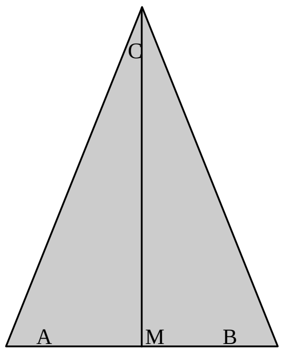


Note que as três mediatrizes, as três bissetrizes, as três medianas e as três alturas do triângulo equilátero coincidem, o que faz com que o circuncentro, o incentro, o baricentro, e o ortocentro, também, coincidam.



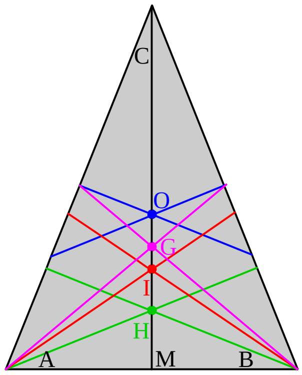
Note ainda que $\overline{GU} = r = \overline{GM}$, portanto, U é ponto médio de CG (o ponto U é um dos pontos de Euler, que são os pontos médios entre o ortocentro e cada vértice de um triângulo). Veja que a circunferência inscrita no triângulo equilátero passa pelos três pontos de Euler. Passa também pelos pontos M, N, P; médios dos lados AB, BC, AC, respectivamente, que coincidem com os pés das alturas H_c, H_a, H_b e (também, respectivamente).

Observe que os três lados do triângulo equilátero são bases de um triângulo isósceles, assim, em um triângulo isósceles, a bissetriz, a mediatriz, a mediana e a altura relativas à base coincidem e, com isso, o ponto médio e o pé da altura, também relativos à base, coincidem.



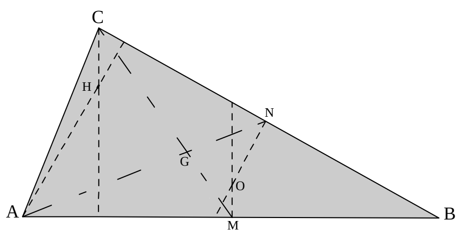
No triângulo isósceles acima, a reta CM representa a bissetriz, a mediatriz, a mediana e altura relativas à base AB. Note que os pontos notáveis vão estar todos nesta reta.

Ilustramos que os quatro pontos notáveis coincidem em um triângulo equilátero e estão sobre uma mesma reta no triângulo isósceles. Estes dois casos são casos particulares da propriedade: num triângulo, o circuncentro (O), o baricentro (G) e o ortocentro (H) estão sobre uma reta, denominada reta de Euler (em homenagem a Euler).

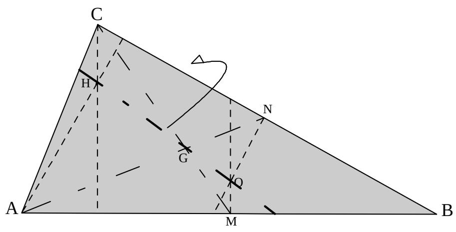


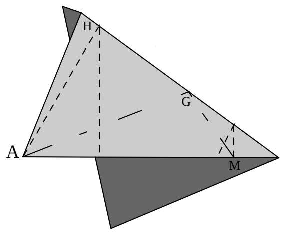
Atividade 3: A reta de Euler

Passo 1: Construa um triângulo escaleno ABC e obtenha o circuncentro (O), o baricentro (G) e o ortocentro (H). (Vale ressaltar aqui que, como já sabemos que as três mediatrizes, as três medianas e as três alturas se intersectam, respectivamente, em um único, para obter tais pontos, basta obtermos duas das três retas). Sugerimos determinar, primeiro, duas mediatrizes, pois, assim, têm-se os pontos médios de dois lados, necessários para obtenção de duas medianas.



Passo 2: Faça uma dobra que passe pelos pontos H (ortocentro do triângulo) e O (circuncentro do triângulo).



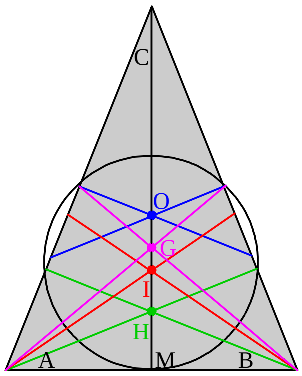


Observe que a dobra determinada passa pelo ponto baricentro (G). Logo, o circuncentro (O), o baricentro (G) e o ortocentro (H) estão sobre uma mesma reta.

Atividade 4: A Circunferência de nove pontos

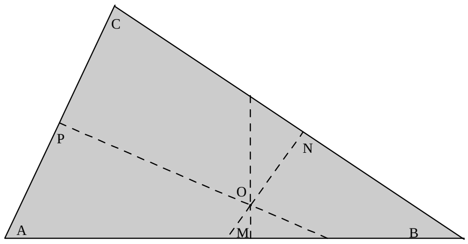
Objetivou-se com esta atividade ilustrar que, num triângulo, os pontos médios dos seus lados, os pontos de Euler e os pés das alturas, estão sobre uma circunferência cujo centro é o ponto médio entre o circuncentro (O) e o ortocentro (H) de tal triângulo, e cujo raio é exatamente a metade da distância de O até um vértice do triângulo. Esta circunferência foi denominada oficialmente em 1820 por Terquem de *“le cercle dês neuf points”* (circunferência de nove pontos), segundo o artigo de Rojas e Mendonza (2010).

Note que, no caso do triângulo ser equilátero, a circunferência de nove pontos coincide com a circunferência inscrita e, no caso do triângulo ser isósceles, a circunferência passa por oito pontos, já que o ponto médio e o pé da altura relativos à base coincidem.

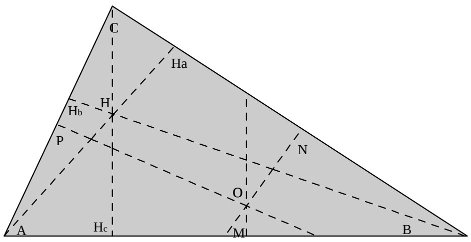


Veja que, para obter a Circunferência de nove pontos, são necessários vários elementos, por isto, iremos dar orientação mais detalhada do que a que apresentamos na Reta de Euler. Comecemos observando que, como vamos precisar encontrar o ortocentro e o circuncentro, é interessante que não se trabalhe com triângulo obtusângulo, pois, como já vimos, tais pontos são exteriores neste tipo de triângulo (ou pode-se trabalhar com a folha sem o recorte).

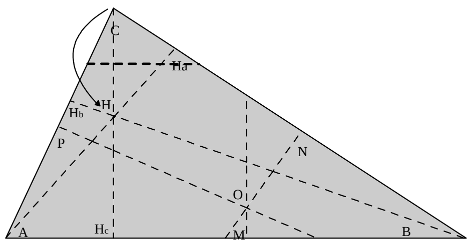
Passo 1: Partindo do recorte de um triângulo não obtusângulo ABC, faça dobras de modo a determinar as mediatrizes de seus lados e, consequentemente, os pontos médios. Sejam M o ponto médio do lado AB, N o ponto médio do lado BC, P o ponto médio do lado AC e O o circuncentro.

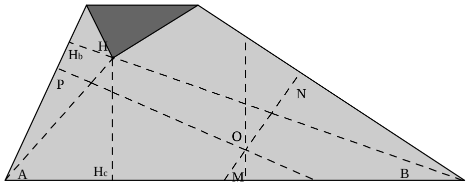


Passo 2: Faça dobras de modo a determinar as alturas no triângulo. Seja H_a o pé da altura relativa ao vértice A, H_b o pé da altura relativa ao vértice B, H_c o pé da altura relativa ao vértice C e H o baricentro.

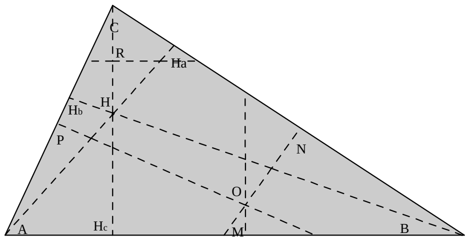


Passo 3: Obtenha o ponto médio entre C e H (ponto de Euler).

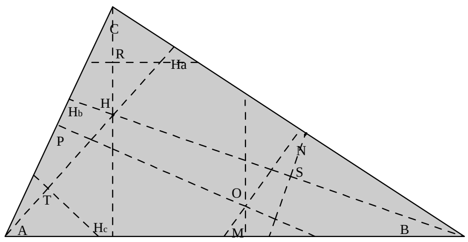




Passo 4: Desdobre. Seja R o ponto médio do segmento CH.

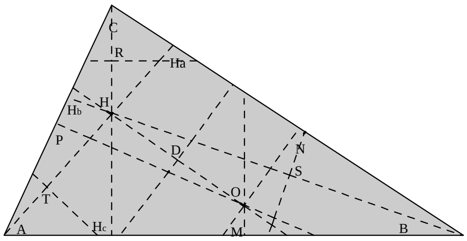


Proceda como nos passo 3 e 4, determinando, assim, os outros dois pontos de Euler. Sejam S o ponto médio do segmento BH e T o ponto médio do segmento AH.

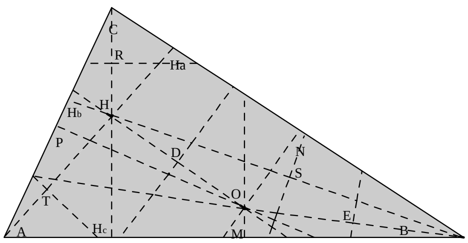


Veja que os nove pontos já estão todos determinados: os pontos médios dos lados do triângulo (M, N e P), os pontos de Euler (R, S e T) e os pés das alturas do triângulo (H_a, H_b e H_c).

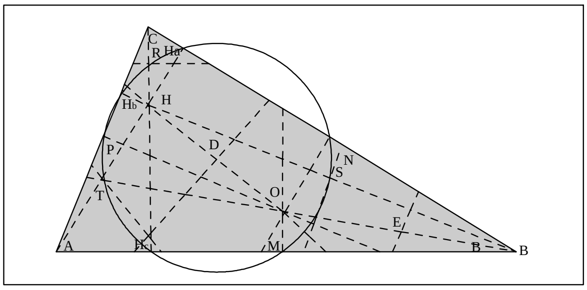
Passo 5: Determine agora, o ponto médio do segmento OH (que é o centro da circunferência de 9 pontos). Seja D tal ponto (não usaremos a notação C para o centro da circunferência, pois esta já representa um dos vértices do triângulo).



Passo 6: Determine o ponto médio do segmento OB (poderia ser o ponto médio do segmento OA ou do segmento OC, o que estamos procurando neste passo é o raio da circunferência, que é a metade da distância de O até um vértice do triângulo). Seja E tal ponto.



Passo 7: Para obter a circunferência, cole o triângulo em uma folha A4, pegue o compasso e, com uma abertura que vai de O até E (ou de E até B), centre o compasso em D e trace a circunferência.



Observe que a circunferência passa pelos nove pontos, a saber: M , N e P , médios dos lados AB , BC e AC , respectivamente; H_a , H_b e H_c , pés das alturas relativas aos vértices A , B e C , respectivamente; R , S e T (pontos de Euler), médios dos segmentos HC , HB e HA , respectivamente.

6 CONCLUSÃO

As oficinas desenvolvidas neste trabalho têm como intuito subsidiar o ensino da Geometria Euclidiana Plana no Ensino Fundamental, facilitando a compreensão de alguns conceitos e complementando a teoria. Pode, também, desenvolver habilidades, tais como, concentração, memória, criatividade, motricidade e, principalmente, a interação coletiva na troca de conhecimentos.

Fica como sugestão de trabalho futuro, a aplicação das oficinas em salas de aula, com a finalidade de comprovar a eficácia do origami como material de apoio para aulas de Geometria Euclidiana do Ensino Fundamental. Esperamos, com este trabalho, contribuir de alguma forma para o ensino da Matemática, mais precisamente da Geometria, abrindo, assim, um caminho para futuras pesquisas nesta área.

REFERÊNCIAS

BRASIL. Secretaria de Educação Fundamental. **Parâmetros Curriculares Nacionais**: matemática. Brasília: MEC/SEF, 1998. 146 p.

CARNEIRO, M. J. D. (Coord.). **Proposta curricular – CBC**: matemática - fundamental - 6º ao 9º. 2006. Disponível em: <http://crv.educacao.mg.gov.br/sistema_crv/index.aspx?&usr=pub&id_projeto=27&id_objeto=38903&id_pai=38679&tipo=txg&n1=&n2=Proposta%20Curricular%20-%20CBC&n3=Fundamental%20-%206%C2%BA%20ao%209%C2%BA&n4=Matem%C3%A1tica&b=s&ordem=campo3&cp=B53C97&cb=mma>. Acesso em: 10 jan. 2012.

HISTÓRIA do origami. 2013. Disponível em: <http://yasalde.no.sapo.pt/Historia.htm#Hist%C3%B3ria%20do%20Origami>. Acesso em: 4 mar. 2013.

IMENES, L. M. **Geometria das dobraduras**. 5. ed. São Paulo: Scipione, 1994. 64 p. (Coleção Vivendo a Matemática).

LANG, R. J. **Origami desing secrets**: mathematical methods for an ancient art. Boca Raton: CRC, 2003. 585 p.

LANK, R. J. **Huzita-justin axioms**. 2012. Disponível em: <http://www.langorigami.com/science/math/hja/hja.php>. Acesso em: 1 nov. 2012.

LEROY, L. **Aprendendo geometria com origami**. 2010. Disponível em: <http://www.mat.ufmg.br/~espec/monografiasPdf/Monografia_Leroy.pdf>. Acesso em: 24 out. 2012.

LUCAS, E. S. C. **Uma abordagem didática para a construção dos poliedros regulares e prismas utilizando origami**. 2013. 71 f. Dissertação (Mestrado em Matemática) – Universidade Federal de Lavras, Lavras, 2013.

MITCHELL, D. **Origami matemáticos**: dobragens de papel para fazer figuras geométricas. Lisboa: Replicação, 2008. 64 p.

RAFAEL, I. Origami. **Educação e Matemática**, Lisboa, n. 111, p. 16-22, set./out. 2011.

ROJAS, J.; MENDONZA, R. A reta de Euler e a circunferência de nove pontos. **Matemática Universitária**, Rio de Janeiro, n. 48/49, p.76-77, jun./dez. 2010.