



ÉRICA APARECIDA PEREIRA

**PROPOSIÇÃO DE TESTES DE NORMALIDADE
MULTIVARIADA BASEADOS EM DISTÂNCIAS ROBUSTAS**

LAVRAS – MG

2017

ÉRICA APARECIDA PEREIRA

**PROPOSIÇÃO DE TESTES DE NORMALIDADE MULTIVARIADA BASEADOS EM
DISTÂNCIAS ROBUSTAS**

Dissertação apresentada à Universidade Federal de Lavras, como parte das exigências do Programa de Pós-Graduação em Estatística e Experimentação Agropecuária, área de concentração em Estatística e Experimentação Agropecuária, para a obtenção do título de Mestre.

Prof. Dr. Daniel Furtado Ferreira

Orientador

LAVRAS – MG

2017

**Ficha catalográfica elaborada pelo Sistema de Geração de Ficha Catalográfica da Biblioteca
Universitária da UFLA, com dados informados pelo(a) próprio(a) autor(a)**

Pereira, Érica Aparecida

Proposição de testes de normalidade multivariada baseados em distâncias robustas / Érica Aparecida Pereira. – Lavras : UFLA, 2017.

105 p. :

Dissertação (mestrado acadêmico)–Universidade Federal de Lavras, 2017.

Orientador: Prof. Dr. Daniel Furtado Ferreira.

Bibliografia.

1.Outliers . 2. Estimadores Robustos. 3. Distância de Mahalanobis. I. Ferreira, Daniel Furtado. II. Título.

ÉERICA APARECIDA PEREIRA

**PROPOSIÇÃO DE TESTES DE NORMALIDADE MULTIVARIADA BASEADOS EM
DISTÂNCIAS ROBUSTAS**

Dissertação apresentada à Universidade Federal de Lavras, como parte das exigências do Programa de Pós-Graduação em Estatística e Experimentação Agropecuária, área de concentração em Estatística e Experimentação Agropecuária, para a obtenção do título de Mestre.

APROVADA em 24 de abril de 2017.

Prof. Dr. Daniel Furtado Ferreira	UFLA
Prof. Dr. Júlio Silvio de Sousa Bueno Filho	UFLA
Prof. Dr. Tiago Martins Pereira	UFOP



Prof. Dr. Daniel Furtado Ferreira
Orientador

**LAVRAS – MG
2017**

*À minha família,
pelo amor incondicional.*

DEDICO

AGRADECIMENTOS

A Deus, por me abençoar e iluminar meu caminho nos momentos de dúvida.

À minha família, meu porto seguro, agradeço por todo amor e apoio para a realização dos meus objetivos e sonhos.

Aos meus afilhados, Gabriel, Letícia e Júlia, e minha sobrinha Laís, pelo carinho, amor e por compreenderem minhas ausências.

Ao meu orientador Daniel Furtado, agradeço pela dedicação e disponibilidade na colaboração sempre que por mim foi solicitada. Agradeço pela oportunidade de trabalhar ao lado de um profissional tão dedicado na partilha do conhecimento.

Aos professores da banca, Júlio Silvio de Sousa Bueno Filho e Tiago Martins Pereira, pela disponibilidade, compreensão e pelas valiosas contribuições que muito engrandeceram este trabalho.

A todos os professores do departamento de estatística que de alguma forma contribuíram para minha formação.

Ao CNPq e à Capes, pelo auxílio e apoio concedido, que foi de fundamental importância para o desenvolvimento deste trabalho.

Aos meus colegas de mestrado, pelos momentos de conhecimento e distração compartilhados, em especial, Cristian e Eleanderson.

À Andrezza e à Bruna, por se tornarem grandes amigas e por serem de fundamental importância na concretização deste trabalho.

Ao André e à Isis, pela amizade e por sempre estarem disponíveis para me ajudarem sempre que precisei.

A todos aqueles que contribuíram diretamente e indiretamente na realização desse trabalho, os meus sinceros agradecimentos.

RESUMO

A normalidade multivariada é uma das pressuposições mais importante para a realização de muitos métodos inferenciais. A não verificação desta pressuposição pode influenciar na confiabilidade dos resultados. Existem muitos testes na literatura especializada para verificar a normalidade. No caso da normalidade multivariada, os testes, em geral, são baseados nos coeficientes de correlação, coeficiente de assimetria e curtose e distâncias. Apesar do grande número de testes, não existe na literatura um que seja uniformemente mais poderoso em todas as situações avaliadas. Os testes, em geral, apresentam alguma restrição, tanto em relação ao tamanho da amostra quanto à dimensão. Se os dados apresentam observações discrepantes, então podem ocorrer estimativas dos parâmetros precárias e até mesmo distorção no ajuste da distribuição, fazendo com que os testes falhem. Assim sendo, este trabalho tem como objetivo propor e avaliar quatro testes robustos quanto à presença de *outliers*: teste de normalidade multivariada baseado em distância de Mahalanobis com medidas robustas dos parâmetros de locação e escala (TNMD2RKS), teste de normalidade multivariada baseado em distância beta robusta (TNMDbRKS), teste de normalidade multivariada *bootstrap* paramétrico baseado em distâncias robustas (TNMD2RBoot) e o teste de normalidade multivariada *bootstrap* paramétrico baseado em distâncias beta robustas (TNMDbRBoot). Para os quatro testes foram utilizados os estimadores de locação e escala robustos calculados por meio da função *CovOgk* do *Software R*. Foram avaliadas as taxas de erro tipo I e o poder dos testes propostos comparando-os com o teste de normalidade multivariada baseado em *bootstrap* paramétrico na correlação entre as estatística de ordem e seus valores esperados e com o teste de Shapiro-Wilk de Royston, por meio de simulação Monte Carlo. Os testes TNMD2RKS, TNMD2RBoot e TNMDbRBoot foram propostos com sucesso, os quais obtiveram excelente controle da taxa de erro tipo I, principalmente em amostras com presença de *outliers*, em que os demais testes não obtiveram controle. Quanto ao poder, os quatro testes obtiveram bom desempenho em grandes amostras, porém não superaram o desempenho dos testes usados como referência.

Palavras-chave: *Outliers*. Estimadores Robustos. Distância de Mahalanobis.

ABSTRACT

Multivariate normality is one of the most important assumptions for the realization of many inferential methods. The non-verification of this assumption can influence the reliability of the results. There are many tests in the specialized literature to verify normality. In the case of multivariate normality, the tests, in general, are based on correlation coefficients, asymmetry and kurtosis coefficients and distances. Despite the large number of tests, there is no test in the literature that is uniformly more powerful in all evaluated situations. The tests, in general, presents some restrictions, both in relation to size and to dimension. The presence of outliers in the data can result in bad parameter estimation and even distortions in the distribution fitting, making the tests fail. Therefore, the aim of this work is to propose and evaluate four outlier robust tests: multivariate normality test based on Mahalanobis distance with robust measures of the scale and location parameters (TNMD2RKS), multivariate normality test based on robust beta distance (TNMDbRKS), parametric bootstrap multivariate normality test based on robust distances (TNMD2RBoot) and the parametric bootstrap multivariate normality test based on robust beta distances (TNMDbRBoot). For the four tests it was used the robust scale and location estimators calculated via function `CovOgk` from the R software. Type I error rates and power of the tests were evaluated by comparing then to the parametric bootstrap multivariate normality test based on the correlation between the order statistics and the expected values and the Royston's Shapiro-Wilk test, via Monte Carlo simulation. The tests TNMD2RKS, TNMD2RBoot and TNMDbRBoot were successfully proposed, obtaining excellent type I error rate control, especially in samples with the presence of outliers, in which the other tests did not perform well. In terms of power, the four tests performed well in large samples, however, they did not outperform the tests used as references.

Keywords: Outliers. Robust Estimators. Mahalanobis Distance.

LISTA DE FIGURAS

- Figura 4.1 – Histograma dos valores- p sob H_0 , considerando a situação $n = 100$ com $p = 10$ e $\rho = 0,0$ dos testes TNMD2RKS, TNMDbRKS, TNMD2RBoot, TNMDbRBoot, TNMBP e TNMSWR. 59
- Figura 4.2 – Histograma dos valores- p sob distribuição normal multivariada com presença de 1% de *outliers*, considerando a situação $n = 100$ com $p = 10$ e $\rho = 0,0$ dos testes TNMD2RKS, TNMDbRKS, TNMD2RBoot, TNMDbRBoot, TNMBP e TNMSWR. 60
- Figura 4.3 – Histograma dos valores- p sob distribuição normal multivariada com presença de 2% de *outliers*, considerando a situação $n = 100$ com $p = 10$ e $\rho = 0,0$ dos testes TNMD2RKS, TNMDbRKS, TNMD2RBoot, TNMDbRBoot, TNMBP e TNMSWR. 61

LISTA DE TABELAS

Tabela 3.1 – Tamanhos amostrais n e número de variáveis p usados nas construções das matrizes de dados.	40
Tabela 4.1 – Taxas de erro tipo I, considerando a distribuição normal multivariada em função de n e p e das correlações $\rho = 0,0$ e $0,90$ ao nível de 10% de significância.	46
Tabela 4.2 – Taxas de erro tipo I, considerando a distribuição normal multivariada em função de n , p e das correlações $\rho = 0,0$ e $0,90$ ao nível de 5% de significância.	49
Tabela 4.3 – Taxas de erro tipo I, considerando a distribuição normal multivariada em função de n , p e das correlações $\rho = 0,0$ e $0,90$ ao nível de 1% de significância.	50
Tabela 4.4 – Taxas de erro tipo I, considerando a distribuição normal multivariada com presença de 1% de <i>outliers</i> , em função de n , p e das correlações $\rho = 0,0$ e $0,90$ ao nível de 10% de significância.	52
Tabela 4.5 – Taxas de erro tipo I, considerando a distribuição normal multivariada com presença de 1% de <i>outliers</i> , em função de n , p e das correlações $\rho = 0,0$ e $0,90$ ao nível de 5% de significância.	54
Tabela 4.6 – Taxas de erro tipo I, considerando a distribuição normal multivariada com presença de 1% de <i>outliers</i> , em função de n , p e das correlações $\rho = 0,0$ e $0,90$ ao nível de 1% de significância.	56
Tabela 4.7 – Taxas de erro tipo I, considerando a distribuição normal multivariada com presença de 2% de <i>outliers</i> , em função de n , p e das correlações $\rho = 0,0$ e $0,90$ aos níveis de 10%, 5% e 1% de significância.	57
Tabela 4.8 – Poder dos testes, considerando a distribuição <i>t-Student</i> com $\nu = 3$ graus de liberdade em função de n , p e das correlações $\rho = 0,0$ e $0,90$ ao nível de 10% de significância.	64
Tabela 4.9 – Poder dos testes, considerando a distribuição <i>t-Student</i> com $\nu = 3$ graus de liberdade em função de n , p e das correlações $\rho = 0,0$ e $0,90$ ao nível de 5% de significância.	66

Tabela 4.10 – Poder dos testes, considerando a distribuição <i>t-Student</i> com $\nu = 3$ graus de liberdade em função de n , p e das correlações $\rho = 0,0$ e $0,90$ ao nível de 1% de significância.	68
Tabela 4.11 – Poder dos testes, considerando a distribuição Log-Normal em função de n , p e das correlações $\rho = 0,0$ e $0,90$ ao nível de 10% de significância. . . .	70
Tabela 4.12 – Poder dos testes, considerando a distribuição Log-Normal em função de n , p e das correlações $\rho = 0,0$ e $0,90$ ao nível de 5% de significância.	72
Tabela 4.13 – Poder dos testes, considerando a distribuição Log-Normal em função de n , p e das correlações $\rho = 0,0$ e $0,90$ ao nível de 1% de significância.	73
Tabela 4.14 – Poder dos testes, considerando a distribuição Normal Contaminada com $(1 - \delta) = 20\%$ de contaminação com mesmo vetor de médias $\boldsymbol{\mu}_1 = \boldsymbol{\mu}_2$ e estruturas das matrizes de covariâncias diferentes $\boldsymbol{\Sigma}_1 \neq \boldsymbol{\Sigma}_2$ em função de n , p e das correlações $\rho = 0,0$ e $0,90$ ao nível de 5% de significância.	75
Tabela 4.15 – Poder dos testes, considerando a distribuição Normal Contaminada com $(1 - \delta) = 20\%$ de contaminação com vetor de médias diferentes $\boldsymbol{\mu}_1 \neq \boldsymbol{\mu}_2$ e mesma matrizes de covariâncias $\boldsymbol{\Sigma}_1 = \boldsymbol{\Sigma}_2$ em função de n , p e das correlações $\rho = 0,0$ e $0,90$ ao nível de 5% de significância.	78
Tabela 4.16 – Poder dos testes, considerando a distribuição Normal Contaminada com $(1 - \delta) = 20\%$ de contaminação com diferentes vetores de médias $\boldsymbol{\mu}_1 \neq \boldsymbol{\mu}_2$ e estruturas das matrizes de covariâncias diferentes $\boldsymbol{\Sigma}_1 \neq \boldsymbol{\Sigma}_2$ em função de n , p e das correlações $\rho = 0,0$ e $0,90$ ao nível de 5% de significância.	80
Tabela 4.17 – Poder dos testes, considerando a distribuição Uniforme em função de n , p e das correlações $\rho = 0,0$ e $0,90$ ao nível de 10% de significância.	82
Tabela 4.18 – Poder dos testes, considerando a distribuição Uniforme em função de n , p e das correlações $\rho = 0,0$ e $0,90$ ao nível de 5% de significância.	84
Tabela 4.19 – Poder dos testes, considerando a distribuição Uniforme em função de n , p e das correlações $\rho = 0,0$ e $0,90$ ao nível de 1% de significância.	85
Tabela 4.20 – Valores das distâncias generalizadas de Mahalanobis robusta D_i^{2*} de cada observação para o estimador robusto da média amostral, e das distâncias transformadas beta robustas b_i^*	87

Tabela 4.21 – Valores dos resultados das estatísticas de teste e valor- <i>p</i> referente aos testes TNMD2RKS, TNMDbRKS, TNMD2RBoot, TNMDbRBoot, TNMBP e TNMSWR, em relação a um pequeno subconjunto do exemplo apresentado por Royston (1983).	87
Tabela 1 – Taxas de erro tipo I, considerando a distribuição normal multivariada com presença de 2% de <i>outliers</i> , em função de <i>n</i> , <i>p</i> e das correlações $\rho = 0,0$ e $0,90$ ao nível de 10% de significância.	93
Tabela 2 – Taxas de erro tipo I, considerando a distribuição normal multivariada com presença de 2% de <i>outliers</i> , em função de <i>n</i> , <i>p</i> e das correlações $\rho = 0,0$ e $0,90$ ao nível de 5% de significância.	94
Tabela 3 – Taxas de erro tipo I, considerando a distribuição normal multivariada com presença de 2% de <i>outliers</i> , em função de <i>n</i> , <i>p</i> e das correlações $\rho = 0,0$ e $0,90$ ao nível de 1% de significância.	95
Tabela 5 – Poder dos testes, considerando a distribuição Normal Contaminada com $(1 - \delta) = 20\%$ de contaminação com mesmo vetor de médias $\mu_1 = \mu_2$ e estruturas das matrizes de covariâncias diferentes $\Sigma_1 \neq \Sigma_2$ em função de <i>n</i> , <i>p</i> e das correlações $\rho = 0,0$ e $0,90$ ao nível de 1% de significância.	96
Tabela 6 – Poder dos testes, considerando a distribuição Normal Contaminada com $(1 - \delta) = 20\%$ de contaminação com vetor de médias diferentes $\mu_1 \neq \mu_2$ e mesma matrizes de covariâncias $\Sigma_1 = \Sigma_2$ em função de <i>n</i> , <i>p</i> e das correlações $\rho = 0,0$ e $0,90$ ao nível de 10% de significância.	97
Tabela 7 – Poder dos testes, considerando a distribuição Normal Contaminada com $(1 - \delta) = 20\%$ de contaminação com vetor de médias diferentes $\mu_1 \neq \mu_2$ e mesma matrizes de covariâncias $\Sigma_1 = \Sigma_2$ em função de <i>n</i> , <i>p</i> e das correlações $\rho = 0,0$ e $0,90$ ao nível de 1% de significância.	98
Tabela 8 – Poder dos testes, considerando a distribuição Normal Contaminada com $(1 - \delta) = 20\%$ de contaminação com diferentes vetores de médias $\mu_1 \neq \mu_2$ e estruturas das matrizes de covariâncias diferentes $\Sigma_1 \neq \Sigma_2$ em função de <i>n</i> , <i>p</i> e das correlações $\rho = 0,0$ e $0,90$ ao nível de 10% de significância.	99

- Tabela 9 – Poder dos testes, considerando a distribuição Normal Contaminada com $(1 - \delta) = 20\%$ de contaminação com diferentes vetores de médias $\boldsymbol{\mu}_1 \neq \boldsymbol{\mu}_2$ e estruturas das matrizes de covariâncias diferentes $\boldsymbol{\Sigma}_1 \neq \boldsymbol{\Sigma}_2$ em função de n , p e das correlações $\rho = 0,0$ e $0,90$ ao nível de 1% de significância. . . . 100
- Tabela 4 – Poder dos testes, considerando a distribuição Normal Contaminada com $(1 - \delta) = 20\%$ de contaminação com mesmo vetor de médias $\boldsymbol{\mu}_1 = \boldsymbol{\mu}_2$ e estruturas das matrizes de covariâncias diferentes $\boldsymbol{\Sigma}_1 \neq \boldsymbol{\Sigma}_2$ em função de n , p e das correlações $\rho = 0,0$ e $0,90$ ao nível de 10% de significância. . . . 101

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	13
2	REFERENCIAL TEÓRICO	15
2.1	Formas quadráticas	15
2.1.1	Distâncias	15
2.1.1.1	Distribuições de Distâncias	17
2.2	<i>Outliers</i> multivariados	18
2.3	Estimadores robustos	19
2.3.1	Algoritmo <i>CovOgk</i>	19
2.4	<i>Bootstrap</i>	22
2.5	Simulação Monte Carlo	23
2.6	Testes de normalidade	24
2.6.1	Testes de normalidade univariada	24
2.6.1.1	Teste Shapiro-Wilk	24
2.6.1.2	Teste Shapiro-Francia	27
2.6.1.3	Teste Kolmogorov-Smirnov	28
2.6.2	Testes de normalidade multivariada	28
2.6.2.1	Teste Shapiro-Wilk multivariado	29
2.6.2.2	Teste de normalidade multivariada de Székely e Rizzo (2005)	30
2.6.2.3	Teste de normalidade multivariada baseado em <i>bootstrap</i> paramétrico	31
2.6.2.4	Outros testes de normalidade multivariada	32
3	MÉTODOS	36
3.1	Testes de normalidade multivariada propostos	36
3.1.1	Teste de normalidade multivariada para distâncias robustas	36
3.1.2	Teste de normalidade multivariada baseado em distâncias beta robustas	37
3.1.3	Teste de normalidade multivariada <i>bootstrap</i> paramétrico para distâncias robustas	37
3.1.4	Teste de normalidade multivariada <i>bootstrap</i> paramétrico para distâncias beta robustas	38
3.2	Validação do desempenho	39
3.2.1	Taxa de erro tipo I	40
3.2.2	Poder do teste	42

4	RESULTADOS E DISCUSSÃO	44
4.1	Erro tipo I	44
4.2	Poder	58
4.3	Exemplo	85
5	CONCLUSÕES	89
	REFERÊNCIAS	90
	APENDICE A – Tabelas	93
	APENDICE B – Rotinas R	102

1 INTRODUÇÃO

A distribuição normal, tanto para o caso univariado quanto para o multivariado, possui um papel muito importante na inferência estatística, pois na maioria dos casos pressupõe-se normalidade, além de ser uma forma limitante de outras distribuições, pelo teorema central do limite. A não verificação dessa pressuposição influencia diretamente na qualidade e confiabilidade da inferência, podendo conduzir em resultados e conclusões incorretos. Destaca-se, assim, a importância dos testes de normalidade na realização da inferência estatística.

Na literatura especializada, muitos testes para avaliar a normalidade foram propostos. No caso univariado, os testes mais comuns são: o teste de aderência Qui-Quadrado, Kolmogorov-Smirnov, Lilliefors e Shapiro-Wilk. No cenário multivariado, muitos dos testes existentes são extensões daqueles propostos para o caso univariado, como por exemplo, o teste de Shapiro-Wilk de Royston, que é um dos mais utilizados.

A avaliação da normalidade multivariada é feita mediante diferentes procedimentos. Uma forma indireta de verificação da normalidade é feita por meio de gráficos. Porém, como é uma avaliação subjetiva, torna-se necessária a aplicação de testes formais. Dentre os métodos formais mais conhecidos, citam-se os testes baseados nos coeficientes de correlação ou determinação, coeficiente de simetria e curtose e os baseados em distâncias.

Vale ressaltar que, apesar do grande número de testes de normalidade multivariada existentes, estes testes geralmente apresentam limitações quanto a suas aplicações. Em geral, estas limitações estão relacionadas com características dos dados, como, por exemplo, tamanho e dimensão. Desta forma, muitos testes são específicos, de acordo com as características dos dados.

Assim sendo, uma característica presente em boa parte dos conjuntos de dados refere-se a observações discrepantes (*outliers*). Os *outliers* são observações atípicas que não seguem os padrões dos dados. A presença destas observações pode influenciar na inferência, nos estimadores de localização e escala e em testes de hipóteses.

No caso de dados com *outliers*, os testes de normalidade multivariada podem ser influenciados por esses pontos, os quais podem distorcer as distribuições e/ou prejudicar estimativas dos parâmetros. Em testes de normalidade baseados na distância de Mahalanobis, essa influência fica evidente, pois essas distâncias dependem das estimativas dos parâmetros de localização e escala que, por sua vez, são muito influenciados pelos *outliers*.

Uma forma de contornar a influência dos *outliers* é por meio dos estimadores robustos. Estimadores que por definição não são influenciados por valores discrepantes, fazendo com que métodos que utilizam estes estimadores se tornem robustos, um exemplo disso é a distância generalizada de Mahalanobis. Desta forma, em amostras com presença de observações discrepantes torna-se preponderante que métodos robustos sejam utilizados.

Tendo em vista a influência dos *outliers*, são propostos quatro testes de normalidade multivariada baseados na distância de Mahalanobis com estimadores robustos para os parâmetros de localização e escala, por meio da função CovOgK que é baseada em medidas robustas alternativas, o desvio mediano e correlação mediana. Assim sendo, os objetivos deste trabalho são:

1. Propor quatro novos testes de normalidade multivariada, baseados na distância generalizada de Mahalanobis e beta, sendo dados por:
 - i) Teste de normalidade multivariada baseado em distâncias de Mahalanobis com medidas robustas dos parâmetros de localização e escala (TNMD2RKS);
 - ii) Teste de normalidade multivariada baseado em distâncias beta robustas (TNMDbRKS);
 - iii) Teste de normalidade multivariada *bootstrap* paramétrico baseado em distâncias de Mahalanobis robustas (TNMD2RBoot).
 - iv) Teste de normalidade multivariada *bootstrap* paramétrico baseado em distâncias beta robustas (TNMDbRBoot).
2. Avaliar o desempenho dos testes propostos quanto às taxas de erro tipo I e aos valores de poder por meio de simulação Monte Carlo.

2 REFERENCIAL TEÓRICO

Neste capítulo, estão apresentados os principais conceitos utilizados para a realização deste trabalho e alguns artigos relacionados a testes de normalidade.

2.1 Formas quadráticas

As formas quadráticas são funções que apresentam somente termos quadráticos ou duplo produtos de seus elementos. Segundo Ferreira (2011) pode-se definir uma forma quadrática por:

$$Q(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^\top \mathbf{A} \mathbf{x} = \sum_{i=1}^n a_{ii} x_i^2 + 2 \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{k=i+1}^n a_{ik} x_i x_k = \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^n a_{ik} x_i x_k \quad (2.1)$$

em que, \mathbf{A} é uma matriz de ordem n , simétrica e \mathbf{x} um vetor n -dimensional com $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$. A quantidade $Q(\mathbf{x})$ dada pela expressão (2.1) representa uma função do vetor \mathbf{x} , sendo os elementos da matriz \mathbf{A} conhecidos.

Uma forma quadrática pode ser classificada conforme o valor de $Q(\mathbf{x})$ considerando uma matriz \mathbf{A} fixa. Assim, se $Q(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^\top \mathbf{A} \mathbf{x}$ é uma forma quadrática, então:

- i) $Q(\mathbf{x}) > 0$ positiva definida;
- ii) $Q(\mathbf{x}) \geq 0$ semipositiva definida;
- iii) $Q(\mathbf{x}) < 0$ negativa definida;
- iv) $Q(\mathbf{x}) \leq 0$ seminegativa definida.

A matriz \mathbf{A} recebe a mesma classificação das formas quadráticas, correspondente a cada caso anterior de $Q(\mathbf{x})$, ou seja, se $Q(\mathbf{x}) > 0$ a matriz \mathbf{A} é positiva definida, se $Q(\mathbf{x}) \geq 0$ \mathbf{A} é semipositiva definida, $Q(\mathbf{x}) < 0$ \mathbf{A} é negativa definida e seminegativa definida quando $Q(\mathbf{x}) \leq 0$ (FERREIRA, 2011).

2.1.1 Distâncias

Uma forma quadrática muito utilizada nas técnicas de análise multivariada é a distância quadrática, e sua expressão geral é dada por

$$d^2(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|_{\Psi}^2 = (\mathbf{x} - \mathbf{y})^\top \Psi (\mathbf{x} - \mathbf{y}) \quad (2.2)$$

em que, \mathbf{x} e \mathbf{y} são vetores p -dimensionais, Ψ é uma matriz positiva definida, denominada de métrica e $\|\mathbf{a}\|$ refere-se a norma do vetor \mathbf{a} , dada por $\|\mathbf{a}\| = \sqrt{\mathbf{a}^\top \mathbf{a}}$.

A distância $d^2(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ segue as seguintes propriedades, seja um terceiro vetor \mathbf{z} , em que $\mathbf{z} \in \mathbb{R}^p$, tem-se:

$$\begin{cases} d^2(\mathbf{x}, \mathbf{y}) > 0, & \forall \mathbf{x} \neq \mathbf{y} \\ d^2(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = 0, & \text{se e somente se } \mathbf{x} = \mathbf{y} \\ d^2(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \leq d^2(\mathbf{x}, \mathbf{z}) + d^2(\mathbf{y}, \mathbf{z}), & \forall \mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}. \end{cases}$$

De acordo com os valores assumidos pela métrica tem-se diferentes distâncias. Para definir as distâncias será considerado que os vetores \mathbf{x} e \mathbf{y} na expressão (2.2), são realizações das variáveis aleatórias \mathbf{X} e \mathbf{Y} , respectivamente. No caso em que a métrica é definida por $\Psi = \mathbf{I}$, em que \mathbf{I} é a matriz identidade, dada por

$$\mathbf{I} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix},$$

tem-se a distância euclidiana quadrática, definida por $d^2(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = (\mathbf{x} - \mathbf{y})^\top \mathbf{I}(\mathbf{x} - \mathbf{y})$. Nesta distância as variâncias (escalas) e as covariâncias (estrutura de correlação) não são consideradas.

Para $\Psi = \mathbf{D}^{-1}$, sendo \mathbf{D}^{-1} a inversa da matriz \mathbf{D} , dada por

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} S_{11} & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & S_{22} & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & S_{kk} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & S_{pp} \end{bmatrix},$$

em que os elementos da diagonal são as variâncias amostrais referente a cada variável, ou seja, o k -ésimo elemento da diagonal S_{kk} é a variância amostral da k -ésima variável. Desta forma tem-se a distância euclidiana padronizada quadrática definida por $d^2(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = (\mathbf{x} - \mathbf{y})^\top \mathbf{D}^{-1}(\mathbf{x} - \mathbf{y})$. Neste caso, considera-se as condições de escala, porém não a estrutura de correlação.

O último caso apresentado é quando a métrica da expressão (2.2) é definida por $\Psi = \mathbf{S}^{-1}$, em que \mathbf{S}^{-1} é a inversa da matriz \mathbf{S} que é a matriz de covariâncias amostral, representada por

$$\mathbf{S} = \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} & \cdots & S_{1p} \\ S_{21} & S_{22} & \cdots & S_{2p} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ S_{p1} & S_{p2} & \cdots & S_{pp} \end{bmatrix},$$

nesse caso a distância é definida por $d^2(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = (\mathbf{x} - \mathbf{y})^\top \mathbf{S}^{-1} (\mathbf{x} - \mathbf{y})$ e é denominada por distância generalizada de Mahalanobis. Segundo Ferreira (2011), nesta definição de distância, as condições de escala são igualadas e os efeitos da correlação são considerados, sendo assim, muito rica em informações.

2.1.1.1 Distribuições de Distâncias

A partir das distâncias apresentadas, um conceito muito importante está relacionado às distribuições assumidas por estas distâncias (HARDIN; ROCKE, 2005; FERREIRA, 2011). Para apresentar os resultados distribucionais relacionados às distâncias, é essencial que os dados sejam provenientes de uma população normal multivariada. Desta forma, seja o vetor aleatório $\mathbf{X} \in \mathbb{R}^p$ em que $\mathbf{X} \sim N_p(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma})$ e sejam $\bar{\mathbf{X}}$ e \mathbf{S} o vetor de médias e a matriz de covariâncias amostral.

A primeira distribuição apresentada leva em consideração que os parâmetros $\boldsymbol{\mu}$ e $\boldsymbol{\Sigma}$ são conhecidos. A distância de Mahalanobis do vetor aleatório \mathbf{X}_i para a média populacional $\boldsymbol{\mu}$, dada por

$$d_{\boldsymbol{\Sigma}^{-1}}^2(\mathbf{X}_i, \boldsymbol{\mu}) = (\mathbf{X}_i - \boldsymbol{\mu})^\top \boldsymbol{\Sigma}^{-1} (\mathbf{X}_i - \boldsymbol{\mu}), \quad (2.3)$$

segue uma distribuição qui-quadrado com $\nu = p$ graus de liberdade, em que p é a dimensão, representada por $d_{\boldsymbol{\Sigma}^{-1}}^2(\mathbf{X}_i, \boldsymbol{\mu}) \sim \chi_p^2$.

Entretanto os parâmetros $\boldsymbol{\mu}$ e $\boldsymbol{\Sigma}$ geralmente são desconhecidos. Desta forma eles são estimados por $\bar{\mathbf{X}}$ e \mathbf{S} respectivamente, e neste caso a distância de Mahalanobis do vetor aleatório \mathbf{X}_i para a média amostral $\bar{\mathbf{X}}$, é dada por

$$d_{\mathbf{S}^{-1}}^2(\mathbf{X}_i, \bar{\mathbf{X}}) = (\mathbf{X}_i - \bar{\mathbf{X}})^\top \mathbf{S}^{-1} (\mathbf{X}_i - \bar{\mathbf{X}}), \quad (2.4)$$

cuja forma segue uma distribuição assintótica qui-quadrado com $\nu = p$ graus de liberdade.

Outro resultado muito importante apresentado por Gnanadesikan e Kettenring (1972) leva em consideração uma transformação, a qual multiplica a distância dada pela expressão (2.4) por $\frac{n}{(n-2)^2}$, em que n é o tamanho amostral. Desta transformação tem-se, segundo Gnanadesikan e Kettenring (1972) uma distribuição beta exata, dada por

$$\frac{n}{(n-1)^2} d_{\mathbf{S}^{-1}}^2(\mathbf{X}_i, \bar{\mathbf{X}}) \sim \text{Beta}\left(\frac{p}{2}, \frac{n-p-1}{2}\right), \quad (2.5)$$

em que os parâmetros da beta são $\alpha = p/2$ e $\beta = (n-p-1)/2$, p é a dimensão dos dados.

Estes resultados são muito importantes nos testes de normalidade multivariada baseados nas distâncias. Uma vantagem importante destas distâncias, além das apresentadas anteriormente, é que são medidas invariantes em relação a transformações lineares. E uma desvantagem diz respeito a dados com presença de *outliers*, os quais podem influenciar na distância generalizada de Mahalanobis. Segundo Singh (1996) dados discrepantes podem inflacionar a matriz de covariâncias \mathbf{S} , violando assim a estrutura de correlação, influenciando em métodos que utilizam esta distância.

2.2 *Outliers* multivariados

Os *outliers*, segundo Rousseeuw e Zomeren (1990), são observações atípicas que não seguem os padrões da maioria dos dados. De acordo com Todorov, Filzmoser et al. (2009), os *outliers* estão presentes em boa parte dos conjuntos de dados, em qualquer domínio de aplicação. A detecção desse tipo de observação é importante para entender o comportamento e a influência deles nos dados.

No cenário multivariado, a detecção de *outliers* é essencial, uma vez, que essas observações influenciam na inferência estatística. Porém, Rocke e Woodruff (1996) mencionam a dificuldade na execução dessa tarefa quando se tem grande proporção de contaminação e em elevadas dimensões. Outro aspecto importante é a utilização das distâncias de Mahalanobis na detecção de *outliers*, por ser uma medida invariante em relação a transformações lineares, não alterando o comportamento de métodos de análise (ROCKE; WOODRUFF, 1996).

Segundo Singh (1996), os *outliers* podem influenciar nas estimativas dos parâmetros de locação e escala e, conseqüentemente, nos valores que dependem destas estimativas. Um exemplo disso é a distância generalizada de Mahalanobis, que depende diretamente das estima-

tivas destes parâmetros, podendo assim, ser distorcida por valores discrepantes. Uma forma de contornar a influência dos *outliers* é por meio de estimadores robustos, que, por definição, não são influenciados por valores discrepantes.

2.3 Estimadores robustos

Na literatura encontramos muitos métodos para estimativas robustas dos parâmetros de locação e escala. Dentre os mais utilizados têm-se os métodos baseados no volume mínimo da elipsoide (MVE) e métodos baseados no determinante mínimo da matriz de covariâncias (MCD). Segundo Rousseeuw e Driessen (1999) o MCD tem várias vantagens sobre o MVE, uma das mais importantes é a precisão nas distâncias robustas.

O MCD consiste em estimar a matriz de covariâncias com o menor determinante. Apesar da precisão do MCD, os algoritmos usados têm um elevado tempo de execução computacional, tornando o seu uso inviável para grandes amostras e elevadas dimensões. Para lidar com este problema Rousseeuw e Driessen (1999) desenvolveram um algoritmo denominado FAST-MCD, que facilita o uso do MCD, mas continua tendo um tempo computacional considerável.

Desta forma, Maronna e Zamar (2002) propuseram um método baseado em uma relação apresentada por Gnanadesikan e Kettenring (1972). Baseados nesta relação, Maronna e Zamar (2002) propuseram o algoritmo *CovOgk*, o qual se mostrou muito eficiente em elevadas dimensões, além de apresentar baixo tempo computacional quando comparado com outros métodos encontrados na literatura, como, por exemplo, o algoritmo FAST-MCD.

2.3.1 Algoritmo *CovOgk*

O algoritmo *CovOgk* foi proposto por Maronna e Zamar (2002), utilizando um estimador robusto proposto por Gnanadesikan e Kettenring (1972), os quais se basearam na relação

$$\text{cov}(X_1, X_2) = \frac{1}{4} (\sigma_{X_1+X_2}^2 - \sigma_{X_1-X_2}^2) \quad (2.6)$$

em que, no lugar de $\sigma^2(\cdot)$ utiliza-se um estimador robusto que seja funcional. Neste caso Maronna e Zamar (2002) sugerem que sejam utilizados a mediana e o desvio mediano absoluto (MAD), que são medidas robustas alternativas para a média e o desvio padrão. Assim sendo, para um bom entendimento do algoritmo, são apresentadas as medidas alternativas dos parâmetros, desvio padrão e a correlação.

É importante salientar, inicialmente, que a mediana é uma medida robusta da locação (PALMA; GALLO, 2016). A partir da mediana é gerado o parâmetro alternativo para o desvio padrão.

Para o caso bivariado, seja considerada a variável aleatória X_i para $i = 1, 2$, em que, o desvio padrão da variável X_i , $\sigma = E[(X_i - E(X_i))^2]^{1/2}$, sendo $E[X_i]$ a esperança de X_i , tem como medida alternativa o desvio absoluto mediano (MAD), dado por:

$$MAD(X_i) = (\text{mediana}(|X_i - \text{mediana}(X_i)|)), \quad (2.7)$$

em que $|a|$ representa o valor absoluto de a . Segundo Hampel (1974), o MAD é um estimador robusto para o parâmetro de escala.

A partir destes estimadores calcula-se a matriz \mathbf{Y} de dados normalizados, formada por colunas $\mathbf{Y}_j = \frac{\mathbf{X}_j}{MAD(\mathbf{X}_j)}$ e por linhas $\mathbf{y}_i = \mathbf{D}^{-1}\mathbf{x}_i$ em que, $\mathbf{D} = \text{diag}(MAD(\mathbf{x}_j))$, $j = 1, \dots, p$ e $i = 1, \dots, n$. Da matriz \mathbf{Y} , é obtida a matriz \mathbf{U} , que é a estimativa robusta da matriz de correlação de \mathbf{X} . A matriz \mathbf{U} é calculada por meio da relação apresentada na expressão (2.6), ou seja

$$\mathbf{U}_{ij} = \begin{cases} 1, & i = j, \\ \frac{MAD(\mathbf{y}_i + \mathbf{y}_j) - MAD(\mathbf{y}_i - \mathbf{y}_j)}{4}, & i \neq j. \end{cases} \quad (2.8)$$

Entretanto, a matriz \mathbf{U} apresenta algumas desvantagens. Uma delas é em relação à matriz \mathbf{U} não ser positiva definida, inviabilizando assim a utilização da distância generalizada de Mahalanobis para a identificação de *outliers*, além de não ser uma medida invariante em relação a transformações lineares. Portanto, após os estimadores serem definidos, aplica-se a transformação proposta por Maronna e Zamar (2002) para obter a matriz de covariâncias positivas definida e aproximadamente invariante em relação a transformações lineares. A transformação consiste em:

- i. por meio da decomposição espectral da matriz de correlações \mathbf{U} , calcula-se os autovalores λ_j e autovetores \mathbf{e}_j , para $j = 1, 2, \dots, p$. De forma que $\mathbf{U} = \mathbf{P}\mathbf{\Lambda}\mathbf{P}^\top$, em que

$$\mathbf{\Lambda} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_p \end{bmatrix} \quad \text{e } \mathbf{P}_{p \times p} = [\mathbf{e}_1 \ \mathbf{e}_2 \ \cdots \ \mathbf{e}_p],$$

em que, $\mathbf{\Lambda}$ é a matriz diagonal dos autovalores de \mathbf{U} e \mathbf{P} é a matriz formada pelos autovetores de \mathbf{U} em suas colunas.

- ii. sejam $\mathbf{Q} = \mathbf{DP}$, em que, $\mathbf{D} = \text{diag}(MAD(\mathbf{x}_j))$ e $\mathbf{z}_i = \mathbf{Q}^{-1}\mathbf{x}_i$, para $i = 1, 2, \dots, n$; e
- iii. os estimadores robustos para locação ($\mathbf{m}(\mathbf{X})$) e escala ($\mathbf{S}(\mathbf{X})$) são definidos respectivamente por:

$$\mathbf{m}(\mathbf{X}) = \mathbf{Q}\mathbf{l} \text{ e } \mathbf{S}(\mathbf{X}) = \mathbf{Q}\mathbf{\Gamma}\mathbf{Q}^\top \quad (2.9)$$

em que $\mathbf{\Gamma} = \text{diag}(MAD(\mathbf{Z}_1)^2, \dots, MAD(\mathbf{Z}_p)^2)$ é uma matriz diagonal, cujos elementos da diagonal são as variâncias medianas de \mathbf{Z} e $\mathbf{l} = [\text{mediana}(\mathbf{Z}_1), \dots, \text{mediana}(\mathbf{Z}_p)]^\top$ é um vetor de medianas da matriz \mathbf{Z} .

Para melhorar as estimativas, um processo iterativo é aplicado, substituindo \mathbf{U} por $\mathbf{S}(\mathbf{X})$, dada pela expressão (2.9), e repetindo os passos (i), (ii) e (iii), até que se estabilizem as estimativas em um ponto qualquer do processo iterativo.

O próximo passo do algoritmo é a detecção de *outliers*, por meio da distância generalizada de Mahalanobis usando os estimadores robustos de locação $\mathbf{m}(\mathbf{X})$ e escala $\mathbf{S}(\mathbf{X})$, dada por:

$$d_i^{2*}(\mathbf{x}_i, \mathbf{m}(\mathbf{X})) = (\mathbf{x}_i - \mathbf{m}(\mathbf{X}))^\top (\mathbf{S}(\mathbf{X}))^{-1} (\mathbf{x}_i - \mathbf{m}(\mathbf{X})), \text{ para } i = 1, 2, \dots, n.$$

As observações são classificadas como *outliers* comparando cada distância robusta de Mahalanobis com o valor de corte cv , definido por:

$$cv = \frac{\chi_p^2(\beta) \text{mediana}(d_1^{2*}, \dots, d_n^{2*})}{\chi_p^2(0,5)}$$

em que, $\chi_p^2(\beta)$ é o β -quantil da distribuição quiquadrada, com p graus de liberdade. Assim sendo, para a observação \mathbf{x}_i se $d_i^{2*}(\mathbf{x}_i, \mathbf{m}(\mathbf{X})) > cv$, a observação é considerada como *outlier*. Após a identificação dos *outliers* os parâmetros de locação $\boldsymbol{\mu}$ e escala $\boldsymbol{\Sigma}$ são estimados, da forma convencional, sem as observações discrepantes.

Porém, os estimadores robustos utilizados nos testes propostos são os calculados na expressão (2.9), $\mathbf{m}(\mathbf{X})$ e $\mathbf{S}(\mathbf{X})$, depois do processo iterativo, representados por: $\bar{\mathbf{X}}^* = \mathbf{m}(\mathbf{X})$

e $\mathbf{S}^* = \mathbf{S}(\mathbf{X})$. O algoritmo CovOgk encontra-se disponível em [(R CORE TEAM, 2016), *library(rrcov)*].

2.4 Bootstrap

O *bootstrap* foi introduzido por Efron (1979) como um método computacional para a estimação de erros padrões (EFRON; TIBSHIRANI, 1993). É importante ressaltar outras utilidades do *bootstrap* como na estimação de parâmetros por intervalos, realização de teste de hipóteses, estimativa da taxa de erro na análise discriminante, ajuste de valor- p e em problemas de classificação.

O *bootstrap* é um método baseado em reamostragens com reposição, em que são produzidas B subamostras a partir da original, em que cada uma das B subamostras possuem o mesmo tamanho n que a amostra original. Segundo Casella e Berger (2010) por meio de reamostras, o *bootstrap* ajuda a aprender sobre as características da amostra, uma vez que a amostra representa a população. A vantagem de se utilizar o método *bootstrap* para realizar inferência é quando a distribuição de probabilidade da população não é conhecida e a condição de normalidade é violada (FERREIRA, 2013). As repetições *bootstrap* podem ser feitas de duas maneiras distintas sendo elas paramétrica e não paramétrica.

No *bootstrap* não paramétrico não é usado um modelo estatístico, ou seja, não são feitas pressuposições sobre a distribuição dos dados. Neste caso, considera-se que a amostra original é independente e identicamente distribuída, em que cada elemento da amostra tem probabilidade $1/n$ de ser selecionado, sendo n o tamanho da amostra. Segundo Ferreira (2013) a ideia do *bootstrap* é substituir a distribuição desconhecida dos dados por uma distribuição empírica f^* conhecida.

Supondo que X_1, X_2, \dots, X_n seja uma amostra aleatória de tamanho n de uma população com distribuição desconhecida e seja o estimador $\hat{\theta}(X_1, X_2, \dots, X_n) = \hat{\theta}$ uma função dos valores amostrais. Primeiramente são geradas B reamostras (amostras *bootstrap*) com reposição da distribuição de probabilidade f^* . Posteriormente, a estimativa do parâmetro de interesse para cada uma das B reamostras é calculada, sendo assim $\hat{\theta}_i^*$ o i -ésimo estimador para a i -ésima amostra *bootstrap*. Assim, tem-se a distribuição *bootstrap* desse parâmetro, a partir da qual pode-se fazer inferências.

No método de reamostragem *bootstrap* paramétrico, um modelo estatístico é usado, ou seja, são feitas suposições sobre a distribuição dos dados, sendo este procedimento mais

restritivo. Nessa situação, as B amostras *bootstrap* são geradas a partir da distribuição conhecida, com as estimativas dos parâmetros obtidos da amostra original. Ferreira (2013) ressalta o aspecto de assumirmos como conhecida a distribuição da variável aleatória, mas não seus parâmetros.

Como no caso anterior, supondo X_1, X_2, \dots, X_n uma amostra aleatória de tamanho n de uma população, porém neste caso, com função de densidade de probabilidade $f(x|\theta)$, em que θ pode ser estimado por $\hat{\theta}$, que é o estimador de máxima verossimilhança de θ , em que θ não necessariamente é um escalar podendo ser um vetor de parâmetros (CASELLA; BERGER, 2010). Desta forma, as amostras *bootstrap* são obtidas a partir de $f(x|\hat{\theta})$, ou seja, não são reamostras dos dados, mas amostras aleatórias reais, sendo chamadas algumas vezes de distribuições pluggadas (CASELLA; BERGER, 2010).

2.5 Simulação Monte Carlo

O método Monte Carlo é um mecanismo computacionalmente intensivo, que pode ser descrito como método de simulação estatística que utiliza sequências de números aleatórios para desenvolver simulações. Originou-se na década de 1940, a partir de estudos para examinar diferentes problemas em física, de uma perspectiva estocástica com o uso de números aleatórios, realizados por Fermi, Ulam, Von Neuman e Metropolis (LANDAU; BINDER, 2014)

Segundo Landau e Binder (2014) um dos usos mais simples e eficaz para os métodos Monte Carlo é na avaliação de integrais que são intratáveis por técnicas analíticas. Na Estatística, o método Monte Carlo permite realizar inferência quando a distribuição dos parâmetros de interesse é desconhecida, e quando as suposições do modelo são violadas, além de ser usado na avaliação do desempenho de testes estatísticos. Neste último caso, o método Monte Carlo é utilizado com o propósito de validar testes quanto ao controle da taxa de erro tipo I e o poder.

Apesar da grande utilidade das simulações, é importante ressaltar que seu uso só é justificado se o procedimento for adequado em substituir um sistema real, visto que, segundo Morettin e Bussab (2010) estudos de simulação tentam reproduzir um problema real por via de um ambiente controlado. O método Monte Carlo pode ser determinado como a representação da solução deste problema, sendo utilizada uma sequência de números aleatórios para se fazer esta representação, a partir de uma sequência pseudoaleatória baseada na distribuição uniforme $(0, 1)$ (SILVA, 2009).

2.6 Testes de normalidade

A distribuição normal, tanto no caso univariado quanto no multivariado, é a mais importante das distribuições (FERREIRA, 2009; FERREIRA, 2011). Evans e Rosenthal (2009) atribuem esta importância ao teorema central do limite, o qual mostram que, a distribuição normal é a forma limitante de outras distribuições. Uma outra razão é em consequência da maior parte das análises de dados ser feita por meio de métodos inferenciais, os quais são baseados na suposição de normalidade, como, por exemplo, o teste t, o teste F na análise de variância e na verificação da homogeneidade de variâncias. Desta forma, a avaliação da normalidade se torna necessária para a qualidade da inferência.

2.6.1 Testes de normalidade univariada

Na literatura especializada foram propostos muitos testes e procedimentos para verificar a normalidade univariada e multivariada. Segundo Cirillo e Ferreira (2003), em geral, os testes de normalidade multivariada são extensões do caso univariado. Desta forma são apresentados alguns dos testes de normalidade univariada mais utilizados, quais sejam, Shapiro-Wilk e Shapiro-Francia. O teste Kolmogorov-Smirnov será apresentado, uma vez que será aplicado em dois dos testes propostos.

2.6.1.1 Teste Shapiro-Wilk

O teste de normalidade univariado de Shapiro-Wilk é um dos mais poderosos e mais usados na literatura. Foi proposto por Shapiro e Wilk (1965). Dados $X_{(1)}, X_{(2)}, \dots, X_{(n)}$ as estatísticas de ordem da amostra observada e $Z_{(1)}, Z_{(2)}, \dots, Z_{(n)}$ as estatísticas de ordem da normal padrão, então a estatística do teste, representada por W , é dada por:

$$W = \frac{\left(\sum_{i=1}^n a_i X_{(i)} \right)^2}{\sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2}, \quad (2.10)$$

em que, o denominador é a soma de quadrados dos desvios amostrais em relação a média, $X_{(i)}$ é a i -ésima estatística de ordem e \bar{X} é a média amostral. O numerador é dado pela combinação linear de quantidades relacionadas às estatísticas de ordem da distribuição normal padrão. Os

valores de $\mathbf{a} = [a_1, a_2, \dots, a_n]^\top$ são dependentes do vetor de médias $\mathbf{m} = [m_1, m_2, \dots, m_n]^\top$ e da matriz de covariâncias $\mathbf{V}_{(n \times n)} = [v_{ij}]$ das estatísticas de ordem de \mathbf{Z} , sendo \mathbf{a} calculado por:

$$\mathbf{a} = \frac{\mathbf{V}^{-1} \mathbf{m}}{\sqrt{\mathbf{m}^\top \mathbf{V}^{-2} \mathbf{m}}}. \quad (2.11)$$

Segundo Ferreira (2009) os valores exatos de m_i , valor esperado da i -ésima estatística de ordem da normal padrão, podem ser calculados numericamente, porém por envolver integrais se torna uma tarefa árdua. Essas quantidades podem ser estimadas com base no cálculo de quantis da normal padrão, da seguinte forma:

$$\tilde{m}_i = \Phi^{-1} \left(\frac{i - 3/8}{n + 1/4} \right) \quad (2.12)$$

em que $\Phi^{-1}(p)$ é a inversa da função de distribuição da normal padrão avaliada em p , entre 0 e 1. A função de distribuição empírica é dada por $(i - 3/8) / (n + 1/4)$, em que se utiliza correção de continuidade para se obter uma melhor aproximação.

Para estimar o vetor \mathbf{a} , Royston (1993) propôs as aproximações dadas por

$$\begin{aligned} \tilde{a}_n &= c_n + 0,221157u - 0,14798u^2 - 2,071190u^3 \\ &\quad + 4,434685u^4 - 2,706056u^5 \end{aligned} \quad (2.13)$$

$$\begin{aligned} \tilde{a}_{n-1} &= c_{n-1} + 0,042981u - 0,293762u^2 - 1,752461u^3 \\ &\quad + 5,682633u^4 - 3,582633u^5 \end{aligned} \quad (2.14)$$

em que c_n e c_{n-1} são o n -ésimo e $(n - 1)$ -ésimo elemento do vetor $\mathbf{c} = (\tilde{\mathbf{m}}^\top \tilde{\mathbf{m}})^{-\frac{1}{2}} \tilde{\mathbf{m}}$ e $u = 1/\sqrt{n}$.

Calcular a quantidade normalizadora por:

$$\phi = \begin{cases} (\tilde{\mathbf{m}}^\top \tilde{\mathbf{m}} - 2\tilde{m}_n^2) / (1 - 2\tilde{a}_n^2) & \text{se } n \leq 5 \\ (\tilde{\mathbf{m}}^\top \tilde{\mathbf{m}} - 2\tilde{m}_n^2 - 2\tilde{m}_{n-1}^2) / (1 - 2\tilde{a}_n^2 - 2\tilde{a}_{n-1}^2) & \text{se } n > 5 \end{cases} \quad (2.15)$$

obtendo finalmente o estimador dos demais componentes do vetor \mathbf{a} calculando-se:

$$\tilde{a}_i = \frac{\tilde{m}_i}{\sqrt{\phi}} \quad (2.16)$$

em que, para o caso ($n \leq 5$) $i = 2, 3, \dots, n-1$ e no caso ($n > 5$) $i = 3, 4, \dots, n-2$, verifica-se que $\tilde{a}_1 = -\tilde{a}_n$ e $\tilde{a}_2 = -\tilde{a}_{n-1}$.

Desta forma a estatística do teste de Shapiro-Wilk é redefinida por

$$W = \frac{\left(\sum_{i=1}^n \tilde{a}_i X_{(i)} \right)^2}{\sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2}. \quad (2.17)$$

Porém, a estatística W não segue uma distribuição normal. Para solucionar este problema Royston (1993) propõem uma transformação da família Box-Cox apresentada na equação (2.18),

$$Y = \begin{cases} -\ln[\gamma - \ln(1 - W)] & \text{se } 4 \leq n \leq 11 \\ \ln(1 - W) & \text{se } 12 \leq n \leq 5000, \end{cases} \quad (2.18)$$

em que $\gamma = -2,237 + 0,459n$.

Os parâmetros relacionados à variável transformada Y , média e desvio padrão, são apresentados a seguir.

A média de Y é:

$$\mu_Y = \begin{cases} 0,544 - 0,39978n + 0,0250554n^2 - 0,0006714n^3 & \text{se } 4 \leq n \leq 11 \\ -1,5861 - 0,31082u - 0,08375u^2 + 0,0038915u^3 & \text{se } 12 \leq n \leq 5000, \end{cases} \quad (2.19)$$

em que $u = \ln(n)$.

Desvio padrão de Y é:

$$\sigma_Y = \begin{cases} e^{1,3822 - 0,77857n + 0,062767n^2 - 0,0020322n^3} & \text{se } 4 \leq n \leq 11 \\ e^{-0,4803 - 0,082676u + 0,0030302u^2} & \text{se } 12 \leq n \leq 5000. \end{cases} \quad (2.20)$$

Portanto, sob a hipótese de normalidade

$$Z_c = \frac{Y - \mu_Y}{\sigma_Y} \quad (2.21)$$

em que Z_c possui distribuição aproximadamente normal. O valor- p é dado por $\text{valor-}p = 1 - \Phi(Z_c)$, sendo o valor- p a área da distribuição normal padrão à direita de Z_c .

O teste consiste em rejeitar a hipótese nula de normalidade se o valor- p for menor ou igual ao nível nominal de significância α , pré-estabelecido.

2.6.1.2 Teste Shapiro-Francia

O teste de normalidade univariado Shapiro-Francia apresentado em Shapiro S. S.; Francia (1972), é baseado no coeficiente de correlação Q-Qplot, em que a estatística do teste é representada por W' ou dada por r_q^2 . É importante ressaltar que o teste de Shapiro-Francia é uma simplificação do teste de Shapiro-Wilk, diferenciando na definição dos coeficientes \mathbf{a} (FERREIRA, 2011). No teste de Shapiro-Wilk o coeficiente \mathbf{a} é definido na equação (2.11), já no Shapiro-Francia é dado $\mathbf{a} = \frac{\mathbf{m}}{\sqrt{\mathbf{m}^\top \mathbf{m}}}$. O estimador de \mathbf{a} nesse caso é \mathbf{a}^* dado por:

$$\mathbf{a}^* = \frac{\tilde{\mathbf{m}}}{\sqrt{\tilde{\mathbf{m}}^\top \tilde{\mathbf{m}}}}. \quad (2.22)$$

A estatística do teste é definida por:

$$W' = r_q^2 = \frac{\left(\sum_{i=1}^n a_i^* X_{(i)} \right)^2}{\sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2}. \quad (2.23)$$

Porém, a estatística W' não segue uma distribuição normal. Para solucionar este problema Royston (1993) propôs uma transformação da família Box-Cox, dado por:

$$Y = \ln(1 - W') \quad (2.24)$$

Os parâmetros relacionados a variável Y , média e desvio padrão, são dados na sequência por:

$$\mu_Y = -1,2725 + 1,0521u_1,$$

$$\sigma_Y = 1,0308 - 0,26758u_2,$$

em que $u_1 = \ln[\ln(n)] - \ln(n)$ e $u_2 = \ln[\ln(n)] + 2/\ln(n)$.

Assim, sob a hipótese de normalidade,

$$Z_c = \frac{Y - \mu_Y}{\sigma_Y} \quad (2.25)$$

o valor- p segue uma normal padrão e é estimado por $1 - \Phi(Z_c)$, sendo o valor- p a área da distribuição normal padrão à direita de Z_c .

O teste consiste em rejeitar a hipótese nula de normalidade se o valor- p for menor ou igual ao nível nominal de significância α , pré-estabelecido.

2.6.1.3 Teste Kolmogorov-Smirnov

O teste de Kolmogorov-Smirnov é baseado na máxima diferença absoluta entre a função de distribuição da variável aleatória, sob a hipótese H_0 e a função de distribuição empírica. O critério do teste, é dado, pela comparação desta diferença com um valor crítico, dado um nível de significância α específico.

Seja X_1, X_2, \dots, X_n uma amostra aleatória de uma população com função de distribuição $F(x)$ desconhecida. Neste caso, deseja-se testar a hipótese: $H_0 : F(x) = F_0(x)$ contra $H_1 : F(x) \neq F_0(x)$ para pelo menos um valor de x . A estatística do teste é dada por:

$$T = \text{Max}|F_0(x) - S_n(x)| \quad (2.26)$$

em que $F_0(x)$ é a função de distribuição da variável aleatória X sob H_0 , e $S_n(x)$ a função de distribuição empírica baseada na amostra aleatória. A função $S_n(x)$ é obtida por uma função escada dada por:

$$S_n(x) = \begin{cases} 0, & \text{se } x < x_{(1)} \\ \frac{k}{n}, & \text{se } x_{(k)} \leq x < x_{(k+1)} \\ 1, & \text{se } x > x_{(n)} \end{cases} \quad (2.27)$$

sendo k o número de observações menores ou iguais a x .

O teste consiste em rejeitar a hipótese nula ao nível nominal α de significância dada pelo valor da estatística T , caso este valor seja maior que um quantil $W_{1-\alpha}$ tabelado para a distribuição da estatística de teste de Kolmogorov-Smirnov.

2.6.2 Testes de normalidade multivariada

Na literatura existe um grande número de teste de normalidade multivariada. Mecklin e Mundfrom (2005), em um estudo de poder, mencionam mais de 50 métodos diferentes. Dos vários testes existentes apresentaremos alguns, dando ênfase aos teste de Shapiro-Wilk de Roys-

ton (1983), Royston (1993) por ser largamente utilizado como referência, o teste proposto por Székely e Rizzo (2005) baseado na distância euclidiana e o teste proposto por Biase (2011) sendo competitivo com muitos testes existentes.

2.6.2.1 Teste Shapiro-Wilk multivariado

O teste de normalidade multivariado Shapiro-Wilk de Royston (1983), é uma extensão do teste de normalidade univariada de Shapiro & Wilk. Neste caso, seja a amostra aleatória $\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2, \dots, \mathbf{X}_n$ em que $\mathbf{X}_i \in \mathbb{R}^p$, e considerando $X_{(1)k}, X_{(2)k}, \dots, X_{(n)k}$ as estatísticas de ordem da k -ésima variável, a estatística W_k dada pela equação (2.28).

$$W_k = \frac{\left(\sum_{i=1}^n \tilde{a}_i X_{(i)k} \right)^2}{\sum_{i=1}^n (X_{ik} - \bar{X}_{.k})^2} \quad (2.28)$$

em que, $\bar{X}_{.k} = \sum_{i=1}^n X_{ik}/n$, e \tilde{a}_i são os valores estimados dos coeficientes da i -ésima estatística de ordem, calculados como no caso univariado pela equação (2.16).

A estatística W_k não segue uma distribuição normal, sendo transformados na estatística Z_k dada pela equação (2.21), sendo usados para isso a equação (2.18), e os parâmetros da média e desvio padrão expressões (2.19) e (2.20), respectivamente (ROYSTON, 1993).

Desta forma são obtidos $Z_1, Z_2, \dots, Z_k, \dots, Z_p$. Royston (1993) propõem a quantidade κ_k dada por (2.29), que sai de uma escala de $(-\infty; +\infty)$ para $(0; +\infty)$, facilitando assim a interpretação. Em que κ_k será grande para valores de Z_k positivos e grandes, apresentando sinais de não-normalidade marginal da variável X_k e κ_k tenderá a zero para grandes valores negativos de Z_k , evidenciando normalidade marginal.

$$\kappa_k = \left\{ \Phi^{-1} \left[\frac{1}{2} \Phi(-Z_k) \right] \right\}^2, \text{ para } k = 1, 2, \dots, p \quad (2.29)$$

em que, $\Phi(x)$ é a função de distribuição da normal padrão. A quantidade κ_k segue uma distribuição assintótica qui-quadrado com 1 grau de liberdade. A estatística do teste é dada por Royston (1993):

$$H = \frac{v}{p} \sum_{k=1}^p \kappa_k \quad (2.30)$$

sob a hipótese de normalidade segue uma distribuição aproximada qui-quadrado com ν graus de liberdade, cuja obtenção é descrita em Royston (1993).

Como as estatísticas κ_k , $k = 1, 2, \dots, p$, não são independentemente distribuídas os graus de liberdade ν são determinados por expressões apresentadas em Royston (1993), levando a correlação entre elas em consideração.

2.6.2.2 Teste de normalidade multivariada de Székely e Rizzo (2005)

Székely e Rizzo (2005) propuseram uma nova classe de teste consistente, com base na distância euclidiana entre elementos da amostra. Este teste se aplica a qualquer distribuição multivariada, desde que possuam segundos momentos finitos e matriz de covariâncias amostral não singular. Para a construção do teste, suponha que $\mathbf{X}_1, \dots, \mathbf{X}_n$ é uma amostra aleatória em que $\mathbf{X}_i \in \mathbb{R}^p$, com distribuição F e $\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n$ são os valores observados da amostra. Para testar as hipóteses dadas por: $H_0 : F = F_0$ versus $H_1 : F \neq F_0$, a estatística do teste é dada por:

$$\varepsilon_{n,p} = n \left(\frac{2}{n} \sum_{i=1}^n E \|\mathbf{x}_i - \mathbf{X}\| - E \|\mathbf{X} - \mathbf{X}'\| - \frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^n \|\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_k\| \right), \quad (2.31)$$

em que \mathbf{X} e \mathbf{X}' são independentes e identicamente distribuídos (iid) com distribuição F .

Para o caso da hipótese a ser testada for de normalidade multivariada, ou seja, $N_p(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma})$, é considerada uma transformação dada por:

$$\mathbf{z}_i = \boldsymbol{\Sigma}^{-1/2} (\mathbf{x}_i - \boldsymbol{\mu}), \text{ para } i = 1, \dots, n. \quad (2.32)$$

Neste caso, a estatística de teste é dada por:

$$\varepsilon_{n,p} = n \left(\frac{2}{n} \sum_{i=1}^n E \|\mathbf{z}_i - \mathbf{Z}\| - E \|\mathbf{Z} - \mathbf{Z}'\| - \frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^n \|\mathbf{z}_i - \mathbf{z}_k\| \right), \quad (2.33)$$

em que \mathbf{Z} e \mathbf{Z}' são variáveis aleatórias iid $N_p(\mathbf{0}, \mathbf{I})$, sendo a matriz identidade $I_{(p \times p)}$. Considerando o cálculo da primeira componente $E \|\mathbf{a} - \mathbf{Z}\|$ em que $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^p$ é fixo. Para o caso univariado $E \|\mathbf{a} - \mathbf{Z}\| = 2a\Phi(a) + 2\phi(a) - a$, em que $\Phi(x)$ e $\phi(x)$ são as funções de distribuição e densidade da normal padrão, $N(0, 1)$. Para o caso multivariado $p \geq 2$, tem-se

$$E \|\mathbf{a} - \mathbf{Z}\| - E \|\mathbf{Z}\| = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2^k k!} \frac{\|\mathbf{a}\|^{2k+2}}{(2k+1)(2k+2)} \frac{\Gamma\left(\frac{p+1}{2}\right) \Gamma\left(k + \frac{3}{2}\right)}{\Gamma\left(k + \frac{p}{2} + 1\right)}, \quad (2.34)$$

de forma que

$$E\|\mathbf{Z} - \mathbf{Z}'\| = \sqrt{2}E\|\mathbf{Z}\| = 2\frac{\Gamma\left(\frac{p+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{p}{2}\right)}, \quad (2.35)$$

neste caso, a estatística de teste para normalidade multivariada é dada por

$$\varepsilon_{n,p} = n \left(\frac{2}{n} \sum_{i=1}^n E\|\mathbf{z}_i - \mathbf{Z}\| - 2\frac{\Gamma\left(\frac{p+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{p}{2}\right)} - \frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^n \|\mathbf{z}_i - \mathbf{z}_k\| \right), \quad (2.36)$$

em que

$$E\|\mathbf{a} - \mathbf{Z}\| = \frac{\sqrt{2}\Gamma\left(\frac{p+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{p}{2}\right)} + \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2^k k!} \frac{\|\mathbf{a}\|^{2k+2}}{(2k+1)(2k+2)} \frac{\Gamma\left(\frac{p+1}{2}\right)\Gamma\left(k + \frac{3}{2}\right)}{\Gamma\left(k + \frac{p}{2} + 1\right)}. \quad (2.37)$$

O julgamento, rejeita a hipótese nula de normalidade multivariada para grandes valores de $\varepsilon_{n,p}$. O teste de Szekely & Rizzo se mostra coerente sob hipótese composta quando parâmetros populacionais são estimados a partir da amostra. Em geral, o seu desempenho relativo é muito bom contra alternativas de caudas pesadas, e melhor do que um teste de assimetria com cauda leve contra alternativa simétrica.

2.6.2.3 Teste de normalidade multivariada baseado em *bootstrap* paramétrico

Biase (2011) propôs um teste de normalidade multivariada baseado em um método de *bootstrap* paramétrico. Neste caso, seja a amostra aleatória $\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2, \dots, \mathbf{X}_n$ em que $\mathbf{X}_j \in \mathbb{R}^p$, de uma população com média $\boldsymbol{\mu}$ e matriz de covariâncias $\boldsymbol{\Sigma}$ e N_B o número de reamostragem. Considerando $X_{(1)i}, X_{(2)i}, \dots, X_{(n)i}$ a estatística de ordem da i -ésima variável e seja o estimador do valor esperado m_j de cada estatística de ordem, sob normalidade dado pela solução da equação:

$$p_j = \int_{-\infty}^{\tilde{m}_j} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left\{-\frac{x^2}{2}\right\} dx, \quad (2.38)$$

com $j = 1, 2, \dots, n$, em que $p_j = (j - 3/8) / (n + 1/4)$.

Calcular os coeficientes de determinação amostral, r_i^2 para $i = 1, 2, \dots, p$, considerando a amostra original entre as realizações ordenadas das estatísticas de ordem da i -ésima variável aleatória, as médias obtidas em (2.38). Em seguida, obter a média dos p coeficientes de determinação, dada por:

$$H_c = \frac{\sum_{i=1}^p r_i^2}{p}. \quad (2.39)$$

São gerados realizações de uma amostra aleatória de tamanho n da distribuição normal multivariada $\mathbf{Y}_1, \mathbf{Y}_2, \dots, \mathbf{Y}_n$, com média $\boldsymbol{\mu} = \mathbf{0}$ e matriz de covariâncias $\boldsymbol{\Sigma} = \mathbf{S}$, sendo \mathbf{S} a matriz de covariâncias da amostral original. Da amostra \mathbf{Y} , calculam-se os coeficientes de determinação r_i^2 e a média deles H_b (2.39), em que b representa o b -ésimo estágio de reamostragem *bootstrap*. Os valores de H_b juntamente com o valor original H_c são armazenados, fazendo b variar de 1 a N_B . o valor- p é dado por:

$$\text{valor-}p = \frac{\sum_{b=1}^{N_B+1} \mathbf{I}(H_b \leq H_c)}{N_B + 1}, \quad (2.40)$$

a função indicadora $\mathbf{I}(H_b \leq H_c)$ retorna 1 se $H_b \leq H_c$ ou 0 caso contrário, para a b -ésima reamostragem *bootstrap*.

O julgamento, considerando um nível nominal de significância α , deverá confrontar uma proporção (valor- p) e α . Se essa proporção (valor- p) for menor que o valor nominal (α), a decisão deve ser de rejeitar a hipótese nula, uma vez que o valor original é atípico na distribuição nula obtida sob H_0 .

2.6.2.4 Outros testes de normalidade multivariada

Uma primeira abordagem mais simples é dada, como no caso univariado, por procedimentos gráficos. Plota-se estatísticas de ordem das distâncias de Mahalanobis amostrais contra os valores esperados considerando a inversa da distribuição empírica pela qui-quadrado. Esses procedimentos gráficos não são testes formais. É necessário que sejam complementados com um teste para inferir sobre a normalidade. Uma forma suplementar para detectar uma possível saída de normalidade multivariada foi apresentado por Liang, Pan e Yang (2004), os quais desenvolveram gráficos, *Q-Qplots* a partir de transformações específicas. Os testes *Q-Qplots* apresentaram uma observação visual útil para tamanhos amostrais moderados, além de apresentarem parcelas *Q-Qplots* com distribuições exatas das estatísticas de teste para diferentes tamanhos amostrais, porém não sendo aplicáveis quando $p \geq n$, ou seja, a dimensão é maior que a amostra.

Alguns testes de normalidade multivariada formais foram derivados dos procedimentos gráficos. Em geral, esses testes são baseados nos coeficientes de correlação ou determinação entre quantis ou percentis. Por exemplo, Cirillo e Ferreira (2003) propuseram uma extensão para o caso multivariado do teste de normalidade univariada do coeficiente de correlação Quantil-Quantil. O teste é baseado nos valores críticos obtidos pela distribuição da distância generalizada de Mahalanobis, a qual é assintótica qui-quadrado com p graus de liberdade, sob normalidade multivariada. Baseados neste resultado os autores propuseram calcular o coeficiente de correlação entre as estatísticas de ordem das distâncias e os valores esperados dos quantis, considerando a inversa da distribuição empírica qui-quadrado. O teste proposto apresentou eficiência no controle de erro tipo I, porém com o aumento das dimensões o poder teve redução, independente do tamanho da amostra.

Um outro teste univariado estendido para o caso multivariado é o teste de normalidade qui-quadrado proposto por Oliveira e Ferreira (2010). No caso univariado, o teste baseia-se numa comparação das frequências esperadas e observadas. Os autores estenderam essa ideia para o caso multivariado. A partir de um resultado de formas quadráticas, que diz que as formas quadráticas seguem uma distribuição qui-quadrado com p graus de liberdade, em que p é a dimensão. O espaço amostral é dividido em k classes disjuntas, expandido para o caso multivariado como k anéis hiper-elipsoidais.

Os testes de simetria e curtose de Mardia (1970) são considerados muito importantes, altamente recomendados e amplamente utilizados (MECKLIN; MUNDFROM, 2005). Os testes são baseados a partir de propriedades assintóticas das distribuições dos estimadores dos coeficientes de assimetria e curtose. Mardia (1970) mostra que sob normalidade a estatística do teste de assimetria segue uma distribuição assintótica qui-quadrado e a estatística de teste da curtose segue uma distribuição assintótica normal-padrão. Nos dois casos a normalidade multivariada é verificada comparando as estatísticas dos testes com seus respectivos quantis superiores das distribuições qui-quadrado e normal-padrão com um nível α de significância pré-estabelecido. Sendo a normalidade dos dados rejeitada para valores das estatísticas maiores que os quantis superiores de suas respectivas distribuições.

Podemos considerar, um teste conjunto de simetria e curtose, em que, a estatística do teste é dada pela soma das duas estatísticas considerando que são independentemente distribuídas. A estatística do teste conjunto segue uma distribuição qui-quadrado com $\nu = 1 + p(p + 1)(p + 2)/6$ graus de liberdade. Doornik e Hansen (2008) apresentaram uma versão do teste

conjunto de simetria e curtose *Omnibus*, que consiste na soma dos coeficientes de simetria e curtose transformados. No estudo de tamanho e poder o teste proposto apresentou melhores resultados em comparação com outros quatro testes, dentre eles os teste de Royston (1983) e Mardia (1970), sendo este último recomendado para ser usado conjuntamente com o teste proposto.

Cantelmo e Ferreira (2007), em um estudo de desempenho, avaliaram os testes de assimetria e curtose de Mardia (1970). Segundo os autores, esses testes apresentaram alternativas eficientes para avaliar a normalidade multivariada, sendo recomendados para o caso de assimetria com $n \geq 50$ e para o caso de curtose com $n \geq 100$. Porém, apesar de apresentarem um bom desempenho, Tenreiro (2011) apresenta inconsistência no poder desses testes quando o coeficiente de assimetria e curtose se aproximam dos coeficientes de assimetria e curtose da normal, ou seja, quando a distribuição alternativa (não-normal) tem valores de assimetria e curtose da normal multivariada, tanto para os testes individuais quanto para os conjuntos. Baseado nessa inconsistência dos teste de simetria e curtose, Tenreiro (2011) propôs um teste que combina os teste de Mardia (1970) com a família de teste BHEP. O teste indicou bom desempenho comparativo global, especialmente para as distribuições de caudas pesadas, apesar de resultados pobres para algumas alternativas.

Alva e Estrada (2009) propuseram um teste de normalidade multivariado com o objetivo de manter as boas propriedades do teste univariado de Shapiro-Wilk. Para isso, o teste proposto baseia-se na estatística de Shapiro-Wilk univariado e em uma padronização das observações. Neste caso, a estatística do teste é a média das estatísticas de teste de Shapiro-Wilk univariado das observações padronizadas. Em um estudo Monte Carlo feito por esses autores, o teste mostrou um bom desempenho, sendo superior a outros testes como, por exemplo, o teste de Mardia (1970) contra uma ampla gama de alternativas. Recentemente Voinov et al. (2016) propuseram testes de normalidade qui-quadrado baseados na transformação Karhunen-Loève. Para resumir o desempenho dos testes, os autores concluem que os testes propostos não podem ser recomendado como um teste universal, por não apresentarem sempre boas características para todas as alternativas. Neste caso, antes de escolher um bom teste, é altamente desejável se ter alguma ideia sobre possíveis características da amostra, como por exemplo tamanho e dimensão (VOINOV et al., 2016).

Pensando no caso com $p \geq n$, ou seja, amostras com grandes dimensões p e pequenos tamanhos amostrais n , Liang et al. (2000) propuseram um teste baseado no uso de estatísticas

invariantes afins conjuntamente com procedimentos de projeção. Neste caso, o teste de normalidade multivariada se mostrou apropriado segundo estudo feito pelos autores. Nesse mesmo caso, o teste proposto por Biase (2011) também se mostrou eficiente, além de não possuir restrição quanto ao tamanho amostral.

Outro caso específico foi apresentado por Tan et al. (2005) os quais testaram a normalidade multivariada em dados incompletos em amostra de tamanho pequeno. O teste proposto é baseado em imputação múltipla estendendo o procedimento de projeção a partir de dados completos para dados incompletos. Os autores também adotam um método de amostragem não iterativo que gera amostras independentes. Estudos de simulação mostraram que o teste para dados incompletos para amostras pequenas se mostrou eficaz.

3 MÉTODOS

Neste capítulo apresenta-se a metodologia referente à cada teste proposto e os métodos utilizados para validá-los.

3.1 Testes de normalidade multivariada propostos

Seja $\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2, \dots, \mathbf{X}_n$ uma amostra p -variada de uma distribuição qualquer com vetor de médias $\boldsymbol{\mu}$ e matriz de covariâncias $\boldsymbol{\Sigma}$, positiva definida. As hipóteses de interesse são dadas por:

$$\begin{cases} H_0 & : \text{ Os dados amostrais seguem uma distribuição normal multivariada;} \\ H_1 & : \text{ Os dados amostrais não seguem uma distribuição normal multivariada.} \end{cases}$$

Os testes propostos serão baseados na forma quadrática dada por:

$$Q = (\mathbf{X} - \boldsymbol{\mu})^\top \boldsymbol{\Sigma}^{-1} (\mathbf{X} - \boldsymbol{\mu}). \quad (3.1)$$

Sob a hipótese nula de normalidade, a forma quadrática Q tem uma distribuição qui-quadrado com $\nu = p$ graus de liberdade. Entretanto, os parâmetros $\boldsymbol{\mu}$ e $\boldsymbol{\Sigma}$ geralmente são desconhecidos, de forma deve-se utilizar os estimadores dessas quantidades.

3.1.1 Teste de normalidade multivariada para distâncias robustas

Uma primeira verificação da normalidade multivariada irá abordar o resultado apresentado na expressão (3.2), em que $\bar{\mathbf{X}}^*$ e \mathbf{S}^* são estimadores robustos para $\boldsymbol{\mu}$ e $\boldsymbol{\Sigma}$, estimados pelo algoritmo CovOgk de Maronna e Zamar (2002). Assim, inicialmente será computado D^{2*} por:

$$D_i^{2*} = (\mathbf{X}_i - \bar{\mathbf{X}}^*)^\top (\mathbf{S}^*)^{-1} (\mathbf{X}_i - \bar{\mathbf{X}}^*). \quad (3.2)$$

A forma quadrática alternativa D_i^{2*} , sob a hipótese de normalidade, tem uma distribuição assintótica qui-quadrado com $\nu = p$ graus de liberdade. Espera-se, então, que $D_1^{2*}, D_2^{2*}, \dots, D_n^{2*}$ se comporte de forma aproximada como uma amostra qui-quadrado.

A partir deste resultado, a normalidade multivariada de \mathbf{X} é testada por meio de um teste univariado de Kolmogorov-Smirnov de \mathbf{D}^{2*} . Assim, se \mathbf{D}^{2*} possuir uma distribuição qui-quadrado, pode-se concluir que \mathbf{X} é proveniente de uma distribuição normal multivariada.

Porém, pelo fato da distribuição ser assintótica e se n não for suficientemente grande, a distribuição qui-quadrado pode não ser apropriada, inviabilizando o uso do teste (FERREIRA, 2011). Desta forma é proposto um outro teste que é baseado em uma distribuição beta exata.

3.1.2 Teste de normalidade multivariada baseado em distâncias beta robustas

O segundo teste se assemelha ao primeiro, entretanto com uma distribuição beta exata. Considerando a distância de Mahalanobis dada pela expressão (3.2), realiza-se a transformação

$$b_i^* = \frac{nD_i^{2*}}{(n-1)^2}, \quad (3.3)$$

que se distribui de forma exata, sob normalidade, como uma variável beta com parâmetros $\alpha = p/2$ e $\beta = (n-p-1)/2$ (GNANADESIKAN; KETTENRING, 1972).

A partir deste resultado, como no teste anterior, a normalidade multivariada de \mathbf{X} é testada por meio do teste univariado de Kolmogorov-Smirnov para \mathbf{b}^* . Logo, se \mathbf{b}^* seguir uma distribuição beta, pode-se concluir que \mathbf{X} é proveniente de uma distribuição normal multivariada.

Como o teste de Kolmogorov-Smirnov usado nos testes anteriormente apresentados possui baixo poder (THODE, 2002), por ser um teste assintótico, é proposto dois teste baseados em um método *bootstrap* paramétrico, utilizando a estatística do teste de Kolmogorov-Smirnov, os testes são apresentados na sequência.

3.1.3 Teste de normalidade multivariada *bootstrap* paramétrico para distâncias robustas

O terceiro teste proposto é baseado em um método de *bootstrap* paramétrico, a partir da distância generalizada de Mahalanobis com estimadores robustos $\bar{\mathbf{X}}^*$ e \mathbf{S}^* dos parâmetros $\boldsymbol{\mu}$ e $\boldsymbol{\Sigma}$, respectivamente. Com base na distância dada pela expressão (3.2), calcula-se o valor da estatística do teste de Kolmogorov-Smirnov, dada pela expressão (2.26), considerando a distribuição qui-quadrado. Logo a estatística do teste de Kolmogorov-Smirnov das distâncias D^{2*} é dada por:

$$T_c = \text{Max}|F_0(d^{2*}) - S_n(d^{2*})| \quad (3.4)$$

em que $F_0(d^{2*})$ é a função de distribuição da variável aleatória D^{2*} sob H_0 , ou seja, sob a distribuição qui-quadrado com $\nu = p$ graus de liberdade, e $S_n(d^{2*})$ a função de distribuição empírica baseada na amostra aleatória, dada pela expressão (2.27).

Posteriormente, por simulação de *bootstrap* paramétrico são simuladas N_{BP} amostras aleatórias $\mathbf{Z}_1, \mathbf{Z}_2, \dots, \mathbf{Z}_n$ de tamanho n da distribuição normal multivariada, usando as estimativas robustas $\bar{\mathbf{X}}^*$ e \mathbf{S}^* dos parâmetros $\boldsymbol{\mu}$ e $\boldsymbol{\Sigma}$ respectivamente, dados pelo algoritmo CovOgk do pacote *rrcov* aplicado à amostra original, conforme proposto por Maronna e Zamar (2002) obtidos iterativamente.

Os passos executados com a amostra \mathbf{X} são repetidos para cada amostra simulada \mathbf{Z} , obtendo assim as N_{BP} estatísticas do teste de Kolmogorov-Smirnov amostral da simulação T_i . Para finalizar o teste, calcula-se o valor- p , que estima a proporção de estimativas da estatística do teste de Kolmogorov-Smirnov, obtidas na distribuição simulada de *bootstrap* paramétrico que são iguais ou maiores a estimativa obtida na amostra original. Seja a amostra *bootstrap* dos T_i , $i = 1, 2, \dots, N_{BP} + 1$, adicionado da estatística do teste da amostra original, então o valor- p é obtido por:

$$\text{valor-}p = \frac{\sum_{i=1}^{N_{BP}+1} I(T_i \geq T_c)}{N_{BP} + 1}, \quad (3.5)$$

em que a função indicadora $I(T_i \geq T_c)$ retorna 1, se $T_i \geq T_c$ ou 0, caso contrário, para a i -ésima amostra *bootstrap* paramétrico.

O julgamento, considerando um nível nominal de significância α , deverá confrontar a proporção estimada (valor- p) e α . Se essa proporção estimada (valor- p) for menor que o valor nominal (α), a decisão deve ser de rejeitar a hipótese nula, uma vez que o valor original é atípico na distribuição nula obtida sob H_0 .

3.1.4 Teste de normalidade multivariada *bootstrap* paramétrico para distâncias beta robustas

O quarto teste proposto é baseado em um método de *bootstrap* paramétrico, a partir da distância generalizada de Mahalanobis com estimadores robustos $\bar{\mathbf{X}}^*$ e \mathbf{S}^* dos parâmetros $\boldsymbol{\mu}$ e $\boldsymbol{\Sigma}$, respectivamente. Com base na distância dada pela expressão (3.3), calcula-se o valor da estatística do teste de Kolmogorov-Smirnov, dada pela expressão (2.26), considerando a

distribuição beta. Logo a estatística do teste de Kolmogorov-Smirnov das distâncias b^{2*} é dada por:

$$T_c = \text{Max}|F_0(b^{2*}) - S_n(b^{2*})| \quad (3.6)$$

em que $F_0(b^{2*})$ é a função de distribuição da variável aleatória b^{2*} sob H_0 , ou seja, sob a distribuição beta com parâmetros $\alpha = p/2$ e $\beta = (n - p - 1)/2$, e $S_n(b^{2*})$ a função de distribuição empírica baseada na amostra aleatória, dada pela expressão (2.27).

Posteriormente, por simulação de *bootstrap* paramétrico são simuladas N_{BP} amostras aleatórias $\mathbf{Z}_1, \mathbf{Z}_2, \dots, \mathbf{Z}_n$ de tamanho n da distribuição normal multivariada, usando as estimativas robustas $\bar{\mathbf{X}}^*$ e \mathbf{S}^* dos parâmetros $\boldsymbol{\mu}$ e $\boldsymbol{\Sigma}$ respectivamente, dados pelo algoritmo CovOgk do pacote *rrcov* aplicado à amostra original.

Os passos executados com a amostra \mathbf{X} são repetidos para cada amostra simulada \mathbf{Z} , obtendo-se assim as N_{BP} estatísticas do teste de Kolmogorov-Smirnov amostral da simulação T_i . Para finalizar o teste, calcula-se o valor- p , que estima a proporção de estimativas da estatística do teste de Kolmogorov-Smirnov, obtidas na distribuição simulada de *bootstrap* paramétrico que são iguais ou maiores a estimativa obtida na amostra original. Seja a amostra *bootstrap* dos T_i , com $i = 1, 2, \dots, N_{BP} + 1$, adicionado da estatística do teste da amostra original, então o valor- p é obtido por:

$$\text{valor-}p = \frac{\sum_{i=1}^{N_{BP}+1} I(T_i \geq T_c)}{N_{BP} + 1}, \quad (3.7)$$

em que a função indicadora $I(T_i \geq T_c)$ retorna 1, se $T_i \geq T_c$ ou 0, caso contrário, para a i -ésima amostra *bootstrap* paramétrico.

O julgamento, considerando um nível nominal de significância α , deverá confrontar a proporção estimada (valor- p) e α . Se essa proporção estimada (valor- p) for menor que o valor nominal (α), a decisão deve ser de rejeitar a hipótese nula, uma vez que o valor original é atípico na distribuição nula obtida sob H_0 .

3.2 Validação do desempenho

Para validar os testes propostos: teste de normalidade multivariada para distâncias robustas (TNMD2RKS), teste de normalidade multivariada baseado em distâncias beta robustas

(TNMDbRKS), teste de normalidade multivariada *bootstrap* paramétrico para distâncias robustas (TNMD2RBoot) e o teste de normalidade multivariada *bootstrap* paramétrico para distâncias beta robustas (TNMDbRBoot). Para fins de comparação foram utilizados os testes de normalidade multivariada de Shapiro-Wilk de Royston (1983), Royston (1993) (TNMSWR), por ser um teste amplamente utilizado na literatura, como, por exemplo, em Biase (2011), Dornik e Hansen (2008), Ferreira (2011) e Oliveira e Ferreira (2010), dentre outros trabalhos. Outro teste utilizado como comparação foi o teste de normalidade multivariada baseado em *bootstrap* paramétrico (TNMBP), proposto por Biase (2011), o qual, em um estudo de simulação apresentado pela mesma autora se mostrou muito eficiente em varias situações, superando em algumas o teste TNMSWR.

Para avaliar os testes propostos, foi utilizada simulação Monte Carlo, considerando duas etapas. A primeira referente às taxas de erro tipo I e a segunda relacionada ao poder do teste. Nas duas etapas, os tamanhos das amostras n considerados foram iguais a 10, 30, 100 e 1000 e os números de variáveis p iguais a 2, 10, 14, 15, 30, 48 e 50. As combinações de n e p utilizadas estão apresentadas na Tabela 3.1, as quais foram utilizadas em todos os testes.

Tabela 3.1 – Tamanhos amostrais n e número de variáveis p usados nas construções das matrizes de dados.

n	p	n	p
10	2	100	2, 10, 30, 48, 50
30	2, 10, 14, 15	1000	2, 10, 30, 50

3.2.1 Taxa de erro tipo I

A taxa de erro tipo I foi avaliada de duas formas. Inicialmente foram geradas amostras normais p -dimensionais, $N_p(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma})$, com vetor de médias $\boldsymbol{\mu} = \mathbf{0}$, e matriz de covariâncias $\boldsymbol{\Sigma}$, com estrutura de correlação dada por:

$$\boldsymbol{\Sigma} = \sigma^2 \begin{bmatrix} 1 & \rho & \cdots & \rho \\ \rho & 1 & \cdots & \rho \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \rho & \rho & \cdots & 1 \end{bmatrix} = \sigma^2 \boldsymbol{\rho}, \quad (3.8)$$

em que, a variância σ^2 foi fixada em 1 e as correlações, ρ , foram fixadas em 0,0, representando ausência de correlação e 0,90 para correlação alta.

No segundo caso, a taxa de erro tipo I foi avaliada levando em consideração o comportamento dos testes em amostras com presença de *outliers*, em que as amostras foram geradas a partir da distribuição normal p -dimensional com pequenos níveis de contaminação, sendo eles $(1 - \delta) = 0,01$ e $0,02$, ou seja, 1% e 2% de *outliers*, nestes casos são esperadas baixas taxas de erro tipo I.

Para gerar as amostras com contaminação foi utilizada a normal contaminada, em que $\mathbf{X}_j \in N_p(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma})$ em aproximadamente $n\delta$ dos n casos e $\mathbf{X}_j \in N_p(\boldsymbol{\mu}_{out}, \boldsymbol{\Sigma}_{out})$ em aproximadamente $n(1 - \delta)$ dos n casos, expressa da forma:

$$\mathbf{X}_j = n\delta N_p(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma}) + n(1 - \delta)N_p(\boldsymbol{\mu}_{out}, \boldsymbol{\Sigma}_{out}),$$

em que, os vetores de médias considerados foram $\boldsymbol{\mu} = \mathbf{0}$ e $\boldsymbol{\mu}_{out} = 10\mathbf{j}$, em que \mathbf{j} é um vetor $(p \times 1)$ de 1's, e as matrizes de correlações $\boldsymbol{\Sigma}$ definida na equação (3.8) com $\rho = 0,0$ e $0,90$, e $\boldsymbol{\Sigma}_{out} = \lambda\boldsymbol{\Sigma}$ com $\lambda = 10^{1/p}$, fazendo com que $\boldsymbol{\Sigma} \neq \boldsymbol{\Sigma}_{out}$. Estes valores foram selecionados de acordo com os utilizados por Biase (2011).

O processo de simulação Monte Carlo foi repetido $N = 1000$ vezes para cada caso, e foram considerados quatro tamanhos amostrais $n = 10, 30, 100$ e 1000 , e sete números de variáveis $p = 2, 10, 14, 15, 30, 48$ e 50 , para níveis de significância nominais fixados em 10%, 5% e 1%.

Para cada amostra simulada foram aplicados os testes propostos TNMD2RKS, TNMD-bRKS, TNMD2RBoot e TNMDbRBoot, e os usados para comparação TNMBP e TNMSWR. E em cada teste as taxas de erro tipo I foram calculadas como a proporção de vezes que a hipótese de normalidade multivariada foi rejeitada, e este foi comparado com o nível de significância nominal.

É importante salientar que as simulações não estão isentas de erros, e como as taxas de erro tipo I foram estimadas utilizando simulação Monte Carlo, estão sujeitas a erros. Desta forma, assim como em Oliveira e Ferreira (2010), foi utilizado o teste binomial exato para as taxas de erro tipo I, considerando um nível de significância nominal de 1% para as hipóteses:

$$\left\{ \begin{array}{l} H_0 : \alpha = 1\% \\ H_1 : \alpha \neq 1\% \end{array} \right\}, \left\{ \begin{array}{l} H_0 : \alpha = 5\% \\ H_1 : \alpha \neq 5\% \end{array} \right\} \text{ e } \left\{ \begin{array}{l} H_0 : \alpha = 10\% \\ H_1 : \alpha \neq 10\% \end{array} \right\}.$$

No teste binomial exato, se a hipótese nula for rejeitada e os valores das taxas de erro tipo I forem significativamente (valor- $p < 0,01$) inferiores ao nível nominal considerado, o

teste avaliado será conservativo, e se forem significativamente (valor- $p < 0,01$) superiores ao nível nominal considerado, o teste será liberal. Por conseguinte, se a hipótese nula não for rejeitada, isto é, se os valores observados das taxas de erro tipo I não forem significativamente (valor- $p > 0,01$) diferente do nível nominal considerado, o teste será exato.

Segundo Oliveira e Ferreira (2010), a estatística do teste é dada, a partir da relação exata entre a distribuição binomial e a F . Uma vez que, se x for o número de hipóteses nula rejeitadas em N simulações Monte Carlo, com probabilidade de sucesso $p = \alpha$, a estatística do teste, dada por:

$$F_c = \left(\frac{x+1}{N-x} \right) \left(\frac{1-\alpha}{\alpha} \right) \quad (3.9)$$

segue a distribuição F , sob a hipótese nula, com $v_1 = 2(N-x)$ e $v_2 = 2(x+1)$ graus de liberdade. Logo, rejeita-se a hipótese nula, considerando o nível de significância de 1%, se $F_c \leq F_{0,005}$ ou $F_c \geq F_{0,995}$, sendo $F_{0,005}$ e $F_{0,995}$ os quantis da distribuição F com v_1 e v_2 graus de liberdade.

3.2.2 Poder do teste

Para avaliar o poder dos testes propostos em rejeitar a hipótese nula de normalidade multivariada, foram geradas amostras de distribuições não normais. Foram consideradas as distribuições: *t-Student* com $v = 3$ graus de liberdade, log-normal, uniforme e normal contaminada. Assim, como realizado para as taxas de erro tipo I, foram consideradas as situações de n e p , apresentas na Tabela 3.1.

Para gerar as distribuições da normal multivariada contaminada, utilizou-se a seguinte função densidade de probabilidade conjunta

$$f_{\mathbf{x}}(\mathbf{x}) = \delta(2\pi)^{-p/2} |\boldsymbol{\Sigma}_1|^{-1/2} \exp \left\{ -\frac{1}{2} (\mathbf{x} - \boldsymbol{\mu}_1)^\top \boldsymbol{\Sigma}_1^{-1} (\mathbf{x} - \boldsymbol{\mu}_1) \right\} + (1 - \delta)(2\pi)^{-p/2} |\boldsymbol{\Sigma}_2|^{-1/2} \exp \left\{ -\frac{1}{2} (\mathbf{x} - \boldsymbol{\mu}_2)^\top \boldsymbol{\Sigma}_2^{-1} (\mathbf{x} - \boldsymbol{\mu}_2) \right\} \quad (3.10)$$

em que $(1 - \delta)$ é o grau de contaminação sendo que $0 \leq \delta \leq 1$. Foi considerado o grau de contaminação igual a 20%, ou seja, $\delta \geq 0,80$. Quanto aos vetores de médias e as matrizes de covariâncias foram avaliados três casos, quais sejam:

- i. $\boldsymbol{\mu}_1 = \boldsymbol{\mu}_2$ e $\boldsymbol{\Sigma}_1 \neq \boldsymbol{\Sigma}_2$, mesma média e estrutura de correlação diferentes, dados por

$$\boldsymbol{\mu}_1 = \boldsymbol{\mu}_2 = \mathbf{0} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{\Sigma}_1 = \begin{bmatrix} 1 & \rho & \cdots & \rho \\ \rho & 1 & \cdots & \rho \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \rho & \rho & \cdots & 1 \end{bmatrix} \text{ e } \boldsymbol{\Sigma}_2 = \lambda \boldsymbol{\Sigma}_1$$

em que ρ é a correlação considerada (0,0 ou 0,90) e $\lambda = 10^{1/p}$, assim sendo, $\boldsymbol{\Sigma}_1 \neq \boldsymbol{\Sigma}_2$.

ii. $\boldsymbol{\mu}_1 \neq \boldsymbol{\mu}_2$ e $\boldsymbol{\Sigma}_2 = \boldsymbol{\Sigma}_1$, médias diferentes e mesma estrutura de correlação, dados por

$$\boldsymbol{\mu}_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{\mu}_2 = \begin{bmatrix} 10 \\ 10 \\ \vdots \\ 10 \end{bmatrix} \text{ e } \boldsymbol{\Sigma}_1 = \boldsymbol{\Sigma}_2 = \begin{bmatrix} 1 & \rho & \cdots & \rho \\ \rho & 1 & \cdots & \rho \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \rho & \rho & \cdots & 1 \end{bmatrix}$$

iii. $\boldsymbol{\mu}_1 \neq \boldsymbol{\mu}_2$ e $\boldsymbol{\Sigma}_1 \neq \boldsymbol{\Sigma}_2$, médias e estrutura de correlação diferentes, dados por

$$\boldsymbol{\mu}_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{\mu}_2 = \begin{bmatrix} 10 \\ 10 \\ \vdots \\ 10 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{\Sigma}_1 = \begin{bmatrix} 1 & \rho & \cdots & \rho \\ \rho & 1 & \cdots & \rho \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \rho & \rho & \cdots & 1 \end{bmatrix} \text{ e } \boldsymbol{\Sigma}_2 = \lambda \boldsymbol{\Sigma}_1$$

em que ρ é a correlação considerada (0,0 ou 0,90) e $\lambda = 10^{1/p}$, assim sendo, $\boldsymbol{\Sigma}_1 \neq \boldsymbol{\Sigma}_2$.

O processo de simulação Monte Carlo foi repetido $N = 1000$ vezes em cada situação, e a proporção de vezes que a hipótese nula foi rejeitada para cada teste foi calculada para os testes propostos TNMD2RKS, TNMDbRKS, TNMD2RBoot e TNMDbRBoot, e os usados para comparação TNMBP e TNMSWR. Foram considerados os níveis de significância nominais fixados em 10%, 5% e 1% para todas as situações.

4 RESULTADOS E DISCUSSÃO

Neste capítulo estão apresentados os resultados obtidos por meio de simulação dos testes propostos juntamente com a discussão dos mesmos comparados com os testes utilizados como referência. Além dos resultados simulados apresenta-se uma aplicação dos testes em uma base de dados reais.

4.1 Erro tipo I

Nas Tabelas 4.1, 4.2 e 4.3, estão apresentadas as taxas de erro tipo I dos testes TNMD2RKS, TNMDbRKS, TNMD2RBoot, TNMDbRBoot, TNMBP e TNMSWR, considerando os níveis de significância nominais 10%, 5% e 1%, respectivamente. Foi verificado o comportamento dos testes considerando variáveis não correlacionadas, ou seja, $\rho = 0,0$ e variáveis altamente correlacionadas, $\rho = 0,90$. Foram consideradas as combinações de n e p apresentadas na Tabela 3.1. Os valores das taxas de erro tipo I foram comparados com cada nível de significância nominal α associado, mediante o teste binomial exato ao nível de significância de 1%.

A Tabela 4.1 apresenta as taxas de erro tipo I dos testes, considerando a distribuição normal multivariada ao nível de significância $\alpha = 10\%$ e correlação $\rho = 0,0$ e $0,90$. Nas situações avaliadas o nível de correlação apresentou resultados similares. Desta forma, os comentários são válidos para os dois valores de ρ $0,0$ e $0,90$.

No teste TNMD2RKS, em todas as situações avaliadas, as taxas de erro tipo I foram consideradas abaixo do nível de significância nominal (conservativo). No TNMDbRKS as taxas de erro tipo I observadas foram consideradas significativamente (valor- $p < 0,01$) inferiores ao nível de significância nominal de 10%, para as situações com p pequeno em relação à n , $n = 10$ com $p = 2$, $n = 30$ com $p = 2$, $n = 100$ com $p = 2$ e 10 e em todas as situações com $n = 1000$, nas demais situações o teste foi considerado liberal. Porém, observa-se que a medida que o valor de p aumenta as taxas de erro tipo I também aumentam chegando a taxa de erro tipo I de $0,9010$ em $n = 100$ com $p = 50$.

Os testes propostos baseados em *bootstrap* paramétrico, TNMD2RBoot e TNMDbRBoot, apresentam resultados semelhantes. Nos dois testes, para a maioria das situações as taxas de erro tipo I foram não significativamente (valor- $p > 0,01$) diferente do valor nominal $\alpha = 10\%$, considerados exatos, e apenas para as situações $n = 100$ com $p = 48$ e 50 , os testes TNMD2RBoot e TNMDbRBoot foram considerados conservativos.

Quanto aos testes TNMBP e TNMSWR, utilizados para fins de comparação, foram considerados exatos em todas as situações, com exceção de $n = 1000$ com $p = 30$ para TNMBP, em que, o teste foi avaliado como liberal. Assim sendo, TNMD2RBoot, TNMDbRBoot, TNMBP e TNMSWR geraram controle adequado das taxas de erro tipo I, ao nível de significância de 10%, na maioria das situações avaliadas. Já os testes TNMD2RKS e TNMDbRKS não obtiveram controle satisfatório em quase todas as situações, sendo que, TNMDbRKS se mostrou inadequado nas situações com p grande, próximo de $\lfloor n/2 \rfloor$.

Buscou-se comparar algumas das taxas de erro tipo I dos testes da Tabela 4.1 com outros existentes na literatura especializada. Em comparação com os testes avaliados por Cirillo e Ferreira (2003), observa-se para a amostra de tamanho $n = 100$ com $p = 2$, o teste de simetria controlou adequadamente a taxa de erro tipo I, com valor dado por 0,0922. O mesmo ocorreu para os testes TNMD2RBoot, TNMDbRBoot, TNMBP e TNMSWR da Tabela 4.1, já os testes TNMD2RKS e TNMDbRKS, apresentaram valores inferiores. Para a situação $n = 100$ com $p = 10$ do teste de simetria, pelos resultados de Cirillo e Ferreira (2003), apresentou a taxa de erro tipo I de 0,0665, valor inferior ao nível nominal, o mesmo ocorre para os testes TNMD2RKS e TNMDbRKS.

Considerando os resultados do teste de normalidade multivariada de curtose, avaliados por Cirillo e Ferreira (2003). No caso de $n = 100$ com $p = 2$, o teste apresentou taxa de erro tipo I de 0,0680, valor abaixo do nível nominal, nesta situação os teste TNMD2RKS e TNMDbRKS apresentaram o mesmo comportamento. Comparando o teste de curtose com os apresentados na Tabela 4.1, na situação $n = 100$ com $p = 10$, apresenta taxa de erro tipo I de 0,1528 valor superior a todos os testes avaliados neste trabalho e os por Cirillo e Ferreira (2003), para a mesma situação.

A taxa de erro tipo I do teste de normalidade baseado no coeficiente de correlação Quantil-Quantil multivariado, considerando as situações $n = 100$ com $p = 2$ e 10, apresentou as taxas 0,1038 e 0,0965, respectivamente. Nestes casos, o teste obteve controle adequado das taxas de erro tipo I, assim como nos testes TNMD2RBoot, TNMDbRBoot, TNMBP e TNMSWR na Tabela 4.1.

Nestas comparações, é importante ressaltar que os resultados de Cirillo e Ferreira (2003), dos testes de simetria, curtose e o baseado no coeficiente de correlação Quantil-Quantil, para validação dos testes foram realizadas 10000 simulações Monte Carlo, enquanto que, para os testes avaliados neste trabalho foram realizadas 1000 simulações Monte Carlo.

Tabela 4.1 – Taxas de erro tipo I, considerando a distribuição normal multivariada em função de n e p e das correlações $\rho = 0,0$ e $0,90$ ao nível de 10% de significância.

n	p	10%					
		TNMD2RKS	TNMDbRKS	TNMD2RBoot	TNMDbRBoot	TNMBP	TNMSWR
$\rho = 0,00$							
10	2	0,0270 ⁻	0,0420 ⁻	0,1070	0,1040	0,0980	0,1000
30	2	0,0320 ⁻	0,0340 ⁻	0,1020	0,1030	0,1060	0,1070
	10	0,0320 ⁻	0,1470 ⁺	0,1130	0,1070	0,0870	0,0910
	14	0,0250 ⁻	0,3160 ⁺	0,0720	0,0700	0,1210	0,1240
	15	0,0350 ⁻	0,3800 ⁺	0,0940	0,0920	0,1110	0,0970
100	2	0,0360 ⁻	0,0440 ⁻	0,1150	0,1130	0,0940	0,0870
	10	0,0270 ⁻	0,0390 ⁻	0,1100	0,1100	0,1020	0,1000
	30	0,0330 ⁻	0,3000 ⁺	0,0910	0,0760	0,0870	0,0880
	48	0,0410 ⁻	0,8400 ⁺	0,0540 ⁻	0,0530 ⁻	0,1060	0,0990
	50	0,0530 ⁻	0,9010 ⁺	0,0640 ⁻	0,0710 ⁻	0,0940	0,0930
1000	2	0,0360 ⁻	0,0380 ⁻	0,1080	0,1080	0,0920	0,0940
	10	0,0220 ⁻	0,0260 ⁻	0,1060	0,1090	0,0870	0,1000
	30	0,0300 ⁻	0,0650 ⁻	0,1100	0,1250	0,1400 ⁺	0,1250
	50	0,0240 ⁻	0,0650 ⁻	0,0990	0,0850	0,1070	0,1100
$\rho = 0,90$							
10	2	0,0270 ⁻	0,0430 ⁻	0,1060	0,0990	0,0810	0,0810
30	2	0,0290 ⁻	0,0310 ⁻	0,1050	0,1070	0,1130	0,1030
	10	0,0240 ⁻	0,1290 ⁺	0,0870	0,0850	0,0840	0,0810
	14	0,0310 ⁻	0,3250 ⁺	0,0790	0,0850	0,0970	0,0860
	15	0,0340 ⁻	0,3840 ⁺	0,0700 ⁻	0,0910	0,1000	0,0850
100	2	0,0250 ⁻	0,0300 ⁻	0,1090	0,1070	0,0950	0,0940
	10	0,0210 ⁻	0,0450 ⁻	0,1020	0,0990	0,0910	0,0770
	30	0,0270 ⁻	0,3170 ⁺	0,0730 ⁻	0,0800	0,1120	0,0990
	48	0,0620 ⁻	0,8980 ⁺	0,0500 ⁻	0,0530 ⁻	0,1030	0,0820
	50	0,0700 ⁻	0,9220 ⁺	0,0460 ⁻	0,0580 ⁻	0,1200	0,1050
1000	2	0,0350 ⁻	0,0370 ⁻	0,1130	0,1170	0,1160	0,1070
	10	0,0240 ⁻	0,0260 ⁻	0,1000	0,0920	0,0850	0,0780
	30	0,0320 ⁻	0,0460 ⁻	0,1050	0,0960	0,0900	0,0790
	50	0,0190 ⁻	0,0580 ⁻	0,0870	0,0940	0,0960	0,0980

+ Taxas de erro tipo I superiores ao valor nominal de 10% de significância.

- Taxas de erro tipo I inferiores ao valor nominal de 10% de significância.

Na Tabela 4.2 tem-se as taxas de erro tipo I dos testes TNMD2RKS, TNMDbRKS, TNMD2RBoot, TNMDbRBoot, TNMBP e TNMSWR, considerando o nível de significância $\alpha = 5\%$. Quanto o comportamento dos teste em relação a correlação observou-se valores das

taxas de erro tipo I similares, assim sendo, os comentários apresentados são válidos para os dois valores de ρ , em todas as situações de n e p avaliados.

Para o nível $\alpha = 5\%$ de significância observa-se que os testes TNMD2RKS e TNMDbRKS, apresentam comportamento semelhante aos da Tabela 4.1, em que, TNMD2RKS foi considerado conservativo em todas as situações avaliadas. E o TNMDbRKS, apresentou-se conservativo para as situações com p pequeno em relação a n , $n = 10$ com $p = 2$, $n = 30$ com $p = 2$, $n = 100$ com $p = 2$ e 10 e $n = 1000$ para todos os valores de p avaliados, nas demais situações foi considerado liberal. Pode-se observar que a medida que o valor de p aumenta as taxas de erro tipo I de TNMDbRKS também aumentam chegando a taxa de erro tipo I de 0,7590 em $n = 100$ com $p = 50$.

O TNMD2RBoot, em quase todas as situações foi considerado exato, ou seja, as taxas de erro tipo I foram não significativamente (valor- $p > 0,01$) diferentes do valor nominal $\alpha = 5\%$, com exceção das situações $n = 100$ com $p = 48$ e 50 , em que, o teste foi considerado conservativo. O TNMDbRBoot, assim como TNMD2RBoot também foi considerado exato em boa parte das situações avaliadas, não sendo em $n = 30$ com $p = 14$ e $n = 100$ com $p = 48$, considerado conservativo e $n = 1000$ com $p = 30$, liberal. Os demais testes, TNMBP e TNMSWR, com exceção da situação $n = 1000$ com $p = 30$ para TNMBP, o qual, foi considerado liberal, nas demais situações foram exatos, de acordo com o teste binomial exato ao nível de 1% de significância.

Comparando as taxas de erro tipo I dos testes da Tabela 4.2 com o teste de Shapiro-Francia multivariado proposto por Silva (2009). Para as situações com $n = 30$, 100 e 1000 com $p = 2$ e 10 , o teste de Shapiro-Francia multivariado apresentou as taxas de erro tipo I próximas do nível nominal. Para todas estas situações o teste obteve controle adequado das taxas de erro tipo I. Em comparação com as taxas de erro tipo I, dos testes apresentados na Tabela 4.2, os testes TNMD2RBoot, TNMDbRBoot, TNMBP e TNMSWR em todas as situações apresentam taxas de erro tipo similares ao teste de Shapiro-Francia multivariado, ou seja, taxas próximas do nível nominal $\alpha = 5\%$.

Considerando os testes avaliados por Cirillo e Ferreira (2003), nas situações $n = 100$ com $p = 2$ e 10 . Verifica-se que os valores das taxas de erro tipo I dos testes TNMD2RBoot, TNMDbRBoot, TNMBP e TNMSWR, apresentam o mesmo comportamento do teste de simetria e do teste baseado no coeficiente de correlação Quantil-Quantil, nas duas situações avaliadas e ao teste de curtose em $n = 100$ com $p = 10$, em que são considerados exatos. Levando em

consideração os valores das taxas de erro tipo I de TNMD2RKS e TNMDbRKS, observa-se uma semelhança com os resultados do teste de curtose para $n = 100$ com $p = 2$, sendo estes conservativos.

Na Tabela 4.3, o teste TNMD2RKS, assim como, para os níveis de significância $\alpha = 10\%$ e 5% foi considerado conservativo em todas as situações avaliadas. O TNMDbRKS também manteve o mesmo comportamento apresentados nas Tabelas 4.1 e 4.2, com exceção dos casos $n = 30$ com $p = 10$, para $p = 0,00$ e $0,90$, considerados liberais anteriormente, passando a ser exatos, e $n = 1000$ com $p = 50$ para $p = 0,00$, considerado conservativo, passando a ser exato. Os demais testes TNMD2RBoot, TNMDbRBoot, TNMBP e TNMSWR, em todas as situações com $p = 0,00$ apresentaram um controle adequado das taxas de erro tipo I, considerando o nível $\alpha = 1\%$ de significância, sendo os testes considerados exatos. Para os testes TNMD2RBoot e TNMDbRBoot, considerando as situações com correlação $\rho = 0,90$, obtiveram em alguns casos redução significativa das taxas de erro tipo I, passando de exato para conservativo nas situações $n = 100$ com $p = 30$ e 40 para os dois testes e $n = 30$ com $p = 14$ e $n = 1000$ com $p = 50$ para TNMDbRBoot.

Para amostras $n = 10$ com $p = 2$ e $n = 100$ com $p = 2, 10$ e 50 , o teste Monte Carlo de normalidade multivariada baseado em distâncias proposto por Biase e Ferreira (2012), apresentou controle adequado das taxas de erro tipo I, assim como os testes propostos TNMD2RBoot e TNMDbRBoot apresentados na Tabela 4.3. Nas situações de $n = 100$ com $p = 2$ e 10 , os testes de normalidade multivariada avaliados por Cirillo e Ferreira (2003), ou seja, o teste de simetria, o teste de curtose e o teste baseado no coeficiente de correlação Quantil-Quantil multivariado, apresentaram taxas de erro tipo I exatas, assim como os testes TNMD2RBoot, TNMDbRBoot, TNMBP e TNMSWR (Tabela 4.3).

Considerando as avaliações realizadas por Silva (2009), em que foram executadas 2000 simulações Monte Carlo, para avaliar o teste de Shapiro-Francia multivariado. As situações de $n = 30, 100$ e 1000 com $p = 2$ e 10 , o teste em todas estas situações foi considerado exato. Nestas circunstâncias, os testes TNMD2RBoot, TNMDbRBoot, TNMBP e TNMSWR, da Tabela 4.3, obtiveram o mesmo comportamento do teste de Shapiro-Francia multivariado, desta foram, as taxas de erro tipo I foram não significativamente (valor- $p > 0,01$) diferente do valor nominal, ou seja, considerados exatos. Já TNMD2RBoot e TNMDbRBoo, na maioria destas situações foram conservativos e não apresentaram semelhança de comportamento aos demais testes.

Tabela 4.2 – Taxas de erro tipo I, considerando a distribuição normal multivariada em função de n , p e das correlações $\rho = 0,0$ e $0,90$ ao nível de 5% de significância.

n	p	5%					
		$\rho = 0,00$					
		TNMD2RKS	TNMDbRKS	TNMD2RBoot	TNMDbRBoot	TNMBP	TNMSWR
		$\rho = 0,00$					
10	2	0,0030 ⁻	0,0030 ⁻	0,0580	0,0550	0,0440	0,0510
30	2	0,0090 ⁻	0,0100 ⁻	0,0530	0,0530	0,0500	0,0490
	10	0,0110 ⁻	0,0760 ⁺	0,0590	0,0530	0,0420	0,0450
	14	0,0070 ⁻	0,1650 ⁺	0,0350	0,0290 ⁻	0,0560	0,0570
	15	0,0110 ⁻	0,2450 ⁺	0,0410	0,0420	0,0500	0,0520
100	2	0,0070 ⁻	0,0100 ⁻	0,0630	0,0640	0,0380	0,0440
	10	0,0070 ⁻	0,0200 ⁻	0,0580	0,0490	0,0530	0,0440
	30	0,0180 ⁻	0,1780 ⁺	0,0460	0,0390	0,0520	0,0420
	48	0,0140 ⁻	0,6890 ⁺	0,0250 ⁻	0,0290 ⁻	0,0470	0,0490
	50	0,0130 ⁻	0,7590 ⁺	0,0260 ⁻	0,0330	0,0550	0,0500
1000	2	0,0180 ⁻	0,0180 ⁻	0,0550	0,0550	0,0460	0,0490
	10	0,0040 ⁻	0,0070 ⁻	0,0530	0,0540	0,0530	0,0470
	30	0,0050 ⁻	0,0100 ⁻	0,0700	0,0750 ⁺	0,0750 ⁺	0,0650
	50	0,0150 ⁻	0,0220 ⁻	0,0420	0,0440	0,0540	0,0530
		$\rho = 0,90$					
10	2	0,0000 ⁻	0,0000 ⁻	0,0530	0,0540	0,0430	0,0390
30	2	0,0100 ⁻	0,0130 ⁻	0,0500	0,0490	0,0630	0,0570
	10	0,0090 ⁻	0,0590	0,0370	0,0460	0,0420	0,0420
	14	0,0070 ⁻	0,1910 ⁺	0,0370	0,0390	0,0480	0,0450
	15	0,0150 ⁻	0,2390 ⁺	0,0370	0,0430	0,0590	0,0540
	2	0,0070 ⁻	0,0100 ⁻	0,0470	0,0460	0,0500	0,0420
100	10	0,0060 ⁻	0,0120 ⁻	0,0620	0,0550	0,0420	0,0510
	30	0,0070 ⁻	0,1910 ⁺	0,0350	0,0370	0,0520	0,0540
	48	0,0210 ⁻	0,7820 ⁺	0,0190 ⁻	0,0220 ⁻	0,0490	0,0450
	50	0,0300 ⁻	0,8200 ⁺	0,0190 ⁻	0,0260 ⁻	0,0560	0,0490
	2	0,0100 ⁻	0,0110 ⁻	0,0570	0,0570	0,0670	0,0670
1000	10	0,0050 ⁻	0,0070 ⁻	0,0500	0,0540	0,0420	0,0450
	30	0,0080 ⁻	0,0180 ⁻	0,0600	0,0560	0,0420	0,0460
	50	0,0030 ⁻	0,0240 ⁻	0,0400	0,0390	0,0400	0,0530

+ Taxas de erro tipo I superiores ao valor nominal de 5% de significância.

- Taxas de erro tipo I inferiores ao valor nominal de 5% de significância.

Nos resultados relativos a segunda parte das taxas de erro tipo I, verificou-se o comportamento dos testes com presença de *outliers*, em que, foram geradas $N = 1.000$ amostras

Tabela 4.3 – Taxas de erro tipo I, considerando a distribuição normal multivariada em função de n , p e das correlações $\rho = 0,0$ e $0,90$ ao nível de 1% de significância.

n	p	1%					
		TNMD2RKS	TNMDbRKS	TNMD2RBoot	TNMDbRBoot	TNMBP	TNMSWR
$\rho = 0,00$							
10	2	0,0000 ⁻	0,0000 ⁻	0,0150	0,0100	0,0090	0,0090
30	2	0,0000 ⁻	0,0000 ⁻	0,0090	0,0090	0,0090	0,0040
	10	0,0000 ⁻	0,0150	0,0110	0,0100	0,0160	0,0120
	14	0,0030 ⁻	0,0310 ⁺	0,0080	0,0070	0,0080	0,0100
	15	0,0000 ⁻	0,0670 ⁺	0,0060	0,0060	0,0110	0,0100
100	2	0,0020 ⁻	0,0020 ⁻	0,0060	0,0070	0,0070	0,0080
	10	0,0000 ⁻	0,0010 ⁻	0,0110	0,0090	0,0100	0,0090
	30	0,0010 ⁻	0,0370 ⁺	0,0140	0,0180	0,0140	0,0120
	48	0,0020 ⁻	0,3140 ⁺	0,0070	0,0060	0,0060	0,0100
	50	0,0030 ⁻	0,4290 ⁺	0,0040	0,0050	0,0100	0,0110
1000	2	0,0020 ⁻	0,0020 ⁻	0,0130	0,0130	0,0090	0,0140
	10	0,0000 ⁻	0,0000 ⁻	0,0080	0,0080	0,0100	0,0160
	30	0,0000 ⁻	0,0000 ⁻	0,0100	0,0200	0,0050	0,0250 ⁺
	50	0,0000 ⁻	0,0070	0,0150	0,0140	0,0180	0,0200
$\rho = 0,90$							
10	2	0,0000 ⁻	0,0000 ⁻	0,0110	0,0070	0,0100	0,0120
30	2	0,0000 ⁻	0,0000 ⁻	0,0110	0,0090	0,0110	0,0130
	10	0,0010 ⁻	0,0110	0,0080	0,0110	0,0120	0,0140
	14	0,0010 ⁻	0,0420 ⁺	0,0060	0,0010 ⁻	0,0080	0,0140
	15	0,0020 ⁻	0,0730 ⁺	0,0100	0,0080	0,0090	0,0160
100	2	0,0000 ⁻	0,0000 ⁻	0,0080	0,0070	0,0170	0,0150
	10	0,0000 ⁻	0,0020 ⁻	0,0130	0,0110	0,0120	0,0170
	30	0,0000 ⁻	0,0410 ⁺	0,0030 ⁻	0,0030 ⁻	0,0120	0,0170
	48	0,0020 ⁻	0,4210 ⁺	0,0030 ⁻	0,0030 ⁻	0,0120	0,0150
	50	0,0030 ⁻	0,4760 ⁺	0,0040	0,0040	0,0100	0,0120
1000	2	0,0020 ⁻	0,0020 ⁻	0,0110	0,0110	0,0150	0,0240 ⁺
	10	0,0010 ⁻	0,0010 ⁻	0,0090	0,0070	0,0110	0,0140
	30	0,0000 ⁻	0,0000 ⁻	0,0110	0,0100	0,0050	0,0090
	50	0,0000 ⁻	0,0000 ⁻	0,0060	0,0020 ⁻	0,0080	0,0120

+ Taxas de erro tipo I superiores ao valor nominal de 1% de significância.

- Taxas de erro tipo I inferiores ao valor nominal de 1% de significância.

por simulação Monte Carlo, considerando as combinações de n e p mostrados na Tabela 3.1 e os valores de correlação $\rho = 0,00$ e $0,90$. Nas Tabelas 4.4, 4.5 e 4.6 são apresentadas as estimativas das taxas de erro tipo I para amostras normais multivariadas com 1% de *outliers*,

dos testes TNMD2RKS, TNMDbRKS, TNMD2RBoot, TNMDbRBoot, TNMBP e TNMSWR, considerando os níveis de significância nominais fixados em 10%, 5% e 1%, respectivamente. Nestes casos os valores das taxas de erro tipo I também foram comparados com cada nível de significância nominal α associado, por meio do teste binomial exato ao nível de significância 1%, e espera-se que os testes sejam exatos.

Na Tabela 4.4 apresentam-se as taxas de erro tipo I para o caso de amostras com 1% de *outliers*, ao nível de significância 10%. Inicialmente considerando as taxas de erro tipo I das situações com correlação $\rho = 0,00$. O TNMD2RKS, em todas as situações avaliadas as taxas de erro tipo I foram significativamente (valor- $p < 0,01$) inferiores ao nível nominal de 10%, sendo o teste considerado conservativo. O TNMDbRKS, nos casos com presença de *outliers* apresentou taxas de erro tipo I semelhantes aos casos sem presença de *outliers* apresentados nas Tabelas 4.1, 4.2 e 4.3. O TNMD2RBoot nas situações $n = 100$ com $p = 48$ e 50 e $n = 1000$ com $p = 48$, foi considerado conservativo e em $n = 1000$ com $p = 10$, liberal. Para TNMDbRBoot nas situações $n = 10$ com $p = 2$ e $n = 100$ com $p = 50$ foi considerado conservativo e liberal em $n = 1000$ com $p = 10, 30$ e 50 . Nas demais situações os dois testes apresentaram taxas de erro tipo I exatas.

Os testes usados como referência TNMBP e TNMSWR não se mostraram eficientes quanto as taxas de erro tipo I, com presença de *outliers*. Os dois testes, em todas as situações avaliadas, foram classificados como liberais, de acordo com o teste binomial exato. Além de serem considerados liberais, os testes apresentaram resultados elevados para as taxas de erro tipo I, atingindo em algumas situações taxas de erro tipo I de 1,0000. Neste caso, TNMBP e TNMSWR não se mostraram eficientes, em boa parte dos casos avaliados, quanto as taxas de erro tipo I, na presença de *outliers*.

Para as situações com variáveis altamente correlacionadas $\rho = 0,90$. Neste caso, na maioria das situações avaliadas, as taxas de erro tipo I não apresentaram mudanças significativas em comparação com os casos sem correlação, ou seja, os testes obtiveram resultados semelhantes os casos considerando $\rho = 0,00$. Observou-se diferenças significativas nas situações $n = 100$ com $p = 48$ e 50 para TNMD2RKS e $n = 1000$ com $p = 50$ para o teste TNMDbRKS, os quais passaram a ser considerados exatos. Para o teste TNMD2RBoot apresentou mudanças em $n = 10$ com $p = 2$ e $n = 1000$ com $p = 50$, sendo exato nestas situações, o mesmo ocorre com o teste TNMDbRBoot em $n = 10$ com $p = 2$. Já os testes referências não apresentaram diferenças significativas em relação a correlação em nenhuma situação avaliada.

Tabela 4.4 – Taxas de erro tipo I, considerando a distribuição normal multivariada com presença de 1% de *outliers*, em função de n , p e das correlações $\rho = 0,0$ e $0,90$ ao nível de 10% de significância.

n	p	10%					
		TNMD2RKS	TNMDbRKS	TNMD2RBoot	TNMDbRBoot	TNMBP	TNMSWR
$\rho = 0,00$							
10	2	0,0160 ⁻	0,0230 ⁻	0,0700 ⁻	0,0750 ⁻	0,1890 ⁺	0,1870 ⁺
30	2	0,0190 ⁻	0,0260 ⁻	0,0870	0,0910	0,3260 ⁺	0,3240 ⁺
	10	0,0310 ⁻	0,1540 ⁺	0,1240	0,1100	0,3370 ⁺	0,3240 ⁺
	14	0,0370 ⁻	0,3650 ⁺	0,1040	0,1040	0,3340 ⁺	0,3350 ⁺
	15	0,0430 ⁻	0,4300 ⁺	0,0930	0,0960	0,3400 ⁺	0,3410 ⁺
100	2	0,0310 ⁻	0,0420 ⁻	0,1100	0,1090	0,6970 ⁺	0,6980 ⁺
	10	0,0150 ⁻	0,0380 ⁻	0,0960	0,0920	0,6540 ⁺	0,6570 ⁺
	30	0,0460 ⁻	0,3510 ⁺	0,1170	0,1180	0,6690 ⁺	0,6660 ⁺
	48	0,0500 ⁻	0,8930 ⁺	0,0700 ⁻	0,0790	0,6660 ⁺	0,6540 ⁺
	50	0,0490 ⁻	0,9290 ⁺	0,0670 ⁻	0,0690 ⁻	0,6760 ⁺	0,6790 ⁺
1000	2	0,0390 ⁻	0,0410 ⁻	0,1170	0,1190	1,0000 ⁺	1,0000 ⁺
	10	0,0310 ⁻	0,0340 ⁻	0,1540 ⁺	0,1610 ⁺	1,0000 ⁺	1,0000 ⁺
	30	0,0200 ⁻	0,0600 ⁻	0,1150	0,1400 ⁺	1,0000 ⁺	1,0000 ⁺
	50	0,0100 ⁻	0,0600 ⁻	0,0550 ⁻	0,1500 ⁺	1,0000 ⁺	1,0000 ⁺
$\rho = 0,90$							
10	2	0,0260 ⁻	0,0400 ⁻	0,1120	0,1180	0,1740 ⁺	0,1620 ⁺
30	2	0,0320 ⁻	0,0360 ⁻	0,1230	0,1290 ⁺	0,3210 ⁺	0,3140 ⁺
	10	0,0300 ⁻	0,1580 ⁺	0,1060	0,1110	0,3400 ⁺	0,3360 ⁺
	14	0,0340 ⁻	0,3530 ⁺	0,0900	0,0970	0,3510 ⁺	0,3400 ⁺
	15	0,0510 ⁻	0,4160 ⁺	0,0960	0,1000	0,3190 ⁺	0,3110 ⁺
100	2	0,0280 ⁻	0,0300 ⁻	0,1090	0,1080	0,6330 ⁺	0,6240 ⁺
	10	0,0200 ⁻	0,0480 ⁻	0,1040	0,1190	0,6550 ⁺	0,6500 ⁺
	30	0,0490 ⁻	0,3600 ⁺	0,1010	0,1050	0,6600 ⁺	0,6450 ⁺
	48	0,0900	0,9090 ⁺	0,0750 ⁻	0,0890	0,6590 ⁺	0,6580 ⁺
	50	0,0840	0,9430 ⁺	0,0600 ⁻	0,0670 ⁻	0,6600 ⁺	0,6600 ⁺
1000	2	0,0380 ⁻	0,0400 ⁻	0,1250	0,1260	1,0000 ⁺	1,0000 ⁺
	10	0,0330 ⁻	0,0420 ⁻	0,1410 ⁺	0,1500 ⁺	1,0000 ⁺	1,0000 ⁺
	30	0,0260 ⁻	0,0420 ⁻	0,0810	0,1370 ⁺	1,0000 ⁺	1,0000 ⁺
	50	0,0390 ⁻	0,1000	0,1270	0,1340 ⁺	1,0000 ⁺	1,0000 ⁺

+ Taxas de erro tipo I superiores ao valor nominal de 10% de significância.

- Taxas de erro tipo I inferiores ao valor nominal de 10% de significância.

Na Tabela 4.5 tem-se as taxas de erro tipo I, considerando a distribuição normal multivariada com 1% de *outliers*, para $\alpha = 5\%$ de significância. O TNMD2RKS e TNMDbRKS,

apresentam resultados similares aos apresentados na Tabela 4.4, em que, o teste TNMD2RKS em quase todas as situações foi considerado conservativo, não sendo apenas em $n = 100$ com $p = 48$ e 50 com $\rho = 0,90$, apresentando-se exato. Já o TNMDbRKS, com $\rho = 0,00$ foi conservativo nas situações $n = 10$ e 30 com $p = 2$, $n = 100$ com $p = 2$ e 10 e $n = 1000$ para todos os valores de p considerados, e liberal nas demais situações, e com $\rho = 0,90$ apresentou resultados similares com $\rho = 0,00$, exceto em $n = 1000$ com $p = 50$, sendo o teste considerado exato. Quanto ao teste TNMDbRKS é importante salientar que a medida que o número de variáveis se aproxima de $\lfloor n/2 \rfloor$ as taxas de erro tipo I aumentam, o que é facilmente observado para as situações com $n = 30$ e 100 para todos os valores de p .

Os testes propostos baseados em *bootstrap* paramétricos, TNMD2RBoot e TNMDbRBoot, foram considerados exatos, ou seja, foram não significativamente (valor- $p > 0,01$) diferentes do valor nominal $\alpha = 5\%$. Apenas nas situações $n = 100$ com $p = 48$, $n = 1000$ com $p = 50$ com $\rho = 0,00$ e $n = 100$ com $p = 50$ e $\rho = 0,90$ o teste TNMD2RBoot foi considerado conservativo e em $n = 1000$ com $p = 10$ para os dois valores de ρ , liberal. O TNMDbRBoot, foi avaliado como conservativo em $n = 100$ com $p = 50$ e correlação $\rho = 0,00$ e $0,90$ e em $n = 1000$ com $p = 50$ e $\rho = 0,00$, e liberal em $n = 1000$ com $p = 10$ para os dois valores de ρ , $n = 1000$ com $p = 30$ para $\rho = 0,00$ e $n = 1000$ com $p = 50$ para $\rho = 0,90$. Nos dois testes mesmo nos casos em que foram considerados liberais apresentaram valores muito próximos do nível nominal, neste caso de $\alpha = 5\%$, obtendo portando um bom controle das taxas de erro tipo I.

Ainda na Tabela 4.5, TNMBP e TNMSWR, na maioria das circunstâncias, não obtiveram um controle adequado da taxa de erro tipo I, apresentando valores superiores a 30% de erro tipo I, o qual, se eleva na medida em que n aumenta. Desta forma, em todas as situações analisadas os dois testes foram considerados liberais, com taxas de erro tipo I que diferiram significativamente do nível de significância nominal de 1%.

Na Tabela 4.6 estão apresentadas as taxas de erro tipo I, para amostras com 1% de *outliers*, ao nível de 1% de significância. O teste proposto TNMD2RKS, na maioria das situações foi considerado conservativo, ou seja, as taxas de erro tipo I foram significativamente (valor- $p < 0,01$) inferiores ao nível nominal de 1%, segundo o teste binomial exato com nível de 1% de significância. Nas alternativas com $n = 1000$, $p = 50$ e $\rho = 0,00$, $n = 30$ com $p = 14$ e 15 e $n = 100$ com $p = 48$ os três últimos com $\rho = 0,90$, o teste foi classificado como liberal. O TNMDbRKS, foi considerado conservativo nas situações $n = 10$ e 30 com $p = 2$ para $\rho = 0,00$

Tabela 4.5 – Taxas de erro tipo I, considerando a distribuição normal multivariada com presença de 1% de *outliers*, em função de n , p e das correlações $\rho = 0,0$ e $0,90$ ao nível de 5% de significância.

n	p	5%					
		TNMD2RKS	TNMDbRKS	TNMD2RBoot	TNMDbRBoot	TNMBP	TNMSWR
$\rho = 0,00$							
10	2	0,0030 ⁻	0,0030 ⁻	0,0410	0,0350	0,1330 ⁺	0,1310 ⁺
30	2	0,0070 ⁻	0,0090 ⁻	0,0410	0,0360	0,2890 ⁺	0,2930 ⁺
	10	0,0100 ⁻	0,0780 ⁺	0,0590	0,0620	0,2930 ⁺	0,2980 ⁺
	14	0,0100 ⁻	0,2000 ⁺	0,0490	0,0460	0,3040 ⁺	0,3010 ⁺
	15	0,0170 ⁻	0,2470 ⁺	0,0520	0,0420	0,2990 ⁺	0,3020 ⁺
100	2	0,0140 ⁻	0,0170 ⁻	0,0670	0,0660	0,6790 ⁺	0,6810 ⁺
	10	0,0070 ⁻	0,0140 ⁻	0,0470	0,0490	0,6410 ⁺	0,6370 ⁺
	30	0,0120 ⁻	0,2210 ⁺	0,0640	0,0650	0,6520 ⁺	0,6520 ⁺
	48	0,0210 ⁻	0,7530 ⁺	0,0300 ⁻	0,0360	0,6450 ⁺	0,6400 ⁺
	50	0,0220 ⁻	0,8280 ⁺	0,0340	0,0310 ⁻	0,6630 ⁺	0,6620 ⁺
1000	2	0,0160 ⁻	0,0170 ⁻	0,0610	0,0600	1,0000 ⁺	1,0000 ⁺
	10	0,0110 ⁻	0,0140 ⁻	0,0750 ⁺	0,0820 ⁺	1,0000 ⁺	1,0000 ⁺
	30	0,0080 ⁻	0,0200 ⁻	0,0600	0,0800 ⁺	1,0000 ⁺	1,0000 ⁺
	50	0,0050 ⁻	0,0250 ⁻	0,0300 ⁻	0,0300 ⁻	1,0000 ⁺	1,0000 ⁺
$\rho = 0,90$							
10	2	0,0010 ⁻	0,0010 ⁻	0,0570	0,0530	0,1230 ⁺	0,1190 ⁺
30	2	0,0120 ⁻	0,0140 ⁻	0,0560	0,0580	0,2850 ⁺	0,2800 ⁺
	10	0,0100 ⁻	0,0810 ⁺	0,0480	0,0550	0,3150 ⁺	0,3070 ⁺
	14	0,0150 ⁻	0,2070 ⁺	0,0420	0,0430	0,3100 ⁺	0,3090 ⁺
	15	0,0180 ⁻	0,2660 ⁺	0,0540	0,0500	0,2860 ⁺	0,2820 ⁺
100	2	0,0120 ⁻	0,0160 ⁻	0,0510	0,0510	0,6120 ⁺	0,6090 ⁺
	10	0,0060 ⁻	0,0150 ⁻	0,0540	0,0600	0,6410 ⁺	0,6400 ⁺
	30	0,0180 ⁻	0,2200 ⁺	0,0520	0,0550	0,6370 ⁺	0,6320 ⁺
	48	0,0390	0,7940 ⁺	0,0360	0,0410	0,6470 ⁺	0,6450 ⁺
	50	0,0370	0,8400 ⁺	0,0290 ⁻	0,0270 ⁻	0,6460 ⁺	0,6400 ⁺
1000	2	0,0140 ⁻	0,0180 ⁻	0,0660	0,0660	1,0000 ⁺	1,0000 ⁺
	10	0,0150 ⁻	0,0160 ⁻	0,0800 ⁺	0,0820 ⁺	1,0000 ⁺	1,0000 ⁺
	30	0,0140 ⁻	0,0220 ⁻	0,0420	0,0510	1,0000 ⁺	1,0000 ⁺
	50	0,0200 ⁻	0,0450	0,0650	0,0710 ⁺	1,0000	1,0000 ⁺

+ Taxas de erro tipo I superiores ao valor nominal de 5% de significância.

- Taxas de erro tipo I inferiores ao valor nominal de 5% de significância.

e $0,90$ e $n = 100$ e 1000 com $p = 2$ e 10 para $\rho = 0,00$ e $0,90$, liberal em $n = 30$ com $p = 14$ e 15 para $\rho = 0,00$ e $0,90$ e $n = 100$ com $p = 30, 48$ e 50 para $\rho = 0,00$ e $0,90$ e exato em

$n = 30$ com $p = 10$ para $\rho = 0,00$ e $0,90$ e $n = 1000$ com $p = 30$ e 50 para $\rho = 0,00$ e $0,90$, comportamento semelhante aos apresentados nas Tabelas 4.4 e 4.5.

Os testes TNMD2RBoot e TNMDbRBoot, em todas as situações foram classificados como exatos, portanto obtendo um controle adequado das taxas de erro tipo I. Já TNMBP e TNMSWR, em todas as situações avaliadas foram considerados liberais, com valores extremamente elevados em algumas situações, atingindo taxas de erro tipo I de 1,0000, como por exemplo, nos casos com $n = 1000$ para todos os valores de p e ρ avaliados.

Na Tabela 4.7 são apresentadas as taxas de erro tipo I dos testes TNMD2RBoot e TNMDbRBoot, considerando a distribuição normal multivariada com 2% de *outliers*, com níveis de significância nominais de 10%, 5% e 1%. Devido o comportamento semelhante entre os casos com 1% de *outliers*, discutiu-se apenas os resultados referentes aos testes TNMD2RBoot e TNMDbRBoot, que apresentaram controle adequado das taxas de erro tipo I. Os resultados referentes aos testes TNMD2RKS, TNMDbRKS, TNMBP e TNMSWR estão apresentados no apêndice A.

O TNMD2RBoot, na maioria das situações de n , p e ρ avaliados, em todos os níveis de significância considerados 10%, 5% e 1%. Nestas situações os testes não apresentaram diferença significativa em relação a correlação, desta forma, os resultados apresentados na sequência valem para os dois valores de ρ . As taxas de erro tipo I foram não significativamente (valor- $p > 0,01$) diferente dos valores nominais de α , considerando um teste binomial exato ao nível de 1% de significância, ou seja, o TNMD2RBoot foi exato para boa parte dos resultados. O teste foi considerado liberal nas situações $n = 100$ com $p = 30$ para $\alpha = 10\%$, $n = 1000$ com todos os valores de p avaliados para $\alpha = 10\%$, 5% e $n = 1000$ com p a partir de 10 para $\alpha = 1\%$. Para TNMDbRBoot, assim como TNMD2RBoot, na maioria das situações o teste foi exato. Com exceção dos casos $n = 100$ com $p = 10$ e $n = 1000$ com todos os valores de p considerados, para $\alpha = 10\%$ e 5% foram considerados liberais, e para $\alpha = 1\%$ foram classificados como liberais em $n = 1000$ com $p = 10, 30$ e 50 .

Em resumo, das taxas de erro tipo I, considerando a distribuição normal multivariada (Tabelas 4.1, 4.2 e 4.3), verifica-se que o teste TNMD2RKS na maioria das situações verificadas foi considerado conservativo. Já o teste TNMDbRKS, verifica-se que a medida que o número de variáveis se aproxima de $\lfloor n/2 \rfloor$ as taxas de erro tipo I aumentam. Os testes TNMD2RBoot e TNMDbRBoot, na maioria dos casos, foram considerados exatos, não só apenas nos casos considerando a distribuição normal multivariada, mas nos caso com presença de *outliers*, o que

Tabela 4.6 – Taxas de erro tipo I, considerando a distribuição normal multivariada com presença de 1% de *outliers*, em função de n , p e das correlações $\rho = 0,0$ e $0,90$ ao nível de 1% de significância.

n	p	1%					
		TNMD2RKS	TNMDbRKS	TNMD2RBoot	TNMDbRBoot	TNMBP	TNMSWR
$\rho = 0,00$							
10	2	0,0000 ⁻	0,0000 ⁻	0,0080	0,0060	0,0920 ⁺	0,0930 ⁺
30	2	0,0020 ⁻	0,0020 ⁻	0,0100	0,0090	0,2560 ⁺	0,2570 ⁺
	10	0,0010 ⁻	0,0150	0,0100	0,0120	0,2750 ⁺	0,2730 ⁺
	14	0,0010 ⁻	0,0470 ⁺	0,0090	0,0040	0,2790 ⁺	0,2790 ⁺
	15	0,0000 ⁻	0,0740 ⁺	0,0090	0,0100	0,2600 ⁺	0,2610 ⁺
100	2	0,0010 ⁻	0,0010 ⁻	0,0130	0,0130	0,6710 ⁺	0,6690 ⁺
	10	0,0000 ⁻	0,0030 ⁻	0,0080	0,0100	0,6270 ⁺	0,6280 ⁺
	30	0,0000 ⁻	0,0570 ⁺	0,0100	0,0090	0,6450 ⁺	0,6440 ⁺
	48	0,0010 ⁻	0,3870 ⁺	0,0050	0,0050	0,6290 ⁺	0,6270 ⁺
	50	0,0030 ⁻	0,4800 ⁺	0,0040	0,0040	0,6450 ⁺	0,6450 ⁺
1000	2	0,0010 ⁻	0,0010 ⁻	0,0130	0,0130	1,0000 ⁺	1,0000 ⁺
	10	0,0010 ⁻	0,0020 ⁻	0,0130	0,0180	1,0000 ⁺	1,0000 ⁺
	30	0,0000 ⁻	0,0050	0,0100	0,0150	1,0000 ⁺	1,0000 ⁺
	50	0,0050	0,0050	0,0100	0,0100	1,0000 ⁺	1,0000 ⁺
$\rho = 0,90$							
10	2	0,0000 ⁻	0,0000 ⁻	0,0120	0,0120	0,0890 ⁺	0,0890 ⁺
30	2	0,0010 ⁻	0,0020 ⁻	0,0120	0,0110	0,2620 ⁺	0,2620 ⁺
	10	0,0000 ⁻	0,0110	0,0110	0,0090	0,2780 ⁺	0,2820 ⁺
	14	0,0040	0,0490 ⁺	0,0100	0,0090	0,2840 ⁺	0,2890 ⁺
	15	0,0050	0,0770 ⁺	0,0120	0,0140	0,2590 ⁺	0,2620 ⁺
100	2	0,0010 ⁻	0,0010 ⁻	0,0100	0,0100	0,5960 ⁺	0,5950 ⁺
	10	0,0000 ⁻	0,0010 ⁻	0,0120	0,0090	0,6250 ⁺	0,6300 ⁺
	30	0,0020 ⁻	0,0600 ⁺	0,0150	0,0160	0,6150 ⁺	0,6180 ⁺
	48	0,0050	0,4460 ⁺	0,0070	0,0100	0,6290 ⁺	0,6290 ⁺
	50	0,0030 ⁻	0,5460 ⁺	0,0020 ⁻	0,0040	0,6310 ⁺	0,6300 ⁺
1000	2	0,0020 ⁻	0,0020 ⁻	0,0110	0,0110	1,0000 ⁺	1,0000 ⁺
	10	0,0020 ⁻	0,0030 ⁻	0,0190	0,0200	1,0000 ⁺	1,0000 ⁺
	30	0,0010 ⁻	0,0060	0,0110	0,0210	1,0000 ⁺	1,0000 ⁺
	50	0,0010 ⁻	0,0060	0,0240 ⁺	0,0240 ⁺	1,0000 ⁺	1,0000 ⁺

+ Taxas de erro tipo I superiores ao valor nominal de 1% de significância.

- Taxas de erro tipo I inferiores ao valor nominal de 1% de significância.

não é observado nos outros testes avaliados. Os testes referência TNMBP e TNMSWR, foram considerados exatos em boa parte das situações considerando a distribuição normal multivariada, mas com presença de *outliers* apresentou as maiores taxas de erro tipo I de todos os testes.

Tabela 4.7 – Taxas de erro tipo I, considerando a distribuição normal multivariada com presença de 2% de *outliers*, em função de n , p e das correlações $\rho = 0,0$ e $0,90$ aos níveis de 10%, 5% e 1% de significância.

n	p	10%		5%		1%		
		TNMD2RBoot	TNMDbRBoot	TNMD2RBoot	TNMDbRBoot	TNMD2RBoot	TNMDbRBoot	
$\rho = 0,00$								
10	2	0,1010	0,0980	0,0460	0,0480	0,0100	0,0090	
	30	2	0,1110	0,1120	0,0600	0,0620	0,0160	0,0180
		10	0,1060	0,1140	0,0540	0,0520	0,0120	0,0100
		14	0,1200	0,1110	0,0630	0,0570	0,0090	0,0040
		15	0,1230	0,1160	0,0550	0,0540	0,0110	0,0110
100	2	0,0990	0,1000	0,0460	0,0460	0,0120	0,0120	
	10	0,1180	0,1430 ⁺	0,0610	0,0770 ⁺	0,0120	0,0140	
	30	0,1330 ⁺	0,1360 ⁺	0,0620	0,0670	0,0140	0,0140	
	48	0,1040	0,0970	0,0580	0,0510	0,0110	0,0080	
	50	0,0990	0,0860	0,0520	0,0460	0,0050	0,0090	
1000	2	0,1740 ⁺	0,1750 ⁺	0,0900 ⁺	0,0940 ⁺	0,0210	0,0220	
	10	0,2420 ⁺	0,2710 ⁺	0,1270 ⁺	0,1530 ⁺	0,0380 ⁺	0,0460 ⁺	
	30	0,2730 ⁺	0,3300 ⁺	0,1540 ⁺	0,2020 ⁺	0,0380 ⁺	0,0510 ⁺	
	50	0,3030 ⁺	0,3430 ⁺	0,1600 ⁺	0,1980 ⁺	0,0450 ⁺	0,0560 ⁺	
$\rho = 0,90$								
10	2	0,1150	0,1190	0,0550	0,0560	0,0090	0,0040	
	30	2	0,0980	0,0960	0,0460	0,0480	0,0100	0,0100
		10	0,1140	0,1230	0,0650	0,0650	0,0110	0,0160
		14	0,1060	0,1030	0,0460	0,0470	0,0040	0,0070
		15	0,0990	0,0990	0,0470	0,0560	0,0060	0,0080
100	2	0,0850	0,0910	0,0440	0,0440	0,0090	0,0100	
	10	0,1100	0,1370 ⁺	0,0620	0,0800 ⁺	0,0140	0,0150	
	30	0,1260	0,1280 ⁺	0,0660	0,0640	0,0130	0,0130	
	48	0,0960	0,1080	0,0420	0,0470	0,0090	0,0090	
	50	0,0700 ⁻	0,0740 ⁻	0,0340	0,0350	0,0030 ⁻	0,0040	
1000	2	0,1960 ⁺	0,1980 ⁺	0,1070 ⁺	0,1100 ⁺	0,0200	0,0210	
	10	0,2530 ⁺	0,2860 ⁺	0,1450 ⁺	0,1610 ⁺	0,0420 ⁺	0,0480 ⁺	
	30	0,2750 ⁺	0,3290 ⁺	0,1760 ⁺	0,2160 ⁺	0,0360 ⁺	0,0510 ⁺	
	50	0,3010 ⁺	0,3340 ⁺	0,1620 ⁺	0,1970 ⁺	0,0380 ⁺	0,0450 ⁺	

+ Taxas de erro tipo I superiores ao valor nominal de 10%, 5% e 1% de significância.

- Taxas de erro tipo I inferiores ao valor nominal de 10%, 5% e 1% de significância.

Quanto a correlação, todos os testes na maioria das situações não apresentaram diferenças significativas.

Uma forma de visualizar o comportamento dos valores- p de cada teste, é por meio da distribuição assumida pelo valor- p sob a hipótese nula, utilizando o histograma. Na Figura 4.1 estão apresentados os histogramas dos valores- p de cada teste, referente a 1000 repetições Monte Carlo da situação $n = 100$ com $p = 10$, nestes gráficos foi utilizados as situações apenas com correlação $\rho = 0,00$, devido a semelhança no comportamento dos testes sem correlação e com alta correlação.

Assim sendo, observa-se nas Figuras (a) e (b) em que se tem os valores- p dos testes TNMD2RKS e TNMDbRKS respectivamente, em que as distribuições dos valores- p são assimétricas, nestes dois casos, assimétricas à esquerda. Para TNMD2RBoot Figura (c), TNMDbRBoot Figura (d), TNMBP Figura (e) e TNMSWR Figura (f), observa-se que a distribuição é simétrica, ou seja, as mesmas se aproximam da distribuição Uniforme.

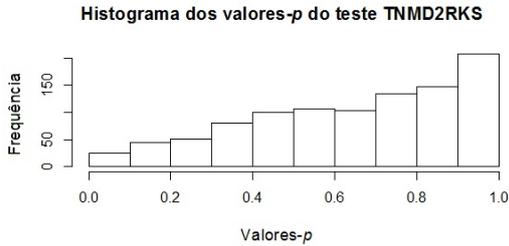
Na Figura 4.2, tem-se as distribuições dos valores- p de todos os testes, considerando a distribuição normal multivariada com presença de 1% de *outliers*, na situação $n = 100$ com $p = 10$. Neste caso, para os testes TNMD2RKS e TNMDbRKS, Figuras (a) e (b) respectivamente, a distribuição dos valores- p são assimétricas à esquerda, mostrando a tendência do valor- p ser conservativo. Já para os testes TNMD2RBoot e TNMDbRBoot, Figuras (c) e (d) respectivamente, a distribuição é simétrica, portanto aproximam-se da distribuição Uniforme. Para os testes TNMBP e TNMSWR, Figuras (e) e (f) respectivamente, observa-se que a distribuição é assimétrica à direita, valor- p considerado liberal.

Figura 4.3 tem-se as distribuições dos valores- p de todos os testes, considerando a distribuição normal multivariada com presença de 2% de *outliers*, na situação $n = 100$ com $p = 10$. Neste caso, a distribuição dos valores- p é assimétrica à esquerda para o teste TNMD2RKS, Figura (a), assimétricas à direita para TNMD2RBoot, TNMDbRBoot, TNMBP e TNMSWR representados respectivamente pelas Figuras (c), (d), (e) e (f). E o teste TNMDbRKS, Figuras (b) distribuição do valor- p simétrica.

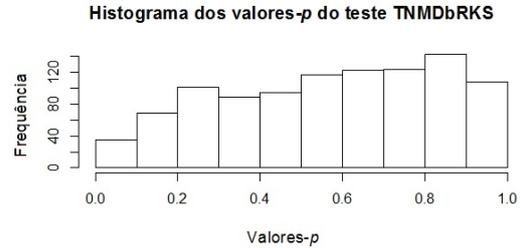
4.2 Poder

As estimativas de poder dos testes TNMD2RKS, TNMDbRKS, TNMD2RBoot, TNMDbRBoot, TNMBP e TNMSWR, considerando a distribuição *t-Student* multivariada com $\nu = 3$ graus de liberdade, são apresentados nas Tabelas 4.8, 4.9 e 4.10, para os níveis de significância $\alpha = 10\%$, 5% e 1% , respectivamente. Para $\alpha = 10\%$ (Tabela 4.8), todos os testes apresentaram baixo poder para n pequeno, $n = 10$ com $p = 2$, não tendo um desempenho satisfatório. Porém,

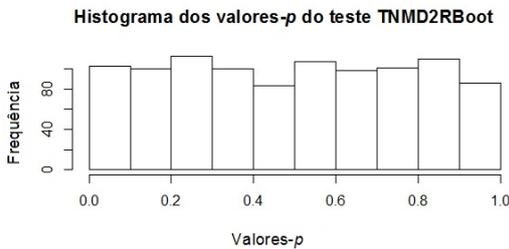
Figura 4.1 – Histograma dos valores- p sob H_0 , considerando a situação $n = 100$ com $p = 10$ e $\rho = 0,0$ dos testes TNMD2RKS, TNMDbRKS, TNMD2RBoot, TNMDbRBoot, TNMBP e TNMSWR.



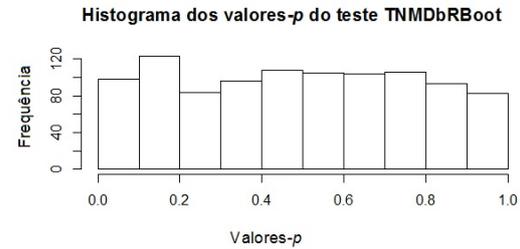
(a) TNMD2RKS



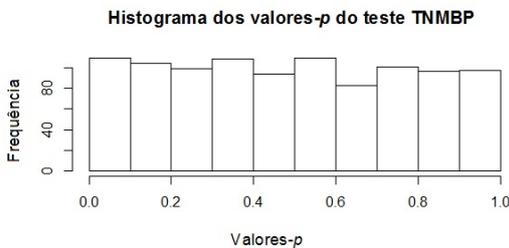
(b) TNMDbRKS



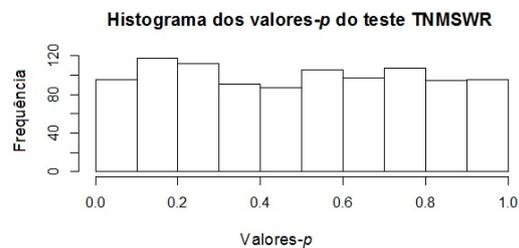
(c) TNMD2RBoot



(d) TNMDbRBoot



(e) TNMBP

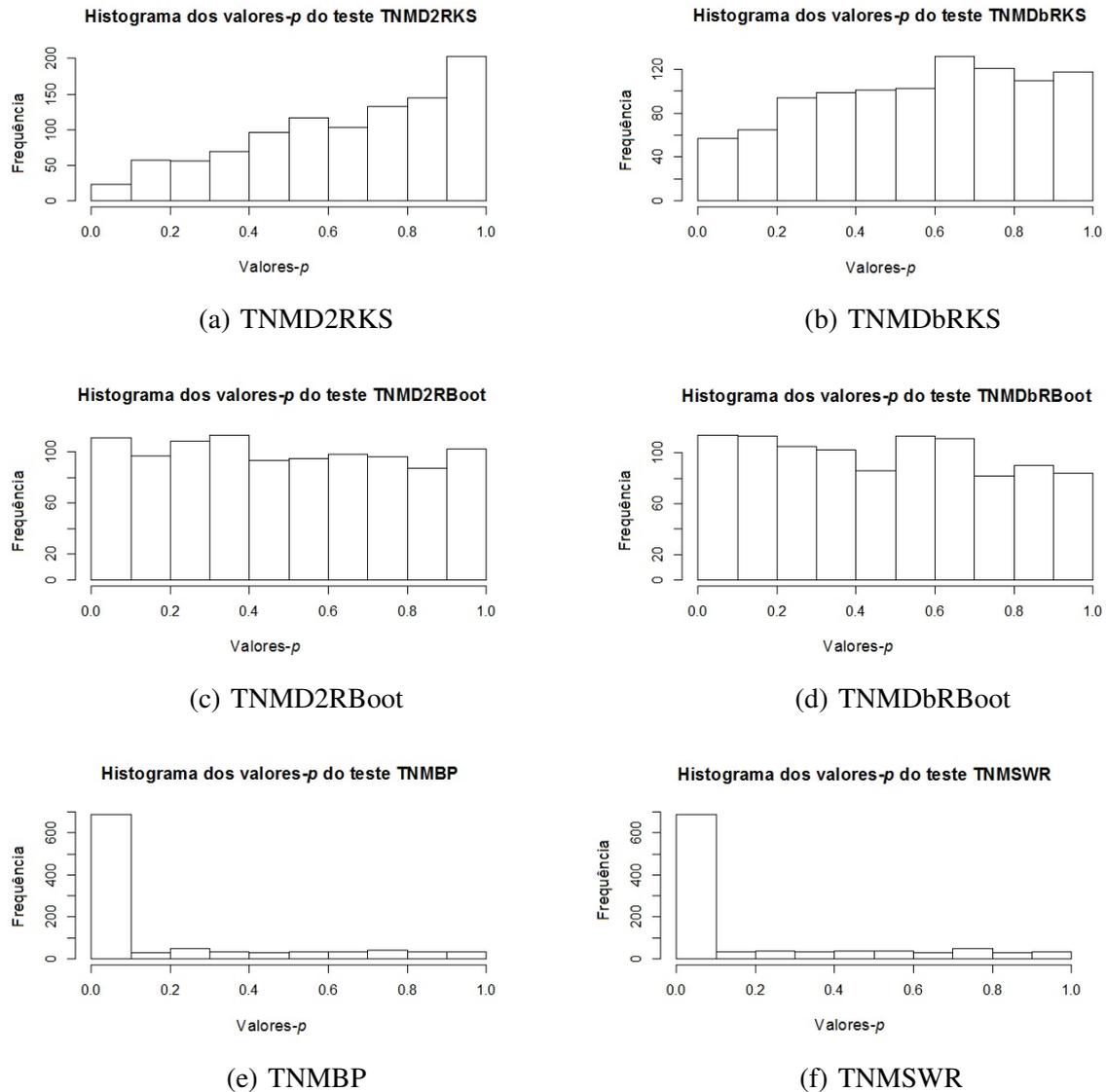


(f) TNMSWR

o poder dos testes melhoram com o aumento do tamanho amostral. Uma outra característica apresentada pelos testes é referente a correlação, em que, os testes apresentaram, no geral, uma redução no poder com o aumento da correlação, sendo que os testes TNMBP e TNMSWR são os que mais sofrem com as reduções.

Os testes TNMD2RKS e TNMDbRKS, na maioria das situações considerando variáveis não correlacionadas ($\rho = 0,0$) não foram melhores que os demais, com exceção dos casos $n = 30$ com $p = 14$ e 15 , em que o teste TNMDbRKS apresentou maior poder dentre todos os testes. Apesar de não apresentarem os melhores valores de poder, se mostram muito próximos ou com igual poder, em comparação com os demais testes. Os testes exibiram baixo poder nas

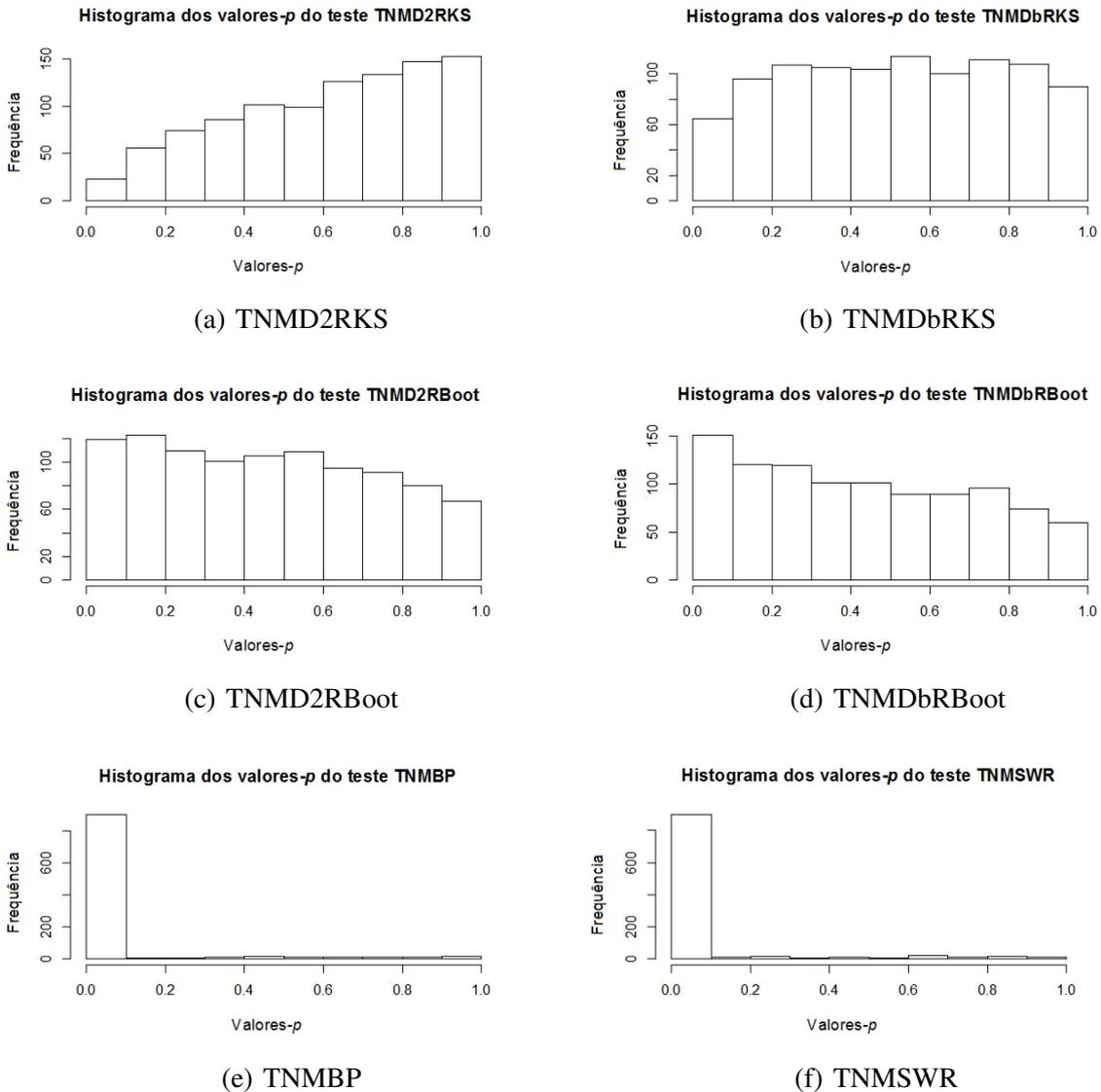
Figura 4.2 – Histograma dos valores- p sob distribuição normal multivariada com presença de 1% de *outliers*, considerando a situação $n = 100$ com $p = 10$ e $\rho = 0,0$ dos testes TNMD2RKS, TNMDbRKS, TNMD2RBoot, TNMDbRBoot, TNMBP e TNMSWR.



situações com n pequeno, como em $n = 10$ com $p = 2$ e $n = 30$ com $p = 2$, a partir de $n = 30$ com $p = 10$ o poder dos testes obtiveram um aumento considerável, com poder de 76,9% para TNMD2RKS e 93,60% para TNMDbRKS. Nos casos com $n = 100$ o poder do teste para $p = 2$ apresenta um poder de 52,10%, e com o aumento do número de variáveis o poder melhora, atingindo 100% de poder a partir de $p = 10$.

Os casos considerando correlação $\rho = 0,90$, os testes TNMD2RKS e TNMDbRKS apresentaram comportamentos semelhantes aos casos sem correlação, apresentando uma leve redução no poder nas situações $n = 10$ e 30 para todos os valores de p considerados e $n = 100$ com $p = 2$. Um exemplo desta redução pode ser observada para o teste TNMD2RKS, na si-

Figura 4.3 – Histograma dos valores- p sob distribuição normal multivariada com presença de 2% de *outliers*, considerando a situação $n = 100$ com $p = 10$ e $\rho = 0,0$ dos testes TNMD2RKS, TNMDbRKS, TNMD2RBoot, TNMDbRBoot, TNMBP e TNMSWR.



tuação $n = 30$ com $p = 14$ para $\rho = 0,00$ obteve taxa de erro tipo I com valor 0,9000 e para $\rho = 0,90$ com valor 0,8880. Para o teste TNMDbRKS na mesma situação $n = 30$ com $p = 14$ para $\rho = 0,00$ obteve valor 0,9950 e para $\rho = 0,90$ com valor 0,9900. Nas situações a partir de $n = 100$ com $p = 10$ os dois testes apresentaram mesmo poder com taxas de erro tipo I de 1,000, para os dois valores de ρ .

Para TNMD2RBoot e TNMDbRBoot sem correlação ($\rho = 0,00$), os resultados são similares, em que, nas situações com n pequeno, apresentaram baixo poder assim como os outros testes avaliados. Mas, a partir da situação com $n = 30$ com $p = 10$, observa-se que os dois testes apresentaram bom desempenho de poder, em que, a partir de $n = 100$ com $p = 10$ os testes

atingem 100% de poder. Quanto aos dois testes é importante salientar que o poder aumenta com o aumento do número de variáveis, como por exemplo, na situação $n = 30$ com $p = 15$, observa-se um poder de 96,60% para TNMD2RBoot e 90,90% para TNMDbRBoot, passando para a situação com $n = 100$ com $p = 2$ mesmo com o aumento do tamanho amostral o poder é mais baixo, 76,40% para TNMD2RBoot e 78% para TNMDbRBoot, e para este mesmo tamanho amostral com $p = 10$ apresenta 100% de poder. Em relação aos casos com alta correlação ($\rho = 0,90$), os testes TNMD2RBoot e TNMDbRBoot, apresentaram uma leve redução no poder nas situações $n = 10$ e 30 para todos os valores de p e $n = 100$ com $p = 2$, nas demais situações atingiram 100% de poder.

O TNMBP em boa parte das situações de n e p com $\rho = 0,00$, considerando $\alpha = 10\%$ obteve melhor desempenho em relação aos demais testes, apesar da grande proximidade de poder dos outros. Porém, assim como os outros testes apresentou baixo poder em pequenos tamanhos amostrais. Em relação as situações altamente correlacionadas ($\rho = 0,90$), apresentou uma redução no poder. Porém, diferentemente dos testes propostos, em algumas situações a redução foi de aproximadamente 27%, como por exemplo, em $n = 30$ com $p = 10$ para $\rho = 0,00$ o teste apresentou 97,70% de poder e para $\rho = 0,90$ poder de 70,70%. O TNMSWR, apresentou comportamento similar ao teste TNMBP, ou seja, para os casos com $\rho = 0,90$ apresentou uma redução no poder, porém esta diferença foi maior que no teste TNMBP, chegando a até 30% de perda no poder. Os testes TNMBP e TNMSWR, atingiram 100% de desempenho para $\rho = 0,00$ a partir de $n = 100$ com $p = 10$ e para $\rho = 0,90$ a partir de $n = 1000$.

É importante destacar que a *t-Student*, assim como a normal tem forma de hipersino, mas reflete maior variabilidade, apresentando assim curvas mais alargadas, o que é de se esperar em amostras pequenas. Desta forma, quanto maior o grau de liberdade, mais a distribuição *t-Student* se aproxima da normal. Assim sendo, na simulação utilizou-se $\nu = 3$ graus de liberdade, o que resulta em uma distribuição com características diferentes da normal multivariada.

Assim sendo, para amostras de tamanho e dimensões pequenas, $n = 10$ e 30 com $p = 2$ para os dois valores de ρ os testes TNMD2RKS, TNMDbRKS, TNMD2RBoot e TNMDbRBoot apresentam baixo poder. Desta forma, para pequenos tamanhos amostrais com baixos números de variáveis os testes não são recomendados. Nestas mesmas situações TNMBP e TNMSWR obtiveram um comportamento semelhante, apresentando baixo poder, porém, um pouco melhor em torno de 30% para $n = 10$, $p = 2$ com $\rho = 0,00$ e $0,90$, 70% para $n = 30$, $p = 2$ com $\rho = 0,00$ e 60% para $n = 30$, $p = 2$ com $\rho = 0,90$, valores que são acima do valor

nominal. Para amostras grandes, elevadas dimensões e variáveis não correlacionadas, as taxas de todos os testes foram de 100%. Já para $\rho = 0,90$, os testes propostos atingiram 100% de poder para $n = 100$ e 1000 e os referencias para $n = 1000$. Os testes propostos podem ser considerados, adequados para a maior parte das situações apresentadas.

Os resultados do poder para distribuição *t-Student* considerando $\alpha = 10\%$ (Tabela 4.8), foram comparados com o teste Monte Carlo de normalidade multivariada baseado em distâncias proposto por Biase (2011). Porém, a autora considerou a distribuição *t-student* com $\nu = 1$ grau de liberdade, e neste trabalho foi utilizado $\nu = 3$ graus de liberdade. Para os dois casos a distribuição *t-Student* multivariada considerando $\nu = 1$ ou 3 graus de liberdade é uma distribuição bem diferenciada da normal multivariada. Para a situação $n = 10$ com $p = 2$ todos os testes não apresentaram bom poder, não mostrando bons resultados em amostras pequenas. Entretanto, para o tamanho amostral de $n = 100$ com $p = 10$ e 50, observa-se uma concordância entre os dois trabalhos, nos quais todos os testes apresentaram poder máximo, ou seja, 100% de poder.

Na Tabela 4.9 tem-se o poder dos testes TNMD2RKS, TNMDbRKS, TNMD2RBoot, TNMDbRBoot, TNMBP e TNMSWR considerando a distribuição *t-Student* multivariada com $\nu = 3$ graus de liberdade, para o nível de significância $\alpha = 5\%$. Um comportamento inerente a todos os testes avaliados é referente a uma redução no poder quando a correlação passa de $\rho = 0,00$ para $\rho = 0,90$. Outro comportamento apresentado por todos os testes é referente aos tamanhos amostrais n pequeno, em que, os valores de poder foram muito baixos, principalmente para TNMD2RKS e TNMDbRKS, os quais apresentaram valores de poder abaixo do nível nominal, não tendo um desempenho satisfatório para n pequeno.

O TNMD2RKS, apresentou os valores de poder mais baixos nas situações de $n = 10$ e 30 para todos os valores de p considerados e em $n = 100$ com $p = 2$, considerando $\rho = 0,00$, nas mesmas situações de n e p porém com $\rho = 0,90$ o teste apresentou um leve redução no desempenho, entretanto não foi o teste com menor poder, superando os testes referencias. Nas outras configurações de n , p e ρ o teste atingiu 100% de poder. O TNMDbRKS, assim como TNMD2RKS apresentou baixo poder para $n = 10$ e 30 com $p = 2$ para $\rho = 0,0$ e 0,90, obtendo valores muito próximos do valor nominal. A partir do caso $n = 30$ com $p = 10$ tanto para $\rho = 0,0$ e 0,90 o poder aumentou consideravelmente com valores de poder acima de 84%, atingindo 100% de poder a partir da situação $n = 100$ com $p = 10$. Para TNMD2RKS e TNMDbRKS, observa-se uma redução no poder na situação $n = 100$ com $p = 2$, em que, mesmo para n grande

Tabela 4.8 – Poder dos testes, considerando a distribuição *t-Student* com $\nu = 3$ graus de liberdade em função de n , p e das correlações $\rho = 0,0$ e $0,90$ ao nível de 10% de significância.

n	p	10%					
		TNMD2RKS	TNMDbRKS	TNMD2RBoot	TNMDbRBoot	TNMBP	TNMSWR
$\rho = 0,00$							
10	2	0,0340	0,0710	0,1370	0,1460	0,3670	0,3360
30	2	0,1280	0,1700	0,3020	0,3440	0,7490	0,7000
	10	0,7690	0,9360	0,9170	0,9020	0,9770	0,9560
	14	0,9000	0,9950	0,9690	0,9090	0,9860	0,9740
	15	0,8990	0,9930	0,9660	0,9090	0,9930	0,9790
100	2	0,5210	0,5640	0,7640	0,7800	0,9880	0,9770
	10	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
	30	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
	48	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
	50	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
1000	2	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
	10	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
	30	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
	50	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
$\rho = 0,90$							
10	2	0,0330	0,0570	0,1140	0,1430	0,3240	0,2870
30	2	0,1220	0,1590	0,2950	0,3230	0,6580	0,5790
	10	0,7670	0,9460	0,9280	0,9070	0,7070	0,6530
	14	0,8880	0,9900	0,9580	0,9070	0,7270	0,6520
	15	0,9020	0,9960	0,9630	0,9110	0,7300	0,6430
100	2	0,5180	0,5690	0,7590	0,7780	0,9630	0,9400
	10	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	0,9840	0,9780
	30	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	0,9890	0,9820
	48	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	0,9830	0,9760
	50	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	0,9820	0,9690
1000	2	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
	10	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
	30	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
	50	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000

o número de variáveis influencia muito no poder dos testes. Este mesmo fato é observado nos testes TNMD2RBoot, TNMDbRBoot e TNMBP, sendo neste último uma leve redução.

Em relação ao TNMD2RBoot e TNMDbRBoot, para as alternativas $n = 10$ com $\rho = 0,0$ e $0,90$ apresentou taxa de poder muito próximas do nível nominal. Logo, em pequeno tama-

nho amostral apresentaram baixo poder. Para as alternativas $n = 30$ com p a partir de 10 para $\rho = 0,0$ e $0,90$, observa-se um aumento nos valores de poder, obtendo assim um desempenho mais satisfatório, porém, não ideal. Já nas alternativas a partir de $n = 100$ com $p = 10$ os testes apresentaram um ótimo desempenho, apresentando 100% de poder, considerando os dois valores de ρ . O TNMBP em todas as situações de n e p , considerando $\alpha = 5\%$, obteve o melhor desempenho para os casos com $\rho = 0,00$. O teste TNMSWR, assim como TNMBP, apresentou bom desempenho na maioria das situações avaliadas, com valores de poder bem próximos ou iguais aos de TNMBP para as situações com $\rho = 0,00$. Já nos casos com variáveis altamente correlacionadas, o TNMBP e TNMSWR tiveram uma grande redução no desempenho, principalmente nos casos com $n = 30$.

Considerando $\alpha = 5\%$ para a distribuição *t-Student* multivariada, comparando os resultados do poder dos testes TNMD2RKS, TNMDbRKS, TNMD2RBoot, TNMDbRBoot, TNMBP e TNMSWR, apresentados na Tabela 4.9, com os avaliados por Silva (2009) e Oliveira e Ferreira (2010). É importante salientar que o número de graus de liberdade e de simulações Monte Carlo, utilizados neste trabalho difere dos outros dois trabalhos, os quais, utilizaram a distribuição *t-Student* com $\nu = 1$ grau de liberdade, com 2000 simulações Monte Carlo, e neste trabalho foi considerada a distribuição *t-Student* com $\nu = 3$ graus de liberdade e 1000 simulações. Entretanto, para os dois valores de ν assumidos a distribuição *t-Student* difere da distribuição normal multivariada, sendo a *t-Student* com $\nu = 1$, um pouco mais distinta.

Desta forma, para a situação com pequeno tamanho amostral, $n = 10$ e $p = 2$, o teste qui-quadrado de Pearson multivariado e o teste conjunto de assimetria e curtose, avaliados por Oliveira e Ferreira (2010), foram superiores quanto ao poder em relação aos testes TNMD2RKS, TNMDbRKS, TNMD2RBoot, TNMDbRBoot, TNMBP e TNMSWR (Tabela 4.9). Para as situações com amostras de tamanho 30 e 100 com poucas variáveis, ou seja, $n = 30$ e 100 com $p = 2$, os testes TNMD2RKS, TNMDbRKS, TNMD2RBoot e TNMDbRBoot, foram superados em poder pelo teste de Shapiro-Francia multivariado de Silva (2009), nas duas situações, e pelo teste quiquadrado de Pearson multivariado e o teste conjunto de assimetria e curtose na circunstância $n = 100$ com $p = 2$.

Para os casos $n = 100$ com $p = 10$ e 50 e $n = 1000$ com $p = 10$ os testes avaliados neste trabalho TNMD2RKS, TNMDbRKS, TNMD2RBoot, TNMDbRBoot, TNMBP e TNMSWR, o Shapiro-Francia multivariado, proposto e verificado por Silva (2009), e os avaliados por Oliveira

e Ferreira (2010) o teste quiquadrado de Pearson multivariado e o teste conjunto de assimetria e curtose, obtiveram excelente desempenho, com valores de poder de 100%.

Tabela 4.9 – Poder dos testes, considerando a distribuição *t-Student* com $\nu = 3$ graus de liberdade em função de n , p e das correlações $\rho = 0,0$ e $0,90$ ao nível de 5% de significância.

n	p	5%					
		TNMD2RKS	TNMDbRKS	TNMD2RBoot	TNMDbRBoot	TNMBP	TNMSWR
$\rho = 0,00$							
10	2	0,0010	0,0030	0,0700	0,0890	0,2800	0,2500
30	2	0,0560	0,0840	0,1990	0,2310	0,6810	0,6320
	10	0,5830	0,8460	0,8420	0,8130	0,9660	0,9330
	14	0,7550	0,9780	0,9240	0,8420	0,9790	0,9670
	15	0,7630	0,9780	0,9250	0,8060	0,9890	0,9630
100	2	0,3710	0,4110	0,6260	0,6600	0,9800	0,9720
	10	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
	30	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
	48	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
	50	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
1000	2	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
	10	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
	30	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
	50	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
$\rho = 0,90$							
10	2	0,0000	0,0000	0,0540	0,0770	0,2420	0,2180
30	2	0,0640	0,0860	0,1950	0,2180	0,5550	0,4940
	10	0,5760	0,8600	0,8530	0,8070	0,6380	0,5950
	14	0,7620	0,9740	0,9050	0,8220	0,6280	0,5750
	15	0,7760	0,9850	0,9120	0,8150	0,6310	0,5830
100	2	0,3620	0,4160	0,6190	0,6480	0,9380	0,9060
	10	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	0,9770	0,9650
	30	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	0,9800	0,9690
	48	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	0,9690	0,9670
	50	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	0,9680	0,9580
1000	2	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
	10	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
	30	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
	50	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000

Para o caso de $\alpha = 1\%$, apresentados na Tabela 4.10, considerando a distribuição *t-Student* multivariada com $\nu = 3$ graus de liberdade, o padrão do comportamento dos testes

quanto ao poder foi similar ao observado para $\alpha = 10\%$ e 5% . Portanto, o TNMBP apresentou poder superior ou igual aos testes propostos, nas situações de n e p consideradas com $\rho = 0,00$, já com $\rho = 0,90$ o teste mais poderoso na maioria das situações é o TNMD2RBoot. O que se observa é uma diminuição do poder, como esperado pela redução de α , no caso dos testes propostos, nas situações com $n = 10, 30$ para todos os valores de p avaliados e $n = 100$ com $p = 2$ para os dois valores de ρ , essa diminuição fica em torno de 30% , um valor considerável, mas nas situações a partir de $n = 100$ com $p = 10$ todos os testes apresentam 100% de poder.

Verificando o comportamento dos resultados do poder dos testes apresentados na Tabela 4.10, em comparação com os avaliados por Oliveira e Ferreira (2010), nas circunstâncias $n = 10$ com $p = 2$, $n = 100$ com $p = 2, 10$ e 50 . Para o caso com tamanho de amostra pequena, $n = 10$ com $p = 2$, todos os testes deste trabalho e os do outro trabalho considerado apresentaram baixo poder, e o teste conjunto de assimetria e curtose foi o que apresentou o maior poder. Porém, deve-se levar em conta que neste caso os resultados são referentes a distribuição *t-Student* com $\nu = 1$ graus de liberdade.

Para as outras circunstâncias consideradas na comparação, $n = 100$ com $p = 2, 10$ e 50 , o teste quiquadrado de Pearson multivariado e o teste conjunto de assimetria e curtose obtiveram poder máximo, em todas as situações comparadas. E os testes TNMD2RKS, TNMDbRKS, TNMD2RBoot, TNMDbRBoot, TNMBP e TNMSWR também apresentaram poder máximo de 100% ou de aproximadamente 100% de poder, com exceção da situação $n = 100$ com $p = 2$ para os testes TNMD2RKS, TNMDbRKS, TNMD2RBoot e TNMDbRBoot, os quais apresentaram baixo poder.

As estimativas de poder dos testes TNMD2RKS, TNMDbRKS, TNMD2RBoot, TNMDbRBoot, TNMBP e TNMSWR, considerando a distribuição log-normal multivariada em função de n e p , são apresentados nas Tabelas 4.11, 4.12 e 4.13, para os níveis de significância $\alpha = 10\%$, 5% e 1% , respectivamente. Para $\alpha = 10\%$ (Tabela 4.11), todos os testes propostos apresentaram baixo poder para pequenas amostras, $n = 10$ com $p = 2$, não tendo um desempenho satisfatório. Entretanto, o poder dos testes apresenta melhora com o aumento do tamanho amostral. Os testes propostos também apresentaram melhora nos casos com variáveis altamente correlacionadas ($\rho = 0,90$).

O TNMD2RKS e TNMDbRKS, apresentaram resultados próximos ou iguais, sendo que, na situação com $n = 10$ com $\rho = 0,0$ e $0,90$ os testes se mostraram com baixo poder, com valores próximos ao nível nominal. Para $n = 30$ com $p = 2$ para $\rho = 0,00$, observa-se um

Tabela 4.10 – Poder dos testes, considerando a distribuição *t-Student* com $\nu = 3$ graus de liberdade em função de n , p e das correlações $\rho = 0,0$ e $0,90$ ao nível de 1% de significância.

n	p	1%					
		TNMD2RKS	TNMDbRKS	TNMD2RBoot	TNMDbRBoot	TNMBP	TNMSWR
$\rho = 0,00$							
10	2	0,0000	0,0000	0,0170	0,0130	0,1420	0,1370
30	2	0,0130	0,0200	0,0560	0,0700	0,5400	0,4920
	10	0,2350	0,5380	0,5960	0,5080	0,9300	0,8930
	14	0,4040	0,8460	0,7130	0,5450	0,9630	0,9220
	15	0,3920	0,8770	0,7050	0,4950	0,9660	0,9360
100	2	0,1290	0,1510	0,3630	0,3830	0,9560	0,9280
	10	0,9930	0,9980	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
	30	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
	48	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
	50	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
1000	2	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
	10	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
	30	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
	50	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
$\rho = 0,90$							
10	2	0,0000	0,0000	0,0190	0,0070	0,1110	0,1110
30	2	0,0150	0,0200	0,0670	0,0750	0,3980	0,3800
	10	0,2440	0,5370	0,5730	0,5050	0,4630	0,4770
	14	0,4160	0,8330	0,7060	0,5260	0,4710	0,4780
	15	0,4480	0,8800	0,7040	0,5090	0,4510	0,4630
100	2	0,1250	0,1450	0,3580	0,3830	0,8650	0,8510
	10	0,9950	0,9980	1,0000	1,0000	0,9200	0,9220
	30	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	0,9450	0,9440
	48	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	0,9240	0,9320
	50	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	0,9250	0,9270
1000	2	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
	10	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
	30	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
	50	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000

aumento de poder expressivo, os testes apresentam poder em torno de 63%, e para $\rho = 0,90$ o poder dos dois testes aumentam consideravelmente, ficando em torno de 80%. Considerando $n = 30$ para os demais valores de p para os dois valores de ρ , os dois testes apresentam bom poder, com valores superiores a 90% para $\rho = 0,00$, e atingindo 100% de poder em algumas

situações com $\rho = 0,90$. O TNMD2RKS e TNMDbRKS nas situações a partir de $n = 100$ com $p = 10$ para $\rho = 0,00$ e $n = 30$ com $p = 14$ para $\rho = 0,90$ obtiveram 100% de poder. Desta forma, o desempenho dos testes melhoram com o aumento do tamanho amostral, do número de variáveis e do valor de correlação entre as variáveis.

Os testes TNMD2RBoot e TNMDbRBoot, apresentaram resultados similares, os quais, para a situação de $n = 10$ com $p = 2$ para os dois valores de ρ observa-se resultados em torno de 30% de poder. Com o aumento do tamanho amostral para 30 com $p = 2$, os testes obtiveram um aumento considerável no poder, apresentando os valores acima de 80% para $\rho = 0,00$ e aproximadamente 90% de poder para $\rho = 0,90$. Nas situações a partir de $n = 30$ com $p = 10$ os testes apresentam valores superiores a 95% de poder para $\rho = 0,00$ e em $\rho = 0,90$ atingem 100% de poder. Nas situações com $n = 100$ e 1000 para os dois valores de correlação os dois testes apresentam poder máximo, ou seja, 100% de poder.

Os testes referência, TNMBP e TNMSWR, nas situações de $n = 10$ e 30 com $\rho = 0,00$, considerando $\alpha = 10\%$ obtiveram os melhores desempenhos em relação aos testes propostos, principalmente em $n = 10$, obtendo valores próximos de 85% de poder. Nos casos com alto valor de correlação ($\rho = 0,90$) e baixos tamanhos amostrais $n = 10$ e 30 com $p = 2$, ao contrario dos testes propostos que obtiveram uma elevação no poder, o TNMBP e TNMSWR apresentaram uma leve perda de poder. Nas demais situações os testes atingiram desempenho máximo, ou seja, 100% de poder.

Em comparação com outros testes de normalidade multivariada, buscou-se fazer um comparativo com algumas situações apropriadas entre os resultados dos testes da Tabela 4.11, com o teste Monte Carlo de normalidade multivariada baseado em distâncias proposto por Biase (2011). No caso $n = 10$ com $p = 2$, os testes TNMBP e TNMSWR superaram em poder os testes TNMD2RKS, TNMDbRKS, TNMD2RBoot, TNMDbRBoot e o teste Monte Carlo de normalidade multivariada baseado em distâncias, os quais, não apresentaram bom desempenho. Para o tamanho de amostra 100 com os números de variáveis 2, 10 e 50, todos os testes avaliados neste trabalho e o proposto por Biase (2011), apresentaram 100% de poder ou aproximadamente 100%.

Para $\alpha = 5\%$ (Tabela 4.12), TNMD2RKS em comparação com os demais testes foi o que obteve os menores valores de poder para $n = 10$ e 30 com $\rho = 0,00$, já para $\rho = 0,90$ o poder do teste melhora se igualando aos demais, exceto em $n = 10$ e 30 com $p = 2$. O teste atinge poder máximo para $\rho = 0,00$ a partir de $n = 100$ com $p = 10$ e $\rho = 0,90$ a partir de $n = 30$

Tabela 4.11 – Poder dos testes, considerando a distribuição Log-Normal em função de n , p e das correlações $\rho = 0,0$ e $0,90$ ao nível de 10% de significância.

n	p	10%					
		TNMD2RKS	TNMDbRKS	TNMD2RBoot	TNMDbRBoot	TNMBP	TNMSWR
$\rho = 0,00$							
10	2	0,0980	0,1740	0,3070	0,2970	0,8470	0,8610
30	2	0,6390	0,6780	0,8050	0,8220	1,0000	1,0000
	10	0,9230	0,9880	0,9840	0,9790	1,0000	1,0000
	14	0,9540	0,9970	0,9850	0,9590	1,0000	1,0000
	15	0,9690	1,0000	0,9940	0,9680	1,0000	1,0000
100	2	0,9980	0,9980	0,9990	1,0000	1,0000	1,0000
	10	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
	30	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
	48	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
	50	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
1000	2	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
	10	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
	30	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
	50	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
$\rho = 0,90$							
10	2	0,1450	0,2300	0,3620	0,3420	0,7780	0,7870
30	2	0,7830	0,8200	0,8990	0,9120	0,9990	0,9990
	10	0,9980	0,9990	1,0000	0,9990	1,0000	1,0000
	14	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
	15	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
100	2	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
	10	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
	30	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
	48	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
	50	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
1000	2	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
	10	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
	30	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
	50	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000

com $p = 14$. O TNMDbRKS, obteve comportamento similar ao teste TNMD2RKS, com um aumento no poder com a elevação do número de variáveis e correlação $\rho = 0,90$. Desta forma, com exceção dos casos $n = 10$ e 30 com $p = 2$, o teste apresentou poder superior a 95% e 100% nas situações com $n = 100$ e 1000 , para as duas circunstancias de ρ .

No caso dos testes TNMD2RBoot e TNMDbRBoot, observa-se baixo poder para $n = 10$, considerando $\rho = 0,00$ e $\rho = 0,90$ apesar de uma leve melhora com variáveis correlacionadas. O aumento do tamanho amostral fez com que o poder passasse a ser moderado, na situação $n = 30$ com $p = 2$, apresentando valores de poder em torno de 70% para $\rho = 0,00$ e 85% para $\rho = 0,90$. Para as demais situações analisadas os dois testes apresentaram bom poder, com valores superiores a 92% de poder, atingindo 100% nos casos a partir de $n = 100$ com $p = 10$. Já TNMBP e TNMSWR, em todas as situações consideradas obtiveram ótimo desempenho. A partir de $n = 30$ com $p = 2$, os dois testes atingiram poder máximo de 100% ou aproximadamente de 100%.

Fazendo um paralelo dos testes avaliados neste trabalho, considerando a distribuição log-normal, com outros testes encontrados na literatura, o teste Shapiro-Francia multivariado, avaliado por Silva (2009), o teste quiquadrado de Pearson multivariado, o teste conjunto de assimetria e curtose, avaliados por Oliveira e Ferreira (2010) e o teste Monte Carlo de normalidade multivariada baseado em distâncias proposto por (BIASE; FERREIRA, 2012). No caso dos resultados mostrados na Tabela 4.12, observa-se que em pequenas amostras, $n = 10$ com $p = 2$, os testes propostos TNMD2RKS, TNMDbRKS, TNMD2RBoot e TNMDbRBoot e o teste Monte Carlo de normalidade multivariada baseado em distâncias apresentaram os piores valores de poder, sendo superados por TNMBP, TNMSWR, teste quiquadrado de Pearson multivariado e o teste conjunto de assimetria e curtose, sendo este último o que apresentou maior poder.

Para a situação $n = 30$ com $p = 2$ e 10, o teste de Shapiro-Francia multivariado apresentou os mesmos valores de poder dos testes TNMBP e TNMSWR de 100% de poder, valores superiores aos obtidos por TNMD2RKS, TNMDbRKS, TNMD2RBoot e TNMDbRBoot, em que os dois primeiros obtiveram baixo poder e os dois últimos poder moderado. Entretanto, nas situações $n = 100$ com $p = 2, 10$ e 50 e $n = 1000$ com $p = 2$ e 10, todos os testes citados acima apresentaram poder máximo de 100%, ou poder aproximadamente 100%.

Na Tabela 4.13, estão apresentados os valores dos poderes de todos os testes avaliados, considerando a distribuição log-normal, para $\alpha = 1\%$. Neste caso, todos os testes, apresentaram padrão de desempenho semelhante ao padrão de desempenho considerando $\alpha = 10\%$ e 5%. O que se observa é uma redução do poder, o que é esperado devido a redução de α .

O poder dos testes TNMD2RKS, TNMDbRKS, TNMD2RBoot, TNMDbRBoot, TNMBP e TNMSWR, considerando a normal contaminada foi avaliado em três casos. O primeiro caso, a distribuição considerada foi a normal contaminada com $(1 - \delta) = 20\%$ de contaminação

Tabela 4.12 – Poder dos testes, considerando a distribuição Log-Normal em função de n , p e das correlações $\rho = 0,0$ e $0,90$ ao nível de 5% de significância.

n	p	5%					
		TNMD2RKS	TNMDbRKS	TNMD2RBoot	TNMDbRBoot	TNMBP	TNMSWR
$\rho = 0,00$							
10	2	0,0040	0,0040	0,1850	0,2100	0,7900	0,8020
30	2	0,4800	0,5370	0,7090	0,7270	1,0000	1,0000
	10	0,8050	0,9570	0,9620	0,9440	1,0000	1,0000
	14	0,8860	0,9850	0,9700	0,9300	1,0000	1,0000
	15	0,9020	0,9990	0,9740	0,9200	1,0000	1,0000
100	2	0,9890	0,9940	0,9980	0,9980	1,0000	1,0000
	10	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
	30	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
	48	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
	50	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
1000	2	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
	10	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
	30	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
	50	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
$\rho = 0,90$							
10	2	0,0060	0,0060	0,2360	0,2630	0,6900	0,7020
30	2	0,6460	0,7010	0,8410	0,8610	0,9990	0,9990
	10	0,9900	0,9990	1,0000	0,9980	1,0000	1,0000
	14	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
	15	1,0000	1,0000	1,0000	0,9970	1,0000	1,0000
100	2	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
	10	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
	30	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
	48	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
	50	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
1000	2	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
	10	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
	30	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
	50	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000

com mesmo vetor de médias $\boldsymbol{\mu}_1 = \boldsymbol{\mu}_2$ e matrizes de covariâncias tais que $|\boldsymbol{\Sigma}_1| < |\boldsymbol{\Sigma}_2|$. Os testes foram avaliados para os níveis de significância de $\alpha = 10\%$, 5% e 1% .

Na Tabela 4.14, estão apresentados os valores de poder dos testes considerando a distribuição normal contaminada multivariada para $\alpha = 5\%$. O teste TNMD2RKS apresentou

Tabela 4.13 – Poder dos testes, considerando a distribuição Log-Normal em função de n , p e das correlações $\rho = 0,0$ e $0,90$ ao nível de 1% de significância.

n	p	1%					
		TNMD2RKS	TNMDbRKS	TNMD2RBoot	TNMDbRBoot	TNMBP	TNMSWR
$\rho = 0,00$							
10	2	0,0000	0,0000	0,0760	0,0600	0,6060	0,6430
30	2	0,2150	0,2530	0,4840	0,5130	0,9990	1,0000
	10	0,4860	0,7590	0,8220	0,7420	1,0000	1,0000
	14	0,5760	0,9240	0,8620	0,7110	1,0000	1,0000
	15	0,6110	0,9510	0,8670	0,6760	1,0000	1,0000
100	2	0,9590	0,9670	0,9910	0,9910	1,0000	1,0000
	10	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
	30	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
	48	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
	50	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
1000	2	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
	10	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
	30	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
	50	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
$\rho = 0,90$							
10	2	0,0000	0,0000	0,0860	0,0470	0,4760	0,5170
30	2	0,3580	0,4120	0,6460	0,6620	0,9860	0,9960
	10	0,9440	0,9860	0,9920	0,9810	1,0000	1,0000
	14	0,9790	1,0000	1,0000	0,9710	1,0000	1,0000
	15	0,9820	1,0000	1,0000	0,9730	1,0000	1,0000
100	2	0,9920	0,9950	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
	10	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
	30	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
	48	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
	50	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
1000	2	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
	10	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
	30	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
	50	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000

baixo poder, em todas as situações avaliadas, com valores de poder inferior ao nível nominal. Este caso, apresentou apenas duas situações com valor de poder superior ao nível nominal, $n = 1000$ com $p = 2$ para $\rho = 0,00$ e $0,90$, os quais, obtiveram 44% de poder. Mesmo assim,

o TNMD2RKS não apresentou bom desempenho nestas situações, como nas outras situações avaliadas.

O TNMDbRKS apresentou poder moderado nas situações $n = 100$ com $p = 48$ e 50 para os dois valores de $\rho = 0,00$ e $0,90$, com valores de poder superior a 70% . Nas demais situações o teste apresentou baixo poder, em que na maioria das situações os valores de poder foram abaixo do nível nominal. Quanto aos testes TNMD2RBoot e TNMDbRBoot, na situação $n = 1000$ com $p = 2$ para $\rho = 0,00$ e $0,90$, apresentaram um poder moderado, com valores de poder em torno de 70% . Para as outras situações os dois testes apresentaram baixo poder, com valores de poder inferiores ou muito próximos ao nível nominal.

Os testes TNMBP e TNMSWR, na maioria das situações obtiveram baixo poder. No caso $n = 100$, $p = 2$ com $\rho = 0,00$ os testes apresentaram poder de $49,20\%$ para TNMBP e $41,10\%$ para TNMSWR, e em $n = 1000$, $p = 2$ com $\rho = 0,00$, os testes apresentaram poder máximo, ou seja, 100% de poder. Para $\rho = 0,90$ os dois testes apresentaram o mesmo comportamento observados nas situações com $\rho = 0,00$, apenas com uma redução no poder. Uma característica inerente a todos os testes propostos TNMD2RKS, TNMDbRKS, TNMD2RBoot e TNMDbRBoot e os testes utilizados como referência TNMBP e TNMSWR, fixando n , o poder diminui com o aumento do número de variáveis. Em algumas situações para valores de p que se aproximam de $\lfloor n/2 \rfloor$ o poder tende a aumentar. Por exemplo, para o teste TNMD2RKS para todas as situações com $n = 100$, o poder diminui até a opção de $p = 30$ e aumenta para $p = 48$ e 50 .

É conveniente salientar que a distribuição normal contaminada com vetor de médias $\boldsymbol{\mu}_1 = \boldsymbol{\mu}_2$ e matriz de covariâncias, tais que $|\boldsymbol{\Sigma}_1| < |\boldsymbol{\Sigma}_2|$, se assemelha com a normal multivariada. Desta forma, os testes apresentam baixo desempenho de poder, em quase todas as configurações de n e p , como esperado pela proximidade da distribuição contaminante. Com esta configuração de parâmetros, esta distribuição é um membro da família elíptica simétrica.

Os resultados referentes aos níveis de significância $\alpha = 10\%$, 1% apresentam um comportamento semelhante aos já detalhados (Tabela 4.14), em que se observa um aumento e diminuição do poder de acordo com α , o que se espera pela mudança de α . Desta forma, os resultados referentes aos níveis de significância de $\alpha = 10\%$, 1% , estão apresentadas no apêndice A.

No segundo caso, foi considerada a distribuição normal contaminada com $(1 - \delta) = 20\%$ de contaminação com vetor de médias $\boldsymbol{\mu}_1 = \mathbf{0}$ e $\boldsymbol{\mu}_2 = 10 \mathbf{1}$ e com mesma matriz de covariâncias,

Tabela 4.14 – Poder dos testes, considerando a distribuição Normal Contaminada com $(1 - \delta) = 20\%$ de contaminação com mesmo vetor de médias $\mu_1 = \mu_2$ e estruturas das matrizes de covariâncias diferentes $\Sigma_1 \neq \Sigma_2$ em função de n , p e das correlações $\rho = 0, 0$ e $0, 90$ ao nível de 5% de significância.

n	p	5%					
		TNMD2RKS	TNMDbRKS	TNMD2RBoot	TNMDbRBoot	TNMBP	TNMSWR
$\rho = 0, 00$							
10	2	0,0000	0,0000	0,0510	0,0530	0,1110	0,1030
30	2	0,0150	0,0190	0,0560	0,0680	0,2340	0,1990
	10	0,0070	0,0470	0,0430	0,0360	0,0610	0,0580
	14	0,0110	0,1780	0,0360	0,0430	0,0490	0,0550
	15	0,0110	0,2240	0,0430	0,0400	0,0420	0,0460
100	2	0,0270	0,0360	0,0990	0,1150	0,4920	0,4110
	10	0,0070	0,0130	0,0510	0,0580	0,0620	0,0570
	30	0,0060	0,1860	0,0350	0,0340	0,0540	0,0590
	48	0,0280	0,7310	0,0350	0,0340	0,0580	0,0560
	50	0,0290	0,7660	0,0370	0,0370	0,0550	0,0480
1000	2	0,4420	0,4660	0,7140	0,7210	1,0000	1,0000
	10	0,0230	0,0260	0,0780	0,0890	0,0850	0,0740
	30	0,0050	0,0250	0,0550	0,0500	0,0500	0,0800
	50	0,0100	0,0200	0,0400	0,0400	0,0600	0,0700
$\rho = 0, 90$							
10	2	0,0010	0,0020	0,0670	0,0750	0,1000	0,0870
30	2	0,0080	0,0110	0,0450	0,0550	0,1840	0,1680
	10	0,0070	0,0700	0,0500	0,0530	0,0440	0,0460
	14	0,0140	0,2270	0,0480	0,0480	0,0430	0,0420
	15	0,0150	0,2610	0,0390	0,0390	0,0610	0,0500
100	2	0,0300	0,0390	0,0990	0,1100	0,4200	0,3540
	10	0,0090	0,0190	0,0500	0,0580	0,0540	0,0550
	30	0,0170	0,1970	0,0460	0,0440	0,0460	0,0520
	48	0,0270	0,7380	0,0270	0,0280	0,0470	0,0460
	50	0,0220	0,8180	0,0150	0,0140	0,0400	0,0480
1000	2	0,4440	0,4590	0,7060	0,7190	0,9910	0,9880
	10	0,0220	0,0280	0,0920	0,0980	0,0730	0,0540
	30	0,0050	0,0000	0,0300	0,0300	0,0300	0,0250
	50	0,0000	0,0250	0,0400	0,0400	0,0500	0,0400

tais que $|\Sigma_1| = |\Sigma_2|$. Na Tabela 4.15 tem-se os resultados de poder dos testes considerando o nível de 5% de significância.

Os testes TNMD2RKS e TNMDbRKS, apresentaram comportamentos similares ou iguais, em todas as configurações de n , p e ρ considerados, sendo que nas situações que existem diferenças, o teste TNMDbRKS superou em poder o TNMD2RKS, porém em algumas situações apresentam uma pequena diferença. Por exemplo, no caso $n = 100$ com $p = 2$, considerando $\rho = 0,00$ o TNMD2RKS apresentou 97,10% de poder contra 97,40% do TNMDbRKS. Nas situações com $n = 30$ para os dois valores de ρ , a diferença aumenta, atingindo até 30%. Os dois testes nas situações com $n = 10$ com $p = 2$ e $n = 30$ com $p = 2$, tanto para $\rho = 0,00$ quanto para $\rho = 0,90$, apresentaram baixo poder, sendo que para $n = 10$ os valores estavam abaixo do valor nominal. Os testes atingem 100% de poder a partir das situações $n = 1000$ com $p = 2$ para TNMD2RKS e em $n = 100$ com $p = 48$ para TNMDbRKS.

O TNMD2RBoot, apresentou baixo poder na situação com $n = 10$, obtendo 16,80% de poder para $\rho = 0,00$ e 12% para $\rho = 0,90$. Com o aumento de n de 10 para 30 o poder do teste aumentou, passando a apresentar poder acima de 50% para os dois valores de ρ , porém, com valores não ideais. Já nas situações com $n = 100$ e 1000 o teste apresenta valores de poder iguais ou próximos de 100%. O TNMDbRBoot assim como TNMD2RBoot, apresentou baixo poder no caso de $n = 10$, e também obteve aumento no poder com o aumento de n . Na situação com $n = 30$, o TNMDbRBoot obteve poder em torno de 50%. Para os casos com $n = 100$ e 1000 o teste apresentou poder elevado, com valores de poder iguais ou próximos de 100%.

Os testes TNMBP e TNMSWR em boa parte das configurações de n , p e ρ apresentam mesmo valor de poder, exceto na situação $n = 10$. A partir de $n = 30$ com $p = 2$, os dois testes apresentaram desempenho de 100% ou aproximadamente 100%. Em todas as configurações o TNMBP e TNMSWR apresentaram os melhores desempenhos. Para esta distribuição, os testes TNMD2RBoot, TNMD2RBoot e TNMDbRBoot apresentam uma característica em comum, os quais, apresentaram uma redução no poder com o aumento de p . Por exemplo, considerando o teste TNMDbRBoot na situação $n = 100$, $p = 30$ com $\rho = 0,00$ obteve 97,20% de poder contra 88,70% para $p = 48$.

Para os níveis de significância $\alpha = 10\%$ e 1% , apresentam um comportamento semelhante aos já detalhados para $\alpha = 5\%$, com uma alteração no poder de acordo com o valor de α assumido. Desta forma, os resultados referentes aos níveis $\alpha = 10\%$, 1% de significância não foram discutidos, e seus resultados estão apresentados no apêndice A.

Os resultados do poder para a distribuição normal contaminada com $\alpha = 5\%$ foram comparados aos testes avaliados por Székely e Rizzo (2005). Porém existem duas diferença na

distribuição utilizadas na avaliação, que consiste no valor das médias adotadas pelos autores, em que foram considerados $\boldsymbol{\mu}_1 = \mathbf{0}$ e $\boldsymbol{\mu}_2 = 3\mathbf{1}$, enquanto que neste trabalho foram utilizadas $\boldsymbol{\mu}_1 = \mathbf{0}$ e $\boldsymbol{\mu}_2 = 10\mathbf{1}$. A outra diferença é relativa ao número de simulações Monte Carlo, sendo utilizadas por Székely e Rizzo (2005) 2000 e neste trabalho 1000.

Considerando a situação $n = 100$ com $p = 2$, os teste TNMD2RKS, TNMDbRKS, TNMD2RBoot, TNMDbRBoot, TNMBP e TNMSWR apresentaram poder máximo de 100%, ou aproximadamente 100%. O resultado do poder referente ao teste proposto por Székely e Rizzo (2005), também apresenta 100% de poder, e o teste de assimetria multivariada tem 94% de poder. Já o teste de curtose multivariado, observa-se o pior desempenho, com 7% de poder.

A última configuração verificada referente a distribuição normal contaminada multivariada com $(1 - \delta) = 20\%$ de contaminação tem como vetor de médias $\boldsymbol{\mu}_1 = \mathbf{0}$ e $\boldsymbol{\mu}_2 = 10\mathbf{1}$ e matrizes de covariâncias, tais que $|\boldsymbol{\Sigma}_1| < |\boldsymbol{\Sigma}_2|$. Na Tabela 4.16, tem-se os resultados de poder referente ao nível nominal de significância $\alpha = 5\%$. Para esta configuração de contaminação o teste TNMD2RKS para amostra pequena, $n = 10$, apresentou baixo poder, com valor igual a zero para $\rho = 0,00$ e 0,0020 para $\rho = 0,90$. Para o tamanho amostral, $n = 30$, considerando todos os valores de p e ρ , o teste não obteve um bom poder, com valores próximos de 40% de poder. Porém, aumentando o tamanho das amostras, $n = 100$, o poder do teste se aproximou de 100%, chegando a atingir 100% de poder para $n = 1000$.

O TNMDbRKS assim como TNMD2RKS, para amostra pequena, apresentou valor de poder de 0% para $\rho = 0,00$ e 0,3% para $\rho = 0,90$. No caso $n = 30$ com $p = 2$, o teste apresentou baixo poder, mas neste caso com valor de poder superior ao nível nominal. Por outro lado, fixado n , o aumento do número de variáveis aumentou o poder do teste, atingindo 80% de poder para $p = 15$ para os dois valores de ρ . O teste atinge poder máximo de 100% ou aproximadamente 100% nas situações com $n = 100$ e 1000, considerando todos os valores de p e ρ avaliados.

Os testes TNMD2RBoot e TNMDbRBoot, assim como os outros testes propostos, apresentou baixo poder para a situação $n = 10$. No caso de $n = 30$, os testes apresentaram um aumento no poder, e no caso do TNMD2RBoot aumentou ainda mais com o aumento do número de variáveis. Por outro lado, no teste TNMDbRBoot o aumento do número de variáveis ocasionou na redução do poder do teste, o mesmo ocorre para $n = 100$. Para $n = 100$ e 1000 os dois testes obtiveram bom poder, atingindo poder máximo nos casos com $n = 1000$. Os testes utilizados como referência TNMBP e TNMSWR, tiveram os melhores desempenhos em

Tabela 4.15 – Poder dos testes, considerando a distribuição Normal Contaminada com $(1 - \delta) = 20\%$ de contaminação com vetor de médias diferentes $\mu_1 \neq \mu_2$ e mesma matrizes de covariâncias $\Sigma_1 = \Sigma_2$ em função de n , p e das correlações $\rho = 0, 0$ e $0, 90$ ao nível de 5% de significância.

n	p	5%					
		TNMD2RKS	TNMDbRKS	TNMD2RBoot	TNMDbRBoot	TNMBP	TNMSWR
$\rho = 0, 00$							
10	2	0,0010	0,0010	0,1680	0,1820	0,9080	0,9090
30	2	0,3210	0,3440	0,5650	0,5670	0,9990	0,9990
	10	0,4090	0,6120	0,6170	0,5610	0,9970	0,9970
	14	0,4450	0,7660	0,6460	0,4860	0,9970	0,9970
	15	0,4680	0,8220	0,6450	0,4640	1,0000	1,0000
100	2	0,9710	0,9740	0,9940	0,9940	1,0000	1,0000
	10	0,9700	0,9830	0,9950	0,9970	1,0000	1,0000
	30	0,9780	0,9970	0,9950	0,9720	1,0000	1,0000
	48	0,9850	1,0000	0,9880	0,8870	1,0000	1,0000
	50	0,9780	1,0000	0,9820	0,8590	1,0000	1,0000
1000	2	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
	10	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
	30	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
	50	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
$\rho = 0, 90$							
10	2	0,0040	0,0030	0,1200	0,1440	0,8890	0,9000
30	2	0,2820	0,3100	0,5060	0,5050	0,9990	0,9990
	10	0,3490	0,5700	0,5820	0,5140	0,9990	0,9990
	14	0,4090	0,7470	0,5880	0,4310	0,9970	0,9970
	15	0,4130	0,7830	0,5900	0,3960	0,9990	0,9990
100	2	0,9650	0,9660	0,9930	0,9930	1,0000	1,0000
	10	0,9620	0,9720	0,9880	0,9860	1,0000	1,0000
	30	0,9720	0,9960	0,9880	0,9520	1,0000	1,0000
	48	0,9760	1,0000	0,9750	0,8290	1,0000	1,0000
	50	0,9810	1,0000	0,9730	0,8130	1,0000	1,0000
1000	2	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
	10	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
	30	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
	50	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000

todas as situações, apresentando poder superior a 99% em $n = 30$ chegando a atingir 100% de desempenho nas situações com $n = 100$ e 1000 . Os testes apresentaram comportamento similares com os dois valores de correlação, apesar de uma sutil redução no poder nos casos com variáveis altamente correlacionadas ($\rho = 0, 90$).

Novamente, como nos casos apresentados para as outras avaliações de poder, considerando a distribuição normal contaminada multivariada, os resultados referentes aos níveis de 10% e 1% de significância, o padrão de reposta foi o mesmo, exceto pelo fato de haver um aumento ou redução no poder de acordo com α . Assim sendo, para estes valores de α , os resultados não foram discutidos, mas as Tabelas com os resultados estão apresentadas no apêndice A.

A última distribuição considerada foi a uniforme multivariada. O poder dos testes em função de n , p e ρ , são apresentados nas Tabelas 4.17, 4.18 e 4.19, para os níveis de significância $\alpha = 10\%$, 5% e 1% , respectivamente. Na Tabela 4.17, tem-se os resultados considerando $\alpha = 10\%$ de significância. Neste caso, os testes TNMD2RKS e TNMDbRKS, não apresentaram um bom desempenho nas situações $n = 10$ e 30 para $\rho = 0,00$, apresentando valores de poder próximos ao nível nominal. Entretanto, para as situações $n = 30$ com $\rho = 0,90$, os testes apresentaram um aumento significativo de poder, com valores acima de 85% para $p = 15$ variáveis. Nas situações com $n = 100$ com $p = 2$, os testes apresentaram bom desempenho, com valores de poder aproximadamente 90% , e para estes casos o poder diminui com o aumento do número de variáveis. Os testes atingem poder máximo nas situações de $n = 1000$ com 100% de poder.

O TNMD2RBoot nas situações $n = 10$ com $p = 2$, $n = 30$ com $p = 10, 14$ e 15 , para $\rho = 0,00$ apresentou baixo poder, sendo que nos casos de $n = 10$ com $p = 2$ e $n = 30$ com $p = 14$ e 15 , apresentou poder inferior ao nível nominal. Nas situações considerando $n = 100$ com $p = 2$ e 10 para $\rho = 0,00$ obteve bom desempenho, porém com os outros valores de p o teste apresentou baixo desempenho. Para os casos considerando $\rho = 0,90$, o poder do teste apresenta uma melhora considerável, com exceção de $n = 10$ com $p = 2$ que continua apresentando baixo poder. Nas situações com $n = 30$ para todos os valores de p o teste apresentou poder moderado com valores de poder em torno de 50% . Para as situações com $n = 100$ e 1000 o teste atingiu 100% de poder ou aproximadamente 100% .

Considerando a distribuição uniforme, o TNMD2RBoot apresentou a mesma característica dos testes TNMD2RKS e TNMDbRKS, que consiste em perder poder com o aumento do número de variáveis, considerando as situações com variáveis não correlacionadas. Por exemplo, fixando $n = 100$, considerando $p = 30$, o teste TNMD2RBoot apresentou $75,60\%$ de poder e $50,40\%$ considerando $p = 48$. A partir da situação $n = 1000$ com $p = 2$ o teste atingiu 100% de poder. Quando se considera alta correlação entre as variáveis, assim como em TNMD2RKS

Tabela 4.16 – Poder dos testes, considerando a distribuição Normal Contaminada com $(1 - \delta) = 20\%$ de contaminação com diferentes vetores de médias $\mu_1 \neq \mu_2$ e estruturas das matrizes de covariâncias diferentes $\Sigma_1 \neq \Sigma_2$ em função de n , p e das correlações $\rho = 0,0$ e $0,90$ ao nível de 5% de significância.

n	p	5%					
		TNMD2RKS	TNMDbRKS	TNMD2RBoot	TNMDbRBoot	TNMBP	TNMSWR
$\rho = 0,00$							
10	2	0,0000	0,0000	0,1390	0,1540	0,8780	0,8960
30	2	0,3310	0,3610	0,5740	0,5730	0,9990	0,9990
	10	0,4290	0,6290	0,6400	0,5800	0,9990	0,9990
	14	0,4260	0,7580	0,6280	0,4890	0,9980	0,9980
	15	0,4730	0,8050	0,6480	0,4560	0,9980	0,9980
100	2	0,9620	0,9670	0,9920	0,9910	1,0000	1,0000
	10	0,9690	0,9830	0,9980	0,9950	1,0000	1,0000
	30	0,9780	0,9960	0,9920	0,9740	1,0000	1,0000
	48	0,9840	1,0000	0,9910	0,9040	1,0000	1,0000
	50	0,9830	0,9990	0,9900	0,8690	1,0000	1,0000
1000	2	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
	10	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
	30	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
	50	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
$\rho = 0,90$							
10	2	0,0020	0,0030	0,1500	0,1580	0,8370	0,8710
30	2	0,2970	0,3230	0,5450	0,5460	1,0000	1,0000
	10	0,3870	0,5960	0,6000	0,5410	1,0000	1,0000
	14	0,3900	0,7340	0,5800	0,4270	0,9990	0,9990
	15	0,4070	0,8010	0,6000	0,3540	0,9980	0,9980
100	2	0,9620	0,9660	0,9860	0,9870	1,0000	1,0000
	10	0,9650	0,9740	0,9930	0,9940	1,0000	1,0000
	30	0,9780	0,9970	0,9980	0,9660	1,0000	1,0000
	48	0,9830	0,9990	0,9840	0,8510	1,0000	1,0000
	50	0,9830	1,0000	0,9780	0,8080	1,0000	1,0000
1000	2	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
	10	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
	30	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
	50	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000

e TNMDbRKS, o poder do teste melhora e ao contrario dos casos sem correlação o aumento do número de variáveis influencia positivamente no poder.

Quanto ao teste TNMDbRBoot, assim como os demais testes propostos, com o aumento do número de variáveis apresentou uma redução no poder para $\rho = 0,00$ e aumento no poder para $\rho = 0,90$. Os casos mais críticos desta característica podem ser observados em $n = 100$ com $\rho = 0,00$, que para $p = 2$ apresenta 96,80% de poder, em $p = 10$ 74,50% de poder, já nos valores de $p = 30, 48$ e 59 o poder é de aproximadamente 0% ou iguais a 0% de poder. Para as situações $n = 1000$ o TNMDbRBoot atingiu poder máximo, 100%, ou aproximadamente de 100% de poder.

Os testes TNMBP e TNMSWR em todas as situações de n , p e $\rho = 0,00$, considerando $\alpha = 10\%$ obtiveram os melhores desempenhos em relação aos testes propostos, sendo o TNMSWR superior em todos os casos considerados. Para $n = 10$, os testes apresentaram valores de desempenho baixo, próximos ao nível nominal $\alpha = 10\%$. Os TNMBP e TNMSWR a partir de $n = 30$ com $p = 10$ apresentaram poder superior 90%, atingindo 100% a partir de $n = 100$ com $p = 2$ para TNMBP e $n = 30$ com $p = 14$ para TNMSWR. Já nas situações com $\rho = 0,90$, ao contrario dos testes propostos que melhoraram o desempenho com variáveis altamente correlacionadas, os testes referencias, principalmente TNMBP, apresentaram perda de poder. Como por exemplo, para TNMBP em $n = 30$ com $p = 14$ observa-se poder de 98,10% para $\rho = 0,00$ e 48,20% para $\rho = 0,90$. Os dois testes em $\rho = 0,90$ atingem 100% de poder a partir de $n = 100$ com $p = 2$.

Os resultados do poder para a distribuição uniforme considerando $\alpha = 10\%$ (Tabela 4.17), foram comparados com o teste avaliados por (CIRILLO; FERREIRA, 2003). Para as situações $n = 100$ com $p = 2$ e 10, o teste de assimetria multivariado nas duas situações apresentou baixo poder, com valores próximos de 0%, e em $n = 100$ com $p = 10$ o teste baseado no coeficiente de correlação Quantil-Quantil, obteve baixo poder, e poder moderado para TNMD2RKS, TNMDbRKS e TNMDbRBoot. Para $n = 100$ com $p = 2$ o teste de curtose multivariada, o teste baseado no coeficiente de correlação Quantil-Quantil e os avaliados neste trabalho apresentaram poder próximos de 100%.

Para $\alpha = 5\%$, Tabela 4.18, TNMD2RKS, TNMDbRKS e TNMDbRBoot, apresentaram resultados de poder semelhantes, os quais, não obtiveram bom desempenho nas situações com tamanhos de amostra $n = 10$ e 30 para $\rho = 0,00$. Considerando $\rho = 0,00$, no caso de $n = 100$ com $p = 2$ apresentam 81% de poder para TNMD2RKS e TNMDbRKS e 93,8% para TNMDbRBoot, e nos demais valores de p , 10, 30, 48 e 50, os testes apresentaram baixo poder, o mesmo comportamento presente na Tabela 4.17, ou seja, redução do poder com o aumento

Tabela 4.17 – Poder dos testes, considerando a distribuição Uniforme em função de n , p e das correlações $\rho = 0,0$ e $0,90$ ao nível de 10% de significância.

n	p	10%					
		TNMD2RKS	TNMDbRKS	TNMD2RBoot	TNMDbRBoot	TNMBP	TNMSWR
$\rho = 0,00$							
10	2	0,0150	0,0200	0,1390	0,1020	0,1030	0,1790
30	2	0,2100	0,1890	0,4320	0,3840	0,4540	0,7280
	10	0,0560	0,0320	0,1960	0,0150	0,9280	0,9990
	14	0,0320	0,0550	0,0990	0,0080	0,9810	1,0000
	15	0,0480	0,0980	0,0890	0,0040	0,9860	1,0000
100	2	0,9030	0,8990	0,9740	0,9680	1,0000	1,0000
	10	0,6740	0,5340	0,9200	0,7450	1,0000	1,0000
	30	0,4700	0,0680	0,7560	0,0140	1,0000	1,0000
	48	0,4420	0,0220	0,5040	0,0000	1,0000	1,0000
	50	0,4540	0,0250	0,4610	0,0000	1,0000	1,0000
1000	2	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
	10	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
	30	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
	50	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
$\rho = 0,90$							
10	2	0,0280	0,0480	0,1440	0,1180	0,1060	0,1760
30	2	0,1820	0,1680	0,3600	0,3360	0,3700	0,6760
	10	0,2970	0,5700	0,4890	0,4920	0,4650	0,7460
	14	0,4430	0,8520	0,5830	0,5060	0,4820	0,7720
	15	0,4550	0,8650	0,5770	0,4840	0,4880	0,7690
100	2	0,8460	0,8530	0,9340	0,9270	0,9980	1,0000
	10	0,8530	0,9400	0,9700	0,9790	1,0000	1,0000
	30	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
	48	1,0000	1,0000	1,0000	0,9990	1,0000	1,0000
	50	1,0000	1,0000	1,0000	0,9980	1,0000	1,0000
1000	2	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
	10	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
	30	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
	50	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000

do número de variáveis. A partir de $n = 1000$ com $p = 2$, os testes atingiram 100% de poder. Considerando $\rho = 0,90$, os três testes apresentam melhora no poder assim com observado na Tabela 4.17, porém com valores mais baixos devido a redução de α .

Nas situações com n pequeno $n = 10$ e 30 , o teste TNMD2RBoot, não obteve desempenho satisfatório, sendo que em algumas alternativas com $\rho = 0,00$ apresentou poder inferiores ao nível nominal. Considerando o tamanho amostral de 100 o teste apresentou a mesma característica dos demais testes propostos para $\rho = 0,00$ considerando esta distribuição, redução no poder com o aumento do número de variáveis. Nas demais configurações de n , p e ρ , observa-se 100% de poder. Os testes TNMBP e TNMSWR, obtiveram desempenho superior aos testes propostos para $\rho = 0,00$. Para as situações $n = 10$ e 30 com $p = 2$, os dois testes apresentaram baixo poder para os dois valores de ρ . Porém, a partir de $n = 30$ com $p = 10$ para $\rho = 0,00$ os testes apresentaram poder elevados, com valores de poder iguais a 100% ou aproximadamente 100% . Nos casos considerando $\rho = 0,90$ os testes atingem poder máximo a partir de $n = 100$ com $p = 2$.

Fazendo uma comparação dos testes avaliados neste trabalho com outros testes encontrados na literatura, os testes avaliados por Biase e Ferreira (2012), Cirillo e Ferreira (2003) e Oliveira e Ferreira (2010). No caso dos resultados mostrados na Tabela 4.18, observa-se que em pequenas amostras, $n = 10$ com $p = 2$, todos os testes considerados apresentaram baixo poder, com exceção dos testes avaliados por Cirillo e Ferreira (2003) por não conter esta situação. Entretanto, nas situações $n = 100$ com $p = 2$, 10 e 50 , os testes TNMBP, TNMSWR e o teste de curtose multivariado foram os únicos que apresentaram bom desempenho, 100% de poder nas três situações. Já os testes TNMD2RKS, TNMDbRKS, TNMD2RBoot, TNMDbRBoot, teste conjunto de assimetria e curtose, teste quiquadrado de Pearson, teste Monte Carlo de normalidade multivariada baseado em distâncias, teste de assimetria e o teste baseado no coeficiente de correlação Quantil-Quantil, apresentaram as mesmas características, que consiste em perder poder com o aumento do número de variáveis.

Tabela 4.18 – Poder dos testes, considerando a distribuição Uniforme em função de n , p e das correlações $\rho = 0,0$ e $0,90$ ao nível de 5% de significância.

n	p	5%					
		TNMD2RKS	TNMDbRKS	TNMD2RBoot	TNMDbRBoot	TNMBP	TNMSWR
$\rho = 0,00$							
10	2	0,0010	0,0010	0,0670	0,0400	0,0420	0,0810
30	2	0,1100	0,1050	0,3090	0,2720	0,2800	0,5710
	10	0,0190	0,0110	0,0960	0,0070	0,8450	0,9930
	14	0,0100	0,0250	0,0470	0,0030	0,9410	0,9980
	15	0,0110	0,0400	0,0390	0,0020	0,9470	0,9990
100	2	0,8150	0,8160	0,9490	0,9380	1,0000	1,0000
	10	0,4600	0,3200	0,8320	0,5780	1,0000	1,0000
	30	0,2460	0,0220	0,5900	0,0050	1,0000	1,0000
	48	0,2440	0,0130	0,3170	0,0000	1,0000	1,0000
	50	0,2580	0,0110	0,2890	0,0000	1,0000	1,0000
1000	2	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
	10	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
	30	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
	50	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
$\rho = 0,90$							
10	2	0,0020	0,0010	0,0690	0,0620	0,0430	0,0730
30	2	0,0750	0,0710	0,2570	0,2280	0,1980	0,4550
	10	0,1750	0,4390	0,3730	0,3610	0,2420	0,5980
	14	0,2910	0,7110	0,4520	0,3540	0,2650	0,6300
	15	0,3010	0,7530	0,4540	0,3400	0,2420	0,6190
100	2	0,7280	0,7310	0,9000	0,8910	0,9940	0,9990
	10	0,7260	0,8510	0,9330	0,9530	1,0000	1,0000
	30	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	0,9990	1,0000
	48	1,0000	1,0000	1,0000	0,9980	1,0000	1,0000
	50	1,0000	1,0000	1,0000	0,9970	0,9980	1,0000
1000	2	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
	10	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
	30	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
	50	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000

Para $\alpha = 1\%$, o desempenho dos testes referente a distribuição uniforme multivariada são apresentados na Tabela 4.19. Este caso, Todos os testes apresentaram padrão de desempenho semelhante ao padrão de desempenho considerando $\alpha = 10\%$ e 5% . O que se observa é uma redução do poder, o que é esperado devido a redução de α .

Tabela 4.19 – Poder dos testes, considerando a distribuição Uniforme em função de n , p e das correlações $\rho = 0,0$ e $0,90$ ao nível de 1% de significância.

n	p	1%					
		TNMD2RKS	TNMDbRKS	TNMD2RBoot	TNMDbRBoot	TNMBP	TNMSWR
$\rho = 0,00$							
10	2	0,0000	0,0000	0,0140	0,0080	0,0070	0,0150
	2	0,0220	0,0220	0,1100	0,0870	0,0420	0,2450
	10	0,0000	0,0000	0,0160	0,0000	0,5070	0,9570
	14	0,0010	0,0050	0,0090	0,0010	0,7190	0,9950
	15	0,0010	0,0040	0,0050	0,0000	0,7510	0,9940
	2	0,5620	0,5620	0,8240	0,7990	0,9830	1,0000
	10	0,1180	0,0720	0,5280	0,2380	1,0000	1,0000
	30	0,0380	0,0040	0,2280	0,0000	1,0000	1,0000
	48	0,0320	0,0010	0,1010	0,0000	1,0000	1,0000
	50	0,0460	0,0000	0,0840	0,0000	1,0000	1,0000
	2	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
	10	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
	30	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
	50	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
$\rho = 0,90$							
10	2	0,0020	0,0010	0,0690	0,0620	0,0430	0,0730
	2	0,0750	0,0710	0,2570	0,2280	0,1980	0,4550
	10	0,1750	0,4390	0,3730	0,3610	0,2420	0,5980
	14	0,2910	0,7110	0,4520	0,3540	0,2650	0,6300
	15	0,3010	0,7530	0,4540	0,3400	0,2420	0,6190
	2	0,7280	0,7310	0,9000	0,8910	0,9940	0,9990
	10	0,7260	0,8510	0,9330	0,9530	1,0000	1,0000
	30	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	0,9990	1,0000
	48	1,0000	1,0000	1,0000	0,9980	1,0000	1,0000
	50	1,0000	1,0000	1,0000	0,9970	0,9980	1,0000
	2	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
	10	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
	30	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
	50	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000

4.3 Exemplo

Para ilustrar a aplicação dos testes propostos TNMD2RKS, TNMDbRKS, TNMD2R-Boot e TNMDbRBoot, e os testes usados como referência TNMBP e TNMSWR, foi utilizado

um pequeno subconjunto de um exemplo apresentado por Royston (1983). No exemplo as variáveis X_1 e X_2 referem-se à concentração de hemoglobina e contagem de linfócitos, respectivamente, mensurados em $n = 20$ pintores de carro. Os dados são apresentados a seguir:

Pintores	X_1	X_2	Pintores	X_1	X_2
1	13,4	14	11	15,2	26
2	14,6	15	12	16,9	28
3	13,5	19	13	14,8	24
4	15,0	23	14	16,2	26
5	14,6	17	15	14,7	23
6	14,0	20	16	14,7	9
7	16,4	21	17	16,5	18
8	14,8	16	18	15,4	28
9	15,2	27	19	15,1	17
10	15,5	34	20	14,2	14

Para verificar a normalidade dos dados, os passos dos testes propostos, são executados e apresentados em detalhes. De acordo com as funções disponíveis no apêndice B, inicialmente são calculados os estimadores robustos para locação $\bar{\mathbf{X}}^*$ e escala \mathbf{S}^* , por meio do algoritmo *CovOgk*, tem-se:

$$\bar{\mathbf{X}}^* = \begin{bmatrix} 14,92131 \\ 21,01272 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \mathbf{S}^* = \begin{bmatrix} 0,4194755 & 2,159535 \\ 2,1595350 & 42,904876 \end{bmatrix}$$

A partir das estimativas do vetor de médias $\bar{\mathbf{X}}^*$ e matriz de covariâncias \mathbf{S}^* , são calculadas as distâncias generalizadas de Mahalanobis robustas D_i^{2*} com $i = 1, 2, \dots, 20$ (Tabela 4.20), por meio da expressão (3.2), para os testes TNMD2RKS e TNMD2RBoot, que são baseados nesta distância. Já os testes TNMDbRKS e TNMDbRBoot são baseados na distância beta, assim sendo as distâncias D_i^{2*} são transformadas para b_i^* de acordo com a expressão (3.3), e apresentadas na Tabela 4.20.

Calculadas as distâncias, a normalidade multivariada da amostra de acordo com os testes TNMD2RKS e TNMDbRKS, é verificada mediante o teste univariado de *Kolmogorov-Smirnov* aplicado as distâncias \mathbf{D}^{2*} para TNMD2RKS e \mathbf{b}^* para TNMDbRKS, em que os valores- p e as estatísticas dos testes, para o exemplo, estão apresentadas na Tabela 4.21.

Quanto aos testes TNMD2RBoot e TNMDbRBoot, os julgamentos também são baseados no teste univariado de *Kolmogorov-Smirnov*. Porém, utilizando a estatística de teste para calcular o valor- p , dada pela equação 3.5. A estatística de teste da amostra é comparada com

Tabela 4.20 – Valores das distâncias generalizadas de Mahalanobis robusta D_i^{2*} de cada observação para o estimador robusto da média amostral, e das distâncias transformadas beta robustas b_i^* .

i	D_i^{2*}	b_i^*
1	5,538461	0,306840
2	0,843748	0,046745
3	5,701020	0,315846
4	0,093513	0,005181
5	0,421120	0,023331
6	2,461293	0,136360
7	7,041687	0,390121
8	0,640865	0,035505
9	0,837167	0,046380
10	3,949345	0,218800
11	0,582187	0,032254
12	9,655584	0,534935
13	0,445477	0,024680
14	3,977921	0,220383
15	0,424304	0,023507
16	3,836183	0,212531
17	9,845491	0,545457
18	1,189811	0,065918
19	0,841546	0,046623
20	1,582778	0,087689

N_{BP} valores de estatísticas de teste, obtidas por simulação de *bootstrap* paramétrico, assim como detalhado no capítulo 3.

Desta forma, a normalidade dos dados foi verificada utilizando os seis testes, por meio do *software R*. Para os testes propostos, as funções foram implementadas e estão disponíveis no apêndice B. Para os testes usados como referência as funções utilizadas foram implementadas e disponibilizadas por Biase (2011). Assim sendo, os resultados das estatísticas de teste e valor- p referente a cada teste estão apresentados na Tabela 4.21.

Tabela 4.21 – Valores dos resultados das estatísticas de teste e valor- p referente aos testes TNMD2RKS, TNMDbRKS, TNMD2RBoot, TNMDbRBoot, TNMBP e TNMSWR, em relação a um pequeno subconjunto do exemplo apresentado por Royston (1983).

Teste de normalidade multivariada	Estatística do teste	Valor- p
TNMD2RKS	0,2531	0,1288
TNMDbRKS	0,2688	0,0913*
TNMD2RBoot	0,2531	0,0390**
TNMDbRBoot	0,2688	0,0270**
TNMBP	0,9720	0,8270
TNMSWR	0,3548	0,8345

*** significativo ao nível 0,01, ** significativo ao nível 0,05 e * significativo ao nível 0,10

A partir dos resultados apresentados na Tabela 4.21, observa-se que o teste proposto TNMD2RKS concorda com os testes referências TNMBP e TNMSWR, de que os dados seguem uma distribuição normal bivariada, ou seja, foram não significativos (valor- p maior que 10%). Entretanto, os demais testes propostos TNMDbRKS, TNMD2RBoot e TNMDbRBoot foram significativos para $\alpha = 10\%$. Sendo que, TNMD2RBoot e TNMDbRBoot foram não significativos para $\alpha = 5\%$ e no caso do teste TNMDbRKS foi não significativo somente para $\alpha = 1\%$. Desta forma, considerando o nível de significância de 1%, todos os testes foram não significativos (valor- p maior que 1%).

Uma justificativa para esta discordância entre os testes considerando os níveis de significância de 10% e 5%, pode vir da natureza das variáveis, em que \mathbf{X}_1 (concentração de hemoglobina) é uma variável contínua, em quanto \mathbf{X}_2 (contagem de linfócitos) é uma variável de contagem.

Portanto, em comparação com outros testes apresentados na literatura, a normalidade desta mesma amostra foi avaliada por Ferreira (2011), utilizando diferentes testes. Inicialmente, Ferreira (2011) avaliou a normalidade das marginais, ou seja, de cada variável separadamente, utilizando o teste qui-quadrado, o teste de assimetria e curtose, o teste G-Curtose e o teste de Shapiro-Wilk, além de procedimentos gráficos. E, em todos estes testes, os resultados foram concordantes de normalidade marginal, que é um indicio de normalidade bivariada.

Entretanto, é importante salientar que normalidade marginal não implica normalidade multivariada (FERREIRA, 2011). Logo, se torna necessária a verificação da normalidade bivariada da amostra. Ainda de acordo com Ferreira (2011), a normalidade bivariada foi verificada por meio dos testes: assimetria e curtose de Mardia (1970), TNMSWR e o procedimento gráfico Q-Q plots multivariado. Os quais não rejeitaram a hipótese de normalidade bivariada dos dados. Assim, todos os testes concordaram para este conjunto de dados.

5 CONCLUSÕES

1. Os testes TNMD2RKS, TNMD2RBoot e TNMDbRBoot foram propostos com sucesso;
2. dos testes avaliados, nenhum foi uniformemente mais poderoso em todas as situações avaliadas, apesar de que, na maioria dos casos com variáveis não correlacionadas, o teste TNMBP apresentou-se superior aos demais avaliados;
3. o TNMD2RKS, quanto às taxas de erro tipo I, mostrou-se conservativo em todas as situações avaliadas, não obtendo controle adequado das taxas de erro tipo I. Em relação ao poder, o teste se mostrou poderoso nas situações com n e p grandes, apresentando valores próximos aos testes referências;
4. o TNMb2RKS não obteve controle das taxas de erro tipo I. Portanto, o teste não é recomendado para a verificação da suposição de normalidade multivariada;
5. o TNMD2RBoot teve grande sucesso no controle das taxas de erro tipo I e excelente desempenho principalmente nas situações com variáveis correlacionadas, superando em muitos casos os testes referências. Não obteve poder adequado apenas em situações com n e p pequeno. Dos testes propostos, foi o que apresentou os melhores resultados, seguido pelo teste TNMDbRBoot;
6. o TNMDbRBoot controlou adequadamente as taxas de erro tipo I e se mostrou poderoso, com desempenho próximo aos testes referência, e em algumas situações superando os testes referências. Porém, nas situações com n ou p pequeno, o teste não obteve bom desempenho, não sendo recomendado nestas situações;
7. uma característica inerente a todos os testes em quase todas as situações avaliadas é referente à presença de correlação entre as variáveis. Com alta correlação, apesar de os testes propostos perderem poder, a perda é pequena. Já nos testes referência, em variáveis altamente correlacionadas, há perda de poder expressiva em várias situações. Desta forma, nas situações com correlação alta os testes propostos superaram os referências;
8. quanto ao controle das taxas de erro I com presença de *outliers* os testes TNMD2RBoot e TNMDbRBoot controlaram adequadamente as taxas de erro tipo I, o que não foi observado nos demais testes.

REFERÊNCIAS

- ALVA, J. A. V.; ESTRADA, E. G. A generalization of shapiro-wilk's test for multivariate normality. **Communications in Statistics—Theory and Methods**, Taylor & Francis, v. 38, n. 11, p. 1870–1883, 2009.
- BIASE, A. G. **Proposição de testes computacionalmente intensivos de normalidade multivariada**. Dissertação (Mestrado) — Universidade Federal de Lavras., 2011.
- BIASE, A. G.; FERREIRA, D. F. Teste computacionalmente intensivo baseado na distância de mahalnobis para normalidade multivariada. **Rev. Bras. Biom**, **30** (1), p. 1–22, 2012.
- CANTELMO, N. F.; FERREIRA, D. F. Desempenho de testes de normalidade multivariados avaliado por simulação monte carlo. **Ciência e agrotecnologia**, Editora da Universidade Federal de Lavras, v. 31, n. 6, p. 1630–1636, 2007.
- CASELLA, G.; BERGER, R. L. **Inferência estatística**. 2. ed. São Paulo: Cengage Learning, 2010.
- CIRILLO, M. A.; FERREIRA, D. F. Extensão do teste para normalidade univariado baseado no coeficiente de correlação quantil-quantil para o caso multivariado. **Revista de Matemática e Estatística**, São Paulo, v. 21, n. 3, p. 67–84, 2003.
- DOORNIK, J. A.; HANSEN, H. An omnibus test for univariate and multivariate normality. **Oxford Bulletin of Economics and Statistics**, Wiley Online Library, v. 70, n. s1, p. 927–939, 2008.
- EFRON, B. Bootstrap methods: Another look at the jackknife. **The Annals of Statistics**, Institute of Mathematical Statistics, v. 7, 04 1979.
- EFRON, B.; TIBSHIRANI, R. **An introduction to the bootstrap**. New York: CRC, 1993. 45 p. ISBN 0412042312,9780412042317.
- EVANS, M. J.; ROSENTHAL, J. S. **Probability and statistics: The science of uncertainty**. 2. ed. New York: W. H. Freeman and Company, 2009.
- FERREIRA, D. F. **Estatística Básica**. 2. ed. Lavras: UFLA, 2009.
- FERREIRA, D. F. **Estatística Multivariada**. 2. ed. Lavras: UFLA, 2011.
- FERREIRA, D. F. **Estatística Computacional em Java**. 1. ed. Lavras: UFLA, 2013. 537–576 p.
- GNANADESIKAN, R.; KETTENRING, J. R. Robust estimates, residuals, and outlier detection with multiresponse data. **Biometrics**, JSTOR, p. 81–124, 1972.
- HAMPEL, F. R. The influence curve and its role in robust estimation. **Journal of the American Statistical Association**, Taylor & Francis, v. 69, n. 346, p. 383–393, 1974.
- HARDIN, J.; ROCKE, D. M. The distribution of robust distances. **Journal of Computational and Graphical Statistics**, Citeseer, v. 14, n. 4, p. 1–19, 2005.
- LANDAU, D. P.; BINDER, K. **A Guide to Monte Carlo Simulations in Statistical Physics**. 4. ed. New York: Cambridge University Press, 2014. ISBN 1107074029,9781107074026.

- LIANG, J. et al. Testing multinormality based on low-dimensional projection. **Journal of Statistical Planning and Inference**, Elsevier, v. 86, n. 1, p. 129–141, 2000.
- LIANG, J.; PAN, W. S.; YANG, Z.-H. Characterization-based q–q plots for testing multinormality. **Statistics & probability letters**, Elsevier, v. 70, n. 3, p. 183–190, 2004.
- MARDIA, K. V. Measures of multivariate skewness and kurtosis with applications. **Biometrika**, Biometrika Trust, v. 57, n. 3, p. 519–530, 1970.
- MARONNA, R. A.; ZAMAR, R. H. Robust estimates of location and dispersion for high-dimensional data sets. **Technometrics**, Taylor & Francis, v. 44, n. 4, p. 307–317, 2002.
- MECKLIN, C. J.; MUNDFROM, D. J. A monte carlo comparison of the type i and type ii error rates of tests of multivariate normality. **Journal of Statistical Computation and Simulation**, Taylor & Francis, v. 75, n. 2, p. 93–107, 2005.
- MORETTIN, P. A.; BUSSAB, W. de O. **Estatística Básica**. 6. ed. São Paulo: Saraiva, 2010. ISBN 978-85-02-08177-2.
- OLIVEIRA, I. R. Cardoso de; FERREIRA, D. F. Multivariate extension of chi-squared univariate normality test. **Journal of Statistical Computation and Simulation**, Taylor & Francis, v. 80, n. 5, p. 513–526, 2010.
- PALMA, M. D.; GALLO, M. A co-median approach to detect compositional outliers. **Journal of Applied Statistics**, Taylor & Francis, v. 43, n. 13, p. 2348–2362, 2016.
- R CORE TEAM. **R: A Language and Environment for Statistical Computing**. Vienna, Austria, 2016. Disponível em: <<https://www.R-project.org/>>.
- ROCKE, D. M.; WOODRUFF, D. L. Identification of outliers in multivariate data. **Journal of the American Statistical Association**, Taylor & Francis Group, v. 91, n. 435, p. 1047–1061, 1996.
- ROUSSEEUW, P. J.; DRIESSEN, K. V. A fast algorithm for the minimum covariance determinant estimator. **Technometrics**, Taylor & Francis Group, v. 41, n. 3, p. 212–223, 1999.
- ROUSSEEUW, P. J.; ZOMEREN, B. C. V. Unmasking multivariate outliers and leverage points. **Journal of the American Statistical association**, Taylor & Francis, v. 85, n. 411, p. 633–639, 1990.
- ROYSTON, J. P. Some techniques for assessing multivariate normality based on the shapiro-wilk w. **Applied Statistics**, JSTOR, p. 121–133, 1983.
- ROYSTON, P. A toolkit for testing for non-normality in complete and censored samples. **Journal of the Royal Statistical Society: Series D (The Statistician)**, John Wiley and Sons, v. 42, 1993.
- SHAPIRO, S. S.; WILK, M. B. An analysis of variance test for normality (complete samples). **Biometrika**, Oxford University Press, v. 52, 12 1965.
- SHAPIRO S. S.; FRANCA, R. S. An approximate analysis of variance test for normality. **Journal of the American Statistical Association**, American Statistical Association, v. 67, 03 1972.

SILVA, R. B. V. **Extensão do teste de normalidade de shapiro-francia para o caso multivariado**. Tese (Doutorado), 2009.

SINGH, A. Outliers and robust procedures in some chemometric applications. **Chemometrics and Intelligent Laboratory Systems**, Elsevier Science, v. 33, 1996.

SZÉKELY, G. J.; RIZZO, M. L. A new test for multivariate normality. **Journal of Multivariate Analysis**, Elsevier, v. 93, n. 1, p. 58–80, 2005.

TAN, M. et al. Testing multivariate normality in incomplete data of small sample size. **Journal of Multivariate Analysis**, Elsevier, v. 93, n. 1, p. 164–179, 2005.

TENREIRO, C. An affine invariant multiple test procedure for assessing multivariate normality. **Computational Statistics & Data Analysis**, Elsevier, v. 55, n. 5, p. 1980–1992, 2011.

THODE, H. C. **Testing for Normality**. 1st. ed. [S.l.]: Marcel Dekker, 2002. (Statistics: Textbooks and Monographs 164). ISBN 0824796136,9780824796136.

TODOROV, V.; FILZMOSER, P. et al. An object-oriented framework for robust multivariate analysis. **Journal of Statistical Software**, American Statistical Association, v. 32, p. 1–47, 2009.

VOINOV, V. et al. New invariant and consistent chi-squared type goodness-of-fit tests for multivariate normality and a related comparative simulation study. **Communications in Statistics-Theory and Methods**, Taylor & Francis, v. 45, n. 11, p. 3249–3263, 2016.

APÊNDICE A – Tabelas

Tabela 1 – Taxas de erro tipo I, considerando a distribuição normal multivariada com presença de 2% de *outliers*, em função de n , p e das correlações $\rho = 0,0$ e $0,90$ ao nível de 10% de significância.

n	p	10%					
		TNMD2RKS	TNMDbRKS	TNMD2RBoot	TNMDbRBoot	TNMBP	TNMSWR
$\rho = 0,00$							
10	2	0,0160 ⁻	0,0300 ⁻	0,1010	0,0980	0,2730 ⁺	0,2700 ⁺
30	2	0,0370 ⁻	0,0460 ⁻	0,1110	0,1120	0,5140 ⁺	0,5020 ⁺
	10	0,0310 ⁻	0,1700 ⁺	0,1060	0,1140	0,5190 ⁺	0,5220 ⁺
	14	0,0430 ⁻	0,3830 ⁺	0,1200	0,1110	0,5170 ⁺	0,5170 ⁺
	15	0,0470 ⁻	0,4320 ⁺	0,1230	0,1160	0,4990 ⁺	0,5050 ⁺
100	2	0,0270 ⁻	0,0330 ⁻	0,0990	0,1000	0,8790 ⁺	0,8800 ⁺
	10	0,0250 ⁻	0,0570 ⁻	0,1180	0,1430 ⁺	0,8860 ⁺	0,8820 ⁺
	30	0,0430 ⁻	0,3990 ⁺	0,1330 ⁺	0,1360 ⁺	0,8880 ⁺	0,8880 ⁺
	48	0,0830	0,8940 ⁺	0,1040	0,0970	0,9020 ⁺	0,9010 ⁺
	50	0,0830	0,9320 ⁺	0,0990	0,0860	0,8710 ⁺	0,8690 ⁺
1000	2	0,0590 ⁻	0,0620 ⁻	0,1740 ⁺	0,1750 ⁺	1,0000 ⁺	1,0000 ⁺
	10	0,0710 ⁻	0,0880	0,2420 ⁺	0,2710 ⁺	1,0000 ⁺	1,0000 ⁺
	30	0,0820	0,1600 ⁺	0,2730 ⁺	0,3300 ⁺	1,0000 ⁺	1,0000 ⁺
	50	0,0810	0,2470 ⁺	0,3030 ⁺	0,3430 ⁺	1,0000 ⁺	1,0000 ⁺
$\rho = 0,90$							
10	2	0,0240 ⁻	0,0420 ⁻	0,1150	0,1190	0,2480 ⁺	0,2440 ⁺
30	2	0,0220 ⁻	0,0250 ⁻	0,0980	0,0960	0,5000 ⁺	0,4950 ⁺
	10	0,0390 ⁻	0,1700 ⁺	0,1140	0,1230	0,5060 ⁺	0,5080 ⁺
	14	0,0340 ⁻	0,4020 ⁺	0,1060	0,1030	0,5150 ⁺	0,5140 ⁺
	15	0,0420 ⁻	0,4350 ⁺	0,0990	0,0990	0,5090 ⁺	0,5020 ⁺
100	2	0,0330 ⁻	0,0370 ⁻	0,0850	0,0910	0,8910 ⁺	0,8890 ⁺
	10	0,0220 ⁻	0,0630 ⁻	0,1100	0,1370 ⁺	0,8920 ⁺	0,8920 ⁺
	30	0,0520 ⁻	0,4220 ⁺	0,1260	0,1280 ⁺	0,8860 ⁺	0,8810 ⁺
	48	0,1110	0,9400 ⁺	0,0960	0,1080	0,8940 ⁺	0,8890 ⁺
	50	0,1030	0,9630 ⁺	0,0700 ⁻	0,0740 ⁻	0,8530 ⁺	0,8510 ⁺
1000	2	0,0650 ⁻	0,0680 ⁻	0,1960 ⁺	0,1980 ⁺	1,0000 ⁺	1,0000 ⁺
	10	0,0690 ⁻	0,0980	0,2530 ⁺	0,2860 ⁺	1,0000 ⁺	1,0000 ⁺
	30	0,0820	0,1750 ⁺	0,2750 ⁺	0,3290 ⁺	1,0000 ⁺	1,0000 ⁺
	50	0,0890	0,2570 ⁺	0,3010 ⁺	0,3340 ⁺	1,0000 ⁺	1,0000 ⁺

+ Taxas de erro tipo I superiores ao valor nominal de 10% de significância.

- Taxas de erro tipo I inferiores ao valor nominal de 10% de significância.

Tabela 2 – Taxas de erro tipo I, considerando a distribuição normal multivariada com presença de 2% de *outliers*, em função de n , p e das correlações $\rho = 0,0$ e $0,90$ ao nível de 5% de significância.

n	p	5%					
		TNMD2RKS	TNMDbRKS	TNMD2RBoot	TNMDbRBoot	TNMBP	TNMSWR
$\rho = 0,00$							
10	2	0,0010 ⁻	0,0010 ⁻	0,0460	0,0480	0,2170 ⁺	0,2230 ⁺
30	2	0,0170 ⁻	0,0220 ⁻	0,0600	0,0620	0,4730 ⁺	0,4750 ⁺
	10	0,0100 ⁻	0,0770 ⁺	0,0540	0,0520	0,4950 ⁺	0,4990 ⁺
	14	0,0100 ⁻	0,2330 ⁺	0,0630	0,0570	0,4920 ⁺	0,4920 ⁺
	15	0,0150 ⁻	0,2730 ⁺	0,0550	0,0540	0,4660 ⁺	0,4670 ⁺
100	2	0,0120 ⁻	0,0130 ⁻	0,0460	0,0460	0,8750 ⁺	0,8710 ⁺
	10	0,0080 ⁻	0,0230 ⁻	0,0610	0,0770 ⁺	0,8810 ⁺	0,8780 ⁺
	30	0,0170 ⁻	0,2430 ⁺	0,0620	0,0670	0,8810 ⁺	0,8810 ⁺
	48	0,0270 ⁻	0,7890 ⁺	0,0580	0,0510	0,8950 ⁺	0,8920 ⁺
	50	0,0330 ⁻	0,8300 ⁺	0,0520	0,0460	0,8650 ⁺	0,8650 ⁺
1000	2	0,0180 ⁻	0,0220 ⁻	0,0900 ⁺	0,0940 ⁺	1,0000 ⁺	1,0000 ⁺
	10	0,0330 ⁻	0,0380	0,1270 ⁺	0,1530 ⁺	1,0000 ⁺	1,0000 ⁺
	30	0,0310 ⁻	0,0710	0,1540 ⁺	0,2020 ⁺	1,0000 ⁺	1,0000 ⁺
	50	0,0400 ⁺	0,1140 ⁺	0,1600 ⁺	0,1980 ⁺	1,0000 ⁺	1,0000 ⁺
$\rho = 0,90$							
10	2	0,0000 ⁻	0,0000 ⁻	0,0550	0,0560	0,2070 ⁺	0,2020 ⁺
30	2	0,0060 ⁻	0,0090 ⁻	0,0460	0,0480	0,4730 ⁺	0,4650 ⁺
	10	0,0130 ⁻	0,0880 ⁺	0,0650	0,0650	0,4830 ⁺	0,4860 ⁺
	14	0,0110 ⁻	0,2280 ⁺	0,0460	0,0470	0,4930 ⁺	0,4900 ⁺
	15	0,0150 ⁻	0,2730 ⁺	0,0470	0,0560	0,4830 ⁺	0,4810 ⁺
100	2	0,0090 ⁻	0,0120 ⁻	0,0440	0,0440	0,8830 ⁺	0,8860 ⁺
	10	0,0060 ⁻	0,0220 ⁻	0,0620	0,0800 ⁺	0,8860 ⁺	0,8870 ⁺
	30	0,0180 ⁻	0,2540 ⁺	0,0660	0,0640	0,8740 ⁺	0,8740 ⁺
	48	0,0440	0,8250 ⁺	0,0420	0,0470	0,8890 ⁺	0,8850 ⁺
	50	0,0410	0,8790 ⁺	0,0340	0,0350	0,8490 ⁺	0,8480 ⁺
1000	2	0,0250 ⁻	0,0260 ⁻	0,1070 ⁺	0,1100 ⁺	1,0000 ⁺	1,0000 ⁺
	10	0,0310 ⁻	0,0450	0,1450 ⁺	0,1610 ⁺	1,0000 ⁺	1,0000 ⁺
	30	0,0300 ⁻	0,0640	0,1760 ⁺	0,2160 ⁺	1,0000 ⁺	1,0000 ⁺
	50	0,0360	0,1210 ⁺	0,1620 ⁺	0,1970 ⁺	1,0000 ⁺	1,0000 ⁺

+ Taxas de erro tipo I superiores ao valor nominal de 5% de significância.

- Taxas de erro tipo I inferiores ao valor nominal de 5% de significância.

Tabela 3 – Taxas de erro tipo I, considerando a distribuição normal multivariada com presença de 2% de *outliers*, em função de n , p e das correlações $\rho = 0,0$ e $0,90$ ao nível de 1% de significância.

n	p	1%					
		TNMD2RKS	TNMDbRKS	TNMD2RBoot	TNMDbRBoot	TNMBP	TNMSWR
$\rho = 0,00$							
10	2	0,0000 ⁻	0,0000 ⁻	0,0100	0,0090	0,1880 ⁺	0,1900 ⁺
30	2	0,0020 ⁻	0,0030 ⁻	0,0160	0,0180	0,4580 ⁺	0,4540 ⁺
	10	0,0000 ⁻	0,0120	0,0120	0,0100	0,4760 ⁺	0,4770 ⁺
	14	0,0000 ⁻	0,0590 ⁺	0,0090	0,0040	0,4770 ⁺	0,4770 ⁺
	15	0,0040	0,0830 ⁺	0,0110	0,0110	0,4430 ⁺	0,4420 ⁺
100	2	0,0010 ⁻	0,0030 ⁻	0,0120	0,0120	0,8650 ⁺	0,8650 ⁺
	10	0,0010 ⁻	0,0030 ⁻	0,0120	0,0140	0,8780 ⁺	0,8750 ⁺
	30	0,0040	0,0620 ⁺	0,0140	0,0140	0,8770 ⁺	0,8780 ⁺
	48	0,0030 ⁻	0,4610 ⁺	0,0110	0,0080	0,8890 ⁺	0,8880 ⁺
	50	0,0040	0,5060 ⁺	0,0050	0,0090	0,8630 ⁺	0,8600 ⁺
1000	2	0,0030 ⁻	0,0040	0,0210	0,0220 ⁺	1,0000 ⁺	1,0000 ⁺
	10	0,0060	0,0070	0,0380 ⁺	0,0460 ⁺	1,0000 ⁺	1,0000 ⁺
	30	0,0020 ⁻	0,0070	0,0380 ⁺	0,0510 ⁺	1,0000 ⁺	1,0000 ⁺
	50	0,0060	0,0250 ⁺	0,0450 ⁺	0,0560 ⁺	1,0000 ⁺	1,0000 ⁺
$\rho = 0,90$							
10	2	0,0000 ⁻	0,0000 ⁻	0,0090	0,0040	0,1750 ⁺	0,1780 ⁺
30	2	0,0010 ⁻	0,0020 ⁻	0,0100	0,0100	0,4500 ⁺	0,4520 ⁺
	10	0,0020 ⁻	0,0150	0,0110	0,0160	0,4610 ⁺	0,4610 ⁺
	14	0,0020 ⁻	0,0540 ⁺	0,0040	0,0070	0,4770 ⁺	0,4790 ⁺
	15	0,0010 ⁻	0,0810 ⁺	0,0060	0,0080	0,4590 ⁺	0,4610 ⁺
100	2	0,0020 ⁻	0,0040	0,0090	0,0100	0,8790 ⁺	0,8810 ⁺
	10	0,0020 ⁻	0,0030 ⁻	0,0140	0,0150	0,8810 ⁺	0,8810 ⁺
	30	0,0030 ⁻	0,0690 ⁺	0,0130	0,0130	0,8710 ⁺	0,8700 ⁺
	48	0,0090	0,5030 ⁺	0,0090	0,0090	0,8820 ⁺	0,8840 ⁺
	50	0,0030 ⁻	0,5660 ⁺	0,0030 ⁻	0,0040	0,8450 ⁺	0,8450 ⁺
1000	2	0,0020 ⁻	0,0020 ⁻	0,0200	0,0210	1,0000 ⁺	1,0000 ⁺
	10	0,0020 ⁻	0,0040	0,0420 ⁺	0,0480 ⁺	1,0000 ⁺	1,0000 ⁺
	30	0,0050	0,0110	0,0360 ⁺	0,0510 ⁺	1,0000 ⁺	1,0000 ⁺
	50	0,0030 ⁻	0,0150	0,0380 ⁺	0,0450 ⁺	1,0000 ⁺	1,0000 ⁺

+ Taxas de erro tipo I superiores ao valor nominal de 1% de significância.

- Taxas de erro tipo I inferiores ao valor nominal de 1% de significância.

Tabela 5 – Poder dos testes, considerando a distribuição Normal Contaminada com $(1 - \delta) = 20\%$ de contaminação com mesmo vetor de médias $\boldsymbol{\mu}_1 = \boldsymbol{\mu}_2$ e estruturas das matrizes de covariâncias diferentes $\boldsymbol{\Sigma}_1 \neq \boldsymbol{\Sigma}_2$ em função de n , p e das correlações $\rho = 0,0$ e $0,90$ ao nível de 1% de significância.

n	p	1%					
		TNMD2RKS	TNMDbRKS	TNMD2RBoot	TNMDbRBoot	TNMBP	TNMSWR
$\rho = 0,00$							
10	2	0,0000	0,0000	0,0100	0,0070	0,0420	0,0420
30	2	0,0010	0,0010	0,0170	0,0160	0,1120	0,0890
	10	0,0010	0,0040	0,0100	0,0060	0,0070	0,0080
	14	0,0030	0,0410	0,0090	0,0090	0,0160	0,0090
	15	0,0000	0,0580	0,0090	0,0090	0,0030	0,0050
100	2	0,0010	0,0030	0,0290	0,0300	0,3200	0,2370
	10	0,0000	0,0020	0,0100	0,0120	0,0180	0,0170
	30	0,0000	0,0280	0,0050	0,0030	0,0110	0,0110
	48	0,0040	0,3830	0,0100	0,0070	0,0110	0,0080
	50	0,0020	0,4380	0,0100	0,0090	0,0110	0,0120
1000	2	0,1650	0,1790	0,4220	0,4300	0,9990	0,9970
	10	0,0030	0,0030	0,0270	0,0310	0,0240	0,0220
	30	0,0000	0,0050	0,0200	0,0150	0,0150	0,0100
	50	0,0000	0,0100	0,0100	0,0100	0,0200	0,0300
$\rho = 0,90$							
10	2	0,0000	0,0000	0,0170	0,0100	0,0240	0,0240
30	2	0,0010	0,0010	0,0070	0,0090	0,0880	0,0780
	10	0,0000	0,0090	0,0070	0,0050	0,0070	0,0140
	14	0,0010	0,0490	0,0120	0,0080	0,0120	0,0120
	15	0,0030	0,0650	0,0060	0,0060	0,0130	0,0180
100	2	0,0040	0,0050	0,0300	0,0310	0,2440	0,2080
	10	0,0010	0,0020	0,0120	0,0100	0,0150	0,0200
	30	0,0000	0,0490	0,0090	0,0080	0,0110	0,0160
	48	0,0030	0,3790	0,0050	0,0060	0,0100	0,0140
	50	0,0030	0,4750	0,0030	0,0030	0,0120	0,0170
1000	2	0,1580	0,1790	0,4150	0,4250	0,9640	0,9590
	10	0,0020	0,0030	0,0290	0,0340	0,0130	0,0180
	30	0,0000	0,0000	0,0050	0,0000	0,0050	0,0100
	50	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0050	0,0200

Tabela 4 – Poder dos testes, considerando a distribuição Normal Contaminada com $(1 - \delta) = 20\%$ de contaminação com mesmo vetor de médias $\mu_1 = \mu_2$ e estruturas das matrizes de covariâncias diferentes $\Sigma_1 \neq \Sigma_2$ em função de n , p e das correlações $\rho = 0,0$ e $0,90$ ao nível de 10% de significância.

n	p	10%					
		TNMD2RKS	TNMDbRKS	TNMD2RBoot	TNMDbRBoot	TNMBP	TNMSWR
$\rho = 0,00$							
10	2	0,0170	0,0370	0,1020	0,1060	0,1830	0,1710
30	2	0,0320	0,0420	0,1040	0,1170	0,3330	0,2720
	10	0,0240	0,1290	0,0780	0,0820	0,1200	0,1110
	14	0,0300	0,3370	0,0790	0,0900	0,0990	0,1030
	15	0,0370	0,3900	0,0820	0,0840	0,0810	0,0940
100	2	0,0600	0,0770	0,1660	0,1770	0,6070	0,4970
	10	0,0200	0,0460	0,1040	0,1170	0,1250	0,1090
	30	0,0190	0,3180	0,0890	0,0820	0,1020	0,1010
	48	0,0520	0,8530	0,0680	0,0720	0,1160	0,1030
	50	0,0620	0,8840	0,0740	0,0770	0,1170	0,1070
1000	2	0,6210	0,6420	0,8260	0,8300	1,0000	1,0000
	10	0,0450	0,0560	0,1540	0,1630	0,1560	0,1330
	30	0,0300	0,0350	0,0950	0,1050	0,0950	0,1250
	50	0,0100	0,0600	0,0800	0,0900	0,0800	0,1000
$\rho = 0,90$							
10	2	0,0360	0,0600	0,1180	0,1230	0,1530	0,1370
30	2	0,0220	0,0330	0,1030	0,1250	0,2720	0,2300
	10	0,0320	0,1550	0,1000	0,0960	0,0970	0,0820
	14	0,0390	0,3650	0,0940	0,1050	0,1030	0,0820
	15	0,0390	0,4260	0,0830	0,0790	0,1070	0,0900
100	2	0,0600	0,0730	0,1680	0,1800	0,5320	0,4360
	10	0,0280	0,0480	0,1020	0,1280	0,1090	0,0950
	30	0,0420	0,3610	0,0830	0,0890	0,1010	0,0780
	48	0,0690	0,8760	0,0540	0,0670	0,0970	0,0880
	50	0,0570	0,9350	0,0310	0,0400	0,0920	0,0800
1000	2	0,6260	0,6450	0,8310	0,8360	0,9920	0,9910
	10	0,0480	0,0570	0,1630	0,1700	0,1350	0,1120
	30	0,0050	0,0200	0,0850	0,1250	0,0800	0,0500
	50	0,0150	0,0450	0,0900	0,0750	0,1000	0,0950

APÊNDICE B – Rotinas R

```
# Programa para realizar testes de normalidade multivariada baseados em
# estimadores robustos dos parâmetros de locação e escala

# Teste de normalidade multivariada, baseado em distâncias robustas
# de Mahalanobis com aderência à distribuição qui-quadrado via
# Komogorov-Smirnov, dependência rrcov

library(rrcov)
library(MASS)

multNormRobustD2KS <- function(X)
{
  n <- nrow(X)
  p <- ncol(X)
  robust <- CovOgk(X)
  Xs <- robust@raw.center
  Ss <- robust@raw.cov
  SsI <- solve(Ss)
  D2 <- apply(X,1,mahalanobis,Xs,SsI,inverted = TRUE)
  ks <- ks.test(D2,"pchisq",p)
  return(list(D=ks$statistic,p.valor=ks$p.value))
}

# Teste de normalidade multivariada, baseado em distâncias robustas
# de Mahalanobis transformadas para distâncias betas
# via Komogorov-Smirnov dependência rrcov

library(rrcov)
library(MASS)
```

```

multNormRobustbKS <- function(X)
{
  n <- nrow(X)
  p <- ncol(X)
  robust <- CovOgk(X)
  Xs <- robust@raw.center
  Ss <- robust@raw.cov
  SsI <- solve(Ss)
  D2 <- apply(X,1,mahalanobis,Xs,SsI,inverted = TRUE)
  b <- n*D2/(n-1)^2
  ks <- ks.test(b,"pbeta",p/2,(n-p-1)/2,exact = TRUE)
  return(list(D=ks$statistic,p.valor=ks$p.value))
}

# Teste de normalidade multivariada, baseado em distâncias robustas
# de Mahalanobis com aderência à distribuição qui-quadrado
# com distribuição nula obtida por meio de bootstrap paramétrico
# dependência rrcov

library(MASS)
library(rrcov)

multNormRobustD2Boot <- function(X, B = 1000)
{
  n <- nrow(X)
  p <- ncol(X)
  robust <- CovOgk(X)
  Xs <- robust@raw.center
  Ss <- robust@raw.cov
  SsI <- solve(Ss)
  D2 <- apply(X,1,mahalanobis,Xs,SsI,inverted = TRUE)
  ks <- ks.test(D2,"pchisq",p)

```

```

D <- ks$statistic
for (bi in 1:(B-1))
  {
    X <- mvrnorm(n, Xs, Ss)
    robust <- CovOgk(X)
    Xb <- robust@raw.center
    S <- robust@raw.cov
    SI <- solve(S)
    D2b <- apply(X, 1, mahalanobis, Xb, SI, inverted = TRUE)
    ks <- ks.test(D2b, "pchisq", p)
    D <- c(D, ks$statistic)
  }
p.valor <- sum(D >= D[1]) / B
return(list(D = D[1], p.valor = p.valor))
}

# Teste de normalidade multivariada, baseado em distâncias robustas
# de Mahalanobis transformadas para distâncias betas
# com distribuição nula obtida por meio de bootstrap paramétrico

library(MASS)
library(rrcov)

multNormRobustbBoot <- function(X, B = 1000)
  {
    n <- nrow(X)
    p <- ncol(X)
    robust <- CovOgk(X)
    Xs <- robust@raw.center
    Ss <- robust@raw.cov
    SsI <- solve(Ss)
    D2 <- apply(X, 1, mahalanobis, Xs, SsI, inverted = TRUE)

```

```
b <- n*D2/(n - 1)^2
ks <- ks.test(b, "pbeta", p/2, (n-p-1)/2, exact = TRUE)
D <- ks$statistic
for (bi in 1:(B-1))
{
  X <- mvrnorm(n, Xs, Ss)
  robust <- CovOgk(X)
  Xb <- robust@raw.center
  S <- robust@raw.cov
  SI <- solve(S)
  D2b <- apply(X, 1, mahalanobis, Xb, SI, inverted = TRUE)
  bb <- n*D2b/(n - 1)^2
  ks <- ks.test(bb, "pbeta", p/2, (n-p-1)/2, exact = TRUE)
  D <- c(D, ks$statistic)
}
p.valor <- sum(D >= D[1]) / B
return(list(D = D[1], p.valor = p.valor))
}
```