

ACURACIDADE DE EQUAÇÕES DE AFILAMENTO PARA REPRESENTAR O PERFIL DO FUSTE DE *Pinus elliottii*

José Roberto S. Scolforo¹, Múcio Santiago Rios¹, Antônio Donizette de Oliveira¹,
José Márcio de Mello¹, Romualdo Maestri²

RESUMO - Este estudo teve como objetivo avaliar a acuracidade das razões de volume, dos modelos polinomiais de quinto grau e de potência fracionária e da função spline cúbica na estimativa do diâmetro ao longo do fuste, em diferentes classes de diâmetro. A espécie em estudo foi *Pinus elliottii*, na região nordeste do Estado do Paraná. Os cinco modelos testados tiveram sua acuracidade avaliada através das seguintes estatísticas: coeficiente de determinação; erro padrão residual; o desvio dos diâmetros em cada iésima posição no fuste; o desvio padrão das diferenças dos diâmetros; a soma do quadrado do resíduo relativo e a porcentagem dos resíduos dos diâmetros. A partir destas estatísticas foi elaborado um ranking para cada posição relativa de medição por ocasião da cubagem rigorosa e também por classe diamétrica, objetivando expressar de forma sumarizada a acuracidade dos cinco modelos. Como resultados principais, pode se destacar que: as funções splines cúbicas e a equação de afilamento de Clutter não são recomendadas para estimar o diâmetro ao longo do fuste de *Pinus elliottii* na região de estudo, já que estas propiciam estimativas pouco acuradas; a equação de afilamento de Amateis e Burkhart e as equações polinomiais apresentaram estimativas acuradas do diâmetro ao longo do fuste, a partir da primeira tora padrão (2,2 a 2,4 m); se for desejada estimativa mais uniforme do diâmetro ao longo do fuste, associada à acuracidade das estimativas, deve-se recomendar o uso da equação Amateis e Burkhart, seguida, do polinômio de quinto grau e o de potência fracionária; se for desejada a equação que propicia maior número de caso com estimativa acurada do diâmetro, mas sem uniformidade nestas ao longo do perfil do fuste, então o polinômio de potência fracionária deve ser o recomendado, seguido pela equação de afilamento de Amateis e Burkhart e pelo polinômio do quinto grau.

Palavras chave: Modelos polinomiais, razão de volume, spline cúbica, *Pinus elliottii*

¹ Departamento de Ciências Florestais, UFLA - C.P. 37 - CEP 37200-000 - Lavras - MG

² Pisa-Papel de Imprensa S.A. - Rod. PR 151 - Km 232 - CEP 84200-000 - Jaguariaíva, PR

ACCURACY OF TAPER EQUATIONS TO REPRESENT STEM PROFILES OF *Pinus elliottii*

ABSTRACT: This study had the objective of evaluating the accuracy of volume ratios, polynomial models and cubic spline functions for estimating diameter at different heights along the tree stem, and for different diameter classes. The data came from *Pinus elliottii* plantations in the northeastern region of Paraná State. The accuracy of the five tested models was evaluated through the following statistics: coefficient of determination; standard error of the estimate; diameter deviations at all “i” positions along the stem; standard deviation of the diameter differences; sum of squares of relative residuals; residual percentage of the diameters. Basing on these statistics, a ranking was prepared for each relative position of diameter measurement along the stem and by diameter class, aiming to express, in a summarized way, the accuracy of the five tested models. As main results it can be pointed out that: the cubic spline functions, and the Clutter taper equation were not recommended for estimating diameters along the stem of *Pinus elliottii* in this region, because they propitiate innacurate estimates; the Amateis and Burkhart taper equation, and the polynominal functions presented accurate diameter estimates along the tree stem, from the first standard log (2,2 or 2,4 m). If more uniform diameter estimates along the stem are desired, associated to accuracy of the estimates, the use of the Amateis and Burkhart equations, is recommended followed by the fifth degree polynomial, and by the fractionaire power polynomial. If the desired equation have to propitiate a greater number of cases with accurate diameter estimate, but without uniformity along the stem, then the fractionnaire power polynomial is recommended, followed by the Amateis and Burkhart taper equation, and by the fifth degree polynomial.

Key Words: Polynomial models, volume ratios, cubic spline, *Pinus elliottii*.

1 INTRODUÇÃO

O estudo da forma do fuste tem sido objeto de muitos estudos, dada a importância deste parâmetro na quantificação do volume. Experiências têm demonstrado que cada espécie, nos seus diversos estádios de desenvolvimento, possuem características de afilamento diferenciadas.

Por possuírem uma geometria particular, as árvores, de maneira geral, têm em sua base a aparência de um neilóide, passando a se assemelhar a um parabolóide na sua porção mediana, assumindo a forma de cone na sua extremidade superior. Esta particularidade geométrica constitui-se num fator negativo por ocasião do ajuste de modelos que representem o perfil da árvore (Husch, Miller e Beers, 1982)

Utilizando a função spline cúbica para este fim, (Figueiredo Filho, Borders e Hitch 1996a) concluíram sobre a necessidade da combinação de 10 pontos ao longo do fuste da árvore para representar com acuracidade o seu perfil. Já (Samson, Bindzi e Kamoso, 1996) utilizaram o método de modelagem geométrica para a representação do perfil da árvore.

Existem ainda outras alternativas, tais como o uso do polinômio do 5º grau (Schoepfer, 1966); o polinômio de potência fracionária (Hradetzky, 1976); os modelos sigmoidais (Omerod, 1973); os modelos segmentados (Max e Burkhart, 1976); modelos definidos através de análise multivariada (Ahrens, 1980); séries relativas contínuas (Pellico Netto, 1994); e as razões de volumes (Clutter, 1980); (Amateis e Burkhart, 1987); para citar apenas alguns trabalhos.

O presente estudo teve por objetivo avaliar a acuracidade das razões de volume, dos modelos polinomiais de quinto grau e potência fracionária e da função spline cúbica na estimativa do diâmetro ao longo do fuste de *Pinus elliottii*, em diferentes classes de diâmetro.

2 MATERIAL E MÉTODOS

2.1 Caracterização da área em estudo e a base de dados

A área em estudo, de propriedade da Empresa Papel Imprensa S/A, está situada no município de Jaguariaíva, estado do Paraná, entre os paralelos 24° e 24° 30' de latitude sul e os meridianos 49° 30' e 50° de longitude oeste de Greenwich, com altitude variando entre 500 e 1500 m. Segundo a classificação de Köppen, o clima para a região é o Cfb, temperado propriamente dito, com temperatura média abaixo de 18° (mesotérmico), no mês mais frio com verões frescos e temperatura média abaixo de 22°, sem estação seca definida no mês mais quente.

A vegetação original é a floresta ombrófila (mista de latifoliadas com araucárias e campo submontano), com relevo variando de ondulado a fortemente ondulado e solos predominantes arenosos (Instituto Agrônômico do Paraná, 1994).

2.2 Cubagem das árvores amostradas

Foram cubadas 185 árvores de *Pinus elliottii*, das quais mediram-se os diâmetros nas alturas relativas de 1%, 2%, ... ,5%, bem como à 1,3m do solo(DAP), 10%, 15%, 25%, 35%, ... , 95% da altura total da árvore. Para as alturas relativas de 1%, 2%, 3%, 4%, e, 5%, bem como à 1,3m do solo, os diâmetros foram obtidos através do contato do operador com a árvore. Nas demais alturas utilizou-se o Penta-Prisma de Wheeler apoiado em tripé de base regulável, com Suunto acoplado, sem que a árvore tivesse sido abatida. A cubagem realizada desta maneira impossibilitou a visualização do topo da maioria das árvores com DAP entre 15 e 29,9 cm, o que impediu, nestes casos, a medição do diâmetro a 95% da altura.

2.2.1 Classificação de sítio

Próximo a cada árvore cubada, foi alocada uma parcela de 15 x 20 m, medindo-se os diâmetros à altura de 1,30m (DAP) de todas as árvores vivas e as alturas das três árvores mais grossas da parcela (árvores dominantes). A partir destas informações definiu-se o índice de sítio do local, utilizando a equação de sítio para a espécie e área em questão. O modelo de sítio manuseado pelo método da diferença algébrica, possibilitou gerar as curvas polimórficas limítrofes das classes de sítio. A idade de referência adotada foi de 20 anos e os índices de sítio nesta idade foram: 16,5; 19,5; 22,5; 25,5 e 28,5m. O modelo foi expresso por:

$$Hd_2 = Exp(\mathbf{b}_0) \cdot \left(\frac{Hd_1}{Exp(\mathbf{b}_0)} \right)^{(I_1 / I_2)^{b_1}} + ei.$$

A equação resultante foi:

$$S = Exp(3,76378291) \left[\frac{Hd}{Exp(3,76378291)} \right] \left(\frac{I}{I_{ret}} \right)^{0,7825083},$$

com coeficiente de determinação, $R^2 = 93,6 \%$, e o erro padrão residual $S_{y,x} = \pm 1,13m$, conforme definido por Scolforo(1997).

Das 185 árvores de *Pinus elliottii*, cubadas rigorosamente, foram utilizadas neste estudo as 89 classificadas na classe de sítio III. Nesta classe detectou-se a maior frequência entre as árvores cubadas, possibilitando um número suficiente de repetições nas classes de diâmetro para a implementação dos delineamentos estatísticos, como mostra a distribuição diamétrica na Tabela 1. Esta classe de produtividade de sítio representa a média para a espécie em estudo, cuja classificação determinou cinco diferentes níveis de produtividade.

TABELA 1: Distribuição diamétrica observada para a amostra de 185 árvores de *Pinus elliottii*, e a frequência destas na classe de sítio III.

Classe de diâmetro	Amostra	Classe de Sítio III
10— 15	1	1
15— 20	27	9
20— 25	42	25
25— 30	40	19
30— 35	40	20
35— 40	24	12
40— 45	10	3
45— 50	1	-
Total	185	89

As classes diamétricas 10 a 15 cm, 40 a 45cm e 45 a 50cm não foram utilizadas neste estudo, por apresentarem um baixo número de repetições.

2.3 Equações de afilamento

a) Função spline cúbica

Matematicamente, splines são definidas como sendo polinômios segmentados de grau “n”, cujos valores da função e suas primeiras “n-1” derivadas contínuas passam nos pontos onde se juntam. As abcissas destes pontos de junção são chamados de “nós” e estes polinômios segmentados são escolhidos para minimizar a curvatura quadrática média (Kirchner et al., 1989; Liu,1980). Considerando uma função $f(x)$ sobre um intervalo $[a,b]$, através de um único polinômio, é possível dividi-lo em “n” subintervalos $[a,x_1]$, $[x_1,x_2]$, ... , $[x_{n-1},b]$, e então

aproximar $f(x)$ por um polinômio diferente em cada um destes subintervalos. Na determinação da função aproximada $g(x)$ é necessário que:

- em cada subintervalo a função aproximada $g(x)$ seja de grau máximo 3;
- $g(x)$ esteja em concordância com $f(x)$ em cada um dos “ $n+1$ ” pontos $x_0 = a, x_1, \dots, x_{n-1}, x_n = b$;
- a primeira derivada de $g'(x)$ e a segunda derivada $g''(x)$ sejam contínuas nos pontos $[a,b]$.

Quando estas condições são satisfeitas, $g(x)$ é então chamada de função spline cúbica. Em adição, a propriedade da curvatura mínima de uma função spline determina que o valor médio quadrático de $g''(x)$ nos pontos $[a,b]$ é mínimo.

No caso de se selecionar $g''(a) = 0$ e $g''(b) = 0$ para complementação das especificações de $g(x)$, então a aproximação passa a ser denominada de spline cúbica natural. Na Figura 1 é ilustrado o conceito da função spline para o perfil da árvore.

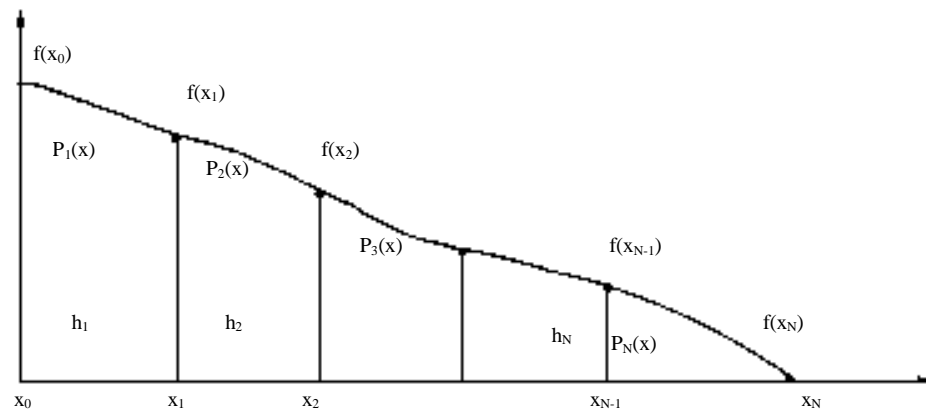


FIGURA 1: Aplicação da função spline cúbica para o perfil da árvore.

Sejam $x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_{N-1} < x_N$ e $f(x_0), f(x_1), f(x_2), \dots, f(x_N)$ conhecidos. A cada intervalo $[x_{j-1}, x_j]$, $j = 1, 2, \dots, N$, será ajustado um polinômio $P_j(x)$ de grau 3 da forma:

$$P_j(x) = a_j + b_j(x-x_{j-1}) + c_j(x-x_{j-1})^2 + d_j(x-x_{j-1})^3$$

Verificando as condições:

- a) $P_j(x_{j-1}) = f(x_{j-1})$, $j = 1, 2, \dots, N$
- b) $P'_j(x_j) = P'_{j+1}(x_j)$, $j = 1, 2, \dots, N-1$
- c) $P''_j(x_j) = P''_{j+1}(x_j)$, $j = 1, 2, \dots, N-1$

Para esta situação, tem-se $4N-2$ equações lineares (condições) e $4N$ incógnitas. Para que seja obtida a solução deste sistema de equações é necessário que sejam impostas mais duas condições, assim especificadas:

- d) $P''(x_0) = 0 = P''(x_N)$ (spline natural) , ou
- e) $P'(x_0) = f'(x_0)$ e $P'(x_N) = f'(x_N)$ (spline de fronteira indeterminada, de acordo com Velazquez, 1994).

De posse, então, das $4N$ equações, o sistema terá solução única. No entanto, há que se considerar a esparsidade da matriz A , em que número de valores nulos é grande, inclusive na sua diagonal. Esta esparsidade impede a aplicação direta de $Ax = B$, pelo método de eliminação de Gauss-Jordam. Assim, deve-se aplicar:

$$A^T A x = A^T B \quad \therefore \quad x = (A^T A)^{-1} A^T B$$

Desta maneira, poderão ser obtidos os “j” polinômios dos segmentos que irão representar o intervalo $[x_0, x_N]$.

O ajuste das funções splines será realizado para cada classe diamétrica. Será então aproximada pela ligação de três polinômios, adotando-se posições relativas dos diâmetros ao longo do fuste , conforme estudo desenvolvido por Rios(1997).

Classe de diâmetro	Posições relativas dos diâmetros
15 — 20	$D_{10\%}$ e $D_{35\%}$
20 — 25	$D_{10\%}$ e $D_{35\%}$
25 — 30	$D_{10\%}$ e $D_{25\%}$
30 — 35	$D_{10\%}$ e $D_{35\%}$
35 — 40	$D_{10\%}$ e $D_{25\%}$

b) Modelo de Amateis e Burkhart

Amateis e Burkhart (1987) apresentaram dois modelos para estimar diâmetros e alturas comerciais, como seguem as expressões:

$$\text{volume até qualquer diâmetro superior: } V_c = V \left(1 - \alpha_0 \frac{d^{\alpha_1}}{D^{\alpha_2}} \right) + e_i \quad (1)$$

$$\text{volume até qualquer altura comercial: } V_c = V \left(1 - \gamma_0 \frac{(H-h)^{\gamma_1}}{H^{\gamma_2}} \right) + e_i \quad (2)$$

onde:

- V_c = volume comercial com casca, até um diâmetro ou altura comercial previamente definidos (m^3);
- V = volume total com casca (m^3);
- d = diâmetro comercial (cm);
- D = diâmetro à 1,3 m de altura (cm);
- H = altura total (m);
- h = altura comercial (m);
- α_i, γ_i = parâmetros a serem estimados;
- e_i = erro de estimativa.

Para a implementação deste modelo é necessário uma equação de volume que pode ser oriunda do modelo: $V = b_1 D^{b_2} H^{b_3} + e_i$

onde:

- V, D, H e e_i = já definidos anteriormente;
- β_i = parâmetros a serem estimados.

Igualando os modelos (1) e (2), obtêm-se os modelos de afilamento que propiciam a estimativa do diâmetro correspondente a qualquer altura, ou vice-versa, conforme segue:

$$a_0 \frac{d^{a_1}}{D^{a_2}} = g_0 \frac{(H-h)^{g_1}}{H^{g_2}} \quad (3)$$

Resolvendo (3) em função do diâmetro (d), é obtido o modelo para estimar diâmetros ao longo do fuste da árvore.

$$d = \left[\frac{g_0 D^{a_2} (H-h)^{g_1}}{a_0 H^{g_2}} \right]^{\frac{1}{a_1}}$$

Resolvendo (3) em relação à altura comercial (h), obtêm-se o modelo para estimar alturas ao longo do fuste da árvore.

$$h = H - \left[\frac{\alpha_0 H^{\gamma_2} d^{\alpha_1}}{\gamma_0 \cdot D^{\alpha_2}} \right]^{\frac{1}{\gamma_1}}$$

c) Modelo de Clutter

Para o modelo de Clutter (1980), utiliza-se um modelo de volume total e outro de volume comercial (ou razão de volume). Através da integral e derivada destes, pode-se obter o modelo de afilamento para estimar o diâmetro a qualquer altura e vice-versa.

$$\text{Modelo Volumétrico: } V = \beta_1 D^{\beta_2} H^{\beta_3} + e_i$$

onde:

V, D, H e e_i = já definidos anteriormente;

β_i = parâmetros a serem estimados.

$$\text{Volume até qualquer diâmetro comercial: } V_c = V \left(1 - \alpha_1 \frac{d^{\alpha_2}}{D^{\alpha_3}} \right) + e_i$$

onde:

V_c, V, α_i, d_i, D e e_i = já definidos anteriormente.

Para a obtenção do modelo de afilamento é necessário considerar que um modelo de volume comercial de topo variável implicitamente define um modelo de afilamento. Das expressões anteriores, aplicando-se o conceito de integral e derivada, conforme pode-se observar em Clutter (1980), obtêm-se os modelos de afilamento que permitem estimar a altura comercial em função do diâmetro e os diâmetros em função das alturas comerciais.

Assim, o afilamento do fuste da árvore pode ser definido pelos modelos:

- altura comercial:

$$h = H - d^{\alpha_2 - 2} \cdot K^{-1} \cdot \beta_1 D^{\beta_2} H^{\beta_3} \cdot \alpha_1 D^{\alpha_3} \left[\frac{\alpha_2}{\alpha_2 - 2} \right]$$

- diâmetro comercial:

$$d = \left\{ K \frac{1}{\beta_1 D^{\beta_2} \cdot H^{\beta_3}} \cdot \frac{1}{\alpha_1} \cdot D^{-\alpha_3} \left[\frac{\alpha_2 - 2}{\alpha_2} \right] (H - h) \right\}^{\frac{1}{(\alpha_2 - 2)}}$$

onde:

$h_i, H, d_i, \alpha_i, \beta_i, D$, = definidos anteriormente;

$$K = \pi/40.000$$

Os modelos de afilamento são obtidos das razões de volume e dos modelos para volume total. Portanto, diferentemente dos polinômios de quinto grau, de potência fracionária, e das funções splines, o ajuste destes é feito a partir de arquivos que contemplem volume total e comercial, vinculados aos diâmetros e alturas previamente definidos. No caso destes procedimentos o ajuste foi realizado para a amostra, desconsiderando as classes diamétricas.

d) Polinômio de quinto grau - Schoepfer(1966)

O polinômio de quinto grau foi ajustado por classe diamétrica e tem a forma:

$$\frac{d_i}{D} = \beta_0 + \beta_1 \left(\frac{h_i}{H} \right) + \beta_2 \left(\frac{h_i}{H} \right)^2 + \beta_3 \left(\frac{h_i}{H} \right)^3 + \beta_4 \left(\frac{h_i}{H} \right)^4 + \beta_5 \left(\frac{h_i}{H} \right)^5 + e_i$$

onde:

d_i , D , β_i , Hh_i e e_i = definidos anteriormente.

Isolando d_i , obtém-se a função de afilamento, através da qual pode-se estimar o diâmetro correspondente a qualquer altura na árvore, desde que fornecido o seu diâmetro a 1,30m e a altura total.

$$d_i = D \left[\beta_0 + \beta_1 \left(\frac{h_i}{H} \right) + \beta_2 \left(\frac{h_i}{H} \right)^2 + \beta_3 \left(\frac{h_i}{H} \right)^3 + \beta_4 \left(\frac{h_i}{H} \right)^4 + \beta_5 \left(\frac{h_i}{H} \right)^5 \right]$$

d) Polinômio de Potência fracionária - Hradetzky(1976)

Este modelo se diferencia do polinômio do quinto grau por apresentar um mix de potências inteiras e fracionárias, como tentativa de melhor representar o perfil da árvore. Hradetzky(1976) sugeriu a utilização de potências inteiras da ordem de dezenas para representar a base de árvore, em conjunto com potências fracionárias para representar a porção superior do fuste. Este modelos serão construídos por classe diamétrica, utilizando o procedimento “Stepwise”.

De uma forma geral, os polinômios a serem construídos são:

$$\frac{d_i}{D} = \beta_0 + \beta_1 \left(\frac{h_i}{H} \right)^{p_1} + \beta_2 \left(\frac{h_i}{H} \right)^{p_2} + \dots + \beta_n \left(\frac{h_i}{H} \right)^{p_n} + e_i$$

onde:

d_i , D , h_i , H , β_i , e e_i = definidos anteriormente;

p_i = expoentes variando entre 0,005 e 25.

Os expoentes utilizados na construção dos modelos por classe de diâmetro através do procedimento de “Stepwise” foram: 0,005; 0,09; 0,08; 0,07; 0,06; 0,05; 0,04; 0,03; 0,02; 0,01; 0,9; 0,8; 0,7; 0,6; 0,5; 0,4; 0,3; 0,2; 0,1; 1; 2; 3; 4; 5; 10; 15; 20 e 25.

Isolando di obtém-se a função de afilamento :

$$d_i = D \left[\beta_0 + \beta_1 \left(\frac{h_i}{H} \right)^{p1} + \beta_2 \left(\frac{h_i}{H} \right)^{p2} + \dots + \beta_n \left(\frac{h_i}{H} \right)^{pn} \right]$$

2.4 Acuracidade dos modelos de afilamento

Os cinco modelos terão sua acuracidade avaliada através de várias estatísticas. O coeficiente de determinação (R^2), o erro padrão da estimativa (Syx) e o exame da distribuição gráfica dos resíduos. Adicionalmente, estatísticas como aquelas utilizadas por Parresol, Hotvedt e Cao (1987) e Figueiredo Filho, Borders e Hitch (1996b) serão calculadas conforme mostrado na Tabela 2. A variável avaliada foi o diâmetro nas diferentes posições relativas 1%; 2%; 3% ; 4%; 5%; 10%; 15%; 25%; 35%; ...;85% da altura da árvore, para as classes diamétricas de 15 a 19,9 cm; de 20 a 24,9 cm; e de 25 a 29,9 cm. Para as classes de 30 a 34,9 cm e 35 a 39,9 cm foi também considerada a posição 95% da altura da árvore.

TABELA 2: Estatística utilizada para avaliação das estimativas dos diâmetros.

Desvio (D)	$(\sum \text{Diff}_i)/N$
Desvio padrão das diferenças	$[\sum (\text{Diff}_i - D)^2 / (N-1)]^{0.5}$
Soma do quadrado do resíduo relativo	$\sum (\text{Diff}_i / d_i)^2$
Porcentagem dos resíduos	$\sum (\text{Diff}_i / d_i) 100/N$

Onde:

$\text{Diff}_i = (d_i - \hat{d}_i)$ é o desvio dos diâmetros em cada iésima posição no fuste (1%, 2%, ... , 95%)

d_i = diâmetro da árvore, na posição i no fuste

\hat{d}_i = diâmetro da árvore estimado para a posição i no fuste

N = número de árvores

A partir destas estatísticas, será elaborado um ranking para expressar de forma sumarizada a acuracidade dos cinco modelos de afilamento testados. Este ranking será para cada

posição relativa em que se efetuou a cubagem rigorosa e também por classe diamétrica, considerando as quatro estatísticas da Tabela 2. Será atribuída a nota 1 à equação que apresentar maior acuracidade e assim sucessivamente, até a nota 5 para a equação que apresentar menor acuracidade. No caso de mesmo valor em qualquer das estatísticas, para diferentes equações, estas receberão a mesma nota.

3 RESULTADOS E DISCUSSÃO

3.1 Ajustes dos modelos para a forma da árvore

As estimativas dos parâmetros dos modelos ajustados e as medidas de precisão das equações são sumarizadas na Tabela 3. As razões de volume apresentaram coeficiente de determinação próximos de 100%, erro padrão da estimativa tendendo a zero e distribuição gráfica dos resíduos sem tendenciosidade aparente. Estas medidas não podem ser comparadas àquelas obtidas pelos polinômios, já que seu ajuste foi por classe diamétrica e as variáveis dependentes destas duas categorias de equações são diferentes. Quanto ao ajuste dos modelos polinomiais, verifica-se uma ligeira superioridade das medidas de precisão das equações de potência fracionária em relação ao polinômio do quinto grau, em todas as classes diamétricas.

TABELA 3: Estimativas dos parâmetros e medidas de precisão das equações de afilamento.

Amateis e Burkhart					
Volume comercial					
$\hat{\alpha}_0$	\hat{a}_1	\hat{a}_2	F	R ²	S _{yx} (%)
0,838940	3,493069	3,466544	34493,37	0,9913	5,27
\hat{g}_0	\hat{g}_1	\hat{g}_2	F	R ²	S _{yx} (%)
0,669337	2,314865	2,200071	99999,00	0,9981	2,44

Continua...

Cont. Tabela 3

Volume total									
	\hat{b}_1	\hat{b}_2	\hat{b}_3				F	R ²	S _{yx} (%)
	0,00004049	2,07038870	0,88173127				5367,68	0,9764	8,29
Clutter									
Volume comercial									
	$\hat{\alpha}_1$	$\hat{\alpha}_2$	$\hat{\alpha}_3$				F	R ²	S _{yx} (%)
	0,838940	3,493069	3,466544				34493,37	0,9913	5,27
Volume Total									
	$\hat{\beta}_1$	$\hat{\beta}_2$	$\hat{\beta}_3$				F	R ²	S _{yx} (%)
	0,00004049	2,07038870	0,88173127				5367,68	0,9764	8,29
Polinômio do quinto grau									
Classe	$\hat{\beta}_0$	$\hat{\beta}_1(x)$	$\hat{\beta}_2(x)^2$	$\hat{\beta}_3(x)^3$	$\hat{\beta}_4(x)^4$	$\hat{\beta}_5(x)^5$	F	R ²	S _{yx} (%)
15 — 20	1,30097	-5,72607	28,22309	-68,2387	73,28483	-28,8453	749,13	0,9652	7,91
20 — 25	1,29442	-5,93576	29,18264	-69,5181	73,59940	-28,6249	2687,20	0,9719	7,31
25 — 30	1,25781	-5,19395	24,23754	-55,7595	57,09250	-21,6332	2891,20	0,9794	6,45
30 — 35	1,25059	-5,27211	24,89684	-56,8517	57,77369	-21,7542	2637,09	0,9761	6,86
35 — 40	1,23459	-4,96266	23,70093	-54,7740	55,72381	-20,9151	2228,36	0,9821	5,93
Polinômio de Potência Fracionária									
Classe	$\hat{\beta}_0$	$\hat{\beta}_1(x)^{0,005}$	$\hat{\beta}_2(x)^{0,3}$	$\hat{\beta}_3(x)^3$	$\hat{\beta}_4(x)^{25}$		F	R ²	S _{yx} (%)
15 — 20	1,366495	0,103462	-0,974318	-0,327520	-0,167932		1112,51	0,9705	7,28
Classe	$\hat{\beta}_0$	$\hat{\beta}_1(x)^{0,005}$	$\hat{\beta}_2(x)^{0,2}$	$\hat{b}_3(x)^1$	$\hat{\beta}_4(x)^{15}$		F	R ²	S _{yx} (%)
20 — 25	1,380405	0,146518	-0,877506	-0,243002	-0,297431		4355,98	0,9782	6,44

Continua...

Cont. Tabela 3

Classe	$\hat{\beta}_0$	$\hat{\beta}_1(x)^{0,005}$	$\hat{\beta}_2(x)^{0,2}$	$\hat{h}_3(x)^5$	$\hat{\beta}_4(x)^{25}$	F	R ²	S _{yX} (%)
25 — 30	1,324387	0,372558	-1,193941	-0,569983	0,071323	4442,71	0,9832	5,83
Classe	$\hat{\beta}_0$	$\hat{\beta}_1(x)^{0,005}$	$\hat{\beta}_2(x)^{0,2}$	$\hat{h}_3(x)^5$	$\hat{h}_4(x)^{20}$	F	R ²	S _{yX} (%)
30 — 35	1,319129	0,332824	-1,126327	-0,560792	0,049126	3970,58	0,9801	6,27
Classe	$\hat{\beta}_0$	$\hat{\beta}_1(x)^{0,005}$	$\hat{\beta}_2(x)^{0,2}$	$\hat{h}_3(x)^3$	$\hat{\beta}_4(x)^{25}$	F	R ²	S _{yX} (%)
35 — 40	1,288639	0,291662	-0,994349	-0,516699	-0,062167	3421,46	0,9859	5,36

X = (h_i/H)

3.2 Acuracidade das equações de afilamento

Nas Tabelas 4 e 5 são apresentadas, para as cinco equações estudadas, as estatísticas por altura relativa para as árvores compreendidas na menor (15 -19,9 cm) e na maior (35 - 39,9 cm) classe diamétrica estudada.

Das estatísticas mostradas nestas tabelas e também para as outras duas classes diamétricas foi obtido o Ranking conforme mostrado na Tabela 6.

TABELA 4: Estatística para as estimativas dos diâmetros ao longo do fuste das árvores de *Pinus elliottii* na classe de 15 a 19,9 cm de diâmetro, para os modelos testados com seus respectivos parâmetros: D = desvio; SD = desvio padrão das diferenças; SSRR = soma do quadrado das diferenças; RP = porcentagem dos resíduos.

Mod. Estatística	Alturas relativas (%)																
	0	1	2	3	4	5	10	15	25	35	45	55	65	75	85	95	
1	D	0,00	-1,17	-1,90	-2,12	-2,19	-1,81	0,01	0,90	1,29	0,36	-0,11	-0,08	0,38	0,97	3,19	0,00
	SD	0,00	1,32	0,88	0,98	0,91	0,86	0,37	1,21	1,56	0,86	0,84	0,96	1,35	1,12	0,50	0,00
	SSRR	0,00	0,06	0,09	0,13	0,15	0,11	0,00	0,07	0,16	0,04	0,04	0,07	0,20	0,23	0,63	0,00
	RP	0,00	-5,49	-9,30	-10,87	-11,84	-9,93	0,04	5,47	8,40	2,44	-1,37	-1,19	2,71	12,04	45,64	0,00
2	D	6,30	4,51	3,17	2,34	1,68	1,48	0,86	0,27	0,06	-0,06	0,02	0,11	0,29	0,19	1,53	0,00
	SD	2,31	1,80	1,17	0,72	0,61	0,38	0,41	0,85	1,17	0,90	0,95	0,78	0,84	0,56	0,60	0,00
	SSRR	0,66	0,41	0,24	0,14	0,08	0,06	0,03	0,03	0,06	0,05	0,05	0,04	0,08	0,04	0,15	0,00
	RP	25,98	20,27	15,40	12,01	8,94	8,05	4,97	1,51	-0,10	-0,82	-0,27	0,82	2,27	2,22	21,68	0,00
3	D	6,25	4,47	3,13	2,30	1,65	1,45	0,87	0,31	0,15	0,08	0,21	0,34	0,55	0,48	1,82	0,00
	SD	2,38	1,90	1,25	0,80	0,71	0,47	0,50	0,94	1,24	0,98	1,00	0,80	0,84	0,53	0,62	0,00
	SSRR	0,66	0,40	0,23	0,14	0,08	0,06	0,03	0,03	0,06	0,05	0,06	0,05	0,09	0,05	0,21	0,00
	RP	25,74	20,03	15,19	11,82	8,77	7,92	4,99	1,69	0,47	0,20	1,27	2,99	5,18	6,06	25,79	0,00
4	D	1,02	0,08	-0,52	-0,68	-0,76	-0,44	0,59	0,59	0,13	-0,44	-0,28	0,18	0,38	-0,38	-0,03	0,00
	SD	2,48	1,88	1,25	0,84	0,61	0,41	0,37	0,79	1,12	0,86	0,91	0,76	0,86	0,59	0,61	0,00
	SSRR	0,10	0,06	0,04	0,03	0,02	0,01	0,01	0,03	0,05	0,05	0,06	0,04	0,09	0,06	0,02	0,00
	RP	3,79	0,08	-2,56	-3,39	-4,01	-2,31	3,40	3,50	0,37	-3,69	-2,78	1,43	3,34	-5,41	-0,86	0,00
5	D	-0,13	0,50	0,02	-0,25	-0,48	-0,35	0,05	-0,02	0,20	0,13	0,09	-0,01	-0,06	-0,40	0,65	0,00
	SD	2,55	1,93	1,23	0,85	0,79	0,55	0,37	0,79	1,14	0,86	0,91	0,77	0,85	0,67	1,00	0,00
	SSRR	0,10	0,06	0,03	0,02	0,01	0,01	0,00	0,02	0,05	0,04	0,05	0,04	0,09	0,07	0,04	0,00
	RP	-1,06	1,98	0,06	-1,16	-2,55	-1,81	0,28	-0,30	0,86	0,63	0,34	-0,36	-1,60	-5,74	8,92	0,00

1 = Spline cúbica : 2 = Amateis e Burkhart : 3 = Clutter : 4 = Polinômio de quinto grau : 5 = Polinômio de Potência fracionária

TABELA 5: Estatística para as estimativas dos diâmetros ao longo do fuste das árvores de *Pinus elliottii* na classe de 35 a 39,9 cm de diâmetro, para os modelos testados com seus respectivos parâmetros: D = desvio; SD = desvio padrão das diferenças; SSRR = soma do quadrado das diferenças; RP = porcentagem dos resíduos.

Mod Estatística	Alturas relativas (%)															
	0	1	2	3	4	5	10	15	25	35	45	55	65	75	85	95
1 D	0,00	-2,27	-2,99	-3,42	-3,60	-3,15	0,27	0,77	0,15	-0,30	-0,29	0,57	0,73	1,75	2,22	4,81
SD	0,00	1,71	1,75	1,50	1,47	1,22	0,60	1,14	0,89	1,14	1,26	1,66	1,93	1,62	1,21	1,06
SSRR	0,00	0,04	0,06	0,08	0,09	0,07	0,00	0,01	0,01	0,02	0,02	0,05	0,08	0,18	0,46	1,16
RP	0,00	-5,18	-7,27	-8,64	-9,45	-8,42	0,75	2,27	0,43	-1,14	-1,15	2,34	3,33	10,89	20,57	62,05
2 D	10,52	7,05	5,17	3,58	2,30	1,67	0,85	-0,45	-0,21	0,52	0,79	1,21	0,43	0,30	-0,22	2,48
SD	2,70	1,77	2,05	1,41	1,11	0,63	0,60	1,03	0,89	1,01	0,85	1,17	1,70	1,53	1,10	1,10
SSRR	0,45	0,24	0,15	0,08	0,04	0,02	0,01	0,01	0,01	0,01	0,02	0,04	0,06	0,07	0,10	0,32
RP	21,91	15,99	12,21	8,86	5,91	4,42	2,38	-1,42	-0,76	1,70	3,00	5,07	1,71	1,22	-2,92	31,39
3 D	11,25	7,79	5,91	4,33	3,05	2,43	1,64	0,37	0,66	1,44	1,74	2,17	1,39	1,22	0,60	3,04
SD	2,78	1,91	2,22	1,57	1,27	0,82	0,65	0,93	0,90	1,09	0,87	1,15	1,64	1,49	1,06	1,08
SSRR	0,51	0,29	0,19	0,11	0,06	0,04	0,02	0,01	0,01	0,03	0,05	0,10	0,09	0,11	0,10	0,47
RP	23,44	17,65	13,97	10,72	7,87	6,43	4,61	1,09	2,10	4,92	6,68	9,25	6,80	7,32	4,99	38,79
4 D	2,09	0,12	-0,43	-0,84	-1,09	-0,80	1,30	0,97	0,37	-0,24	-0,26	0,78	0,63	0,35	-0,93	2,11
SD	2,56	1,62	1,88	1,26	0,97	0,50	0,60	1,07	0,89	0,97	0,86	1,18	1,72	1,54	1,13	1,12
SSRR	0,04	0,01	0,02	0,01	0,01	0,01	0,01	0,02	0,01	0,01	0,01	0,03	0,06	0,08	0,19	0,23
RP	4,08	0,13	-1,28	-2,25	-2,94	-2,17	3,66	2,90	1,18	-0,96	-1,09	3,20	2,77	1,54	-9,81	26,52
5 D	0,10	0,48	0,47	0,03	-0,45	-0,45	0,45	-0,14	0,38	0,80	0,62	0,66	-0,29	-0,32	-0,52	2,70
SD	2,53	1,70	1,96	1,28	1,09	0,70	0,77	1,10	0,97	1,29	1,07	1,37	1,76	1,59	1,24	3,49
SSRR	0,02	0,01	0,02	0,01	0,01	0,00	0,00	0,01	0,01	0,02	0,01	0,03	0,07	0,09	0,13	0,37
RP	-0,12	0,95	0,88	-0,07	-1,27	-1,25	1,25	-0,49	1,18	2,72	2,35	2,71	-2,10	-2,93	-5,88	34,34

1 = Spline cúbica : 2 = Amateis e Burkhart : 3 = Clutter : 4 = Polinômio de quinto grau : 5 = Polinômio de Potência Fracionária

TABELA 6: Ranking para as equações de afilamento por classe diamétrica

Altura	Spline cubica (1)					Amateis Burkhart (2)					Clutter(3)					Polinômio 5º Grau (4)					Pol. de Potência Fracionária (5)				
	Classes de diâmetro					Classes de diâmetro					Classes de diâmetro					Classes de diâmetro					Classes de diâmetro				
%	17,5	22,5	27,5	32,5	37,5	17,5	22,5	27,5	32,5	37,5	17,5	22,5	27,5	32,5	37,5	17,5	22,5	27,5	32,5	37,5	17,5	22,5	27,5	32,5	37,5
0	4	4	4	4	4	15	16	14	16	16	14	16	18	20	20	12	13	12	12	12	11	11	10	8	8
1	8	16	8	9	11	15	14	13	14	15	14	14	17	18	19	6	8	7	5	4	10	7	8	8	7
2	10	15	9	13	10	17	14	14	15	16	16	18	18	20	20	10	7	5	8	6	6	5	10	4	7
3	14	20	9	19	12	15	11	14	8	13	14	15	19	15	18	9	7	5	7	6	7	7	9	6	5
4	18	19	15	19	17	12	10	10	12	12	11	14	16	17	16	7	8	9	7	6	6	7	6	5	5
5	18	19	20	20	20	11	10	11	11	11	11	14	16	16	16	7	4	7	7	7	7	9	6	6	6
10	4	4	4	8	4	13	9	11	6	9	16	13	15	14	15	9	13	11	12	11	6	9	10	7	8
15	17	16	14	10	14	8	5	7	16	9	11	9	6	10	6	11	11	13	8	15	4	13	12	6	7
25	18	14	17	13	4	7	8	14	14	6	12	7	6	10	12	6	9	8	6	8	11	15	17	10	11
35	10	8	15	9	10	8	8	5	14	8	8	9	11	9	16	13	10	6	15	4	7	18	18	7	15
45	9	15	16	18	11	7	5	6	9	11	14	11	12	9	16	15	6	4	11	5	8	18	11	6	11
55	14	15	9	17	10	9	5	10	8	12	16	11	16	15	15	9	6	11	4	10	5	19	9	10	9
65	13	9	13	15	16	6	7	8	9	6	12	14	17	16	15	12	9	13	4	10	6	19	4	16	9
75	20	14	14	10	20	5	8	5	6	5	11	14	12	9	13	10	4	7	15	10	14	20	15	20	12
85	16	15	18	15	19	11	7	7	4	5	16	10	13	7	7	6	5	13	17	14	11	19	6	13	11
95	-	-	-	18	16	-	-	-	7	9	-	-	-	10	14	-	-	-	5	7	-	-	-	16	14

Analisando o Ranking mostrado na Tabela 6 pode-se observar que, independentemente da altura do fuste, as estimativas propiciadas pela função spline cúbica foram sempre pouco acuradas. Exceção foi identificada nas posições relativas de 0 e 10% da altura. Este mesmo comportamento foi identificado para todas as cinco classes diamétricas estudadas. Desta forma, o uso das splines cúbicas não é recomendado para estimar o diâmetro ao longo do perfil do fuste de *Pinus elliottii* na região deste estudo.

Para a equação de afilamento de Clutter as estimativas dos diâmetros ao longo do perfil do tronco também foram pouco acuradas. Exceção foi identificada nas posições relativas de 15 a 35% da altura da árvore, principalmente nas classes diamétricas que compreenderam árvores com DAP entre 20 e 29,9 cm. A pouca acuracidade desta função de afilamento para estimar o diâmetro ao longo do perfil do fuste, em todas as classes diamétricas estudadas, não a credencia para ser utilizada com segurança para a espécie e região sob estudo.

A equação de afilamento proposta por Amateis e Burkhart apresenta, em todas as classes diamétricas estudadas, baixa acuracidade na estimativa dos diâmetros correspondentes à base da árvore. Este fato é notadamente expressivo até a posição de 5% da altura da árvore. Nas classes de diâmetro com valor central de classe de DAP de 32,5 cm, esta tendência é permanente até a posição de 35% da altura. De maneira geral, em todas as classes diamétricas esta equação de afilamento apresenta estimativas acuradas do diâmetro nas porções do tronco, para as quais se faz de fato importante efetuar estas estimativas. Estas porções normalmente correspondem à altura de pelo menos uma tora padrão, de 2,2 a 2,4 m de comprimento. Então, em árvores com menos que 42m de altura, esta equação é perfeitamente possível de ser utilizada, apresentando estimativas acuradas dos diâmetros ao longo do tronco.

O Polinômio do 5º grau, assim como o polinômio de potência fracionária, apresentam estimativas acuradas do diâmetro principalmente na base da árvore, até a posição relativa correspondente a 5% da altura.

Este fato não tem grande importância, já que a aplicação destas equações tem particular importância acima da altura de 1 tora padrão. Estas tem dimensões variadas de acordo com o uso, no entanto é comum o seu comprimento estar situado entre 2,20 a 2,40 metros.

Nas alturas ao longo do fuste, acima da posição relativa de 5% da altura, pode-se notar que na primeira classe diamétrica (15 a 19,9 cm) há uma maior acuracidade nas estimativas do diâmetro ao longo do fuste para o polinômio de 5º grau. Já na segunda e quarta classes diamétricas este comportamento se inverte. Na maior classe diamétrica há uma acuracidade semelhante entre os dois polinômios considerados.

Na Tabela 7 são mostradas as equações que apresentaram as estimativas mais acuradas dos diâmetros nas diferentes posições do fuste, de 5 a 95% da altura, por classe diamétrica. A equação de potência fracionária apresentou estimativas mais acuradas em um maior número de casos para a primeira (15 a 19,9 cm); terceira (25 a 29,9 cm) e quarta classe diamétrica (30,0 a 34,9 cm). Para a segunda (20 a 24,9 cm) e quinta classe (35 a 39,9 cm), foi a equação de afilamento de Amateis e Burkhart a que apresentou estimativas mais acuradas do diâmetro. Esta mesma equação foi a segunda mais acurada na estimativa do diâmetro na primeira e terceira classes de diâmetro.

O polinômio de 5º grau, embora não tenha se apresentado majoritariamente com números de casos de estimativas acuradas em qualquer das classes diamétricas, sempre apresentou um número de casos que mostra a estabilidade desta equação em estimar o diâmetro ao longo do fuste nas diferentes classes diamétricas.

Se for observada atentamente a Tabela 6, em contraposição à Tabela 7, pode-se notar que a partir da posição correspondente a 5% da altura, há uma maior uniformidade na acuracidade da estimativa do diâmetro, propiciada pela equação de Amateis e Burkhart, em relação aos polinômios de 5º grau e de potência fracionária. Este fato ocorre em todas as classes diamétricas, embora pela Tabela 7 tenha sido detectado um maior número de casos com maior acuracidade para o polinômio de potência fracionária, na 1ª, 3ª e 4ª classe de diâmetro. De maneira menos acurada, também o polinômio de 5º grau apresenta o comportamento descrito para o modelo de Amateis e Barkhart, quando comparado ao polinômio de potência fracionária.

A questão que se impõe nesta análise é a opção pela equação que apresenta maior número de caso de estimativa acurada ou pela equação que apresenta estimativas ligeiramente menos acurada, porém, mais uniformes ao longo do fuste. Se a primeira situação for a preferida, então deve-se fazer uso das equações de potência fracionária e da equação de Amateis e

Burkhart, de acordo com as classes diamétricas já mencionadas anteriormente. No entanto, se a segunda ação for a preferida, então prioritariamente a equação de Amateis e Burkhart deve ser utilizada. Neste caso, uma opção que apresenta acuracidade ligeiramente inferior é o polinômio de 5º grau. Acredita-se que esta segunda opção levará a menores erros médios na estimativa do diâmetro ao longo do fuste, devendo pois ser recomendado o uso das equações de Amateis e Burkhart e o polinômio de 5º grau.

TABELA 7: Equações com medidas mais acuradas do diâmetro ao longo do fuste e por classe diamétrica.

Altura %	Valor central da classe diamétrica				
	17,5	22,5	27,5	32,5	37,5
5	4 - 5	4	5	5	5
10	5	2 - 5	5	2	5
15	5	2	2	5	5
25	4	2 - 4	2	5	5
35	5	2	4	4	2
45	2	2	2	5	4
55	5	2	4	4	5
65	5 - 2	2	5	4	2
75	2	4	2	2	2
85	4	4	5	2	2
95	-	-	-	4	4
() Número de casos de estimativas mais acuradas em primeiro lugar pelas equações 1;2;3;4;e 5 por classe de diâmetro	5 (6)	2 (7)	5 (5)	5 (4)	2 (4)
	2 (3)	4 (4)	2 (3)	4 (4)	5 (4)
	4 (3)	5 (1)	4 (2)	2 (3)	4 (3)

4 CONCLUSÃO

- As funções splines cúbicas e a equação de afilamento de Clutter não são recomendadas para estimar o diâmetro ao longo do fuste de *Pinus elliottii* na região de estudo, já que estas propiciam estimativas pouco acuradas.
- A equação de afilamento, proveniente da razão de volume de Amateis e Burkhart, não propicia estimativas acuradas do diâmetro na base da árvore.
- As equações polinomiais propiciam estimativas acuradas do diâmetro na base da árvores.
- A equação de afilamento de Amateis e Burkhart e as equações polinomiais apresentaram estimativas acuradas do diâmetro ao longo do fuste a partir da primeira tora padrão (2,2 a 2,4 m).
- Se for desejada estimativa mais uniforme do diâmetro ao longo do fuste associada à acuracidade destas, deve-se recomendar o uso da equação Amateis e Burkhart, seguido do polinômio de 5^o grau e o de potência fracionária.
- Se for desejada a equação que propicia maior número de caso com estimativa acurada do diâmetro, mas sem uniformidade nestas ao longo do perfil do fuste, então o polinômio de potência fracionária deve ser o recomendado, seguido pela equação de afilamento de Amateis e Burkhart e pelo polinômio de 5^o grau.

5 REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- AHRENS, S. **A mathematical expression of stem form and volume for loblolly pine in southern Brazil**. Stillwater: Oklahoma State University, 1980. 59p. (Dissertação- Mestrado em Engenharia Florestal).
- AMATEIS, R.L.; BURKHART, H.E. Cubic-foot volume equations for loblolly pine trees in cutover site-prepared plantations. **Southern Journal of Applied Forestry**, Washington, v. 11, n. 4, p. 190-192, 1987.
- CLUTTER, J.L. Development of taper functions from variable-top merchantable volume equations. **Forest Science**, Washington, v. 26, n. 1, p. 117-120, 1980.
- FIGUEIREDO FILHO, A.; BORDERS, B.E.; HITCH, K.L. Number of diameters required to represent stem profiles using interpolated cubic splines. **Canadian Journal of Forest Research**, Ottawa, v. 26, p. 1113-1121, 1996a.

- FIGUEIREDO FILHO, A.; BORDERS, B.E.; HITCH, K.L. Taper equations for *Pinus taeda* in southern Brazil. **Forest Ecology and Management**, Amsterdam, v. 83, p. 39-46, 1996b.
- HRADETZKY, J. **Analyse und interpretation statistischer abränger Keiten. (Biometrische Beiträge zu aktuellen forschungs projekten)**. Baden - Württemberg Mitteilungen der FVA, Helf 76, 1976p. (Abt. Biometric und Informatik, 21).
- HUSCH, B; MILLER, C.L.; BEERS, T.E. **Forest mensuration**. 3. ed. New York: J. Willey & Sons, 1982. 397p.
- INSTITUTO AGRONÔMICO DO PARANÁ. **Cartas climáticas do estado do Paraná**. Londrina, 1994. 49p. (Documentos, 18).
- KIRCHNER, F.F.; FIGUEIREDO FILHO, A.F.; SCOLFORO, J.R.S.; MACHADO, S.A.; MITISHITA, E.A. O uso de funções spline no cálculo de volumes de árvores. **Floresta**, Curitiba, v. 19, n. 1, p. 116-122, 1989.
- LIU, C.J. Log volume estimation with spline approximation. **Forest Science**, Washington, v. 26, n. 3, p. 361-369, 1980.
- MAX, T.A.; BURKHART, H.E. Segmented polinomial regression applied to taper equations. **Forest Science**, Washington, v. 22, n. 3, p. 283-289, 1976.
- OMEROD, D.W. A simple bole model. **Forestry Chronicle**, Toronto, v. 49, n. 3, p.136-138, June 1973.
- PARRESOL, B.R.; HOTVEDT, J.E.; CAO, Q.V. A volume and taper prediction system for bald cypress. **Canadian Journal of Forest Research**, Ottawa, v. 17, p. 250-259, 1987.
- PELLICO NETTO, S. As curvas relativas contínuas de forma de Preußner para o sortimento dos fustes de espécies florestais. **Cerne**, Lavras, v. 1, n. 1, p. 17-27, 1994.
- RIOS, M.S. **A eficiência das funções polinomiais, da função spline cúbica e razões de volume para representar o perfil da árvore e estimar os sortimentos de *Pinus elliottii***. Lavras: UFLA, 1997. 116p. (Dissertação - Mestrado em Engenharia Florestal)
- SAMSON, M.; BINDZI, I.; KAMOSO, L.M. Représentation mathématique des noueds dans letronc des arbes. **Canadian Journal of Forest Research**, Ottawa, v. 26, p. 159-165, 1996.
- SCOLFORO, J.R.S. **Modelo de Prognose com simulador de desbaste para *Pinus taeda* e *Pinus elliottii***. Lavras: UFLA/FAEPE, 1997. 75p.
- SCHOEPFER, W. Automatisierung des massen, Sorten und Wertberechnung stenender Waldbestande Schriftenreihe Bad. [S.1]: Wurt-Forstl., 1966. n.p.

VELÁZQUEZ, M. Un fichero para construir splines con derive. **Epsilon Pi Tau**, Bowling Green, n. 29, p. 27-35, 1994.