



FAUZY TRABOUSSY

**ANOMALIAS EM AMPLITUDES FINITAS: UM CÁLCULO
EXPLÍCITO DAS AMPLITUDES TRINGULARES AVV E AAA
EM DUAS DIMENSÕES ESPAÇO-TEMPORAIS**

LAVRAS – MG

2017

FAUZY TRABOUSSY

**ANOMALIAS EM AMPLITUDES FINITAS: UM CÁLCULO EXPLÍCITO DAS
AMPLITUDES TRINGULARES AVV E AAA EM DUAS DIMENSÕES
ESPAÇO-TEMPORAIS**

Dissertação apresentada à Universidade Federal de Lavras, como parte das exigências do Programa de Pós-Graduação em Física, para a obtenção do título de Mestre.

Prof. DSc. Gilson Dallabona

Orientador

Prof. DSc. Orimar Battistel

Coorientador

LAVRAS – MG

2017

**Ficha catalográfica elaborada pela Coordenadoria de Processos Técnicos
da Biblioteca Universitária da UFLA**

Traboussy, Fauzy Antoine

Anomalias em amplitudes finitas: um cálculo explícito das amplitudes triangulares *AVV* e *AAA* em duas dimensões espaço-temporais / Fauzy Antoine Traboussy. – Lavras : UFLA, 2017.

100 p. : il.

Dissertação (mestrado acadêmico)–Universidade Federal de Lavras, 2017.

Orientador: Prof. DSc. Gilson Dallabona.

Bibliografia.

1. Anomalias. 2. Amplitudes. 3. Consistência do Cálculo.
I. Dallabona, Gilson. II. Battistel, Orimar. III. Título.

FAUZY TRABOUSSY

**ANOMALIAS EM AMPLITUDES FINITAS: UM CÁLCULO EXPLÍCITO DAS
AMPLITUDES TRINGULARES AVV E AAA EM DUAS DIMENSÕES
ESPAÇO-TEMPORAIS**

Dissertação apresentada à Universidade Federal de Lavras, como parte das exigências do Programa de Pós-Graduação em Física, para a obtenção do título de Mestre.

APROVADA em 28 de Julho de 2017.

Prof. MSc. Helvecio Geovani Fagnoli Filho UFLA
Prof. DSc. Moisés Porfírio Rojas Leyva UFLA

Prof. DSc. Gilson Dallabona
Orientador

Prof. DSc. Orimar Battistel
Co-Orientador

**LAVRAS – MG
2017**

RESUMO

Neste trabalho apresentamos uma investigação explícita e detalhada das amplitudes triangulares axial-vetor-vetor (AVV) e triplo axial (AAA) em duas dimensões espaço-tempo. Estas amplitudes estão relacionadas à função de dois pontos axial-vetor (AV) através de contrações com os momenta externos. Devido a este fato, antes de considerarmos tais amplitudes triangulares, estabelecemos um ponto de vista para a amplitude anômala AV . Este ponto de vista é construído dentro do contexto de uma estratégia alternativa de manipulação e cálculo de integrais de Feynman, divergentes ou não, típicas de soluções perturbativas de teorias quântica de campos. No referido procedimento todas as amplitudes, em todas as teorias, formuladas em dimensões espaço-tempo pares ou ímpares, renormalizáveis ou não, são tratadas da mesma maneira. As ambiguidades são automaticamente eliminadas e as relações de simetria preservadas. As bem conhecidas amplitudes divergentes anômalas são corretamente descritas apesar do caráter não ambíguo. Depois de uma apresentação detalhada de todos os cálculos concluímos que o mesmo fenômeno envolvendo a amplitude AV também está presente nas amplitudes finitas AVV e AAA . Esta conclusão reforça a hipótese que o fenômeno das anomalias está presente em todas as pseudo amplitudes de uma cadeia de amplitudes onde a amplitude divergente AV é somente a estrutura mais simples dentre elas. É esperado que o mesmo aconteça em todas as dimensões de espaço-tempo pares. Em particular, em quatro dimensões, as amplitudes de espalhamento $AVVV$ e $AAAV$ devem exibir anomalias também.

Palavras-chave: Anomalias. Amplitudes Finitas. Consistência no Cálculo Perturbativo.

ABSTRACT

In this work we present an explicit and detailed investigation concerning the triangular amplitudes axial-vector-vector (AVV) and axial triple (AAA) in two space-time dimensions. These amplitudes are related to the function in two axial-vector points (AV) through contractions with momenta. Due to this fact, before we consider such triangular amplitudes, we establish a point of view for the anomalous amplitude AV . This point of view is constructed within the context in an alternative strategy of manipulation and calculation of Feynman integrals, divergent or not, typical of perturbative solutions of quantum field theories. In the procedure all the amplitudes, in all the theories, formulated in space-time dimensions even or odd, renormalizable or not, are treated in the same way. The ambiguities are automatically eliminated and the relations of symmetry preserved. The well-known anomalous divergent amplitudes are correctly described despite the unambiguous character. After a detailed presentation of all calculations we conclude that the same phenomenon involving the AV amplitude is also present in the finite amplitudes AVV and AAA . This conclusion reinforces the hypothesis that the phenomenon of anomalies is present in all the pseudo amplitudes of a chain of amplitudes where the divergent amplitude AV is only the simplest structure among them. It is expected that the same will happen in all the dimensions of space time pairs. In particular, in four dimensions, the amplitudes of scattering $AVVV$ and $AAAV$ may display anomalies too.

Keywords: Perturbative. Amplitudes. Anomalies.

LISTA DE FIGURAS

Figura 2.1 – Representação diagramática das funções de um ponto.	12
Figura 2.2 – Representação diagramática das funções de um ponto.	13
Figura 3.1 – Representação diagramática das funções de três pontos.	15
Figura 3.2 – Relação entre funções de Green para $V V$	15
Figura 3.3 – Representação diagramática da relação entre funções de Green para AV envolvendo a contração com o vértice axial.	17
Figura 3.4 – Notação usada para definir a soma do canal direto e cruzado para o caso da amplitude AVV	19
Figura 3.5 – Notação usada para definir a soma do canal direto e cruzado para o caso da amplitude AAA	19
Figura 7.1 – Representação diagramática da relação entre funções de Green para AV envolvendo o vértice vetorial.	33
Figura 7.2 – Representação da possível violação da identidade (3.11).	35
Figura 7.3 – Violação da identidade de Ward axial da amplitude AV , fenômeno conhecido como anomalia axial.	38
Figura 8.1 – Representação diagramática da amplitude AVV	40
Figura 8.2 – Representação diagramática da amplitude AAA	49
Figura 9.1 – Representação diagramática da relação entre funções de Green para o vértice vetorial da amplitude AVV	61
Figura 9.2 – Relação entre funções de Green para a contração com o vértice axial da função de três pontos AVV	67
Figura 10.1 – Soma do canal direto e cruzado da amplitude AVV . O primeiro diagrama representa o canal direto e o segundo o canal cruzado.	72
Figura 10.2 – Soma do canal direto e cruzado da amplitude AAA . O primeiro diagrama representa o canal direto e o segundo o canal cruzado.	72
Figura 1 – Definição dos momentos externos.	86

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	6
2	O MODELO E A DEFINIÇÃO DAS AMPLITUDES FÍSICAS	10
3	RELAÇÕES ENTRE FUNÇÕES DE GREEN E AS IDENTIDADES DE WARD	15
4	A ESTRATÉGIA ADOTADA PARA TRATAR E MANIPULAR AS INTEGRAIS DE FEYNMAN DIVERGENTES	20
5	CÁLCULO DAS AMPLITUDES DE DOIS PONTOS	24
6	CÁLCULO DAS REAÇÕES DAS ENTRE FUNÇÕES DE GREEN E IDENTIDADES DE WARD ENVOLVENDO AMPLITUDES DE DOIS PONTOS	31
7	A ANOMALIA AV	33
8	CÁLCULOS DAS AMPLITUDES DE TRÊS PONTOS	40
9	CÁLCULO DAS RELAÇÕES ENTRE FUNÇÕES DE GREEN ENVOLVENDO AMPLITUDES DE TRÊS PONTOS	53
9.1	Sub-amplitudes	53
9.2	Amplitude AVV	57
9.3	Amplitude AAA	68
10	IDENTIDADES DE WARD E ANOMALIAS EM AMPLITUDES FINITAS	72
11	CONCLUSÕES E COMENTÁRIOS FINAIS	80
	REFERÊNCIAS	83
	APENDICE A –	86
	APENDICE B –	97

1 INTRODUÇÃO

A teoria quântica de campos (TQC) representa, sem dúvida, uma ferramenta adequada para a correta descrição das interações relativísticas das partículas fundamentais e, como consequência, de toda a fenomenologia associada. A construção de tal formalismo exigiu o trabalho de muitas pessoas no passado e muitos outros trabalhos ainda estão sendo feitos nos dias de hoje. O resultado de tais esforços é um formalismo consistente capaz de fornecer a descrição de muitos aspectos fenomenológicos que vão desde as propriedades das partículas até os efeitos de altas densidades e temperatura na matéria, entre outros. É usual dizer que, dentro do contexto da TQC, o fenômeno das anomalias é certamente um dos mais sutil e intrigante. A anomalia quiral em duas dimensões do espaço-tempo foi descoberta por Johnson (JOHNSON, 1963) antes mesmo da descoberta da famosa anomalia chiral em quatro dimensões por Adler-Bell-Jackiw (ADLER, 1969; BELL; JACKIW, 1969), (veja também (BARDEEN, 1969; JACKIW, 2000; GERTSEIN; JACKIW, 1969; TREIMAN R. JACKIW; WITTEN, 1985)). Nas últimas décadas o fenômeno das anomalias tem sido reinvestigado inúmeras vezes através de várias técnicas, perturbativas e não perturbativas, tais como regularização Pauli-Villars (PAULI; VILLARS, 1949) e função Zeta bem como usando-se a abordagem de relação de dispersão (ADAM; BERTLMANN; HOFER, 1992) e análises topológicas (ADAM; BERTLMANN; HOFER, 1993). Esse assunto, de uma maneira geral, também é tratado na maioria dos livros textos de TQC dos quais podemos citar alguns (BERTLMANN, 1996; FRAMPTON, 2000; KAKU, 1993; CHENG; LI, 1988; RYDER, 1996; PESKIN, 1995; RAMOND, 2001). Existem, portanto, muitas abordagens diferentes na literatura estabelecendo a existência desse fenômeno. Em todas essas abordagens existe um ponto em comum: em todas as dimensões do espaço-tempo pares existe um processo físico associado a um tensor de Lorentz possuindo no mínimo dois índices, de modo que a identidade de Ward e o correspondente limite de baixa energia não podem ser preservados simultaneamente. Tais amplitudes têm em comum o fato que, quando calculadas perturbativamente, na ordem dominante, são quantidades divergentes devido às contribuições envolvendo loops. Por causa das divergências, o cálculo explícito das amplitudes envolvidas está usualmente comprometido com os aspectos matemáticos associados ao processo de regularização. Devido ao fato da regularização dimensional (RD) (VELTMAN et al., 1972; BOLLINI; GIAMBIAGI, 1972; ASHMORE, 1972) não poder ser aplicada devido às amplitudes envolvidas no problema das anomalias serem pseudo-tensores, o cálculo explícito precisa ser feito usando-se regularizações que não são necessariamente consistentes. Em consequência disso,

somos forçados a tomar cuidado com a presença de termos ambíguos bem como com violações de simetria.

Motivados pelos aspectos acima citados, em anos recentes, alguns autores têm feito um esforço a fim de desenvolver um procedimento para lidar com o problema das divergências em TQC que seja livre de limitações e tão consistente quanto possível, de maneira que as amplitudes, que são tensores ou pseudo-tensores, possam ser tratadas da mesma maneira. Um destes procedimentos foi originalmente proposto e desenvolvido por O.A. Battistel (BATTISTEL, 1999). Muitos trabalhos usando-se este procedimento têm sido publicados em diferentes temas dentro do contexto da TQC. Dentre eles podemos destacar o problema da quebra da invariância de Lorentz e CPT por correções radiativas (BATTISTEL; DALLABONA, 2003; BATTISTEL; DALLABONA, 2006; BATTISTEL; DALLABONA, 2001; BATTISTEL; DALLABONA, 2005), a formulação consistente de modelos efetivos não renormalizáveis da cromodinâmica quântica (BATTISTEL; DALLABONA; KREIN, 2008; BATTISTEL; DALLABONA, 2009; BATTISTEL; PIMENTA; DALLABONA, 2016; FARIAS et al., 2008; FARIAS et al., 2006), a consistência do cálculo de amplitudes de Feynman divergentes em dimensões ímpares (FONSECA et al., 2013), entre outros (BATTISTEL, 2004; SCARPELLI; BATTISTEL; NEMES, 1998; DALLABONA; BATTISTEL, 2004). Tal esforço resultou num procedimento que é essencialmente algébrico, onde todas as amplitudes podem ser efetuadas sem, de fato, calcularmos explicitamente integrais de Feynman divergentes. O ingrediente essencial de tal procedimento é a exigência da validade da linearidade na operação de integração. No final do processo pode-se reobter os resultados dos métodos tradicionais de regularização de uma forma simples. O aspecto importante é que, através do uso do referido procedimento, podemos fazer investigações em cenários onde as amplitudes perturbativas são o tempo todo quantidades compatíveis com as regras de Feynman, pois as mesmas não são modificadas por uma regularização explícita. Conclusões limpas e claras podem ser extraídas mesmo em cenários onde regularizações tradicionais apresentam dificuldades.

Várias investigações envolvendo anomalias também foram realizadas através do referido procedimento (BATTISTEL; DALLABONA, 2002b; BATTISTEL; DALLABONA, 2002a; FONSECA; DALLABONA; BATTISTEL, 2014; BATTISTEL; FONSECA; DALLABONA, 2012a) e muitas outras estão sendo realizadas no presente momento permitindo muitas constatações interessantes sobre o problema. O presente trabalho representa precisamente mais um passo dessas investigações. O aspecto particular envolvido nesse trabalho é a questão da presença ou não

de anomalias em amplitudes finitas. A investigação apresentada nesse trabalho pode ser considerada como um complemento de uma investigação anterior realizada na Ref. (BATTISTEL; FONSECA; DALLABONA, 2012a) versando sobre tema similar. A questão central é bem simples. É bem sabido que em todas as dimensões espaço-temporais pares existe uma amplitude anômala que é divergente. Uma pergunta importante a ser feita é a seguinte: essa é a única amplitude anômala ou existem outras, que são finitas? Esta é uma pergunta crucial que deve ser respondida pois o mecanismo de cancelamento de anomalias, utilizado para construir teorias renormalizáveis, em princípio, somente cancela aquelas vindas de amplitudes divergentes, as quais são as mais simples relativo ao número de campos externos envolvidos. Em termos práticos, construída num espaço-tempo bi-dimensional, a amplitude que possui duas linhas internas com férmions de spin $1/2$ com um operador vetorial em um vértice e um axial-vetor em outro, denominada de amplitude AV , é uma amplitude divergente anômala. Seriam as amplitudes triangulares AVV e AAA anômalas também? A primeira parte da questão, relativa a amplitude AVV , já foi respondida num trabalho anterior (BATTISTEL; FONSECA; DALLABONA, 2012a) e a conclusão foi, sem dúvida, afirmativa. Dado esta conclusão, podemos afirmar que a amplitude AAA é anômala também? A amplitude AAA tem aspectos particulares o que torna o problema interessante justificando assim uma investigação cuidadosa e detalhada. Como somente temos vértices axiais, uma questão particularmente interessante é: se todas as identidades de Ward não podem ser preservadas simultaneamente a um certo limite de baixa energia, eles são todos violados ou somente alguns deles? As violações, caso aconteçam, serão pelos mesmos fatores ou os fatores podem ser diferentes para vértices distintos? Finalmente, uma questão crucial seria: a existência de anomalias em amplitudes finitas é dependente da prescrição adotada para a amplitude anômala divergente?

Poderíamos fazer um exercício baseado num pensamento lógico a fim de antecipar os resultados das investigações. Entretanto, se estamos falando sobre anomalias, tal exercício poderia nos levar a uma surpresa no final. A importância de dar uma resposta conclusiva para tais questões não está limitada a um simples exercício de TQC sobre cálculo de amplitudes perturbativas mas é crucial para a construção de teorias fundamentais como o modelo padrão através do mecanismo de cancelamento de anomalias. É necessário conhecer todas as anomalias para podermos realizar o cancelamento das mesmas. Se, além das bem conhecidas amplitudes AVV e AAA , em quatro dimensões espaço-temporais, amplitudes finitas tais como boxes, pentágonos, hexágonos e assim por diante forem anômalas também, seria então necessário levar em

conta esses fatos na construção de uma teoria fundamental. A investigação das amplitudes triangulares através de cálculos explícitos envolve um considerável esforço algébrico, o que ficará claro no decorrer desse trabalho. Por outro lado, a existência de anomalias em amplitudes de três pontos (finitas) em duas dimensões indica que as amplitudes de quatro pontos ($AVVV$ e $AAAV$) em quatro dimensões também são anômalas. Esta questão é bastante relevante e ainda não foi resolvida completamente no passado. Se os argumentos acima são considerados relevantes, então o presente trabalho representa um passo a mais na direção de esclarecer melhor este problema.

O presente trabalho está organizado da seguinte maneira. No capítulo II definimos um modelo geral usado como base para o desenvolvimento formal dos ingredientes que utilizamos para estruturar as discussões apresentadas bem como as definições das amplitudes que serão objeto do nosso estudo. As relações entre funções de Green e as correspondentes identidades de Ward, envolvendo as amplitudes definidas no capítulo II, são obtidas no capítulo III. Como ponto central do presente trabalho, a estratégia adotada para tratar e manipular integrais de Feynman é apresentada e discutida no capítulo IV. Neste mesmo capítulo calculamos as amplitudes de um ponto de modo a exemplificar a sistemática definida pelo método. No capítulo V calculamos explicitamente as amplitudes de dois pontos e, no capítulo VI, verificamos se as expressões obtidas satisfazem as relações entre funções de Green estabelecidas no capítulo III. Devido à sua importância, a anomalia associada à amplitude AV é estudada em detalhes no capítulo VII. As conclusões extraídas deste capítulo servirão de base para as discussões das possíveis anomalias envolvendo as amplitudes de três pontos (finitas) AVV e AAA . No capítulo VIII calculamos as amplitudes de três pontos e no capítulo IX apresentamos algumas relações entre funções finitas que são importantes para a verificação das relações entre funções de Green, envolvendo amplitudes de três pontos, realizada no capítulo X. A possível existência de anomalias em amplitudes finitas, tema principal dessa dissertação, é o assunto abordado na capítulo XI. Finalmente, as conclusões e discussões finais são apresentados na capítulo XII.

2 O MODELO E A DEFINIÇÃO DAS AMPLITUDES FÍSICAS

Para estabelecermos os ingredientes mínimos para nossas discussões, vamos considerar um modelo genérico onde um férmion de spin $\frac{1}{2}$ é acoplado a campos bosônicos possuindo spin 0 (escalar e pseudo-escalar) e spin 1 (vetor e axial-vetor) num espaço-tempo bidimensional. A forma genérica para a densidade de Lagrangeana de interação pode ser representada por (FRAMPTON, 2000)

$$\mathcal{L}_{\mathcal{I}} = iG_S(\bar{\Psi}\Psi)\phi + iG_P(\bar{\Psi}\gamma_3\Psi)\pi - e_V(\bar{\Psi}\gamma^\mu\Psi)A_\mu - e_A(\bar{\Psi}\gamma_3\gamma^\mu\Psi)W_\mu^A, \quad (2.1)$$

onde γ^μ e γ_3 são matrizes obedecendo a álgebra de Dirac

$$\begin{aligned} \{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} &= 2\eta^{\mu\nu}, \\ \{\gamma^\mu, \gamma_3\} &= 0, \\ \eta^{\mu\nu} &= \text{diag}(1, -1), \end{aligned}$$

Ψ é um campo massivo de spin $\frac{1}{2}$, W_μ^A é um campo axial-vetor, A_μ é um campo vetorial, ϕ é um campo escalar e π é um campo pseudo-escalar. As densidades de corrente fermiônicas escalar, pseudo-escalar, vetorial e axial-vetor são representadas respectivamente por $S = \bar{\Psi}\Psi$, $P = \bar{\Psi}\gamma_3\Psi$, $V^\mu = \bar{\Psi}\gamma^\mu\Psi$ e $A^\mu = \bar{\Psi}\gamma_3\gamma^\mu\Psi$. Os parâmetros G_S , G_P , e_V , e e_A são constantes de acoplamento indeterminadas. Tais constantes de acoplamentos são consideradas inputs da teoria e seus valores devem ser estabelecidos empiricamente. Além disso, elas podem ser independentes ou relacionadas através das simetrias usadas para construir a densidade de Lagrangeana. Por simplicidade, de agora em diante consideramos seus valores iguais a unidade. Um aspecto importante é que as densidades de corrente fermiônicas, devido às simetrias da Lagrangeana mostrada acima, satisfazem as propriedades

$$\begin{cases} \partial_\mu V^\mu = 0, \\ \partial_\mu A^\mu = 2miP, \end{cases} \quad (2.2)$$

onde estamos considerando os férmions com massas iguais a m . Estas propriedades das correntes implicam em relações de simetria ou identidades de Ward que devem ser satisfeitas pelas correspondentes funções de Green da teoria. Essas relações de simetria ou identidades são ma-

terializadas através de propriedades bem definidas para as funções de Green ou relações entre elas.

Sabemos que, se a renormalizabilidade for considerada uma característica essencial da teoria, devemos verificar a possibilidade de anomalias, o que representa a existência de amplitudes na teoria que não podem ter todas suas propriedades de simetria satisfeitas, de um modo inevitável. É bem conhecido o fato que em duas dimensões a amplitude de dois pontos axial-vetor (AV) (BERTLMANN, 1996), a ser definida em breve, é anômala. Uma importante questão então seria: as amplitudes de três pontos (finitas) axial-vetor-vetor (AVV) e a triplo-axial (AAA) são anômalas também? Esta é precisamente a principal questão que será tratada na presente investigação. Usando-se uma estratégia muito geral para calcular as amplitudes perturbativas (BATTISTEL, 1999) estabeleceremos conclusões claras sobre esse problema.

Para realizarmos a investigação pretendida primeiro é conveniente introduzirmos algumas definições para as amplitudes fermiônicas envolvidas nos cálculos, em ordem de aproximação ‘um laço’. Definimos as amplitudes, por conveniência, em dois passos: primeiro usamos as regras de Feynman para construirmos as amplitudes para um único momento de integração k , de uma maneira usual,

$$t^{ij\dots k} = Tr \{ \Gamma_i S_F(k + k_a; m_a) \Gamma_j S_F(k + k_b; m_b) \dots \Gamma_k S_F(k + k_c; m_c) \} .$$

As quantidades Γ_i são operadores de vértices pertencentes ao conjunto

$$\Gamma_i = \{ \Gamma_S, \Gamma_P, \Gamma_V, \Gamma_A \} = \{ 1, \gamma_3, \gamma_\alpha, \gamma_\alpha \gamma_3 \} ,$$

que surgem no acoplamento das correntes fermiônicas aos campos bosônicos na Lagrangeana (2.1). Estes operadores são responsáveis pelo caráter escalar, pseudo-escalar, vetorial e axial-vetorial das densidades de corrente fermiônicas. As quantidades S_F são os propagadores fermiônicos livres carregando momento $k + k_a$ e massa m_a , que podemos escrever como

$$S_F(k + k_a; m_a) = \frac{(\not{k} + \not{k}_a) + m_a}{D_a},$$

$$D_a = \left[(k + k_a)^2 - m_a^2 \right] .$$

As amplitudes de ordem ‘one-loop’ correspondentes são obtidas através da integração das estruturas acima em relação ao momento interno k , que é o segundo passo ao qual nos referimos

acima,

$$T^{ij\dots k} = \int \frac{d^2k}{(2\pi)^2} t^{ij\dots k}.$$

Fica claro que, depois das escolhas dos operadores Γ_i nas amplitudes, os índices de Lorentz correspondentes, se este for o caso, devem ser atribuídos a amplitude $T^{ij\dots k}$. As razões para tal sistematização ficarão claras no decorrer das próximas seções. Sendo assim, as amplitudes de um ponto, de acordo com as definições acima, são dadas por

$$T^i = \int \frac{d^2k}{(2\pi)^2} t^i,$$

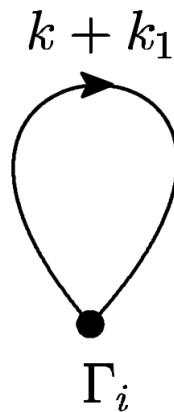
$$t^i = Tr \{ \Gamma_i S_F(k + k_1; m) \} ,$$

cuja representação diagramática é mostrada na Fig. 2.1

As estruturas acima também pode ser organizadas de maneira geral na forma

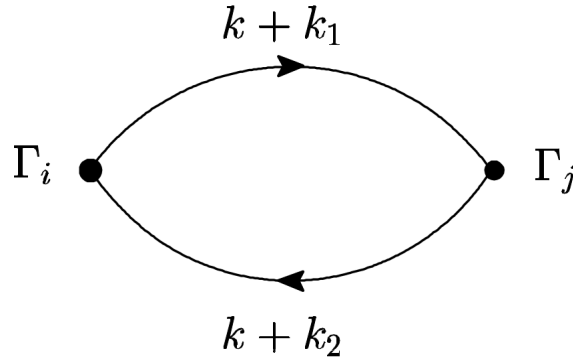
$$t^i = \frac{(k + k_1)^\xi}{D_1} Tr \{ \Gamma_i \gamma_\xi \} + \frac{m}{D_1} Tr \{ \Gamma_i \} . \quad (2.3)$$

Figura 2.1 – Representação diagramática das funções de um ponto.



Fonte: Autor (2017)

Figura 2.2 – Representação diagramática das funções de um ponto.



Fonte: Autor (2017)

De modo análogo obtemos as funções de dois pontos como sendo

$$T^{ij} = \int \frac{d^2k}{(2\pi)^2} t^{ij},$$

$$t^{ij} = Tr \{ \Gamma_i S_F(k + k_1; m) \Gamma_j S_F(k + k_2; m) \} .$$

A Fig. 2.2 mostra a representação através de um diagrama de Feynman

Podemos também escrever na forma

$$t^{ij} = \frac{(k + k_1)^\xi (k + k_2)^\chi}{D_{12}} Tr \{ \Gamma_i \gamma_\xi \Gamma_j \gamma_\chi \}$$

$$+ m \frac{(k + k_2)^\chi}{D_{12}} Tr \{ \Gamma_i \Gamma_j \gamma_\chi \}$$

$$+ m \frac{(k + k_1)^\xi}{D_{12}} Tr \{ \Gamma_i \gamma_\xi \Gamma_j \}$$

$$+ \frac{m^2}{D_{12}} Tr \{ \Gamma_i \Gamma_j \}, \quad (2.4)$$

onde adotamos que $D_{ij\dots k} = D_i D_j \dots D_k$. Finalmente, para as funções de três pontos temos

$$T^{ijl} = \int \frac{d^2k}{(2\pi)^2} t^{ijl},$$

$$t^{ijl} = Tr \{ \Gamma_i S_F(k + k_1; m) \Gamma_j S_F(k + k_2; m) \Gamma_l S_F(k + k_3; m) \} ,$$

de maneira que

$$\begin{aligned}
t^{ijl} = & \frac{(k+k_1)^\alpha (k+k_2)^\beta (k+k_3)^\xi}{D_{123}} Tr \{ \Gamma_i \gamma_\alpha \Gamma_j \gamma_\beta \Gamma_l \gamma_\xi \} \\
& + m \frac{(k+k_2)^\beta (k+k_3)^\xi}{D_{123}} Tr \{ \Gamma_i \Gamma_j \gamma_\beta \Gamma_l \gamma_\xi \} \\
& + m \frac{(k+k_1)^\alpha (k+k_3)^\xi}{D_{123}} Tr \{ \Gamma_i \gamma_\alpha \Gamma_j \Gamma_l \gamma_\xi \} \\
& + m \frac{(k+k_1)^\alpha (k+k_2)^\beta}{D_{123}} Tr \{ \Gamma_i \gamma_\alpha \Gamma_j \gamma_\beta \Gamma_l \} \\
& + m^2 \frac{(k+k_3)^\xi}{D_{123}} Tr \{ \Gamma_i \Gamma_j \Gamma_l \gamma_\xi \} \\
& + m^2 \frac{(k+k_2)^\beta}{D_{123}} Tr \{ \Gamma_i \Gamma_j \gamma_\beta \Gamma_l \} \\
& + m^2 \frac{(k+k_1)^\alpha}{D_{123}} Tr \{ \Gamma_i \gamma_\alpha \Gamma_j \Gamma_l \} \\
& + m^3 \frac{1}{D_{123}} Tr \{ \Gamma_i \Gamma_j \Gamma_l \} .
\end{aligned} \tag{2.5}$$

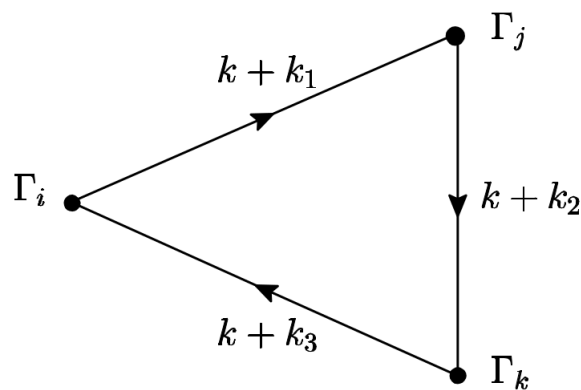
Em termos de um diagrama de Feynman temos

A partir das definições feitas acima podemos extrair todas as amplitudes que estão envolvidas na presente investigação.

3 RELAÇÕES ENTRE FUNÇÕES DE GREEN E AS IDENTIDADES DE WARD

A fim de estabelecermos as relações entre funções de Green relevantes notamos primeiramente que, toda vez que um índice de Lorentz vetorial de uma função de dois pontos definida em (3.2) é contraída com um momento externo, surge uma relação entre duas outras amplitudes contendo um número de pontos decrescido de uma unidade. Na prática, é possível cancelar um propagador interno nesta operação. Como um exemplo, considere a função vetorial de dois pontos (proporcional ao tensor de polarização do vácuo da eletrodinâmica quântica).

Figura 3.1 – Representação diagramática das funções de três pontos.



Fonte: Autor (2017)

Figura 3.2 – Relação entre funções de Green para V V .

$$(k_2 - k_1)^\mu \left[\begin{array}{c} \gamma_\mu \quad \gamma_\nu \\ \text{diagrama de loop} \\ \gamma_\nu \quad \gamma_\mu \end{array} \right] = \begin{array}{c} k + k_1 \\ \text{diagrama de loop} \\ \gamma_\nu \end{array} - \begin{array}{c} k + k_2 \\ \text{diagrama de loop} \\ \gamma_\nu \end{array}$$

Fonte: Autor (2017)

Partindo da identidade algébrica

$$(k_2 - k_1)^\nu \left\{ \gamma_\mu \frac{1}{[(k + k_1) - m]} \gamma_\nu \frac{1}{[(k + k_2) - m]} \right\} = \left\{ \gamma_\mu \frac{1}{[(k + k_1) - m]} \right\} - \left\{ \gamma_\mu \frac{1}{[(k + k_2) - m]} \right\},$$

podemos identificar a relação

$$(k_2 - k_1)^\mu \left[T_{\mu\nu}^{VV}(k_1, k_2) \right] = \left[T_\nu^V(k_1) \right] - \left[T_\nu^V(k_2) \right] , \quad (3.1)$$

depois de tomar o traço de Dirac e integrar sobre o momento k em ambos os lados. Quando a integração no momento interno k é tomada, a identidade é convertida numa genuína relação entre funções de Green típicas de cálculos perturbativos, conforme ilustra a Fig. 3.2.

Os ingredientes usados para estabelecer (3.1) foram a álgebra das matrizes de Dirac, a ciclicidade do traço e a linearidade do traço e da operação de integração. Esses tipos de relações são muito importantes para a construção de uma interpretação consistente das amplitudes perturbativas quando quantidades divergentes estão envolvidas. O papel mais importante das relações entre funções de Green é a possibilidade de revelar que um conjunto de operações usadas para calcular integrais de Feynman são certamente não consistentes com a linearidade da operação de integração. Usaremos essa ferramenta como guia em nossa investigação.

Na presente investigação, envolvendo índices de Lorentz vetoriais, serão úteis as seguintes relações, obtidas usando-se o mesmo procedimento descrito acima,

$$(k_2 - k_1)^\nu \left[T_{\mu\nu}^{VV}(k_1, k_2) \right] = \left[T_\mu^V(k_1) \right] - \left[T_\mu^V(k_2) \right] , \quad (3.2)$$

$$(k_2 - k_1)^\nu \left[T_{\mu\nu}^{AV}(k_1, k_2) \right] = \left[T_\mu^A(k_1) \right] - \left[T_\mu^A(k_2) \right] , \quad (3.3)$$

$$(k_2 - k_1)^\mu \left[T_\mu^{VS}(k_1, k_2) \right] = \left[T^S(k_1) \right] - \left[T^S(k_2) \right] , \quad (3.4)$$

$$(k_3 - k_1)^\lambda \left[T_\lambda^{VSS}(k_1, k_2, k_3) \right] = \left[T^{SS}(k_1, k_2) \right] - \left[T^{SS}(k_2, k_3) \right] , \quad (3.5)$$

$$(k_3 - k_1)^\lambda \left[T_\lambda^{VPP}(k_1, k_2, k_3) \right] = \left[T^{PP}(k_1, k_2) \right] - \left[T^{PP}(k_2, k_3) \right] , \quad (3.6)$$

$$(k_2 - k_1)^\mu \left[T_\mu^{PVP}(k_1, k_2, k_3) \right] = \left[T^{PP}(k_1, k_3) \right] - \left[T^{PP}(k_2, k_3) \right] , \quad (3.7)$$

$$(k_3 - k_2)^\nu \left[T_\nu^{PPV}(k_1, k_2, k_3) \right] = \left[T^{PP}(k_1, k_2) \right] - \left[T^{PP}(k_1, k_3) \right] , \quad (3.8)$$

$$(k_2 - k_1)^\mu \left[T_{\lambda\mu\nu}^{AVV}(k_1, k_2, k_3) \right] = \left[T_{\lambda\nu}^{AV}(k_1, k_3) \right] - \left[T_{\lambda\nu}^{AV}(k_2, k_3) \right] , \quad (3.9)$$

$$(k_3 - k_2)^\nu \left[T_{\lambda\mu\nu}^{AVV}(k_1, k_2, k_3) \right] = \left[T_{\lambda\mu}^{AV}(k_1, k_2) \right] - \left[T_{\lambda\mu}^{AV}(k_1, k_3) \right] . \quad (3.10)$$

De um modo análogo, toda vez que temos um índice de Lorentz axial numa amplitude, podemos gerar uma relação entre amplitudes através de uma adequada identidade. Como um exemplo considere a identidade

$$\begin{aligned} & (k_2 - k_1)^\mu \left\{ \gamma_\mu \gamma_3 \frac{1}{[(\not{k} + \not{k}_1) - m]} \gamma_\nu \frac{1}{[(\not{k} + \not{k}_2) - m]} \right\} \\ &= \left\{ \gamma_\nu \gamma_3 \frac{1}{[(\not{k} + \not{k}_1) - m]} \right\} - \left\{ \gamma_\nu \gamma_3 \frac{1}{[(\not{k} + \not{k}_2) - m]} \right\} \\ &+ 2m \left\{ \gamma_3 \frac{1}{[(\not{k} + \not{k}_1) - m]} \gamma_\nu \frac{1}{[(\not{k} + \not{k}_2) - m]} \right\} . \end{aligned}$$

Depois de tomar o traço de Dirac e integrar sobre o momento k em ambos os lados podemos identificar funções de um e dois pontos, no lado direito da equação acima, definidas nas Eqs. (2.3) e (3.2),

$$(k_2 - k_1)^\mu \left[T_{\mu\nu}^{AV}(k_1, k_2) \right] = \left[T_\nu^A(k_1) \right] - \left[T_\nu^A(k_2) \right] + 2m \left[T_\nu^{PV}(k_1, k_2) \right] , \quad (3.11)$$

que pode ser representada como na Fig. 3.3.

Figura 3.3 – Representação diagramática da relação entre funções de Green para AV envolvendo a contração com o vértice axial.

$$(k_2 - k_1)^\mu \left[\begin{array}{c} \text{Diagram 1} \end{array} \right] = \begin{array}{c} \text{Diagram 2} \\ - \\ \text{Diagram 3} \end{array} + 2m \left[\begin{array}{c} \text{Diagram 4} \end{array} \right]$$

Fonte: Autor (2017)

Seguindo o mesmo procedimento muitas outras identidades similares podem ser obtidas. Aquelas relevantes para o presente trabalho são

$$(k_3 - k_2)^\nu \left[T_\nu^{PSA}(k_1, k_2, k_3) \right] = - \left[T^{PP}(k_1, k_3) \right] - \left[T^{SS}(k_1, k_2) \right] - 2m \left[T^{PSP}(k_1, k_2, k_3) \right] , \quad (3.12)$$

$$(k_2 - k_1)^\mu \left[T_\mu^{PAS}(k_1, k_2, k_3) \right] = - \left[T^{SS}(k_2, k_3) \right] - \left[T^{PP}(k_1, k_3) \right] - 2m \left[T^{PPS}(k_1, k_2, k_3) \right] , \quad (3.13)$$

$$(k_3 - k_1)^\lambda \left[T_{\lambda\mu\nu}^{AVV}(k_1, k_2, k_3) \right] = \left[T_{\nu\mu}^{AV}(k_1, k_2) \right] - \left[T_{\mu\nu}^{AV}(k_2, k_3) \right] + 2m \left[T_{\mu\nu}^{PVV}(k_1, k_2, k_3) \right] , \quad (3.14)$$

$$(k_3 - k_1)^\lambda \left[T_{\lambda\mu\nu}^{AAA}(k_1, k_2, k_3) \right] = \left[T_{\nu\mu}^{VA}(k_1, k_2) \right] - \left[T_{\mu\nu}^{VA}(k_2, k_3) \right] + 2m \left[T_{\mu\nu}^{PAA}(k_1, k_2, k_3) \right] , \quad (3.15)$$

$$(k_2 - k_1)^\mu \left[T_{\lambda\mu\nu}^{AAA}(k_1, k_2, k_3) \right] = \left[T_{\lambda\nu}^{AV}(k_1, k_3) \right] - \left[T_{\lambda\nu}^{VA}(k_2, k_3) \right] - 2m \left[T_{\lambda\nu}^{APA}(k_1, k_2, k_3) \right] , \quad (3.16)$$

$$(k_3 - k_2)^\nu \left[T_{\lambda\mu\nu}^{AAA}(k_1, k_2, k_3) \right] = \left[T_{\lambda\mu}^{VA}(k_1, k_2) \right] - \left[T_{\lambda\mu}^{AV}(k_1, k_3) \right] - 2m \left[T_{\lambda\mu}^{AAP}(k_1, k_2, k_3) \right] . \quad (3.17)$$

As identidades de Ward são obtidas eliminando-se as funções de um ponto, no caso das contrações com funções de dois pontos, e somando-se o canal cruzado ao canal direto nas funções de três pontos conforme explicado a seguir. Como é bem sabido, as identidades de Ward são consequência da conservação da corrente vetorial ($\partial_\mu V^\mu = 0$) e da proporcionalidade da corrente axial e pseudo-escalar ($\partial_\mu A^\mu = 2miP$). As correspondentes identidades de Ward, relevantes para este trabalho, são

$$\begin{aligned} (k_2 - k_1)^\mu \left[T_{\mu\nu}^{VV}(p) \right] &= 0 , \\ (k_2 - k_1)^\nu \left[T_{\mu\nu}^{VV}(p) \right] &= 0 , \end{aligned} \quad (3.18)$$

$$(k_2 - k_1)^\nu \left[T_{\mu\nu}^{AV}(p) \right] = 0 , \quad (3.19)$$

$$(k_2 - k_1)^\mu \left[T_{\mu\nu}^{AV}(p) \right] = 2m \left[T_\nu^{PV}(p) \right] , \quad (3.20)$$

$$(k_2 - k_1)^\mu \left[T_{\lambda\mu\nu}^{A \rightarrow VV}(p, q) \right] = 0 , \quad (3.21)$$

$$(k_3 - k_2)^\nu \left[T_{\lambda\mu\nu}^{A \rightarrow VV}(p, q) \right] = 0 , \quad (3.22)$$

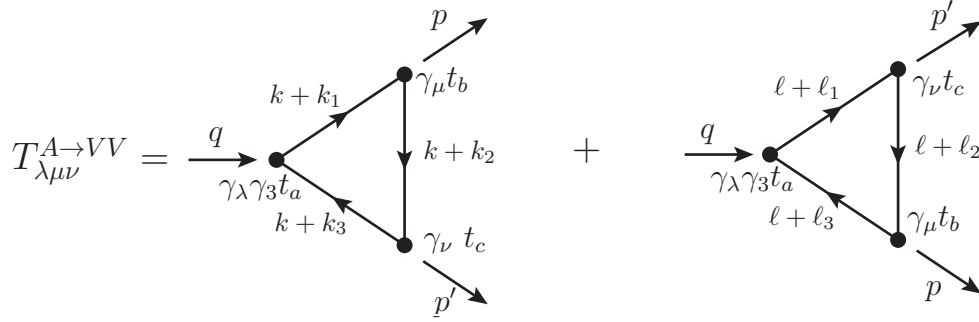
$$(k_3 - k_1)^\lambda \left[T_{\lambda\mu\nu}^{A \rightarrow VV}(p, q) \right] = 2m \left[T_{\mu\nu}^{PVV}(p, q) \right] , \quad (3.23)$$

$$(k_3 - k_1)^\lambda \left[T_{\lambda\mu\nu}^{A \rightarrow AA}(p, q) \right] = 2m \left[T_{\mu\nu}^{PAA}(p, q) \right], \quad (3.24)$$

$$(k_2 - k_1)^\mu \left[T_{\lambda\mu\nu}^{A \rightarrow AA}(p, q) \right] = -2m \left[T_{\lambda\nu}^{APA}(p, q) \right], \quad (3.25)$$

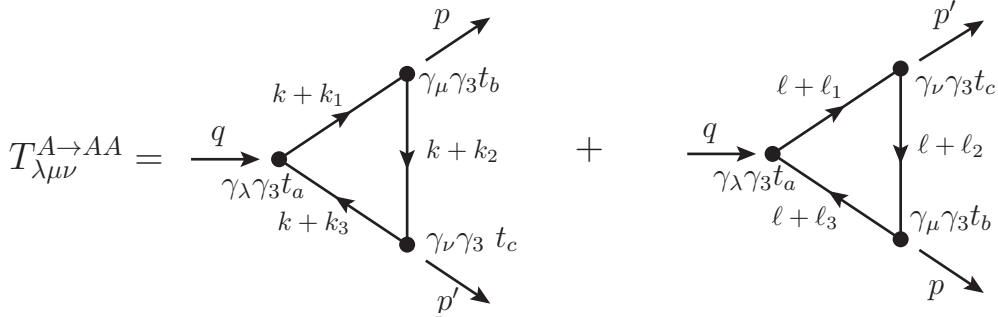
$$(k_3 - k_2)^\nu \left[T_{\lambda\mu\nu}^{A \rightarrow AA}(p, q) \right] = -2m \left[T_{\lambda\mu}^{AAP}(p, q) \right], \quad (3.26)$$

Figura 3.4 – Notação usada para definir a soma do canal direto e cruzado para o caso da amplitude AVV .



Fonte: Autor (2017)

Figura 3.5 – Notação usada para definir a soma do canal direto e cruzado para o caso da amplitude AAA .



Fonte: Autor (2017)

onde a simbologia $T^{\Gamma_1 \rightarrow \Gamma_2 \Gamma_3}$ significa que somamos o canal cruzado da amplitude. Por exemplo, o canal cruzado da amplitude $T_{\lambda\mu\nu}^{AVV}(p, q)$ é obtido trocando-se $p \leftrightarrow q$ e $\mu \leftrightarrow \nu$. No canal cruzado rotulamos os momentos internos ao loop por ℓ_1, ℓ_2 e ℓ_3 onde os momentos físicos definidos por $\ell_1 - \ell_2 = q$, $\ell_3 - \ell_1 = p$ e $\ell_3 - \ell_2 = p + q$ e t_a, t_b, t_c são matrizes geradoras de um grupo arbitrário. A Fig. 3.4 ilustram a situação de maneira clara para os casos das amplitude AVV e AAA .

No próximo capítulo vamos explicar o procedimento adotado no presente trabalho para tratar e manipular as indefinições matemáticas que estão associadas com as amplitudes de Feynman divergentes.

4 A ESTRATÉGIA ADOTADA PARA TRATAR E MANIPULAR AS INTEGRAIS DE FEYNMAN DIVERGENTES

Quando usamos as regras de Feynman para construir amplitudes perturbativas existem dois passos que são distintos. Primeiro com propagadores, vértices, traços sobre matrizes de Dirac, traços sobre operadores de simetrias internas, e assim por diante, podemos construir uma amplitude para um único valor do momento interno ao loop k . O próximo passo é fazer a soma sobre todos os valores possíveis de k , pois ele não é restrito pela conservação de energia-momento nos vértices do diagrama correspondente, o que significa integrar sobre o momento k . É possível usar estes dois passos distintos do cálculo para formular uma estratégia para tratar as divergências presentes no cálculo perturbativo de TQC que evita o uso de uma regularização (BATTISTEL, 1999). A ideia desta estratégia é muito simples e envolve somente operações algébricas. O primeiro passo é o mesmo descrito acima: construir a amplitude correspondente para um único valor do momento interno ao loop. Então, antes de tomar a integração, que seria a última regra de Feynman, fazemos uma contagem nas potências do momento do loop para obtermos o grau superficial de divergência da amplitude. Com isso em mãos, adotamos a seguinte representação para os propagadores envolvidos

$$\begin{aligned} \frac{1}{D_i} &= \frac{1}{[(k+k_i)^2 - m_i^2]} \\ &= \sum_{j=0}^N \frac{(-1)^j (k_i^2 + 2k_i \cdot k + \lambda^2 - m_i^2)^j}{(k^2 - \lambda^2)^{j+1}} \\ &\quad + \frac{(-1)^{N+1} (k_i^2 + 2k_i \cdot k + \lambda^2 - m_i^2)^{N+1}}{(k^2 - \lambda^2)^{N+1} [(k+k_i)^2 - m_i^2]}, \end{aligned} \quad (4.1)$$

onde o valor de N , presente na operação de soma, deve ser igual ou maior que o grau superficial de divergência encontrado. Na expressão acima, λ é um parâmetro arbitrário que tem dimensão de massa e desempenha o papel de uma escala comum tanto para as partes finitas quanto para as divergentes de uma integral de Feynman. Através desse parâmetro, uma conexão precisa entre as partes finitas e divergentes pode ser estabelecida. Entretanto, note que a expressão (4.1) representa uma identidade e o lado direito de fato é independente do parâmetro arbitrário λ , como deveria ser. Depois de adotarmos a representação adequada para os propagadores podemos tomar a integração sobre o momento k . Através do uso da identidade (4.1), a amplitude será reescrita de maneira que todas as partes que dependem dos rótulos dos momentos inter-

nos das integrais de Feynman estarão presentes em integrais finitas. Por outro lado, as partes divergentes serão reorganizadas em um conjunto mínimo de objetos onde nenhum parâmetro físico estará presente. A integração das partes finitas pode então ser realizada sem restrições e as partes divergentes são mantidas como estão.

Em duas dimensões espaço-temporal, cálculos de termos que serão convertidos em integrais divergentes podem ser convenientemente organizados de modo que todo o conteúdo divergente esteja presente em somente dois objetos divergentes básicos (em nível de aproximação ‘one-loop’ para teorias renormalizáveis). São eles

$$\Delta_{\mu\nu}(\lambda^2) = \int \frac{d^2k}{(2\pi)^2} \left\{ \frac{2k_\mu k_\nu}{(k^2 - \lambda^2)^2} - \frac{g_{\mu\nu}}{(k^2 - \lambda^2)} \right\}, \quad (4.2)$$

$$I_{\log}(\lambda^2) = \int \frac{d^2k}{(2\pi)^2} \frac{1}{(k^2 - \lambda^2)}. \quad (4.3)$$

Em teorias não renormalizáveis ou em cálculos envolvendo aproximações superiores a ‘um laço’ novos objetos análogos aos acima podem ser definidos.

Os passos acima descritos, para implementar o procedimento de cálculo e manipulação de integrais divergentes, podem ser formulados também dentro do contexto de regularizações. Nesse caso a integração sobre o momento de loop k é tomada de princípio e, conseqüentemente, as divergências ficam estabelecidas desde o começo. Adotamos então, a fim de tornar a integral convergente, uma regularização implícita em todas as integrais de Feynman. Tal distribuição regularizadora deve somente satisfazer alguns requisitos bem gerais. Entre eles, a distribuição regularizadora deve ser par no momento de integração k , de maneira que seja consistente com a simetria de Lorentz. Esquemáticamente podemos representar

$$\begin{aligned} \int \frac{d^2k}{(2\pi)^2} f(k) &\rightarrow \int \frac{d^2k}{(2\pi)^2} f(k) \left\{ \lim_{\Lambda_i^2 \rightarrow \infty} G(\Lambda_i^2, k^2) \right\} \\ &= \int_{\Lambda} \frac{d^2k}{(2\pi)^2} f(k), \end{aligned}$$

onde Λ_i 's são parâmetros da distribuição $G(\Lambda_i^2, k^2)$. Além disso, exigimos que exista um ‘limite de conexão’ dado por

$$\lim_{\Lambda_i^2 \rightarrow \infty} G(\Lambda_i^2, k^2) = 1,$$

que permite remover a distribuição nas integrais finitas, conectando a expressão modificada com a original (aquela que nasce das regras de Feynman). Assumindo a presença desta distribuição

regularizadora bem geral, podemos então manipular o integrando através de identidades algébricas pois agora temos uma integral finita. Podemos, por exemplo, usar a identidade (4.1) para reescrever os propagadores das integrais de Feynman. Nas integrais finitas, por contagem de potência, podemos tomar o limite de conexão afim de eliminar a regularização para então fazer a integração sobre o momento de 'loop' k . Nas integrais divergentes básicas somente fazemos uma organização conveniente de modo à escrevê-las em termos de objetos divergentes básicos. Não existem diferenças práticas em ambas abordagens. A única diferença é a presença do símbolo Λ nas integrais divergentes indicando que uma regularização foi assumida de uma forma implícita.

A fim de tornar claro o procedimento acima descrito vamos mostrar explicitamente o cálculo das amplitudes fermiônicas que possuem o grau de divergência mais elevado; as amplitudes de um ponto. Primeiro consideremos a amplitude escalar que é obtida da definição (2.3) tomando-se $\Gamma_i = \mathbf{1}$. Obtemos então

$$t^S = \frac{2m}{D_1}.$$

Quando integrarmos a expressão acima, de modo a obtermos a amplitude de um ponto T^S , encontraremos uma divergência logarítmica. Assim, antes da integração, adotamos a representação

$$\frac{1}{D_1} = \frac{1}{(k^2 - \lambda^2)} - \frac{(k_1^2 + 2k \cdot k_1 + \lambda^2 - m^2)}{(k^2 - \lambda^2) [(k + k_1)^2 - m^2]}, \quad (4.4)$$

a qual, depois da integração, fica da forma

$$T^S(k_1) = 2m \int \frac{d^2k}{(2\pi)^2} \frac{1}{(k^2 - \lambda^2)} - 2m \int \frac{d^2k}{(2\pi)^2} \frac{(k_1^2 + 2k \cdot k_1 + \lambda^2 - m^2)}{(k^2 - \lambda^2) [(k + k_1)^2 - m^2]}.$$

O primeiro termo é um objeto divergente básico, definido em (4.3), e o segundo termo é uma integral finita que pode ser resolvida facilmente através de técnicas bem conhecidas. O resultado final é

$$T^S(k_1) = 2m \left\{ [I_{\log}(\lambda^2)] - \frac{i}{4\pi} \ln \left(\frac{m^2}{\lambda^2} \right) \right\}. \quad (4.5)$$

A amplitude de um ponto vetorial é construída assumindo-se que $\Gamma_1 = \gamma_\mu$ na definição (2.3).

Obtemos assim

$$t_\mu^V = \frac{2(k + k_1)_\mu}{D_1}.$$

Dado o fato que nosso próximo passo é integrar em duas dimensões, devemos antes assumir a representação

$$\frac{1}{D_1} = \frac{1}{(k^2 - \lambda^2)} - \frac{(k_1^2 + \lambda^2 - m^2 + 2k \cdot k_1)}{(k^2 - \lambda^2)^2} + \frac{(k_1^2 + 2k \cdot k_1 + \lambda^2 - m^2)^2}{(k^2 - \lambda^2)^2 [(k + k_1)^2 - m^2]} .$$

Reorganizando-se convenientemente os termos, eliminado-se os termos ímpares no momento do 'loop' e resolvendo-se as integrais finitas obtemos

$$T_\mu^V(k_1) = -2k_1^\alpha [\Delta_{\alpha\mu}(\lambda^2)] . \quad (4.6)$$

Note que o resultado é bastante geral. Um cálculo inteiramente análogo ao feito acima leva-nos ao resultado para a amplitude de um ponto axial-vetor

$$T_\mu^A(k_1) = 2\varepsilon_{\mu\alpha} g^{\alpha\lambda} k_1^\beta [\Delta_{\beta\lambda}(\lambda^2)] . \quad (4.7)$$

A sistemática do método, conforme mostrado acima, é bem simples e facilmente aplicável também para amplitudes com um número maior de pontos. No próximo capítulo aplicaremos a mesma sistemática para calcular as amplitudes de dois e três pontos que são de interesse para o presente trabalho.

5 CÁLCULO DAS AMPLITUDES DE DOIS PONTOS

As amplitudes de dois e três pontos podem ser calculadas de maneira análoga às funções de um ponto, porém o esforço algébrico torna-se maior juntamente com o aumento do número de pontos da função. Nesse capítulo vamos mostrar explicitamente os detalhes do cálculo das amplitudes de dois pontos que são pertinentes para a investigação realizada no presente trabalho. Podemos iniciar os cálculos escolhendo $\Gamma_i = \Gamma_j = \gamma_3$ em (3.2). Feito isso obtemos a amplitude t^{PP} escrita como

$$t^{PP} = \frac{1}{D_{12}} Tr \{ \gamma_3 [(k + k_1) + m] \gamma_3 [(k + k_2) + m] \} .$$

Depois de tomar o traço de Dirac obtemos

$$t^{PP} = -2 \frac{1}{D_{12}} \{ (k + k_1) \cdot (k + k_2) - m^2 \} .$$

Usando a seguinte identidade algébrica

$$\begin{aligned} [(k + k_1) \cdot (k + k_2) - m^2] &= \frac{1}{2} [(k + k_1)^2 - m^2] \\ &\quad + \frac{1}{2} [(k + k_2)^2 - m^2] \\ &\quad - \frac{1}{2} (k_2 - k_1)^2 , \end{aligned}$$

escrevemos

$$t^{PP} = -\frac{1}{D_1} - \frac{1}{D_2} + (k_2 - k_1)^2 \frac{1}{D_{12}} .$$

No próximo passo integramos em ambos os lados sobre o momento k obtendo

$$T^{PP} = -[I_1(k_1)] - [I_1(k_2)] + (k_2 - k_1)^2 [I_2] , \quad (5.1)$$

onde definimos as integrais de Feynman de um e dois pontos

$$\begin{aligned} I_1 &= \int \frac{d^2k}{(2\pi)^2} \frac{1}{[(k + k_1)^2 - m^2]} , \\ I_2 &= \int \frac{d^2k}{(2\pi)^2} \frac{1}{[(k + k_1)^2 - m^2] [(k + k_2)^2 - m^2]} . \end{aligned}$$

De acordo com o método descrito na seção 4 obtemos

$$I_1 = [I_{\log}(\lambda^2)] - \frac{i}{4\pi} \ln\left(\frac{m^2}{\lambda^2}\right), \quad (5.2)$$

$$I_2 = \frac{i}{4\pi} \left[\xi_0^{(-1)}(p^2, m^2) \right], \quad (5.3)$$

onde definimos a função finita

$$\xi_k^{(-1)}(p^2, m^2) = \int_0^1 dx \frac{x^k}{Q(p^2, m^2; x)},$$

com $k = 0, 1, 2, \dots$ e $Q(p^2, m^2; x)$ sendo um polinômio dado por

$$Q(p^2, m^2; x) = p^2 x(1-x) - m^2.$$

e $p = k_2 - k_1$. Substituindo-se os resultados acima na Eq. (5.1) obtemos o resultado desejado para T^{PP}

$$T^{PP}(p) = -2 \left[I_{\log}(\lambda^2) - \frac{i}{4\pi} \ln\left(\frac{m^2}{\lambda^2}\right) \right] + \frac{i}{4\pi} p^2 \left[\xi_0^{(-1)}(p^2, m^2) \right]. \quad (5.4)$$

Observe que, como anunciado anteriormente na seção 4, o conteúdo divergente da amplitude está contido no objeto $I_{\log}(\lambda^2)$, que não será integrado de fato.

Prosseguindo com os cálculos, as escolhas $\Gamma_i = \Gamma_j = \mathbf{1}$ em (3.2) nos definem a amplitude t^{SS} dada por

$$t^{SS} = \frac{1}{D_{12}} \text{Tr} \{ \mathbf{1}[(\not{k} + \not{k}_1) + m] \mathbf{1}[(\not{k} + \not{k}_2) + m] \}.$$

Seguindo exatamente os mesmos passos do cálculo da amplitude T^{PP} encontramos

$$T^{SS}(p) = 2 \left[I_{\log}(\lambda^2) - \frac{i}{4\pi} \ln\left(\frac{m^2}{\lambda^2}\right) \right] - \frac{i}{4\pi} (p^2 - 4m^2) \left[\xi_0^{(-1)}(p^2, m^2) \right]. \quad (5.5)$$

No próximo passo tomamos $\Gamma_i = \gamma_3$ e $\Gamma_j = \gamma_v$ em (3.2) de modo que definimos a amplitude t_v^{PV} dada por

$$t_v^{PV} = \frac{1}{D_{12}} \text{Tr} \{ \gamma_3 [(\not{k} + \not{k}_1) + m] \gamma_v [(\not{k} + \not{k}_2) + m] \}.$$

Tomando o traço sobre as matrizes de Dirac obtemos

$$t_v^{PV} = 2m\varepsilon_{v\alpha}(k_2 - k_1)^\alpha \frac{1}{D_{12}} ,$$

e, após introduzirmos o sinal de integração, obtemos

$$T_v^{PV} = 2m\varepsilon_{v\alpha}(k_2 - k_1)^\alpha [I_2]$$

Usando (5.3) temos o resultado final para T_v^{PV}

$$T_v^{PV}(p) = \frac{i}{2\pi} m\varepsilon_{v\alpha} p^\alpha \left[\xi_0^{(-1)}(p^2, m^2) \right] , \quad (5.6)$$

a qual, como podemos notar, é finita. Através de cálculos similares também obtemos a amplitude T_μ^{AS}

$$T_\mu^{AS} = \frac{i}{2\pi} \varepsilon_{\mu\alpha} m p^\alpha \left[2\xi_1^{(-1)}(p^2, m^2) - \xi_0^{(-1)}(p^2, m^2) \right] .$$

Utilizando a identidade

$$\xi_1^{(-1)}(p^2, m^2) = \frac{1}{2} \xi_0^{(-1)}(p^2, m^2) ,$$

obtemos

$$T_\mu^{AS} = 0 . \quad (5.7)$$

Por sua vez, com as escolhas $\Gamma_i = \mathbf{1}$ e $\Gamma_j = \gamma_v$ temos

$$t_v^{SV} = \frac{1}{D_{12}} Tr \{ \mathbf{1} [(\not{k} + \not{k}_1) + m] \gamma_v [(\not{k} + \not{k}_2) + m] \} .$$

Depois de tomar os traços de Dirac e integrar sobre o momento k temos

$$T_v^{SV} = -\frac{i}{2\pi} m p_v \left[2\xi_1^{(-1)}(p^2, m^2) - \xi_0^{(-1)}(p^2, m^2) \right] .$$

Utilizando novamente a identidade

$$\xi_1^{(-1)}(p^2, m^2) = \frac{1}{2} \xi_0^{(-1)}(p^2, m^2) ,$$

obtemos

$$T_v^{SV} = 0 . \quad (5.8)$$

De maneira inteiramente análoga obtemos T_μ^{AP}

$$T_\mu^{AP} = \frac{i}{2\pi} m p_\mu \left[\xi_0^{(-1)}(p^2, m^2) \right]. \quad (5.9)$$

Como próximo passo tomamos $\Gamma_i = \gamma_\mu$ e $\Gamma_j = \gamma_\nu$ obtendo a amplitude $t_{\mu\nu}^{VV}$

$$t_{\mu\nu}^{VV} = \frac{1}{D_{12}} Tr \left\{ \gamma_\mu [(k + k_1) + m] \gamma_\nu [(k + k_2) + m] \right\}.$$

Depois dos traços temos

$$\begin{aligned} t_{\mu\nu}^{VV} = & 2 \frac{1}{D_{12}} \left[(k + k_1)_\mu (k + k_2)_\nu + (k + k_1)_\nu (k + k_2)_\mu \right] \\ & + g_{\mu\nu} \left\{ -2 \frac{1}{D_{12}} [(k + k_1) \cdot (k + k_2) - m^2] \right\}. \end{aligned}$$

Definindo

$$\begin{aligned} t_{\mu\nu} &= 2 \frac{1}{D_{12}} \left[(k + k_1)_\mu (k + k_2)_\nu + (k + k_1)_\nu (k + k_2)_\mu \right], \\ t^{PP} &= -2 \frac{1}{D_{12}} [(k + k_1) \cdot (k + k_2) - m^2], \end{aligned}$$

podemos sistematizar $t_{\mu\nu}^{VV}$ como

$$t_{\mu\nu}^{VV} = t_{\mu\nu} + g_{\mu\nu} (t^{PP}). \quad (5.10)$$

Temos que calcular o tensor $t_{\mu\nu}$ que pode ser escrito como

$$\begin{aligned} t_{\mu\nu} = & 4 \frac{k_\mu k_\nu}{D_{12}} + 2 (k_2 + k_1)_\nu \frac{k_\mu}{D_{12}} + 2 (k_2 + k_1)_\mu \frac{k_\nu}{D_{12}} \\ & + 2 \left[(k_1)_\mu (k_2)_\nu + (k_1)_\nu (k_2)_\mu \right] \frac{1}{D_{12}}. \end{aligned}$$

Inserindo o sinal de integração sobre k temos

$$\begin{aligned}
T_{\mu\nu} &= 4 [I_{2\mu\nu}] \\
&+ 2 (k_2 + k_1)_\nu [I_{2\mu}] \\
&+ 2 (k_2 + k_1)_\mu [I_{2\nu}] \\
&+ 2 \left[(k_1)_\mu (k_2)_\nu + (k_1)_\nu (k_2)_\mu \right] [I_2] ,
\end{aligned}$$

onde definimos as integrais de Feynman

$$I_{2\mu} = \int \frac{d^2k}{(2\pi)^2} \frac{k_\mu}{\left[(k+k_1)^2 - m^2 \right] \left[(k+k_2)^2 - m^2 \right]} , \quad (5.11)$$

$$I_{2\mu\nu} = \int \frac{d^2k}{(2\pi)^2} \frac{k_\mu k_\nu}{\left[(k+k_1)^2 - m^2 \right] \left[(k+k_2)^2 - m^2 \right]} . \quad (5.12)$$

A manipulação e cálculo das integrais acima segue os mesmos passos que foram usados no cálculo das funções de um ponto e descritos em detalhes no capítulo 4. Os correspondentes resultados podem ser colocados na forma

$$\begin{aligned}
I_{2\mu} &= -p_\mu \left[\xi_1^{(-1)}(p^2, m^2) \right] \\
&- \frac{i}{4\pi} k_{1\mu} \left[\xi_0^{(-1)}(p^2, m^2) \right] ,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
I_{2\mu\nu} &= \frac{1}{2} [\Delta_{\mu\nu}(\lambda^2)] + \frac{1}{2} g_{\mu\nu} [I_{\log}(\lambda^2)] \\
&- \frac{1}{2} g_{\mu\nu} \left[\xi_0^{(0)}(p^2, m^2; \lambda^2) \right] + p_\mu p_\nu \left[\xi_2^{(-1)}(p^2, m^2) \right] \\
&+ k_{1\mu} p_\nu \left[\xi_1^{(-1)}(p^2, m^2) \right] + k_{1\nu} p_\mu \left[\xi_1^{(-1)}(p^2, m^2) \right] \\
&- k_{1\nu} k_{1\mu} \left[\xi_0^{(-1)}(p^2, m^2) \right] .
\end{aligned}$$

Obtemos então o tensor $T_{\mu\nu}$

$$\begin{aligned}
T_{\mu\nu} &= 2 [\Delta_{\mu\nu} (\lambda^2)] \\
&+ 2g_{\mu\nu} \left[I_{\log} (\lambda^2) - \frac{i}{4\pi} \ln \left(\frac{m^2}{\lambda^2} \right) \right] \\
&+ \frac{i}{\pi} (p_\mu p_\nu - g_{\mu\nu} p^2) \left[\xi_2^{(-1)} (p^2, m^2) - \xi_1^{(-1)} (p^2, m^2) \right] \\
&- \frac{i}{2\pi} g_{\mu\nu} p^2 \left[\xi_1^{(-1)} (p^2, m^2) \right] .
\end{aligned} \tag{5.13}$$

Substituindo os resultados (5.4) e (5.13) em (5.10) temos

$$\begin{aligned}
T_{\mu\nu}^{VV} (p) &= 2 [\Delta_{\mu\nu} (\lambda^2)] \\
&+ \frac{i}{\pi} (p_\mu p_\nu - p^2 g_{\mu\nu}) \left[\xi_2^{(-1)} (p^2, m^2) - \xi_1^{(-1)} (p^2, m^2) \right] .
\end{aligned} \tag{5.14}$$

A amplitude $T_{\mu\nu}^{AA}$ pode ser obtida seguindo-se os mesmos passos que utilizamos para calcular $T_{\mu\nu}^{VV}$. O resultado é

$$\begin{aligned}
T_{\mu\nu}^{AA} (p) &= 2 [\Delta_{\mu\nu} (\lambda^2)] \\
&+ \frac{i}{\pi} (p_\mu p_\nu - g_{\mu\nu} p^2) \left[\xi_2^{(-1)} (p^2, m^2) - \xi_1^{(-1)} (p^2, m^2) \right] \\
&- \frac{i}{\pi} g_{\mu\nu} m^2 \left[\xi_0^{(-1)} (p^2, m^2) \right] .
\end{aligned} \tag{5.15}$$

Finalmente, a amplitude $T_{\mu\nu}^{AV}$ é definida como

$$T_{\mu\nu}^{AV} = \int \frac{d^2k}{(2\pi)^2} tr \left\{ \gamma_\mu \gamma_3 \frac{1}{[(\not{k} + \not{k}_1) - m]} \gamma_\nu \frac{1}{[(\not{k} + \not{k}_2) - m]} \right\} ,$$

Em dimensões espaço-tempo bi-dimensionais sabemos a existência da seguinte identidade entre as matrizes de Dirac γ_μ e γ_3

$$\gamma_\mu \gamma_3 = -\varepsilon_{\mu\xi} \gamma^\xi , \tag{5.16}$$

que nos permite escrever $T_{\mu\nu}^{AV}$ em termos de $T_{\mu\nu}^{VV}$

$$\begin{aligned}
T_{\mu\nu}^{AV} &= -\varepsilon_{\mu\xi} g^{\xi\chi} \int \frac{d^2k}{(2\pi)^2} tr \left\{ \gamma_\chi \frac{1}{[(\not{k} + \not{k}_1) - m]} \gamma_\nu \frac{1}{[(\not{k} + \not{k}_2) - m]} \right\} , \\
&= -\varepsilon_{\mu\xi} g^{\xi\chi} \left[T_{\chi\nu}^{VV} \right] ,
\end{aligned}$$

Com o resultado (5.14) obtemos

$$T_{\mu\nu}^{AV}(p) = -2\varepsilon_{\mu\xi} \left[\Delta_{\nu}^{\xi}(\lambda^2) \right] - \frac{i}{\pi} \left(\varepsilon_{\mu\xi} p^{\xi} p_{\nu} - \varepsilon_{\mu\nu} p^2 \right) \left[\xi_2^{(-1)}(p^2, m^2) - \xi_1^{(-1)}(p^2, m^2) \right]. \quad (5.17)$$

Na próxima seção vamos realizar os cálculos necessários para verificar explicitamente as relações entre funções de Green de um e dois pontos deduzidas na seção 3.

6 CÁLCULO DAS REAÇÕES DAS ENTRE FUNÇÕES DE GREEN E IDENTIDADES DE WARD ENVOLVENDO AMPLITUDES DE DOIS PONTOS

Na seção 5 calculamos explicitamente as amplitudes de dois pontos usando o método descrito na seção 4. Todo cálculo de amplitudes perturbativas divergentes está sujeito à indefinições matemáticas intrínsecas. No nosso procedimento, estas indefinições são isoladas nos objetos divergentes

$$\Delta_{\mu\nu}(\lambda^2) = \int \frac{d^2k}{(2\pi)^2} \left\{ \frac{2k_\mu k_\nu}{(k^2 - \lambda^2)^2} - \frac{g_{\mu\nu}}{(k^2 - \lambda^2)} \right\}, \quad (6.1)$$

$$I_{\log}(\lambda^2) = \int \frac{d^2k}{(2\pi)^2} \frac{1}{(k^2 - \lambda^2)}, \quad (6.2)$$

que, por sua vez, não são calculados explicitamente. Por causa da presença inevitável de tais indefinições matemáticas, todo cálculo envolvendo essas estruturas deve passar por testes de consistência mínimos. Por isso, antes de assumir alguma consequência das expressões obtidas para as amplitudes, é necessário verificar a consistência dos resultados obtidos na seção 5. Por consistência entendemos, como uma exigência mínima, a preservação das relações entre funções de Green, pois estes tipos de relações são simples consequência da validade da linearidade na operação de integração. Nesta seção queremos verificar explicitamente se as relações entre funções de Green envolvendo as amplitudes de dois pontos são satisfeitas.

Podemos iniciar os cálculos pela amplitude VV , Eq. (5.14). Contraindo com o momento externo p^μ obtemos

$$p^\mu T_{\mu\nu}^{VV} = 2(k_2 - k_1)^\mu [\Delta_{\mu\nu}(\lambda^2)].$$

O termo do lado direito da equação acima pode ser identificado como a diferença de duas amplitudes de um ponto

$$2(k_2 - k_1)^\mu [\Delta_{\mu\nu}(\lambda^2)] = T_\nu^V(k_1) - T_\nu^V(k_2),$$

de modo que obtemos

$$p^\mu T_{\mu\nu}^{VV} = T_\nu^V(k_1) - T_\nu^V(k_2),$$

que está de acordo com a relação estabelecida na Eq. (3.1). A mesma conclusão pode ser estendida para a contração com o índice ν .

Contraindo a expressão para a amplitude AA, Eq. (5.15) obtemos

$$p^\mu T_{\mu\nu}^{AA} = 2(k_2 - k_1)^\mu [\Delta_{\mu\nu}(\lambda^2)] - \frac{i}{2\pi} 2m^2 p_\nu [\xi_0^{(-1)}] ,$$

o que implica em

$$p^\mu T_{\mu\nu}^{AA} = T_\nu^V(k_1) - T_\nu^V(k_2) + 2mT_\nu^{AP} ,$$

que é o resultado esperado comparando as expressões (4.6) e (5.9) para as funções T_ν^V e T_ν^{AP} .

Por sua vez, a contração da Eq. (5.9), resulta em

$$p^\mu T_\mu^{AP} = \frac{i}{2\pi} m p^2 [\xi_0^{(-1)}] .$$

A contração novamente fornece o resultado o esperado

$$p^\mu T_\mu^{AP} = T^S(k_1) + T^S(k_2) + 2mT^{PP} .$$

Portanto todas as funções de dois pontos calculadas, com exceção da amplitude $T_{\mu\nu}^{AV}$ que ainda não verificamos, satisfazem as relações entre funções de Green esperadas. As verificação das relações entre funções de Green da amplitude $T_{\mu\nu}^{AV}$ será feita, em maiores detalhes, no próximo capítulo, devido à sua importância.

7 A ANOMALIA AV

Nesta seção vamos verificar em detalhes as relações entre funções de Green e as identidades de Ward da amplitude $T_{\mu\nu}^{AV}$. A análise feita nesta seção será crucial e servirá como referência no estudo das amplitudes AVV e AAA. O resultado encontrado no capítulo 5 foi

$$T_{\mu\nu}^{AV}(p) = -2\varepsilon_{\mu\xi} \left[\Delta_{\nu}^{\xi}(\lambda^2) \right] - \frac{i}{\pi} \left(\varepsilon_{\mu\xi} p^{\xi} p_{\nu} - \varepsilon_{\mu\nu} p^2 \right) \left[\xi_2^{(-1)}(p^2, m^2) - \xi_1^{(-1)}(p^2, m^2) \right].$$

A contração com o momento externo p deve fornecer resultados que estejam de acordo com as relações (3.3) e (3.11). Em primeiro lugar, a contração com o índice vetorial ν revela que

$$\begin{aligned} p^{\nu} \left[T_{\mu\nu}^{AV} \right] &= -2\varepsilon_{\mu\rho} (k_2 - k_1)^{\nu} \left[\Delta_{\nu}^{\rho}(\lambda^2) \right], \\ &= -2\varepsilon_{\mu\rho} (k_2)^{\nu} \left[\Delta_{\nu}^{\rho}(\lambda^2) \right] + 2\varepsilon_{\mu\rho} (k_1)^{\nu} \left[\Delta_{\nu}^{\rho}(\lambda^2) \right], \end{aligned}$$

que pode ser facilmente identificado como sendo a Eq. (3.3), ou seja,

$$p^{\nu} \left[T_{\mu\nu}^{AV} \right] = \left[T_{\nu}^A(k_1) \right] - \left[T_{\nu}^A(k_2) \right].$$

A Fig. 7.1 ilustra a identidade mostrada acima.

Figura 7.1 – Representação diagramática da relação entre funções de Green para AV envolvendo o vértice vetorial.

Fonte: Autor (2017)

Por outro lado, a contração com o índice axial μ revela

$$\begin{aligned} p^{\mu} T_{\mu\nu}^{AV} &= -2\varepsilon_{\mu\xi} (k_2 - k_1)^{\mu} \left[\Delta_{\nu}^{\xi}(\lambda^2) \right] \\ &\quad - \frac{i}{\pi} \varepsilon_{\mu\nu} p^{\mu} \left[1 + m^2 \xi_0^{(-1)}(p^2, m^2) \right]. \end{aligned}$$

Agora, a fim de identificar as duas amplitudes axiais de um ponto que estão presentes no lado direito da Eq. (3.11), é necessário mudar a posição dos índices de Lorentz do primeiro termo acima. Para tal, podemos usar a seguinte identidade algébrica

$$\varepsilon_{\mu\xi} \left[\Delta_{\nu}^{\xi}(\lambda^2) \right] = \varepsilon_{\nu\xi} \left[\Delta_{\mu}^{\xi}(\lambda^2) \right] + \varepsilon_{\mu\nu} \left[\Delta_{\xi}^{\xi}(\lambda^2) \right], \quad (7.1)$$

o que fornece

$$\begin{aligned} p^{\mu} T_{\mu\nu}^{AV} &= -2\varepsilon_{\nu\xi} (k_2)^{\mu} \left[\Delta_{\mu}^{\xi}(\lambda^2) \right] + 2\varepsilon_{\nu\xi} (k_1)^{\mu} \left[\Delta_{\mu}^{\xi}(\lambda^2) \right] \\ &\quad - \frac{i}{\pi} \varepsilon_{\mu\nu} p^{\mu} \left[1 + m^2 \xi_0^{(-1)}(p^2, m^2) \right] \\ &\quad - 2\varepsilon_{\mu\nu} (k_2 - k_1)^{\mu} \left[\Delta_{\xi}^{\xi}(\lambda^2) \right]. \end{aligned}$$

Os dois primeiros termos do lado direito da equação acima podem então ser identificados com as estruturas de um ponto exigidas na Eq. (3.11). Com a amplitude PV , dada na Eq. (5.6), podemos escrever

$$\begin{aligned} p^{\mu} T_{\mu\nu}^{AV} &= \left[T_{\nu}^A(k_1) \right] - \left[T_{\nu}^A(k_2) \right] + 2m \left[T_{\nu}^{PV} \right] \\ &\quad - \varepsilon_{\mu\nu} p^{\mu} \left\{ \frac{i}{\pi} + 2 \left[\Delta_{\xi}^{\xi}(\lambda^2) \right] \right\}. \end{aligned}$$

Da expressão acima, vemos que a relação entre funções de Green (3.11) é preservada se, e somente se

$$\left[\Delta_{\xi}^{\xi}(\lambda^2) \right] = -\frac{i}{2\pi}. \quad (7.2)$$

É importante notar que, se esse valor não pode ser obtido, a linearidade na operação de integração é quebrada pelas operações realizadas, violando a relação entre funções de Green (3.11), conforme mostra a Fig. 7.2.

Figura 7.2 – Representação da possível violação da identidade (3.11).

$$\begin{aligned}
(k_2 - k_1)^\mu \left[\begin{array}{c} \gamma_\mu \gamma_3 \\ \begin{array}{c} \xrightarrow{k+k_1} \\ \xleftarrow{k+k_2} \end{array} \\ \gamma_\nu \end{array} \right] &= \begin{array}{c} k+k_1 \\ \begin{array}{c} \circlearrowleft \\ \circlearrowright \end{array} \\ \gamma_\mu \gamma_3 \end{array} - \begin{array}{c} k+k_2 \\ \begin{array}{c} \circlearrowleft \\ \circlearrowright \end{array} \\ \gamma_\mu \gamma_3 \end{array} \\
&+ 2m \left[\begin{array}{c} \gamma_3 \\ \begin{array}{c} \xrightarrow{k+k_1} \\ \xleftarrow{k+k_2} \end{array} \\ \gamma_\nu \end{array} \right] + \left(\frac{i}{4\pi} \right) \varepsilon_{\nu\mu} (k_2 - k_1)^\mu
\end{aligned}$$

Fonte: Autor (2017)

Felizmente, o resultado acima pode ser verificado. Consideremos a seguinte identidade algébrica

$$\varepsilon_{\mu\xi} \left\{ \frac{2k^\xi k_\nu}{(k^2 - \lambda^2)^2} - \frac{\delta_\nu^\xi}{(k^2 - \lambda^2)} \right\} - \varepsilon_{\nu\xi} \left\{ \frac{2k^\xi k_\mu}{(k^2 - \lambda^2)^2} - \frac{\delta_\mu^\xi}{(k^2 - \lambda^2)} \right\} = \varepsilon_{\mu\nu} \left[\frac{k^2}{(k^2 - \lambda^2)^2} - \frac{1}{(k^2 - \lambda^2)} \right].$$

A integração em ambos os lados produz a identidade (7.1). Além disso, o termo do lado direito pode ser reescrito, como

$$\frac{k^2}{(k^2 - \lambda^2)^2} - \frac{1}{(k^2 - \lambda^2)} = \frac{\lambda^2}{(k^2 - \lambda^2)^2},$$

que, depois da integração, produz o valor requerido $\Delta_\xi^\xi(\lambda^2) = -\frac{i}{2\pi}$. Notemos que nenhuma hipótese sobre o caráter divergente das integrais foi assumida para obtermos esse resultado. Assim, se assumirmos isso como verdade, todas as relações entre funções de Green envolvendo a amplitude AV são satisfeitas, preservando, desse modo, a linearidade da operação de integração.

Como próximo passo podemos verificar se as identidades de Ward são preservadas pela mesma condição encontrada para a preservação das relações entre funções de Green, Eq. (7.2). Se as relações entre funções de Green são satisfeitas, fica claro, dos resultados (3.3) e (3.11), que as propriedades

$$p^\nu T_{\mu\nu}^{AV} = 0, \tag{7.3}$$

$$p^\mu T_{\mu\nu}^{AV} = 2m [T_\nu^{PV}], \tag{7.4}$$

podem ser obtidas se $T_V^A(k_1) = T_V^A(k_2)$, o que explicitamente significa $k_1^\beta [\Delta_{\beta\lambda}(\lambda^2)] = k_2^\beta [\Delta_{\beta\lambda}(\lambda^2)]$. Como o momento interno k_1 não pode ser igual a k_2 , para todos os valores do momento externo p , a única maneira de satisfazer o requerimento acima é que

$$[\Delta_{\beta\lambda}(\lambda^2)] = 0.$$

A conclusão da argumentação acima é transparente: a linearidade na operação de integração é mantida se e somente se $\Delta_{\xi}^{\xi}(\lambda^2)$ é não nulo e, por outro lado, as identidades de Ward são preservadas se $\Delta_{\beta\lambda}(\lambda^2)$ for igual a zero. Contudo, matematicamente é fácil ver que estas duas exigências são claramente incompatíveis pois $\Delta_{\xi}^{\xi}(\lambda^2)$ é o traço do objeto $\Delta_{\mu\nu}(\lambda^2)$ e um tensor não pode ser identicamente nulo e ter um traço não nulo. A observação relevante é que o valor nulo para $\Delta_{\mu\nu}(\lambda^2)$ não satisfaz a identidade (7.1) de modo que $\nabla_{\xi}^{\xi}(\lambda^2)$ seja diferente de zero. A referida identidade pode ser satisfeita se tivermos

$$\Delta_{\mu\nu}(\lambda^2) = -\frac{i}{4\pi}g_{\mu\nu} \text{ e } \Delta_{\xi}^{\xi}(\lambda^2) = -\frac{i}{2\pi},$$

ou ambos sendo zero.

Por outro lado, podemos invocar a universalidade nos cálculos perturbativos para nos guiar na escolha do objeto matemático (indefinido) $\Delta_{\mu\nu}(\lambda^2)$. Talvez nenhum suporte físico melhor que a *QED* possa ser obtido. Se considerarmos a amplitude de dois pontos *VV*, que é diretamente relacionada com o tensor de polarização da *QED*₂, temos

$$T_{\mu\nu}^{VV} = 2 [\Delta_{\mu\nu}(\lambda^2)] + \frac{i}{\pi} \left(g_{\mu\nu} - \frac{p_\mu p_\nu}{p^2} \right) \left[1 + m^2 \xi_0^{(-1)}(p^2, m^2) \right].$$

Dado o resultado acima e da Eq. (4.6) podemos perceber que

$$p^\mu T_{\mu\nu}^{VV} = 2p^\mu [\Delta_{\mu\nu}(\lambda^2)] = T_V^V(k_1) - T_V^V(k_2),$$

que está de acordo com a linearidade na operação de integração. Contudo, somente se assumirmos que $T_V^V(k_1) = T_V^V(k_2)$, a corrente vetorial será conservada na *QED*₂. Sem dúvida nenhuma, isto implica que $\Delta_{\mu\nu}(\lambda^2)$ deve ser identicamente nulo se desejarmos que a invariância de gauge da *QED*₂ seja preservada.

O valor nulo para $\Delta_{\rho\nu}(\lambda^2)$ é conveniente também por outros motivos. Entre estas razões podemos citar que as amplitudes de um ponto devem anular-se pois são quantidades ambíguas

(dependente dos momenta internos k_i). Também, como é bem conhecido, dentro do esquema da RD (Regularização Dimensional) todos os termos de superfície são tomados, por construção, como identicamente nulos. É fácil mostrar que $\Delta_{\mu\nu}(\lambda^2)$ é um termo de superfície pois podemos escrever

$$\Delta_{\mu\nu}(\lambda^2) = \int_{\Lambda} \frac{d^2k}{(2\pi)^2} \frac{\partial}{\partial k_{\mu}} \left(-\frac{k_{\nu}}{(k^2 - \lambda^2)} \right) .$$

Assim, dentro do contexto da RD, o objeto $\Delta_{\mu\nu}(\lambda^2)$ é assumido como sendo nulo.

A discussão acima, referente a amplitude $T_{\mu\nu}^{AV}$, pode ser resumida da seguinte maneira. Para preservar as relações entre funções de Green deveríamos ter

$$\Delta_{\mu\nu}(\lambda^2) = -\frac{i}{4\pi} g_{\mu\nu} \text{ e } \Delta_{\xi}^{\xi}(\lambda^2) = -\frac{i}{2\pi} ,$$

o que implica em

$$\begin{aligned} T_{\mu}^A(k_1) &= -\frac{i}{4\pi} \varepsilon_{\mu\alpha} k_1^{\alpha} , \\ p^{\nu} T_{\mu\nu}^{AV} &= \frac{i}{2\pi} \varepsilon_{\mu\alpha} p^{\alpha} , \\ p^{\mu} T_{\mu\nu}^{AV} &= 2m [T_{\nu}^{PV}] . \end{aligned}$$

Desse modo teríamos as amplitudes de um ponto ambíguas, a identidade de Ward vetorial não seria satisfeita e a axial seria. Logo, do ponto de vista físico, é um resultado não desejado pois perderíamos, por exemplo, a invariância de gauge da QED_2 . Por outro lado se

$$\Delta_{\mu\nu}(\lambda^2) = \Delta_{\xi}^{\xi}(\lambda^2) = 0 ,$$

teríamos a violação da linearidade na operação de integração devido as relações entre funções de Green não serem todas preservadas. Com isto temos

$$T_{\mu}^A = 0 , \tag{7.5}$$

$$p^{\nu} T_{\mu\nu}^{AV} = 0 , \tag{7.6}$$

$$p^{\mu} T_{\mu\nu}^{AV} = 2m [T_{\nu}^{PV}] + \frac{i}{\pi} \varepsilon_{\nu\mu} p^{\mu} , \tag{7.7}$$

que é o resultado usual presente na literatura (BERTLMANN, 1996). O termo que viola a identidade de Ward axial é denominado de **anomalia**. A Fig. 7.3 ilustra a situação de forma explícita.

Figura 7.3 – Violação da identidade de Ward axial da amplitude AV , fenômeno conhecido como anomalia axial.

$$p^\mu \left[\begin{array}{c} \text{---} \gamma_\mu \gamma_3 \text{---} \\ \text{---} \text{---} \text{---} \\ \text{---} \gamma_\nu \text{---} \end{array} \right] = 2m \left[\begin{array}{c} \text{---} \gamma_3 \text{---} \\ \text{---} \text{---} \text{---} \\ \text{---} \gamma_\nu \text{---} \end{array} \right] + \left(\frac{i}{4\pi} \right) \varepsilon_{\nu\mu} p^\mu$$

Fonte: Autor (2017)

A amplitude AV , por outro lado, possui um ingrediente adicional que desempenha um papel importante para o fenômeno das anomalias: seu comportamento no regime de baixa-energia. Podemos estabelecer as propriedades de baixa energia da amplitude AV através da forma geral do tensor que seria esperada devido a sua estrutura de Lorentz

$$T_{\mu\nu}^{AV} = \varepsilon_{\mu\nu} [F_1(p^2)] + \varepsilon_{\mu\xi} p^\xi p_\nu [F_2(p^2)] + \varepsilon_{\nu\xi} p^\xi p_\mu [F_3(p^2)] , \quad (7.8)$$

onde $F_i(p^2)$ são os fatores de forma arbitrários. Usando a identidade (7.1) podemos reduzir o número dos fatores de forma $F_i(p^2)$ de três para dois

$$T_{\mu\nu}^{AV} = \varepsilon_{\mu\nu} [F_1(p^2)] + \varepsilon_{\mu\xi} p^\xi p_\nu [F_2(p^2)] . \quad (7.9)$$

Impondo que a identidade (7.3) seja satisfeita obtemos

$$p^\nu T_{\mu\nu}^{AV} = \varepsilon_{\mu\xi} p^\xi [F_1(p^2) + p^2 F_2(p^2)] = 0 , \quad (7.10)$$

de modo que

$$F_1(p^2) = -p^2 F_2(p^2) .$$

Assim

$$T_{\mu\nu}^{AV} = \varepsilon_{\xi\mu} \left(g_{\xi\nu} p^2 - p^\xi p_\nu \right) [F_2(p^2)] . \quad (7.11)$$

Contraindo com o vértice axial obtemos

$$p^\mu T_{\mu\nu}^{AV} = \varepsilon_{\nu\xi} p^\xi p^2 [F_2(p^2)] . \quad (7.12)$$

No limite cinemático de baixa energia, $p^2 \rightarrow 0$, temos

$$\lim_{p^2 \rightarrow 0} p^\mu T_{\mu\nu}^{AV} = 0 . \quad (7.13)$$

O resultado acima é consequência da conservação da corrente vetorial.

Por outro lado, devido a identidade de Ward axial (ver Eq. (7.7)) e ao resultado acima deveríamos esperar também que

$$\lim_{p^2 \rightarrow 0} T_\nu^{PV}(p^2) = 0 , \quad (7.14)$$

para m não nulo. Isto significa que a eventual preservação de ambas as identidades de Ward associadas com $T_{\mu\nu}^{AV}$ implica que T_ν^{PV} deve anular-se no limit $p^2 \rightarrow 0$ (processos físicos de baixa energia). Contudo, a partir do (5.6) é fácil ver que

$$\lim_{p^2 \rightarrow 0} 2m [T_\mu^{PV}(p^2)] = -\frac{i}{\pi} \varepsilon_{\mu\xi} p^\xi ,$$

mostrando que o limite de baixa energia (7.14) não pode ser satisfeito dentro do cálculo perturbativo. Podemos afirmar que este, de fato, é o verdadeiro fenômeno denominado de anomalia, ou seja, a preservação simultânea de todas as identidades de Ward e dos seus respectivos limites de baixa energia não é possível no caso das amplitudes denominadas anômalas. As discussões realizadas nesta seção servirão como guia para estudarmos as amplitudes AVV e AAA nos próximos capítulos.

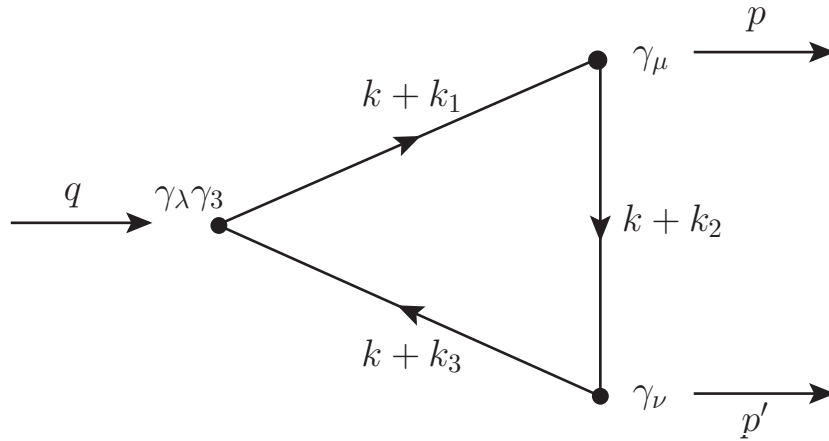
8 CÁLCULOS DAS AMPLITUDES DE TRÊS PONTOS

Os cálculos das demais amplitudes de três pontos, são feitos com mais detalhes no Apêndice A. Consideremos agora a amplitude $T_{\lambda\mu\nu}^{AVV}$ definida por

$$t_{\lambda\mu\nu}^{AVV} = Tr \left\{ \gamma_\lambda \gamma_5 \frac{1}{\not{k} + \not{k}_1 - m} \gamma_\mu \frac{1}{\not{k} + \not{k}_2 - m} \gamma_\nu \frac{1}{\not{k} + \not{k}_3 - m} \right\},$$

que pode ser representada também como na Fig (8.1).

Figura 8.1 – Representação diagramática da amplitude AVV .



Fonte: Autor (2017)

Notando que

$$\gamma_\lambda \gamma_5 = -\varepsilon_{\lambda\alpha} \gamma^\alpha,$$

temos

$$t_{\lambda\mu\nu}^{AVV} = -\varepsilon_{\lambda\alpha} Tr \left\{ \gamma_\alpha \frac{1}{\not{k} + \not{k}_1 - m} \gamma_\mu \frac{1}{\not{k} + \not{k}_2 - m} \gamma_\nu \frac{1}{\not{k} + \not{k}_3 - m} \right\},$$

o que implica

$$t_{\lambda\mu\nu}^{AVV} = -\varepsilon_{\lambda\alpha} [t_{\alpha\mu\nu}^{VVV}].$$

Para calcularmos a amplitude $T_{\alpha\mu\nu}^{VVV}$ primeiramente notamos que podemos escrever, após tomarmos os traços de Dirac,

$$\begin{aligned}
t_{\alpha\mu\nu}^{VVV} = & \left\{ 2(k+k_1)_\alpha \left[(k+k_2)_\mu (k+k_3)_\nu + (k+k_2)_\nu (k+k_3)_\mu \right] \right. \\
& + 2(k+k_2)_\alpha \left[(k+k_1)_\mu (k+k_3)_\nu - (k+k_1)_\nu (k+k_3)_\mu \right] \\
& + 2(k+k_3)_\alpha \left[(k+k_1)_\mu (k+k_2)_\nu + (k+k_1)_\nu (k+k_2)_\mu \right] \\
& + 2g_{\mu\alpha} (k+k_1)_\nu \left[(k+k_2) \cdot (k+k_3) - m^2 \right] \\
& - 2g_{\mu\alpha} (k+k_2)_\nu \left[(k+k_1) \cdot (k+k_3) - m^2 \right] \\
& - 2g_{\mu\alpha} (k+k_3)_\nu \left[(k+k_1) \cdot (k+k_2) - m^2 \right] \\
& - 2g_{\nu\alpha} (k+k_1)_\mu \left[(k+k_2) \cdot (k+k_3) - m^2 \right] \\
& - 2g_{\nu\alpha} (k+k_2)_\mu \left[(k+k_1) \cdot (k+k_3) - m^2 \right] \\
& + 2g_{\nu\alpha} (k+k_3)_\mu \left[(k+k_1) \cdot (k+k_2) - m^2 \right] \\
& - 2g_{\nu\mu} (k+k_1)_\alpha \left[(k+k_2) \cdot (k+k_3) - m^2 \right] \\
& + 2g_{\nu\mu} (k+k_2)_\alpha \left[(k+k_1) \cdot (k+k_3) - m^2 \right] \\
& \left. - 2g_{\nu\mu} (k+k_3)_\alpha \left[(k+k_1) \cdot (k+k_2) - m^2 \right] \right\} \frac{1}{D_{123}} ,
\end{aligned}$$

ou ainda

$$t_{\alpha\mu\nu}^{VVV} = t_{\alpha\mu\nu} + g_{\mu\alpha} [t_\nu^{PPV}] + g_{\nu\alpha} [t_\mu^{PVP}] + g_{\mu\nu} [t_\alpha^{VPP}] , \quad (8.1)$$

onde definimos

$$\begin{aligned}
t_{\alpha\mu\nu} = & \left\{ 2(k+k_1)_\alpha \left[(k+k_2)_\mu (k+k_3)_\nu + (k+k_2)_\nu (k+k_3)_\mu \right] \right. \\
& + 2(k+k_2)_\alpha \left[(k+k_1)_\mu (k+k_3)_\nu - (k+k_1)_\nu (k+k_3)_\mu \right] \\
& \left. + 2(k+k_3)_\alpha \left[(k+k_1)_\mu (k+k_2)_\nu + (k+k_1)_\nu (k+k_2)_\mu \right] \right\} \frac{1}{D_{123}} .
\end{aligned}$$

Como já calculamos as subamplitudes t_ν^{PPV} , t_μ^{PVP} e t_α^{VPP} , com os respectivos resultados mostrados nas Eqs. (10), (9) e (8), precisamos calcular somente o tensor $t_{\alpha\mu\nu}$. Definindo

$$t_{\alpha\mu\nu}^{(\pm)}(k_i, k_l, k_n) = (k+k_i)_\alpha \left[(k+k_l)_\mu (k+k_n)_\nu \pm (k+k_l)_\nu (k+k_n)_\mu \right] \frac{1}{D_{123}} ,$$

temos

$$t_{\alpha\mu\nu} = 2 \left[t_{\alpha\mu\nu}^{(+)}(k_1, k_2, k_3) \right] + 2 \left[t_{\alpha\mu\nu}^{(-)}(k_2, k_1, k_3) \right] + 2 \left[t_{\alpha\mu\nu}^{(+)}(k_3, k_1, k_2) \right] . \quad (8.2)$$

Em termos de integrais temos

$$\begin{aligned} T_{\alpha\mu\nu}^{(+)}(k_1, k_2, k_3) &= 2 [I_{3\alpha\mu\nu}] \\ &+ [(k_3 - k_1)_\nu + (k_2 - k_1)_\nu] [I_{3\alpha\mu}] \\ &+ [(k_3 - k_1)_\mu + (k_2 - k_1)_\mu] [I_{3\alpha\nu}] \\ &+ [(k_3 - k_1)_\mu (k_2 - k_1)_\nu + (k_3 - k_1)_\nu (k_2 - k_1)_\mu] [I_{3\alpha}] , \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} T_{\alpha\mu\nu}^{(+)}(k_3, k_1, k_2) &= 2 [I_{3\alpha\mu\nu}] \\ &+ 2(k_3 - k_1)_\alpha [I_{3\mu\nu}] \\ &+ (k_2 - k_1)_\nu [I_{3\alpha\mu}] \\ &+ (k_2 - k_1)_\mu [I_{3\alpha\nu}] \\ &+ (k_3 - k_1)_\alpha (k_2 - k_1)_\mu [I_{3\nu}] + (k_3 - k_1)_\alpha (k_2 - k_1)_\nu [I_{3\mu}] \\ &, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} T_{\alpha\mu\nu}^{(-)}(k_2, k_1, k_3) &= -(k_3 - k_1)_\mu [I_{3\alpha\nu}] + (k_3 - k_1)_\nu [I_{3\alpha\mu}] \\ &- (k_2 - k_1)_\alpha (k_3 - k_1)_\mu [I_{3\nu}] \\ &+ (k_2 - k_1)_\alpha (k_3 - k_1)_\nu [I_{3\mu}] . \end{aligned}$$

Usando-se os resultados (3) ,

$$\begin{aligned} I_{3\mu\nu} &= \frac{1}{2} g_{\mu\nu} \left[\xi_{00}^{(-1)} \right] \\ &+ (k_2 - k_1)_\mu (k_2 - k_1)_\nu \left[\xi_{02}^{(-2)} \right] + (k_3 - k_1)_\mu (k_3 - k_1)_\nu \left[\xi_{20}^{(-2)} \right] \\ &+ \left[(k_2 - k_1)_\mu (k_3 - k_1)_\nu + (k_2 - k_1)_\nu (k_3 - k_1)_\mu \right] \left[\xi_{11}^{(-2)} \right] \\ &- k_{1\nu} [I_{3\mu}] - k_{1\mu} [I_{3\nu}] - k_{1\mu} k_{1\nu} [I_3] , \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
I_{3\xi\mu\nu} = & -\frac{1}{2}g_{\mu\xi} \left[(k_2 - k_1)_\nu \xi_{10}^{(-1)} + (k_3 - k_1)_\nu \xi_{01}^{(-1)} \right] \\
& -\frac{1}{2}g_{\xi\nu} \left[(k_2 - k_1)_\mu \xi_{10}^{(-1)} + (k_3 - k_1)_\mu \xi_{01}^{(-1)} \right] \\
& -\frac{1}{2}g_{\mu\nu} \left[(k_2 - k_1)_\xi \xi_{10}^{(-1)} + (k_3 - k_1)_\xi \xi_{01}^{(-1)} \right] \\
& - (k_2 - k_1)_\xi (k_2 - k_1)_\mu (k_2 - k_1)_\nu \left[\xi_{30}^{(-2)} \right] \\
& - (k_2 - k_1)_\xi (k_2 - k_1)_\mu (k_3 - k_1)_\nu \left[\xi_{21}^{(-2)} \right] \\
& - (k_2 - k_1)_\xi (k_3 - k_1)_\mu (k_2 - k_1)_\nu \left[\xi_{21}^{(-2)} \right] \\
& - (k_2 - k_1)_\xi (k_3 - k_1)_\mu (k_3 - k_1)_\nu \left[\xi_{12}^{(-2)} \right] \\
& - (k_3 - k_1)_\xi (k_2 - k_1)_\mu (k_2 - k_1)_\nu \left[\xi_{21}^{(-2)} \right] \\
& - (k_3 - k_1)_\xi (k_2 - k_1)_\mu (k_3 - k_1)_\nu \left[\xi_{12}^{(-2)} \right] \\
& - (k_3 - k_1)_\xi (k_3 - k_1)_\mu (k_2 - k_1)_\nu \left[\xi_{12}^{(-2)} \right] \\
& - (k_3 - k_1)_\xi (k_3 - k_1)_\mu (k_3 - k_1)_\nu \left[\xi_{03}^{(-2)} \right] \\
& - k_{1\nu} [I_{3\xi\mu}] - k_{1\mu} [I_{3\xi\nu}] - k_{1\xi} [I_{3\mu\nu}] \\
& - k_{1\mu}k_{1\nu} [I_{3\xi}] - k_{1\xi}k_{1\nu} [I_{3\mu}] - k_{1\xi}k_{1\mu} [I_{3\nu}] \\
& - k_{1\xi}k_{1\mu}k_{1\nu} [I_3] .
\end{aligned}$$

obtemos

$$\begin{aligned}
T_{\alpha\mu\nu}^{(+)}(k_1, k_2, k_3) = & g_{\mu\nu} \left\{ -(k_2 - k_1)_\alpha \left[\xi_{10}^{(-1)} \right] - (k_3 - k_1)_\alpha \left[\xi_{01}^{(-1)} \right] \right\} \\
& + \frac{1}{2} g_{\alpha\mu} \left\{ 2 \left[-(k_2 - k_1)_\nu \xi_{10}^{(-1)} - (k_3 - k_1)_\nu \xi_{01}^{(-1)} \right] \right. \\
& \quad \left. + [(k_3 - k_1)_\nu + (k_2 - k_1)_\nu] \left[\xi_{00}^{(-1)} \right] \right\} \\
& + \frac{1}{2} g_{\alpha\nu} \left\{ 2 \left[-(k_2 - k_1)_\mu \xi_{10}^{(-1)} - (k_3 - k_1)_\mu \xi_{01}^{(-1)} \right] \right. \\
& \quad \left. + [(k_2 - k_1)_\mu + (k_3 - k_1)_\mu] \left[\xi_{00}^{(-1)} \right] \right\} \\
& + 2 \left\{ -(k_2 - k_1)_\alpha (k_2 - k_1)_\mu (k_2 - k_1)_\nu \left[\xi_{30}^{(-2)} \right] \right. \\
& \quad - (k_2 - k_1)_\alpha (k_2 - k_1)_\mu (k_3 - k_1)_\nu \left[\xi_{21}^{(-2)} \right] \\
& \quad - (k_2 - k_1)_\alpha (k_3 - k_1)_\mu (k_2 - k_1)_\nu \left[\xi_{21}^{(-2)} \right] \\
& \quad - (k_3 - k_1)_\alpha (k_2 - k_1)_\mu (k_2 - k_1)_\nu \left[\xi_{21}^{(-2)} \right] \\
& \quad - (k_3 - k_1)_\alpha (k_3 - k_1)_\mu (k_2 - k_1)_\nu \left[\xi_{12}^{(-2)} \right] \\
& \quad - (k_3 - k_1)_\alpha (k_2 - k_1)_\mu (k_3 - k_1)_\nu \left[\xi_{12}^{(-2)} \right] \\
& \quad - (k_2 - k_1)_\alpha (k_3 - k_1)_\mu (k_3 - k_1)_\nu \left[\xi_{12}^{(-2)} \right] \\
& \quad \left. - (k_3 - k_1)_\alpha (k_3 - k_1)_\mu (k_3 - k_1)_\nu \left[\xi_{03}^{(-2)} \right] \right\} \\
& + \left[(k_2 - k_1)_\mu + (k_3 - k_1)_\mu \right] \left\{ (k_2 - k_1)_\alpha (k_2 - k_1)_\nu \left[\xi_{20}^{(-2)} \right] \right. \\
& \quad + (k_2 - k_1)_\alpha (k_3 - k_1)_\nu \left[\xi_{11}^{(-2)} \right] \\
& \quad + (k_3 - k_1)_\alpha (k_2 - k_1)_\nu \left[\xi_{11}^{(-2)} \right] \\
& \quad \left. + (k_3 - k_1)_\alpha (k_3 - k_1)_\nu \left[\xi_{02}^{(-2)} \right] \right\} \\
& + [(k_3 - k_1)_\nu + (k_2 - k_1)_\nu] \left\{ (k_2 - k_1)_\alpha (k_2 - k_1)_\mu \left[\xi_{20}^{(-2)} \right] \right. \\
& \quad + (k_2 - k_1)_\alpha (k_3 - k_1)_\mu \left[\xi_{11}^{(-2)} \right] \\
& \quad + (k_3 - k_1)_\alpha (k_2 - k_1)_\mu \left[\xi_{11}^{(-2)} \right] \\
& \quad \left. + (k_3 - k_1)_\alpha (k_3 - k_1)_\mu \left[\xi_{02}^{(-2)} \right] \right\} \\
& + \left[(k_3 - k_1)_\nu (k_2 - k_1)_\mu + (k_3 - k_1)_\mu (k_2 - k_1)_\nu \right] \\
& \times \left\{ -(k_2 - k_1)_\alpha \xi_{10}^{(-2)} - (k_3 - k_1)_\alpha \xi_{01}^{(-2)} \right\} ,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
T_{\alpha\mu\nu}^{(+)}(k_3, k_1, k_2) = & g_{\mu\nu} \left\{ -(k_2 - k_1)_\alpha \left[\xi_{10}^{(-1)} \right] - (k_3 - k_1)_\alpha \left[\xi_{01}^{(-1)} \right] + (k_3 - k_1)_\alpha \xi_{00}^{(-1)} \right\} \\
& + \frac{1}{2} g_{\alpha\mu} \left\{ 2 \left[-(k_2 - k_1)_\nu \xi_{10}^{(-1)} - (k_3 - k_1)_\nu \xi_{01}^{(-1)} \right] + (k_2 - k_1)_\nu \xi_{00}^{(-1)} \right\} \\
& + \frac{1}{2} g_{\alpha\nu} \left\{ 2 \left[-(k_2 - k_1)_\mu \xi_{10}^{(-1)} - (k_3 - k_1)_\mu \xi_{01}^{(-1)} \right] + (k_2 - k_1)_\mu \xi_{00}^{(-1)} \right\} \\
& + 2 \left\{ -(k_2 - k_1)_\alpha (k_2 - k_1)_\mu (k_2 - k_1)_\nu \left[\xi_{30}^{(-2)} \right] \right. \\
& \quad - (k_2 - k_1)_\alpha (k_2 - k_1)_\mu (k_3 - k_1)_\nu \left[\xi_{21}^{(-2)} \right] \\
& \quad - (k_2 - k_1)_\alpha (k_3 - k_1)_\mu (k_2 - k_1)_\nu \left[\xi_{21}^{(-2)} \right] \\
& \quad - (k_3 - k_1)_\alpha (k_2 - k_1)_\mu (k_2 - k_1)_\nu \left[\xi_{21}^{(-2)} \right] \\
& \quad - (k_3 - k_1)_\alpha (k_3 - k_1)_\mu (k_2 - k_1)_\nu \left[\xi_{12}^{(-2)} \right] \\
& \quad - (k_3 - k_1)_\alpha (k_2 - k_1)_\mu (k_3 - k_1)_\nu \left[\xi_{12}^{(-2)} \right] \\
& \quad - (k_2 - k_1)_\alpha (k_3 - k_1)_\mu (k_3 - k_1)_\nu \left[\xi_{12}^{(-2)} \right] \\
& \quad \left. - (k_3 - k_1)_\alpha (k_3 - k_1)_\mu (k_3 - k_1)_\nu \left[\xi_{03}^{(-2)} \right] \right\} \\
& + 2 (k_3 - k_1)_\alpha \left\{ (k_2 - k_1)_\mu (k_2 - k_1)_\nu \left[\xi_{20}^{(-2)} \right] \right. \\
& \quad + (k_2 - k_1)_\mu (k_3 - k_1)_\nu \left[\xi_{11}^{(-2)} \right] \\
& \quad + (k_3 - k_1)_\mu (k_2 - k_1)_\nu \left[\xi_{11}^{(-2)} \right] \\
& \quad \left. + (k_3 - k_1)_\mu (k_3 - k_1)_\nu \left[\xi_{02}^{(-2)} \right] \right\} \\
& + (k_2 - k_1)_\mu \left\{ (k_2 - k_1)_\alpha (k_2 - k_1)_\nu \left[\xi_{20}^{(-2)} \right] \right. \\
& \quad + (k_2 - k_1)_\alpha (k_3 - k_1)_\nu \left[\xi_{11}^{(-2)} \right] \\
& \quad + (k_3 - k_1)_\alpha (k_2 - k_1)_\nu \left[\xi_{11}^{(-2)} \right] \\
& \quad \left. + (k_3 - k_1)_\alpha (k_3 - k_1)_\nu \left[\xi_{02}^{(-2)} \right] \right\} \\
& + (k_2 - k_1)_\nu \left\{ (k_2 - k_1)_\alpha (k_2 - k_1)_\mu \left[\xi_{20}^{(-2)} \right] \right. \\
& \quad + (k_2 - k_1)_\alpha (k_3 - k_1)_\mu \left[\xi_{11}^{(-2)} \right] \\
& \quad + (k_3 - k_1)_\alpha (k_2 - k_1)_\mu \left[\xi_{11}^{(-2)} \right] \\
& \quad \left. + (k_3 - k_1)_\alpha (k_3 - k_1)_\mu \left[\xi_{02}^{(-2)} \right] \right\} \\
& + (k_3 - k_1)_\alpha (k_2 - k_1)_\mu \left\{ -(k_2 - k_1)_\nu \left[\xi_{10}^{(-2)} \right] - (k_3 - k_1)_\nu \left[\xi_{01}^{(-2)} \right] \right\} \\
& + (k_3 - k_1)_\alpha (k_2 - k_1)_\nu \left\{ -(k_2 - k_1)_\mu \left[\xi_{10}^{(-2)} \right] - (k_3 - k_1)_\mu \left[\xi_{01}^{(-2)} \right] \right\} ,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
T_{\alpha\mu\nu}^{(-)}(k_2, k_1, k_3) &= \frac{1}{2}g_{\alpha\mu}(k_3 - k_1)_\nu \left[\xi_{00}^{(-1)} \right] \\
&\quad - \frac{1}{2}g_{\alpha\nu}(k_3 - k_1)_\mu \left[\xi_{00}^{(-1)} \right] \\
&\quad - (k_3 - k_1)_\mu \left\{ (k_2 - k_1)_\alpha (k_2 - k_1)_\nu \left[\xi_{20}^{(-2)} \right] \right. \\
&\quad\quad + (k_2 - k_1)_\alpha (k_3 - k_1)_\nu \left[\xi_{11}^{(-2)} \right] \\
&\quad\quad + (k_3 - k_1)_\alpha (k_2 - k_1)_\nu \left[\xi_{11}^{(-2)} \right] \\
&\quad\quad \left. + (k_3 - k_1)_\alpha (k_3 - k_1)_\nu \left[\xi_{02}^{(-2)} \right] \right\} \\
&\quad + (k_3 - k_1)_\nu \left\{ (k_2 - k_1)_\alpha (k_2 - k_1)_\mu \left[\xi_{20}^{(-2)} \right] \right. \\
&\quad\quad + (k_2 - k_1)_\alpha (k_3 - k_1)_\mu \left[\xi_{11}^{(-2)} \right] \\
&\quad\quad + (k_3 - k_1)_\alpha (k_2 - k_1)_\mu \left[\xi_{11}^{(-2)} \right] \\
&\quad\quad \left. + (k_3 - k_1)_\alpha (k_3 - k_1)_\mu \left[\xi_{02}^{(-2)} \right] \right\} \\
&\quad - (k_2 - k_1)_\alpha (k_3 - k_1)_\mu \left\{ - (k_2 - k_1)_\nu \left[\xi_{10}^{(-2)} \right] - (k_3 - k_1)_\nu \left[\xi_{01}^{(-2)} \right] \right\} \\
&\quad + (k_2 - k_1)_\alpha (k_3 - k_1)_\nu \left\{ - (k_2 - k_1)_\mu \left[\xi_{10}^{(-2)} \right] - (k_3 - k_1)_\mu \left[\xi_{01}^{(-2)} \right] \right\} .
\end{aligned}$$

Substituindo os resultados acima em (8.2) encontramos

$$\begin{aligned}
T_{\alpha\mu\nu} = & -4 \left[g_{\alpha\mu} (k_2 - k_1)_\nu + g_{\alpha\nu} (k_2 - k_1)_\mu + g_{\mu\nu} (k_2 - k_1)_\alpha \right] \left[\xi_{10}^{(-1)} \right] \\
& - 4 \left[g_{\alpha\mu} (k_3 - k_1)_\nu + g_{\alpha\nu} (k_3 - k_1)_\mu + g_{\mu\nu} (k_3 - k_1)_\alpha \right] \left[\xi_{01}^{(-1)} \right] \\
& + 2 \left[g_{\alpha\mu} (k_3 - k_1)_\nu + g_{\mu\nu} (k_3 - k_1)_\alpha \right] \left[\xi_{00}^{(-1)} \right] \\
& + 2 \left[g_{\alpha\mu} (k_2 - k_1)_\nu + g_{\alpha\nu} (k_2 - k_1)_\mu \right] \left[\xi_{00}^{(-1)} \right] \\
& + 8 (k_2 - k_1)_\alpha (k_2 - k_1)_\mu (k_2 - k_1)_\nu \left[-\xi_{30}^{(-2)} + \xi_{20}^{(-2)} \right] \\
& + 8 (k_3 - k_1)_\alpha (k_3 - k_1)_\mu (k_3 - k_1)_\nu \left[-\xi_{03}^{(-2)} + \xi_{02}^{(-2)} \right] \\
& + 4 (k_2 - k_1)_\alpha (k_2 - k_1)_\mu (k_3 - k_1)_\nu \left[-2\xi_{21}^{(-2)} + \xi_{20}^{(-2)} + \xi_{11}^{(-2)} - \xi_{10}^{(-2)} \right] \\
& + 4 (k_3 - k_1)_\alpha (k_3 - k_1)_\mu (k_2 - k_1)_\nu \left[-2\xi_{12}^{(-2)} + \xi_{02}^{(-2)} + \xi_{11}^{(-2)} - \xi_{01}^{(-2)} \right] \\
& + 4 (k_3 - k_1)_\alpha (k_2 - k_1)_\mu (k_2 - k_1)_\nu \left[-2\xi_{21}^{(-2)} + 2\xi_{11}^{(-2)} + \xi_{20}^{(-2)} - \xi_{10}^{(-2)} \right] \\
& + 4 (k_3 - k_1)_\alpha (k_2 - k_1)_\mu (k_3 - k_1)_\nu \left[-2\xi_{12}^{(-2)} + 2\xi_{11}^{(-2)} + \xi_{02}^{(-2)} - \xi_{01}^{(-2)} \right] \\
& + 4 (k_2 - k_1)_\alpha (k_3 - k_1)_\mu (k_2 - k_1)_\nu \left[-2\xi_{21}^{(-2)} + \xi_{11}^{(-2)} \right] \\
& + 4 (k_2 - k_1)_\alpha (k_3 - k_1)_\mu (k_3 - k_1)_\nu \left[-2\xi_{12}^{(-2)} + \xi_{11}^{(-2)} \right]
\end{aligned} \tag{8.3}$$

A partir das expressões (8.3), (10), (9) e (8) temos que

$$\begin{aligned}
T_{\lambda\mu\nu}^{AVV} = & -\varepsilon_{\lambda\alpha} \left\{ -4 \left[g_{\alpha\mu} (k_2 - k_1)_\nu + g_{\alpha\nu} (k_2 - k_1)_\mu + g_{\mu\nu} (k_2 - k_1)_\alpha \right] \left[\xi_{10}^{(-1)} \right] \right. \\
& - 4 \left[g_{\alpha\mu} (k_3 - k_1)_\nu + g_{\alpha\nu} (k_3 - k_1)_\mu + g_{\mu\nu} (k_3 - k_1)_\alpha \right] \left[\xi_{01}^{(-1)} \right] \\
& + 2 \left[g_{\alpha\mu} (k_3 - k_1)_\nu + g_{\mu\nu} (k_3 - k_1)_\alpha \right] \left[\xi_{00}^{(-1)} \right] \\
& + 2 \left[g_{\alpha\mu} (k_2 - k_1)_\nu + g_{\alpha\nu} (k_2 - k_1)_\mu \right] \left[\xi_{00}^{(-1)} \right] \\
& + 8 (k_2 - k_1)_\alpha (k_2 - k_1)_\mu (k_2 - k_1)_\nu \left[-\xi_{30}^{(-2)} + \xi_{20}^{(-2)} \right] \\
& + 8 (k_3 - k_1)_\alpha (k_3 - k_1)_\mu (k_3 - k_1)_\nu \left[-\xi_{03}^{(-2)} + \xi_{02}^{(-2)} \right] \\
& + 4 (k_2 - k_1)_\alpha (k_2 - k_1)_\mu (k_3 - k_1)_\nu \left[-2\xi_{21}^{(-2)} + \xi_{20}^{(-2)} + \xi_{11}^{(-2)} - \xi_{10}^{(-2)} \right] \\
& + 4 (k_3 - k_1)_\alpha (k_3 - k_1)_\mu (k_2 - k_1)_\nu \left[-2\xi_{12}^{(-2)} + \xi_{02}^{(-2)} + \xi_{11}^{(-2)} - \xi_{01}^{(-2)} \right] \\
& + 4 (k_3 - k_1)_\alpha (k_2 - k_1)_\mu (k_2 - k_1)_\nu \left[-2\xi_{21}^{(-2)} + 2\xi_{11}^{(-2)} + \xi_{20}^{(-2)} - \xi_{10}^{(-2)} \right] \\
& + 4 (k_3 - k_1)_\alpha (k_2 - k_1)_\mu (k_3 - k_1)_\nu \left[-2\xi_{12}^{(-2)} + 2\xi_{11}^{(-2)} + \xi_{02}^{(-2)} - \xi_{01}^{(-2)} \right] \\
& + 4 (k_2 - k_1)_\alpha (k_3 - k_1)_\mu (k_2 - k_1)_\nu \left[-2\xi_{21}^{(-2)} + \xi_{11}^{(-2)} \right] \\
& \left. + 4 (k_2 - k_1)_\alpha (k_3 - k_1)_\mu (k_3 - k_1)_\nu \left[-2\xi_{12}^{(-2)} + \xi_{11}^{(-2)} \right] \right\} \\
& - \varepsilon_{\mu_1\mu_2} (k_2 - k_1)_\nu \left\{ - \left[\xi_0^{(-1)} \left((k_2 - k_1)^2, m^2 \right) \right] \right. \\
& \quad \left. - 2 (k_2 - k_1) \cdot (k_3 - k_1) \left[\xi_{10}^{(-2)} \right] + (k_3 - k_1)^2 \left[\xi_{00}^{(-2)} \right] \right\} \\
& - \varepsilon_{\mu_1\mu_2} (k_3 - k_1)_\nu \left\{ - \left[\xi_0^{(-1)} \left((k_3 - k_1)^2, m^2 \right) \right] \right. \\
& \quad \left. - 2 (k_2 - k_1) \cdot (k_3 - k_1) \left[\xi_{01}^{(-2)} \right] + (k_2 - k_1)^2 \left[\xi_{00}^{(-2)} \right] \right\} \\
& - \varepsilon_{\mu_1\mu_3} (k_2 - k_1)_\mu \left\{ -2 \left[\xi_1^{(-1)} \left((k_3 - k_2)^2, m^2 \right) \right] - 2 (k_3 - k_1)^2 \left[\xi_{10}^{(-2)} \right] \right. \\
& \quad \left. + 2 (k_3 - k_1) \cdot (k_2 - k_1) \left[\xi_{10}^{(-2)} \right] + (k_3 - k_1)^2 \left[\xi_{00}^{(-2)} \right] \right\} \\
& - \varepsilon_{\mu_1\mu_3} (k_3 - k_1)_\mu \left\{ 2 \left[\xi_1^{(-1)} \left((k_2 - k_3)^2, m^2 \right) \right] + \xi_1^{(-1)} \left((k_1 - k_3)^2, m^2 \right) \right. \\
& \quad - 2 (k_3 - k_1)^2 \left[\xi_{01}^{(-2)} \right] + 2 (k_3 - k_1) \cdot (k_2 - k_1) \left[\xi_{01}^{(-2)} \right] \\
& \quad \left. - (k_2 - k_1)^2 \left[\xi_{00}^{(-2)} \right] \right\}
\end{aligned}$$

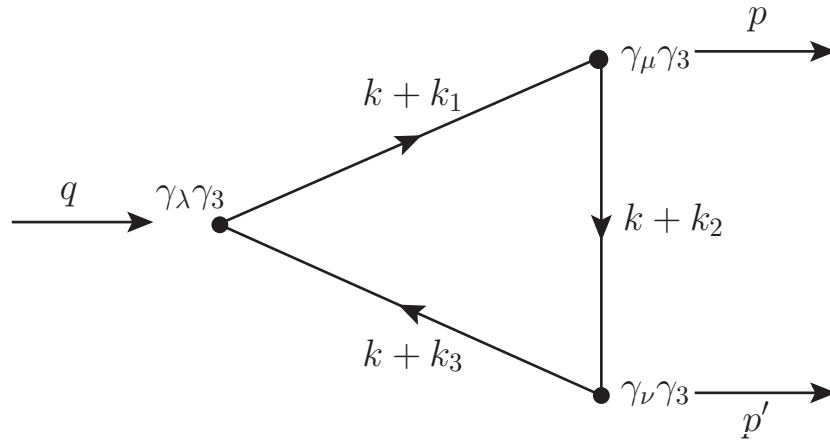
$$\begin{aligned}
& -g_{\mu\nu}\varepsilon_{\lambda\alpha}(k_2 - k_1)_\alpha \left\{ 2 \left[\xi_1^{(-1)} \left((k_3 - k_2)^2, m^2 \right) + \xi_1^{(-1)} \left((k_2 - k_1)^2, m^2 \right) \right] \right. \\
& \quad - 2(k_2 - k_1)^2 \left[\xi_{10}^{(-2)} \right] + 2(k_3 - k_1) \cdot (k_2 - k_1) \left[\xi_{10}^{(-2)} \right] \\
& \quad \left. - (k_3 - k_1)^2 \left[\xi_{00}^{(-2)} \right] \right\} \\
& -g_{\mu\nu}\varepsilon_{\lambda\alpha}(k_3 - k_1)_\alpha \left\{ -2 \left[\xi_1^{(-1)} \left((k_3 - k_2)^2, m^2 \right) \right] \right. \\
& \quad + 2(k_3 - k_1) \cdot (k_2 - k_1) \left[\xi_{01}^{(-2)} \right] \\
& \quad \left. - (k_2 - k_1)^2 \left[2\xi_{01}^{(-2)} - \xi_{00}^{(-2)} \right] \right\} .
\end{aligned} \tag{8.4}$$

Finalmente, a amplitude $T_{\lambda\mu\nu}^{AAA}$ é definida por

$$t_{\lambda\mu\nu}^{AAA} = Tr \left\{ \gamma_\lambda \gamma_5 \frac{1}{\not{k} + \not{k}_1 - m} \gamma_\mu \gamma_5 \frac{1}{\not{k} + \not{k}_2 - m} \gamma_\nu \gamma_5 \frac{1}{\not{k} + \not{k}_3 - m} \right\} ,$$

ou ainda como ilustrado na Fig. (8.2).

Figura 8.2 – Representação diagramática da amplitude AAA.



Fonte: Autor (2017)

Novamente fazendo uso da identidade

$$\gamma_\lambda \gamma_5 = -\varepsilon_{\lambda\alpha} \gamma^\alpha ,$$

temos

$$t_{\lambda\mu\nu}^{AAA} = -\varepsilon_{\lambda\alpha} Tr \left\{ \gamma_\alpha \frac{1}{\not{k} + \not{k}_1 - m} \gamma_\mu \gamma_5 \frac{1}{\not{k} + \not{k}_2 - m} \gamma_\nu \gamma_5 \frac{1}{\not{k} + \not{k}_3 - m} \right\} ,$$

o que implica

$$t_{\lambda\mu\nu}^{AAA} = -\varepsilon_{\lambda\alpha} \left[t_{\alpha\mu\nu}^{VAA} \right] .$$

Análogo ao caso AVV , tomando o traço podemos identificar as seguintes subestruturas

$$t_{\alpha\mu\nu}^{VAA} = t_{\alpha\mu\nu} + g_{\alpha\mu} [t_{\nu}^{PSA}] - g_{\alpha\nu} [t_{\mu}^{PAS}] - g_{\mu\nu} [t_{\alpha}^{VSS}] ,$$

e assim

$$t_{\lambda\mu\nu}^{AAA} = -\varepsilon_{\lambda\alpha} [t_{\alpha\mu\nu}] - \varepsilon_{\lambda\mu} [t_{\nu}^{PSA}] + \varepsilon_{\lambda\nu} [t_{\mu}^{PAS}] + g_{\mu\nu} \varepsilon_{\lambda\alpha} [t_{\alpha}^{VSS}] ,$$

onde o tensor $t_{\alpha\mu\nu}$ foi definido em (8.2) que, após integrado, tem o resultado mostrado em (8.3). As subestruturas restantes, t_{ν}^{PSA} , t_{μ}^{PAS} e t_{α}^{VSS} , são amplitudes físicas e podem ser calculadas usando o mesmo roteiro usado para calcular as amplitudes t_{μ}^{VPP} , t_{μ}^{PVP} e t_{μ}^{PPV} . Os respectivos resultados podem ser colocados na seguinte forma:

$$\begin{aligned} T_{\nu}^{PSA} = & (k_2 - k_1)_{\nu} \left\{ - \left[\xi_0^{(-1)} \left((k_2 - k_1)^2, m^2 \right) \right] \right. \\ & \left. - 2(k_2 - k_1) \cdot (k_3 - k_1) \left[\xi_{10}^{(-2)} \right] + (k_3 - k_1)^2 \left[\xi_{00}^{(-2)} \right] \right\} \\ & + (k_3 - k_1)_{\nu} \left\{ - \left[\xi_0^{(-1)} \left((k_3 - k_1)^2, m^2 \right) \right] \right. \\ & \left. - 2(k_2 - k_1) \cdot (k_3 - k_1) \left[\xi_{01}^{(-2)} \right] \right. \\ & \left. + \left[(k_2 - k_1)^2 - 4m^2 \right] \left[\xi_{00}^{(-2)} \right] \right\} , \end{aligned} \quad (8.5)$$

$$\begin{aligned} T_{\mu}^{PAS} = & (k_3 - k_1)_{\mu} \left\{ - \left[\xi_0^{(-1)} \left((k_3 - k_1)^2, m^2 \right) \right] + \xi_0^{(-1)} \left((k_3 - k_2)^2, m^2 \right) \right\} \\ & + 2 \left[(k_3 - k_1)^2 - (k_2 - k_1) \cdot (k_3 - k_1) \right] \left[\xi_{01}^{(-2)} \right] \\ & + \left[(k_2 - k_1)^2 - 4m^2 \right] \left[\xi_{00}^{(-2)} \right] \left\{ \right. \\ & + (k_2 - k_1)_{\mu} \left\{ \left[\xi_0^{(-1)} \left((k_3 - k_2)^2, m^2 \right) \right] \right. \\ & \left. + 2 \left[(k_3 - k_1)^2 - (k_2 - k_1) \cdot (k_3 - k_1) \right] \left[\xi_{10}^{(-2)} \right] \right. \\ & \left. \left. - (k_3 - k_1)^2 \left[\xi_{00}^{(-2)} \right] \right\} \right\} , \end{aligned} \quad (8.6)$$

$$\begin{aligned}
T_{\lambda}^{VSS} = & (k_2 - k_1)_{\lambda} \left\{ - \left[\xi_0^{(-1)} \left((k_2 - k_1)^2, m^2 \right) + \xi_0^{(-1)} \left((k_3 - k_2)^2, m^2 \right) \right] \right. \\
& + 2 \left[(k_2 - k_1)^2 - (k_2 - k_1) \cdot (k_3 - k_1) - 4m^2 \right] \left[\xi_{10}^{(-2)} \right] \\
& \left. + (k_3 - k_1)^2 \left[\xi_{00}^{(-2)} \right] \right\} \\
& + (k_3 - k_1)_{\lambda} \left\{ \left[\xi_0^{(-1)} \left((k_3 - k_2)^2, m^2 \right) \right] \right. \\
& + 2 \left[(k_2 - k_1)^2 - (k_2 - k_1) \cdot (k_3 - k_1) - 4m^2 \right] \left[\xi_{01}^{(-2)} \right] \\
& \left. - \left[(k_2 - k_1)^2 - 4m^2 \right] \left[\xi_{00}^{(-2)} \right] \right\} . \tag{8.7}
\end{aligned}$$

Reunindo-se os resultados acima obtemos

$$\begin{aligned}
T_{\lambda\mu\nu}^{AAA} = & \varepsilon_{\lambda\mu} \left\{ 2(k_2 - k_1)_{\nu} \left[\xi_1^{(-1)} \left((k_2 - k_1)^2, m^2 \right) \right] \right. \\
& + 2(k_2 - k_1)_{\nu} (k_2 - k_1) \cdot (k_3 - k_1) \left[\xi_{10}^{(-2)} \right] \\
& - (k_2 - k_1)_{\nu} (k_3 - k_1)^2 \left[\xi_{00}^{(-2)} \right] \\
& + 2(k_3 - k_1)_{\nu} \left[\xi_1^{(-1)} \left((k_3 - k_1)^2, m^2 \right) \right] \\
& + 2(k_3 - k_1)_{\nu} (k_2 - k_1) \cdot (k_3 - k_1) \left[\xi_{01}^{(-2)} \right] \\
& \left. - (k_3 - k_1)_{\nu} \left[(k_2 - k_1)^2 - 4m^2 \right] \left[\xi_{00}^{(-2)} \right] \right\} \\
& + \varepsilon_{\lambda\nu} \left\{ -2(k_3 - k_1)_{\mu} \left[\xi_1^{(-1)} \left((k_3 - k_1)^2, m^2 \right) + \xi_1^{(-1)} \left((k_3 - k_2)^2, m^2 \right) \right] \right. \\
& + 2(k_3 - k_1)_{\mu} \left[(k_3 - k_1)^2 - (k_2 - k_1) \cdot (k_3 - k_1) \right] \left[\xi_{01}^{(-2)} \right] \\
& + (k_3 - k_1)_{\mu} \left[(k_2 - k_1)^2 - 4m^2 \right] \left[\xi_{00}^{(-2)} \right] \\
& + 2(k_2 - k_1)_{\mu} \left[\xi_1^{(-1)} \left((k_3 - k_2)^2, m^2 \right) \right] \\
& + 2(k_2 - k_1)_{\mu} \left[(k_3 - k_1)^2 - (k_2 - k_1) \cdot (k_3 - k_1) \right] \left[\xi_{10}^{(-2)} \right] \\
& \left. - (k_2 - k_1)_{\mu} (k_3 - k_1)^2 \left[\xi_{00}^{(-2)} \right] \right\}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \varepsilon_{\lambda\tau} \left\{ 4 \left[g_{\tau\mu} (k_2 - k_1)_\nu + g_{\tau\nu} (k_2 - k_1)_\mu + g_{\mu\nu} (k_2 - k_1)_\tau \right] \left[\xi_{10}^{(-1)} \right] \right. \\
& \quad + 4 \left[g_{\tau\mu} (k_3 - k_1)_\nu + g_{\tau\nu} (k_3 - k_1)_\mu + g_{\mu\nu} (k_3 - k_1)_\tau \right] \left[\xi_{01}^{(-1)} \right] \\
& \quad - 2 \left[g_{\tau\mu} (k_3 - k_1)_\nu + g_{\mu\nu} (k_3 - k_1)_\tau \right] \left[\xi_{00}^{(-1)} \right] \\
& \quad - 2 \left[g_{\tau\mu} (k_2 - k_1)_\nu + g_{\tau\nu} (k_2 - k_1)_\mu \right] \left[\xi_{00}^{(-1)} \right] \\
& \quad - 2g_{\mu\nu} (k_2 - k_1)_\tau \left[\xi_1^{(-1)} \left((k_2 - k_1)^2, m^2 \right) + \xi_1^{(-1)} \left((k_3 - k_2)^2, m^2 \right) \right] \\
& \quad + 2g_{\mu\nu} (k_2 - k_1)_\tau \left[(k_2 - k_1)^2 - (k_2 - k_1) \cdot (k_3 - k_1) - 4m^2 \right] \left[\xi_{10}^{(-2)} \right] \\
& \quad + g_{\mu\nu} (k_2 - k_1)_\tau (k_3 - k_1)^2 \left[\xi_{00}^{(-2)} \right] \\
& \quad + 2g_{\mu\nu} (k_3 - k_1)_\tau \left[\xi_1^{(-1)} \left((k_3 - k_2)^2, m^2 \right) \right] \\
& \quad + 2g_{\mu\nu} (k_3 - k_1)_\tau \left[(k_2 - k_1)^2 - (k_2 - k_1) \cdot (k_3 - k_1) - 4m^2 \right] \left[\xi_{01}^{(-2)} \right] \\
& \quad - g_{\mu\nu} (k_3 - k_1)_\tau \left[(k_2 - k_1)^2 - 4m^2 \right] \left[\xi_{00}^{(-2)} \right] \\
& \quad - 8 (k_2 - k_1)_\tau (k_2 - k_1)_\mu (k_2 - k_1)_\nu \left[-\xi_{30}^{(-2)} + \xi_{20}^{(-2)} \right] \\
& \quad - 8 (k_3 - k_1)_\tau (k_3 - k_1)_\mu (k_3 - k_1)_\nu \left[-\xi_{03}^{(-2)} + \xi_{02}^{(-2)} \right] \\
& \quad - 4 (k_2 - k_1)_\tau (k_2 - k_1)_\mu (k_3 - k_1)_\nu \left[-2\xi_{21}^{(-2)} + \xi_{20}^{(-2)} + \xi_{11}^{(-2)} - \xi_{10}^{(-2)} \right] \\
& \quad - 4 (k_3 - k_1)_\tau (k_3 - k_1)_\mu (k_2 - k_1)_\nu \left[-2\xi_{12}^{(-2)} + \xi_{02}^{(-2)} + \xi_{11}^{(-2)} - \xi_{01}^{(-2)} \right] \\
& \quad - 4 (k_3 - k_1)_\tau (k_2 - k_1)_\mu (k_2 - k_1)_\nu \left[-2\xi_{21}^{(-2)} + 2\xi_{11}^{(-2)} + \xi_{20}^{(-2)} - \xi_{10}^{(-2)} \right] \\
& \quad - 4 (k_3 - k_1)_\tau (k_2 - k_1)_\mu (k_3 - k_1)_\nu \left[-2\xi_{12}^{(-2)} + 2\xi_{11}^{(-2)} + \xi_{02}^{(-2)} - \xi_{01}^{(-2)} \right] \\
& \quad - 4 (k_2 - k_1)_\tau (k_3 - k_1)_\mu (k_2 - k_1)_\nu \left[-2\xi_{21}^{(-2)} + \xi_{11}^{(-2)} \right] \\
& \quad \left. - 4 (k_2 - k_1)_\tau (k_3 - k_1)_\mu (k_3 - k_1)_\nu \left[-2\xi_{12}^{(-2)} + \xi_{11}^{(-2)} \right] \right\} . \tag{8.8}
\end{aligned}$$

Desse modo concluímos o cálculo de todas as amplitudes pertinentes a nossa investigação. Nos próximos capítulos verificaremos se as amplitudes calculadas satisfazem suas correspondentes relações entre funções de Green, identidades de Ward e limites de baixa energia, para assim podermos identificar a existência de anomalias nestas amplitudes.

9 CÁLCULO DAS RELAÇÕES ENTRE FUNÇÕES DE GREEN ENVOLVENDO AMPLITUDES DE TRÊS PONTOS

Neste capítulo vamos investigar se as amplitudes de três pontos calculadas no capítulo 8 satisfazem as relações entre funções de Green estabelecidas no capítulo 3, usando as propriedades do Apêndice B.

9.1 Sub-amplitudes

Começamos estudando as amplitudes de três pontos que são subestruturas das amplitudes AVV e AAA . A sistemática de cálculo das funções de Green é também importante para expressar o ponto de vista conceitual adotado neste trabalho. Podemos iniciar os cálculos considerando as subestruturas da amplitude AVV . Para a amplitude VPP estabelecemos o resultado (8). Contraindo com o momento externo $(k_3 - k_1)^\lambda$ obtemos

$$\begin{aligned}
& [-i(4\pi)] (k_3 - k_1)^\lambda T_\lambda^{VPP} \\
&= -(k_3 - k_1)^2 \left[\xi_0^{(-1)} \left((k_3 - k_2)^2, m^2 \right) \right] \\
&+ (k_2 - k_1) \cdot (k_3 - k_1) \left[\xi_0^{(-1)} \left((k_2 - k_1)^2, m^2 \right) + \xi_0^{(-1)} \left((k_3 - k_2)^2, m^2 \right) \right] \\
&+ 2(k_2 - k_1) \cdot (k_3 - k_2) \left\{ (k_3 - k_1)^2 \left[\xi_{01}^{(-2)} \right] + (k_2 - k_1) \cdot (k_3 - k_1) \left[\xi_{10}^{(-2)} \right] \right\} \\
&- (k_3 - k_1)^2 (k_2 - k_1) \cdot (k_3 - k_1) \left[\xi_{00}^{(-2)} \right] \\
&+ (k_2 - k_1)^2 (k_3 - k_1)^2 \left[\xi_{00}^{(-2)} \right] .
\end{aligned}$$

Usando a identidade (25) e efetuando os cancelamentos algébricos temos

$$\begin{aligned}
(k_3 - k_1)^\lambda T_\lambda^{VPP} &= -\frac{i}{4\pi} (k_3 - k_2)^2 \left[\xi_0^{(-1)} \left((k_3 - k_2)^2, m^2 \right) \right] \\
&+ \frac{i}{4\pi} (k_2 - k_1)^2 \left[\xi_0^{(-1)} \left((k_2 - k_1)^2, m^2 \right) \right] ,
\end{aligned}$$

ou, reorganizado de forma conveniente,

$$\begin{aligned}
(k_3 - k_1)^\lambda T_\lambda^{VPP} &= \left\{ -2 [I_{\log}(m^2)] + \frac{i}{4\pi} (k_2 - k_1)^2 \left[\xi_0^{(-1)} \left((k_2 - k_1)^2, m^2 \right) \right] \right\} \\
&- \left\{ -2 [I_{\log}(m^2)] + \frac{i}{4\pi} (k_3 - k_2)^2 \left[\xi_0^{(-1)} \left((k_3 - k_2)^2, m^2 \right) \right] \right\} .
\end{aligned}$$

Dado a expressão para a função de dois pontos PP , Eq. (5.4), podemos identificar o resultado acima como

$$(k_3 - k_1)^\lambda T_\lambda^{VPP} = [T^{PP}(k_1, k_2)] - [T^{PP}(k_2, k_3)] ,$$

o qual é esperado pela Eq. (3.6).

No próximo passo consideramos a amplitude PPV , expressão (10). Contraindo obtemos

$$\begin{aligned} & [-i(4\pi)] (k_3 - k_2)^\nu T_\nu^{PPV} \\ &= \left[(k_2 - k_1)^2 - (k_2 - k_1) \cdot (k_3 - k_1) \right] \left[\xi_0^{(-1)} \left((k_2 - k_1)^2, m^2 \right) \right] \\ &- \left[(k_3 - k_1)^2 - (k_2 - k_1) \cdot (k_3 - k_1) \right] \left[\xi_0^{(-1)} \left((k_3 - k_1)^2, m^2 \right) \right] \\ &+ 2(k_2 - k_1) \cdot (k_3 - k_1) \left\{ (k_2 - k_1)^2 \left[\xi_{10}^{(-2)} \right] + (k_2 - k_1) \cdot (k_3 - k_1) \left[\xi_{01}^{(-2)} \right] \right\} \\ &- 2(k_2 - k_1) \cdot (k_3 - k_1) \left\{ (k_3 - k_1)^2 \left[\xi_{01}^{(-2)} \right] + (k_2 - k_1) \cdot (k_3 - k_1) \left[\xi_{10}^{(-2)} \right] \right\} \\ &- \left[(k_2 - k_1)^2 - (k_3 - k_1)^2 \right] (k_2 - k_1) \cdot (k_3 - k_1) \left[\xi_{00}^{(-2)} \right] . \end{aligned}$$

Usando as propriedades (25) e (26), somando e subtraindo $I_{\log}(m^2)$ e efetuando a álgebra necessária obtemos

$$\begin{aligned} (k_3 - k_2)^\nu T_\nu^{PPV} &= \left\{ [I_{\log}(m^2)] + \frac{i}{4\pi} (k_2 - k_1)^2 \left[\xi_0^{(-1)} \left((k_2 - k_1)^2, m^2 \right) \right] \right\} \\ &- \left\{ [I_{\log}(m^2)] + \frac{i}{4\pi} (k_3 - k_1)^2 \left[\xi_0^{(-1)} \left((k_3 - k_1)^2, m^2 \right) \right] \right\} . \end{aligned}$$

Podemos reconhecer o lado direito da expressão acima como sendo a diferença entre duas amplitudes PP

$$(k_3 - k_2)^\nu T_\nu^{PPV} = [T^{PP}(k_1, k_2)] - [T^{PP}(k_1, k_3)] ,$$

em completa concordância com a relação estabelecida em (3.8).

Por sua vez, para a amplitude PVP , dada na Eq. (9), contraímos com p^μ obtendo

$$\begin{aligned}
& [-i(4\pi)] (k_2 - k_1)^\mu T_\mu^{PVP} \\
&= - \left[(k_2 - k_1)^2 - (k_2 - k_1) \cdot (k_3 - k_1) \right] \left[\xi_0^{(-1)} \left((k_3 - k_2)^2, m^2 \right) \right] \\
&+ (k_2 - k_1) \cdot (k_3 - k_1) \left[\xi_0^{(-1)} \left((k_3 - k_1)^2, m^2 \right) \right] \\
&- \left[(k_3 - k_2)^2 - (k_2 - k_1)^2 + (k_3 - k_1)^2 \right] \left\{ (k_2 - k_1)^2 \left[\xi_{10}^{(-2)} \right] + (k_2 - k_1) \cdot (k_3 - k_1) \left[\xi_{01}^{(-2)} \right] \right\} \\
&+ \left[(k_2 - k_1)^2 (k_3 - k_1)^2 - (k_2 - k_1) \cdot (k_3 - k_1) \right] \left[\xi_{00}^{(-2)} \right].
\end{aligned}$$

Através das propriedades (26) obtemos

$$\begin{aligned}
(k_2 - k_1)^\mu T_\mu^{PVP} &= -\frac{i}{4\pi} (k_3 - k_2)^2 \left[\xi_0^{(-1)} \left((k_3 - k_2)^2, m^2 \right) \right] \\
&+ \frac{i}{4\pi} (k_3 - k_1)^2 \left[\xi_0^{(-1)} \left((k_3 - k_1)^2, m^2 \right) \right],
\end{aligned}$$

o que significa que a relação (3.7) também é preservada pela amplitude calculada.

No próximo passo consideremos as subestruturas da amplitude AAA . A contração da amplitude VSS com o momento q^λ fornece

$$\begin{aligned}
& [-i(4\pi)] (k_3 - k_1)^\lambda T_\lambda^{VSS} \\
&= - (k_2 - k_1) \cdot (k_3 - k_1) \left[\xi_0^{(-1)} \left((k_2 - k_1)^2, m^2 \right) \right] \\
&+ \left[(k_3 - k_1)^2 - (k_2 - k_1) \cdot (k_3 - k_1) \right] \left[\xi_0^{(-1)} \left((k_3 - k_2)^2, m^2 \right) \right] \\
&+ 2 \left[(k_2 - k_1)^2 - (k_2 - k_1) \cdot (k_3 - k_1) - 4m^2 \right] \\
&\times \left\{ (k_3 - k_1)^2 \left[\xi_{01}^{(-2)} - \frac{1}{2} \xi_{00}^{(-2)} \right] + (k_2 - k_1) \cdot (k_3 - k_1) \left[\xi_{10}^{(-2)} \right] \right\}.
\end{aligned}$$

Através da identidade (25) podemos obter

$$\begin{aligned}
& [-i(4\pi)] (k_3 - k_1)^\lambda T_\lambda^{VSS} \\
&= (k_3 - k_2)^2 \left[\xi_0^{(-1)} \left((k_3 - k_2)^2, m^2 \right) \right] - (k_2 - k_1)^2 \left[\xi_0^{(-1)} \left((k_2 - k_1)^2, m^2 \right) \right] \\
&- 4m^2 \left[\xi_0^{(-1)} \left((k_3 - k_2)^2, m^2 \right) - \xi_0^{(-1)} \left((k_2 - k_1)^2, m^2 \right) \right].
\end{aligned}$$

O lado direito da equação acima pode ser identificado exatamente com a relação (3.5) se lembrarmos do resultado (5.5).

Por sua vez, a contração da amplitude *PSA* fornece inicialmente o resultado

$$\begin{aligned}
& [-i(4\pi)] (k_3 - k_2)^\nu T_\nu^{PSA} \\
&= -2(k_2 - k_1) \cdot (k_3 - k_1) \left\{ (k_3 - k_1)^2 \left[\xi_{01}^{(-2)} \right] + (k_2 - k_1) \cdot (k_3 - k_1) \left[\xi_{10}^{(-2)} \right] \right\} \\
&\quad + \frac{1}{2} \left[\xi_0^{(-1)} \left((k_2 - k_1)^2, m^2 \right) \right] - \frac{1}{2} (k_3 - k_1)^2 \left[\xi_{00}^{(-2)} \right] \Big\} \\
&+ 2(k_2 - k_1) \cdot (k_3 - k_1) \left\{ (k_2 - k_1)^2 \left[\xi_{10}^{(-2)} \right] + (k_2 - k_1) \cdot (k_3 - k_1) \left[\xi_{01}^{(-2)} \right] \right\} \\
&\quad + \frac{1}{2} \left[\xi_0^{(-1)} \left((k_3 - k_1)^2, m^2 \right) \right] - \frac{1}{2} (k_2 - k_1)^2 \left[\xi_{00}^{(-2)} \right] \Big\} \\
&+ (k_2 - k_1)^2 \left[\xi_0^{(-1)} \left((k_2 - k_1)^2, m^2 \right) \right] - (k_3 - k_1)^2 \left[\xi_0^{(-1)} \left((k_3 - k_1)^2, m^2 \right) \right] \\
&- 4m^2 \left[(k_3 - k_1)^2 - (k_2 - k_1) \cdot (k_3 - k_1) \right] \left[\xi_{00}^{(-2)} \right] .
\end{aligned}$$

Usando as Eqs. (25) e (26) obtemos

$$\begin{aligned}
& [-i(4\pi)] (k_3 - k_2)^\nu T_\nu^{PSA} \\
&= (k_2 - k_1)^2 \left[\xi_0^{(-1)} \left((k_2 - k_1)^2, m^2 \right) \right] - (k_3 - k_1)^2 \left[\xi_0^{(-1)} \left((k_3 - k_1)^2, m^2 \right) \right] \\
&- 4m^2 \left[(k_3 - k_1)^2 - (k_2 - k_1) \cdot (k_3 - k_1) \right] \left[\xi_{00}^{(-2)} \right] ,
\end{aligned}$$

que pode ser diretamente identificado com a relação (3.12) (ver Eqs. (5.4), (5.5), and (14)).

Procedendo de maneira similar para *PAS* temos

$$\begin{aligned}
& [-i(4\pi)] (k_2 - k_1)^\mu T_\mu^{PAS} \\
&= - (k_3 - k_1)^2 \left[\xi_0^{(-1)} \left((k_3 - k_1)^2, m^2 \right) \right] \\
&+ \left[(k_2 - k_1)^2 - (k_2 - k_1) \cdot (k_3 - k_1) \right] \left[\xi_0^{(-1)} \left((k_3 - k_2)^2, m^2 \right) \right] \\
&+ \left[(k_3 - k_1)^2 - (k_2 - k_1) \cdot (k_3 - k_1) \right] \left\{ \left[\xi_0^{(-1)} \left((k_3 - k_1)^2, m^2 \right) \right] + 2(k_2 - k_1)^2 \left[\xi_{10}^{(-2)} \right] \right. \\
&\quad \left. + 2(k_2 - k_1) \cdot (k_3 - k_1) \left[\xi_{01}^{(-2)} \right] - (k_2 - k_1)^2 \left[\xi_{00}^{(-2)} \right] \right\} \\
&- 4m^2 (k_2 - k_1) \cdot (k_3 - k_1) \left[\xi_{00}^{(-2)} \right] ,
\end{aligned}$$

ou

$$\begin{aligned}
[-i(4\pi)](k_2 - k_1)^\mu T_\mu^{PAS} &= -(k_3 - k_1)^2 \left[\xi_0^{(-1)} \left((k_3 - k_1)^2, m^2 \right) \right] \\
&+ (k_3 - k_2)^2 \left[\xi_0^{(-1)} \left((k_3 - k_2)^2, m^2 \right) \right] \\
&- 4m^2 (k_2 - k_1) \cdot (k_3 - k_1) \left[\xi_{00}^{(-2)} \right],
\end{aligned}$$

onde usamos novamente a identidade (26). Dado os resultados (5.4), (5.5), e (15), podemos identificar o lado direito da expressão acima como sendo a relação entre as funções de Green (3.13).

9.2 Amplitude AVV

Sabendo que todas as sub-amplitudes satisfazem as suas respectivas relações entre funções de Green podemos partir para os cálculos envolvendo as relações entre funções de Green da amplitude AVV dada pela expressão (8.4). Os cálculos envolvendo as amplitudes AVV e AAA exigem um esforço algébrico considerável bem como o conhecimento de várias propriedades das funções finitas. Apresentaremos os passos principais dos cálculos de modo que fique claro a sistemática do procedimento adotado. Consideremos primeiro os vértices vetoriais. Contraindo com $(k_2 - k_1)^\mu$ temos

$$\begin{aligned}
(k_2 - k_1)^\mu T_{\lambda\mu\nu}^{AVV} &= -\varepsilon_{\lambda\tau} g^{\tau\rho} \left[(k_2 - k_1)^\mu T_{\rho\mu\nu} \right] \\
&- \varepsilon_{\lambda\mu} (k_2 - k_1)^\mu \left[T_\nu^{PPV} \right] \\
&- \varepsilon_{\lambda\nu} \left[(k_2 - k_1)^\mu T_\mu^{PVP} \right] \\
&+ (k_2 - k_1)_\nu \left[T_\lambda^{APP} \right].
\end{aligned}$$

Explicitamente podemos escrever cada termo como

$$\begin{aligned}
& (k_2 - k_1)^\mu T_{\lambda\mu\nu} \\
&= 2\varepsilon_{\lambda\nu} (k_3 - k_2)^2 \left[\xi_1^{(-1)} \left((k_3 - k_2)^2, m^2 \right) - 2\xi_2^{(-1)} \left((k_3 - k_2)^2, m^2 \right) \right] \\
&- 2\varepsilon_{\lambda\nu} (k_3 - k_1)^2 \left[\xi_1^{(-1)} \left((k_3 - k_1)^2, m^2 \right) - 2\xi_2^{(-1)} \left((k_3 - k_1)^2, m^2 \right) \right] \\
&- \varepsilon_{\lambda\tau} \left\{ -4(k_2 - k_1)^\tau (k_2 - k_1)_\nu \left[\xi_2^{(-1)} \left((k_3 - k_2)^2, m^2 \right) - \xi_1^{(-1)} \left((k_3 - k_2)^2, m^2 \right) \right] \right. \\
&\quad - 2(k_2 - k_1)^\tau (k_2 - k_1)_\nu \left[\xi_1^{(-1)} \left((k_3 - k_2)^2, m^2 \right) \right] \\
&\quad + 2(k_2 - k_1)^\tau (k_2 - k_1)_\nu \left[(k_2 - k_1)^2 \xi_{10}^{(-2)} \right] \\
&\quad - 4(k_3 - k_1)^\tau (k_3 - k_1)_\nu \left[\xi_2^{(-1)} \left((k_3 - k_2)^2, m^2 \right) - \xi_1^{(-1)} \left((k_3 - k_2)^2, m^2 \right) \right] \\
&\quad + 4(k_3 - k_1)^\tau (k_3 - k_1)_\nu \left[\xi_2^{(-1)} \left((k_3 - k_1)^2, m^2 \right) - \xi_1^{(-1)} \left((k_3 - k_1)^2, m^2 \right) \right] \\
&\quad + 4(k_2 - k_1)^\tau (k_3 - k_1)_\nu \left[\xi_2^{(-1)} \left((k_3 - k_2)^2, m^2 \right) - \xi_1^{(-1)} \left((k_3 - k_2)^2, m^2 \right) \right] \\
&\quad + 2(k_2 - k_1)^\tau (k_3 - k_1)_\nu \left[\xi_1^{(-1)} \left((k_3 - k_2)^2, m^2 \right) \right] \\
&\quad - 2(k_2 - k_1)^\tau (k_3 - k_1)_\nu \left[(k_2 - k_1)^2 \xi_{10}^{(-2)} \right] \\
&\quad + 4(k_3 - k_1)^\tau (k_2 - k_1)_\nu \left[\xi_2^{(-1)} \left((k_3 - k_2)^2, m^2 \right) - \xi_1^{(-1)} \left((k_3 - k_2)^2, m^2 \right) \right] \\
&\quad + 2(k_3 - k_1)^\tau (k_2 - k_1)_\nu \left[\xi_1^{(-1)} \left((k_3 - k_1)^2, m^2 \right) \right] \\
&\quad + 2(k_3 - k_1)^\tau (k_2 - k_1)_\nu \left[(k_2 - k_1)^2 \xi_{10}^{(-2)} \right] \\
&\quad + 2(k_3 - k_1)^\tau (k_2 - k_1)_\nu \left[(k_2 - k_1)^2 \xi_{01}^{(-2)} \right] \\
&\quad \left. - 2(k_3 - k_1)^\tau (k_2 - k_1)_\nu \left[(k_2 - k_1)^2 \xi_{00}^{(-2)} \right] \right\} ,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
-\varepsilon_{\lambda\tau} (k_2 - k_1)^\tau T_\nu^{PPV} &= \varepsilon_{\lambda\tau} \left\{ (k_2 - k_1)^\tau (k_2 - k_1)_\nu \left[\xi_0^{(-1)} \left((k_2 - k_1)^2, m^2 \right) \right] \right. \\
&\quad + 2(k_2 - k_1)^\tau (k_2 - k_1)_\nu \left[(k_2 - k_1) \cdot (k_3 - k_1) \xi_{10}^{(-2)} \right] \\
&\quad - (k_2 - k_1)^\tau (k_2 - k_1)_\nu \left[(k_3 - k_1)^2 \xi_{00}^{(-2)} \right] \\
&\quad + (k_2 - k_1)^\tau (k_3 - k_1)_\nu \left[\xi_0^{(-1)} \left((k_3 - k_1)^2, m^2 \right) \right] \\
&\quad + 2(k_2 - k_1)^\tau (k_3 - k_1)_\nu \left[(k_2 - k_1) \cdot (k_3 - k_1) \xi_{01}^{(-2)} \right] \\
&\quad \left. - (k_2 - k_1)^\tau (k_3 - k_1)_\nu \left[(k_2 - k_1)^2 \xi_{00}^{(-2)} \right] \right\} ,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -\varepsilon_{\lambda\tau} g^{\tau\rho} (k_2 - k_1)_\nu T_\rho^{VPP} \\
& = \varepsilon_{\lambda\tau} \left\{ -2(k_2 - k_1)^\tau (k_2 - k_1)_\nu \left[\xi_1^{(-1)} \left((k_3 - k_2)^2, m^2 \right) + \xi_1^{(-1)} \left((k_2 - k_1)^2, m^2 \right) \right] \right. \\
& \quad + 2(k_2 - k_1)^\tau (k_2 - k_1)_\nu \left[(k_2 - k_1)^2 \xi_{10}^{(-2)} \right] \\
& \quad - 2(k_2 - k_1)^\tau (k_2 - k_1)_\nu \left[(k_2 - k_1) \cdot (k_3 - k_1) \xi_{10}^{(-2)} \right] \\
& \quad + (k_2 - k_1)^\tau (k_2 - k_1)_\nu \left[(k_3 - k_1)^2 \xi_{00}^{(-2)} \right] \\
& \quad + 2(k_3 - k_1)^\tau (k_2 - k_1)_\nu \left[\xi_1^{(-1)} \left((k_2 - k_3)^2, m^2 \right) \right] \\
& \quad + 2(k_3 - k_1)^\tau (k_2 - k_1)_\nu \left[(k_2 - k_1)^2 \xi_{01}^{(-2)} \right] \\
& \quad - 2(k_3 - k_1)^\tau (k_2 - k_1)_\nu \left[(k_2 - k_1) \cdot (k_3 - k_1) \xi_{01}^{(-2)} \right] \\
& \quad \left. - (k_3 - k_1)^\tau (k_2 - k_1)_\nu \left[(k_2 - k_1)^2 \xi_{00}^{(-2)} \right] \right\} ,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
-\varepsilon_{\lambda\nu} (k_2 - k_1)^\mu T_\mu^{PVP} & = \varepsilon_{\lambda\nu} \left\{ (k_3 - k_2)^2 \xi_0^{(-1)} \left((k_3 - k_2)^2, m^2 \right) \right. \\
& \quad \left. - (k_3 - k_1)^2 \xi_0^{(-1)} \left((k_3 - k_1)^2, m^2 \right) \right\} .
\end{aligned}$$

Somando-se os resultados acima temos

$$\begin{aligned}
& (k_2 - k_1)^\mu T_{\lambda\mu\nu}^{AVV} \\
&= 4\varepsilon_{\lambda\nu} (k_3 - k_2)^2 \left[\xi_1^{(-1)} \left((k_3 - k_2)^2, m^2 \right) - \xi_2^{(-1)} \left((k_3 - k_2)^2, m^2 \right) \right] \\
&- 4\varepsilon_{\lambda\nu} (k_3 - k_1)^2 \left[\xi_1^{(-1)} \left((k_3 - k_1)^2, m^2 \right) - \xi_2^{(-1)} \left((k_3 - k_1)^2, m^2 \right) \right] \\
&+ \varepsilon_{\lambda\tau} \left\{ 4(k_2 - k_1)^\tau (k_2 - k_1)_\nu \left[\xi_2^{(-1)} \left((k_3 - k_2)^2, m^2 \right) - \xi_1^{(-1)} \left((k_3 - k_2)^2, m^2 \right) \right] \right. \\
&\quad + 4(k_3 - k_1)^\tau (k_3 - k_1)_\nu \left[\xi_2^{(-1)} \left((k_3 - k_2)^2, m^2 \right) - \xi_1^{(-1)} \left((k_3 - k_2)^2, m^2 \right) \right] \\
&\quad - 4(k_3 - k_1)^\tau (k_3 - k_1)_\nu \left[\xi_2^{(-1)} \left((k_3 - k_1)^2, m^2 \right) - \xi_1^{(-1)} \left((k_3 - k_1)^2, m^2 \right) \right] \\
&\quad - 4(k_2 - k_1)^\tau (k_3 - k_1)_\nu \left[\xi_2^{(-1)} \left((k_3 - k_2)^2, m^2 \right) - \xi_1^{(-1)} \left((k_3 - k_2)^2, m^2 \right) \right] \\
&\quad - 2(k_2 - k_1)^\tau (k_3 - k_1)_\nu \left[\xi_1^{(-1)} \left((k_3 - k_2)^2, m^2 \right) - \xi_1^{(-1)} \left((k_3 - k_1)^2, m^2 \right) \right] \\
&\quad + 2(k_2 - k_1)^\tau (k_3 - k_1)_\nu \left[(k_2 - k_1)^2 \xi_{10}^{(-2)} + (k_2 - k_1) \cdot (k_3 - k_1) \xi_{01}^{(-2)} \right] \\
&\quad - (k_2 - k_1)^\tau (k_3 - k_1)_\nu \left[(k_2 - k_1)^2 \xi_{00}^{(-2)} \right] \\
&\quad - 4(k_3 - k_1)^\tau (k_2 - k_1)_\nu \left[\xi_2^{(-1)} \left((k_3 - k_2)^2, m^2 \right) - \xi_1^{(-1)} \left((k_3 - k_2)^2, m^2 \right) \right] \\
&\quad + 2(k_3 - k_1)^\tau (k_2 - k_1)_\nu \left[\xi_1^{(-1)} \left((k_3 - k_2)^2, m^2 \right) - \xi_1^{(-1)} \left((k_3 - k_1)^2, m^2 \right) \right] \\
&\quad - 2(k_3 - k_1)^\tau (k_2 - k_1)_\nu \left[(k_2 - k_1)^2 \xi_{10}^{(-2)} + (k_2 - k_1) \cdot (k_3 - k_1) \xi_{01}^{(-2)} \right] \\
&\quad \left. + (k_3 - k_1)^\tau (k_2 - k_1)_\nu \left[(k_2 - k_1)^2 \xi_{00}^{(-2)} \right] \right\} .
\end{aligned}$$

Utilizamos agora a identidade (26) e, após alguma álgebra, obtemos a expressão abaixo

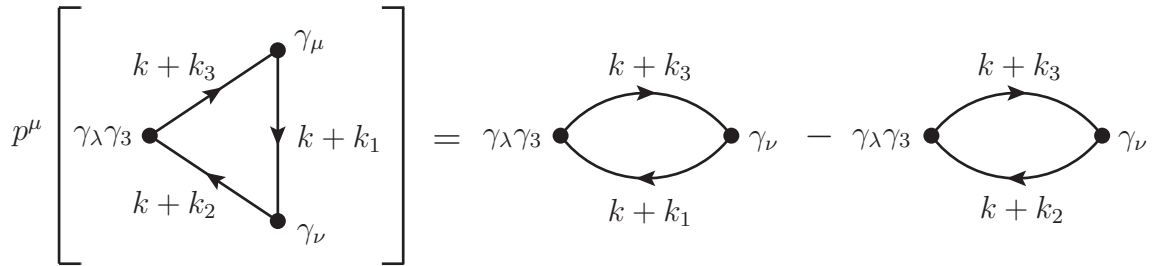
$$\begin{aligned}
& (k_2 - k_1)^\mu T_{\lambda\mu\nu}^{AVV} \\
&= 4\varepsilon_{\lambda\nu} \left\{ (k_3 - k_1)^2 \left[\xi_2^{(-1)} \left((k_3 - k_1)^2, m^2 \right) - \xi_1^{(-1)} \left((k_3 - k_1)^2, m^2 \right) \right] \right. \\
&\quad \left. - (k_3 - k_2)^2 \left[\xi_2^{(-1)} \left((k_3 - k_2)^2, m^2 \right) - \xi_1^{(-1)} \left((k_3 - k_2)^2, m^2 \right) \right] \right\} \\
&+ 4\varepsilon_{\lambda\tau} \left\{ (k_3 - k_2)^\tau (k_3 - k_2)_\nu \left[\xi_2^{(-1)} \left((k_3 - k_2)^2, m^2 \right) - \xi_1^{(-1)} \left((k_3 - k_2)^2, m^2 \right) \right] \right. \\
&\quad \left. - (k_3 - k_1)^\tau (k_3 - k_1)_\nu \left[\xi_2^{(-1)} \left((k_3 - k_1)^2, m^2 \right) - \xi_1^{(-1)} \left((k_3 - k_1)^2, m^2 \right) \right] \right\} .
\end{aligned}$$

Lembrando do resultado (5.17) para a amplitude AV, verificamos que a relação (3.9) é satisfeita, ou seja,

$$(k_2 - k_1)^\mu \left[T_{\lambda\mu\nu}^{AVV} \right] = \left[T_{\lambda\nu}^{AV} (k_1, k_3) \right] - \left[T_{\lambda\nu}^{AV} (k_2, k_3) \right] .$$

A respectiva representação diagramática é mostrada na Fig. 9.1.

Figura 9.1 – Representação diagramática da relação entre funções de Green para o vértice vetorial da amplitude AVV .



Fonte: Autor (2017)

Para a contração com o segundo vértice vetorial, $(k_3 - k_2)^\nu T_{\lambda\mu\nu}^{AVV}$, podemos aplicar a mesma sequência de passos e a conclusão é que a identidade (3.10) também é satisfeita.

Para o caso da contração com o vértice axial os cálculos são mais envolventes. Primeiro lembramos da relação com a amplitude VVV

$$T_{\lambda\mu\nu}^{AVV} = -\varepsilon_{\lambda\alpha} T_{\alpha\mu\nu}^{VVV}.$$

Usando a identidade de Schouten reescrevemos

$$T_{\lambda\mu\nu}^{AVV} = \varepsilon_{\alpha\mu} T_{\alpha\lambda\nu}^{VVV} + \varepsilon_{\mu\lambda} T_{\alpha\alpha\nu}^{VVV},$$

de modo que a contração com o vértice axial fica

$$(k_3 - k_1)^\lambda T_{\lambda\mu\nu}^{AVV} = \varepsilon_{\alpha\mu} (k_3 - k_1)^\lambda T_{\alpha\lambda\nu}^{VVV} + \varepsilon_{\mu\lambda} (k_3 - k_1)^\lambda [T_{\alpha\alpha\nu}^{VVV}].$$

Usando a identidade de Schouten novamente no primeiro termo do lado direito da equação acima temos

$$(k_3 - k_1)^\lambda T_{\lambda\mu\nu}^{AVV} = -\varepsilon_{\mu\lambda} [(k_3 - k_1)^\alpha T_{\alpha\lambda\nu}^{VVV}] - (k_3 - k_1)_\mu [\varepsilon^{\lambda\alpha} T_{\alpha\lambda\nu}^{VVV}] + \varepsilon_{\mu\lambda} (k_3 - k_1)^\lambda [T_{\alpha\alpha\nu}^{VVV}].$$

Temos que desenvolver os três termos do lado direito da equação acima. Consideremos primeiro o último termo, $T_{\alpha\alpha\nu}^{VVV}$. Partindo da Eq. (8.1) obtemos

$$T_{\alpha\alpha\nu}^{VVV} = T_{\alpha\alpha\nu} + 2T_{\nu}^{PPV} + T_{\nu}^{PVP} + T_{\nu}^{VPP},$$

onde

$$\begin{aligned}
T_{\alpha\alpha\nu} = & -16(k_2 - k_1) \left[\xi_{10}^{(-1)} \right] - 16(k_3 - k_1)_\nu \left[\xi_{01}^{(-1)} \right] \\
& + 6(k_3 - k_1)_\nu \left[\xi_{00}^{(-1)} \right] + 6(k_2 - k_1)_\nu \left[\xi_{00}^{(-1)} \right] \\
& - 8(k_2 - k_1)_\nu \left\{ (k_2 - k_1)^2 \left[\xi_{30}^{(-2)} \right] + (k_3 - k_1) \cdot (k_2 - k_1) \left[\xi_{21}^{(-2)} \right] \right\} \\
& + 8(k_2 - k_1)_\nu \left\{ (k_2 - k_1)^2 \left[\xi_{20}^{(-2)} \right] + (k_3 - k_1) \cdot (k_2 - k_1) \left[\xi_{11}^{(-2)} \right] \right\} \\
& - 8(k_3 - k_1)_\nu \left\{ (k_3 - k_1)^2 \left[\xi_{03}^{(-2)} \right] + (k_3 - k_1) \cdot (k_2 - k_1) \left[\xi_{12}^{(-2)} \right] \right\} \\
& + 8(k_3 - k_1)_\nu \left\{ (k_3 - k_1)^2 \left[\xi_{02}^{(-2)} \right] + (k_3 - k_1) \cdot (k_2 - k_1) \left[\xi_{11}^{(-2)} \right] \right\} \\
& - 8(k_3 - k_1)_\nu \left\{ (k_2 - k_1)^2 \left[\xi_{21}^{(-2)} \right] + (k_2 - k_1) \cdot (k_3 - k_1) \left[\xi_{12}^{(-2)} \right] \right\} \\
& + 4(k_3 - k_1)_\nu \left\{ (k_2 - k_1)^2 \left[\xi_{20}^{(-2)} \right] + (k_2 - k_1) \cdot (k_3 - k_1) \left[\xi_{11}^{(-2)} \right] \right\} \\
& + 4(k_3 - k_1)_\nu \left\{ (k_2 - k_1)^2 \left[\xi_{11}^{(-2)} \right] + (k_3 - k_1) \cdot (k_2 - k_1) \left[\xi_{02}^{(-2)} \right] \right\} \\
& - 4(k_3 - k_1)_\nu \left\{ (k_2 - k_1)^2 \left[\xi_{10}^{(-2)} \right] + (k_3 - k_1) \cdot (k_2 - k_1) \left[\xi_{01}^{(-2)} \right] \right\} \\
& - 8(k_2 - k_1)_\nu \left\{ (k_3 - k_1)^2 \left[\xi_{12}^{(-2)} \right] + (k_2 - k_1) \cdot (k_3 - k_1) \left[\xi_{21}^{(-2)} \right] \right\} \\
& + 4(k_2 - k_1)_\nu \left\{ (k_3 - k_1)^2 \left[\xi_{02}^{(-2)} \right] + (k_2 - k_1) \cdot (k_3 - k_1) \left[\xi_{11}^{(-2)} \right] \right\} \\
& + 4(k_2 - k_1)_\nu \left\{ (k_3 - k_1)^2 \left[\xi_{11}^{(-2)} \right] + (k_3 - k_1) \cdot (k_2 - k_1) \left[\xi_{20}^{(-2)} \right] \right\} \\
& - 4(k_2 - k_1)_\nu \left\{ (k_3 - k_1)^2 \left[\xi_{01}^{(-2)} \right] + (k_3 - k_1) \cdot (k_2 - k_1) \left[\xi_{10}^{(-2)} \right] \right\} .
\end{aligned}$$

Para simplificar a expressão acima podemos usar as identidades (16)-(27). Após algumas manipulações algébricas obtemos

$$\begin{aligned}
T_{\alpha\alpha\nu} = & -4(k_2 - k_1)_\nu \left\{ \left[\xi_1^{(-1)} \left((k_3 - k_2)^2, m^2 \right) \right] - (k_2 - k_1)^2 \left[\xi_{10}^{(-2)} \right] + 2m^2 \left[\xi_{10}^{(-2)} \right] \right\} \\
& + 2(k_2 - k_1)_\nu \left\{ (k_3 - k_1)^2 \left[\xi_{01}^{(-2)} \right] + (k_3 - k_1)^2 \left[\xi_{10}^{(-2)} \right] - (k_3 - k_1)^2 \left[\xi_{00}^{(-2)} \right] \right\} \\
& + (k_2 - k_1)_\nu \left\{ \left[\xi_0^{(-1)} \left((k_2 - k_1)^2, m^2 \right) \right] \right\} \\
& - 4(k_3 - k_1)_\nu \left\{ \left[\xi_1^{(-1)} \left((k_3 - k_2)^2, m^2 \right) \right] - (k_3 - k_1)^2 \left[\xi_{01}^{(-2)} \right] + 2m^2 \left[\xi_{01}^{(-2)} \right] \right\} \\
& + 2(k_3 - k_1)_\nu \left\{ (k_2 - k_1)^2 \left[\xi_{10}^{(-2)} \right] + (k_2 - k_1)^2 \left[\xi_{01}^{(-2)} \right] - (k_2 - k_1)^2 \left[\xi_{00}^{(-2)} \right] \right\} \\
& + (k_3 - k_1)_\nu \left\{ \left[\xi_0^{(-1)} \left((k_3 - k_1)^2, m^2 \right) \right] \right\} .
\end{aligned}$$

Com a expressão acima e os resultados (8), (9) e (10) obtemos

$$\begin{aligned}\varepsilon_{\mu\lambda} (k_3 - k_1)^\lambda T_{\alpha\alpha\nu}^{VVV} = & -8m^2 \varepsilon_{\mu\lambda} (k_3 - k_1)^\lambda (k_2 - k_1)_\nu \left[\xi_{10}^{(-2)} \right] \\ & + 4m^2 \varepsilon_{\mu\lambda} (k_3 - k_1)^\lambda (k_2 - k_1)_\nu \left[\xi_{00}^{(-2)} \right] \\ & - 8m^2 \varepsilon_{\mu\lambda} (k_3 - k_1)^\lambda (k_3 - k_1)_\nu \left[\xi_{01}^{(-2)} \right] \\ & + 4m^2 \varepsilon_{\mu\lambda} (k_3 - k_1)^\lambda (k_3 - k_1)_\nu \left[\xi_{00}^{(-2)} \right].\end{aligned}$$

Considerando agora o segundo termo vemos que

$$\begin{aligned}\varepsilon^{\lambda\alpha} T_{\alpha\lambda\nu}^{VVV} = & + 2\varepsilon_{\lambda\nu} (k_3 - k_1)_\lambda \left[\xi_{00}^{(-1)} \right] \\ & + 2\varepsilon_{\nu\lambda} (k_2 - k_1)_\lambda \left[\xi_{00}^{(-1)} \right] \\ & + 4\varepsilon_{\alpha\lambda} (k_3 - k_1)_\alpha (k_2 - k_1)_\lambda (k_2 - k_1)_\nu \left[\xi_{11}^{(-2)} + \xi_{20}^{(-2)} - \xi_{10}^{(-2)} \right] \\ & + 4\varepsilon_{\alpha\lambda} (k_3 - k_1)_\alpha (k_2 - k_1)_\lambda (k_3 - k_1)_\nu \left[\xi_{11}^{(-2)} + \xi_{02}^{(-2)} - \xi_{01}^{(-2)} \right].\end{aligned}$$

Usando a identidade de Schouten novamente temos

$$\begin{aligned}\varepsilon^{\lambda\alpha} T_{\alpha\lambda\nu}^{VVV} = & + 2\varepsilon_{\lambda\nu} (k_3 - k_1)^\lambda \left[\xi_{00}^{(-1)} \right] \\ & + 2\varepsilon_{\nu\lambda} (k_2 - k_1)^\lambda \left[\xi_{00}^{(-1)} \right] \\ & + 4\varepsilon_{\nu\lambda} (k_2 - k_1)^\lambda \left\{ (k_3 - k_1)^2 \left[\xi_{11}^{(-2)} \right] + (k_3 - k_1) \cdot (k_2 - k_1) \left[\xi_{20}^{(-2)} \right] \right\} \\ & + 4\varepsilon_{\nu\lambda} (k_2 - k_1)^\lambda \left\{ (k_3 - k_1)^2 \left[\xi_{02}^{(-2)} \right] + (k_3 - k_1) \cdot (k_2 - k_1) \left[\xi_{11}^{(-2)} \right] \right\} \\ & - 4\varepsilon_{\nu\lambda} (k_2 - k_1)^\lambda \left\{ (k_3 - k_1)^2 \left[\xi_{01}^{(-2)} \right] + (k_3 - k_1) \cdot (k_2 - k_1) \left[\xi_{10}^{(-2)} \right] \right\} \\ & - 4\varepsilon_{\nu\lambda} (k_3 - k_1)^\lambda \left\{ (k_2 - k_1)^2 \left[\xi_{11}^{(-2)} \right] + (k_2 - k_1) \cdot (k_3 - k_1) \left[\xi_{02}^{(-2)} \right] \right\} \\ & - 4\varepsilon_{\nu\lambda} (k_3 - k_1)^\lambda \left\{ (k_2 - k_1)^2 \left[\xi_{20}^{(-2)} \right] + (k_2 - k_1) \cdot (k_3 - k_1) \left[\xi_{11}^{(-2)} \right] \right\} \\ & + 4\varepsilon_{\nu\lambda} (k_3 - k_1)^\lambda \left\{ (k_2 - k_1)^2 \left[\xi_{10}^{(-2)} \right] + (k_2 - k_1) \cdot (k_3 - k_1) \left[\xi_{01}^{(-2)} \right] \right\}.\end{aligned}$$

Para simplificar as expressões acima usamos novamente as identidades (16)-(27). Assim, ficamos com

$$\begin{aligned}
\varepsilon^{\lambda\alpha} T_{\alpha\lambda\nu}^{VVV} = & + \varepsilon_{\nu\lambda} (k_2 - k_1)^\lambda \left\{ - \left[\xi_0^{(-1)} \left((k_2 - k_1)^2, m^2 \right) \right] \right. \\
& - 2 (k_3 - k_1)^2 \left[\xi_{10}^{(-2)} \right] - 2 (k_3 - k_1)^2 \left[\xi_{01}^{(-2)} \right] \\
& \left. + 2 (k_3 - k_1)^2 \left[\xi_{00}^{(-2)} \right] \right\} \\
& + \varepsilon_{\nu\lambda} (k_3 - k_1)^\lambda \left\{ \left[\xi_0^{(-1)} \left((k_3 - k_1)^2, m^2 \right) \right] \right. \\
& + 2 (k_2 - k_1)^2 \left[\xi_{01}^{(-2)} \right] + 2 (k_2 - k_1)^2 \left[\xi_{10}^{(-2)} \right] \\
& \left. - 2 (k_2 - k_1)^2 \left[\xi_{00}^{(-2)} \right] \right\} .
\end{aligned}$$

Além disso, a partir das Eqs. (8) e (9), temos

$$\begin{aligned}
\varepsilon_{\nu\lambda} [T_\lambda^{VPP} - T_\lambda^{PVP}] \\
= \varepsilon_{\nu\lambda} (k_2 - k_1)^\lambda \left\{ 2 \left[\xi_0^{(-1)} \left((k_3 - k_2)^2, m^2 \right) \right] + \left[\xi_0^{(-1)} \left((k_2 - k_1)^2, m^2 \right) \right] \right. \\
+ 2 (k_3 - k_1)^2 \left[\xi_{10}^{(-2)} \right] - 2 (k_2 - k_1)^2 \left[\xi_{10}^{(-2)} \right] \\
\left. - 2 (k_3 - k_1)^2 \left[\xi_{00}^{(-2)} \right] \right\} \\
+ \varepsilon_{\nu\lambda} (k_3 - k_1)^\lambda \left\{ -2 \left[\xi_0^{(-1)} \left((k_3 - k_2)^2, m^2 \right) \right] - \left[\xi_0^{(-1)} \left((k_3 - k_1)^2, m^2 \right) \right] \right. \\
+ 2 (k_3 - k_1)^2 \left[\xi_{01}^{(-2)} \right] - 2 (k_2 - k_1)^2 \left[\xi_{01}^{(-2)} \right] \\
\left. + 2 (k_2 - k_1)^2 \left[\xi_{00}^{(-2)} \right] \right\} .
\end{aligned}$$

Somando-se os resultados acima obtemos

$$\begin{aligned}
\varepsilon^{\lambda\alpha} T_{\alpha\lambda\nu}^{VVV} = & -4m^2 \varepsilon_{\nu\lambda} (k_2 - k_1)^\lambda \left[\xi_{00}^{(-2)} \right] \\
& + 4m^2 \varepsilon_{\nu\lambda} (k_3 - k_1)^\lambda \left[\xi_{00}^{(-2)} \right] .
\end{aligned}$$

Finalmente o terceiro envolve a contração de $T_{\alpha\lambda\nu}^{VVV}$ com $(k_3 - k_1)^\alpha$. O resultado é

$$(k_3 - k_1)^\alpha T_{\alpha\lambda\nu}^{VVV} = T_{\lambda\nu}^{VV} (k_1, k_2) - T_{\lambda\nu}^{VV} (k_2, k_3) .$$

Portanto temos

$$-\varepsilon_{\mu\lambda} (k_3 - k_1)^\alpha T_{\alpha\lambda\nu}^{VVV} = \left[T_{\mu\nu}^{AV} (k_1, k_2) \right] - \left[T_{\mu\nu}^{AV} (k_2, k_3) \right] ,$$

que pode ser reescrito de modo conveniente como

$$\begin{aligned} -\varepsilon_{\mu\lambda} (k_3 - k_1)^\alpha T_{\alpha\lambda\nu}^{VVV} &= \left[T_{\nu\mu}^{AV} (k_1, k_2) \right] - \left[T_{\mu\nu}^{AV} (k_2, k_3) \right] \\ &+ \left[T_{\mu\nu}^{AV} (k_1, k_2) - T_{\nu\mu}^{AV} (k_1, k_2) \right] . \end{aligned}$$

Somando-se os três termos calculados acima obtemos

$$\begin{aligned} (k_3 - k_1)^\lambda T_{\lambda\mu\nu}^{AVV} &= \left[T_{\nu\mu}^{AV} (k_1, k_2) \right] - \left[T_{\mu\nu}^{AV} (k_2, k_3) \right] \\ &+ \left[T_{\mu\nu}^{AV} (k_1, k_2) - T_{\nu\mu}^{AV} (k_1, k_2) \right] \\ &+ 4m^2 \varepsilon_{\mu\lambda} (k_2 - k_1)^\lambda (k_3 - k_1)_\nu \left[\xi_{00}^{(-2)} \right] \\ &+ 4m^2 \varepsilon_{\mu\lambda} (k_3 - k_1)^\lambda (k_2 - k_1)_\nu \left[-2\xi_{10}^{(-2)} + \xi_{00}^{(-2)} \right] \\ &- 8m^2 \varepsilon_{\mu\lambda} (k_3 - k_1)^\lambda (k_3 - k_1)_\nu \left[\xi_{01}^{(-2)} \right] \\ &+ 4m^2 \varepsilon_{\mu\nu} \left[(k_3 - k_1)^2 - (k_2 - k_1) \cdot (k_3 - k_1) \right] \left[\xi_{00}^{(-2)} \right] , \end{aligned}$$

onde, novamente, usamos a identidade de Schouten para reorganizar os índices de Lorentz de maneira conveniente. Sabemos que o lado direito da expressão acima deveria ser identificada com a identidade (3.14). Porém isto ainda não é possível pois não podemos identificar a amplitude PVV , conforme resultado estabelecido na Eq. (12). Resta-nos ainda analisar em mais detalhes a diferença entre funções de dois pontos $T_{\mu\nu}^{AV} (k_1, k_2) - T_{\nu\mu}^{AV} (k_1, k_2)$. Explicitamente temos

$$\begin{aligned} &T_{\mu\nu}^{AV} (k_1, k_2) - T_{\nu\mu}^{AV} (k_1, k_2) \\ &= -2\varepsilon_{\mu\alpha} \left[\Delta_\nu^\alpha (\lambda^2) \right] + 2\varepsilon_{\nu\alpha} \left[\Delta_\mu^\alpha (\lambda^2) \right] \\ &- 4\varepsilon_{\mu\alpha} (k_2 - k_1)^\alpha (k_2 - k_1)_\nu \left[\xi_2^{(-1)} \left((k_2 - k_1)^2, m^2 \right) - \xi_1^{(-1)} \left((k_2 - k_1)^2, m^2 \right) \right] \\ &+ 4\varepsilon_{\nu\alpha} (k_2 - k_1)^\alpha (k_2 - k_1)_\mu \left[\xi_2^{(-1)} \left((k_2 - k_1)^2, m^2 \right) - \xi_1^{(-1)} \left((k_2 - k_1)^2, m^2 \right) \right] \\ &+ 8\varepsilon_{\mu\nu} (k_2 - k_1)^2 \left[\xi_2^{(-1)} \left((k_2 - k_1)^2, m^2 \right) - \xi_1^{(-1)} \left((k_2 - k_1)^2, m^2 \right) \right] . \end{aligned}$$

Usando-se a identidade de Schouten novamente podemos escrever

$$T_{\mu\nu}^{AV}(k_1, k_2) - T_{\nu\mu}^{AV}(k_1, k_2) = -2\varepsilon_{\mu\nu} [\Delta_\alpha^\alpha(\lambda^2)] \\ + \frac{i}{\pi} \varepsilon_{\mu\nu} (k_2 - k_1)^2 \left[\xi_2^{(-1)} \left((k_2 - k_1)^2, m^2 \right) - \xi_1^{(-1)} \left((k_2 - k_1)^2, m^2 \right) \right]$$

Através da identidade

$$(k_2 - k_1)^2 \left[\xi_2^{(-1)} \left((k_2 - k_1)^2, m^2 \right) - \xi_1^{(-1)} \left((k_2 - k_1)^2, m^2 \right) \right] = - \left[1 + m^2 \xi_0^{(-1)} \left((k_2 - k_1)^2, m^2 \right) \right]$$

podemos reescrever

$$T_{\mu\nu}^{AV}(k_1, k_2) - T_{\nu\mu}^{AV}(k_1, k_2) = -\varepsilon_{\mu\nu} \left\{ \frac{i}{\pi} + 2 [\Delta_\alpha^\alpha(\lambda^2)] \right\} \\ - \frac{i}{\pi} m^2 \varepsilon_{\mu\nu} \left[\xi_0^{(-1)} \left((k_2 - k_1)^2, m^2 \right) \right].$$

Substituindo de volta na expressão acima obtemos

$$(k_3 - k_1)^\lambda T_{\lambda\mu\nu}^{AVV} = \left[T_{\nu\mu}^{AV}(k_1, k_2) \right] - \left[T_{\mu\nu}^{AV}(k_2, k_3) \right] - \varepsilon_{\mu\nu} \left\{ \frac{i}{\pi} + 2 [\Delta_\xi^\xi(\lambda^2)] \right\} \\ + \frac{i}{\pi} m^2 \varepsilon_{\mu\lambda} \left\{ (k_2 - k_1)^\lambda (k_3 - k_1)_\nu \left[\xi_{00}^{(-2)} \right] \right. \\ \left. + (k_3 - k_1)^\lambda (k_2 - k_1)_\nu \left[-2\xi_{10}^{(-2)} + \xi_{00}^{(-2)} \right] \right. \\ \left. + (k_3 - k_1)^\lambda (k_3 - k_1)_\nu \left[-2\xi_{01}^{(-2)} \right] \right\} \\ + \frac{i}{\pi} m^2 \varepsilon_{\mu\nu} \left\{ - \left[\xi_0^{(-1)} \left((k_2 - k_1)^2, m^2 \right) \right] \right. \\ \left. + \left[(k_3 - k_1)^2 - (k_2 - k_1) \cdot (k_3 - k_1) \right] \left[\xi_{00}^{(-2)} \right] \right\},$$

de modo que

$$(k_3 - k_1)^\lambda T_{\lambda\mu\nu}^{AVV} = \left[T_{\nu\mu}^{AV}(k_1, k_2) \right] - \left[T_{\mu\nu}^{AV}(k_2, k_3) \right] + 2m \left[T_{\mu\nu}^{PVV} \right] \\ - \varepsilon_{\mu\nu} \left\{ \frac{i}{\pi} + 2 [\Delta_\xi^\xi(\lambda^2)] \right\}.$$

Neste ponto podemos perceber que estamos na mesma situação que encontramos para a amplitude AV . As relações entre funções de Green vetoriais são automaticamente preservadas enquanto que a axial depende do valor assumido por $\Delta_\alpha^\alpha(\lambda^2)$. Vimos que temos duas possíveis

situações que são compatíveis entre si. A primeira poderia ser

$$\Delta_{\mu\nu}(\lambda^2) = -\frac{i}{4\pi}g_{\mu\nu} \text{ e } \Delta_{\xi}^{\xi}(\lambda^2) = -\frac{i}{2\pi},$$

o que corresponderia a relação entre funções de Green para o vértice axial ser satisfeita. Essa possibilidade, do ponto de vista físico, seria ruim pois representaria a quebra da invariância de gauge em teorias como a *QED*. A segunda possibilidade, compatível com a invariância de gauge, seria

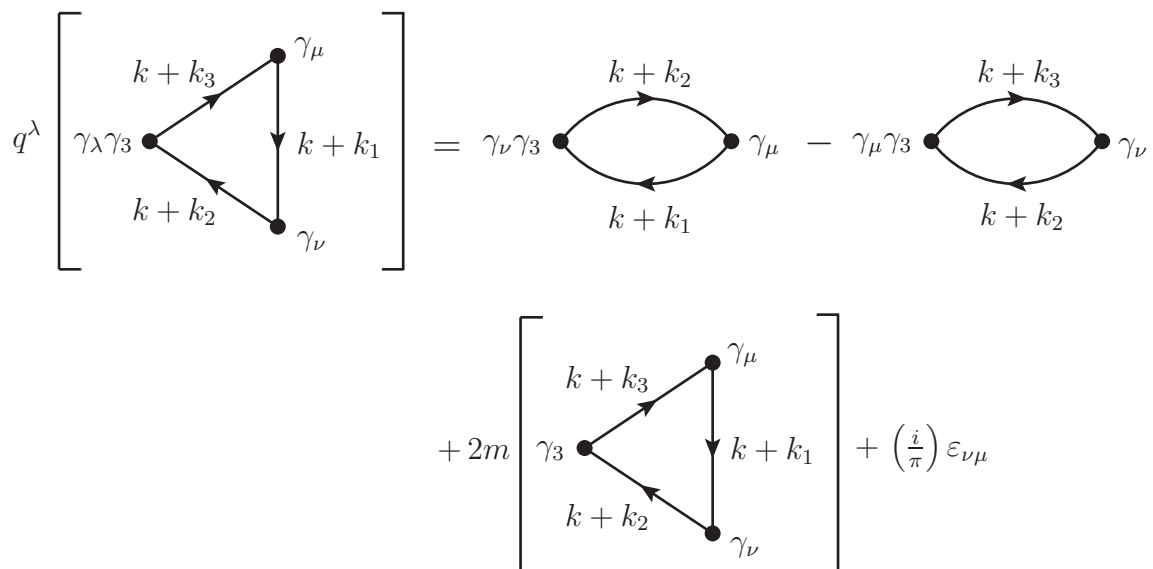
$$\Delta_{\mu\nu}(\lambda^2) = \Delta_{\xi}^{\xi}(\lambda^2) = 0.$$

Nesse caso teríamos a relação entre funções de Green para o vértice axial sendo violada:

$$(k_3 - k_1)^\lambda T_{\lambda\mu\nu}^{AVV} = \left[T_{\nu\mu}^{AV}(k_1, k_2) \right] - \left[T_{\mu\nu}^{AV}(k_2, k_3) \right] + 2m \left[T_{\mu\nu}^{PVV} \right] - \frac{i}{\pi} \varepsilon_{\mu\nu}.$$

A Fig. 9.2 mostra de forma clara a representação diagramática da relação obtida acima.

Figura 9.2 – Relação entre funções de Green para a contração com o vértice axial da função de três pontos *AVV*.



Fonte: Autor (2017)

Note que o termo violador independe dos momentos externos, o que seria esperado por análise dimensional.

9.3 Amplitude AAA

O cálculo da amplitude AAA resultou na expressão mostrada na expressão (8.4). Consideremos a contração com $(k_2 - k_1)^\mu$

$$\begin{aligned} (k_2 - k_1)^\mu T_{\lambda\mu\nu}^{AAA} &= (k_2 - k_1)^\mu [T_{\lambda\mu\nu}] \\ &\quad - \varepsilon_{\lambda\mu} (k_2 - k_1)^\mu [T_\nu^{PSA}] \\ &\quad + \varepsilon_{\lambda\nu} (k_2 - k_1)^\mu [T_\mu^{PAS}] \\ &\quad + \varepsilon_{\lambda\tau} (k_2 - k_1)_\nu [T_\tau^{VSS}] , \end{aligned}$$

onde os resultados para $T_{\lambda\mu\nu}$, T_ν^{PSA} , T_μ^{PAS} e T_τ^{VSS} são dados nas Eqs. (8.3), (8.5), (8.6) e (8.7) respectivamente. A contração com o tensor $T_{\lambda\mu\nu}$ fornece a expressão

$$\begin{aligned} &(k_2 - k_1)^\mu T_{\lambda\mu\nu} \\ &= 2\varepsilon_{\lambda\nu} (k_3 - k_2)^2 \left[\xi_1^{(-1)} \left((k_3 - k_2)^2, m^2 \right) - 2\xi_2^{(-1)} \left((k_3 - k_2)^2, m^2 \right) \right] \\ &\quad - 2\varepsilon_{\lambda\nu} (k_3 - k_1)^2 \left[\xi_1^{(-1)} \left((k_3 - k_1)^2, m^2 \right) - 2\xi_2^{(-1)} \left((k_3 - k_1)^2, m^2 \right) \right] \\ &\quad - \varepsilon_{\lambda\tau} \left\{ -4(k_2 - k_1)^\tau (k_2 - k_1)_\nu \left[\xi_2^{(-1)} \left((k_3 - k_2)^2, m^2 \right) - \xi_1^{(-1)} \left((k_3 - k_2)^2, m^2 \right) \right] \right. \\ &\quad \quad - 2(k_2 - k_1)^\tau (k_2 - k_1)_\nu \left[\xi_1^{(-1)} \left((k_3 - k_2)^2, m^2 \right) \right] \\ &\quad \quad + 2(k_2 - k_1)^\tau (k_2 - k_1)_\nu \left[(k_2 - k_1)^2 \xi_{10}^{(-2)} \right] \\ &\quad \quad - 4(k_3 - k_1)^\tau (k_3 - k_1)_\nu \left[\xi_2^{(-1)} \left((k_3 - k_2)^2, m^2 \right) - \xi_1^{(-1)} \left((k_3 - k_2)^2, m^2 \right) \right] \\ &\quad \quad + 4(k_3 - k_1)^\tau (k_3 - k_1)_\nu \left[\xi_2^{(-1)} \left((k_3 - k_1)^2, m^2 \right) - \xi_1^{(-1)} \left((k_3 - k_1)^2, m^2 \right) \right] \\ &\quad \quad + 4(k_2 - k_1)^\tau (k_3 - k_1)_\nu \left[\xi_2^{(-1)} \left((k_3 - k_2)^2, m^2 \right) - \xi_1^{(-1)} \left((k_3 - k_2)^2, m^2 \right) \right] \\ &\quad \quad + 2(k_2 - k_1)^\tau (k_3 - k_1)_\nu \left[\xi_1^{(-1)} \left((k_3 - k_2)^2, m^2 \right) \right] \\ &\quad \quad - 2(k_2 - k_1)^\tau (k_3 - k_1)_\nu \left[(k_2 - k_1)^2 \xi_{10}^{(-2)} \right] \\ &\quad \quad + 4(k_3 - k_1)^\tau (k_2 - k_1)_\nu \left[\xi_2^{(-1)} \left((k_3 - k_2)^2, m^2 \right) - \xi_1^{(-1)} \left((k_3 - k_2)^2, m^2 \right) \right] \\ &\quad \quad + 2(k_3 - k_1)^\tau (k_2 - k_1)_\nu \left[\xi_1^{(-1)} \left((k_3 - k_1)^2, m^2 \right) \right] \\ &\quad \quad + 2(k_3 - k_1)^\tau (k_2 - k_1)_\nu \left[(k_2 - k_1)^2 \xi_{10}^{(-2)} \right] \\ &\quad \quad + 2(k_3 - k_1)^\tau (k_2 - k_1)_\nu \left[(k_2 - k_1)^2 \xi_{01}^{(-2)} \right] \\ &\quad \quad \left. - 2(k_3 - k_1)^\tau (k_2 - k_1)_\nu \left[(k_2 - k_1)^2 \xi_{00}^{(-2)} \right] \right\} , \end{aligned}$$

conforme calculado na seção anterior. Por sua vez, a contração com as subamplitudes fornece as expressões

$$\begin{aligned}
& -\varepsilon_{\lambda\mu} (k_2 - k_1)^\mu T_\nu^{PSA} \\
& = -\varepsilon_{\lambda\tau} \left\{ -(k_2 - k_1)^\tau (k_2 - k_1)_\nu \left[\xi_0^{(-1)} \left((k_2 - k_1)^2, m^2 \right) \right] \right. \\
& \quad - 2(k_2 - k_1)^\tau (k_2 - k_1)_\nu (k_2 - k_1) \cdot (k_3 - k_1) \left[\xi_{10}^{(-2)} \right] \\
& \quad + (k_2 - k_1)^\tau (k_2 - k_1)_\nu (k_3 - k_1)^2 \left[\xi_{00}^{(-2)} \right] \\
& \quad - (k_2 - k_1)^\tau (k_3 - k_1)_\nu \left[\xi_0^{(-1)} \left((k_3 - k_1)^2, m^2 \right) \right] \\
& \quad - 2(k_2 - k_1)^\tau (k_3 - k_1)_\nu (k_2 - k_1) \cdot (k_3 - k_1) \left[\xi_{01}^{(-2)} \right] \\
& \quad \left. + (k_2 - k_1)^\tau (k_3 - k_1)_\nu \left[(k_2 - k_1)^2 - 4m^2 \right] \left[\xi_{00}^{(-2)} \right] \right\} ,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \varepsilon_{\lambda\nu} (k_2 - k_1)^\mu T_\mu^{PAS} \\
& = \varepsilon_{\lambda\nu} \left\{ -(k_2 - k_1) \cdot (k_3 - k_1) \left[\xi_0^{(-1)} \left((k_3 - k_1)^2, m^2 \right) + \xi_0^{(-1)} \left((k_3 - k_2)^2, m^2 \right) \right] \right. \\
& \quad + 2(k_2 - k_1) \cdot (k_3 - k_1) \left[(k_3 - k_1)^2 - (k_2 - k_1) \cdot (k_3 - k_1) \right] \left[\xi_{01}^{(-2)} \right] \\
& \quad + (k_2 - k_1) \cdot (k_3 - k_1) \left[(k_2 - k_1)^2 - 4m^2 \right] \left[\xi_{00}^{(-2)} \right] \\
& \quad + (k_2 - k_1)^2 \left[\xi_0^{(-1)} \left((k_3 - k_2)^2, m^2 \right) \right] \\
& \quad + 2(k_2 - k_1)^2 \left[(k_3 - k_1)^2 - (k_2 - k_1) \cdot (k_3 - k_1) \right] \left[\xi_{10}^{(-2)} \right] \\
& \quad \left. - (k_2 - k_1)^2 (k_3 - k_1)^2 \left[\xi_{00}^{(-2)} \right] \right\} ,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& g_{\mu\nu} (k_2 - k_1)^\mu \varepsilon_{\lambda\tau} T_\tau^{VSS} \\
& = \varepsilon_{\lambda\tau} \left\{ -(k_2 - k_1)^\tau (k_2 - k_1)_\nu \left[\xi_0^{(-1)} \left((k_2 - k_1)^2, m^2 \right) + \xi_0^{(-1)} \left((k_3 - k_2)^2, m^2 \right) \right] \right. \\
& \quad + 2(k_2 - k_1)^\tau (k_2 - k_1)_\nu \left[(k_2 - k_1)^2 - (k_2 - k_1) \cdot (k_3 - k_1) - 4m^2 \right] \left[\xi_{10}^{(-2)} \right] \\
& \quad + (k_2 - k_1)^\tau (k_2 - k_1)_\nu (k_3 - k_1)^2 \left[\xi_{00}^{(-2)} \right] \\
& \quad + (k_3 - k_1)^\tau (k_2 - k_1)_\nu \left[\xi_0^{(-1)} \left((k_3 - k_2)^2, m^2 \right) \right] \\
& \quad + 2(k_3 - k_1)^\tau (k_2 - k_1)_\nu \left[(k_2 - k_1)^2 - (k_2 - k_1) \cdot (k_3 - k_1) - 4m^2 \right] \left[\xi_{01}^{(-2)} \right] \\
& \quad \left. - (k_3 - k_1)^\tau (k_2 - k_1)_\nu \left[(k_2 - k_1)^2 - 4m^2 \right] \left[\xi_{00}^{(-2)} \right] \right\} .
\end{aligned}$$

Somando-se os resultados acima obtemos

$$\begin{aligned}
(k_2 - k_1)^\mu T_{\lambda\mu\nu}^{AAA} &= 4\varepsilon_{\lambda\tau} (k_3 - k_2)^\tau (k_3 - k_2)_\nu \left[\xi_2^{(-1)} \left((k_3 - k_2)^2, m^2 \right) - \xi_1^{(-1)} \left((k_3 - k_2)^2, m^2 \right) \right] \\
&\quad - 4\varepsilon_{\lambda\tau} (k_3 - k_1)^\tau (k_3 - k_1)_\nu \left[\xi_2^{(-1)} \left((k_3 - k_1)^2, m^2 \right) - \xi_1^{(-1)} \left((k_3 - k_1)^2, m^2 \right) \right] \\
&\quad + 4\varepsilon_{\lambda\nu} (k_3 - k_1)^2 \left[\xi_2^{(-1)} \left((k_3 - k_1)^2, m^2 \right) - \xi_1^{(-1)} \left((k_3 - k_1)^2, m^2 \right) \right] \\
&\quad + 4m^2 \varepsilon_{\lambda\tau_1} \left\{ (k_2 - k_1)_{\tau_1} (k_2 - k_1)_\nu \left[-2\xi_{10}^{(-2)} \right] \right. \\
&\quad\quad\quad + (k_2 - k_1)_{\tau_1} (k_3 - k_1)_\nu \left[\xi_{00}^{(-2)} \right] \\
&\quad\quad\quad \left. + (k_3 - k_1)_{\tau_1} (k_2 - k_1)_\nu \left[-2\xi_{01}^{(-2)} + \xi_{00}^{(-2)} \right] \right\} \\
&\quad + 4m^2 \varepsilon_{\lambda\nu} \left\{ \left[\xi_0^{(-1)} \left((k_3 - k_2)^2, m^2 \right) \right] - (k_2 - k_1) \cdot (k_3 - k_1) \xi_{00}^{(-2)} \right\} \\
&\quad + \frac{i}{\pi} \varepsilon_{\lambda\nu} .
\end{aligned}$$

Usando a identidade

$$\varepsilon_{\nu\xi} \left[\Delta_\lambda^\xi (\lambda^2) \right] + \varepsilon_{\xi\lambda} \left[\Delta_\nu^\xi (\lambda^2) \right] + \varepsilon_{\lambda\nu} \left[\Delta_\xi^\xi (\lambda^2) \right] = 0 ,$$

obtemos

$$\begin{aligned}
(k_2 - k_1)^\mu T_{\lambda\mu\nu}^{AAA} &= 2\varepsilon_{\nu\xi} \left[\Delta_\lambda^\xi (\lambda^2) \right] - 2\varepsilon_{\lambda\xi} \left[\Delta_\nu^\xi (\lambda^2) \right] \\
&\quad + 4\varepsilon_{\lambda\xi} (k_3 - k_2)^\xi (k_3 - k_2)_\nu \left[\xi_2^{(-1)} \left((k_3 - k_2)^2, m^2 \right) - \xi_1^{(-1)} \left((k_3 - k_2)^2, m^2 \right) \right] \\
&\quad - 4\varepsilon_{\lambda\xi} (k_3 - k_1)^\xi (k_3 - k_1)_\nu \left[\xi_2^{(-1)} \left((k_3 - k_1)^2, m^2 \right) - \xi_1^{(-1)} \left((k_3 - k_1)^2, m^2 \right) \right] \\
&\quad + 4\varepsilon_{\lambda\nu} (k_3 - k_1)^2 \left[\xi_2^{(-1)} \left((k_3 - k_1)^2, m^2 \right) - \xi_1^{(-1)} \left((k_3 - k_1)^2, m^2 \right) \right] \\
&\quad + 4m^2 \varepsilon_{\lambda\xi} \left\{ (k_2 - k_1)^\xi (k_2 - k_1)_\nu \left[-2\xi_{10}^{(-2)} \right] \right. \\
&\quad\quad\quad + (k_2 - k_1)^\xi (k_3 - k_1)_\nu \left[\xi_{00}^{(-2)} \right] \\
&\quad\quad\quad \left. + (k_3 - k_1)^\xi (k_2 - k_1)_\nu \left[-2\xi_{01}^{(-2)} + \xi_{00}^{(-2)} \right] \right\} \\
&\quad + 4m^2 \varepsilon_{\lambda\nu} \left\{ \left[\xi_0^{(-1)} \left((k_3 - k_2)^2, m^2 \right) \right] - (k_2 - k_1) \cdot (k_3 - k_1) \xi_{00}^{(-2)} \right\} \\
&\quad + 2\varepsilon_{\lambda\nu} \left[\frac{i}{2\pi} + \Delta_\xi^\xi (\lambda^2) \right] .
\end{aligned}$$

Comparando a expressão acima com os resultados mostrados nas Eqs. (5.17) e (13) podemos escrever

$$(k_2 - k_1)^\mu T_{\lambda\mu\nu}^{AAA} = - \left[T_{\lambda\nu}^{VA}(k_2, k_3) \right] + \left[T_{\lambda\nu}^{AV}(k_1, k_3) \right] - 2m \left[T_{\lambda\nu}^{APA} \right] + 2\varepsilon_{\lambda\nu} \left[\frac{i}{2\pi} + \Delta_{\xi}^{\xi}(\lambda^2) \right].$$

Tomando

$$\Delta_{\mu\nu}(\lambda^2) = \Delta_{\xi}^{\xi}(\lambda^2) = 0,$$

em analogia com a anomalia AV obtemos

$$(k_2 - k_1)^\mu T_{\lambda\mu\nu}^{AAA} = - \left[T_{\lambda\nu}^{VA}(k_2, k_3) \right] + \left[T_{\lambda\nu}^{AV}(k_1, k_3) \right] - 2m \left[T_{\lambda\nu}^{APA} \right] + \frac{i}{\pi} \varepsilon_{\lambda\nu}.$$

Sendo assim, a relação entre funções de Green esperada para este vértice é violada pelo fator $\frac{i}{\pi} \varepsilon_{\lambda\nu}$.

Para os dois vértices restantes o procedimento é análogo. Os resultados correspondentes são

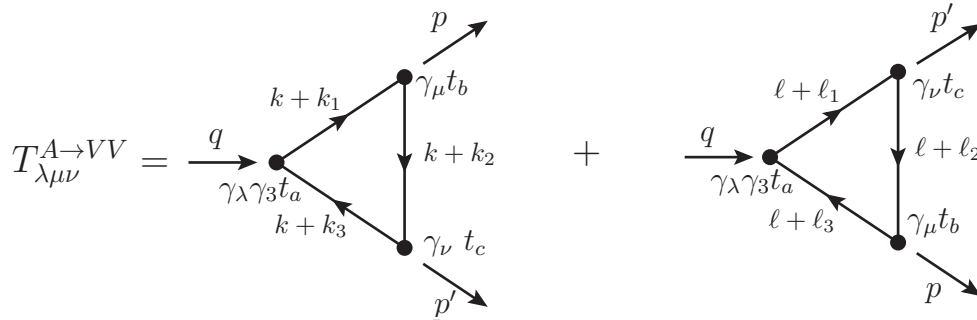
$$\begin{aligned} (k_3 - k_1)^\lambda \left[T_{\lambda\mu\nu}^{AAA} \right] &= \left[T_{\nu\mu}^{VA}(k_1, k_2) \right] - \left[T_{\mu\nu}^{VA}(k_2, k_3) \right] \\ &\quad + 2m \left[T_{\mu\nu}^{PAA} \right] + \frac{i}{\pi} \varepsilon_{\mu\nu}, \\ (k_3 - k_2)^\nu \left[T_{\lambda\mu\nu}^{AAA} \right] &= - \left[T_{\lambda\mu}^{AV}(k_1, k_3) \right] + \left[T_{\lambda\mu}^{VA}(k_1, k_2) \right] \\ &\quad - 2m \left[T_{\lambda\mu}^{AAP} \right] - \frac{i}{\pi} \varepsilon_{\lambda\mu}. \end{aligned}$$

Vemos então que as três relações entre funções de Green da amplitude AAA são violadas simultaneamente por um fator comum que não depende dos momentos externos. Enfatizamos mais uma vez que estas conclusões estão em correspondência direta com àquelas que obtemos para a anomalia AV .

10 IDENTIDADES DE WARD E ANOMALIAS EM AMPLITUDES FINITAS

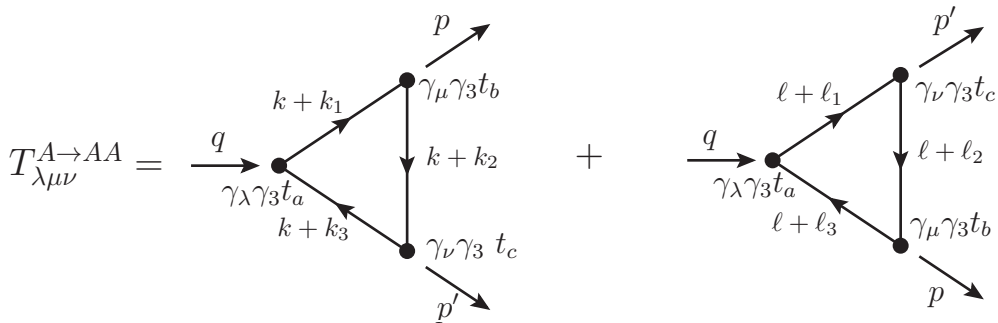
A partir da análise das relações entre funções de Green feita na seção anterior podemos ver sem muita dificuldade o que acontece com as identidades de Ward para as amplitudes AVV e AAA . Primeiramente, para sermos mais genéricos, consideraremos o caso de simetrias não abelianas. Para isso inserimos em cada vértice do diagrama um gerador (t_a) de uma dada representação \mathcal{R} na qual o férmion se transforma. No caso das amplitudes de três pontos o processo físico completo envolve a soma do canal direto e do canal cruzado, conforme mostrado esquematicamente nas Figs. 10.1 e 10.2 para o caso das amplitudes AVV e AAA .

Figura 10.1 – Soma do canal direto e cruzado da amplitude AVV . O primeiro diagrama representa o canal direto e o segundo o canal cruzado.



Fonte: Autor (2017)

Figura 10.2 – Soma do canal direto e cruzado da amplitude AAA . O primeiro diagrama representa o canal direto e o segundo o canal cruzado.



Fonte: Autor (2017)

As notações $A \rightarrow VV$ e $A \rightarrow AA$ simbolizam as amplitudes AVV e AAA depois da soma do canal direto com o cruzado, como mostrado nas expressões abaixo,

$$\begin{aligned} T_{\lambda\mu\nu}^{A_a \rightarrow V_b V_c} &= \int \frac{d^2k}{(2\pi)^2} tr \left\{ \gamma_\lambda \gamma_3 t_a \frac{1}{\not{k} + \not{k}_1 - m} \gamma_\mu t_b \frac{1}{\not{k} + \not{k}_2 - m} \gamma_\nu t_c \frac{1}{\not{k} + \not{k}_3 - m} \right\} \\ &+ \int \frac{d^2\ell}{(2\pi)^2} tr \left\{ \gamma_\lambda \gamma_3 t_a \frac{1}{\not{\ell} + \not{\ell}_1 - m} \gamma_\nu t_c \frac{1}{\not{\ell} + \not{\ell}_2 - m} \gamma_\mu t_b \frac{1}{\not{\ell} + \not{\ell}_3 - m} \right\}, \\ &= tr_{\mathcal{R}} \{t_a [t_b, t_c]\} \left[T_{\lambda\mu\nu}^{AVV}(k_1, k_2, k_3) + T_{\lambda\nu\mu}^{AVV}(\ell_1, \ell_2, \ell_3) \right], \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} T_{\lambda\mu\nu}^{A_a \rightarrow A_b A_c} &= \int \frac{d^2k}{(2\pi)^2} tr \left\{ \gamma_\lambda \gamma_3 t_a \frac{1}{\not{k} + \not{k}_1 - m} \gamma_\mu \gamma_3 t_b \frac{1}{\not{k} + \not{k}_2 - m} \gamma_\nu \gamma_3 t_c \frac{1}{\not{k} + \not{k}_3 - m} \right\} \\ &+ \int \frac{d^2\ell}{(2\pi)^2} tr \left\{ \gamma_\lambda \gamma_3 t_a \frac{1}{\not{\ell} + \not{\ell}_1 - m} \gamma_\nu \gamma_3 t_c \frac{1}{\not{\ell} + \not{\ell}_2 - m} \gamma_\mu \gamma_3 t_b \frac{1}{\not{\ell} + \not{\ell}_3 - m} \right\}, \\ &= tr_{\mathcal{R}} \{t_a [t_b, t_c]\} \left[T_{\lambda\mu\nu}^{AAA}(k_1, k_2, k_3) + T_{\lambda\nu\mu}^{AAA}(\ell_1, \ell_2, \ell_3) \right], \end{aligned}$$

onde $tr_{\mathcal{R}}$ simboliza o traço sobre as matrizes da representação \mathcal{R} . Como se observa nas figuras acima, o canal cruzado é facilmente obtido do canal direto trocando-se o papel dos momentos externos ($p \leftrightarrow p'$), dos índices de Lorentz ($\nu \leftrightarrow \mu$) bem como dos índices do grupo de simetria ($b \leftrightarrow c$). No canal cruzado rotulamos os momentos (arbitrários) internos ao loop por ℓ_1 , ℓ_2 , e ℓ_3 sendo que os momentos físicos são definidos por $\ell_1 - \ell_2 = p'$, $\ell_2 - \ell_3 = p$, e $\ell_1 - \ell_3 = q$.

Em termos dos momentos externos, as expressões explícitas para o canal direto e o cruzado da amplitude AVV são dadas por:

1) Canal Direto:

$$\begin{aligned}
T_{\lambda\mu\nu}^{AVV}(q; p, p') = & \varepsilon_{\lambda\alpha} \left\{ -4 \left(\delta_{\mu}^{\alpha} p_{\nu} + \delta_{\nu}^{\alpha} p_{\mu} + g_{\mu\nu} p^{\alpha} \right) \left[\xi_{10}^{(-1)}(p, q) \right] \right. \\
& - 4 \left(\delta_{\mu}^{\alpha} q_{\nu} + \delta_{\nu}^{\alpha} q_{\mu} + g_{\mu\nu} q^{\alpha} \right) \left[\xi_{01}^{(-1)}(p, q) \right] \\
& + 2 \left(\delta_{\mu}^{\alpha} q_{\nu} + g_{\mu\nu} q^{\alpha} \right) \left[\xi_{00}^{(-1)}(p, q) \right] \\
& + 2 \left(\delta_{\mu}^{\alpha} p_{\nu} + \delta_{\nu}^{\alpha} p_{\mu} \right) \left[\xi_{00}^{(-1)}(p, q) \right] \\
& + 8 p^{\alpha} p_{\mu} p_{\nu} \left[-\xi_{30}^{(-2)}(p, q) + \xi_{20}^{(-2)}(p, q) \right] \\
& + 8 q^{\alpha} q_{\mu} q_{\nu} \left[-\xi_{03}^{(-2)}(p, q) + \xi_{02}^{(-2)}(p, q) \right] \\
& + 4 p^{\alpha} p_{\mu} q_{\nu} \left[-2\xi_{21}^{(-2)}(p, q) + \xi_{20}^{(-2)}(p, q) + \xi_{11}^{(-2)}(p, q) - \xi_{10}^{(-2)}(p, q) \right] \\
& + 4 q^{\alpha} q_{\mu} p_{\nu} \left[-2\xi_{12}^{(-2)}(p, q) + \xi_{02}^{(-2)}(p, q) + \xi_{11}^{(-2)}(p, q) - \xi_{01}^{(-2)}(p, q) \right] \\
& + 4 q^{\alpha} p_{\mu} p_{\nu} \left[-2\xi_{21}^{(-2)}(p, q) + 2\xi_{11}^{(-2)}(p, q) + \xi_{20}^{(-2)}(p, q) - \xi_{10}^{(-2)}(p, q) \right] \\
& + 4 q^{\alpha} p_{\mu} q_{\nu} \left[-2\xi_{12}^{(-2)}(p, q) + 2\xi_{11}^{(-2)}(p, q) + \xi_{02}^{(-2)}(p, q) - \xi_{01}^{(-2)}(p, q) \right] \\
& + 4 p^{\alpha} q_{\mu} p_{\nu} \left[-2\xi_{21}^{(-2)}(p, q) + \xi_{11}^{(-2)}(p, q) \right] \\
& \left. + 4 p^{\alpha} q_{\mu} q_{\nu} \left[-2\xi_{12}^{(-2)}(p, q) + \xi_{11}^{(-2)}(p, q) \right] \right\} \\
& + \varepsilon_{\lambda\mu} p_{\nu} \left\{ - \left[\xi_0^{(-1)}(p^2, m^2) \right] - 2(p \cdot q) \left[\xi_{10}^{(-2)}(p, q) \right] + q^2 \left[\xi_{00}^{(-2)}(p, q) \right] \right\} \\
& + \varepsilon_{\lambda\mu} q_{\nu} \left\{ - \left[\xi_0^{(-1)}(q, m^2) \right] - 2(p \cdot q) \left[\xi_{01}^{(-2)}(p, q) \right] + p^2 \left[\xi_{00}^{(-2)}(p, q) \right] \right\} \\
& + \varepsilon_{\lambda\nu} p_{\mu} \left\{ -2 \left[\xi_1^{(-1)}(p'^2, m^2) \right] - 2q^2 \left[\xi_{10}^{(-2)}(p, q) \right] \right. \\
& \quad \left. + 2(p \cdot q) \left[\xi_{10}^{(-2)}(p, q) \right] + q^2 \left[\xi_{00}^{(-2)}(p, q) \right] \right\} \\
& + \varepsilon_{\lambda\nu} q_{\mu} \left\{ 2 \left[\xi_1^{(-1)}(p'^2, m^2) + \xi_1^{(-1)}(q^2, m^2) \right] \right. \\
& \quad \left. - 2q^2 \left[\xi_{01}^{(-2)}(p, q) \right] + 2(p \cdot q) \left[\xi_{01}^{(-2)}(p, q) \right] - p^2 \left[\xi_{00}^{(-2)}(p, q) \right] \right\} \\
& + g_{\mu\nu} \varepsilon_{\lambda\alpha} p^{\alpha} \left\{ 2 \left[\xi_1^{(-1)}(p'^2, m^2) + \xi_1^{(-1)}(p^2, m^2) \right] \right. \\
& \quad \left. - 2p^2 \left[\xi_{10}^{(-2)}(p, q) \right] + 2(p \cdot q) \left[\xi_{10}^{(-2)}(p, q) \right] - q^2 \left[\xi_{00}^{(-2)}(p, q) \right] \right\} \\
& + g_{\mu\nu} \varepsilon_{\lambda\alpha} q^{\alpha} \left\{ -2 \left[\xi_1^{(-1)}(p'^2, m^2) \right] + 2(p \cdot q) \left[\xi_{01}^{(-2)}(p, q) \right] \right. \\
& \quad \left. - p^2 \left[2\xi_{01}^{(-2)}(p, q) - \xi_{00}^{(-2)}(p, q) \right] \right\} .
\end{aligned}$$

2) Canal Cruzado:

$$\begin{aligned}
T_{\lambda\nu\mu}^{AVV}(q; p', p) = & \varepsilon_{\lambda\alpha} \left\{ -4 \left(\delta_{\nu}^{\alpha} p'_{\mu} + \delta_{\mu}^{\alpha} p'_{\nu} + g_{\nu\mu} p'^{\alpha} \right) \left[\xi_{10}^{(-1)}(p', q) \right] \right. \\
& - 4 \left(\delta_{\nu}^{\alpha} q_{\mu} + \delta_{\mu}^{\alpha} q_{\nu} + g_{\nu\mu} q^{\alpha} \right) \left[\xi_{01}^{(-1)}(p', q) \right] \\
& + 2 \left(\delta_{\nu}^{\alpha} q_{\mu} + g_{\nu\mu} q^{\alpha} \right) \left[\xi_{00}^{(-1)}(p', q) \right] \\
& + 2 \left(\delta_{\nu}^{\alpha} p'_{\mu} + \delta_{\mu}^{\alpha} p'_{\nu} \right) \left[\xi_{00}^{(-1)}(p', q) \right] \\
& + 8 p'^{\alpha} p'_{\nu} p'_{\mu} \left[-\xi_{30}^{(-2)}(p', q) + \xi_{20}^{(-2)}(p', q) \right] \\
& + 8 q^{\alpha} q_{\nu} q_{\mu} \left[-\xi_{03}^{(-2)}(p', q) + \xi_{02}^{(-2)}(p', q) \right] \\
& + 4 p'^{\alpha} p'_{\nu} q_{\mu} \left[-2\xi_{21}^{(-2)}(p', q) + \xi_{20}^{(-2)}(p', q) + \xi_{11}^{(-2)}(p', q) - \xi_{10}^{(-2)}(p', q) \right] \\
& + 4 q^{\alpha} q_{\nu} p'_{\mu} \left[-2\xi_{12}^{(-2)}(p', q) + \xi_{02}^{(-2)}(p', q) + \xi_{11}^{(-2)}(p', q) - \xi_{01}^{(-2)}(p', q) \right] \\
& + 4 q^{\alpha} p'_{\nu} p'_{\mu} \left[-2\xi_{21}^{(-2)}(p', q) + 2\xi_{11}^{(-2)}(p', q) + \xi_{20}^{(-2)}(p', q) - \xi_{10}^{(-2)}(p', q) \right] \\
& + 4 q^{\alpha} p'_{\nu} q_{\mu} \left[-2\xi_{12}^{(-2)}(p', q) + 2\xi_{11}^{(-2)}(p', q) + \xi_{02}^{(-2)}(p', q) - \xi_{01}^{(-2)}(p', q) \right] \\
& + 4 p'^{\alpha} q_{\nu} p'_{\mu} \left[-2\xi_{21}^{(-2)}(p', q) + \xi_{11}^{(-2)}(p', q) \right] \\
& \left. + 4 p'^{\alpha} q_{\nu} q_{\mu} \left[-2\xi_{12}^{(-2)}(p', q) + \xi_{11}^{(-2)}(p', q) \right] \right\} \\
& + \varepsilon_{\lambda\nu} p'_{\mu} \left\{ - \left[\xi_0^{(-1)}(p'^2, m^2) \right] - 2(p' \cdot q) \left[\xi_{10}^{(-2)}(p', q) \right] + q^2 \left[\xi_{00}^{(-2)}(p', q) \right] \right\} \\
& + \varepsilon_{\lambda\nu} q_{\mu} \left\{ - \left[\xi_0^{(-1)}(q^2, m^2) \right] - 2(p' \cdot q) \left[\xi_{01}^{(-2)}(p', q) \right] + p'^2 \left[\xi_{00}^{(-2)}(p', q) \right] \right\} \\
& + \varepsilon_{\lambda\mu} p'_{\nu} \left\{ -2 \left[\xi_1^{(-1)}(p^2, m^2) \right] - 2q^2 \left[\xi_{10}^{(-2)}(p', q) \right] \right. \\
& \quad \left. + 2(p' \cdot q) \left[\xi_{10}^{(-2)}(p', q) \right] + q^2 \left[\xi_{00}^{(-2)}(p', q) \right] \right\} \\
& + \varepsilon_{\lambda\mu} q_{\nu} \left\{ 2 \left[\xi_1^{(-1)}(p^2, m^2) + \xi_1^{(-1)}(q^2, m^2) \right] \right. \\
& \quad \left. - 2q^2 \left[\xi_{01}^{(-2)}(p', q) \right] + 2(p' \cdot q) \left[\xi_{01}^{(-2)}(p', q) \right] - p'^2 \left[\xi_{00}^{(-2)}(p', q) \right] \right\} \\
& + g_{\nu\mu} \varepsilon_{\lambda\alpha} p'^{\alpha} \left\{ 2 \left[\xi_1^{(-1)}(p^2, m^2) + \xi_1^{(-1)}(p'^2, m^2) \right] \right. \\
& \quad \left. - 2p'^2 \left[\xi_{10}^{(-2)}(p', q) \right] + 2(p' \cdot q) \left[\xi_{10}^{(-2)}(p', q) \right] - q^2 \left[\xi_{00}^{(-2)}(p', q) \right] \right\} \\
& + g_{\nu\mu} \varepsilon_{\lambda\alpha} q^{\alpha} \left\{ -2 \left[\xi_1^{(-1)}(p^2, m^2) \right] + 2(p' \cdot q) \left[\xi_{01}^{(-2)}(p', q) \right] \right. \\
& \quad \left. - p'^2 \left[2\xi_{01}^{(-2)}(p', q) - \xi_{00}^{(-2)}(p', q) \right] \right\} .
\end{aligned}$$

Seguindo o mesmo raciocínio dos cálculos feitos nos capítulos anteriores, a partir das expressões acima, as contrações com os momentos externos resultam nas seguintes identidades de Ward

$$p^\mu \left[T_{\lambda\mu\nu}^{A_a \rightarrow V_b V_c} \right] = 0, \quad (10.1)$$

$$p'^\nu \left[T_{\lambda\mu\nu}^{A_a \rightarrow V_b V_c} \right] = 0, \quad (10.2)$$

$$q^\lambda \left[T_{\lambda\mu\nu}^{A_a \rightarrow V_b V_c} \right] = 2m \left[T_{\mu\nu}^{P_a \rightarrow V_b V_c} \right] + \frac{i}{\pi} \varepsilon_{\mu\nu} \text{tr} \mathcal{R} \{ t_a [t_b, t_c] \}. \quad (10.3)$$

Podemos ver que as identidades de Ward vetoriais são automaticamente preservadas enquanto que a identidade de Ward axial depende das simetrias da teoria à qual a amplitude $T_{\lambda\mu\nu}^{A_a \rightarrow V_b V_c}$ pertence. Em teorias não-abelianas onde o traço sobre a combinação de geradores $t_a [t_b, t_c]$ não se anula teremos, portanto, uma violação da identidade de Ward axial.

No caso da amplitude AAA temos:

1) Canal Direto:

$$\begin{aligned} T_{\lambda\mu\nu}^{AAA}(q; p, p') &= -\varepsilon_{\lambda\mu} p_\nu \left\{ 2 \left[\xi_1^{(-1)}(p^2, m^2) \right] + 2(p \cdot q) \left[\xi_{10}^{(-2)}(p, q) \right] \right. \\ &\quad \left. - q^2 \left[\xi_{00}^{(-2)}(p, q) \right] \right\} \\ &\quad - \varepsilon_{\lambda\mu} q_\nu \left\{ 2 \left[\xi_1^{(-1)}(q^2, m^2) \right] + 2(p \cdot q) \left[\xi_{01}^{(-2)}(p, q) \right] \right. \\ &\quad \left. - (p^2 - 4m^2) \left[\xi_{00}^{(-2)}(p, q) \right] \right\} \\ &+ \varepsilon_{\lambda\nu} q_\mu \left\{ -2 \left[\xi_1^{(-1)}(q^2, m^2) + \xi_1^{(-1)}(p'^2, m^2) \right] \right. \\ &\quad \left. + 2[q^2 - (p \cdot q)] \left[\xi_{01}^{(-2)}(p, q) \right] + (p^2 - 4m^2) \left[\xi_{00}^{(-2)}(p, q) \right] \right\} \\ &+ \varepsilon_{\lambda\nu} p_\mu \left\{ 2 \left[\xi_1^{(-1)}(p'^2, m^2) \right] + 2[q^2 - (p \cdot q)] \left[\xi_{10}^{(-2)}(p, q) \right] - q^2 \left[\xi_{00}^{(-2)}(p, q) \right] \right\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -\varepsilon_{\lambda\tau} \left\{ 4 \left[\delta_{\mu}^{\tau} p_{\nu} + \delta_{\nu}^{\tau} p_{\mu} + g_{\mu\nu} p^{\tau} \right] \left[\xi_{10}^{(-1)}(p, q) \right] \right. \\
& \quad + 4 \left[\delta_{\mu}^{\tau} q_{\nu} + \delta_{\nu}^{\tau} q_{\mu} + g_{\mu\nu} q^{\tau} \right] \left[\xi_{01}^{(-1)}(p, q) \right] \\
& \quad - 2 \left[\delta_{\mu}^{\tau} q_{\nu} + g_{\mu\nu} q^{\tau} \right] \left[\xi_{00}^{(-1)}(p, q) \right] - 2 \left[\delta_{\mu}^{\tau} p_{\nu} + \delta_{\nu}^{\tau} p_{\mu} \right] \left[\xi_{00}^{(-1)}(p, q) \right] \\
& \quad - 2g_{\mu\nu} p^{\tau} \left[\xi_1^{(-1)}(p^2, m^2) + \xi_1^{(-1)}(p'^2, m^2) \right] \\
& \quad + 2g_{\mu\nu} p^{\tau} \left[p^2 - (p \cdot q) - 4m^2 \right] \left[\xi_{10}^{(-2)}(p, q) \right] \\
& \quad + g_{\mu\nu} p^{\tau} q^2 \left[\xi_{00}^{(-2)}(p, q) \right] + 2g_{\mu\nu} q^{\tau} \left[\xi_1^{(-1)}(p'^2, m^2) \right] \\
& \quad + 2g_{\mu\nu} q^{\tau} \left[p^2 - (p \cdot q) - 4m^2 \right] \left[\xi_{01}^{(-2)}(p, q) \right] \\
& \quad - g_{\mu\nu} q^{\tau} (p^2 - 4m^2) \left[\xi_{00}^{(-2)}(p, q) \right] \\
& \quad - 8p^{\tau} p_{\mu} p_{\nu} \left[-\xi_{30}^{(-2)}(p, q) + \xi_{20}^{(-2)}(p, q) \right] \\
& \quad - 8q^{\tau} q_{\mu} q_{\nu} \left[-\xi_{03}^{(-2)}(p, q) + \xi_{02}^{(-2)}(p, q) \right] \\
& \quad - 4p^{\tau} p_{\mu} q_{\nu} \left[-2\xi_{21}^{(-2)}(p, q) + \xi_{20}^{(-2)}(p, q) + \xi_{11}^{(-2)}(p, q) - \xi_{10}^{(-2)}(p, q) \right] \\
& \quad - 4q^{\tau} q_{\mu} p_{\nu} \left[-2\xi_{12}^{(-2)}(p, q) + \xi_{02}^{(-2)}(p, q) + \xi_{11}^{(-2)}(p, q) - \xi_{01}^{(-2)}(p, q) \right] \\
& \quad - 4q^{\tau} p_{\mu} p_{\nu} \left[-2\xi_{21}^{(-2)}(p, q) + 2\xi_{11}^{(-2)}(p, q) + \xi_{20}^{(-2)}(p, q) - \xi_{10}^{(-2)}(p, q) \right] \\
& \quad - 4q^{\tau} p_{\mu} q_{\nu} \left[-2\xi_{12}^{(-2)}(p, q) + 2\xi_{11}^{(-2)}(p, q) + \xi_{02}^{(-2)}(p, q) - \xi_{01}^{(-2)}(p, q) \right] \\
& \quad - 4p^{\tau} q_{\mu} p_{\nu} \left[-2\xi_{21}^{(-2)}(p, q) + \xi_{11}^{(-2)}(p, q) \right] \\
& \quad \left. - 4p^{\tau} q_{\mu} q_{\nu} \left[-2\xi_{12}^{(-2)}(p, q) + \xi_{11}^{(-2)}(p, q) \right] \right\} .
\end{aligned}$$

2) Canal Cruzado:

$$\begin{aligned}
T_{\lambda\nu\mu}^{AAA}(q; p', p) &= -\varepsilon_{\lambda\nu} p'_{\mu} \left\{ 2 \left[\xi_1^{(-1)}(p'^2, m^2) \right] + 2(p' \cdot q) \left[\xi_{10}^{(-2)}(p', q) \right] - q^2 \left[\xi_{00}^{(-2)}(p', q) \right] \right\} \\
& \quad - \varepsilon_{\lambda\nu} q_{\mu} \left\{ 2 \left[\xi_1^{(-1)}(q^2, m^2) \right] + 2(p' \cdot q) \left[\xi_{01}^{(-2)}(p, q) \right] \right\} \\
& \quad - (p'^2 - 4m^2) \left[\xi_{00}^{(-2)}(p', q) \right] \left\}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \varepsilon_{\lambda\mu} q_{\nu} \left\{ -2 \left[\xi_1^{(-1)}(q^2, m^2) + \xi_1^{(-1)}(p^2, m^2) \right] \right\} \\
& \quad + 2 \left[q^2 - (p' \cdot q) \right] \left[\xi_{01}^{(-2)}(p', q) \right] + (p'^2 - 4m^2) \left[\xi_{00}^{(-2)}(p', q) \right] \left\} \\
& + \varepsilon_{\lambda\mu} p'_{\nu} \left\{ 2 \left[\xi_1^{(-1)}(p^2, m^2) \right] + 2 \left[q^2 - (p' \cdot q) \right] \left[\xi_{10}^{(-2)}(p', q) \right] - q^2 \left[\xi_{00}^{(-2)}(p', q) \right] \right\}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -\varepsilon_{\lambda\tau} \left\{ 4 \left[\delta_{\nu}^{\tau} p'_{\mu} + \delta_{\mu}^{\tau} p'_{\nu} + g_{\nu\mu} p'^{\tau} \right] \left[\xi_{10}^{(-1)}(p', q) \right] \right. \\
& \quad + 4 \left[\delta_{\nu}^{\tau} q_{\mu} + \delta_{\mu}^{\tau} q_{\nu} + g_{\nu\mu} q^{\tau} \right] \left[\xi_{01}^{(-1)}(p', q) \right] \\
& \quad - 2 \left[\delta_{\nu}^{\tau} q_{\mu} + g_{\nu\mu} q^{\tau} \right] \left[\xi_{00}^{(-1)}(p', q) \right] - 2 \left[\delta_{\nu}^{\tau} p'_{\mu} + \delta_{\mu}^{\tau} p'_{\nu} \right] \left[\xi_{00}^{(-1)}(p', q) \right] \\
& \quad - 2g_{\nu\mu} p'^{\tau} \left[\xi_1^{(-1)}(p'^2, m^2) + \xi_1^{(-1)}(p^2, m^2) \right] \\
& \quad + 2g_{\nu\mu} p'^{\tau} \left[p'^2 - (p' \cdot q) - 4m^2 \right] \left[\xi_{10}^{(-2)}(p', q) \right] \\
& \quad + g_{\nu\mu} p'^{\tau} q^2 \left[\xi_{00}^{(-2)}(p', q) \right] + 2g_{\nu\mu} q^{\tau} \left[\xi_1^{(-1)}(p^2, m^2) \right] \\
& \quad + 2g_{\nu\mu} q^{\tau} \left[p'^2 - (p' \cdot q) - 4m^2 \right] \left[\xi_{01}^{(-2)}(p', q) \right] \\
& \quad - g_{\nu\mu} q^{\tau} (p'^2 - 4m^2) \left[\xi_{00}^{(-2)}(p', q) \right] \\
& \quad - 8p^{\tau} p'_{\nu} p'_{\mu} \left[-\xi_{30}^{(-2)}(p', q) + \xi_{20}^{(-2)}(p', q) \right] \\
& \quad - 8q^{\tau} q_{\nu} q_{\mu} \left[-\xi_{03}^{(-2)}(p', q) + \xi_{02}^{(-2)}(p', q) \right] \\
& \quad - 4p'^{\tau} p'_{\nu} q_{\mu} \left[-2\xi_{21}^{(-2)}(p', q) + \xi_{20}^{(-2)}(p', q) + \xi_{11}^{(-2)}(p', q) - \xi_{10}^{(-2)}(p', q) \right] \\
& \quad - 4q^{\tau} q_{\nu} p'_{\mu} \left[-2\xi_{12}^{(-2)}(p', q) + \xi_{02}^{(-2)}(p', q) + \xi_{11}^{(-2)}(p', q) - \xi_{01}^{(-2)}(p', q) \right] \\
& \quad - 4q^{\tau} p_{\nu} p'_{\mu} \left[-2\xi_{21}^{(-2)}(p', q) + 2\xi_{11}^{(-2)}(p', q) + \xi_{20}^{(-2)}(p', q) - \xi_{10}^{(-2)}(p', q) \right] \\
& \quad - 4q^{\tau} p'_{\nu} q_{\mu} \left[-2\xi_{12}^{(-2)}(p', q) + 2\xi_{11}^{(-2)}(p', q) + \xi_{02}^{(-2)}(p', q) - \xi_{01}^{(-2)}(p', q) \right] \\
& \quad - 4p'^{\tau} q_{\nu} p'_{\mu} \left[-2\xi_{21}^{(-2)}(p', q) + \xi_{11}^{(-2)}(p', q) \right] \\
& \quad \left. - 4p'^{\tau} q_{\nu} q_{\mu} \left[-2\xi_{12}^{(-2)}(p', q) + \xi_{11}^{(-2)}(p', q) \right] \right\} .
\end{aligned}$$

A partir das expressões acima obtemos

$$p^{\mu} \left[T_{\lambda\mu\nu}^{A_a \rightarrow A_b A_c} \right] = 2m \left[T_{\lambda\nu}^{A_a \rightarrow P_b A_c} \right] + \frac{i}{\pi} \varepsilon_{\lambda\nu\tau} tr_{\mathcal{R}} \{ t_a [t_b, t_c] \} , \quad (10.4)$$

$$q^{\lambda} \left[T_{\lambda\mu\nu}^{A_a \rightarrow A_b A_c} \right] = 2m \left[T_{\mu\nu}^{P_a \rightarrow A_b A_c} \right] + \frac{i}{\pi} \varepsilon_{\mu\nu\tau} tr_{\mathcal{R}} \{ t_a [t_b, t_c] \} , \quad (10.5)$$

$$p'^{\nu} \left[T_{\lambda\mu\nu}^{A_a \rightarrow A_b A_c} \right] = -2m \left[T_{\lambda\mu}^{A_a \rightarrow A_b P_c} \right] + \frac{i}{\pi} \varepsilon_{\mu\lambda\tau} tr_{\mathcal{R}} \{ t_a [t_b, t_c] \} . \quad (10.6)$$

Podemos ver então que as três identidades de Ward axiais podem ser violadas simultaneamente. Para simetrias abelianas, o traço sobre os geradores $t_a [t_b, t_c]$ é identicamente nulo, e assim o termo anômalo desaparece mostrando que não existe violação nas identidades de Ward axiais. Por outro lado, para grupos de simetria não abelianos, o traço de $t_a [t_b, t_c]$ não é, em geral, nulo para todos os possíveis grupos desta classe de simetrias. Nestas circunstâncias todas as três

identidades de Ward são violadas pela mesma quantidade mostrando uma equivalência entre os três vértices axiais. Assim, o mesmo mecanismo que nos mostra que $T_{\mu\nu}^{AV}$ é anômala também nos revela que amplitudes finitas tais como $T_{\lambda\mu\nu}^{A_a \rightarrow V_b V_c}$ e $T_{\lambda\mu\nu}^{A_a \rightarrow A_b A_c}$ também são.

11 CONCLUSÕES E COMENTÁRIOS FINAIS

No presente trabalho lançamos mão de um método alternativo de manipulação e cálculo de integrais divergentes para investigarmos a existência de anomalias em amplitudes finitas dentro do cenário de uma teoria quântica de campos em duas dimensões do espaço-tempo. Em particular, concentramos nossa investigação nas amplitudes triangulares (finitas) *AVV* e *AAA*. Dentro do contexto do referido método, as amplitudes que nascem das regras de Feynman, não são modificadas pois nenhuma regularização explícita é de fato necessária. Expansões ou limites não são exigidos bem como nenhuma integral divergente é realmente realizada. Isto é possível depois que uma adequada e conveniente representação para os propagadores envolvidos é usada. Com isto podemos isolar todo o conteúdo físico em integrais que são finitas e que podem então ser resolvidas através de procedimentos bem conhecidos. As estruturas resultantes são então organizadas em funções finitas bem definidas. As partes divergentes restantes não carregam nenhum parâmetro físico sendo que as mesmas são apenas organizadas em objetos básicos que não são modificados ou integrados. Somente propriedades gerais são eventualmente consideradas na verificação das identidades de Ward ou em procedimentos de renormalização.

A estratégia citada acima fornece portanto uma estrutura sólida para realizarmos investigações através de cálculos perturbativos em situações onde métodos de regularização tradicionais não são consistentes ou aplicáveis. Em particular, em todas as situações onde a RD se aplica os resultados podem ser colocados em uma correspondência precisa. Em contraste com a RD, a estratégia mencionada não tem limitações de aplicabilidade pois ela pode ser utilizada igualmente tanto em dimensões pares quanto ímpares, no tratamento de tensores e pseudo-tensores bem como no contexto de teorias renormalizáveis e não renormalizáveis. Além disso, as bem conhecidas amplitudes anômalas divergentes podem ser consistentemente tratadas, fornecendo a correta descrição do fenômeno sem assumir o caráter ambíguo delas.

A presente investigação tem como tema central alguns aspectos sobre anomalias em TQC que não estão completamente esclarecidos na literatura do assunto. Em particular queremos responder a questão: existem anomalias em amplitudes finitas? As discussões apresentadas nesta dissertação podem ser vistas como uma continuação de um trabalho publicado anteriormente versando sobre o mesmo assunto (BATTISTEL; FONSECA; DALLABONA, 2012b). Como roteiro de análise, utilizamos o método descrito na seção 4 para calcular de forma sistemática todas as amplitudes de um, dois e três pontos necessárias para a investigação detalhada das amplitudes *AVV* e *AAA*. A fim de obtermos uma conclusão universal no final da nossa

investigação primeiro foi necessário estabelecer um ponto de vista claro para a anomalia axial AV , pois, apesar de serem finitas, as contrações das amplitudes AVV e AAA , com os momentos externos, gera relações entre funções de Green que envolvem a amplitude (divergente) AV . Por esta razão, na seção 7 estudamos a amplitude AV de modo a estabelecer tal ponto de vista para a amplitude anômala AV . Mostramos que a expressão calculada da amplitude AV viola a identidade de Ward axial de uma forma inevitável. O limite de baixa energia, associado ao vértice axial, é satisfeito bem como a identidade de Ward vetorial, porém a identidade de Ward axial é violada justamente pelo termo (anômalo) que viola a relação entre funções de Green para a contração com o índice axial. Resultados completamente análogos são obtidos em outras dimensões do espaço-tempo pares para outras amplitudes divergentes anômalas através da aplicação do mesmo procedimento (ver por exemplo referências (BATTISTEL; DALLABONA, 2002b; BATTISTEL; DALLABONA, 2002a; FONSECA; DALLABONA; BATTISTEL, 2014; BATTISTEL; FONSECA; DALLABONA, 2012a)). Baseados no mesmo procedimento usado para tratar a amplitude AV investigamos, então, as amplitudes triangulares AVV e AAA . Os resultados dos cálculos podem ser analisados como segue.

Para a amplitude AVV a expressão completa é mostrada na Eq. (8.4). As contrações com os momentos externos podem ser resumidas como:

$$\begin{aligned} (k_2 - k_1)^\mu [T_{\lambda\mu\nu}^{AVV}] &= [T_{\lambda\nu}^{AV}(k_1, k_3)] - [T_{\lambda\nu}^{AV}(k_2, k_3)] , \\ (k_3 - k_2)^\nu [T_{\lambda\mu\nu}^{AVV}] &= [T_{\lambda\mu}^{AV}(k_1, k_2)] - [T_{\lambda\mu}^{AV}(k_1, k_3)] , \\ (k_3 - k_1)^\lambda [T_{\lambda\mu\nu}^{AVV}] &= [T_{\nu\mu}^{AV}(k_1, k_2)] - [T_{\mu\nu}^{AV}(k_2, k_3)] \\ &\quad + 2m [T_{\mu\nu}^{PVV}] - \frac{i}{\pi} \varepsilon_{\mu\nu} . \end{aligned}$$

Os resultados acima podem ser interpretados da seguinte maneira. Apesar de ser finita e assim não ambígua, quando o mesmo procedimento de cálculo e análise das amplitudes divergentes anômalas é usado, o comportamento da amplitude AVV é inteiramente análogo àquelas amplitudes divergentes anômalas; as contrações com os momento vetoriais satisfazem as relações entre funções de Green esperadas e a contração com o momento externo axial, por outro lado, viola a relação entre funções de Green esperada. Isto equivale à uma violação de simetria do correspondente processo físico. Assim, sem a introdução de hipóteses adicionais, esta violação é inevitável. Por causa disso podemos denominá-la de anomalia. O termo que viola a relação entre funções de Green será convertido num termo anômalo quando a amplitude AVV for si-

metrizada nos estados finais de acordo com a simetria de Bose, somando-se o canal cruzado, conforme mostrado na Eq.(10.3). Além disso, no vértice axial, onde ocorre a violação, o correspondente limite de baixa será preservado da mesma forma que ocorre em todas as amplitudes anômalas.

Por sua vez a amplitude AAA é dada pela Eq. (8.4) e as contrações com os momentos externos fornecem as seguintes relações entre funções de Green:

$$\begin{aligned}
(k_2 - k_1)^\mu [T_{\lambda\mu\nu}^{AAA}] &= [T_{\nu\lambda}^{AV}(k_2, k_3)] - [T_{\lambda\nu}^{AV}(k_1, k_3)] \\
&\quad + 2m [T_{\lambda\nu}^{APA}] - \frac{i}{\pi} \epsilon_{\lambda\nu}, \\
(k_3 - k_1)^\lambda [T_{\lambda\mu\nu}^{AAA}] &= [T_{\nu\mu}^{VA}(k_1, k_2)] - [T_{\mu\nu}^{VA}(k_2, k_3)] \\
&\quad + 2m [T_{\mu\nu}^{PAA}] + \frac{i}{\pi} \epsilon_{\mu\nu}, \\
(k_3 - k_2)^\nu [T_{\lambda\mu\nu}^{AAA}] &= - [T_{\lambda\mu}^{AV}(k_1, k_3)] + [T_{\lambda\mu}^{VA}(k_1, k_2)] \\
&\quad - 2m [T_{\lambda\mu}^{AAP}] - \frac{i}{\pi} \epsilon_{\lambda\mu}.
\end{aligned}$$

Podemos perceber dos resultados acima que todas as relações entre funções de Green são violadas exatamente pelo mesmo termo que viola a relação entre funções de Green para o vértice axial da amplitude AVV . Dentro dessa perspectiva todos os vértices axiais são equivalentes, mesmo quando violados pelos termos anômalos. Por sua vez, as correspondentes identidades de Ward, obtidas pela soma do canal direto mais o cruzado, terá termos anômalos não nulos quando a amplitude estiver aplicada no contexto de uma teoria não abeliana, conforme podemos ver das Eqs.(10.4), (10.5) e (10.6).

Essa é, sem dúvida, a confirmação de que o fenômeno denominado como anomalia ocorre em amplitudes finitas. Esta conclusão reforça nossa conjectura de que há, de fato, uma cadeia de amplitudes que exibem o fenômeno das anomalias. Como parte desta conjectura, os diagramas de espalhamento $2D$, $AVVV$ e $AAAV$, devem apresentar também o mesmo fenômeno. As investigações realizadas em amplitudes finitas em $4D$ e $6D$ parecem confirmar a conjectura mencionada também para modelos com diferentes espécies de fermions nas linhas internas do loop das amplitudes.

REFERÊNCIAS

- ADAM, C.; BERTLMANN, R. A.; HOFER, P. Dispersion relation approach to the anomaly in 2 dimensions. **Zeitschrift für Physik C Particles and Fields**, Springer, v. 56, n. 1, p. 123–127, 1992.
- ADAM, C.; BERTLMANN, R. A.; HOFER, P. Overview on the anomaly and schwinger term in two-dimensional qed. **La Rivista del Nuovo Cimento (1978-1999)**, Springer, v. 16, n. 8, p. 1–52, 1993.
- ADLER, S. L. Axial-vector vertex in spinor electrodynamics. **Physical Review**, APS, v. 177, n. 5, p. 2426, 1969.
- ASHMORE, J. F. A method of gauge-invariant regularization. **Lettere Al Nuovo Cimento (1971–1985)**, Springer, v. 4, n. 8, p. 289–290, 1972.
- BARDEEN, W. A. Anomalous ward identities in spinor field theories. **Physical Review**, APS, v. 184, n. 5, p. 1848, 1969.
- BATTISTEL, O. **Uma estratégia para manipulações e cálculos envol! vendo divergências em TQC**. Tese (Doutorado) — PhD thesis, Universidade Federal de Minas Gerais, Brazil, 1999.
- BATTISTEL, O. From arbitrariness to anomalies in two-dimensional perturbative calculations. **Journal of Physics G: Nuclear and Particle Physics**, IOP Publishing, v. 30, n. 5, p. 543, 2004.
- BATTISTEL, O.; DALLABONA, G. Role of ambiguities and gauge invariance in the calculation of the radiatively induced chern–simons shift in extended qed. **Nuclear Physics B**, Elsevier, v. 610, n. 1, p. 316–330, 2001.
- BATTISTEL, O.; DALLABONA, G. Anomalies dismissed of ambiguities and the neutral pion decay. **Journal of Physics G: Nuclear and Particle Physics**, IOP Publishing, v. 28, n. 10, p. 2539, 2002.
- BATTISTEL, O.; DALLABONA, G. From arbitrariness to ambiguities in the evaluation of perturbative physical amplitudes and their symmetry relations. **Physical Review D**, APS, v. 65, n. 12, p. 125017, 2002.
- BATTISTEL, O.; DALLABONA, G. Eur. phys. j. **C1**, p. 001, 2003.
- BATTISTEL, O.; DALLABONA, G. Scale ambiguities in perturbative calculations and the value for the radiatively induced chern-simons term in extended qed. **Physical Review D**, APS, v. 72, n. 4, p. 045009, 2005.
- BATTISTEL, O.; DALLABONA, G. A systematization for one-loop 4d feynman integrals. **The European Physical Journal C-Particles and Fields**, Springer, v. 45, n. 3, p. 721–743, 2006.
- BATTISTEL, O.; DALLABONA, G. From scale properties of physical amplitudes to a predictive formulation of the nambu–jona-lasinio model. **Physical Review D**, APS, v. 80, n. 8, p. 085028, 2009.

- BATTISTEL, O.; DALLABONA, G.; KREIN, G. Predictive formulation of the nambu–jona-lasinio model. **Physical Review D**, APS, v. 77, n. 6, p. 065025, 2008.
- BATTISTEL, O.; FONSECA, M.; DALLABONA, G. Anomalies in finite amplitudes: Two-dimensional single axial-vector triangle. **Physical Review D**, APS, v. 85, n. 8, p. 085007, 2012.
- BATTISTEL, O.; FONSECA, M.; DALLABONA, G. Anomalies in finite amplitudes: Two-dimensional single axial-vector triangle. **Physical Review D**, APS, v. 85, n. 8, p. 085007, 2012.
- BATTISTEL, O.; PIMENTA, T.; DALLABONA, G. Phenomenological implications of a predictive formulation of the nambu–jona-lasinio model having tensor couplings and isospin symmetry breaking terms. **Physical Review D**, APS, v. 94, n. 8, p. 085011, 2016.
- BELL, J. S.; JACKIW, R. A pcac puzzle: $\pi^0 \rightarrow \gamma\gamma$ in the σ -model. **Il Nuovo Cimento A (1965-1970)**, Springer, v. 60, n. 1, p. 47–61, 1969.
- BERTLMANN, R. **Anomalies in quantum field theory**, Clarendon. [S.l.]: Oxford UK, 1996.
- BOLLINI, C.; GIAMBIAGI, J. Lowest order “divergent” graphs in v -dimensional space. **Physics Letters B**, Elsevier, v. 40, n. 5, p. 566–568, 1972.
- CHENG, T.-P.; LI, L.-F. **Gauge Theory of elementary particle physics**. [S.l.]: Oxford University Press, 1988.
- DALLABONA, G.; BATTISTEL, O. Ambiguities and symmetry relations associated with fermionic tensor densities. **Physical Review D**, APS, v. 70, n. 6, p. 065017, 2004.
- FARIAS, R. et al. Cutoff-independent regularization of four-fermion interactions for color superconductivity. **Physical Review C**, APS, v. 73, n. 1, p. 018201, 2006.
- FARIAS, R. et al. Extension of the nambu–jona-lasinio model predictions at high densities and temperatures using an implicit regularization scheme. **Physical Review C**, APS, v. 77, n. 6, p. 065201, 2008.
- FONSECA, M.; DALLABONA, G.; BATTISTEL, O. Perturbative calculations in space–time having extra dimensions: The 6d single axial box anomaly. **International Journal of Modern Physics A**, World Scientific, v. 29, n. 29, p. 1450168, 2014.
- FONSECA, M. et al. Ambiguities and symmetry relations in five-dimensional perturbative calculations: the explicit evaluation of the qed5 vacuum polarization tensor. **International Journal of Modern Physics A**, World Scientific, v. 28, n. 27, p. 1350135, 2013.
- FRAMPTON, P. H. **Gauge field theories**. [S.l.]: Wiley-Interscience, 2000.
- GERTSEIN, I. S.; JACKIW, R. Anomalies in ward identities for three-point functions. **Physical Review**, APS, v. 181, n. 5, p. 1955, 1969.
- JACKIW, R. When radiative corrections are finite, but undetermined. **International Journal of Modern Physics B**, World Scientific, v. 14, n. 19n20, p. 2011–2021, 2000.
- JOHNSON, K. γ_5 invariance. **Physics Letters**, North-Holland, v. 5, n. 4, p. 253–254, 1963.

- KAKU, M. **Quantum field theory: a modern introduction**. [S.l.]: Oxford Univ. Press, 1993.
- PAULI, W.; VILLARS, F. On the use of subtraction fields and the lifetimes of some types of meson decay. **Physical Review**, APS, v. 76, n. 8, p. 1180, 1949.
- PESKIN, M. E. **An introduction to quantum field theory**. [S.l.]: Westview press, 1995.
- RAMOND, P. **Field Theory: A Modern Primer (Frontiers in Physics Series, Vol 74)**. [S.l.]: Westview Press, 2001.
- RYDER, L. H. **Quantum field theory**. [S.l.]: Cambridge university press, 1996.
- SCARPELLI, A.; BATTISTEL, O.; NEMES, M. Testing a new strategy to treat divergent amplitudes in qed. **Brazilian journal of physics**, SciELO Brasil, v. 28, n. 3, p. 161–168, 1998.
- TREIMAN R. JACKIW, B. Z. S. B.; WITTEN, E. **Current algebra and anomalies**. [S.l.]: World Scientific, Singapore, 1985.
- VELTMAN, M. et al. Regularization and renormalization of gauge fields. **Nuclear Physics B**, Elsevier, v. 44, n. 1, p. 189–213, 1972.

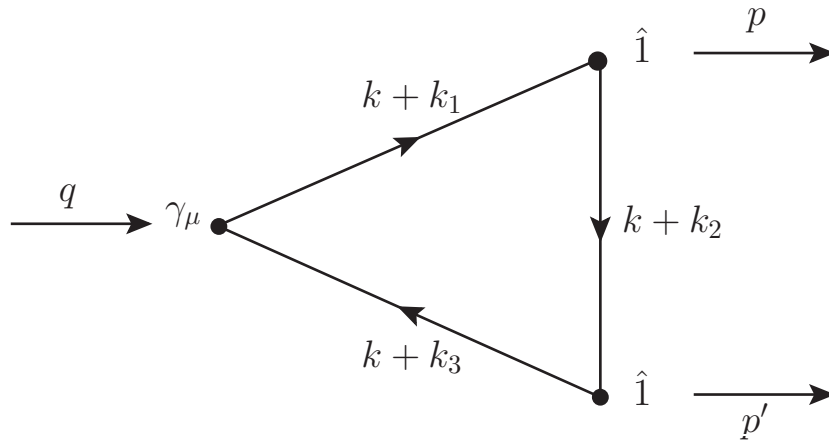
APÊNDICE A –

Neste apêndice, vamos mostrar explicitamente os detalhes dos cálculos das amplitudes de três pontos que são pertinentes para a investigação realizada no presente trabalho. Tomando $\Gamma_i = \gamma_\mu$, $\Gamma_j = \mathbf{1}$ e $\Gamma_k = \mathbf{1}$, na definição (2.5), temos a amplitude T_μ^{VSS}

$$t_\mu^{VSS} = Tr \left\{ \gamma_\mu \frac{1}{\not{k} + \not{k}_1 - m} \frac{1}{\not{k} + \not{k}_2 - m} \frac{1}{\not{k} + \not{k}_3 - m} \right\}.$$

A respectiva representação diagramática pode ser vista na Fig. (1).

Figura 1 – Definição dos momentos externos.



Fonte: Autor (2017)

De acordo com a figura, os momentos externos são definidos como $p = k_1 - k_2$, $p' = k_2 - k_3$ e $q = k_1 - k_3$.

Depois de tomarmos o traço podemos organizar o resultado como

$$t_\mu^{VSS} = \left[t_\mu^{(+)}(k_1, k_2, k_3) \right] - \left[t_\mu^{(-)}(k_2, k_1, k_3) \right] + \left[t_\mu^{(+)}(k_3, k_1, k_2) \right], \quad (1)$$

onde definimos as estruturas

$$t_\mu^{(s)}(k_i, k_j, k_l) = \frac{2}{D_{123}} (k + k_i)_\mu \left[(k + k_j) \cdot (k + k_l) + sm^2 \right],$$

com $s = \pm 1$. Para calcularmos $t_\mu^{(s)}(k_i, k_j, k_l)$ primeiro notamos a seguinte identidade

$$\begin{aligned} [(k+k_j) \cdot (k+k_l) + sm^2] &= \frac{1}{2} [(k+k_j)^2 - m^2] \\ &+ \frac{1}{2} [(k+k_l)^2 - m^2] \\ &- \frac{1}{2} [(k_l-k_j)^2 - (m+sm)^2] , \end{aligned}$$

que resulta em

$$\begin{aligned} T_\mu^{(s)}(k_i, k_j, k_l) &= [I_{2\mu}(k_i; k_l)] - (-k_i)_\mu [I_2(k_i; k_l)] \\ &+ [I_{2\mu}(k_i; k_j)] - (-k_i)_\mu [I_2(k_i; k_j)] \\ &- [(k_l-k_j)^2 - (1+s)m^2] \left\{ [I_{3\mu}] - (-k_i)_\mu [I_3] \right\} . \end{aligned}$$

Com os resultados das integrais (5.3), (5.11) e

$$I_3 = \left[\xi_{500}^{(-2)} \right] , \quad (2)$$

$$I_{3\mu} = -(k_2 - k_1)_\mu \left[\xi_{501}^{(-2)} \right] - (k_3 - k_1)_\mu \left[\xi_{10}^{(-2)} \right] - k_{1\mu} [I_3] , \quad (3)$$

obtemos

$$\begin{aligned} T_\mu^{(s)}(k_i, k_j, k_l) &= -(k_l - k_i)_\mu \left[\xi_1^{(-1)} \left((k_l - k_i)^2, m^2 \right) \right] \\ &- (k_j - k_i)_\mu \left[\xi_1^{(-1)} \left((k_j - k_i)^2, m^2 \right) \right] \\ &+ [(k_l - k_j)^2 - (m + sm)^2] \left\{ (k_2 - k_1)_\mu \left[\xi_{10}^{(-2)} \right] \right. \\ &\quad \left. + (k_3 - k_1)_\mu \left[\xi_{501}^{(-2)} \right] - (k_i - k_1)_\mu \left[\xi_{500}^{(-2)} \right] \right\} . \quad (4) \end{aligned}$$

Acima definimos as estruturas finitas de três pontos $\xi_{nm}^{(k)}$

$$\xi_{nm}^{(k)}(m_1^2; k_2 - k_1, m_2^2; k_3 - k_1, m_3^2) = \int_0^1 dx_1 \int_0^{1-x_1} dx_2 \frac{x_1^n x_2^m}{Q^k} , \quad (5)$$

$$k = 1, 2, 3, \dots \quad (6)$$

onde

$$\begin{aligned}
Q &\equiv Q(m_1^2; k_2 - k_1, m_2^2, x_1; k_3 - k_1, m_3^2, x_2) , \\
&= (k_2 - k_1)^2 x_1 (1 - x_1) + (k_3 - k_1)^2 x_2 (1 - x_2) \\
&\quad - 2(k_2 - k_1) \cdot (k_3 - k_1) x_1 x_2 + (m_1^2 - m_2^2) x_2 + (m_1^2 - m_3^2) x_1 - m_1^2 .
\end{aligned}$$

Assim temos

$$\begin{aligned}
T_\mu^{(+)}(k_1, k_2, k_3) &= -(k_3 - k_1)_\mu \left[\xi_1^{(-1)} \left((k_3 - k_1)^2, m^2 \right) \right] \\
&\quad - (k_2 - k_1)_\mu \left[\xi_1^{(-1)} \left((k_2 - k_1)^2, m^2 \right) \right] \\
&\quad + \left[(k_3 - k_2)^2 - 4m^2 \right] \left\{ (k_2 - k_1)_\mu \left[\xi_{10}^{(-2)} \right] + (k_3 - k_1)_\mu \left[\xi_{01}^{(-2)} \right] \right\} ,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
T_\mu^{(-)}(k_2, k_1, k_3) &= -(k_3 - k_2)_\mu \left[\xi_1^{(-1)} \left((k_3 - k_2)^2, m^2 \right) \right] \\
&\quad + (k_2 - k_1)_\mu \left[\xi_1^{(-1)} \left((k_2 - k_1)^2, m^2 \right) \right] \\
&\quad + (k_3 - k_1)^2 \left\{ (k_2 - k_1)_\mu \left[\xi_{10}^{(-2)} \right] + (k_3 - k_1)_\mu \left[\xi_{01}^{(-2)} \right] \right\} \\
&\quad - (k_3 - k_1)^2 (k_2 - k_1)_\mu \left[\xi_{00}^{(-2)} \right] ,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
T_\mu^{(+)}(k_3, k_1, k_2) &= (k_3 - k_2)_\mu \left[\xi_1^{(-1)} \left((k_3 - k_2)^2, m^2 \right) \right] \\
&\quad + (k_3 - k_1)_\mu \left[\xi_1^{(-1)} \left((k_3 - k_1)^2, m^2 \right) \right] \\
&\quad + \left[(k_2 - k_1)^2 - 4m^2 \right] \left\{ (k_2 - k_1)_\mu \left[\xi_{10}^{(-2)} \right] + (k_3 - k_1)_\mu \left[\xi_{01}^{(-2)} \right] \right\} \\
&\quad - \left[(k_2 - k_1)^2 - 4m^2 \right] (k_3 - k_1)_\mu \left[\xi_{00}^{(-2)} \right] .
\end{aligned}$$

Substituindo os resultados acima em (1) obtemos

$$\begin{aligned}
[-i(4\pi)] T_{\mu}^{VSS} = & (k_2 - k_1)_{\mu} \left\{ - \left[\xi_0^{(-1)} \left((k_2 - k_1)^2, m^2 \right) + \xi_0^{(-1)} \left((k_3 - k_2)^2, m^2 \right) \right] \right. \\
& + 2 \left[(k_2 - k_1)^2 - (k_2 - k_1) \cdot (k_3 - k_1) - 4m^2 \right] \left[\xi_{10}^{(-2)} \right] \\
& \left. + (k_3 - k_1)^2 \left[\xi_{00}^{(-2)} \right] \right\} \\
& + (k_3 - k_1)_{\mu} \left\{ \left[\xi_0^{(-1)} \left((k_3 - k_2)^2, m^2 \right) \right] \right. \\
& + 2 \left[(k_2 - k_1)^2 - (k_2 - k_1) \cdot (k_3 - k_1) - 4m^2 \right] \left[\xi_{01}^{(-2)} \right] \\
& \left. - \left[(k_2 - k_1)^2 - 4m^2 \right] \left[\xi_{00}^{(-2)} \right] \right\} .
\end{aligned}$$

As escolhas $\Gamma_i = \gamma_{\mu}$, $\Gamma_j = \gamma_5$ e $\Gamma_k = \gamma_5$ em (2.5) definem a amplitude T_{μ}^{VPP}

$$t_{\mu}^{VPP} = Tr \left\{ \gamma_{\mu} \frac{1}{\not{k} + \not{k}_1 - m_1} \gamma_5 \frac{1}{\not{k} + \not{k}_2 - m_2} \gamma_5 \frac{1}{\not{k} + \not{k}_3 - m_3} \right\} ,$$

que pode ser escrita como

$$t_{\mu}^{VPP} = - \left[t_{\mu}^{(-)}(k_1, k_2, k_3) \right] + \left[t_{\mu}^{(-)}(k_2, k_1, k_3) \right] - \left[t_{\mu}^{(-)}(k_3, k_1, k_2) \right] . \quad (7)$$

Usando o resultado (4) obtemos

$$\begin{aligned}
T_{\mu}^{(-)}(k_1, k_2, k_3) = & - (k_3 - k_1)_{\mu} \left[\xi_1^{(-1)} \left((k_3 - k_1)^2, m^2 \right) \right] \\
& - (k_2 - k_1)_{\mu} \left[\xi_1^{(-1)} \left((k_2 - k_1)^2, m^2 \right) \right] \\
& + (k_2 - k_1)_{\mu} (k_3 - k_2)^2 \left[\xi_{10}^{(-2)} \right] \\
& + (k_3 - k_1)_{\mu} (k_3 - k_2)^2 \left[\xi_{01}^{(-2)} \right] ,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
T_{\mu}^{(-)}(k_2, k_1, k_3) = & - (k_3 - k_2)_{\mu} \left[\xi_1^{(-1)} \left((k_3 - k_2)^2, m^2 \right) \right] \\
& - (k_1 - k_2)_{\mu} \left[\xi_1^{(-1)} \left((k_1 - k_2)^2, m^2 \right) \right] \\
& + (k_2 - k_1)_{\mu} (k_3 - k_1)^2 \left[\xi_{10}^{(-2)} - \xi_{00}^{(-2)} \right] \\
& + (k_3 - k_1)_{\mu} (k_3 - k_1)^2 \left[\xi_{01}^{(-2)} \right] ,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
T_{\mu}^{(-)}(k_3, k_1, k_2) = & -(k_2 - k_3)_{\mu} \left[\xi_1^{(-1)} \left((k_2 - k_3)^2, m^2 \right) \right] \\
& - (k_1 - k_3)_{\mu} \left[\xi_1^{(-1)} \left((k_1 - k_3)^2, m^2 \right) \right] \\
& + (k_3 - k_1)_{\mu} (k_2 - k_1)^2 \left[\xi_{01}^{(-2)} - \xi_{00}^{(-2)} \right] \\
& + (k_2 - k_1)_{\mu} (k_2 - k_1)^2 \left[\xi_{10}^{(-2)} \right] .
\end{aligned}$$

Substituindo os resultados acima em (7) obtemos

$$\begin{aligned}
[-i(4\pi)] T_{\mu}^{VPP} = & (k_2 - k_1)_{\mu} \left\{ 2 \left[\xi_1^{(-1)} \left((k_3 - k_2)^2, m^2 \right) + \xi_1^{(-1)} \left((k_2 - k_1)^2, m^2 \right) \right] \right. \\
& + 2(k_3 - k_1) \cdot (k_2 - k_1) \left[\xi_{10}^{(-2)} \right] \\
& - 2(k_2 - k_1)^2 \left[\xi_{10}^{(-2)} \right] \\
& \left. - (k_3 - k_1)^2 \left[\xi_{00}^{(-2)} \right] \right\} \\
& + (k_3 - k_1)_{\mu} \left\{ -2 \left[\xi_1^{(-1)} \left((k_3 - k_2)^2, m^2 \right) \right] \right. \\
& + 2(k_3 - k_1) \cdot (k_2 - k_1) \left[\xi_{01}^{(-2)} \right] \\
& \left. - (k_2 - k_1)^2 \left[2\xi_{01}^{(-2)} - \xi_{00}^{(-2)} \right] \right\} . \tag{8}
\end{aligned}$$

De maneira inteiramente análoga também temos

$$\begin{aligned}
[-i(4\pi)] T_{\mu}^{PVP} = & (k_2 - k_1)_{\mu} \left\{ -2 \left[\xi_1^{(-1)} \left((k_3 - k_2)^2, m^2 \right) \right] \right. \\
& - 2(k_3 - k_1)^2 \left[\xi_{10}^{(-2)} \right] \\
& + 2(k_3 - k_1) \cdot (k_2 - k_1) \left[\xi_{10}^{(-2)} \right] \\
& \left. + (k_3 - k_1)^2 \left[\xi_{00}^{(-2)} \right] \right\} \\
& + (k_3 - k_1)_{\mu} \left\{ 2 \left[\xi_1^{(-1)} \left((k_2 - k_3)^2, m^2 \right) + \xi_1^{(-1)} \left((k_1 - k_3)^2, m^2 \right) \right] \right. \\
& - 2(k_3 - k_1)^2 \left[\xi_{01}^{(-2)} \right] \\
& + 2(k_3 - k_1) \cdot (k_2 - k_1) \left[\xi_{01}^{(-2)} \right] \\
& \left. - (k_2 - k_1)^2 \left[\xi_{00}^{(-2)} \right] \right\} , \tag{9}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
[-i(4\pi)] T_{\mu}^{PPV} &= (k_2 - k_1)_{\mu} \left\{ - \left[\xi_0^{(-1)} \left((k_2 - k_1)^2, m^2 \right) \right] \right. \\
&\quad - 2(k_2 - k_1) \cdot (k_3 - k_1) \left[\xi_{10}^{(-2)} \right] \\
&\quad \left. + (k_3 - k_1)^2 \left[\xi_{00}^{(-2)} \right] \right\} \\
&\quad + (k_3 - k_1)_{\mu} \left\{ - \left[\xi_0^{(-1)} \left((k_3 - k_1)^2, m^2 \right) \right] \right. \\
&\quad - 2(k_2 - k_1) \cdot (k_3 - k_1) \left[\xi_{01}^{(-2)} \right] \\
&\quad \left. + (k_2 - k_1)^2 \left[\xi_{00}^{(-2)} \right] \right\} .
\end{aligned} \tag{10}$$

Para a amplitude $T_{\mu\nu}^{PVV}$ escolhemos $\Gamma_i = \gamma_5$, $\Gamma_j = \gamma_{\alpha}$ e $\Gamma_k = \gamma_{\nu}$ tal que

$$t_{\alpha\nu}^{PVV} = Tr \left\{ \gamma_5 \frac{1}{\not{k} + \not{k}_1 - m_1} \gamma_{\alpha} \frac{1}{\not{k} + \not{k}_2 - m_2} \gamma_{\nu} \frac{1}{\not{k} + \not{k}_3 - m_3} \right\}$$

Podemos usar a identidade

$$\gamma_{\alpha} = -\varepsilon_{\alpha\mu} \gamma_{\mu} \gamma_5 ,$$

para escrever

$$t_{\alpha\nu}^{PVV} = \varepsilon_{\alpha\mu} Tr \left\{ \gamma_5 \frac{1}{\not{k} + \not{k}_1 - m_1} \gamma_{\alpha} \gamma_5 \frac{1}{\not{k} + \not{k}_2 - m_2} \gamma_{\nu} \frac{1}{\not{k} + \not{k}_3 - m_3} \right\} ,$$

ou

$$t_{\mu\nu}^{PVV} = -\varepsilon_{\alpha\mu} \left[t_{\mu\nu}^{PAV} \right] .$$

Para calcularmos a amplitude $T_{\mu\nu}^{PAV}$ primeiro tomamos a traço de Dirac obtendo

$$\begin{aligned}
t_{\mu\nu}^{PAV} &= 2m \frac{1}{D_{123}} \left\{ - \left[(k + k_2)_{\mu} (k + k_3)_{\nu} + (k + k_2)_{\nu} (k + k_3)_{\mu} \right] \right. \\
&\quad + \left[(k + k_1)_{\mu} (k + k_3)_{\nu} - (k + k_1)_{\nu} (k + k_3)_{\mu} \right] \\
&\quad \left. + \left[(k + k_1)_{\mu} (k + k_2)_{\nu} + (k + k_1)_{\nu} (k + k_2)_{\mu} \right] \right\} \\
&\quad + 2mg_{\mu\nu} \frac{1}{D_{123}} \left\{ \left[(k + k_2) \cdot (k + k_3) - m^2 \right] \right. \\
&\quad + \left[(k + k_1) \cdot (k + k_3) - m^2 \right] \\
&\quad \left. - \left[(k + k_1) \cdot (k + k_2) - m^2 \right] \right\} .
\end{aligned}$$

Definindo as estruturas

$$t_{\mu\nu} = 2m \frac{1}{D_{123}} \left\{ - \left[(k+k_2)_\mu (k+k_3)_\nu + (k+k_2)_\nu (k+k_3)_\mu \right] \right. \\ \left. + \left[(k+k_1)_\mu (k+k_3)_\nu - (k+k_1)_\nu (k+k_3)_\mu \right] \right. \\ \left. + \left[(k+k_1)_\mu (k+k_2)_\nu + (k+k_1)_\nu (k+k_2)_\mu \right] \right\} ,$$

e

$$t = 2m \frac{1}{D_{123}} \left\{ \left[(k+k_2) \cdot (k+k_3) - m^2 \right] \right. \\ \left. + \left[(k+k_1) \cdot (k+k_3) - m^2 \right] \right. \\ \left. - \left[(k+k_1) \cdot (k+k_2) - m^2 \right] \right\} ,$$

temos

$$t_{\mu\nu}^{PAV} = t_{\mu\nu} + g_{\alpha\nu} t . \quad (11)$$

Podemos calcular a estrutura $T_{\alpha\nu}$ primeiro notando que

$$t_{\mu\nu} = 2m \left\{ - \left[t_{\mu\nu}^{(+)}(k_2, k_3) \right] + \left[t_{\mu\nu}^{(-)}(k_1, k_3) \right] + \left[t_{\mu\nu}^{(+)}(k_1, k_2) \right] \right\} ,$$

onde definimos

$$t_{\mu\nu}^{(s)}(k_l, k_n) = \frac{1}{D_{123}} \left[(k+k_l)_\mu (k+k_n)_\nu + s(k+k_l)_\nu (k+k_n)_\mu \right] .$$

Em termos de integrais de Feynman temos

$$T_{\mu\nu}^{(s)}(k_l, k_n) = (1+s) [I_{3\mu\nu}] \\ + (k_n + sk_l)_\nu [I_{3\mu}] \\ + (k_l + sk_n)_\mu [I_{3\nu}] \\ + (k_l)_\mu (k_n)_\nu + s(k_l)_\nu (k_n)_\mu [I_3] .$$

Substituindo os resultados (2), (5.11) e

$$\begin{aligned}
I_{3\mu\nu} = & \frac{1}{2}g_{\mu\nu} \left[\xi_{00}^{(-1)} \right] \\
& + (k_2 - k_1)_\mu (k_2 - k_1)_\nu \left[\xi_{02}^{(-2)} \right] + (k_3 - k_1)_\mu (k_3 - k_1)_\nu \left[\xi_{20}^{(-2)} \right] \\
& + \left((k_2 - k_1)_\mu (k_3 - k_1)_\nu + (k_2 - k_1)_\nu (k_3 - k_1)_\mu \right) \left[\xi_{11}^{(-2)} \right] \\
& - k_{1\nu} [I_{3\mu}] - k_{1\mu} [I_{3\nu}] - k_{1\mu} k_{1\nu} [I_3] ,
\end{aligned}$$

obtemos

$$\begin{aligned}
T_{\mu\nu}^{(s)}(k_l, k_n) = & (1+s) \left\{ \frac{1}{2}g_{\mu\nu} \left[\xi_{00}^{(-1)} \right] \right. \\
& + (k_2 - k_1)_\mu (k_2 - k_1)_\nu \left[\xi_{20}^{(-2)} \right] + (k_2 - k_1)_\mu (k_3 - k_1)_\nu \left[\xi_{11}^{(-2)} \right] \\
& \left. + (k_3 - k_1)_\mu (k_2 - k_1)_\nu \left[\xi_{11}^{(-2)} \right] + (k_3 - k_1)_\mu (k_3 - k_1)_\nu \left[\xi_{02}^{(-2)} \right] \right\} \\
& + [(k_n - k_1)_\nu + s(k_l - k_1)_\nu] \left\{ - (k_2 - k_1)_\mu \left[\xi_{10}^{(-2)} \right] - (k_3 - k_1)_\mu \left[\xi_{01}^{(-2)} \right] \right\} \\
& + [(k_l - k_1)_\mu + s(k_n - k_1)_\mu] \left\{ - (k_2 - k_1)_\nu \left[\xi_{10}^{(-2)} \right] - (k_3 - k_1)_\nu \left[\xi_{01}^{(-2)} \right] \right\} \\
& + [(k_n - k_1)_\nu (k_l - k_1)_\mu + s(k_n - k_1)_\mu (k_l - k_1)_\nu] \left[\xi_{00}^{(-2)} \right] .
\end{aligned}$$

Com o resultado acima temos

$$\begin{aligned}
T_{\mu\nu} = & 2m \left\{ - (k_2 - k_1)_\mu (k_3 - k_1)_\nu \left[\xi_{00}^{(-2)} \right] \right. \\
& - (k_3 - k_1)_\mu (k_2 - k_1)_\nu \left[-2\xi_{10}^{(-2)} + \xi_{00}^{(-2)} \right] \\
& \left. - (k_3 - k_1)_\mu (k_3 - k_1)_\nu \left[-2\xi_{01}^{(-2)} \right] \right\} .
\end{aligned}$$

Para calcularmos T é conveniente definimos

$$t^{(s)}(k_i, k_j, k_l) = \frac{1}{D_{ijl}} \left[(k + k_i) \cdot (k + k_j) + sm^2 \right] ,$$

onde $i \neq j \neq l$ e $s = \pm 1$. Com isto podemos escrever

$$t = 2m \left\{ t^{(-)}(k_2, k_3, k_1) + t^{(-)}(k_1, k_3, k_2) - t^{(-)}(k_1, k_2, k_3) \right\} .$$

Para encontrarmos uma expressão para $T^{(s)}(k_i, k_j, k_l)$ notamos a seguinte identidade

$$\begin{aligned} [(k+k_i) \cdot (k+k_j) + sm^2] &= \frac{1}{2} [(k+k_i)^2 - m^2] \\ &+ \frac{1}{2} [(k+k_j)^2 - m^2] \\ &- \frac{1}{2} [(k_j-k_i)^2 - (1+s)m^2] . \end{aligned}$$

Assim

$$\begin{aligned} T^{(s)}(k_i, k_j, k_l) &= +\frac{1}{2} [I_2(k_j, k_l)] + \frac{1}{2} [I_2(k_i, k_l)] \\ &- \frac{1}{2} [(k_j-k_i)^2 - (1+s)m^2] [I_3] . \end{aligned}$$

Com os resultados (5.3) e (2) temos

$$\begin{aligned} T &= m \left\{ 2 \left[\xi_0^{(-1)} \left((k_2 - k_1)^2, m^2 \right) \right] \right. \\ &\quad \left. + \left[(k_2 - k_1)^2 - (k_3 - k_1)^2 - (k_3 - k_2)^2 \right] \left[\xi_{00}^{(-2)} \right] \right\} . \end{aligned}$$

Usando os resultados acima em (11) obtemos

$$\begin{aligned} [-i(4\pi)] T_{\mu\nu}^{PAV} &= 2m \left\{ -(k_2 - k_1)_\mu (k_3 - k_1)_\nu \left[\xi_{00}^{(-2)} \right] \right. \\ &\quad - (k_3 - k_1)_\mu (k_2 - k_1)_\nu \left[-2\xi_{10}^{(-2)} + \xi_{00}^{(-2)} \right] \\ &\quad \left. - (k_3 - k_1)_\mu (k_3 - k_1)_\nu \left[-2\xi_{01}^{(-2)} \right] \right\} \\ &+ mg_{\nu\mu} \left\{ 2 \left[\xi_0^{(-1)} \left((k_2 - k_1)^2, m^2 \right) \right] \right. \\ &\quad \left. - \left[(k_3 - k_2)^2 + (k_3 - k_1)^2 + (k_2 - k_1)^2 \right] \left[\xi_{00}^{(-2)} \right] \right\} . \end{aligned}$$

Logo o resultado para $T_{\mu\nu}^{PVV}$ tem a forma

$$\begin{aligned}
[-i(4\pi)] T_{\mu\nu}^{PVV} = & 2m\varepsilon_{\mu\alpha} \left\{ (k_2 - k_1)_\alpha (k_3 - k_1)_\nu \left[\xi_{500}^{(-2)} \right] \right. \\
& + (k_3 - k_1)_\alpha (k_2 - k_1)_\nu \left[-2\xi_{10}^{(-2)} + \xi_{500}^{(-2)} \right] \\
& \left. + (k_3 - k_1)_\alpha (k_3 - k_1)_\nu \left[-2\xi_{501}^{(-2)} \right] \right\} \\
& - 2m\varepsilon_{\mu\nu} \left\{ \left[\xi_{50}^{(-1)} \left((k_2 - k_1)^2, m^2 \right) \right] \right. \\
& \left. - \left[(k_3 - k_1)^2 - (k_3 - k_1) \cdot (k_2 - k_1) \right] \left[\xi_{500}^{(-2)} \right] \right\} . \quad (12)
\end{aligned}$$

Seguindo a mesma linha de raciocínio do cálculo da amplitude $T_{\mu\nu}^{PVV}$ também podemos encontrar os resultados para as amplitudes

$$\begin{aligned}
[-i(4\pi)] T_{\mu\nu}^{PAA} = & 2m\varepsilon_{\mu\alpha} \left\{ (k_2 - k_1)^\alpha (k_3 - k_1)_\nu \left[-2\xi_{10}^{(-2)} + \xi_{500}^{(-2)} \right] \right. \\
& + (k_3 - k_1)^\alpha (k_2 - k_1)_\nu \left[\xi_{500}^{(-2)} \right] \\
& \left. + (k_2 - k_1)^\alpha (k_2 - k_1)_\nu \left[-2\xi_{501}^{(-2)} \right] \right\} \\
& + 2m\varepsilon_{\mu\nu} \left\{ \left[\xi_{50}^{(-1)} \left((k_3 - k_2)^2; m^2 \right) \right] - (k_2 - k_1) \cdot (k_3 - k_1) \left[\xi_{500}^{(-2)} \right] \right\} ,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
[-i(4\pi)] T_{\lambda\nu}^{APA} = & -2m\varepsilon_{\lambda\alpha} \left\{ (k_2 - k_1)^\alpha (k_2 - k_1)_\nu \left[-2\xi_{10}^{(-2)} \right] \right. \\
& + (k_3 - k_1)^\alpha (k_2 - k_1)_\nu \left[-2\xi_{501}^{(-2)} + \xi_{500}^{(-2)} \right] \\
& \left. + (k_2 - k_1)^\alpha (k_3 - k_1)_\nu \left[\xi_{500}^{(-2)} \right] \right\} \\
& - 2m\varepsilon_{\lambda\nu} \left\{ \left[\xi_{50}^{(-1)} \left((k_3 - k_2)^2; m^2 \right) \right] - (k_2 - k_1) \cdot (k_3 - k_1) \left[\xi_{500}^{(-2)} \right] \right\} , \quad (13)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
[-i(4\pi)] T_{\lambda\mu}^{AAP} = & 2m\varepsilon_{\lambda\alpha} \left\{ (k_2 - k_1)^\alpha (k_2 - k_1)_\mu \left[-2\xi_{10}^{(-2)} \right] \right. \\
& + (k_2 - k_1)^\alpha (k_3 - k_1)_\mu \left[2\xi_{10}^{(-2)} - \xi_{500}^{(-2)} \right] \\
& + (k_3 - k_1)^\alpha (k_2 - k_1)_\mu \left[-2\xi_{501}^{(-2)} + \xi_{500}^{(-2)} \right] \\
& \left. + (k_3 - k_1)^\alpha (k_3 - k_1)_\mu \left[2\xi_{501}^{(-2)} \right] \right\} \\
& + 2m\varepsilon_{\lambda\mu} \left\{ \left[\xi_{50}^{(-1)} \left((k_2 - k_1)^2; m^2 \right) \right] \right. \\
& \left. - \left[(k_3 - k_1)^2 - (k_2 - k_1) \cdot (k_3 - k_1) \right] \left[\xi_{500}^{(-2)} \right] \right\} .
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
[-i(4\pi)]T^{PSP} &= 2m \left\{ -2 \left[\xi_1^{(-1)} \left((k_2 - k_1)^2, m^2 \right) \right] \right\} \\
&\quad + \left[(k_3 - k_1)^2 - (k_2 - k_1) \cdot (k_3 - k_1) \right] \left[\xi_{00}^{(-2)} \right] \left. \right\} . \tag{14}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
[-i(4\pi)]T^{PPS} &= 2m \left\{ - \left[\xi_0^{(-1)} \left((k_2 - k_3)^2, m^2 \right) \right] \right. \\
&\quad \left. + (k_2 - k_1) \cdot (k_3 - k_1) \xi_{00}^{(-2)} \right\} \tag{15}
\end{aligned}$$

APÊNDICE B –

A fim de escrever explicitamente os resultados das amplitudes, neste apêndice, introduzimos uma sistematização útil para escrever as partes finitas das soluções das integrais de Feynman envolvidas. No caso das funções de três pontos, introduzimos as funções $\xi_{nm}^{(-2)}$ e $\xi_{nm}^{(-1)}$ que, juntamente com as funções finitas de dois pontos $\xi_k^{(-1)}$, nos permitem organizar de uma forma sistemática todas as expressões para as amplitudes consideradas. No capítulo 8 calculamos todas as amplitudes de três pontos pertinentes para a investigação da existência de possíveis anomalias nas amplitudes finitas *AVV* e *AAA*. Depois disto precisamos investigar as contrações dessas amplitudes com seus momentos externos, a fim de verificar suas relações entre funções de Green. Esta tarefa é bastante tediosa pois exige um esforço algébrico grande. Entretanto, podemos simplificá-la se a sistematização introduzida for convenientemente usada. Para este propósito é necessário identificar algumas propriedades envolvendo as funções finitas $\xi_{nm}^{(-2)}$, $\xi_{nm}^{(-1)}$ e $\xi_k^{(-1)}$.

Mantendo isso em mente, notamos primeiramente que todos os componentes do conjunto de funções correspondente a um certo valor da soma $n + m$, para valores positivos de ambos, podem ser reduzidos à uma combinação de outros elementos do conjunto correspondendo a valores de $n + m$ diminuído de uma unidade mais funções $\xi_k^{(-1)}$. Detalhes deste cálculo podem ser encontrados na Ref. (BATTISTEL; DALLABONA, 2006). No presente trabalho somente listaremos os resultados pertinentes para referência durante o processo de cálculo. Para o caso $n + m = 1$ temos

$$\begin{aligned} \xi_{01}^{(-2)} = & \frac{1}{2} \left\{ \frac{q^2}{p^2 q^2 - (p \cdot q)^2} \right\} \left\{ \frac{(q^2 - p \cdot q)}{q^2} \left[\xi_0^{(-1)} \left((p - q)^2, m^2 \right) \right] \right. \\ & \left. + \frac{(p \cdot q)}{q^2} \left[\xi_0^{(-1)} \left(p^2, m^2 \right) \right] - \left[\xi_0^{(-1)} \left(q^2, m^2 \right) \right] + (p^2 - p \cdot q) \xi_{00}^{(-2)} \right\}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \xi_{10}^{(-2)} = & \frac{1}{2} \left\{ \frac{p^2}{p^2 q^2 - (p \cdot q)^2} \right\} \left\{ \frac{(p^2 - p \cdot q)}{p^2} \left[\xi_0^{(-1)} \left((p - q)^2, m^2 \right) \right] \right. \\ & \left. + \frac{(p \cdot q)}{p^2} \left[\xi_0^{(-1)} \left(q^2, m \right) \right] - \left[\xi_0^{(-1)} \left(p^2, m^2 \right) \right] + (q^2 - p \cdot q) \xi_{00}^{(-2)} \right\}. \end{aligned}$$

Para o caso $n + m = 2$ obtemos

$$\begin{aligned} \xi_{02}^{(-2)} &= \frac{1}{2} \left\{ \frac{q^2}{p^2 q^2 - (p \cdot q)^2} \right\} \left\{ \frac{(q^2 - p \cdot q)}{q^2} [\xi_1^{(-1)}((p - q)^2, m^2)] \right. \\ &\quad \left. + \frac{(p \cdot q)}{q^2} [\xi_1^{(-1)}(p^2, m^2)] - \xi_{00}^{(-1)} + (p^2 - p \cdot q) \xi_{01}^{(-2)} \right\}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \xi_{20}^{(-2)} &= \frac{1}{2} \left\{ \frac{p^2}{p^2 q^2 - (p \cdot q)^2} \right\} \left\{ \frac{(p^2 - p \cdot q)}{p^2} [\xi_1^{(-1)}((p - q)^2, m^2)] \right. \\ &\quad \left. + \frac{(p \cdot q)}{p^2} [\xi_1^{(-1)}(q^2, m^2)] - \xi_{00}^{(-1)} + (q^2 - p \cdot q) \xi_{10}^{(-2)} \right\}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \xi_{11}^{(-2)} &= \frac{1}{2} \left\{ \frac{p^2}{p^2 q^2 - (p \cdot q)^2} \right\} \left\{ \frac{(p^2 - p \cdot q)}{p^2} [\xi_1^{(-1)}((p - q)^2, m^2)] \right. \\ &\quad \left. - [\xi_1^{(-1)}(p^2, m^2)] + \frac{(p \cdot q)}{p^2} \xi_{00}^{(-1)} + (q^2 - p \cdot q) \xi_{01}^{(-2)} \right\}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \xi_{11}^{(-2)} &= \frac{1}{2} \left\{ \frac{q^2}{p^2 q^2 - (p \cdot q)^2} \right\} \left\{ \frac{(q^2 - p \cdot q)}{q^2} [\xi_1^{(-1)}((p - q)^2, m^2)] \right. \\ &\quad \left. - [\xi_1^{(-1)}(q^2, m^2)] + \frac{(p \cdot q)}{q^2} \xi_{00}^{(-1)} + (p^2 - p \cdot q) \xi_{10}^{(-2)} \right\}, \end{aligned}$$

e para $n + m = 3$ temos

$$\begin{aligned} \xi_{30}^{(-2)} &= \frac{1}{2} \left\{ \frac{p^2}{p^2 q^2 - (p \cdot q)^2} \right\} \left\{ \frac{(p^2 - p \cdot q)}{p^2} [\xi_2^{(-1)}((p - q)^2, m^2)] \right. \\ &\quad \left. + \frac{(p \cdot q)}{p^2} [\xi_2^{(-1)}(q^2, m^2)] - 2\xi_{10}^{(-1)} + (q^2 - p \cdot q) \xi_{20}^{(-2)} \right\}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \xi_{03}^{(-2)} &= \frac{1}{2} \left\{ \frac{q^2}{p^2 q^2 - (p \cdot q)^2} \right\} \left\{ \frac{(q^2 - p \cdot q)}{q^2} [\xi_2^{(-1)}((p - q)^2, m^2)] \right. \\ &\quad \left. + \frac{(p \cdot q)}{q^2} [\xi_2^{(-1)}(p^2, m^2)] - 2\xi_{01}^{(-1)} + (p^2 - p \cdot q) \xi_{02}^{(-2)} \right\}, \end{aligned}$$

$$\xi_{21}^{(-2)} = \frac{1}{2} \left\{ \frac{p^2}{p^2 q^2 - (p \cdot q)^2} \right\} \left\{ \frac{(p^2 - p \cdot q)}{p^2} \left[\xi_1^{(-1)} \left((p-q)^2, m^2 \right) - \xi_2^{(-1)} \left((p-q)^2, m^2 \right) \right] \right. \\ \left. + \frac{(p \cdot q)}{p^2} \xi_{10}^{(-1)} - \xi_{01}^{(-1)} + (q^2 - p \cdot q) \xi_{11}^{(-2)} \right\},$$

$$\xi_{12}^{(-2)} = \frac{1}{2} \left\{ \frac{q^2}{p^2 q^2 - (p \cdot q)^2} \right\} \left\{ \frac{(q^2 - p \cdot q)}{q^2} \left[\xi_1^{(-1)} \left((p-q)^2, m^2 \right) - \xi_2^{(-1)} \left((p-q)^2, m^2 \right) \right] \right. \\ \left. + \frac{(p \cdot q)}{q^2} \xi_{01}^{(-1)} - \xi_{10}^{(-1)} + (p^2 - p \cdot q) \xi_{11}^{(-2)} \right\}.$$

Com estas reduções podemos identificar outras propriedades úteis que são combinações especiais das reduções acima. Entre elas temos:

$$n + m = 3:$$

$$p^2 \xi_{30}^{(-2)} + (p \cdot q) \xi_{21}^{(-2)} = \frac{1}{2} \left[\xi_2^{(-1)} \left((p-q)^2, m^2 \right) \right] - \xi_{10}^{(-1)} + \frac{1}{2} p^2 \xi_{20}^{(-2)}, \quad (16)$$

$$q^2 \xi_{03}^{(-2)} + (p \cdot q) \xi_{12}^{(-2)} = \frac{1}{2} \left[\xi_2^{(-1)} \left((p-q)^2, m^2 \right) \right] - \xi_{01}^{(-1)} + \frac{1}{2} q^2 \xi_{02}^{(-2)}, \quad (17)$$

$$q^2 \xi_{12}^{(-2)} + (p \cdot q) \xi_{21}^{(-2)} = \frac{1}{2} \left[\xi_1^{(-1)} \left((p-q)^2, m^2 \right) - \xi_2^{(-1)} \left((p-q)^2, m^2 \right) \right] \\ - \frac{1}{2} \xi_{10}^{(-1)} + \frac{1}{2} q^2 \xi_{11}^{(-2)}, \quad (18)$$

$$p^2 \xi_{21}^{(-2)} + (p \cdot q) \xi_{12}^{(-2)} = \frac{1}{2} \left[\xi_1^{(-1)} \left((p-q)^2, m^2 \right) - \xi_2^{(-1)} \left((p-q)^2, m^2 \right) \right] \\ - \frac{1}{2} \xi_{01}^{(-1)} + \frac{1}{2} p^2 \xi_{11}^{(-2)}, \quad (19)$$

$$q^2 \left[\xi_{21}^{(-2)} \right] + (p \cdot q) \left[\xi_{30}^{(-2)} \right] = \frac{1}{2} \left[\xi_2^{(-1)} \left((p-q)^2, m^2 \right) - \xi_2^{(-1)} \left(p^2, m^2 \right) \right] \\ + \frac{1}{2} q^2 \xi_{20}^{(-2)}, \quad (20)$$

$$n + m = 2:$$

$$p^2 \xi_{20}^{(-2)} + (p \cdot q) \xi_{11}^{(-2)} = \frac{1}{2} \left[\xi_1^{(-1)} \left((p-q)^2, m^2 \right) \right] - \frac{1}{2} \xi_{00}^{(-1)} + \frac{p^2}{2} \xi_{10}^{(-2)}, \quad (21)$$

$$q^2 \xi_{02}^{(-2)} + (p \cdot q) \xi_{11}^{(-2)} = \frac{1}{2} \left[\xi_1^{(-1)} \left((p-q)^2, m^2 \right) \right] - \frac{1}{2} \xi_{00}^{(-1)} + \frac{q^2}{2} \xi_{01}^{(-2)}, \quad (22)$$

$$p^2 \xi_{11}^{(-2)} + (p \cdot q) \xi_{02}^{(-2)} = \frac{1}{2} \left[\xi_1^{(-1)} \left((p-q)^2, m^2 \right) - \xi_1^{(-1)} \left(q^2, m^2 \right) \right] + \frac{p^2}{2} \xi_{01}^{(-2)}, \quad (23)$$

$$q^2 \xi_{11}^{(-2)} + (p \cdot q) \xi_{20}^{(-2)} = \frac{1}{2} \left[\xi_1^{(-1)} \left((p-q)^2, m^2 \right) - \xi_1^{(-1)} \left(p^2, m^2 \right) \right] + \frac{q^2}{2} \xi_{10}^{(-2)}, \quad (24)$$

$n + m = 1$:

$$q^2 \xi_{01}^{(-2)} + (p \cdot q) \xi_{10}^{(-2)} = \frac{1}{2} \left[\xi_0^{(-1)} \left((p-q)^2, m^2 \right) - \xi_0^{(-1)} \left(p^2, m^2 \right) \right] + \frac{1}{2} q^2 \xi_{00}^{(-2)}, \quad (25)$$

$$p^2 \xi_{10}^{(-2)} + (p \cdot q) \xi_{01}^{(-2)} = \frac{1}{2} \left[\xi_0^{(-1)} \left((p-q)^2, m^2 \right) - \xi_0^{(-1)} \left(q^2, m^2 \right) \right] + \frac{1}{2} p^2 \xi_{00}^{(-2)}, \quad (26)$$

$$\begin{aligned} q^2 \xi_{01}^{(-1)} + (p \cdot q) \xi_{10}^{(-1)} &= \frac{1}{2} (p-q)^2 \left[\xi_1^{(-1)} \left((p-q)^2, m^2 \right) - 2\xi_2^{(-1)} \left((p-q)^2, m^2 \right) \right] \\ &\quad - \frac{1}{2} p^2 \left[\xi_1^{(-1)} \left(p^2, m^2 \right) - 2\xi_2^{(-1)} \left(p^2, m^2 \right) \right] + \frac{1}{2} q^2 \xi_{00}^{(-1)}. \end{aligned} \quad (27)$$

No próximo capítulo usaremos as identidades mostradas acima para verificar as relações entre funções de Green envolvendo as funções de três pontos.