



**RAFAEL LEMOS BASTOS**

**PROPOSIÇÃO DE TESTES BOOTSTRAP PARA  
O ÍNDICE DE QUALIDADE SENSORIAL**

**LAVRAS - MG  
2013**

**RAFAEL LEMOS BASTOS**

**PROPOSIÇÃO DE TESTES BOOTSTRAP PARA O ÍNDICE DE  
QUALIDADE SENSORIAL**

Dissertação apresentada à Universidade Federal de Lavras, como parte das exigências do Programa de Pós-Graduação em Estatística e Experimentação Agropecuária, área de concentração em Estatística e Experimentação Agropecuária, para a obtenção do título de Mestre.

Orientador

Dr. Marcelo Silva de Oliveira

Coorientador

Dr. Eric Batista Ferreira

**LAVRAS - MG  
2013**

**Ficha Catalográfica Elaborada pela Coordenadoria de Produtos e  
Serviços da Biblioteca Universitária da UFLA**

Bastos, Rafael Lemos.

Proposição de testes bootstrap para o índice de qualidade sensorial  
/Rafael Lemos Bastos. – Lavras : UFLA, 2014.

125 p. : il.

Dissertação (Mestrado) – Universidade Federal de Lavras, 2013.

Orientador: Marcelo Silva de Oliveira.

Bibliografia.

1. Análise Sensorial. 2. Vida de Prateleira. 3. Método Bootstrap.  
4. Simulação Monte Carlo. I. Universidade Federal de Lavras. II.  
Título.

CDD-519.54

**RAFAEL LEMOS BASTOS**

**PROPOSIÇÃO DE TESTES BOOTSTRAP PARA O ÍNDICE DE  
QUALIDADE SENSORIAL**

Dissertação apresentada à Universidade Federal de Lavras, como parte das exigências do Programa de Pós-Graduação em Estatística e Experimentação Agropecuária, área de concentração em Estatística e Experimentação Agropecuária, para a obtenção do título de Mestre.

APROVADO em 06 de dezembro de 2013.

Dr. Daniel Furtado Ferreira      UFLA

Dr. Denismar Alves Nogueira      UNIFAL - MG

Dr. Eric Batista Ferreira      UNIFAL - MG

Dr. Marcelo Silva de Oliveira  
Orientador

**LAVRAS - MG  
2013**

Primeiramente, a Deus pelo dom da vida.

Aos meus pais, Tadeu e Teresinha; aos professores da Universidade Federal de Lavras, Universidade Federal de Alfenas, Escola Estadual Secretário Tristão da Cunha e de outras instituições em que estudei, em especial aos professores Marcelo Silva de Oliveira, Eric Batista Ferreira, Daniel Furtado Ferreira e Denismar Alves Nogueira, pelas orientações e aos familiares e amigos. Enfim, a todos que fizeram parte ao longo dessa trajetória,

**DEDICO.**

*Deus age em nossas vidas e nos transforma em quem nunca imaginamos ser!*

## AGRADECIMENTOS

A Deus, pela vida, por iluminar-me sempre. À Mãe Rainha e a todos Santos, por estarem sempre intercedendo por mim e levando meus pedidos a Deus.

Aos meus pais, Tadeu e Teresinha; meus irmãos, Cristiano, Guilherme e Luana, pelo carinho, apoio e incentivo em todos os momentos.

À Universidade Federal de Lavras (UFLA), ao Departamento de Ciências Exatas e ao Programa de Pós-Graduação em Estatística e Experimentação Agropecuária, pela oportunidade concedida para realização do mestrado.

Aos orientadores, Professor Marcelo Silva de Oliveira e Eric Batista Ferreira, pela dedicação, apoio, amizade, competência e conhecimentos ensinados.

Aos professores da UFLA, da UNIFAL-MG, da EESTC e de outras instituições que estudei, em especial ao professor Daniel Furtado Ferreira que, de forma solidária, contribuiu muito nesse trabalho. À professora Flávia Della Lucia da Unifal-MG, por permitir o uso dos dados de berinjela, à secretária Josi e aos professores Denismar Alves Nogueira, Thelma Sáfadi, Luiz Alberto Beijo, Alaíde e Marlene Ferreira, Ana Maria, João Ângelo, Alisson, Nilma, Hélio e Cristina.

Aos meus familiares, afilhados, vizinhos e amigos, em especial, a família da madrinha Lúcia, tio Antônio, tia Doralice, madrinha Nicea, padrinho José Luiz e madrinha Dorinha, Padre Donizetti, Daniel, Vanderlei, Julieta; ao grupo de oração JUVECC, enfim, a todos de Divisa Nova (minha cidade que amo muito).

Aos amigos de Lavras, em especial ao senhor Jorge e família, Luiz Rodrigues e Laiane, amigos do shopping e universitários.

À Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (CAPES), pela bolsa concedida no Mestrado; a PROBIC II e PIBIC/CNPq, pelas bolsas na Graduação; e à FAPEMIG, pelo apoio financeiro nos eventos que participei.

Enfim, agradeço a todos que fizeram parte da minha carreira acadêmica.

## RESUMO

A análise sensorial é um dos campos mais importantes da ciência dos alimentos, na qual se avalia o produto e contribui para a determinação da sua qualidade e aceitação. Um ponto importante nesse campo é o estudo da vida de prateleira, pois a qualidade do produto pode ser alterada no decorrer do tempo. Imm, Lee e Lee (2011) propuseram um Índice de Qualidade Sensorial (*IQS*) para indicar o comportamento da qualidade sensorial de um produto ao longo do tempo, de acordo com a reação do consumidor. O *IQS* é calculado como uma razão da aceitação global média de um produto no fim da sua vida de prateleira pela aceitação global média no início. Este trabalho foi realizado com o objetivo principal de realizar inferência via computação intensiva sobre o *IQS*, propondo testes *bootstrap*. Os objetivos específicos foram: formalizar a função *IQS*, verificar se o teste *t* para amostras emparelhadas é uma ferramenta melhor que o *IQS* nesse estudo, avaliar as taxas de erro tipo I e poder, via simulação Monte Carlo dos testes propostos e do teste *t* para amostras emparelhadas, compará-los e aplicá-los em dados reais. Foram propostos dois testes: o *bootstrap* não paramétrico e o paramétrico para o *IQS*. Os três testes mostraram-se ferramentas poderosas no estudo da vida de prateleira. Aplicando-se os três testes nos dados de berinjela, as mesmas conclusões foram obtidas, ou seja, que a qualidade sensorial piorou. Comparando-se os três testes, recomenda-se aplicar o teste *t* para amostras emparelhadas, pois, diante dos resultados da avaliação do erro tipo I e poder, este teste mostrou que é uma ferramenta melhor do que os dois testes propostos para o *IQS*.

**Palavras-Chave:** Análise Sensorial, Vida de Prateleira, Método *Bootstrap*, Simulação Monte Carlo.

## ABSTRACT

Sensory analysis is one of the most important fields of the food science in which the product is evaluated and contributes towards the determination of its quality and acceptance. One important point in this field is the study of the shelf-life; for the quality of the product can be altered over time. Imm, Lee and Lee (2011) proposed a Sensory Quality Index (*SQI*) to indicate the sensory quality behavior of a product over time according to the consumer reaction. The *SQI* is calculated as an overall mean acceptance rate of a product at the end of its shelf-life by the overall mean acceptance at the beginning. This work was conducted with the main purpose of carrying out inference via intensive computing upon the *SQI*, proposing bootstrap tests. The particular objectives were: formalizing the *SQI* function, verifying if the *t*-test for paired samples is a tool better than the *SQI* in that study, evaluating the rates of type I error and power via Monte Carlo simulation of the tests proposed and of the *t*-test for paired samples, comparing them and applying them into real data. Two tests were proposed: non-parametric and the parametric bootstrap for the *SQI*. The three tests proved powerful tools in the study of shelf-life. By applying the three tests in the data of eggplant, the same conclusions were obtained, in other words, that the sensory quality worsened. Comparing the three tests, it is recommend applying the *t*-test for paired samples, for, before the results of the evaluation of the type I error and power; this test proved a better tool than the two tests proposed for the *SQI*.

**Keywords:** Sensory Analisis, Shelf-Life, Method *Bootstrap*, Monte Carlo Simulation.

## LISTA DE FIGURAS

Figura 1	Modelo de questionário utilizado para a avaliação da aceitação . . . . .	21
Figura 2	Amostra retirada de uma população . . . . .	25
Figura 3	Ilustração do método de <i>bootstrap</i> não paramétrico . . . . .	28
Figura 4	Ilustração do método de <i>bootstrap</i> paramétrico . . . . .	30
Figura 5	Obtenção dos quantis da normal padrão, considerando $p_{iI}$ . . . . .	42
Figura 6	Categorizando uma Normal Bivariada . . . . .	43
Figura 7	Exemplo ilustrativo do processo do teste <i>BNP</i> . . . . .	45
Figura 8	Exemplo de estimação das probabilidades de sucesso de uma amostra . . . . .	46
Figura 9	Exemplo do processo de obtenção do valor-p do teste <i>BP</i> . . . . .	47
Figura 10	Exemplo ilustrativo da simulação <i>bootstrap</i> não paramétrico, considerando $IQS=1$ , gerando 1000 valores de $ls$ . . . . .	55
Figura 11	Simulação <i>bootstrap</i> não paramétrico, considerando $IQS=0,92$ , gerando 1000 valores de $ls$ . . . . .	57
Figura 12	Exemplo ilustrativo do processo de encontrar a taxa de erro tipo I do teste <i>BP</i> . . . . .	59
Figura 13	Exemplo ilustrativo do processo de encontrar a taxa do poder do teste <i>BP</i> . . . . .	61
Figura 14	Taxas de erro tipo I apresentadas pelo teste <i>BNP</i> , <i>BP</i> e <i>t</i> para amostras emparelhadas, considerando $\rho=0,5$ . . . . .	67
Figura 15	Taxas de erro tipo I apresentadas pelo teste <i>BNP</i> , <i>BP</i> e <i>t</i> para amostras emparelhadas, considerando $\rho=0,7$ . . . . .	68
Figura 16	Taxas de erro tipo I apresentadas pelo teste <i>BNP</i> , <i>BP</i> e <i>t</i> para amostras emparelhadas, considerando $\rho=0,9$ . . . . .	70

Figura 17	Taxas de poder apresentadas pelos testes <i>BNP</i> , <i>BP</i> e <i>t</i> para amostras emparelhadas, considerando $\rho=0,5$ ; $k=9$ e $\alpha=0,05$ . . .	72
Figura 18	Taxas de poder apresentadas pelos testes <i>BNP</i> , <i>BP</i> e <i>t</i> para amostras emparelhadas, considerando $\rho=0,7$ ; $k=9$ e $\alpha=0,05$ . . .	73
Figura 19	Taxas de poder apresentadas pelos testes <i>BNP</i> , <i>BP</i> e <i>t</i> para amostras emparelhadas, considerando $\rho=0,9$ ; $k=9$ e $\alpha=0,05$ . . .	74
Figura 20	Notas de aceitação global no início $\times$ Notas de aceitação global no fim . . . . .	75
Figura 21	Histograma dos 1000 valores do <i>IQS</i> , via <i>bootstrap</i> não paramétrico, considerando como amostra original os dados de berinjela . . . .	77
Figura 22	Fluxograma das relações entre a distribuição Bernoulli, binomial, categórica e multinomial . . . . .	90
Figura 23	Ilustração do método de <i>jackknife</i> . . . . .	101

## LISTA DE TABELAS

Tabela 1	Esquema de obtenção da estatística $IQS$ . . . . .	14
Tabela 2	Esquema de escala hedônica de 5, 7 e 9 pontos . . . . .	20
Tabela 3	Resultados possíveis de um teste de hipóteses e suas probabilidades	37
Tabela 4	Simulação Monte Carlo do erro tipo I do teste $BNP$ , considerando $IQS=1$ . . . . .	56
Tabela 5	Simulação Monte Carlo do poder do teste $BNP$ , considerando $IQS=0,92$ . . . . .	58
Tabela 6	Simulação Monte Carlo do erro tipo I do teste $BP$ , considerando $IQS=1$ . . . . .	60
Tabela 7	Simulação Monte Carlo do poder do teste $BP$ , considerando $IQS=0,92$ . . . . .	62
Tabela 8	Simulação Monte Carlo do erro tipo I do teste $t$ , considerando $IQS=1$ . . . . .	64
Tabela 9	Simulação Monte Carlo do poder do teste $t$ , considerando $IQS=0,92$	65
Tabela 10	Esquema de amostragem usado no estudo do $IQS$ . . . . .	102
Tabela 11	Emparelhamento ou não no produto e/ou provador . . . . .	103
Tabela 12	Ilustração para melhor visualização de $Y$ . . . . .	104
Tabela 13	Probabilidades de sucesso para obter $IQS=0,92$ . . . . .	110
Tabela 14	Probabilidades de sucesso para obter $IQS=0,85$ . . . . .	110
Tabela 15	Probabilidades de sucesso para obter $IQS=0,71$ . . . . .	111
Tabela 16	Probabilidades de sucesso para obter $IQS=0,5$ . . . . .	111
Tabela 17	Simulação Monte Carlo do poder do teste $BNP$ , considerando $IQS=0,85$ . . . . .	117

Tabela 18	Simulação Monte Carlo do poder do teste <i>BNP</i> , considerando $IQS=0,71$ . . . . .	118
Tabela 19	Simulação Monte Carlo do poder do teste <i>BNP</i> , considerando $IQS=0,5$ . . . . .	119
Tabela 20	Simulação Monte Carlo do poder do teste <i>BP</i> , considerando $IQS=0,85$ . . . . .	120
Tabela 21	Simulação Monte Carlo do poder do teste <i>BP</i> , considerando $IQS=0,71$ . . . . .	121
Tabela 22	Simulação Monte Carlo do poder do teste <i>BP</i> , considerando $IQS=0,5$ . . . . .	122
Tabela 23	Simulação Monte Carlo do poder do teste <i>t</i> , considerando $IQS=0,85$	123
Tabela 24	Simulação Monte Carlo do poder do teste <i>t</i> , considerando $IQS=0,71$	124
Tabela 25	Simulação Monte Carlo do poder do teste <i>t</i> , considerando $IQS=0,5$	125

## SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO . . . . .	13
1.1	Objetivos . . . . .	15
2	REFERENCIAL TEÓRICO . . . . .	17
2.1	Análise Sensorial . . . . .	17
2.1.1	Escala Hedônica . . . . .	20
2.1.2	Vida de prateleira . . . . .	22
2.2	Índice de Qualidade Sensorial ( <i>IQS</i> ) . . . . .	23
2.3	Inferência Estatística . . . . .	24
2.4	Métodos de Reamostragem . . . . .	26
2.4.1	Método <i>bootstrap</i> . . . . .	27
2.5	Teste <i>t</i> para amostras emparelhados . . . . .	34
2.6	Erro tipo I, erro tipo II, coeficiente de confiança e poder de teste . . . . .	36
3	MATERIAL E MÉTODOS . . . . .	39
3.1	Material . . . . .	39
3.2	Métodos . . . . .	39
3.2.1	Simulação de dados multinomiais com $\rho$ desejado . . . . .	41
3.2.2	Proposta de um teste <i>bootstrap</i> não paramétrico ( <i>BNP</i> ) para o <i>IQS</i> . . . . .	44
3.2.3	Proposta de um teste <i>bootstrap</i> paramétrico ( <i>BP</i> ) para o <i>IQS</i> . . . . .	46
3.2.4	Valores avaliados nas simulações Monte Carlo . . . . .	48
3.2.5	Respostas a serem obtidas por meio da simulação Monte Carlo . . . . .	49
3.2.6	Intervalo de confiança e teste de hipóteses para o parâmetro $p$ de uma binomial . . . . .	50
4	RESULTADOS E DISCUSSÕES . . . . .	51
4.1	Formalização da função <i>IQS</i> . . . . .	51
4.2	Inferência Via Computação Intensiva . . . . .	53
4.2.1	Simulação Monte Carlo do erro tipo I e poder do teste <i>BNP</i> . . . . .	55
4.2.2	Simulação Monte Carlo do erro tipo I e poder do teste <i>BP</i> . . . . .	59
4.2.3	Simulação Monte Carlo do erro tipo I e do poder do teste <i>t</i> para amostras emparelhadas . . . . .	63
4.3	Comparação entre os testes <i>BNP</i> , <i>BP</i> e <i>t</i> para amostras emparelhadas . . . . .	66
4.4	Estudo preliminar e aplicação dos três testes nos dados de berinjela . . . . .	75
5	CONCLUSÃO . . . . .	80
	REFERÊNCIAS . . . . .	82
	APÊNDICE . . . . .	87

## 1 INTRODUÇÃO

Um dos campos mais valorizados da ciência dos alimentos é a análise sensorial, na qual se avalia o produto com o objetivo de melhorar sua qualidade, atendendo às expectativas e ao gosto dos consumidores. Destaca-se que, em um mercado tão competitivo, a qualidade é um fator determinante na sobrevivência da empresa.

A avaliação do produto é realizada por meio de um conjunto de procedimentos que permite que um indivíduo perceba, identifique, pontue e ou classifique um estímulo externo por meio de seus sentidos humanos básicos: olfato, paladar, audição, visão e tato. Nenhum instrumento pode substituir estes sentidos, pois eles descrevem uma impressão global dos fenômenos e não apenas uma análise isolada dos seus constituintes, como é feita por um instrumento.

A análise sensorial pode ser utilizada para avaliar um alimento, uma bebida, um automóvel, enfim, um produto ou estímulo externo qualquer, contribuindo para a determinação da sua qualidade e até aceitação de um produto novo, determinando a alteração da qualidade quando houver mudanças no processo de fabricação ou conservação.

Um ponto importante nesse campo é o estudo da vida de prateleira, pois as características sensoriais de muitos alimentos se deterioram ao decorrer do tempo. Essa variação pode ser intolerável pelo consumidor e prejudicial à sua saúde.

Para auxiliar na compreensão da qualidade sensorial do produto, do início até o fim da vida de prateleira, Imm, Lee e Lee (2011) propuseram o *Sensory Quality Index*, aqui denominado Índice de Qualidade Sensorial (*IQS*). O *IQS* é definido como a razão entre a aceitação global média de um produto no fim ( $\overline{AG}_F$ ) e a aceitação global média no início ( $\overline{AG}_I$ ), conforme na Tabela 1.

Tabela 1 Esquema de obtenção da estatística *IQS*

Consumidor	Aceitação Global Inicial ( $AG_I$ )	Aceitação Global Final ( $AG_F$ )	Índice de Qualidade Sensorial ( <i>IQS</i> )
1	$AG_{1I}$	$AG_{1F}$	
2	$AG_{2I}$	$AG_{2F}$	
⋮	⋮	⋮	
m	$AG_{mI}$	$AG_{mF}$	
Estatísticas	$\overline{AG_I}$	$\overline{AG_F}$	$\frac{\overline{AG_F}}{\overline{AG_I}}$

em que  $AG_{iI}$  e  $AG_{iF}$ , com  $i = 1, \dots, m$ ; são as  $i$ -ésimas notas hedônicas da aceitação global inicial e final, respectivamente.

A importância do *IQS* é que, diante de um mercado tão competitivo, ele pode ser uma ferramenta útil, indicando o comportamento da qualidade sensorial de um produto ao longo da vida de prateleira, de acordo com a reação do consumidor. Com o seu emprego, as empresas podem melhorar a qualidade dos seus produtos, com maior segurança, para não ser prejudicial à saúde, aumentando, assim, a clientela e, conseqüentemente, maiores lucros.

Alguns problemas de pesquisa para o *IQS* são:

1. ter sido estimado apenas pontualmente, sem ter sido estimado um intervalo com uma confiança previamente estabelecida e sem poder testar alguma hipótese de interesse, o que pode inibir empresas de adotá-lo;
2. qual a distribuição de amostragem do seu estimador, pois, para a realização de uma inferência, é necessário conhecê-la;
3. é uma ferramenta melhor do que o teste  $t$  para amostras emparelhadas? Caso

não, por que não usar apenas o teste  $t$  para amostras emparelhadas?.

A grande importância do presente trabalho é que, com a realização de uma inferência estatística aprofundada, os usuários poderão estimar intervalos de confiança para o  $IQS$  e testar as hipóteses de interesse. Sendo assim, o  $IQS$  será uma ferramenta mais promissora e versátil, com maior difusão nas empresas.

## 1.1 Objetivos

O presente trabalho foi realizado com o principal objetivo de realizar inferência via computação intensiva (tanto estimação, quanto decisão) sobre a estatística  $IQS$ , propondo dois testes, um *bootstrap* não paramétrico e um paramétrico. Destaca-se que no APÊNDICE D, é apresentada a justificativa para o uso desse tipo de inferência.

Além disso, os objetivos específicos do presente trabalho foram:

1. formalizar a função do  $IQS$  (domínio, contradomínio e imagem);
2. verificar se o teste  $t$  para amostras emparelhadas aplicado no estudo da vida de prateleira é uma ferramenta melhor do que o  $IQS$ ;
3. avaliar, via simulação Monte Carlo, as taxas de erro tipo I e poder dos testes propostos e do teste  $t$  para amostras emparelhadas, e aplicá-los em dados reais de um estudo da vida de prateleira;
4. comparar os três testes por meio dos resultados da avaliação via simulação Monte Carlo.

Na seção 2, é apresentada uma revisão sobre a análise sensorial, índice de qualidade sensorial (essência do trabalho), inferência estatística, métodos de

reamostragem, teste  $t$  para amostras emparelhadas, erro tipo I, erro tipo II, coeficiente de confiança e poder do teste. A seção 3 é destinada à apresentação de material e métodos. Na seção 4, são apresentados os resultados e discussões, tais como formalização da função  $IQS$  e algumas propriedades, inferência via computação intensiva sobre a estatística  $IQS$ , sendo que no teste *bootstrap* não paramétrico, *bootstrap* paramétrico e  $t$  para amostras emparelhadas, foram realizadas avaliações das taxas de erro tipo I e poder, via simulação Monte Carlo. Com os resultados, eles foram comparados entre si e informações importantes foram obtidas. Foram realizados um estudo preliminar e aplicação dos três testes nos dados de berinjela. Na seção 5, apresentam-se as conclusões. Logo após, tem-se as referências e o apêndice do presente trabalho.

## 2 REFERENCIAL TEÓRICO

Nesse tópico são revisados os principais assuntos do presente trabalho que são: análise sensorial, índice de qualidade sensorial, inferência estatística, métodos de reamostragem, teste  $t$  para amostras emparelhadas, erro tipo I, erro tipo II, coeficiente de confiança e poder de teste.

### 2.1 Análise Sensorial

A análise sensorial é um grupo de técnicas utilizadas na avaliação de um produto, na qual se determina o perfil, mede-se a aceitação, identifica-se a preferência do consumidor, o atributo mais positivo ou negativo e até se ele está dentro dos limites de qualidade especificados pela indústria de origem. Com essa análise é possível otimizar e melhorar sua qualidade, detectando diferenças e semelhanças com outro produto e serve ainda para a criação de novos produtos.

Sua existência, de acordo com Biedrzycki (2008), vem desde os primórdios da civilização, quando os alimentos eram classificados em bons e ruins. O primeiro documento registrado refere-se a um tratado sobre aromas, escrito na Grécia, no ano 300 a.C. (PANGBORN, 1964). No Brasil, chegou em 1954, no laboratório de degustação da seção de Tecnologia do Instituto Agrônomo de Campinas (SP), para avaliar a qualidade do café. A palavra sensorial vem do Latin *sensus*, que quer dizer sentido (ANZALDÚA-MORALES, 1994). Segundo Ferreira e Oliveira (2007), a importância de estudar os sentidos é que tudo o que uma pessoa sabe, além de seus instintos básicos, vem a ela por meio deles.

A análise sensorial é composta por quatro etapas: planejamento, execução, análise e interpretação, as quais são apresentadas por Ferreira e Oliveira (2007):

1. planejamento: se propõe a responder, dentre outras, às seguintes perguntas: Quais objetos avaliar? Quais atributos medir? Como medir? Como analisar? Quais os objetivos do experimento? O que fazer com os resultados?;
2. execução: se refere à observação e medição dos fenômenos sensoriais;
3. análise: se refere ao tratamento estatístico dos dados, esta é a etapa que melhor caracteriza a Sensometria;
4. interpretação: compreensão multidisciplinar dos resultados; todos os profissionais envolvidos no processo podem atuar nessa etapa.

Na execução, os consumidores utilizam como ferramenta seus sentidos básicos, os quais são apresentados por Teixeira, Meinert e Barbetta (1987) a seguir:

### **Visão**

As primeiras impressões que o consumidor tem do produto são sua cor, estado, tamanho, forma e textura, que associarão com aceitação, indiferença ou rejeição. A cor tem três características distintas, que são o tom, a intensidade e o brilho do produto. As características visuais do alimento induzem o consumidor a esperar certo sabor, pois, ele se recorda de tudo o que já aprendeu sobre aquele alimento em particular. De acordo com Dutcosky (1996), o impacto visual é um elemento que a indústria de alimentos utiliza para tornar o alimento apetitoso.

### **Paladar**

O sentido do paladar é responsável pela sensação de sabor, percebida pelos sistemas sensoriais químicos, distribuídos em toda a cavidade bucal e concentrados

na língua. Existem quatro sensações gustativas fundamentais: o ácido (azedo), o doce, o salgado e o amargo, resultando de sua combinação entre os demais sabores.

De acordo com Dutcosky (1996), existe o reconhecimento, por parte de alguns pesquisadores, de um quinto gosto fundamental, chamado de *umami* (do japonês, quer dizer agradável) para explicar a atuação de realçadores de sabor.

### **Olfato**

O sentido do olfato é capaz de perceber o odor ou cheiro dos alimentos, sendo que o olfato humano tem uma sensibilidade incrível quando comparado a outros animais. A grande importância de estudar os odores dos alimentos é que esta característica da qualidade sensorial é capaz de atrair ou repelir o consumidor.

### **Audição**

Os alimentos originam, ao serem consumidos, sons característicos esperados pelo consumidor por sua experiência prévia. Estes sons provocados pela mastigação completam a percepção da textura e fazem parte da satisfação de comer.

### **Tato**

Segundo Dutcosky (1996), este sentido fornece informação sobre textura, forma, peso, temperatura e consistência de um produto em dois níveis: na boca e na mão. Quando um alimento é tocado ou sentido na boca, procede-se à avaliação de sua textura e temperatura, mais do que por meio dos sentidos da visão e audição.

De acordo com Ferreira (2004), a análise sensorial é efetuada de maneira

científica, com o auxílio de um painel sensorial, constituído por um grupo de pessoas treinadas ou não, chamadas de consumidores.

Um importante subconjunto da análise sensorial é a sensometria. De acordo com Ferreira e Oliveira (2007), a sensometria se refere a todo esforço feito no sentido de medir/quantificar estímulos sendo percebidos pelos sentidos humanos básicos, utilizando métodos estatísticos na análise sensorial.

Uma ferramenta muito importante na avaliação da qualidade de um produto é a escala hedônica.

### 2.1.1 Escala Hedônica

Uma das ferramentas mais utilizadas na análise sensorial é a escala hedônica, desenvolvida por Peryan e Pilgrim (1957). De acordo com Moraes (1985), a escala hedônica expressa o grau de gostar ou desgostar do consumidor em relação ao produto que está sendo analisado. As escalas hedônicas mais utilizadas são de 5, 7 e 9 pontos, apresentadas na Tabela 2.

Tabela 2 Esquema de escala hedônica de 5, 7 e 9 pontos

Categorias	5 pontos	7 pontos	9 pontos
Desgostei muitíssimo			1
Desgostei muito	1	1	2
Desgostei	2	2	3
Desgostei moderadamente		3	4
Nem desgostei nem gostei	3	4	5
Gostei moderadamente		5	6
Gostei	4	6	7
Gostei muito	5	7	8
Gostei muitíssimo			9

A escala hedônica de 5 pontos foi utilizada por Pessoa et al. (2011), a de 7 pontos, por Grizotto e Menezes (2003) e a de 9 pontos, por Dutcosky (1996).

Numa escala hedônica de  $n$  pontos não implica que ela terá atribuição de postos de 1 a  $n$  e sim que terá  $n$  valores atribuídos a  $n$  classes.

Na análise sensorial, o questionário deve ser simples e eficiente, pois segundo Moraes (1985), questionários muito sofisticados distraem a atenção do consumidor e complicam a interpretação.

Um exemplo de questionário é apresentado na Figura 1.

**Teste de aceitação**

Nome: \_\_\_\_\_  
Sexo: \_\_\_\_\_ Idade: \_\_\_\_\_

Por favor, avalie a amostra utilizando a escala abaixo para dizer o quanto você gostou ou desgostou do produto. Marque a posição que melhor reflita o seu julgamento.

Código da amostra: \_\_\_\_\_

- gostei extremamente
- gostei muito
- gostei moderadamente
- gostei ligeiramente
- indiferente
- desgostei ligeiramente
- desgostei moderadamente
- desgostei muito
- desgostei extremamente

Comentários: \_\_\_\_\_

Figura 1 Modelo de questionário utilizado para a avaliação da aceitação

**Fonte:** Ribeiro et al. (2008).

Um estudo muito importante na análise sensorial é a vida de prateleira.

### 2.1.2 Vida de prateleira

De acordo com Dutcosky (1996), qualquer tipo de alimento mantém-se em constante atividade biológica, manifestada por alterações de natureza química, física, microbiológica ou enzimática, levando-o à deterioração da sua qualidade.

A vida de prateleira é o tempo que o alimento permanece seguro para o consumidor, mantendo suas características, inclusive as nutricionais dadas na rotulagem, sob as condições de armazenagem recomendadas. Em suma, o alimento, enquanto válido, tem que cumprir duas condições: a segurança e a qualidade.

De acordo com Ferreira (2004), um ponto importante no estudo da vida de prateleira, essencial para a satisfação do consumidor, é a estabilidade do produto durante o transporte e o armazenamento nos postos de venda e domiciliar.

Os consumidores estão cada vez mais exigentes, com a expectativa de que a qualidade do produto será mantida durante o período entre a compra e o consumo. Para evitar transtorno com os consumidores, os fabricantes devem ter meios disponíveis para determinar corretamente a vida de prateleira do produto, sob determinado conjunto de condições de armazenamento. Ela é determinada por meio de amostras representativas analisadas periodicamente, submetidas a uma série de testes até encontrar a data limite de aceitação do produto.

De acordo com Battistella (2008), uma ferramenta no ramo da estatística que vem sendo adaptada e desenvolvida para determinação da vida de prateleira de alimentos é a análise de sobrevivência. Battistella (2008) aplicou análise de sobrevivência na estimativa da vida de prateleira de salsichas e Curia et al. (2005) aplicaram na estimativa da vida de prateleira de iogurtes.

Para maioria dos produtos alimentícios, a qualidade sensorial diminui ao longo da vida de prateleira. Um exemplo é descrito por Dutcosky (1996) no estudo

de café torrado e moído no Instituto de Tecnologia de Alimentos (ITAL), em que se obteve um coeficiente de correlação linear simples altamente significativo igual a -0,9675. Ou seja, houve associação inversa entre as duas variáveis estudadas, uma sendo o tempo de estocagem e a outra, a média das notas do sabor e aroma.

Note que a vida de prateleira não é sinônimo de prazo de validade, pois um produto pode ter a vida de prateleira de dois meses (segurança alimentar), mas o prazo de validade ser de 1 mês, por decisão da empresa (precaução).

Uma importante ferramenta na avaliação da vida de prateleira é o Índice de Qualidade Sensorial, apresentado com mais detalhes a seguir.

## **2.2 Índice de Qualidade Sensorial (*IQS*)**

No processo de fabrico, a qualidade sensorial do produto é considerada ideal e, no decorrer do tempo, sofre alterações que podem ser prejudiciais ao consumidor. Alguns dos motivos que podem causar essas alterações são fatores como ambientais, temperatura, estresse físico, entre outros. Vale notar que o produto também pode já vir de fábrica com qualidade inadequada.

De acordo com Imm, Lee e Lee (2011), as pontuações médias de aceitação dos consumidores não têm sido suficientes para que as empresas entendam o nível da qualidade sensorial do produto, mesmo utilizando diferentes escalas hedônicas, como as escalas de 5, 7 e 9 pontos, e assim por diante. Com isso, os mesmos autores propuseram o Índice de Qualidade Sensorial (*IQS*), dado na Tabela 1, indicando o comportamento da qualidade sensorial do produto ao longo da vida de prateleira, de acordo com o consumidor.

O  $IQS$  populacional é dado por

$$IQS = \frac{\mu_F}{\mu_I},$$

em que  $\mu_I$  e  $\mu_F$  são as médias populacionais da aceitação global do produto no início e no fim da vida de prateleira, respectivamente.

Pelo método de quadrados mínimos, segundo Ferreira (2009), o estimador da média populacional é a média amostral. Logo, o estimador do  $IQS$  é

$$\widehat{IQS} = \frac{\bar{Y}}{\bar{X}},$$

em que  $\bar{X}$  e  $\bar{Y}$  são as médias amostrais da aceitação global do produto no início e no fim da vida de prateleira, respectivamente.

Para calcular o  $IQS$ , é utilizada a aceitação global, pelo fato que sua pontuação é um questionário representativo para a resposta do consumidor em relação ao produto, ou seja, a aceitação global é a impressão geral que o consumidor tem do produto, quando é avaliado como um todo.

Neste trabalho, realiza-se uma inferência sobre a estatística  $IQS$ .

### 2.3 Inferência Estatística

Usualmente, é impraticável observar toda uma população, seja pelo custo muito alto, seja por diversas dificuldades. Examina-se, então, uma amostra representativa dessa população. O conjunto de técnicas que objetiva estudar e fazer afirmações dessa população através de evidências fornecidas por essa amostra recebe o nome de inferência estatística, conforme é ilustrado na Figura 2.

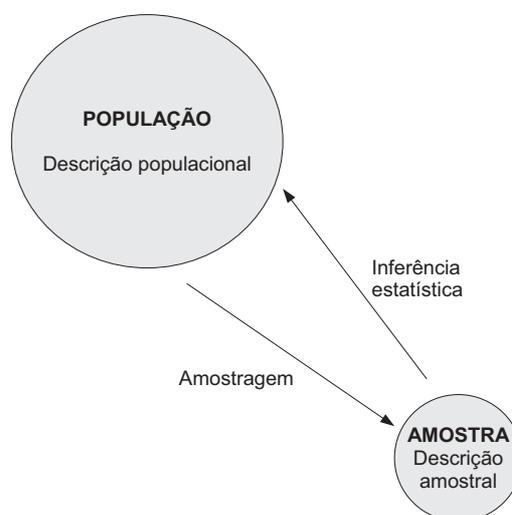


Figura 2 Amostra retirada de uma população

A inferência estatística pode também ser realizada sobre um parâmetro da população (por exemplo, o *IQS* populacional) examinando estatísticas amostrais (por exemplo, o *IQS* amostral).

De acordo com Oliveira et al. (2009), basicamente, a inferência estatística é praticada mediante duas teorias, a da estimação e a da decisão. Existem dois tipos de estimação, pontual e por intervalos de confiança. Na teoria de decisão são realizados os testes de hipóteses de interesse.

Para realizar uma inferência sobre a estatística *IQS*, o conhecimento da distribuição de amostragem do estimador do *IQS* é importante. De acordo com Ferreira (2013), muitas vezes, a dedução teórica da distribuição de amostragem de um estimador  $\hat{\theta}$  não é uma tarefa simples analiticamente. Nesses casos, o uso dos métodos de reamostragem via computação intensiva se justifica.

## 2.4 Métodos de Reamostragem

O método de reamostragem é um conjunto de métodos estatísticos computacionalmente intensivos que se baseiam em resolver problemas de inferência estatística, tanto no contexto de estimação quanto de testes de hipóteses, a partir de repetidas amostragens dentro da mesma amostra. Sua principal vantagem é que se as pressuposições de um teste ou de um processo de estimação não forem atendidas, seus resultados são os mais confiáveis. Por outro lado, se forem atendidas, não haverá perda, ao se utilizarem tais procedimentos, em relação ao uso da técnica recomendada para o caso.

Segundo Ferreira (2013), com o uso dos computadores mais rápidos e eficientes, tanto em armazenamento de dados quanto em precisão na realização dos cálculos, esses métodos, que eram impensáveis, são perfeitamente exequíveis.

Uma diferença entre os vários métodos de reamostragem é as amostras serem extraídas com ou sem reposição. A amostragem com reposição obtém uma observação a partir da amostra e, então, coloca-se de volta para, possivelmente, ser usada novamente. A amostragem sem reposição obtém observações da amostra, mas, uma vez obtidas, elas não estão mais disponíveis.

Nos métodos de reamostragem, a amostra original representa a população da qual foi extraída. Assim, as reamostras obtidas a partir dessa amostra representam o que seria obtido se fossem retirados diversas amostras da população.

Segundo Chernick (2008), o número de reamostragens necessárias para se obter boas estimativas seria, de pelo menos, 1.000 repetições *bootstrap*.

Os principais métodos de reamostragem são Monte Carlo, *jackknife*, *bootstrap* e teste de aleatorização (permutação). A seguir, é apresentado o método *bootstrap*, os outros são apresentados no APÊNDICE B.

### 2.4.1 Método *bootstrap*

Este método foi introduzido por Efron (1979), sendo uma técnica estatística de reamostragem utilizada em diversos contextos, fundamentando-se na ideia de que, na ausência de qualquer outro conhecimento da população, a distribuição amostral do estimador do parâmetro é a melhor orientação da população.

O método *bootstrap* é aplicável em situações em que os métodos tradicionais não o são, pelas mais variadas razões, como distribuição inadequada, heterogeneidade de variâncias, distribuição de amostragem da quantidade amostral de interesse não conhecida, entre outras. Segundo Ferreira (2013), para pequenas amostras, o uso do método *bootstrap* não contorna as limitações de realização de inferência. Essa limitação é a mesma dos métodos tradicionais, embora em alguns haja maior eficiência, apesar de não ser muito maior.

A utilização do método *bootstrap* se justifica também quando a teoria assintótica é intratável ou quando, apesar de viável, as aproximações assintóticas são imprecisas para os tamanhos amostrais disponíveis.

De acordo com Rizzo e Cymrot (2006), utilizar o método de *bootstrap* não implica que os outros devem ser ignorados, podendo ser empregado como um complemento na argumentação das conclusões obtidas. De acordo com Ferreira (2013, p. 561), os métodos *bootstrap* têm como filosofia a seguinte ideia: “deixar os dados falarem por si mesmos”.

Para que o método *bootstrap* leve à resultados confiáveis, a amostra que é tratada como se fosse a população que deu origem aos dados deve ser coletada de maneira planejada, sendo representativa. Essa amostra com tamanho  $m$  implica que cada unidade amostral tem probabilidade de ser sorteada igual a  $\frac{1}{m}$ .

Os métodos de *bootstrap* mais utilizados são o não paramétrico e o paramétrico.

### *Bootstrap* não paramétrico

O método *bootstrap* não paramétrico é utilizado quando a distribuição de probabilidade da variável aleatória é desconhecida. Ele consiste na reamostragem com reposição da amostra original, formando pseudoamostra de mesmo tamanho, na qual é estimado o parâmetro de interesse. Esse processo é repetido um número muito grande e finito de vezes, tendo, assim, o mesmo número de estimativas. Essa série de estimativas representa uma amostra da distribuição do estimador, permitindo realizar inferência sobre o parâmetro de interesse. Essa amostra da distribuição do estimador recebe o nome de distribuição *bootstrap* ou empírica.

Uma ilustração desse método de *bootstrap* é apresentado na Figura 3.

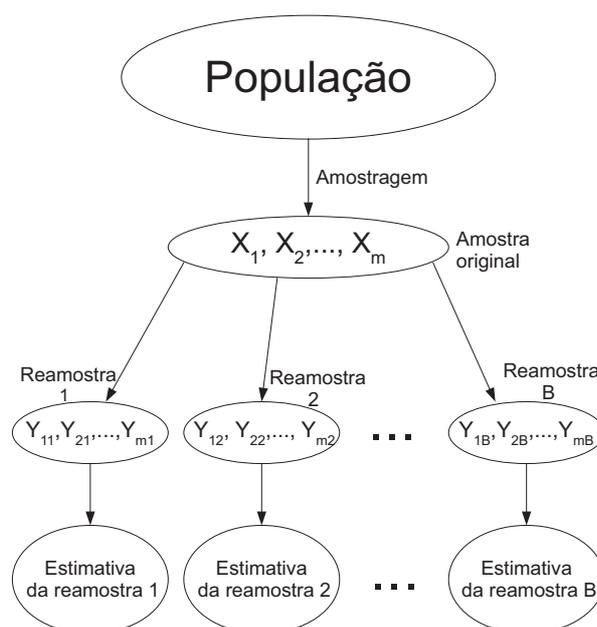


Figura 3 Ilustração do método de *bootstrap* não paramétrico

em que  $m$  é o tamanho da amostra,  $B$  é o número de reamostras e  $Y_{1i} = X_{j_1}, Y_{2i} = X_{j_2}, \dots, Y_{mi} = X_{j_m}$ , onde  $i$  é a  $i$ -ésima reamostra e  $j_1, j_2, \dots, j_m \in \{1, \dots, m\}$ .

Segundo Casella e Berger (2010), a diferença do *bootstrap* não paramétrico para o paramétrico é que não se assume nenhuma forma funcional para a função densidade de probabilidade. De acordo com Rizzo e Cymrot (2006), o *bootstrap* não paramétrico é o mais utilizado, mas, quando a distribuição de probabilidade da variável aleatória for conhecida, o *bootstrap* paramétrico pode ser aplicado.

### ***Bootstrap* paramétrico**

De acordo com Davison e Hinkley (2008), o método *bootstrap* paramétrico é utilizado quando a distribuição da variável aleatória é conhecida, com parâmetros desconhecidos, consistindo, assim, na realização de sorteios aleatórios, utilizando a estimativa do parâmetro desconhecido, obtida a partir da amostra aleatória disponível, gerando dados da distribuição de interesse.

O método *bootstrap* paramétrico é mais restritivo em virtude de assumir uma distribuição para os dados amostrais. Deve-se tomar o cuidado de não especificar mal essa distribuição, senão os resultados inferenciais ficam comprometidos.

Uma pergunta pode surgir: se a distribuição de probabilidade da variável aleatória que está sendo amostrada é conhecida, por que utilizar um procedimento *bootstrap* paramétrico? Ferreira (2013) apresenta a resposta de uma forma simples e objetiva. Nos casos em que se tem um estimador de um parâmetro de interesse, cujas estimativas são obtidas a partir de amostras aleatórias de uma distribuição conhecida e cuja distribuição de amostragem é conhecida, não há a necessidade de realizar reamostragens paramétricas de *bootstrap*, pois se pode fazer inferência diretamente, usando essa distribuição de amostragem.

Por outro lado, conhecer a distribuição de probabilidade da variável aleatória não implica em conhecer a distribuição da amostragem do estimador, sendo que, muitas vezes, a dedução teórica da distribuição de um estimador, função das variáveis aleatórias, não é uma tarefa simples analiticamente. Nessas circunstâncias, o uso do métodos *bootstrap* paramétricos se justifica.

Uma ilustração desse método é apresentado na Figura 4.

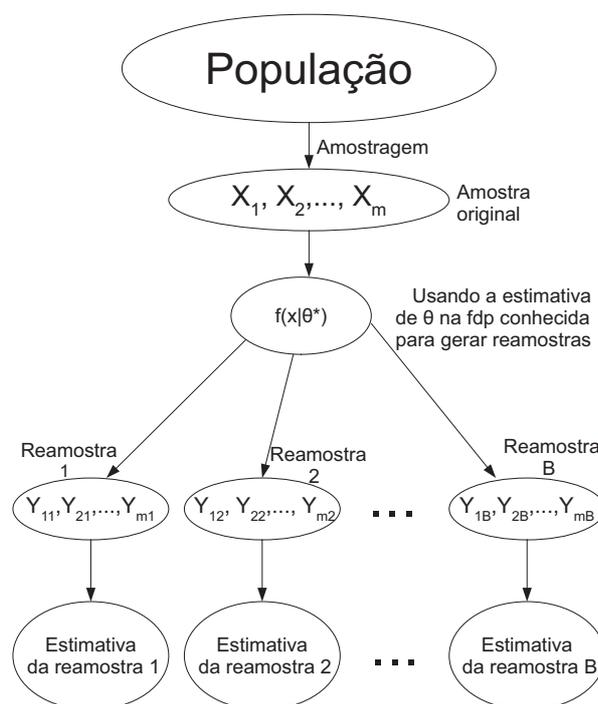


Figura 4 Ilustração do método de *bootstrap* paramétrico

NOTA:  $\theta^*$  é a estimativa de  $\theta$ .

De acordo com Ferreira (2013), o uso de estimativas dos parâmetros para obter uma estimativa da distribuição da variável aleatória é a característica principal que diferencia os métodos Monte Carlo do *bootstrap* paramétrico.

Segundo Ferreira (2013), a aplicação do método *bootstrap* divide-se em dois problemas fundamentais da estatística. O primeiro é o da estimação de um parâmetro de interesse por meio de intervalo de confiança e o segundo refere-se aos testes de hipóteses de interesse sobre o parâmetro. Na sequência, abordam-se estes dois problemas por meio do método *bootstrap*.

### **Estimação**

Há diferentes maneiras de calcular intervalos de confiança *bootstrap* e uma das mais importantes é utilizando-se o método *bootstrap* percentis simples, apresentado por Ferreira (2009), da seguinte forma:

#### **Intervalo de confiança utilizando o método *bootstrap* de percentis simples sobre a média de uma população qualquer**

Este método foi criado por Efron (1979), sendo um dos mais usados, principalmente pelo fato de não fazer suposição a respeito da distribuição do estimador, nesse caso de  $\bar{X}$ , permitindo obter intervalos com confiança  $1 - \alpha$  para  $\mu$ .

Para estimação desse intervalo, o procedimento é simples. Para o caso não paramétrico, basta obter estimativas de interesse. No presente trabalho está sendo considerada a média, em cada reamostra que foi gerada da amostra original. Após encontrar a quantidade de estimativa desejada, basta ordená-las de maneira crescente, tendo-se, assim, uma distribuição *bootstrap* de  $\bar{X}$ .

Seja  $\bar{X}_{boot, \frac{\alpha}{2}}$  e  $\bar{X}_{boot, 1 - \frac{\alpha}{2}}$  os quantis dessa distribuição. O intervalo de confiança *bootstrap* de percentis simples para a média de uma população qualquer

é:

$$IC_{1-\alpha}(\mu) : \left[ \bar{X}_{boot, \frac{\alpha}{2}}; \bar{X}_{boot, 1-\frac{\alpha}{2}} \right]$$

Para o caso paramétrico, o procedimento também é simples. Basta obter estimativas em cada amostra aleatória que foi gerada da distribuição de probabilidade considerada. De acordo com Ferreira (2013), as estimativas são ordenadas na distribuição *bootstrap*, construída dessa forma e os quantis  $100\frac{\alpha}{2}\%$  e  $100(1 - \frac{\alpha}{2})\%$  são determinados. Com esses quantis, tem-se os limites do intervalo de  $100(1 - \alpha)\%$  confiança *bootstrap* almejado.

### Testes de Hipóteses

De acordo com Ferreira (2013), para desenvolver um método *bootstrap* para realizar o teste de hipótese, devem-se considerar alguns aspectos. Primeiro, deve-se observar que o teste é baseado sempre na distribuição de uma estatística. O segundo é a imposição da hipótese nula durante o processo de obtenção da distribuição *bootstrap* da estatística do teste. O terceiro aspecto é que a distribuição nula *bootstrap* da estatística do teste deve ser usada, em geral, para obtenção de valores-*p* e não para intervalos de confiança.

De acordo com Ferreira (2009), para realizar testes de hipóteses *bootstrap*, é razoável pensar em utilizar o processo de estimação por intervalo de confiança, pois se tratam de procedimentos equivalentes, embora com objetivos distintos. Inicialmente, se constrói o intervalo de confiança. Assim, a decisão de uma hipótese pode ser tomada confrontando-se o valor hipotético com o intervalo de confiança obtido. No caso de o valor hipotético pertencer ao intervalo, não se rejeita a hipótese  $H_0$  e, caso contrário, rejeita-se  $H_0$ .

Note que quando a hipótese nula for do tipo  $H_0 : \mu = \mu_0$ , o intervalo deve ser do tipo  $[LI, LS]$ , em que  $LI$  é o limite inferior e  $LS$  é o limite superior; quando for  $H_0 : \mu \geq \mu_0$ , então, o intervalo é  $[LI, \infty)$  e, se for  $H_0 : \mu \leq \mu_0$  o intervalo é  $(-\infty, LS]$ .

Segundo Ferreira (2009), o teste de hipóteses pode ser realizado sem a necessidade de usar intervalo de confiança. A seguir, é descrito para a quantidade baseada no pivô  $t_{boot}$ .

Para testar a hipótese,

$$\begin{cases} H_0 : \mu = \mu_0 \\ H_1 : \mu \neq \mu_0 \end{cases}$$

a amostra deve ser reamostrada  $B$  vezes com reposição, formando reamostras de mesmo tamanho. A estatística  $t_{boot} = \frac{\bar{X}_{boot} - \bar{X}}{\frac{S_{boot}}{\sqrt{n}}}$  é computada em cada uma.

Os quantis  $t_{boot, \frac{\alpha}{2}}$  e  $t_{boot, 1-\frac{\alpha}{2}}$  são obtidos da distribuição *bootstrap* de  $t_{boot}$  e a rejeição de  $H_0$  fica definida por:

$$t_c \leq t_{boot, \frac{\alpha}{2}} \text{ e } t_c \geq t_{boot, 1-\frac{\alpha}{2}},$$

em que  $t_c = \frac{\bar{X} - \mu_0}{\frac{S}{\sqrt{n}}}$ .

Para os testes das hipóteses  $H_0 : \mu \geq \mu_0$  e  $H_0 : \mu \leq \mu_0$  as regiões críticas são definidas, respectivamente, por:

$$t_c \leq t_{boot, \alpha} \text{ e } t_c \geq t_{boot, 1-\alpha},$$

No estudo da vida de prateleira, o teste  $t$  para amostras emparelhadas pode ser outra ferramenta importante, podendo ser até melhor do que o *IQS*.

## 2.5 Teste $t$ para amostras emparelhadas

Ayres et al. (2010) definem uma amostra emparelhada como aquela retirada de uma população em que a mesma variável é mensurada antes e depois de um procedimento estabelecido pelo investigador.

De acordo com Cecon et al. (2012), se os dados das duas amostras são emparelhados, faz sentido calcular as diferenças correspondentes a cada par de valores, reduzindo assim os dados a uma única amostra de  $m$  diferenças. Por outro lado, testar a hipótese de que a diferença entre as médias das duas populações emparelhadas seja igual a certo valor  $\Delta$  equivale a testar a hipótese de que a média de todas as diferenças seja igual a  $\Delta$ , o que decorre das propriedades da média.

Seja  $D = X_1 - X_2$ , em que  $X_1$  é a amostra 1 e  $X_2$  é a amostra 2, ambas com mesmo tamanho. Então,

$$\mu_D = E(D) = E[X_1 - X_2] = E[X_1] - E[X_2] = \mu_1 - \mu_2.$$

O teste  $t$  para amostras emparelhadas tem como objetivo testar a hipótese de que a diferença entre as médias das duas populações emparelhadas seja igual a certo valor  $\Delta$ . Quando o objetivo é testar que não há diferença entre as médias, o valor de  $\Delta$  é igual a 0. O estimador de  $\mu_D$ , com  $D_i = X_{1i} - X_{2i}$ , é dado por:

$$\bar{D} = \frac{\sum_{i=1}^m D_i}{m},$$

Segundo Ferreira (2009), o teste  $t$  para amostras emparelhadas pressupõe que as duas amostras aleatórias,  $X_1$  e  $X_2$ , seguem uma distribuição normal bivariada (ver APÊNDICE A), o que, formalmente, caracteriza os dados ditos emparelhados. Das propriedades da distribuição normal bivariada, sabe-se que qualquer

combinação linear das duas variáveis envolvidas tem distribuição normal univariada com média e variância facilmente determináveis. Assim, a combinação linear dada por  $D = X_1 - X_2$  tem distribuição normal univariada.

No estudo da vida de prateleira, o que mais faz sentido é testar se a qualidade sensorial do produto manteve-se, melhorou ou se piorou. Esse par de hipóteses é um caso unilateral a direita, dado a seguir:

$$\begin{cases} H_0 : \mu_D = \mu_X - \mu_Y \leq 0 \\ H_1 : \mu_D = \mu_X - \mu_Y > 0 \end{cases}$$

Note que a hipótese alternativa ( $H_1$ ) é igual a  $\mu_D > 0$ , que implica que  $\bar{X} > \bar{Y}$ , indicando, assim, que a qualidade sensorial do produto piorou.

Para realização deste teste, devem-se seguir os passos a seguir:

- 1) enunciar o par de hipóteses;
- 2) fixar o nível de significância ( $\alpha$ );
- 3) determinar a estatística de teste apropriada e sua distribuição amostral:

$$t_{calc} = \frac{\bar{D} - \mu_D}{S_{\bar{D}}},$$

em que sob  $H_0 : \mu_D = 0$ , tem-se  $t_{calc} = \frac{\bar{D}}{S_{\bar{D}}}$ ,

$$\text{com } S_D^2 = \frac{\sum_{i=1}^m D_i^2 - \frac{\left(\sum_{i=1}^m D_i\right)^2}{m}}{m-1} \text{ e } S_{\bar{D}} = \sqrt{\frac{S_D^2}{m}} = \frac{S_D}{\sqrt{m}}.$$

A distribuição amostral é dada a seguir, sob  $H_0$ :

$$t_{calc} \sim t_{m-1},$$

em que  $m$  é o tamanho amostral e  $m - 1$  são os graus de liberdade;

- 4) determinar os valores da distribuição  $t$  que delimitam a região crítica, que é dada pelo conjunto de valores da estatística de teste que leva à rejeição de  $H_0$ , em função

do nível de significância e dos graus de liberdade. Os valores da distribuição  $t$  podem ser consultados na Tabela apresentada por Ferreira (2009);

- 5) avaliar, por intermédio dos elementos amostrais, o valor da estatística do teste;
- 6) concluir pela rejeição ou não rejeição de  $H_0$  pela comparação do valor obtido no passo anterior com a região crítica determinada no passo 4).

### **Conclusão para o caso unilateral à direita**

Se  $t_{calc} \leq t_{1-\alpha, m-1}$ , não rejeita-se a hipótese nula, ou seja, não existe diferença significativa entre as condições analisadas.

Se  $t_{calc} > t_{1-\alpha, m-1}$ , rejeita-se a hipótese nula, ou seja, a média da amostra A é maior que a média da amostra B.

O software R (R CORE TEAM, 2013) disponibiliza uma função que realiza o teste  $t$  para amostras emparelhadas, por meio da rotina do APÊNDICE F.

## **2.6 Erro tipo I, erro tipo II, coeficiente de confiança e poder de teste**

O pesquisador depara-se, muitas vezes, com a necessidade de testar hipóteses sobre parâmetros populacionais. Ao se tomar uma decisão, de rejeição ou não rejeição da hipótese nula  $H_0$  (é aquela que descreve aquilo que suspeita), é possível estar incorrendo em erros. Segundo Ferreira e Oliveira (2008), o primeiro desses chama-se erro tipo I que consiste em rejeitar-se  $H_0$  quando ela é verdadeira e o segundo erro é aquele cometido quando não se rejeita  $H_0$  quando ela é falsa, chamado erro tipo II. No entanto, quando não se rejeita  $H_0$  e ela é verdadeira (coeficiente de confiança) ou, quando se rejeita  $H_0$  quando realmente ela é falsa (poder do teste), consiste numa decisão correta.

Estes conceitos estão sintetizados na Tabela 3.

Tabela 3 Resultados possíveis de um teste de hipóteses e suas probabilidades

DECISÃO TOMADA	REALIDADE	
	$H_0$ é verdadeira	$H_0$ é falsa
$H_0$ é não rejeitada	Decisão correta Probabilidade: $1-\alpha$ (Coeficiente de confiança)	Decisão errada Probabilidade: $\beta$ (Erro tipo II)
$H_0$ é rejeitada	Decisão errada Probabilidade: $\alpha$ (Erro tipo I)	Decisão correta Probabilidade: $1-\beta$ (Poder do teste)
Probabilidade total	$(1-\alpha)+\alpha=1$	$(1+\beta)+\beta=1$

Vale notar que o complementar da probabilidade da ocorrência do erro tipo II é o poder de teste. A função poder desempenha o mesmo papel nos testes de  $H_0$ , sendo útil em dizer o quão bom é um teste particular (MOOD; GRAYBILL; BOES, 1974).

Esses erros podem acontecer numa situação real, mas as probabilidades de estar incorrendo um deles devem ser minimizadas. A probabilidade de incorrer no erro tipo I é conhecida e fixada pelo pesquisador. Por outro lado, a probabilidade do erro tipo II não é conhecida e nem pode ser especificada. O que se sabe é que, para um valor conhecido do tamanho da amostra, o valor do erro tipo I é relacionado inversamente ao valor do erro tipo II.

De acordo com Ferreira (2009), baixar a probabilidade de se incorrer no erro tipo I está associado à alta probabilidade de se cometer o erro tipo II e o único modo de se causar redução simultânea de ambos é aumentar o tamanho da amostra.

Um teste estatístico pode ser exato, conservador ou liberal, de acordo com as definições:

1. Exato: quando o nível de significância real (a taxa de erro tipo I resultada) é igual ao nível de significância nominal (fixado previamente pelo pesquisador);
2. Conservador: quando o nível de significância real é maior que o nível de significância nominal;
3. Liberal: quando o nível de significância real é menor que o nível de significância nominal.

Frequentemente, para avaliar um teste estatístico, é mais fácil obter informações numéricas do que analíticas sobre o poder e taxas de erro tipo I. Uma maneira de obter informações numéricas é por meio de simulações Monte Carlo.

Vale notar que, uma vez que essas taxas de erro tipo I e poder foram estimadas, elas não estão livres de erro. Para melhores estimativas, diversos autores aconselham que sejam realizadas, pelo menos, 1.000 repetições.

### 3 MATERIAL E MÉTODOS

Neste tópico, são descritos o material e os métodos necessários.

#### 3.1 Material

Para o desenvolvimento deste trabalho, foi utilizado um notebook com a seguinte configuração: marca Dell Inspiron<sup>TM</sup> 1525, 3Gb de memória RAM, 160Gb de HD, processador Intel<sup>®</sup> Core<sup>TM</sup> 2 Duo T5800 e sistema operacional Windows Vista<sup>®</sup> Home Premium original com SP1.

A pesquisa bibliográfica foi realizada por meio de livros, artigos científicos e dissertações que versam sobre o tema de maneira condizente com os propósitos para o desenvolvimento do presente trabalho.

Foram analisados dados reais de berinjelas, fornecidos pela professora Flávia Della Lucia, do Departamento de Nutrição da Unifal-MG. Na amostragem, as análises das berinjelas, tanto no início, quanto no fim da vida de prateleira, foram realizadas no mesmo dia, pelos mesmos consumidores. Foi utilizado uma escala hedônica de 9 pontos, para que os consumidores pudessem expressar suas notas de aceitação global e o número de consumidores foi igual a 50.

Foi utilizado o software (R CORE TEAM, 2013) para a criação e aplicação dos testes, a realização das simulações e a representação gráfica.

#### 3.2 Métodos

Para estimar um intervalo de confiança para o *IQS* e testar as hipóteses de interesse, foi realizada uma inferência via computação intensiva, utilizando-se o

método *bootstrap*. No APÊNDICE D encontra-se a justificativa para o uso desse tipo de inferência.

No estudo da vida de prateleira, a hipótese que faz sentido, e que é desejada pelas empresas de produtos alimentícios, é saber se a qualidade do produto se manteve, melhorou ou piorou. Portanto, no presente trabalho, o par de hipóteses adotado foi:

$$\begin{cases} H_0 : IQS \geq 1 \\ H_1 : IQS < 1 \end{cases}$$

No presente trabalho, o tipo de emparelhamento da amostra adotado foi o mesmo do experimento das berinjelas, emparelhado no consumidor e não emparelhado no produto, que, na prática, é o mais viável. Para conhecer os outros tipos de emparelhamentos, ver APÊNDICE C.

No presente trabalho pressupôs-se que:

1. diferentes consumidores não degustariam o produto no mesmo recipiente, cada consumidor teria o produto para analisar num recipiente próprio, pois a higiene é considerada como um fator importante e cada consumidor analisaria somente uma amostra, no início e no fim da vida de prateleira;
2. o número de pontos da escala hedônica utilizado no início da vida de prateleira deveria ser o mesmo no fim, para que  $H_0$  fosse satisfeita, ou seja, para que o  $IQS$  seja igual a 1, tanto a média no início quanto no fim, deveria ser igual;
3. nas escalas hedônicas de  $n$  pontos, seriam atribuídos postos de 1 a  $n$ .

Para realização dos testes de Shapiro-Wilk para verificar a normalidade dos dados de berinjela e das suas diferenças (entre os dados no início da vida de prateleira e no fim), foi utilizado a função `shapiro.test()` do software R.

O par de hipóteses a ser analisado pelo teste de Shapiro-Wilk é dado por:

$$\begin{cases} H_0 : \text{Os dados seguem uma distribuição Normal} \\ H_1 : \text{Os dados não seguem uma distribuição Normal} \end{cases}$$

Na criação do teste *bootstrap* paramétrico e para realização das simulações dos três testes, foi criada uma função que simula dados multinomiais com coeficiente de correlação ( $\rho$ ) desejado entre a amostra no início e no fim, conforme no estudo da vida de prateleira.

### 3.2.1 Simulação de dados multinomiais com $\rho$ desejado

Conforme pode ser visto no APÊNDICE D, tanto a amostra retirada no início da vida de prateleira quanto a retirada no fim seguem uma distribuição Multinomial.

Neste tópico, o objetivo é apresentar a função criada chamada `rCorrelatedMultnomial()` que simula amostra com dados multinomiais com  $\rho$  desejado. Essa função está disponível no APÊNDICE F.

Essa simulação é feita sob uma distribuição normal bivariada com médias iguais a 0 e covariância ( $\Sigma$ ):

$$\begin{aligned} \Sigma &= \begin{bmatrix} \sigma_X^2 & \rho_{X,Y}\sigma_X\sigma_Y \\ \rho_{Y,X}\sigma_Y\sigma_X & \sigma_Y^2 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 1 & \rho_{X,Y} \\ \rho_{Y,X} & 1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Primeiramente, o usuário fornece o número de consumidores ( $m$ ), o coeficiente de correlação ( $\rho$ ), os vetores de probabilidades de sucesso no início e no fim da vida de prateleira ( $p_{iI}$  e  $p_{iF}$ ), respectivamente.

Com  $p_{iI}$  e  $p_{iF}$ , são criadas classes que representam os quantis das marginais (normais univariadas) correspondentes a divisão da escala real, por exemplo:

$$[-\infty, q_{1I}, q_{2I}, \dots, q_{(n-1)I}, \infty],$$

$$[-\infty, q_{1F}, q_{2F}, \dots, q_{(n-1)F}, \infty],$$

em que  $q_{iI}$  e  $q_{iF}$ , com  $i = 1, \dots, n - 1$ ; são os  $i$ -ésimos quantis da normal padrão obtida a partir das probabilidades de sucesso acumuladas no início da vida de prateleira e no fim, respectivamente.

Para melhor compreensão, o processo de obtenção dos quantis da normal padrão a partir de  $p_{iI}$  é ilustrado na Figura 5.

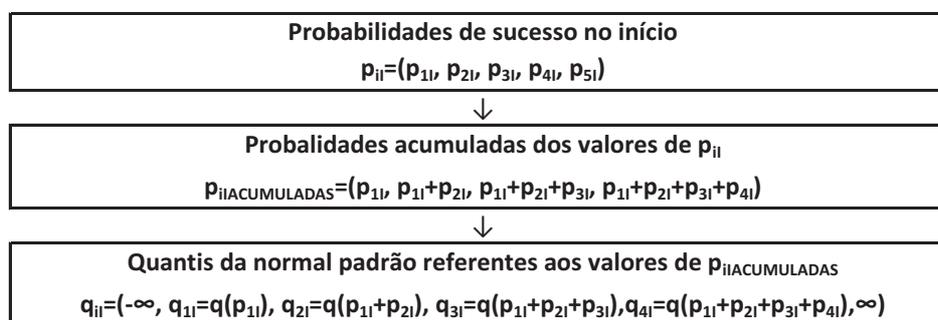


Figura 5 Obtenção dos quantis da normal padrão, considerando  $p_{iI}$

É análogo a obtenção dos quantis da normal padrão, considerando  $p_{iF}$ .

Após ter obtido os quantis, a simulação dos dados multinomiais com  $\rho$  desejado é realizado da seguinte forma:

Para cada par gerado  $x = (x_1, x_2)$  da normal bivariada, é verificado qual classe os valores  $x_1$  e  $x_2$  pertencem, recebendo novos valores categorizados  $y_1$  e  $y_2$ , respectivamente, pertencentes ao conjunto  $\{1, 2, \dots, n\}$ , retornando o vetor  $y = (y_1, y_2)$  multinomial bivariado com correlação latente (na escala contínua)  $\rho$ .

Na Figura 6 ilustra-se o processo de categorização da normal bivariada.

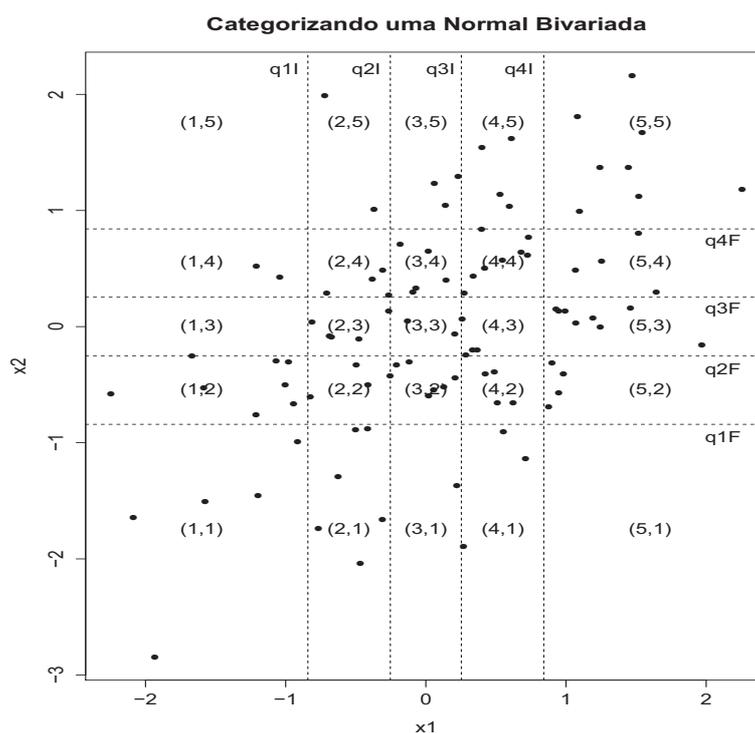


Figura 6 Categorizando uma Normal Bivariada

Observa-se, no exemplo da Figura 6, que cada ponto é um par de valores da normal bivariada que é categorizado recebendo um novo par de valores multinomial bivariado que é dado dentro do retângulo que ele pertence. Um exemplo para melhor compreensão, utilizando a Figura 6, é o par de valores  $x = (1, 88; 1, 93)$ ; pertencente ao retângulo que possui o par de valores  $y = (5, 5)$ . Logo, é este o

novo par de valores multinomial bivariado que a categorização resulta.

Com esse procedimento, gera-se uma matriz  $m \times 2$  de dados, sendo a primeira e a segunda coluna respostas multinomiais de  $n$  classes, representando o início da vida de prateleira e o fim, respectivamente.

Para encontrar o valor do *IQS* paramétrico para os valores adotados de  $p_{iI}$  e  $p_{iF}$ , deve-se encontrar o valor da média no início e no fim da vida de prateleira, e calcular a razão entre elas. As médias são calculadas da seguinte forma:

Seja  $n$  classes com  $p_{iI} = \{p_{1I}, p_{2I}, \dots, p_{nI}\}$  e  $p_{iF} = \{p_{1F}, p_{2F}, \dots, p_{nF}\}$ , ambas com soma igual a 1. A média, no início ( $\mu_X$ ) e no fim ( $\mu_Y$ ), é dada por

$$\mu_X = \sum_{i=1}^n i p_{iI} \text{ e } \mu_Y = \sum_{i=1}^n i p_{iF}.$$

Utilizando-se inferência via computação intensiva, foram propostos dois testes para o *IQS*: o *bootstrap* não paramétrico e o paramétrico:

### 3.2.2 Proposta de um teste *bootstrap* não paramétrico (*BNP*) para o *IQS*

Para realizar o teste *BNP* para o *IQS* devem-se fornecer três informações que são:

1. amostra original: os dados de vida de prateleira que deseja avaliar;
2. número de reamostras: muitos autores recomendam um número maior ou igual a 1.000;
3. nível de significância: os níveis mais especificados são 1%, 5% ou 10%.

Após fornecer essas informações na função `bootstrapNP` criada neste trabalho, disponível no APÊNDICE F, o processo do teste é ilustrado seguindo o exemplo da Figura 7.

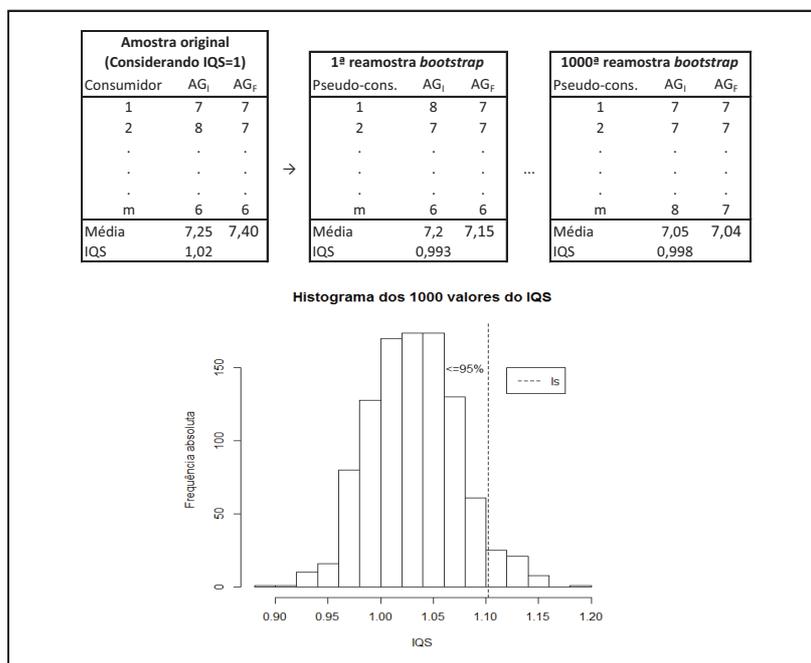


Figura 7 Exemplo ilustrativo do processo do teste *BNP*

em que a amostra original são dados simulados de acordo com a hipótese nula  $H_0$  :  $IQS=1$ ,  $m$  é o número de consumidores, *Pseudo – cons.* são os consumidores sorteados para tal reamostra e  $ls$  é o limite superior [quantil  $(1-\alpha)$ ] encontrado após as 1000 reamostras serem realizadas.

Observando-se a Figura 7, a partir da amostra original são realizados sorteios com reposição, resultando reamostras de mesmo tamanho. Estes sorteios são realizados em pares, formados pelos valores do início e do fim da vida de prateleira, devido ao emparelhamento no consumidor (caso II da Tabela 11).

Para cada reamostra, o  $IQS$  é calculado e seu valor armazenado. Como foram realizadas 1.000 reamostras, a rotina irá fornecer 1.000 valores do  $IQS$  que são ordenados de forma crescente e encontrando-se, assim, o  $ls$ .

Observa-se, na Figura 7, que o histograma representa os 1.000 valores do  $IQS$  e a linha tracejada na vertical indica o  $ls$ , considerando o quantil de 95%.

Note que o teste é unilateral à esquerda. O critério de decisão desse teste é realizado da seguinte forma:

Como a hipótese nula ( $H_0$ ) é  $IQS \geq 1$ , se  $ls \geq 1$ , não se rejeita  $H_0$ , pois o valor 1 está contido no intervalo  $(0, ls]$  com 95% de confiança.

Caso contrário, ou seja, se  $ls < 1$ , rejeita-se  $H_0$ , pois o valor 1 não está contido no intervalo  $(0, ls]$  com 95% de confiança.

### 3.2.3 Proposta de um teste *bootstrap* paramétrico (*BP*) para o $IQS$

O teste *BP* para o  $IQS$  é realizado por meio da função `bootParIQS()` criada neste trabalho e disponível no APÊNDICE F. A implementação dessa função realiza os seguintes procedimentos:

Primeiramente, é calculado o valor do  $IQS$  da amostra original. De acordo com as frequências relativas dos valores dessa amostra, o vetor de probabilidades de sucesso no início ( $\pi_1$ ) é estimado. Note que o vetor no fim ( $\pi_2$ ) é igual ao do início por estar sendo imposta a hipótese nula  $H_0 : IQS = 1$ . Esse processo de estimação é realizado conforme o exemplo ilustrativo da Figura 8.

Amostra original		
Consumidor	$AG_i$	$AG_f$
1	5	4
2	5	4
3	4	3
4	3	2
5	4	3
Média	4,2	3,2
$IQS$	0,76	

→

Probabilidades de sucesso estimadas
$\pi_1 = \pi_2 = (fr_1; fr_2; fr_3; fr_4; fr_5) = (0; 0,1; 0,3; 0,4; 0,2)$

Figura 8 Exemplo de estimação das probabilidades de sucesso de uma amostra

em que  $fr_i$  é a frequência relativa da nota  $i$ .

O próximo passo é calcular o coeficiente de correlação de Spearman ( $\rho$ ) entre a amostra no início e no fim, usando a função  $cor()$  do software R. Para dados categóricos, a correlação simulada é menor que o  $\rho$  (latente ou subjacente - modelo contínuo), portanto, mesmo usando a correlação de Spearman, que é a melhor estimativa dentre as comuns, ela irá subestimar o  $\rho$  real.

Com os valores de  $\pi_1$  e  $\pi_2$  estimados,  $\rho$  e  $m$  obtidos por meio da amostra original, é simulado uma amostra *bootstrap*, conforme descrito na seção 3.2.1. Nessa amostra, usando a função  $bootSamples()$  do APÊNDICE F, é calculado o valor do *IQS*, recebendo o nome de *IQSb*.

Esse processo de simulação de amostras *bootstrap* é realizado  $B$  vezes, sendo encontrados  $B$  valores de *IQSb*. Com esses valores, é criado um vetor acrescido do valor do *IQS* da amostra original. Com esse vetor, é encontrada a proporção de vezes que os valores contidos nele são menores que o *IQS* da amostra original. Essa proporção é o valor- $p$  do teste *BP*.

Um exemplo ilustrativo desse processo é dado na Figura 9, com  $B=1.000$ .

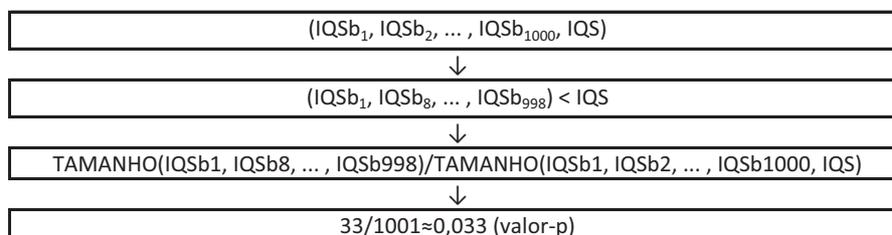


Figura 9 Exemplo do processo de obtenção do valor- $p$  do teste *BP*

O critério de decisão do teste *BP* é realizado da seguinte forma:

Se o valor- $p \geq \alpha$ , não se rejeita  $H_0$ , ou seja, o produto analisado manteve sua qualidade sensorial. Caso contrário, se valor- $p < \alpha$ , rejeita-se  $H_0$ , ou seja, a

qualidade sensorial do produto analisado piorou.

Nota-se que esse teste recebe o nome de *bootstrap* paramétrico, pelo fato de estar utilizando as estimativas dos parâmetros desconhecidos (probabilidades de sucesso da população), por meio da amostra aleatória original disponível para gerar dados da distribuição de interesse, que é a normal bivariada.

Foi também utilizado o teste *t* para amostras emparelhadas. Todos os testes foram avaliados, via simulação Monte Carlo, computando-se suas taxas de erro tipo I e poder. Com essa avaliação, foi realizada uma comparação entre eles, em que foram retiradas informações importantes.

Vale notar que as rotinas dessas simulações Monte Carlo estão disponíveis no APÊNDICE F.

### 3.2.4 Valores avaliados nas simulações Monte Carlo

Nas simulações Monte Carlo, variou-se:

1. o número de consumidores ( $m = 10, 30, 50, 100$  e  $200$ ), sendo o mesmo no início e no fim;
2. o número de pontos da escala hedônica ( $n = 5, 7$  e  $9$ );
3. a correlação entre as amostras no início e no fim da vida de prateleira ( $\rho = 0,5; 0,7$  e  $0,9$ );
4. o nível de significância ( $\alpha = 0,01; 0,05$  e  $0,1$ ; sendo os mais utilizados na literatura;
5. o valor paramétrico do *IQS*, sendo  $IQS = 1$  (para avaliação da taxa de erro tipo I) e  $IQS = 0,92; 0,85; 0,71$  e  $0,5$  (para avaliação da taxa de poder).

Nota-se que esses valores de  $\rho$  foram adotados pelo fato de que uma das pressuposições do presente trabalho é a de que a amostra seja emparelhada no consumidor e não emparelhada no produto. Com esse emparelhamento no consumidor, tem-se uma correlação existente entre a amostra no início e no fim. Já nos produtos, mesmo não havendo emparelhamento, pode ocorrer de serem fabricados idênticos ou muito parecidos, havendo, assim, também, uma correlação envolvida.

Para encontrar os valores paramétricos dos  $IQS's$  que foram adotados, os vetores de probabilidades de sucesso no início e no fim, de acordo com o número de pontos da escala hedônica ( $n$ ), são apresentados no APÊNDICE E.

### **3.2.5 Respostas a serem obtidas por meio da simulação Monte Carlo**

Por meio das simulações Monte Carlo, foi definido:

1. se o número de consumidores interfere nos resultados;
2. se o número de pontos da escala hedônica interfere nos resultados;
3. se o grau de correlação das amostras interfere nos resultados;
4. se o teste  $BNP$ ,  $BP$  e  $t$  para amostras emparelhadas é exato, conservador ou liberal;
5. qual teste apresenta a menor e a maior taxa de erro tipo e qual controla;
6. qual o valor do  $IQS$  que deixa o teste o mais poderoso possível, sendo fixado um tamanho de amostra;
7. qual dos três testes é o mais poderoso.

### 3.2.6 Intervalo de confiança e teste de hipóteses para o parâmetro $p$ de uma binomial

Para verificar se o teste  $BNP$ ,  $BP$  e  $t$  para amostras emparelhadas são exatos, foi utilizado o teste de hipóteses para o parâmetro  $p$  de uma binomial, que também recebe o nome de teste de hipóteses exato.

Esse teste é da seguinte forma:

O par de hipóteses a ser avaliado é:

$$\begin{cases} H_0 : p = p_0 \\ H_1 : p \neq p_0 \end{cases}$$

Conforme já mencionado anteriormente, o teste de hipóteses pode ser realizado usando-se um intervalo de confiança, ou seja, se o valor a ser testado pertencer ao intervalo, não se rejeita  $H_0$ , se não pertencer, rejeita-se  $H_0$ .

O intervalo de confiança para o parâmetro  $p$  de uma binomial que é utilizado para aplicar o teste de hipóteses nos resultados das taxas de erro tipo I, via simulação Monte Carlo, é dado por

$$IC_{1-\alpha}(p) : \left[ \frac{1}{1 + \frac{(n-y+1)F_{\frac{\alpha}{2}; v_1=2(n-y+1), v_2=2y}}{y}}; \frac{1}{1 + \frac{(n-y)}{(y+1)F_{\frac{\alpha}{2}; v_1=2(y+1), v_2=2(n-y)}}} \right]$$

em que  $n$  é o tamanho da amostra,  $y$  é o número de sucessos,  $F_{\alpha/2}$  é o quantil superior da distribuição F com  $v_1$  e  $v_2$  graus de liberdade.

## 4 RESULTADOS E DISCUSSÕES

Neste tópico, são apresentados a formalização da função  $IQS$  e algumas propriedades; a simulação Monte Carlo da taxa de erro tipo I e do poder dos testes  $BNP$ ,  $BP$  e  $t$  para amostras emparelhadas com seus resultados; a comparação entre os três testes e um estudo preliminar e aplicação deles nos dados de berinjela.

### 4.1 Formalização da função $IQS$

Primeiramente, o  $IQS$  recebe o nome de função de  $A$  em  $B$ , pois é uma relação que associa a cada elemento  $(x, y) \in A$  um único elemento  $w \in B$ . A função  $IQS$  pode ser indicada por  $IQS : A \rightarrow B$ .

O domínio ( $A$ ), contradomínio ( $B$ ) e imagem da função  $IQS$  serão apresentados considerando que o menor valor atribuído a escala hedônica seja 1, o que, na prática, é, usualmente, adotado. Outra pressuposição é que o número de consumidores no início da vida de prateleira seja igual ao do fim.

O domínio da função  $IQS$  é dado por:

$$D_{IQS} = \{X = \{x_i\}, Y = \{y_i\} | x_i, y_i \in (1, n) \text{ com } i = 1, \dots, m \text{ e } n, m \in \mathbb{N}^*\},$$

em que  $n$  é o número de pontos da escala hedônica,  $m$  é o número de consumidores,  $x_i$  é a nota do  $i$ -ésimo consumidor no início da vida de prateleira do produto e  $y_i$  é a nota do  $i$ -ésimo consumidor no fim da vida de prateleira do produto.

O contradomínio da função  $IQS$  é dado por:

$$CD_{IQS} = \left\{ w \in \left( \frac{1}{n}, n \right) \right\}.$$

A imagem da função  $IQS$  é dada por:

$$Im_{IQS} = \left\{ \frac{m+j}{m+k} \text{ com } j = 0, \dots, m(n-1) \text{ e } k = 0, \dots, m(n-1) \right\},$$

em que  $Im_{IQS} = \{w \in B; w = IQS(x, y) \text{ para todos } (x, y) \in A\}$ .

### Propriedades:

i) A função  $IQS$  não é injetora.

**Prova:** Seja  $m = 4$  consumidores  $A$  e  $m = 4$  consumidores  $B$ , considerando escala hedônica de  $n = 3$  pontos.

Suponha que as notas dos consumidores  $A$  no início da vida de prateleira seja  $X_A = (1, 1, 2, 2)$  e no fim seja  $Y_A = (1, 1, 1, 2)$ . Logo, o  $IQS$  estimado será:

$$\widehat{IQS}(X_A, Y_A) = \frac{\bar{Y}_A}{\bar{X}_A} = \frac{5}{6}.$$

Agora, suponha que as notas dos consumidores  $B$  no início seja  $X_B = (1, 1, 3, 1)$  e no fim seja  $Y_B = (1, 2, 1, 1)$ . Logo, o  $IQS$  estimado será:

$$\widehat{IQS}(X_B, Y_B) = \frac{\bar{Y}_B}{\bar{X}_B} = \frac{5}{6}.$$

Pode-se observar que as notas dos consumidores  $A$  são diferentes dos consumidores  $B$ , ou seja,

$$(X_A, Y_A) \neq (X_B, Y_B).$$

Mas a estimativa do  $IQS$  considerando os dados dos consumidores  $A$  foi igual a estimativa do  $IQS$ , considerando os dados dos consumidores  $B$ , o que mostra que essa função não é injetora. ■

ii) A função  $IQS$  não é sobrejetora.

**Prova:** Seja  $m = 2$  consumidores e escala hedônica de  $n = 2$  pontos.

O contradomínio da função  $IQS$  é dado por:

$$CD_{IQS} = B = \left\{ w \in \left( \frac{1}{2}, 2 \right) \right\}.$$

A imagem da função  $IQS$  é dada por:

$$Im_{IQS} = \left\{ \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, 1, \frac{4}{3}, \frac{3}{2}, 2 \right\}.$$

Para que a função  $IQS$  seja sobrejetora, a imagem deve ser igual ao contradomínio ( $CD_{IQS} = Im_{IQS}$ ).

Neste exemplo, observe que:

$$\frac{3}{5} \in CD_{IQS} \text{ e } \frac{3}{5} \notin Im_{IQS}.$$

Logo, o  $CD_{IQS} \neq Im_{IQS}$ , sendo assim a função  $IQS$  não é sobrejetora. ■

## 4.2 Inferência Via Computação Intensiva

Diante da justificativa apresentada no APÊNDICE D, foi realizado uma inferência via computação intensiva sobre o  $IQS$ .

Para melhor compreensão do leitor, os dados de berinjela foram somente utilizados nas aplicações dos testes, ilustrando seu funcionamento. Nas simulações, serão utilizados dados simulados de acordo com o  $IQS$  estabelecido.

Vale notar que nos resultados apresentados na Tabela 4, 6 e 8, foi realizado o teste para o parâmetro  $p$  de uma binomial, ou seja, foram verificados se esses

resultados pertencem aos intervalos de confiança dados a seguir, com objetivo de dizer se eles são estatisticamente iguais ao  $\alpha$  avaliado na simulação ou não.

Considerando  $\alpha=0,01$ ;  $n=1000$ ,  $y=10$  e  $\hat{p}=\frac{y}{n}=0,01$  (valor do  $\alpha$  avaliado na simulação), tem-se

$$IC_{99\%}(p) : [0,0037; 0,0213].$$

O intervalo acima informa que, quando os resultados obtidos, considerando  $\alpha$  avaliado na simulação igual a 0,01; pertencerem a este intervalo, são considerados estatisticamente iguais a 0,01; com 99% de confiança.

Considerando  $\alpha=0,01$ ;  $n=1000$ ,  $y=50$  e  $\hat{p}=\frac{y}{n}=0,05$  (valor do  $\alpha$  adotado na simulação), tem-se

$$IC_{99\%}(p) : [0,0399; 0,0705].$$

O intervalo acima informa que quando os resultados obtidos, considerando  $\alpha$  avaliado na simulação igual a 0,05; pertencerem a este intervalo, são considerados estatisticamente iguais a 0,05 com 99% de confiança.

Considerando  $\alpha=0,01$ ;  $n=1000$ ,  $y=100$  e  $\hat{p}=\frac{y}{n}=0,1$  (valor do  $\alpha$  adotado na simulação), tem-se

$$IC_{99\%}(p) : [0,0770; 0,1269].$$

O intervalo acima informa que, quando os resultados obtidos, considerando  $\alpha$  avaliado na simulação igual a 0,1; pertencerem a este intervalo, são considerados estatisticamente iguais a 0,1; com 99% de confiança.

A seguir, foi realizado avaliações das taxas de erro tipo I e poder do teste *BNP*, via simulação Monte Carlo.

#### 4.2.1 Simulação Monte Carlo do erro tipo I e poder do teste *BNP*

Primeiramente, foram avaliadas as taxas de erro tipo I, considerando o  $IQS=1$ . Para encontrar as estimativas desse erro, foi realizado, 1.000 vezes, o teste *BNP* sob a hipótese nula  $H_0 : IQS=1$ , ou seja, foram gerados 1.000 valores do  $ls$ , conforme ilustrado na Figura 10. Com esses valores, foi calculada a proporção de vezes em que  $H_0$  foi erroneamente rejeitada, ou seja, a proporção de vezes em que o valor do  $ls$  foi menor que 1.

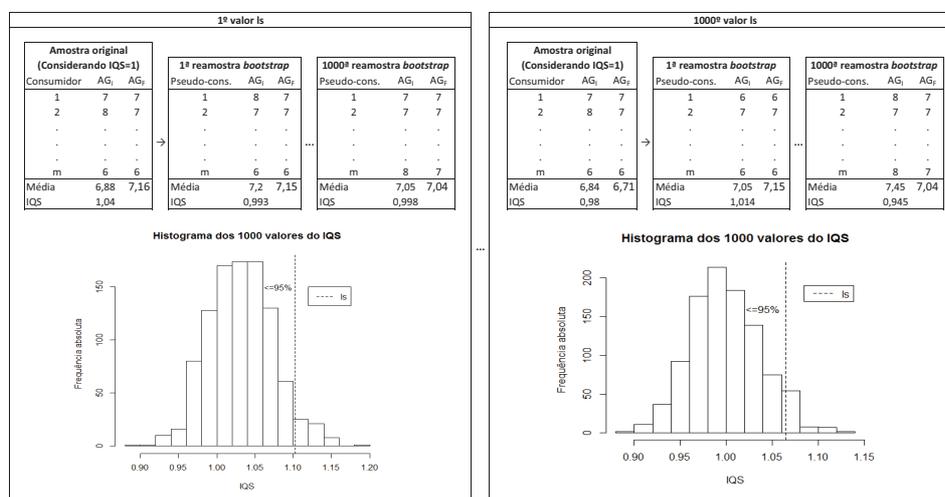


Figura 10 Exemplo ilustrativo da simulação *bootstrap* não paramétrico, considerando  $IQS=1$ , gerando 1000 valores de  $ls$

Na Tabela 4, são apresentados os resultados da simulação do erro tipo I do teste *BNP*. Pode-se dizer que, de acordo com o teste para o parâmetro  $p$  de uma binomial, a 1% de significância, quando o  $\alpha$  avaliado na simulação foi igual a 0,05 e 0,1; as taxas de erro tipo I foram, praticamente todas, estatisticamente iguais a eles, sendo assim um teste exato. Quando o  $\alpha$  avaliado foi 0,01; praticamente a metade das taxas de erro tipo I foram estatisticamente maiores do que ele, sendo

assim um teste liberal.

Quando o  $IQS=1$  e este teste for adotado, o valor de  $m$ ,  $k$  e  $\rho$  pode ser qualquer um dos avaliados, pois não interfere nos resultados. Os valores de  $\rho$  adotados, mostraram que também não interferem nos resultados.

Tabela 4 Simulação Monte Carlo do erro tipo I do teste  $BNP$ , considerando  $IQS=1$

$IQS=1$						
$\rho = 0,5$						
		Número de consumidores				
Número de pontos da EH		m=10	m=30	m=50	m=100	m=200
$\alpha = 0,01$	k=5	0,026*	0,024*	0,015	0,016	0,020
	k=7	0,028*	0,023*	0,023*	0,029*	0,023*
	k=9	0,031*	0,021	0,015	0,020	0,008
$\alpha = 0,05$	k=5	0,055	0,054	0,055	0,044	0,048
	k=7	0,074*	0,055	0,048	0,062	0,050
	k=9	0,068	0,049	0,063	0,056	0,055
$\alpha = 0,10$	k=5	0,125	0,105	0,099	0,098	0,099
	k=7	0,089	0,101	0,109	0,102	0,123
	k=9	0,114	0,094	0,099	0,115	0,105
$\rho = 0,7$						
		Número de consumidores				
Número de pontos da EH		m=10	m=30	m=50	m=100	m=200
$\alpha = 0,01$	k=5	0,033*	0,024*	0,022*	0,019	0,013
	k=7	0,027*	0,021	0,027*	0,030*	0,018
	k=9	0,034*	0,019	0,020	0,023*	0,029*
$\alpha = 0,05$	k=5	0,077*	0,048	0,058	0,044	0,047
	k=7	0,065	0,051	0,059	0,063	0,040
	k=9	0,086*	0,045	0,053	0,041	0,055
$\alpha = 0,10$	k=5	0,098	0,103	0,097	0,107	0,094
	k=7	0,121	0,113	0,105	0,092	0,111
	k=9	0,132*	0,111	0,107	0,108	0,108
$\rho = 0,9$						
		Número de consumidores				
Número de pontos da EH		m=10	m=30	m=50	m=100	m=200
$\alpha = 0,01$	k=5	0,029*	0,019	0,020	0,018	0,020
	k=7	0,041*	0,019	0,023*	0,016	0,016
	k=9	0,034*	0,018	0,018	0,018	0,020
$\alpha = 0,05$	k=5	0,060	0,064	0,058	0,050	0,055
	k=7	0,070	0,057	0,062	0,043	0,058
	k=9	0,068	0,048	0,050	0,053	0,050
$\alpha = 0,10$	k=5	0,106	0,098	0,089	0,109	0,093
	k=7	0,113	0,108	0,114	0,108	0,113
	k=9	0,106	0,100	0,107	0,106	0,126

Nota:  $EH$  significa escala hedônica.

Para encontrar a estimativa do poder do teste, o processo foi realizado da seguinte forma:

Foi realizado, 1.000 vezes, o teste *BNP* sob a hipótese alternativa  $H_1 : IQS < 1$ , ou seja, foram gerados 1.000 valores do  $ls$ , considerando  $IQS=0,92$ ; 0,85; 0,71 ou 0,5. Com esses valores, foi calculado a proporção de vezes em que a hipótese nula  $H_0 : IQS=1$  é acertadamente rejeitada, ou seja, a proporção de vezes que o valor do  $ls$  foi menor que 1. Esse processo, considerando  $IQS=0,92$ ; está ilustrado na Figura 11.

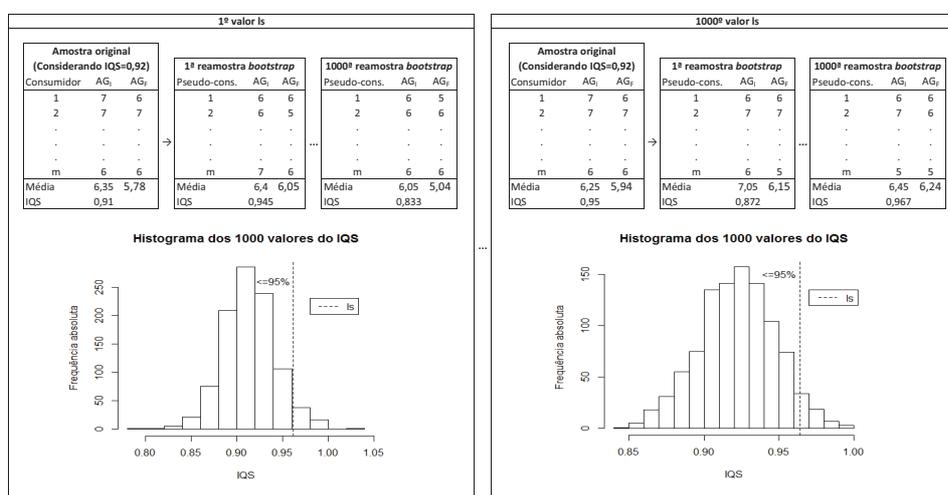


Figura 11 Simulação *bootstrap* não paramétrico, considerando  $IQS=0,92$ , gerando 1000 valores de  $ls$

Os resultados de todas as combinações possíveis, considerando o  $IQS=0,92$ ; são dados na Tabela 5. Observando estes resultados, pode-se dizer que, empiricamente, o valor de  $m$  interfere nas taxas de poder, de acordo com os valores de  $m$  avaliados, quanto maior, mais poderoso é o teste. Os valores de  $k$  avaliados não interferem nos resultados e quanto maior o valor de  $\rho$ , mais poderoso é o teste.

De acordo com os valores de  $\alpha$  avaliados, quanto maior, mais poderoso é o teste. Isso já era esperado, pelo fato de que, quando  $\alpha$  aumenta, a taxa de erro tipo II diminui e, conseqüentemente, o poder do teste aumenta (ver seção 2.6).

Tabela 5 Simulação Monte Carlo do poder do teste *BNP*, considerando  $IQS=0,92$

<i>IQS=0,92</i>						
$\rho = 0,5$						
		Número de consumidores				
Número de pontos da EH		m=10	m=30	m=50	m=100	m=200
$\alpha = 0,01$	k=5	0,105	0,109	0,187	0,337	0,614
	k=7	0,095	0,110	0,161	0,300	0,522
	k=9	0,091	0,125	0,158	0,270	0,514
$\alpha = 0,05$	k=5	0,173	0,210	0,324	0,523	0,759
	k=7	0,169	0,221	0,310	0,485	0,744
	k=9	0,179	0,238	0,313	0,402	0,692
$\alpha = 0,10$	k=5	0,227	0,346	0,455	0,668	0,861
	k=7	0,260	0,358	0,452	0,650	0,839
	k=9	0,241	0,358	0,429	0,620	0,818
$\rho = 0,7$						
		Número de consumidores				
Número de pontos da EH		m=10	m=30	m=50	m=100	m=200
$\alpha = 0,01$	k=5	0,100	0,179	0,257	0,505	0,777
	k=7	0,109	0,162	0,274	0,461	0,764
	k=9	0,130	0,149	0,242	0,449	0,712
$\alpha = 0,05$	k=5	0,191	0,314	0,423	0,669	0,911
	k=7	0,185	0,294	0,393	0,644	0,875
	k=9	0,184	0,285	0,424	0,637	0,882
$\alpha = 0,10$	k=5	0,285	0,458	0,591	0,782	0,953
	k=7	0,315	0,436	0,586	0,788	0,957
	k=9	0,292	0,429	0,554	0,756	0,944
$\rho = 0,9$						
		Número de consumidores				
Número de pontos da EH		m=10	m=30	m=50	m=100	m=200
$\alpha = 0,01$	k=5	0,155	0,333	0,500	0,797	0,982
	k=7	0,165	0,329	0,525	0,836	0,986
	k=9	0,137	0,327	0,540	0,820	0,991
$\alpha = 0,05$	k=5	0,291	0,540	0,732	0,939	0,998
	k=7	0,274	0,515	0,761	0,947	1,000
	k=9	0,293	0,532	0,736	0,945	0,998
$\alpha = 0,10$	k=5	0,378	0,667	0,841	0,971	0,999
	k=7	0,398	0,673	0,843	0,966	1,000
	k=9	0,424	0,684	0,806	0,973	1,000

As Tabelas dos próximos casos, considerando o  $IQS=0,85$ ;  $0,71$  e  $0,5$ ; são apresentadas no APÊNDICE G.

Considerando  $IQS = 0,85$  e  $0,71$ ; pode-se dizer, empiricamente, que as mesmas conclusões retiradas na Tabela 5 são válidas para estes casos.

Considerando  $IQS=0,5$ ; pode-se dizer, empiricamente, que as taxas de poder do teste para todas combinações possíveis foram, aproximadamente, iguais a 1. Quando o  $IQS \leq 0,5$ ; para  $m=30, 50, 100$  ou  $200$ , pode-se dizer também que o poder do teste é igual a 1. Neste caso, qualquer um dos valores de  $m, k$  e  $\rho$  avaliados pode ser utilizado.

A seguir, foi realizado a avaliação da taxa de erro tipo I e poder do teste  $BP$ , via simulações Monte Carlo.

#### 4.2.2 Simulação Monte Carlo do erro tipo I e poder do teste $BP$

Primeiramente, foram avaliadas as taxas de erro tipo I, considerando o  $IQS=1$ . Para encontrar as estimativas desse erro, foi realizado 1.000 vezes o teste  $BP$  sob a hipótese nula  $H_0 : IQS=1$ , ou seja, foram gerados 1.000 valores- $p$ . Com esses valores, foi calculada a proporção de vezes em que  $H_0$  foi erroneamente rejeitada, ou seja, a proporção de vezes que o valor- $p$  foi menor que  $\alpha$ . Esse processo, considerando  $IQS=0,92$ ; é ilustrado na Figura 12.

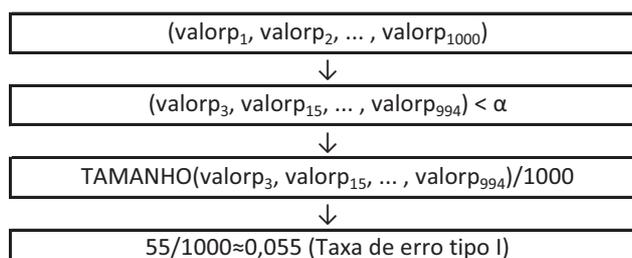


Figura 12 Exemplo ilustrativo do processo de encontrar a taxa de erro tipo I do teste  $BP$

Na Tabela 6 são apresentados os resultados da simulação do erro tipo I do teste  $BP$ .

Tabela 6 Simulação Monte Carlo do erro tipo I do teste  $BP$ , considerando  $IQS=1$

$IQS=1$						
$\rho = 0,5$						
		Número de consumidores				
Número de pontos da EH		m=10	m=30	m=50	m=100	m=200
$\alpha = 0,01$	k=5	0,008	0,012	0,009	0,010	0,009
	k=7	0,014	0,008	0,003*	0,004	0,007
	k=9	0,015	0,007	0,007	0,006	0,010
$\alpha = 0,05$	k=5	0,050	0,041	0,036	0,046	0,046
	k=7	0,062	0,057	0,043	0,038	0,030*
	k=9	0,070	0,051	0,046	0,055	0,058
$\alpha = 0,10$	k=5	0,123	0,088	0,087	0,081	0,094
	k=7	0,103	0,096	0,105	0,102	0,081
	k=9	0,096	0,093	0,096	0,098	0,099
$\rho = 0,7$						
		Número de consumidores				
Número de pontos da EH		m=10	m=30	m=50	m=100	m=200
$\alpha = 0,01$	k=5	0,012	0,013	0,008	0,004	0,007
	k=7	0,018	0,010	0,010	0,011	0,010
	k=9	0,013	0,009	0,010	0,010	0,010
$\alpha = 0,05$	k=5	0,050	0,041	0,036	0,034	0,030*
	k=7	0,054	0,040	0,045	0,041	0,035
	k=9	0,053	0,043	0,048	0,037	0,038
$\alpha = 0,10$	k=5	0,089	0,076	0,095	0,100	0,099
	k=7	0,098	0,082	0,086	0,082	0,090
	k=9	0,115	0,101	0,101	0,098	0,101
$\rho = 0,9$						
		Número de consumidores				
Número de pontos da EH		m=10	m=30	m=50	m=100	m=200
$\alpha = 0,01$	k=5	0,011	0,003*	0,005	0,003*	0,003*
	k=7	0,012	0,005	0,003*	0,007	0,006
	k=9	0,009	0,009	0,003*	0,003*	0,003*
$\alpha = 0,05$	k=5	0,050	0,041	0,036	0,034	0,030
	k=7	0,032*	0,033*	0,033*	0,041	0,032*
	k=9	0,045	0,033*	0,039	0,032*	0,038
$\alpha = 0,10$	k=5	0,087	0,082	0,069*	0,072*	0,070*
	k=7	0,075*	0,069*	0,076*	0,073*	0,078
	k=9	0,089	0,082	0,099	0,101	0,102

Observando a Tabela 6, pode-se dizer que, de acordo com o teste para o parâmetro  $p$  de uma binomial, a 1% de significância, quando o  $\rho$  avaliado foi igual a 0,5 e 0,7; praticamente todas taxas de erro tipo I foram estatisticamente iguais ao

seu respectivo  $\alpha$  da simulação avaliado, sendo assim um teste exato. Quando o  $\rho$  foi igual a 0,9; para os três valores de  $\alpha$  avaliados na simulação, o teste não é exato, tendendo a ser conservador, pois quase a metade dos resultados foi estatisticamente menores do que ele.

Quando o  $IQS=1$  e este teste for adotado, o valor de  $m$  e  $k$  podem ser quaisquer um dos avaliados, pois não interfere nos resultados.

Para encontrar a estimativa do poder do teste, foi realizado, 1.000 vezes, o teste  $BP$  sob a hipótese alternativa  $H_1 : IQS < 1$ , ou seja, foram gerados 1.000 valores- $p$  considerando  $IQS=0,92$ ; 0,85; 0,71 ou 0,5. Com esses valores- $p$ , foi calculado a proporção de vezes em que a hipótese nula  $H_0 : IQS=1$  é acertadamente rejeitada, ou seja, a proporção de vezes que o valor- $p$  foi menor que  $\alpha$ , conforme o exemplo ilustrativo da Figura 13.

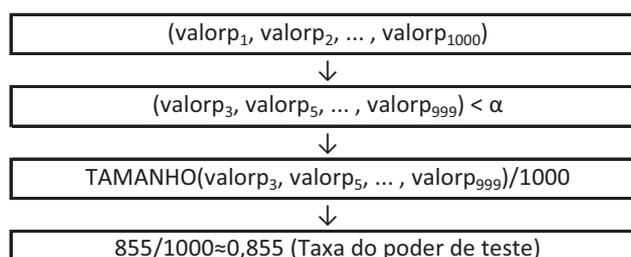


Figura 13 Exemplo ilustrativo do processo de encontrar a taxa do poder do teste  $BP$

As taxas de poder do teste  $BP$  de todas as combinações possíveis, considerando o  $IQS=0,92$ ; são dados na Tabela 7. Analisando-se essas taxas, pode-se dizer, empiricamente, que o valor de  $m$  avaliado interfere nas taxas de poder; quanto maior, mais poderoso é o teste. O valor de  $k$  pode ser qualquer um dos avaliados, pois não interfere no resultado. Observando-se os valores de  $\rho$ , pode-se dizer que quanto maior, mais poderoso é o teste.

Tabela 7 Simulação Monte Carlo do poder do teste *BP*, considerando  $IQS=0,92$ 

<b><math>IQS=0,92</math></b>						
$\rho = 0,5$						
		Número de consumidores				
Número de pontos da EH		m=10	m=30	m=50	m=100	m=200
$\alpha = 0,01$	k=5	0,034	0,071	0,092	0,201	0,428
	k=7	0,033	0,063	0,095	0,193	0,425
	k=9	0,042	0,052	0,090	0,190	0,422
$\alpha = 0,05$	k=5	0,125	0,234	0,289	0,480	0,736
	k=7	0,145	0,205	0,248	0,460	0,697
	k=9	0,136	0,192	0,272	0,436	0,671
$\alpha = 0,10$	k=5	0,232	0,354	0,456	0,647	0,863
	k=7	0,220	0,334	0,408	0,600	0,833
	k=9	0,240	0,332	0,423	0,606	0,841
$\rho = 0,7$						
		Número de consumidores				
Número de pontos da EH		m=10	m=30	m=50	m=100	m=200
$\alpha = 0,01$	k=5	0,041	0,073	0,135	0,252	0,491
	k=7	0,037	0,071	0,120	0,248	0,489
	k=9	0,043	0,094	0,147	0,249	0,488
$\alpha = 0,05$	k=5	0,164	0,252	0,346	0,516	0,764
	k=7	0,147	0,241	0,375	0,593	0,861
	k=9	0,155	0,283	0,345	0,593	0,855
$\alpha = 0,10$	k=5	0,246	0,396	0,533	0,751	0,955
	k=7	0,272	0,434	0,544	0,751	0,940
	k=9	0,244	0,397	0,506	0,726	0,927
$\rho = 0,9$						
		Número de consumidores				
Número de pontos da EH		m=10	m=30	m=50	m=100	m=200
$\alpha = 0,01$	k=5	0,062	0,165	0,280	0,626	0,945
	k=7	0,077	0,193	0,351	0,596	0,923
	k=9	0,065	0,203	0,302	0,575	0,901
$\alpha = 0,05$	k=5	0,169	0,467	0,627	0,897	0,975
	k=7	0,196	0,427	0,652	0,913	0,989
	k=9	0,212	0,469	0,637	0,917	0,998
$\alpha = 0,10$	k=5	0,211	0,418	0,612	0,881	0,955
	k=7	0,214	0,455	0,640	0,905	0,978
	k=9	0,206	0,453	0,638	0,907	0,982

As Tabelas dos próximos casos, considerando o  $IQS=0,85$ ;  $0,71$  e  $0,5$ ; são apresentadas no APÊNDICE H.

Considerando  $IQS=0,85$  e  $0,71$ ; pode-se dizer, empiricamente, que as mesmas conclusões retiradas na Tabela 7 são válidas nestes casos.

Considerando  $IQS=0,5$ ; pode-se dizer, empiricamente, que as taxas de poder do teste para todas combinações possíveis foram, aproximadamente, iguais a 1. Quando o  $IQS \leq 0,5$ ; pode-se dizer também que o poder do teste, para  $m=30$ , 50, 100 ou 200, será igual a 1. Neste caso, aconselha-se utilizar qualquer um dos valores de  $\rho$ ,  $m$  e  $k$  avaliados.

A seguir, foi realizado a avaliação da taxa de erro tipo I e poder do teste  $t$  para amostras emparelhadas, via simulações Monte Carlo.

#### **4.2.3 Simulação Monte Carlo do erro tipo I e do poder do teste $t$ para amostras emparelhadas**

Primeiramente, foram avaliadas as taxas de erro tipo I, considerando o  $IQS=1$ . Para encontrar as estimativas desse erro, foi realizado, 1.000 vezes, o teste  $t$ , por meio da função `t.test()`, disponível no APÊNDICE F, sob a hipótese nula  $H_0 : IQS = 1$ , ou seja, foram gerados 1000 valores- $p$ . Com esses valores, foi calculada a proporção de vezes em que  $H_0$  é erroneamente rejeitada, ou seja, a proporção de vezes que o valor- $p$  foi menor que  $\alpha$  estabelecido. Esse processo pode ser ilustrado com o mesmo exemplo da Figura 12.

Na Tabela 8, são apresentados os resultados da simulação do erro tipo I do teste  $t$  para amostras emparelhadas. Pode-se dizer que, de acordo com o teste para o parâmetro  $p$  de uma binomial, a 1% de significância, para qualquer um dos valores de  $\alpha$  avaliado na simulação; todas as taxas de erro tipo I foram estatisticamente iguais a eles, sendo assim um teste exato.

Quando o  $IQS=1$  e este teste for adotado, o valor de  $m$ ,  $k$  e  $\rho$  pode ser qualquer um dos avaliados, pois não interfere nos resultados.

Tabela 8 Simulação Monte Carlo do erro tipo I do teste  $t$ , considerando  $IQS=1$ 

$IQS=1$						
$\rho = 0,5$						
		Número de consumidores				
Número de pontos da EH		m=10	m=30	m=50	m=100	m=200
$\alpha = 0,01$	k=5	0,012	0,009	0,016	0,013	0,006
	k=7	0,010	0,015	0,008	0,009	0,011
	k=9	0,009	0,006	0,009	0,006	0,021
$\alpha = 0,05$	k=5	0,055	0,042	0,044	0,045	0,052
	k=7	0,056	0,059	0,055	0,044	0,034
	k=9	0,046	0,050	0,055	0,047	0,041
$\alpha = 0,10$	k=5	0,103	0,082	0,098	0,093	0,104
	k=7	0,110	0,109	0,106	0,098	0,077
	k=9	0,093	0,098	0,107	0,081	0,082
$\rho = 0,7$						
		Número de consumidores				
Número de pontos da EH		m=10	m=30	m=50	m=100	m=200
$\alpha = 0,01$	k=5	0,010	0,007	0,010	0,010	0,010
	k=7	0,010	0,010	0,009	0,007	0,011
	k=9	0,012	0,017	0,010	0,010	0,010
$\alpha = 0,05$	k=5	0,044	0,051	0,054	0,052	0,046
	k=7	0,050	0,052	0,055	0,052	0,050
	k=9	0,047	0,051	0,052	0,060	0,044
$\alpha = 0,10$	k=5	0,103	0,094	0,098	0,108	0,100
	k=7	0,098	0,091	0,107	0,102	0,083
	k=9	0,092	0,099	0,119	0,109	0,104
$\rho = 0,9$						
		Número de consumidores				
Número de pontos da EH		m=10	m=30	m=50	m=100	m=200
$\alpha = 0,01$	k=5	0,009	0,006	0,013	0,005	0,010
	k=7	0,011	0,008	0,009	0,010	0,006
	k=9	0,013	0,010	0,012	0,009	0,009
$\alpha = 0,05$	k=5	0,065	0,048	0,052	0,056	0,044
	k=7	0,056	0,049	0,042	0,047	0,046
	k=9	0,045	0,040	0,061	0,045	0,044
$\alpha = 0,10$	k=5	0,125	0,090	0,109	0,094	0,102
	k=7	0,112	0,093	0,100	0,107	0,091
	k=9	0,105	0,091	0,090	0,106	0,094

Para encontrar a estimativa do poder do teste, foi realizado, 1.000 vezes, esse teste, sob a hipótese alternativa  $H_1 : IQS < 1$ , ou seja, foram gerados 1.000 valores- $p$  considerando  $IQS=0,92$ ;  $0,85$ ;  $0,71$  ou  $0,5$ . Com esses valores- $p$ , foi calculado a proporção de vezes em que a hipótese nula  $H_0 : IQS = 1$  é acertadamente rejeitada, ou seja, a proporção de vezes que o valor- $p$  foi menor que  $\alpha$  estabelecido, conforme o exemplo ilustrativo da Figura 13.

As taxas de poder desse teste, considerando o  $IQS=0,92$ ; são dadas na Tabela 9.

Tabela 9 Simulação Monte Carlo do poder do teste  $t$ , considerando  $IQS=0,92$

$IQS=0,92$						
$\rho = 0,5$						
		Número de consumidores				
Número de pontos da EH		m=10	m=30	m=50	m=100	m=200
$\alpha = 0,01$	k=5	0,024	0,074	0,117	0,256	0,519
	k=7	0,027	0,080	0,126	0,224	0,479
	k=9	0,027	0,066	0,116	0,220	0,458
$\alpha = 0,05$	k=5	0,137	0,253	0,311	0,521	0,769
	k=7	0,113	0,197	0,296	0,492	0,758
	k=9	0,114	0,232	0,297	0,470	0,710
$\alpha = 0,10$	k=5	0,217	0,328	0,462	0,690	0,881
	k=7	0,215	0,368	0,435	0,626	0,828
	k=9	0,185	0,336	0,426	0,619	0,815
$\rho = 0,7$						
		Número de consumidores				
Número de pontos da EH		m=10	m=30	m=50	m=100	m=200
$\alpha = 0,01$	k=5	0,032	0,088	0,178	0,441	0,700
	k=7	0,042	0,095	0,180	0,356	0,713
	k=9	0,034	0,092	0,186	0,376	0,668
$\alpha = 0,05$	k=5	0,154	0,277	0,426	0,705	0,909
	k=7	0,134	0,291	0,403	0,670	0,879
	k=9	0,139	0,231	0,426	0,640	0,863
$\alpha = 0,10$	k=5	0,281	0,440	0,582	0,813	0,956
	k=7	0,245	0,429	0,550	0,763	0,927
	k=9	0,239	0,443	0,543	0,785	0,930
$\rho = 0,9$						
		Número de consumidores				
Número de pontos da EH		m=10	m=30	m=50	m=100	m=200
$\alpha = 0,01$	k=5	0,063	0,260	0,480	0,820	0,990
	k=7	0,065	0,256	0,468	0,814	0,994
	k=9	0,068	0,248	0,495	0,813	0,987
$\alpha = 0,05$	k=5	0,229	0,547	0,731	0,945	0,997
	k=7	0,222	0,545	0,756	0,933	1,000
	k=9	0,226	0,529	0,748	0,948	0,998
$\alpha = 0,10$	k=5	0,447	0,667	0,859	0,970	1,000
	k=7	0,401	0,684	0,839	0,975	1,000
	k=9	0,403	0,687	0,858	0,978	1,000

Observando os resultados de todas combinações da Tabela 9, pode-se dizer, empiricamente, que quando o  $IQS=0,92$  e este teste for adotado, o valor de  $m$  e  $\rho$ , dentre os avaliados, interferem nas taxas de poder; quanto maior, mais poderoso é o teste. Os valores de  $k$  avaliados não interferem no resultado.

As Tabelas dos próximos casos, considerando o  $IQS = 0,85; 0,71$  e  $0,5$ ; são apresentadas no APÊNDICE I.

Considerando  $IQS=0,85$  e  $0,71$ , pode-se dizer, empiricamente, que as mesmas conclusões retiradas na Tabela 9 são válidas nestes casos.

Considerando  $IQS=0,5$ ; pode-se dizer, empiricamente, que as taxas de poder do teste para todas combinações possíveis foram, aproximadamente, iguais a 1. Quando o  $IQS \leq 0,5$ ; considerando  $m=30, 50, 100$  ou  $200$ , pode-se dizer também que o poder do teste será igual a 1. Neste caso, aconselha-se utilizar qualquer um dos valores de  $\rho, m$  e  $k$  avaliados.

#### **4.3 Comparação entre os testes $BNP, BP$ e $t$ para amostras emparelhadas**

Neste tópico foi realizado a comparação entre os testes  $BNP, BP$  e teste  $t$  para amostras emparelhadas, por meio dos resultados obtidos nas avaliações das taxas de erro tipo I e poder, via simulação Monte Carlo.

Primeiramente, foi realizado a comparação entre os três testes, observando-se as taxas de erro tipo I. Para melhor compreensão do comportamento dos três testes, foram construídos gráficos utilizando suas taxas de erro tipo I em relação aos números de consumidores avaliados. Nessa comparação, foi considerado apenas  $k=9$ , pois, conforme já visto, em ambos testes, os números de pontos da escala hedônica avaliados apresentaram resultados semelhantes.

Na Figura 14, é apresentado o gráfico das taxas de erro tipo I dos três testes, considerando  $\rho=0,5$ .

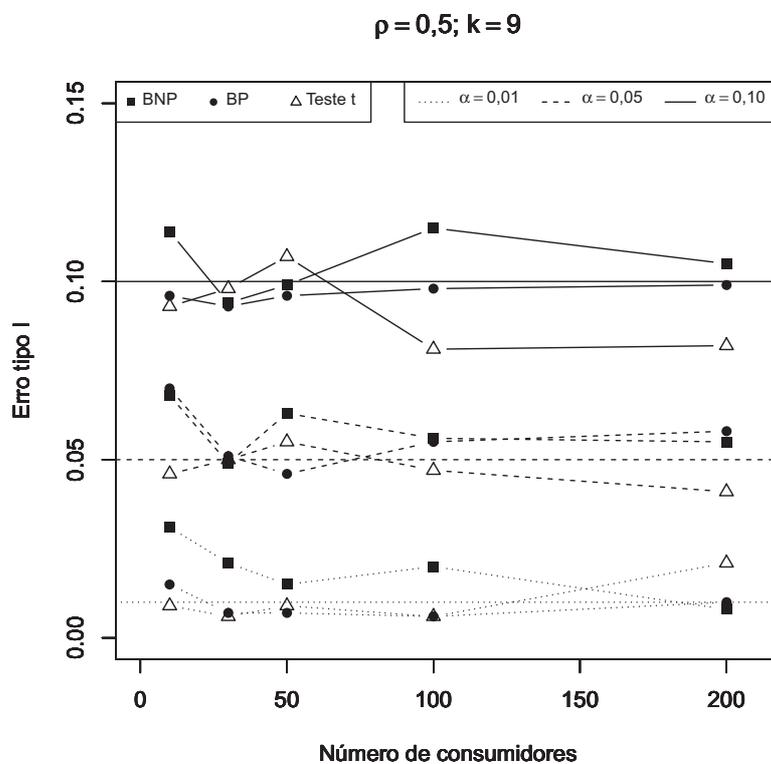


Figura 14 Taxas de erro tipo I apresentadas pelo teste *BNP*, *BP* e *t* para amostras emparelhadas, considerando  $\rho=0,5$

Observando a Figura 14, comparando os resultados obtidos pelos três testes, algumas informações importantes foram retiradas. São elas:

1. o teste *BP* e *t* para amostras emparelhadas, para os três valores de  $\alpha$ , apresentaram todos resultados próximos da linha tracejada (representa o  $\alpha$  avaliado), podendo-se dizer, pelo teste para o parâmetro  $p$  de uma binomial, que eles controlam a taxa de erro tipo I e são considerados testes exatos;
2. para os três valores de  $\alpha$ , o teste *BNP* foi o que resultou maiores taxas de

erro tipo I para quase todos números de consumidores avaliados;

3. o teste  $t$  para amostras emparelhadas foi o que resultou menores taxas de erro tipo I para maioria dos números de consumidores avaliados;
4. o teste  $BP$  apresentou resultados mais próximos da linha tracejada, sendo o mais regular em relação aos demais.

Na Figura 15, é apresentado o gráfico das taxas de erro tipo I dos três testes, considerando  $\rho=0,7$ .

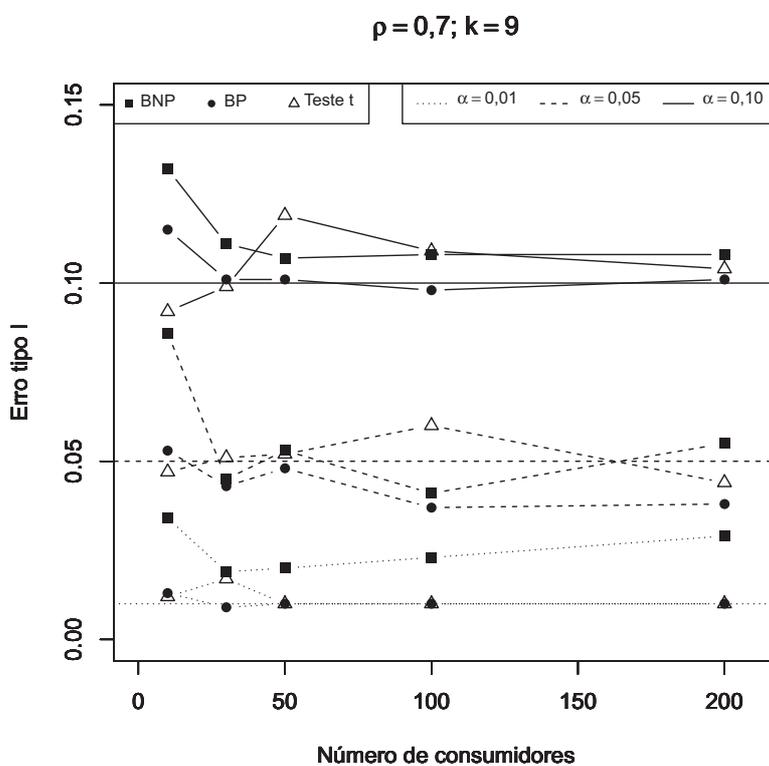


Figura 15 Taxas de erro tipo I apresentadas pelo teste  $BNP$ ,  $BP$  e  $t$  para amostras emparelhadas, considerando  $\rho=0,7$

Observando a Figura 15, comparando os resultados obtidos pelos três testes, algumas informações importantes foram retiradas. São elas:

1. os três testes, para os valores de  $\alpha=0,05$  e  $0,10$ ; apresentaram a maioria dos resultados próximos da linha tracejada (representa o  $\alpha$  avaliado), podendo-se dizer, pelo teste para o parâmetro  $p$  de uma binomial, a 1% de significância, que eles controlam a taxa de erro tipo I e, de uma forma geral, são considerados testes exatos;
2. para  $\alpha=0,01$ ; o teste *BNP* apresentou resultados com maiores taxas de erro tipo I para todos números de consumidores avaliados e pelo teste do parâmetro  $p$  de uma binomial; a maioria destes números são, a 1% de significância, estatisticamente maior que este  $\alpha$  avaliado, tendendo, assim, a ser um teste liberal;
3. para  $\alpha=0,01$  e  $0,10$ ; o teste *BP* apresentou resultados mais próximos da linha tracejada, podendo-se, assim, concluir que foi o que apresentou mais regularidade em relação aos demais;
4. para os três valores de  $\alpha$ , pelo teste para o parâmetro  $p$  de uma binomial, a 1% de significância, o teste  $t$  para amostras emparelhadas e o teste *BP* apresentaram todos resultados estatisticamente iguais aos seus respectivos valores de  $\alpha$  avaliado.

Na Figura 16, é apresentado o gráfico das taxas de erro tipo I dos três testes, considerando  $\rho=0,9$ .

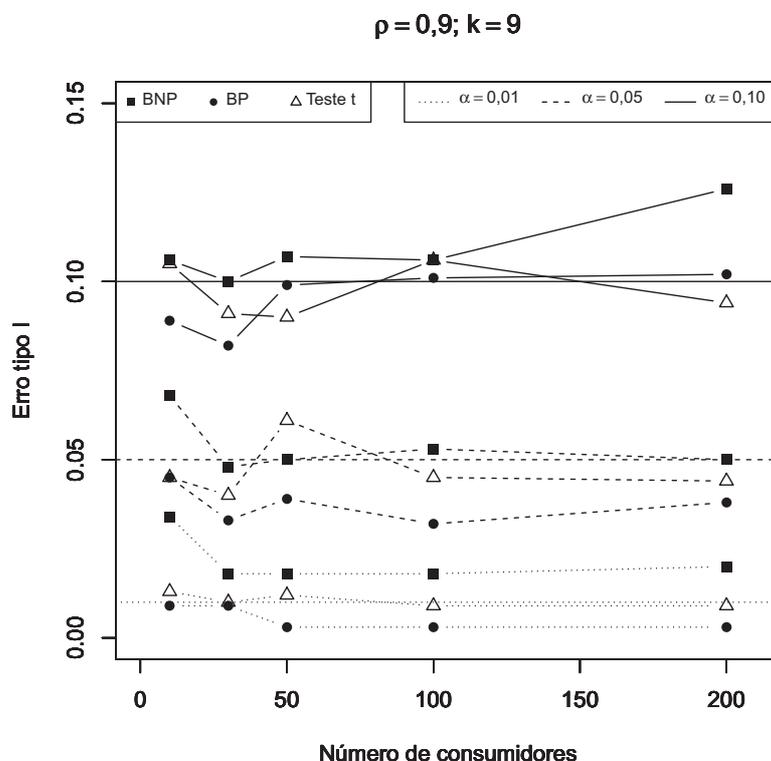


Figura 16 Taxas de erro tipo I apresentadas pelo teste *BNP*, *BP* e *t* para amostras emparelhadas, considerando  $\rho=0,9$

Observando a Figura 16, comparando-se os resultados obtidos pelos três testes, algumas informações importantes foram retiradas. São elas:

1. o teste *BNP* e *t* para amostras emparelhadas, para os três valores de  $\alpha$ , apresentaram a maioria dos resultados próximos da linha tracejada (representa o  $\alpha$  avaliado), podendo-se dizer, pelo teste para o parâmetro  $p$  de uma binomial, a 1% de significância, que eles controlam a taxa de erro tipo I e, de uma forma geral, são considerados testes exatos;

2. para  $\alpha=0,01$  e  $0,05$ ; o teste  $BP$  resultou menores taxas de erro tipo I para todos números de consumidores avaliados e pelo teste para o parâmetro  $p$  de uma binomial; a metade destes resultados são, a 1% de significância, estatisticamente menor que seus respectivos  $\alpha$ 's avaliados, tendendo, assim, a ser um teste conservador;
3. para  $\alpha=0,01$ ; o teste  $t$  para amostras emparelhadas apresentou resultados mais próximos da linha tracejada, podendo-se, assim, concluir que foi o que apresentou mais regularidade em relação aos demais;
4. para  $\alpha=0,05$  e  $m=30, 50, 100$  e  $200$ , o teste  $BNP$  apresentou resultados mais próximos da linha tracejada, sendo mais regular em relação aos demais;
5. para  $\alpha=0,10$  e  $m=50, 100$  e  $200$ , o teste  $BP$  apresentou resultados mais próximos da linha tracejada, sendo mais regular em relação aos demais;
6. para os três valores de  $\alpha$ , pelo teste para o parâmetro  $p$  de uma binomial, a 1% de significância, o teste  $t$  para amostras emparelhadas apresentou todos resultados estatisticamente iguais aos seu respectivo valor de  $\alpha$  avaliado.

Para a comparação dos três testes em relação às taxas de poder, os gráficos foram construídos considerando-se somente  $k=9$ , pois os números de pontos da escala hedônica avaliados também apresentaram resultados semelhantes. Essa comparação também foi realizada apenas considerando  $\alpha=0,05$ ; pois, além de ser o mais utilizado, os outros dois valores estudados apresentam conclusões semelhantes.

Na Figura 17, são apresentadas as taxas de poder dos três testes, considerando  $\rho=0,5$  e  $k=9$ .

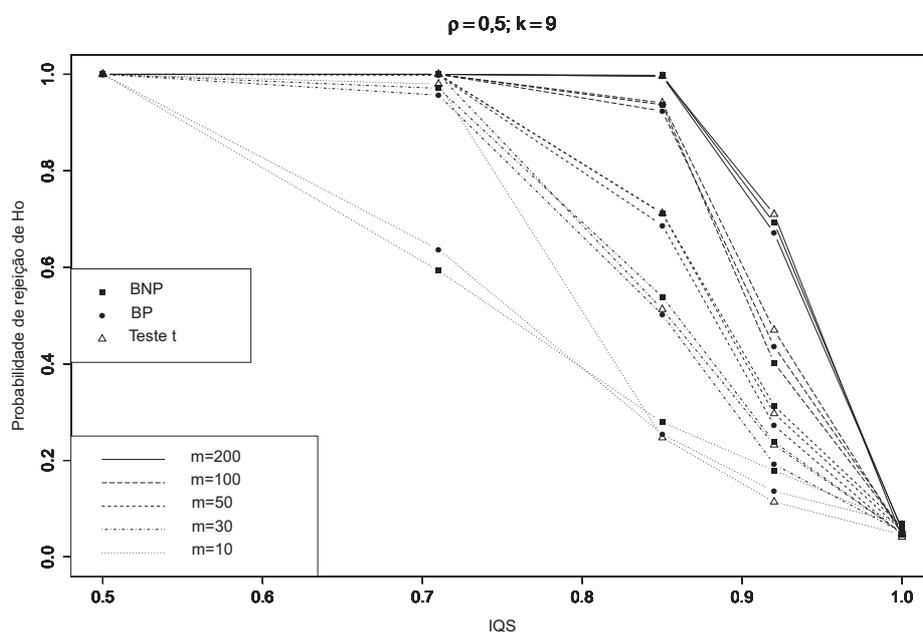


Figura 17 Taxas de poder apresentadas pelos testes *BNP*, *BP* e *t* para amostras emparelhadas, considerando  $\rho=0,5$ ;  $k=9$  e  $\alpha=0,05$

Observando a Figura 17, comparando-se os resultados obtidos pelos três testes, algumas informações importantes foram retiradas. São elas

1. quando o *IQS* for igual a 1; 0,92 e 0,85; as taxas de poder para os três testes são praticamente iguais, independente do número de consumidores;
2. quando o *IQS* for igual a 0,71; o teste *t* para amostras emparelhadas mostrou-se mais poderoso que os demais, pois, quando  $m=10$ , o poder desse teste foi próximo de 1 e os outros dois testes não foram;
3. quando o *IQS* for igual a 0,5; os três testes resultaram poder, aproximadamente, iguais a 1, que é o maior possível.

Na Figura 18, são apresentadas as taxas de poder dos três testes, considerando  $\rho=0,7$  e  $k=9$ .

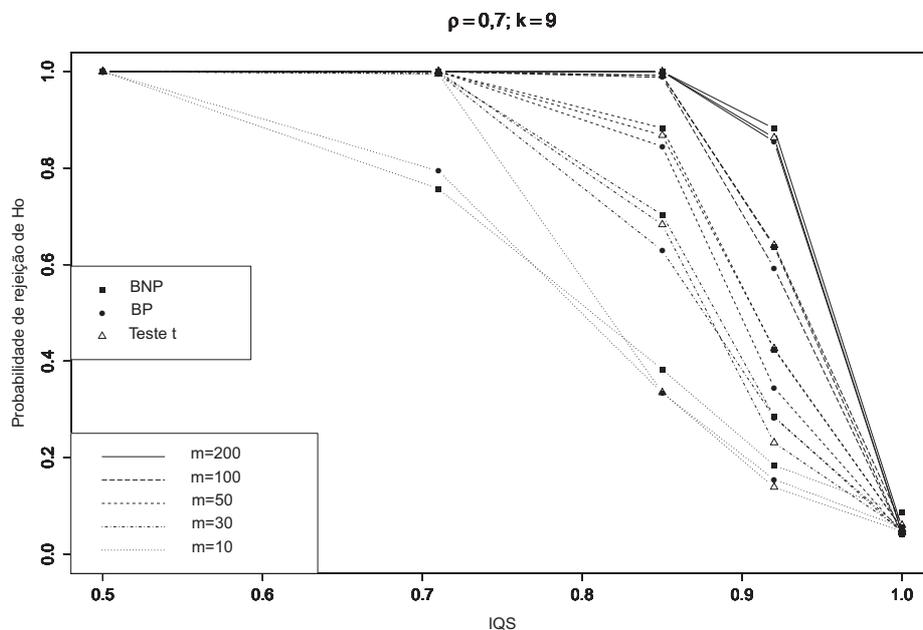


Figura 18 Taxas de poder apresentadas pelos testes *BNP*, *BP* e *t* para amostras emparelhadas, considerando  $\rho=0,7$ ;  $k=9$  e  $\alpha=0,05$

Observando-se a Figura 18, comparando-se os resultados obtidos pelos três testes, algumas informações importantes foram retiradas. São elas:

1. as mesmas informações retiradas observando-se o comportamento dos três testes no gráfico da Figura 17 são válidas para este gráfico;
2. devido ao aumento do  $\rho$ , de 0,5 para 0,7; as taxas de poder dos três testes apresentaram um aumento em relação às taxas do gráfico da Figura 17;
3. quando  $m$  for maior ou igual a 100 e o  $IQS$  for menor ou igual a 0,85; as taxas de poder dos três testes serão, aproximadamente, iguais a 1, atingindo o maior poder possível;

4. quando  $m$  for maior ou igual a 30 e o  $IQS$  for menor ou igual a 0,71; as taxas de poder dos três testes serão, aproximadamente, iguais a 1.

Na Figura 19, são apresentadas as taxas de poder dos três testes, considerando  $\rho=0,9$  e  $k=9$ .

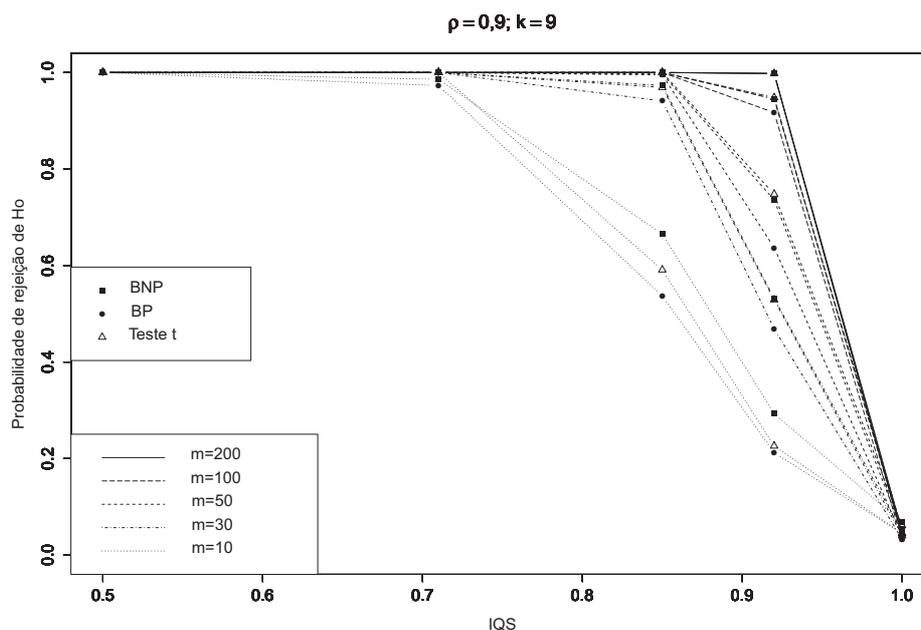


Figura 19 Taxas de poder apresentadas pelos testes  $BNP$ ,  $BP$  e  $t$  para amostras emparelhadas, considerando  $\rho=0,9$ ;  $k=9$  e  $\alpha=0,05$

Observando a Figura 19, comparando-se os resultados obtidos pelos três testes, algumas informações importantes foram retiradas. São elas:

1. novamente, devido ao aumento do  $\rho$ , de 0,7 para 0,9; as taxas de poder dos três testes apresentaram um aumento em relação as taxas dos gráficos da Figura 17 e 18;
2. as taxas de poder para os três testes são muito próximas, independente dos números de consumidores e  $IQS$  avaliados;

3. quando  $m$  for maior ou igual a 50 e o  $IQS$  for menor ou igual a 0,85; as taxas de poder dos três testes serão, aproximadamente, iguais a 1, atingindo o maior poder possível;
4. quando o  $IQS$  for menor ou igual a 0,71; as taxas de poder dos três testes serão, aproximadamente, iguais a 1, independentes do  $m$  avaliado.

A seguir, será realizado um estudo preliminar e a aplicação dos três testes nos dados reais de berinjela.

#### 4.4 Estudo preliminar e aplicação dos três testes nos dados de berinjela

Esse estudo foi realizado por meio do gráfico da Figura 20, sendo apresentadas as notas da aceitação global no início em relação as notas no fim dos dados de berinjela.

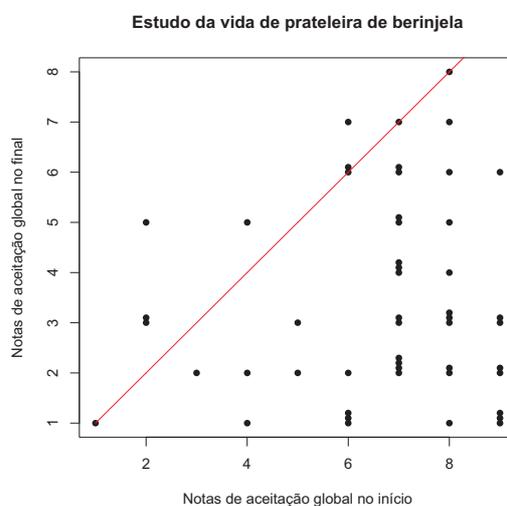


Figura 20 Notas de aceitação global no início  $\times$  Notas de aceitação global no fim

Visualizando este gráfico, pode-se dizer que apenas 5 consumidores deram notas maiores no fim da vida de prateleira em relação ao início, 5 deram notas iguais no início e no fim e 40 deram notas maiores no início em relação ao fim, ou seja, 80% dos consumidores que avaliaram as berinjelas diagnosticaram que sua qualidade sensorial piorou.

Vale notar que a reta na cor vermelha da Figura 20, está indicando as notas iguais no início e no fim; acima dela estão as notas que são maiores no fim em relação ao início e abaixo estão as que são maiores no início em relação ao fim.

Foi aplicado o teste de Shapiro-Wilk aos dados de berinjela, resultando, a 5% de significância, na rejeição de  $H_0$  (valor- $p=0$ ), concluindo-se que os dados não seguem uma distribuição Normal. Este teste também foi aplicado na diferença desses dados (entre os dados no início da vida de prateleira e no fim), resultando, a 5% de significância, a não rejeição de  $H_0$  (valor- $p=0,16$ ), concluindo-se que a diferença desses dados seguem uma distribuição Normal.

A estimativa pontual do *IQS* para os dados de berinjela é igual a 0,509; informando que a qualidade sensorial da berinjela piorou, mas não está informando com uma confiança previamente estabelecida.

Observando os resultados das Tabelas 19, 22 e 25, pode-se dizer que os três testes, com 99% de confiança, para esse valor da estimativa do *IQS*, considerando que esses dados foram avaliados com  $k=9$  e  $m=50$ , apresentam taxas de poder, aproximadamente, iguais a 1.

Para estimar um intervalo de confiança para o *IQS*, foi utilizado o método de percentis simples. Este intervalo, com 95% de confiança, é dado por

$$IC_{1-\alpha}(IQS) : \left[ \left( \frac{\bar{Y}}{\bar{X}} \right)_{boot, \frac{\alpha}{2}} ; \left( \frac{\bar{Y}}{\bar{X}} \right)_{boot, 1-\frac{\alpha}{2}} \right]$$

$$IC_{95\%}(IQS) : [0,424; 0,605] .$$

Posteriormente, foram aplicados os testes com uma confiança previamente estabelecida para verificar se realmente a qualidade sensorial piorou.

### Aplicação do teste *BNP* nos dados de berinjela

O teste *BNP* foi aplicado aos dados de berinjela. Para aplicar esse teste, foi utilizada a rotina do APÊNDICE F, que fornece o limite inferior ( $li$ ) que será sempre igual a 0, pelo fato de ser um teste unilateral, o  $ls$  e os valores de *IQS*. Com o valor do  $ls$ , é possível decidir se não se rejeita ou se rejeita  $H_0$ .

Aplicando-se o teste *BNP* aos dados de berinjela, o valor do  $ls$  foi igual a 0,588; ou seja, a 5% de significância, rejeita-se  $H_0$ , concluindo-se que a qualidade sensorial da berinjela, do início da vida de prateleira até o fim, piorou.

O histograma dos 1.000 valores de *IQS* é da seguinte forma.

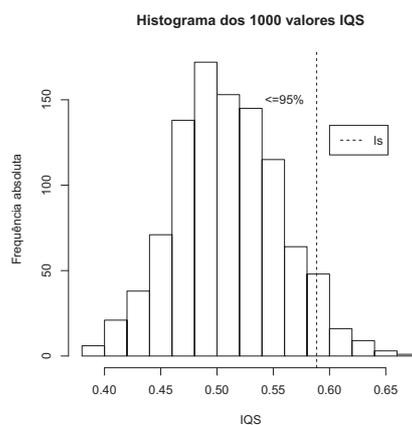


Figura 21 Histograma dos 1000 valores do *IQS*, via *bootstrap* não paramétrico, considerando como amostra original os dados de berinjela

Um dos pontos interessantes do método *bootstrap* não paramétrico, é que, antes, a distribuição de probabilidade do *IQS* era desconhecida. Já com este

método, é possível obter uma distribuição *bootstrap* do *IQS*, sendo possível, com ela, aplicar uma estatística descritiva, encontrar um intervalo de confiança e até testar hipóteses, como foi feito anteriormente.

### **Aplicação do teste *BP* nos dados de berinjela**

O teste *BP* foi aplicado aos dados de berinjela. Para aplicar esse teste, foi utilizada a rotina do APÊNDICE F, que fornece o valor do *IQS* e o valor-*p*. Com o valor-*p*, é possível verificar se não rejeita ou rejeita a hipótese nula.

Aplicando o teste *BP* aos dados de berinjela, o valor-*p* foi igual a 0,001; ou seja, a 5% de significância, rejeita-se  $H_0$ , concluindo-se que a qualidade sensorial da berinjela do início da vida de prateleira até o fim, piorou.

### **Aplicação do teste *t* para amostras emparelhadas nos dados de berinjela**

O teste *t* para amostras emparelhadas foi aplicado aos dados de berinjela. Vale lembrar que as diferenças dos dados de berinjela seguem uma distribuição normal, mas, mesmo se não seguisse, este teste é robusto a não normalidade.

O nível de significância fixado foi de  $\alpha = 5\%$ ;

A estatística de teste apropriada é:

$$t_{calc} = \frac{\bar{D}}{S_{\bar{D}}}$$

em que  $D = X - Y$ , com  $X$  sendo a amostra no início da vida de prateleira e  $Y$  a amostra no fim.

E sua distribuição amostral é:

$$t_{calc} \sim t_{1-\alpha, n-1},$$

em que  $n$  é o tamanho amostral e  $n - 1$  são os graus de liberdade.

O valor da distribuição  $t$  que delimita a região crítica foi de:

$$t_{0,95;49} = 1,676;$$

ou seja, qualquer valor maior que este obtido, rejeita-se  $H_0$ .

Utilizando os elementos amostrais, o valor da estatística de teste foi de

$$t_{calc} = \frac{\bar{D}}{S_{\bar{D}}} = 8,439.$$

Comparando o valor obtido ( $t_{calc}$ ) com a região crítica determinada, chega-se a seguinte conclusão:

Como  $t_{calc}=8,439 > t_{0,95;49}=1,676$ ; rejeita-se a hipótese nula, ou seja, a média amostral no início da vida de prateleira é maior que a média amostral no fim, indicando que a qualidade sensorial da berinjela piorou.

## 5 CONCLUSÃO

No presente trabalho alcançaram-se os objetivos desejados, com as seguintes conclusões:

1. a formalização da função do *IQS* foi realizada com sucesso;
2. a inferência via computação intensiva foi realizada, propondo, com sucesso, dois novos testes *bootstrap* para o *IQS*;
3. o teste *t* para amostras emparelhadas tem seus níveis de significância estatisticamente iguais aos seus níveis de significância nominais. Esta conclusão foi retirada a partir do teste para o parâmetro  $p$  de uma binomial, a 1% de significância;
4. para  $\alpha=0,05$  e  $0,10$ ; pelo teste para o parâmetro  $p$  da binomial, a 1% de significância, a maioria dos resultados do teste *BNP* foi, estatisticamente, igual aos seus respectivos  $\alpha$ 's avaliados, sendo assim um teste exato. Para  $\alpha=0,01$ ; praticamente a metade dos resultados foram, estatisticamente, maiores do que ele, sendo assim um teste liberal;
5. para  $\rho=0,5$  e  $0,7$ ; pelo teste para o parâmetro  $p$  da binomial, ao nível de 1% de significância, a maioria dos resultados do teste *BP* foram, estatisticamente, iguais aos seus respectivos  $\alpha$ 's avaliados, sendo assim um teste exato. Para  $\rho=0,9$ ; praticamente a metade dos resultados foram, estatisticamente, menores do que os respectivos  $\alpha$ 's avaliados, sendo assim um teste conservador;
6. quando  $\rho=0,5$  e  $0,7$ , o teste *t* para amostras emparelhadas é mais poderoso que os testes *BNP* e *BP* para o *IQS* e quando  $\rho=0,9$ ; os três testes apresentaram taxas de poder semelhantes;

7. considerando  $m=30, 50, 100$  e  $200$ , pode-se afirmar, em relação às taxas de poder, que os três testes apresentaram resultados semelhantes;
8. os números de pontos da escala hedônica avaliados não interferiram nos resultados. Os números de consumidores avaliados, de forma geral, mostraram que quanto maior, mais poderoso é o teste. Os coeficientes de correlação avaliados, resultaram que quanto maior (mais próximo de 1), mais poderoso é o teste. Quando o *IQS* for igual a 0,5; pode-se dizer que os três testes terão taxas de poder, aproximadamente, iguais a 1;
9. nos três testes, na avaliação do poder, observando-se os valores dos  $\alpha$ 's avaliados, quanto maior o valor, maior resultou a taxa de poder. Isso se deve pelo fato de que, quando aumenta o nível de significância, você reduz a região de aceitação. Como resultado, você tem maior chance de rejeitar a hipótese nula. Isto significa que se tem menos chance de não rejeitar a hipótese nula quando ela é falsa, isto é, menor chance de cometer um erro do tipo II. Então, o poder do teste aumenta;
10. na aplicação dos testes nos dados de berinjela, os três apresentaram as mesmas conclusões, ou seja, que a qualidade sensorial das berinjelas avaliadas piorou;
11. após comparar o teste *BNP*, *BP*, ambos para o *IQS* e *t* para amostras emparelhadas, recomenda-se aplicar este último no estudo da vida de prateleira. Essa recomendação é dada observando-se os resultados da avaliação do erro tipo I e poder, tendo este teste mostrado ser uma ferramenta melhor do que os dois testes propostos para o *IQS*.

## REFERÊNCIAS

ANZALDÚA-MORALES, A. **La evaluación sensorial de los alimentos en la teoría y la práctica**. Zaragoza: Acribia, 1994. 198 p.

AYRES, M. et al. **Pequeno dicionário de bioestatística**. 2. ed. Belém: EMBRAPA Amazônia Oriental, 2010. 127 p.

BATTISTELLA, P. M. D. **Análise de sobrevivência aplicada à estimativa da vida de prateleira de salsicha**. 2008. 115 p. Dissertação (Mestrado em Ciência dos Alimentos) - Universidade Federal de Santa Catarina, Florianópolis, 2008.

BIEDRZYCKI, A. **Aplicação da avaliação sensorial no controle de qualidade em uma indústria de produtos cárneos**. 2008. 64 p. Monografia (Graduação em Engenharia de Alimentos) - Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, 2008.

BUSSAB, W. O.; MORETTIN, P. A. **Estatística básica**. 5. ed. São Paulo: Atual, 2003. 526 p.

CASELLA, G.; BERGER, R. L. **Inferência estatística**. São Paulo: Cengage Learning, 2010. 588 p.

CECON, P. R. et al. **Métodos estatísticos**. Viçosa, MG: UFV, 2012. 229 p.

CEDILNIK, A.; KOSMELJ, K.; BLEJEC, A. The distribution of the ratio of jointly normal variables. **Metodoloski Zveski**, v. 1, n. 1, p. 99-108, 2004.

CHERNICK, M. R. **Bootstrap methods: a guide for practitioners and researchers**. 2<sup>nd</sup> ed. Newtown: Wiley-Interscience, 2008. 369 p.

CURIA, A. et al. Survival analysis applied to sensory shelf life of yogurts-I: Argentine formulations. **Journal of Food Science**, Chicago, v. 70, n. 7, p. 442-445, 2005.

DANTAS, C. A. B. **Probabilidade: um curso introdutório**. 3. ed. São Paulo: EDUSP, 2008. 252 p.

DAVISON, A. C.; HINKLEY, D. V. **Bootstrap methods and their application**. Cambridge: Cambridge University, 2008. 582 p.

DUTCOSKY, S. D. **Análise sensorial de alimentos**. Curitiba: Champagnat, 1996. 123 p.

EFRON, B. Bootstrap methods: another look at the jackknife. **Annals of Statistics**, Hayward, v. 7, p. 1-26, 1979.

FERREIRA, D. F. **Estatística básica**. 2. ed. Lavras: UFLA, 2009. 664 p.

FERREIRA, D. F. **Estatística computacional em Java**. Lavras: UFLA, 2013. 695 p.

FERREIRA, E. B. **Análise generalizada de procrustes via R**: uma aplicação em laticínios. 2004. 115 p. Dissertação (Mestrado em Estatística e Experimentação Agropecuária) - Universidade Federal de Lavras, Lavras, 2004.

FERREIRA, E. B.; OLIVEIRA, M. S. de. **Sensometria**: uma abordagem com ênfase em procrustes. Santa Maria: UFSM, 2007, 71 p. Apostila.

FERREIRA, E. B.; OLIVEIRA, M. S. de. **Introdução a estatística básica com R**. Lavras: UFLA/FAEPE, 2008. 116 p.

GRIZOTTO, R. K.; MENEZES, H. C. de. Avaliação da aceitação de “chips” de mandioca. **Ciência e Tecnologia de Alimentos**, Campinas, v. 23, p. 79-86, 2003.

IMM, B. Y.; LEE, J. H.; LEE, S. H. Sensory quality index (*SQI*) for commercial food products. **Food Quality and Preference**, Seul, v. 22, n. 8, p. 748-752, 2011.

MAGALHÃES, M. N. **Probabilidade e variáveis aleatórias**. 2. ed. São Paulo: EDUSP, 2006. 428 p.

MAGALHÃES, M. N.; LIMA, A. C. P. de. **Noções de probabilidade e estatística**. 6. ed. São Paulo: EDUSP, 2008. 416 p.

MOOD, A. M.; GRAYBILL, F. A.; BOES, D. C. **Introduction to the theory of statistics**. 3<sup>rd</sup> ed. New York: McGraw Hill, 1974. 577 p.

MORAES, M. A. C. **Métodos para avaliação sensorial dos alimentos**. 5. ed. Campinas: UNICAMP, 1985. 89 p.

OLIVEIRA, M. S. de. et al. **Introdução à Estatística**. 2. ed. Lavras: UFLA, 2009. 334 p.

PANGBORN, R. M. Sensory evaluation of foods: a look backward and forward. **Food Technology**, Oxford, v. 18, p. 1309-1313, 1964.

PERYAM, D. R.; PILGRIM, F. J. Hedonic scale method of measuring food preferences. **Food Technology Symposium**, Chicago, v. 11, n. 9, p. 9-14, 1957.

PESSOA, T. et al. Avaliação sensorial de goiabas passas obtida por técnicas combinadas de desidratação osmótica e secagem. **Holos**, Natal, v. 4, n. 27, p. 137-147, set. 2011.

PHAM-GIA, T.; TURKKAN, N.; MARCHAND, E. Density of the ratio of two normal random variables and applications. **Communications in Statistics - Theory and Methods**, Toronto, v. 35, n. 9, p. 1569-1591, 2006.

R CORE TEAM. **R**: a language and environment for statistical computing. Vienna: R Foundation for Statistical Computing, 2013. Software.

RIBEIRO, M. M. et al. Influência da embalagem na aceitação de diferentes marcas comerciais de cerveja tipo Pilsen. **Ciência e Tecnologia de Alimentos**, Campinas, v. 28, n. 2, p. 395-399, 2008.

RIZZO, A. L. T.; CYMROT, R. Estudo e aplicações da técnica *bootstrap*. In: JORNADA DE INICIAÇÃO CIENTÍFICA, 2., 2006, São Paulo. **Anais...** São Paulo: Universidade Presbiteriana Mackenzie, 2006. 1 CD-ROM.

SANTOS, E. N. F. **Comparações múltiplas multivariadas via *bootstrap* e permutação**. 2008. 50 p. Dissertação (Mestrado em Estatística e Experimentação Agropecuária). Universidade Federal de Lavras, Lavras, 2008.

TEIXEIRA, E.; MEINERT, E. M.; BARBETTA, P. A. **Análise sensorial de alimentos**. Florianópolis: UFSC, 1987. 180 p.

WIKIPEDIA. **Categorical distribution**. Disponível em:

<<http://en.wikipedia.org/w/index.php?title=Categoricaldistribution&oldid=492025983>>. Acesso em: 4 set. 2012.

WIKIPÉDIA. **Distribuição normal**. Disponível em:

<[http://pt.wikipedia.org/wiki/Distribuição\\_normal](http://pt.wikipedia.org/wiki/Distribuição_normal)>. Acesso em: 29 nov. 2013.

## APÊNDICE

### APÊNDICE A - Modelos Probabilísticos

Para encontrar a distribuição de probabilidade do *IQS*, é necessário o estudo da distribuição Bernoulli, Binomial, Categórica, Multinomial, entre outras.

#### Distribuição Bernoulli

De acordo com Magalhães e Lima (2008), uma variável aleatória  $X$  segue uma distribuição Bernoulli se atribui 0 ou 1 à ocorrência de fracasso ou sucesso, respectivamente. Sua função de probabilidade é dada por

$$P(X = x) = p^x q^{1-x} I_{\{0,1\}}(x),$$

em que  $p$  é a probabilidade de sucesso,  $q = 1 - p$  é a probabilidade de fracasso, sendo que  $p, q \in [0, 1]$  e  $x$  é 0 ou 1 sendo a realização da variável aleatória  $X$ .

Sua média é  $\mu_X = p$  e a variância é  $\sigma_X^2 = pq$ .

#### Distribuição binomial

De acordo com Magalhães e Lima (2008), considerando a repetição de  $n$  ensaios de Bernoulli independentes e todos com a mesma probabilidade de sucesso  $p$ , a variável aleatória  $X$ , que conta o número total de sucessos, é denominada

binomial com parâmetros  $n$  e  $p$ , e sua função de probabilidade é dada por

$$P(X = x) = \binom{n}{x} p^x q^{n-x} I_{\{0,1,2,\dots,n\}}(x),$$

em que  $\binom{n}{x} = \frac{n!}{x!(n-x)!}$ .

Sua média é  $\mu_X = np$  e a variância é  $\sigma_X^2 = npq$ .

### Distribuição multinomial

De acordo com Magalhães (2006), seja um experimento com  $n$  eventos mutuamente exclusivos, com probabilidades de sucesso  $p_1, p_2, \dots, p_n$ , com  $p_i \geq 0$ , sendo  $i = 1, 2, \dots, n$  e  $\sum_{i=1}^n p_i = 1$ , repetido  $m$  vezes ( $m$  ensaios) de forma independente e as variáveis  $X_1, X_2, \dots, X_n$  correspondem ao número de ocorrência de cada um dos possíveis resultados dessas repetições.

O vetor de variáveis aleatórias  $X = (X_1, X_2, \dots, X_n)$  segue uma distribuição multinomial com função de probabilidade conjunta, também denominada função de probabilidade multinomial, dada por

$$P(X_1 = x_1, X_2 = x_2, \dots, X_n = x_n) = \frac{m!}{x_1!x_2!\dots x_n!} p_1^{x_1} p_2^{x_2} \dots p_n^{x_n},$$

em que  $\sum_{i=1}^n x_i = m$ ,  $x_i \in \mathbb{N}$ ,  $0 \leq x_i \leq m$ .

A média e variância de cada variável  $X_i$  são dadas, respectivamente, por:

$$\mu_{X_i} = mp_i \text{ e } \sigma_{X_i}^2 = mp_iq_i,$$

em que  $p_i$  é a probabilidade de sucesso do  $i$ -ésimo evento e  $q_i = 1 - p_i$  é a probabilidade de fracasso do  $i$ -ésimo evento.

### **Distribuição categórica**

De acordo com Wikipedia (2012), a distribuição categórica tem distribuição de probabilidade discreta que descreve o resultado de um evento aleatório, assumindo um dos  $n$  resultados possíveis, em que  $n$  é o número de eventos.

As probabilidades de cada evento são limitadas pelo fato de que cada uma delas deve pertencer ao intervalo de 0 a 1, e a soma delas deve ser igual a 1.

A função de probabilidade da distribuição categórica é dada por

$$P(X_1 = x_1, X_2 = x_2, \dots, X_n = x_n) = p_i,$$

com  $x_i = 1$  em que  $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ ,  $x_j = 0$  em que  $j = \{1, 2, \dots, n\} - \{i\}$ .

Sua média é  $\mu_X = p_i$  e a variância é  $\sigma_X^2 = p_iq_i$ .

### **Relações entre a distribuição Bernoulli, binomial, categórica e multinomial**

Ao estudar estas distribuições, relações entre elas foram detectadas e são apresentadas no fluxograma da Figura 22:

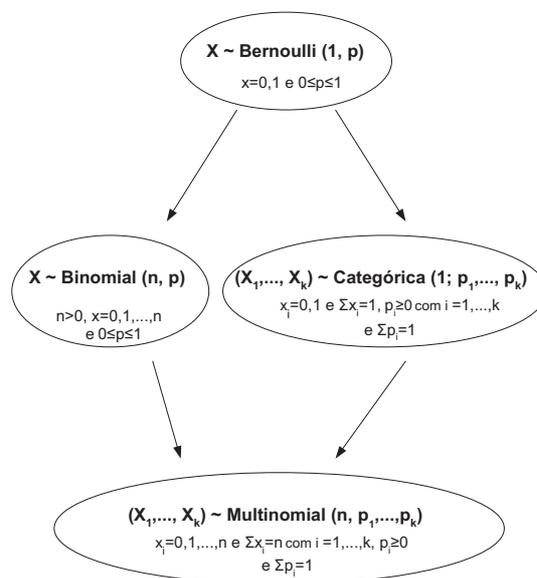


Figura 22 Fluxograma das relações entre a distribuição Bernoulli, binomial, categórica e multinomial

A distribuição binomial é a soma de Bernoullis, ou seja, de acordo com Magalhães e Lima (2008), a repetição de ensaios de Bernoulli independentes dá origem à variável aleatória binomial.

A distribuição categórica é a Bernoulli multivariada, em que somente uma categoria terá sucesso, ou seja, é a generalização da distribuição de Bernoulli para uma variável categórica aleatória com mais de dois resultados possíveis.

A distribuição multinomial é a binomial multivariada, ou seja, é a generalização da distribuição binomial para uma variável multinomial com mais de dois resultados possíveis. Para dois resultados possíveis ( $m = 2$ ), o experimento multinomial será apenas um experimento binomial, pois  $X_1$  contará o número de sucessos e  $X_2 = (n - X_1)$ , o número de fracassos.

A distribuição multinomial é a soma de categóricas. A distribuição categórica é um caso particular da multinomial em que o número de ensaios é 1.

### **Distribuição Normal**

A distribuição normal tem distribuição de probabilidade contínua, sendo uma das mais importantes em estatística. De acordo com Magalhães e Lima (2008), muitos dos fenômenos aleatórios podem ser explicados ou modelados segundo essa distribuição, com valores muito frequentes em torno da média, diminuindo a frequência à medida que se afasta da média.

De acordo com Ferreira (2009), se uma variável aleatória  $X$  tem distribuição normal com média  $\mu_X = \mu$  e variância  $\sigma_X^2 = \sigma^2$ , com  $\sigma^2 > 0$ , sua função densidade de probabilidade ( $f dp$ ) é dada a seguir:

$$f(x) = \phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} \text{ com } x \in (-\infty, +\infty),$$

em geral, usa-se notação  $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ .

A distribuição normal é uma curva que apresenta algumas características, tais como ser uma distribuição simétrica em relação a  $\mu$ , isto é, os valores se distribuem acima e abaixo do ponto médio em proporções semelhantes, a curva tem a forma de um sino, tem dois pontos de inflexão, é assintótica ( $\phi(x) \rightarrow 0$  quando  $x \rightarrow \pm\infty$ ) e o valor máximo de  $\phi(x)$  se dá para  $x = \mu$ .

### **Distribuição Normal Padrão**

Seja  $X$  uma variável aleatória que segue a distribuição normal ( $N(\mu, \sigma^2)$ ) e uma nova variável aleatória  $Z = \frac{X - \mu}{\sigma}$ , então, pelas propriedades da média e

da variância, segue que

$$E(Z) = E\left(\frac{X - \mu}{\sigma}\right) = \frac{1}{\sigma}E(X - \mu) = \frac{1}{\sigma}[E(X) - \mu] = 0,$$

$$Var(Z) = Var\left(\frac{X - \mu}{\sigma}\right) = \frac{1}{\sigma^2}Var(X - \mu) = \frac{1}{\sigma^2}Var(X) = 1.$$

Logo, a variável aleatória  $Z$  segue uma distribuição  $N(0, 1)$  e recebe o nome de distribuição normal padrão. Sua  $fdp$  é dada por

$$f(x) = \phi(Z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}, \quad x \in (-\infty, +\infty).$$

De acordo com Ferreira (2009), a transformação linear da variável  $X$  para  $Z$  não altera a distribuição de probabilidade.

### Aproximação da Binomial pela Normal

Antes de ser apresentado a aproximação da binomial pela normal, será definido o teorema central do limite.

De acordo com Magalhães e Lima (2008), o teorema central do limite é definido supondo uma amostra aleatória simples de tamanho  $n$  retirada de uma população com média  $\mu$  e variância  $\sigma^2$ , sem que a distribuição da variável aleatória seja especificada. Representando tal amostra por  $n$  variáveis aleatórias independentes  $(X_1, \dots, X_n)$  e, denotando sua média por  $\bar{X}$ , tem-se que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\bar{X} - \mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} = Z,$$

em que  $Z \sim N(0, 1)$ .

Em palavras, o teorema garante que, para grandes amostras, a distribuição da média amostral padronizada, independentemente da distribuição da variável de interesse, se comporta aproximadamente segundo uma distribuição normal padrão, sendo que quanto maior o tamanho da amostra, melhor é a aproximação.

De acordo com Magalhães (2006), uma consequência do teorema central do limite é a aproximação de cálculos de probabilidade da binomial pela normal.

Uma das mais importantes aproximações é da binomial pela normal, pois permite o uso da distribuição normal no cálculo de probabilidades aproximadas em casos nos quais seria trabalhoso calcular as probabilidades exatas pela binomial.

De acordo com Ferreira (2009), a distribuição binomial tem um comportamento que se aproxima cada vez mais de uma curva normal à medida que o tamanho da amostra aumenta e a probabilidade de sucesso se aproxima de  $\frac{1}{2}$ . Como a distribuição normal fica completamente definida conhecendo-se sua média e sua variância, para o cálculo das probabilidades aproximadas basta que sejam obtidas a média e a variância da normal.

Seja  $X$  uma variável aleatória binomial com parâmetros  $n$  e  $p$ . De acordo com Magalhães (2006), para  $n$  suficientemente grande, uma aproximação da binomial pela normal é apresentada a seguir:

$$X \sim N(\mu = np, \sigma^2 = npq).$$

Na prática, a aproximação é aceitável quando  $np \geq 5$  e  $nq \geq 5$ .

De acordo com Magalhães e Lima (2008), se  $X_1, X_2, \dots, X_k$  em que  $k$  é o número de variáveis aleatórias, forma-se uma sequência de variáveis aleatórias independentes e  $a_1, a_2, \dots, a_k$  são constantes quaisquer, então,  $W = \sum_{i=1}^k a_i X_i$  terá uma distribuição normal assintótica.

Seus parâmetros são determinados a partir das propriedades do valor esperado e da variância, apresentados a seguir:

$$\begin{aligned}\mu_W &= E\left(\sum_{i=1}^k a_i X_i\right) = \sum_{i=1}^k E(a_i X_i) = \sum_{i=1}^k a_i E(X_i) = \sum_{i=1}^k a_i \mu_i, \\ \sigma_W^2 &= Var\left(\sum_{i=1}^k a_i X_i\right) = \sum_{i=1}^k Var(a_i X_i) = \sum_{i=1}^k a_i^2 Var(X_i) = \sum_{i=1}^k a_i^2 \sigma_i^2.\end{aligned}$$

### Distribuição Normal Bivariada

De acordo com Dantas (2008), uma variável aleatória bidimensional  $(X, Y)$  segue uma distribuição normal bivariada com parâmetros  $\mu_X, \mu_Y, \sigma_X, \sigma_Y$  e  $\rho_{X,Y}$ , se sua *fdp* for dada por

$$f(x, y | \mu_X, \mu_Y, \sigma_X, \sigma_Y, \rho_{X,Y}) = \frac{1}{2\pi\sigma_X\sigma_Y\sqrt{1-\rho_{X,Y}^2}} e^{-\frac{1}{2(1-\rho_{X,Y}^2)}\left[\left(\frac{x-\mu_X}{\sigma_X}\right)^2 - 2\rho_{X,Y}\frac{x-\mu_X}{\sigma_X}\frac{y-\mu_Y}{\sigma_Y} + \left(\frac{y-\mu_Y}{\sigma_Y}\right)^2\right]},$$

em que  $\mu_X$  é a média de  $X$ ,  $\mu_Y$  é a média de  $Y$ ,  $\sigma_X$  é o desvio padrão de  $X$ ,  $\sigma_Y$  é o desvio padrão de  $Y$ ,  $\rho_{X,Y}$  é o coeficiente de correlação entre  $X$  e  $Y$ ,  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$  tal que  $-\infty < x, y < \infty$ ,  $\sigma_X, \sigma_Y > 0$ ,  $-\infty < \mu_X, \mu_Y < \infty$  e  $-1 \leq \rho_{X,Y} \leq 1$ .

### Densidade da razão entre duas variáveis aleatórias Normais

A *fdp* da razão de variáveis aleatórias que seguem distribuições normais tem atraído o interesse de diversos pesquisadores, porém, poucos materiais abordam este assunto. Neste estudo, existem as possibilidades das variáveis serem dependentes ou independentes. Elas são independentes se a informação sobre uma

delas não altera a probabilidade de ocorrência da outra, isto é, de acordo com Mood, Graybill e Boes (1974), considerando  $f(x, y)$  uma função densidade conjunta discreta ou contínua, X e Y são definidas independentes se, e somente se

$$f(x, y) = f(x)f(y).$$

Caso contrário, as variáveis X e Y são dependentes.

Posteriormente, ambos casos serão considerados na apresentação da densidade da razão entre elas.

### Considerando duas variáveis aleatórias normais dependentes

Sejam X e Y variáveis aleatórias dependentes que seguem uma distribuição normal bivariada com parâmetros  $\mu_X, \mu_Y, \sigma_X, \sigma_Y$  e  $\rho_{X,Y}$ . Pham-Gia, Turkkan e Marchand (2006) apresentam a *fdp* de  $W = \frac{X}{Y}$ , com  $Y \neq 0$ , dada por

$$f(w|\mu_X, \mu_Y, \sigma_X, \sigma_Y, \rho_{X,Y}) = \frac{\sqrt{(1 - \rho_{X,Y}^2)}\sigma_X\sigma_Y}{\pi\sigma_Y^2 w^2 - 2\rho_{X,Y}\sigma_X\sigma_Y w + \pi\sigma_X^2} e^{-\frac{\sigma_Y^2 \mu_X^2 - 2\rho_{X,Y}\sigma_X\sigma_Y\mu_X\mu_Y + \mu_Y^2 \sigma_X^2}{2(1 - \rho_{X,Y}^2)\sigma_X^2 \sigma_Y^2}} \left[ {}_1F_1 \left( 1; \frac{1}{2}; \theta_1(w) \right) \right].$$

em que  $\theta_1(w) = \frac{[\sigma_Y^2 \mu_X w - \rho_{X,Y} \sigma_X \sigma_Y (\mu_Y w + \mu_X) + \mu_Y \sigma_X^2]^2}{\sigma_X \sigma_Y 2(1 - \rho_{X,Y}^2)(\sigma_Y^2 w^2 - 2\rho_{X,Y} \sigma_X \sigma_Y w + \sigma_X^2)}$  e  ${}_1F_1 \left( 1; \frac{1}{2}; \theta_1(w) \right)$  é uma função hipergeométrica confluyente.

Pham-Gia, Turkkan e Marchand (2006), dizem que:

$${}_1F_1 \left( 1; \frac{1}{2}; \theta_1(w) \right) = H_{-2} \left( \sqrt{\theta_1(w)} \right) + H_{-2} \left( -\sqrt{\theta_1(w)} \right)$$

em que  $H_v(z)$  é chamada de função hermite.

A função hermite é definida da seguinte forma:

$$H_v(z) = \frac{1}{\Gamma(-v)} \int_0^\infty e^{-t^2-2tz} t^{-(v+1)} dt.$$

em que  $\Gamma()$  é a função gama.

Primeiramente, fazendo  $v = -2$  e  $z = \sqrt{\theta_1(w)}$ , tem-se:

$$H_{-2}(\sqrt{\theta_1(w)}) = \frac{1}{\Gamma(2)} \int_0^\infty e^{-t^2-2t\sqrt{\theta_1(w)}} t dt.$$

Segundo Ferreira (2009),  $\Gamma(m) = (m-1)!$ , logo,  $\Gamma(2) = 1! = 1$ . Então, tem-se:

$$H_{-2}(\sqrt{\theta_1(w)}) = \int_0^\infty e^{-t^2-2t\sqrt{\theta_1(w)}} t dt.$$

Seguindo o mesmo raciocínio, terá que:

$$H_{-2}(-\sqrt{\theta_1(w)}) = \int_0^\infty e^{-t^2+2t\sqrt{\theta_1(w)}} t dt.$$

Logo, tem-se:

$$\begin{aligned} {}_1F_1\left(1; \frac{1}{2}; \theta_1(w)\right) &= \int_0^\infty e^{-t^2-2t\sqrt{\theta_1(w)}} t dt + \int_0^\infty e^{-t^2+2t\sqrt{\theta_1(w)}} t dt \\ &= \int_0^\infty \left( e^{-t^2-2t\sqrt{\theta_1(w)}} t + e^{-t^2+2t\sqrt{\theta_1(w)}} t \right) dt \\ &= \int_0^\infty t e^{-t^2} \left( e^{-2t\sqrt{\theta_1(w)}} + e^{+2t\sqrt{\theta_1(w)}} \right) dt \\ &= \int_0^\infty t e^{-t^2} \left( \frac{1 + e^{4t\sqrt{\theta_1(w)}}}{e^{2t\sqrt{\theta_1(w)}}} \right) dt. \end{aligned}$$

Logo, a *fdp* será:

$$f(w|\mu_X, \mu_Y, \sigma_X, \sigma_Y, \rho_{X,Y}) = \frac{\sqrt{(1 - \rho_{X,Y}^2)}\sigma_X\sigma_Y}{\pi\sigma_Y^2 w^2 - 2\pi\rho_{X,Y}\sigma_X\sigma_Y w + \pi\sigma_X^2} e^{-\frac{\sigma_Y^2 \mu_X^2 - 2\rho_{X,Y}\sigma_X\sigma_Y\mu_X\mu_Y + \mu_Y^2 \sigma_X^2}{2(1 - \rho_{X,Y}^2)\sigma_X^2\sigma_Y^2}} \int_0^\infty t e^{-t^2} \left( \frac{1 + e^{4t\sqrt{\theta_1(w)}}}{e^{2t\sqrt{\theta_1(w)}}} \right) dt.$$

Cedilnik, Kosmelj e Blejec (2004), também apresentam a *fdp* de  $W = \frac{X}{Y}$ , com  $Y \neq 0$  e também considerando que  $X$  e  $Y$  são duas variáveis aleatórias dependentes que seguem uma distribuição normal bivariada com parâmetros  $\mu_X$ ,  $\mu_Y$ ,  $\sigma_X$ ,  $\sigma_Y$  e  $\rho_{X,Y}$ , mas de uma forma diferente, a qual é dada por

$$f(w|\mu_X, \mu_Y, \sigma_X, \sigma_Y, \rho_{X,Y}) = \frac{\sqrt{(1 - \rho_{X,Y}^2)}\sigma_X\sigma_Y}{\pi\sigma_Y^2 w^2 - 2\pi\rho_{X,Y}\sigma_X\sigma_Y w + \pi\sigma_X^2} e^{-\frac{\sigma_Y^2 \mu_X^2 - 2\rho_{X,Y}\sigma_X\sigma_Y\mu_X\mu_Y + \mu_Y^2 \sigma_X^2}{2(1 - \rho_{X,Y}^2)\sigma_X^2\sigma_Y^2}} \left[ 1 + \frac{R\phi(R)}{\varphi(R)} \right].$$

$$\text{em que } R = \frac{\sigma_Y^2 \mu_X w - \rho_{X,Y}\sigma_X\sigma_Y\mu_Y w - \rho_{X,Y}\sigma_Y\sigma_X\mu_X + \mu_Y\sigma_X^2}{\sigma_X\sigma_Y\sqrt{(1 - \rho_{X,Y}^2)}\sqrt{\sigma_Y^2 w^2 - 2\rho_{X,Y}\sigma_X\sigma_Y w + \sigma_X^2}},$$

$$\varphi(R) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{R^2}{2}} \text{ e } \phi(R) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\frac{R}{\sqrt{2}}} e^{-t^2} dt.$$

### Considerando duas variáveis aleatórias normais independentes

Sejam  $X$  e  $Y$  variáveis aleatórias independentes que seguem uma distribuição normal bivariada com parâmetros  $\mu_X$ ,  $\mu_Y$ ,  $\sigma_X$ ,  $\sigma_Y$  e  $\rho_{X,Y}=0$ . A *fdp*

de  $W = \frac{X}{Y}$ , com  $Y \neq 0$ , dada por Pham-Gia, Turkkan e Marchand (2006) será

$$\begin{aligned} f(w|\mu_X, \mu_Y, \sigma_X, \sigma_Y, \rho_{X,Y} = 0) &= \frac{\sigma_X \sigma_Y}{\pi \sigma_Y^2 w^2 + \pi \sigma_X^2} \\ &e\left[-\left(\frac{\sigma_Y^2 \mu_X^2 + \sigma_X^2 \mu_Y^2}{2\sigma_X^2 \sigma_Y^2}\right)\right] \left[ {}_1F_1\left(1; \frac{1}{2}; \theta_2(w)\right) \right] \\ &= \frac{\sigma_X \sigma_Y}{\pi \sigma_Y^2 w^2 + \pi \sigma_X^2} \\ &e\left[-\left(\frac{\sigma_Y^2 \mu_X^2 + \sigma_X^2 \mu_Y^2}{2\sigma_X^2 \sigma_Y^2}\right)\right] \int_0^\infty te^{-t^2} \left(\frac{1 + e^{4t\sqrt{\theta_2(w)}}}{e^{2t\sqrt{\theta_2(w)}}}\right) dt. \end{aligned}$$

$$\text{em que } \theta_2(w) = \frac{(\sigma_Y^2 \mu_X w + \mu_Y \sigma_X^2)^2}{2\sigma_X \sigma_Y^3 w^2 + 2\sigma_X^3 \sigma_Y} \geq 0.$$

Outra forma, também pode ser encontrada considerando a *fdp* de  $W = \frac{X}{Y}$ , com  $Y \neq 0$ , em que  $X$  e  $Y$  são variáveis aleatórias dependentes, dada por Cedilnik, Kosmelj e Blejec (2004). Basta considerar  $\rho_{X,Y} = 0$  que as variáveis  $X$  e  $Y$  serão independentes. Logo, tem-se

$$\begin{aligned} f(w|\mu_X, \mu_Y, \sigma_X, \sigma_Y, \rho_{X,Y} = 0) &= \frac{\sigma_X \sigma_Y}{\pi \sigma_Y^2 w^2 + \pi \sigma_X^2} \\ &e\left[-\left(\frac{\sigma_Y^2 \mu_X^2 + \sigma_X^2 \mu_Y^2}{2\sigma_X^2 \sigma_Y^2}\right)\right] \left[ 1 + \frac{R\phi(R)}{\varphi(R)} \right]. \end{aligned}$$

$$\text{em que } R = \frac{\sigma_Y^2 \mu_X w + \mu_Y \sigma_X^2}{\sigma_X \sigma_Y \sqrt{\sigma_Y^2 w^2 + \sigma_X^2}}, \varphi(R) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{R^2}{2}} \text{ e } \phi(R) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\frac{R}{\sqrt{2}}} e^{-t^2} dt.$$

## APÊNDICE B - Métodos Monte Carlo, Jackknife e Teste de Aleatorização

Estes métodos de reamostragem são apresentados neste tópico.

### Métodos Monte Carlo

Os métodos Monte Carlo, de acordo com Ferreira (2013), podem ser considerados como sendo aqueles que envolvem a simulação de experimentos em que pelo menos um componente aleatório esteja presente. Ao utilizar este método, deve-se estar apto a gerar dados aleatórios desses componentes, que possuem uma determinada distribuição de probabilidade. Portanto, o uso de um componente aleatório de alguma distribuição probabilística associado ao uso do computador, para gerar valores dessa distribuição é a característica básica desse método.

O nome Monte Carlo está relacionado com a cidade de mesmo nome, no Principado de Mônaco. O nome é originário, principalmente, em razão dos jogos de azar, decorrentes da roleta, que é um mecanismo simples para gerar números aleatórios (BUSSAB; MORETTIN, 2003).

De acordo com Ferreira (2013), os métodos Monte Carlo são utilizados de forma útil na avaliação das propriedades de um estimador, de um método de estimação intervalar, de um teste estatístico, na determinação de tamanhos amostrais e na solução direta de problemas estatísticos. É utilizado também para estudar os efeitos de violar suposições que estão por trás de algumas estatísticas. Por exemplo, o teste  $t$  para amostras emparelhadas supõe que as duas amostras aleatórias sejam retiradas de populações normais. O teste  $t$  é robusto quando esta suposição é violada e, utilizando-se o método Monte Carlo, pode-se mostrar essa robustez.

Uma das mais importantes aplicações do método Monte Carlo é no estudo da avaliação de testes estatísticos. Frequentemente torna-se muito complicado obter analiticamente informações sobre taxas de erro tipo I e poder. Uma maneira de obter as informações desejadas de forma eficiente e simples é utilizando o método de simulação Monte Carlo, evitando-se, assim, eventuais dificuldades analíticas.

### **Métodos *Jackknife***

Segundo Ferreira (2009), os procedimentos do método de *jackknife* são aqueles em que, a partir de uma amostra original, é descartada uma observação e, em seguida, o estimador de interesse é aplicado na amostra remanescente. Fazendo-se o descarte de uma observação por vez, para todas as observações amostrais, são obtidas tantas estimativas quanto for o tamanho da amostra. Essas estimativas sofrem um determinado tipo de alteração e são denominadas de pseudovalores.

O método de reamostragem *jackknife* é utilizado para estimar a variância e a tendência de um estimador qualquer. Segundo Ferreira (2013), uma das suas desvantagens é a necessidade de assumir normalidade para a distribuição do estimador na obtenção de intervalos de confiança ou na realização de testes de hipóteses. A grande vantagem é que este método é menos geral do que o método *bootstrap*, sendo mais simples de ser aplicado, principalmente em esquemas amostrais complexos.

Na Figura 23, uma ilustração do método *jackknife* é apresentada.

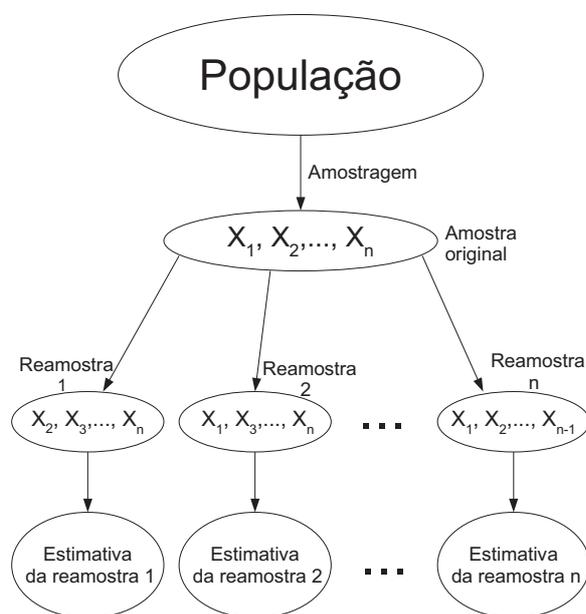


Figura 23 Ilustração do método de *jackknife*

em que  $n$  é o tamanho da amostra.

### Teste de Aleatorização

De acordo com Ferreira (2009), o teste de aleatorização, também chamado de teste de permutação, tem uma única diferença do *bootstrap*, a amostragem em cada etapa não é realizada com reposição. De acordo com Santos (2008), esse método foi introduzido em 1930 por Fisher e Pitman, com intuito de obter valores da estatística de interesse.

O teste de aleatoriedade é um procedimento em que se comparam valores de uma estatística observada nos dados com os valores desta estatística após a aleatorização das observações. A principal vantagem é que ele pode ser uti-

lizado para pequenas amostras, aleatórias ou não, e, como se trata de um teste não paramétrico, prescinde da distribuição da população da qual a amostra foi extraída.

Atualmente existem diversos softwares estatísticos, como, por exemplo, o R, que é possível aplicar o teste de aleatoriedade. A hipótese nula desse teste diz que não existe padrão nos dados, ou, se existe este padrão, isto é efeito do acaso, enquanto a hipótese alternativa afirma que os dados apresentam certo padrão.

### APÊNDICE C - Amostras Emparelhadas

No *IQS*, diferentes emparelhamentos amostrais no consumidor e no produto podem ser adotados. Imm, Lee e Lee (2011), quando fizeram o experimento para ilustrar o *IQS*, utilizaram o esquema apresentado na Tabela 10:

Tabela 10 Esquema de amostragem usado no estudo do *IQS*

Consumidor	Produto	
	Início	Fim
1	$X_1$	$Y_1$
2	$X_2$	$Y_2$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
m	$X_m$	$Y_m$

Observando o *IQS* proposto por esses autores, eles deveriam ter mencionado que, quando existe emparelhamento ou não no consumidor e/ou produto, implicará diferentes correlações do denominador e numerador do *IQS*. Sendo assim, haverá diferentes maneiras de fazer inferência.

Com uma visão estatística mais generalizada, observa-se que quatro casos diferentes podem acontecer, isto é, emparelhamento no consumidor e no produto, emparelhamento apenas no consumidor, emparelhamento apenas no produto

e nenhum emparelhamento. Esses casos são apresentados na Tabela 11. No trabalho de Imm, Lee e Lee (2011), o caso II foi adotado.

Tabela 11 Emparelhamento ou não no produto e/ou provador

Consumidor	Produto	
	Emparelhado	Não emparelhado
Emparelhado	I	II
Não emparelhado	III	IV

Na prática, as pesquisas sobre a aceitação global do produto são realizadas com pessoas que estejam no ponto de venda do produto e/ou em qualquer lugar, desde que sejam consumidores de tal produto.

Devido a este tipo de pesquisa, o caso I da Tabela 11 é pouco adotado, pois os consumidores que analisam o produto no início da vida de prateleira, dificilmente estarão disponíveis para analisar o mesmo produto no fim, outro motivo é a necessidade de ter que esperar o tempo da vida de prateleira para realizar o experimento. O caso III da Tabela 11 também não é viável, pois também haverá a necessidade de ter que esperar o tempo da vida de prateleira. O caso IV é fácil de ser adotado, mas, como o produto no início e no fim, será analisado no mesmo momento, é inviável usar consumidores diferentes. Com isso, o caso II é o mais adequado para este tipo de experimento.

#### **APÊNDICE D - Justificativa para uso da Inferência Via Computação Intensiva**

A seguir, são apresentados os resultados teórico-algébricos para realização da inferência exata e assintótica sobre o  $IQS$ .

### Inferência exata sobre o *IQS*

Serão apresentados somente os resultados para o fim da vida de prateleira, pois, para o início, o raciocínio é análogo.

Na análise sensorial, cada consumidor avalia o produto escolhendo uma das alternativas da escala hedônica e essas são convertidas numericamente. Seja uma escala hedônica de  $n$  pontos (classes), a  $i$ -ésima classe tem uma probabilidade de sucesso ( $p_i$ ) e de fracasso ( $q_i$ ), com  $i = 1, \dots, n$ ; entendido como um evento de uma distribuição Bernoulli.

Quando são consideradas  $n$  classes de uma distribuição Bernoulli, uma dessas é escolhida pelo consumidor, esse evento segue uma distribuição categórica.

Observe o estimador do *IQS* dado na seção 2.2. Note que  $Y$  é um experimento com notas dadas de acordo com uma escala hedônica de  $n$  pontos (classes), com probabilidades de sucesso  $p_i$ , com  $i = 1, \dots, n$ ;  $p_i \geq 0$  e  $\sum_{i=1}^n p_i = 1$ . Um número  $m$  de consumidores dará notas de forma independente e as variáveis  $Y_1, Y_2, \dots, Y_n$  correspondem ao número de ocorrência de cada um dos eventos, sendo estes números os valores  $y_1, y_2, \dots, y_n$ ; em que  $\sum_{i=1}^n y_i = m$ ,  $y_i \in \mathbb{N}$  e  $0 \leq y_i \leq m$ .

Este experimento é ilustrado na Tabela 12:

Tabela 12 Ilustração para melhor visualização de  $Y$

Escala Hedônica de $n$ pontos	$Y_i = y_i$	$(p_i)$	$(q_i)$
1	$Y_1 = y_1$	$p_1$	$q_1$
2	$Y_2 = y_2$	$p_2$	$q_2$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$n$	$Y_n = y_n$	$p_n$	$q_n$
Total	$m$	1	$n - 1$

Observando o APÊNDICE A, pode-se dizer que  $Y$  segue uma distribuição multinomial, ou seja:

$$Y \sim \text{Multinomial}(m, p_1, \dots, p_n).$$

Vale notar que uma variável multinomial é composta por  $n$  variáveis binomiais dependentes.

Os dados de uma variável que segue uma distribuição multinomial são agrupados. Nesse caso, a média amostral é dada por

$$\bar{Y} = \sum_{i=1}^n z_i fr_{y_i} = \sum_{i=1}^n i fr_{y_i},$$

em que  $z_i$  é o ponto médio da  $i$ -ésima classe no fim que será o próprio valor da classe. Tem-se que ( $z_i = i$ ),  $fr_{y_i}$  é a frequência relativa da  $i$ -ésima classe do fim da vida de prateleira.

Note que  $z_i = i$  pelo fato que foi pressuposto que a escala hedônica de  $n$  pontos varia de 1 a  $n$ .

Tem-se também que  $fr_{y_i} = \frac{fa_{y_i}}{m}$ , em que  $fa_{y_i}$  é a frequência absoluta da  $i$ -ésima classe do fim.

Logo,

$$\bar{Y} = \sum_{i=1}^n i \frac{fa_{y_i}}{m}.$$

No modelo  $IQS$ , tem-se que  $fa_{y_i} = y_i$ , pode-se dizer, então, que  $fa_{y_i} \sim \text{Binomial}(m, p_i)$ .

Logo, tem-se que o  $IQS$  estimado será da seguinte forma:

$$\widehat{IQS} = \frac{\sum_{i=1}^n \frac{i}{m} f a_{y_i}}{\sum_{i=1}^n \frac{i}{m} f a_{x_i}}.$$

Mas, a razão de combinação linear de binomiais correlacionadas é um assunto complexo que não será abordado no presente trabalho. Logo, será feita uma inferência assintótica sobre o  $IQS$ .

### Inferência Assintótica sobre o $IQS$

De acordo com Magalhães (2006), para uma amostra grande, pelo teorema central do limite, quando suas pressuposições são satisfeitas, uma aproximação da binomial pela normal pode ser realizada da seguinte forma:

$$X \sim N(\mu = mp, \sigma^2 = mpq),$$

em que  $m$  é o tamanho da amostra,  $p$  é a probabilidade de sucesso,  $q = 1 - p$  é a de fracasso e  $0 \leq p \leq 1$ .

No tópico inferência exata foi visto que a  $f a_{y_i}$  segue uma distribuição binomial. Como a razão da combinação linear de binomiais correlacionadas é um assunto complexo, foi realizada uma aproximação dessas binomiais pela normal, da seguinte forma:

$$f a_{y_i} \sim N(\mu_i = mp_i, \sigma_i^2 = mp_i q_i).$$

Veja que a variável aleatória  $W_i = \frac{i}{m} f a_{y_i}$ , com  $i = 1, \dots, n$ , também segue assintoticamente uma normal, da seguinte forma:

$$W_i = \frac{i}{m} f a_{y_i} \sim N \left( \mu_{W_i} = \frac{i}{m} m p_i, \sigma_{W_i}^2 = \left( \frac{i}{m} \right)^2 m p_i q_i \right),$$

$$W_i = \frac{i}{m} f a_{y_i} \sim N \left( \mu_{W_i} = i p_i, \sigma_{W_i}^2 = \frac{i^2}{m} p_i q_i \right).$$

Até agora, foram encontradas as distribuições que seguem  $f a_{y_i}$  e  $W_i = \frac{i}{m} f a_{y_i}$ . O próximo passo é encontrar a distribuição que segue  $W = \sum_{i=1}^n W_i = \sum_{i=1}^n \frac{i}{m} f a_{y_i}$ , ou seja, que segue a soma de normais assintóticas dependentes.

Conforme visto no APÊNDICE A, a soma de variáveis aleatórias independentes segue uma distribuição normal assintótica, mas de acordo com Wikipedia (2013), quando as variáveis aleatórias são dependentes, a soma pode não seguir uma distribuição normal assintótica.

Devido a dificuldade encontrada, tanto na pesquisa quanto algebricamente, pressupõe-se que essa soma segue uma distribuição normal assintótica. O valor esperado e a variância foram dadas a seguir.

De acordo com o APÊNDICE A, o valor esperado e a variância da soma da combinação linear de variáveis aleatórias independentes são apresentados, mas, neste trabalho, essas variáveis são dependentes. Nesse caso, de acordo com Mood, Graybill e Boes (1974), o valor esperado continua sendo o mesmo, mas a variância tem o acréscimo da covariância, que no caso independente é nula, ou seja:

$$\sigma_W^2 = Var(W) = Var \left( \sum_{i=1}^n a_i X_i \right)$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{i=1}^n \text{Var}(a_i X_i) + 2 \sum \sum_{i < j} a_i a_j \text{Cov}(X_i, X_j) \\
&= \sum_{i=1}^n a_i^2 \sigma_i^2 + 2 \sum \sum_{i < j} a_i a_j \text{Cov}(X_i, X_j).
\end{aligned}$$

Seja  $X_i = f a_{y_i}$ , com  $i = 1, \dots, n$ , formando uma sequência de variáveis aleatórias dependentes e  $a_i = \frac{i}{m}$  são constantes quaisquer, então:

$$W = \sum_{i=1}^n W_i = \sum_{i=1}^n a_i X_i = \sum_{i=1}^n \frac{i}{m} f a_{y_i}.$$

Portanto, aplicando o valor esperado e a variância das variáveis aleatórias dependentes, tem-se que  $W$  seguirá assintoticamente a Normal a seguir:

$$\begin{aligned}
W &\sim N \left( \sum_{i=1}^n \frac{i}{m} m p_i, \frac{\sum_{i=1}^n i^2 m p_i q_i + 2 \sum \sum_{i < j} i j \text{Cov}(X_i, X_j)}{m^2} \right) \\
&\Rightarrow W \sim N \left( \sum_{i=1}^n i p_i, \frac{\sum_{i=1}^n i^2 m p_i q_i + 2 \sum \sum_{i < j} i j (-m p_i p_j)}{m^2} \right)
\end{aligned}$$

Vale ressaltar que foi verificado a validação de que  $W$  segue assintoticamente a normal apresentada anteriormente, utilizando o software R, concluindo que a transformação linear do presente trabalho está coerente.

Para este caso particular, ou seja,  $W$  segue assintoticamente uma distribuição normal e que este  $W$  é o numerador do  $IQS$ , chega-se a conclusão que o  $IQS$  pode ser uma razão de distribuições normais assintóticas.

Esse resultado obtido é inviável no estudo da vida de prateleira, pelo fato de que para obter uma boa aproximação, as amostras devem ser grandes, e nesse tipo de estudo, geralmente, os tamanhos mais usados não são, pois quanto maior o tamanho amostral, maior o custo do experimento.

Portanto, quando a teoria exata e assintótica são intratáveis ou inviáveis, sendo, assim, uma tarefa difícil analiticamente deduzir teoricamente a distribuição amostral do estimador do  $IQS$ , o uso dos métodos *bootstrap*, por meio da inferência via computação intensiva, se justifica.

#### **APÊNDICE E - Probabilidades de sucesso para a realização das simulações Monte Carlo do erro tipo I e poder do teste**

Para obter  $IQS=1$ , basta que as probabilidades de sucesso no início e no fim sejam iguais ( $p_{iF} = p_{iI}$ ), com  $i = 1, \dots, k$ ; pois:

$$IQS = \frac{\overline{AG_F}}{\overline{AG_I}} = \frac{\mu_Y}{\mu_X} = \frac{\sum_{i=1}^n ip_{iF}}{\sum_{i=1}^n ip_{iI}} = \frac{\sum_{i=1}^n ip_{iI}}{\sum_{i=1}^n ip_{iI}} = 1$$

Para obter  $IQS=0,92$ ; as probabilidades de sucesso são dadas na Tabela 13:

Tabela 13 Probabilidades de sucesso para obter  $IQS=0,92$ 


---

$k=5$	$p_I = \left\{ \frac{7}{40}, \frac{3}{16}, \frac{1}{5}, \frac{17}{80}, \frac{9}{40} \right\}$
	$p_F = \left\{ \frac{9}{40}, \frac{17}{80}, \frac{1}{5}, \frac{3}{16}, \frac{7}{40} \right\}$

---

$k=7$	$p_I = \left\{ \frac{1}{8}, \frac{11}{84}, \frac{23}{168}, \frac{1}{7}, \frac{25}{168}, \frac{13}{84}, \frac{9}{56} \right\}$
	$p_F = \left\{ \frac{9}{56}, \frac{13}{84}, \frac{25}{168}, \frac{1}{7}, \frac{23}{168}, \frac{11}{84}, \frac{1}{8} \right\}$

---

$k=9$	$p_I = \left\{ \frac{7}{72}, \frac{29}{288}, \frac{5}{48}, \frac{31}{288}, \frac{1}{9}, \frac{11}{96}, \frac{17}{144}, \frac{35}{288}, \frac{1}{8} \right\}$
	$p_F = \left\{ \frac{1}{8}, \frac{35}{288}, \frac{17}{144}, \frac{11}{96}, \frac{1}{9}, \frac{31}{288}, \frac{5}{48}, \frac{29}{288}, \frac{7}{72} \right\}$

---

Na Tabela 14, são apresentadas as probabilidades de sucesso para obter  $IQS=0,85$ . Deve-se ressaltar que o valor do  $IQS$  foi arredondado.

Tabela 14 Probabilidades de sucesso para obter  $IQS=0,85$ 


---

$k=5$	$p_I = \left\{ \frac{3}{20}, \frac{7}{40}, \frac{1}{5}, \frac{9}{40}, \frac{1}{4} \right\}$
	$p_F = \left\{ \frac{1}{4}, \frac{9}{40}, \frac{1}{5}, \frac{7}{40}, \frac{3}{20} \right\}$

---

$k=7$	$p_I = \left\{ \frac{3}{28}, \frac{5}{42}, \frac{11}{84}, \frac{1}{7}, \frac{13}{84}, \frac{1}{6}, \frac{5}{28} \right\}$
	$p_F = \left\{ \frac{5}{28}, \frac{1}{6}, \frac{13}{84}, \frac{1}{7}, \frac{11}{84}, \frac{5}{42}, \frac{3}{28} \right\}$

---

$k=9$	$p_I = \left\{ \frac{1}{12}, \frac{13}{144}, \frac{7}{72}, \frac{5}{48}, \frac{1}{9}, \frac{17}{144}, \frac{1}{8}, \frac{19}{144}, \frac{5}{36} \right\}$
	$p_F = \left\{ \frac{5}{36}, \frac{19}{144}, \frac{1}{8}, \frac{17}{144}, \frac{1}{9}, \frac{5}{48}, \frac{7}{72}, \frac{13}{144}, \frac{1}{12} \right\}$

---

Na Tabela 15, são apresentadas as probabilidades de sucesso para obter  $IQS=0,71$ . Deve-se ressaltar que o valor do  $IQS$  foi arredondado.

Tabela 15 Probabilidades de sucesso para obter  $IQS=0,71$

$k=5$	$p_I = \left\{ \frac{1}{10}; \frac{3}{20}; \frac{1}{5}; \frac{1}{4}; \frac{3}{10} \right\}$
	$p_F = \left\{ \frac{3}{10}; \frac{1}{4}; \frac{1}{5}; \frac{3}{20}; \frac{1}{10} \right\}$
$k=7$	$p_I = \left\{ \frac{1}{14}; \frac{2}{21}; \frac{5}{42}; \frac{1}{7}; \frac{1}{6}; \frac{4}{21}; \frac{3}{14} \right\}$
	$p_F = \left\{ \frac{3}{14}; \frac{4}{21}; \frac{1}{6}; \frac{1}{7}; \frac{5}{42}; \frac{2}{21}; \frac{1}{14} \right\}$
$k=9$	$p_I = \left\{ \frac{1}{18}; \frac{5}{72}; \frac{1}{12}; \frac{7}{72}; \frac{1}{9}; \frac{1}{8}; \frac{5}{36}; \frac{11}{72}; \frac{1}{6} \right\}$
	$p_F = \left\{ \frac{1}{6}; \frac{11}{72}; \frac{5}{36}; \frac{1}{8}; \frac{1}{9}; \frac{7}{72}; \frac{1}{12}; \frac{5}{72}; \frac{1}{18} \right\}$

Para obter  $IQS=0,05$ ; basta usar as probabilidades da Tabela 16:

Tabela 16 Probabilidades de sucesso para obter  $IQS=0,5$

$k=5$	$p_I = \left\{ 0; \frac{1}{10}; \frac{1}{5}; \frac{3}{10}; \frac{2}{5} \right\}$
	$p_F = \left\{ \frac{2}{5}; \frac{3}{10}; \frac{1}{5}; \frac{1}{10}; 0 \right\}$
$k=7$	$p_I = \left\{ 0; \frac{1}{21}; \frac{2}{21}; \frac{1}{7}; \frac{4}{21}; \frac{5}{21}; \frac{2}{7} \right\}$
	$p_F = \left\{ \frac{2}{7}; \frac{5}{21}; \frac{4}{21}; \frac{1}{7}; \frac{2}{21}; \frac{1}{21}; 0 \right\}$
$k=9$	$p_I = \left\{ 0; \frac{1}{36}; \frac{1}{18}; \frac{1}{12}; \frac{1}{9}; \frac{5}{36}; \frac{1}{6}; \frac{7}{36}; \frac{2}{9} \right\}$
	$p_F = \left\{ \frac{2}{9}; \frac{7}{36}; \frac{1}{6}; \frac{5}{36}; \frac{1}{9}; \frac{1}{12}; \frac{1}{18}; \frac{1}{36}; 0 \right\}$

Para calcular os  $IQS$  da Tabela 13, 14, 15 e 16, aplique a fórmula usada na obtenção do  $IQS = 1$ , com as probabilidades de sucesso fornecidas nas tabelas.

## APÊNDICE F - Rotinas utilizadas no presente trabalho

### Rotina que simula dados multinomiais com $\rho$ desejado.

```
xBelongsTo <- function(x, limits)
{
  k <- length(limits)
  i <- 1
  achou <- FALSE
  while ((i <= k) & (achou==FALSE))
  {
    if (x <= limits[i]) achou <- TRUE else
    achou <- FALSE
    if (!achou) i <- i + 1
  }
  return(i)
}
```

em que  $x$  recebe os dados contínuos que o usuário deseja categorizar. Neste trabalho, esses dados seguem uma distribuição normal bivariada, `limits` recebe o vetor com os quantis especificados.

A rotina a seguir fornece este vetor.

```
rCorrelatedMultnomial <- function(m = 1, pi_1, pi_2, rho = 0.0)
{
  k <- length(pi_1)
  if (k != length(pi_2))
    stop("Error! the vectors of parameters should have the same dimensions!")
  if ((sum(pi_1) != 1) | (sum(pi_2) != 1))
    stop("Error! the vectors of parameters must sum 1!")
  Sigma <- diag(2)
  Sigma[1, 2] <- rho
  Sigma[2, 1] <- rho
  mu <- c(0, 0)
  library(MASS)
```

```

x <- mvrnorm(m, mu, Sigma)
limits1 <- qnorm(cumsum(pi_1[1:(k-1)]))
limits2 <- qnorm(cumsum(pi_2[1:(k-1)]))
y <- apply(matrix(x[,1], m, 1), 1, xBelongsTo, limits1)
y <- cbind(y, apply(matrix(x[,2], m, 1), 1, xBelongsTo, limits2))
return(y)
}

```

em que  $m$  recebe o número de consumidores,  $\rho$  recebe o coeficiente de correlação,  $\pi_{i_1}$  e  $\pi_{i_2}$  recebem os vetores de probabilidades de sucesso no início e no fim da vida de prateleira, respectivamente.

### Rotina do teste *BNP*

```

bootstrapNP<-function(x, r, alpha)
{
  iqs<-numeric(0)
  m<-nrow(x)
  for(i in 1:r)
  {
    a<-sample(m, m, replace="TRUE")
    iqs<-c(iqs, mean(x[a,][,2])/mean(x[a,][,1]))
  }
  ls<-quantile(sort(iqs), 1-alpha)
  return(list(li=0, ls=ls, iqs=iqs))
}

```

em que  $x$  recebe a amostra de um estudo de vida de prateleira, uma matriz  $m \times 2$ , sendo a primeira coluna os dados no início e a segunda, os dados no fim, ambas seguem uma distribuição multinomial,  $r$  recebe o número de reamostragens *bootstrap* e  $\alpha$  recebe o nível de significância desejado.

### Rotina do teste *BP*

```

bootSamples <-function(it, m, pi_1, pi_2, rho)
{
  Yb <- rCorrelatedMultnomial(m, pi_1, pi_2, rho)
  IQSb <- mean(Yb[,2])/mean(Yb[,1])
  return(IQSb)
}

bootParIQS <- function(y, k, B = 1000)
{
  m <- nrow(y)
  pi_1 <- 1:k
  IQS <- mean(y[,2])/mean(y[,1])
  for (i in 1:k)
  {
    pi_1[i] <- sum(y==i) / (2 * m)
  }
  pi_2 <- pi_1
  rho <- cor(y[,1], y[,2], method="spearman")
  it <- matrix(1:B, B, 1)
  IQSb <- apply(it, 1, bootSamples, m, pi_1, pi_2, rho)
  IQSb <- c(IQSb, IQS)
  valorp <- sum(IQSb <= IQS) / (B + 1)
  return(list(IQS = IQS, valorp=valorp))
}

```

em que *it* é auxiliar, *y* recebe os dados de um estudo de vida de prateleira, por exemplo, os dados fornecidos pela rotina da função *rCorrelatedMultnomial*, *k* recebe o número de pontos da escala hedônica e *B* recebe o número de reamostras *bootstrap*.

### Rotina do teste *t* para amostras emparelhadas

```
t.test(xinicio,xfim,alternative="greater",conf.level=0.95,paired=T)
```

em que `xinicio` recebe os dados no início da vida de prateleira, `xfim` recebe os dados no fim, `alternative="greater"` está especificando que o teste é unilateral à direita, `conf.level=0.95` está indicando que o nível de confiança adotado é de 95% e `paired=T` está indicando que o teste é para amostras emparelhadas.

### Rotina da simulação Monte Carlo do teste *BNP*

```
prH0BNP<-function(m,pi_1,pi_2,rho,r,s,alpha)
{
  ic<-numeric(0)
  for(i in 1:s)
  {
    y<-rCorrelatedMultnomial(m, pi_1, pi_2, rho)
    a<-bootstrapNP(y,r,alpha)
    ic<-c(ic,a$ls)
  }
  propRH0 <- length(ic[ic<1])/s
  return(propRH0)
}
```

em que `s` recebe o número de repetições (simulações).

### Rotina da simulação Monte Carlo do teste *BP*

```
prH0BP<-function(m,pi_1,pi_2,rho,k,B,r,alpha)
{
  vp<-numeric(0)
  for(i in 1:r)
  {
    y<-rCorrelatedMultnomial(m, pi_1, pi_2, rho)
    a<-bootParIQS(y, k, B)
    vp<-c(vp,a$p.value)
  }
  propRH0 <- length(vp[vp<=alpha])/r
  return(propRH0)
}
```

### Rotina da simulação Monte Carlo do teste $t$ para amostras emparelhadas

```
prH0testet<-function(m,pi_1,pi_2,rho,r,alpha)
{
  vp<-numeric(0)
  for(i in 1:r)
  {
    y<-rCorrelatedMultnomial(m, pi_1, pi_2, rho)
    a<-t.test(y[,1],y[,2],alternative="greater",conf.level=1-alpha,paired=T)
    vp<-c(vp,a$p.value)
  }
  propRH0 <- length(vp[vp<=alpha])/r
  return(propRH0)
}
```

### Rotina do intervalo de confiança *bootstrap* de percentis simples

```
ICBOOTPS<-function(x,r,alpha)
{
  iqs<-numeric(0)
  n<-nrow(x)
  for(i in 1:r)
  {
    a<-sample(n,n,replace="TRUE")
    iqs<-c(iqs,mean(x[a,][,2])/mean(x[a,][,1]))
  }
  li<-quantile(sort(iqs),alpha/2)
  ls<-quantile(sort(iqs),(1-alpha/2))
  return(list(li=li, ls=ls))
}
```

### APÊNDICE G - Simulações Monte Carlo do poder do teste $BNP$ , considerando $IQS=0,85; 0,71$ e $0,5$

Tabela 17 Simulação Monte Carlo do poder do teste *BNP*, considerando  $IQS=0,85$ 

<b><math>IQS=0,85</math></b>						
$\rho = 0,5$						
		Número de consumidores				
Número de pontos da EH		m=10	m=30	m=50	m=100	m=200
$\alpha = 0,01$	k=5	0,197	0,394	0,612	0,892	0,992
	k=7	0,220	0,383	0,557	0,826	0,991
	k=9	0,153	0,377	0,539	0,830	0,986
$\alpha = 0,05$	k=5	0,311	0,593	0,784	0,960	0,998
	k=7	0,317	0,549	0,714	0,942	0,999
	k=9	0,279	0,539	0,712	0,937	0,998
$\alpha = 0,10$	k=5	0,403	0,697	0,860	0,985	0,999
	k=7	0,391	0,710	0,836	0,978	1,000
	k=9	0,406	0,657	0,815	0,974	1,000
$\rho = 0,7$						
		Número de consumidores				
Número de pontos da EH		m=10	m=30	m=50	m=100	m=200
$\alpha = 0,01$	k=5	0,273	0,554	0,792	0,983	1,000
	k=7	0,260	0,534	0,729	0,964	1,000
	k=9	0,244	0,557	0,748	0,959	1,000
$\alpha = 0,05$	k=5	0,389	0,742	0,912	0,995	1,000
	k=7	0,428	0,743	0,899	0,989	1,000
	k=9	0,383	0,703	0,883	0,992	1,000
$\alpha = 0,10$	k=5	0,496	0,837	0,963	1,000	1,000
	k=7	0,497	0,853	0,946	1,000	1,000
	k=9	0,528	0,817	0,938	0,997	1,000
$\rho = 0,9$						
		Número de consumidores				
Número de pontos da EH		m=10	m=30	m=50	m=100	m=200
$\alpha = 0,01$	k=5	0,508	0,892	0,990	1,000	1,000
	k=7	0,513	0,918	0,988	1,000	1,000
	k=9	0,516	0,918	0,991	1,000	1,000
$\alpha = 0,05$	k=5	0,640	0,963	0,998	1,000	1,000
	k=7	0,677	0,972	0,997	1,000	1,000
	k=9	0,665	0,973	0,997	1,000	1,000
$\alpha = 0,10$	k=5	0,751	0,985	0,999	1,000	1,000
	k=7	0,775	0,990	1,000	1,000	1,000
	k=9	0,763	0,989	0,999	1,000	1,000

Tabela 18 Simulação Monte Carlo do poder do teste *BNP*, considerando  $IQS=0,71$ 

<i>IQS=0,71</i>						
$\rho = 0,5$						
		Número de consumidores				
Número de pontos da EH		m=10	m=30	m=50	m=100	m=200
$\alpha = 0,01$	k=5	0,582	0,941	0,993	1,000	1,000
	k=7	0,543	0,927	0,988	1,000	1,000
	k=9	0,546	0,896	0,991	1,000	1,000
$\alpha = 0,05$	k=5	0,713	0,989	1,000	1,000	1,000
	k=7	0,712	0,977	0,999	1,000	1,000
	k=9	0,698	0,977	0,999	1,000	1,000
$\alpha = 0,10$	k=5	0,840	0,998	1,000	1,000	1,000
	k=7	0,804	0,983	1,000	1,000	1,000
	k=9	0,790	0,988	1,000	1,000	1,000
$\rho = 0,7$						
		Número de consumidores				
Número de pontos da EH		m=10	m=30	m=50	m=100	m=200
$\alpha = 0,01$	k=5	0,723	0,991	1,000	1,000	1,000
	k=7	0,706	0,991	0,999	1,000	1,000
	k=9	0,711	0,984	1,000	1,000	1,000
$\alpha = 0,05$	k=5	0,848	0,997	1,000	1,000	1,000
	k=7	0,874	0,999	1,000	1,000	1,000
	k=9	0,841	0,999	1,000	1,000	1,000
$\alpha = 0,10$	k=5	0,928	0,999	1,000	1,000	1,000
	k=7	0,912	1,000	1,000	1,000	1,000
	k=9	0,904	1,000	1,000	1,000	1,000
$\rho = 0,9$						
		Número de consumidores				
Número de pontos da EH		m=10	m=30	m=50	m=100	m=200
$\alpha = 0,01$	k=5	0,958	1,000	1,000	1,000	1,000
	k=7	0,956	1,000	1,000	1,000	1,000
	k=9	0,967	1,000	1,000	1,000	1,000
$\alpha = 0,05$	k=5	0,986	1,000	1,000	1,000	1,000
	k=7	0,989	1,000	1,000	1,000	1,000
	k=9	0,989	1,000	1,000	1,000	1,000
$\alpha = 0,10$	k=5	0,997	1,000	1,000	1,000	1,000
	k=7	0,999	1,000	1,000	1,000	1,000
	k=9	0,999	1,000	1,000	1,000	1,000

Tabela 19 Simulação Monte Carlo do poder do teste *BNP*, considerando  $IQS=0,5$ 

<i>IQS=0,5</i>						
$\rho = 0,5$						
		Número de consumidores				
Número de pontos da EH		m=10	m=30	m=50	m=100	m=200
$\alpha = 0,01$	k=5	0,999	1,000	1,000	1,000	1,000
	k=7	0,998	1,000	1,000	1,000	1,000
	k=9	0,993	1,000	1,000	1,000	1,000
$\alpha = 0,05$	k=5	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000
	k=7	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000
	k=9	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000
$\alpha = 0,10$	k=5	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000
	k=7	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000
	k=9	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000
$\rho = 0,7$						
		Número de consumidores				
Número de pontos da EH		m=10	m=30	m=50	m=100	m=200
$\alpha = 0,01$	k=5	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000
	k=7	0,999	1,000	1,000	1,000	1,000
	k=9	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000
$\alpha = 0,05$	k=5	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000
	k=7	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000
	k=9	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000
$\alpha = 0,10$	k=5	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000
	k=7	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000
	k=9	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000
$\rho = 0,9$						
		Número de consumidores				
Número de pontos da EH		m=10	m=30	m=50	m=100	m=200
$\alpha = 0,01$	k=5	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000
	k=7	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000
	k=9	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000
$\alpha = 0,05$	k=5	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000
	k=7	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000
	k=9	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000
$\alpha = 0,10$	k=5	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000
	k=7	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000
	k=9	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000

**APÊNDICE H - Simulações Monte Carlo do poder do teste  $BP$ , considerando  $IQS=0,85; 0,71$  e  $0,5$**

Tabela 20 Simulação Monte Carlo do poder do teste  $BP$ , considerando  $IQS=0,85$

$IQS=0,85$						
$\rho = 0,5$						
		Número de consumidores				
Número de pontos da EH		m=10	m=30	m=50	m=100	m=200
$\alpha = 0,01$	k=5	0,084	0,240	0,421	0,779	0,978
	k=7	0,084	0,232	0,414	0,723	0,965
	k=9	0,079	0,208	0,382	0,705	0,958
$\alpha = 0,05$	k=5	0,271	0,531	0,754	0,942	0,999
	k=7	0,269	0,515	0,699	0,931	0,999
	k=9	0,254	0,502	0,687	0,924	0,996
$\alpha = 0,10$	k=5	0,294	0,543	0,745	0,938	0,997
	k=7	0,238	0,525	0,704	0,930	0,991
	k=9	0,253	0,490	0,674	0,922	0,988
$\rho = 0,7$						
		Número de consumidores				
Número de pontos da EH		m=10	m=30	m=50	m=100	m=200
$\alpha = 0,01$	k=5	0,119	0,375	0,600	0,906	0,999
	k=7	0,121	0,344	0,582	0,892	0,988
	k=9	0,110	0,349	0,561	0,888	0,985
$\alpha = 0,05$	k=5	0,317	0,701	0,881	0,996	1,000
	k=7	0,342	0,664	0,852	0,986	1,000
	k=9	0,334	0,629	0,845	0,988	1,000
$\alpha = 0,10$	k=5	0,340	0,658	0,881	0,988	1,000
	k=7	0,322	0,661	0,864	0,984	1,000
	k=9	0,343	0,649	0,830	0,988	1,000
$\rho = 0,9$						
		Número de consumidores				
Número de pontos da EH		m=10	m=30	m=50	m=100	m=200
$\alpha = 0,01$	k=5	0,215	0,684	0,919	0,989	1,000
	k=7	0,252	0,727	0,936	0,998	1,000
	k=9	0,266	0,734	0,939	0,999	1,000
$\alpha = 0,05$	k=5	0,526	0,932	0,994	1,000	1,000
	k=7	0,552	0,949	0,993	1,000	1,000
	k=9	0,537	0,941	0,995	1,000	1,000
$\alpha = 0,10$	k=5	0,548	0,947	0,992	1,000	1,000
	k=7	0,560	0,972	0,995	1,000	1,000
	k=9	0,702	0,983	1,000	1,000	1,000

Tabela 21 Simulação Monte Carlo do poder do teste  $BP$ , considerando  $IQS=0,71$ 

$IQS=0,71$						
$\rho = 0,5$						
		Número de consumidores				
Número de pontos da EH		m=10	m=30	m=50	m=100	m=200
$\alpha = 0,01$	k=5	0,352	0,836	0,977	1,000	1,000
	k=7	0,321	0,811	0,963	1,000	1,000
	k=9	0,307	0,811	0,962	1,000	1,000
$\alpha = 0,05$	k=5	0,685	0,971	0,998	1,000	1,000
	k=7	0,654	0,971	0,998	1,000	1,000
	k=9	0,637	0,957	0,998	1,000	1,000
$\alpha = 0,10$	k=5	0,789	0,991	1,000	1,000	1,000
	k=7	0,773	0,988	1,000	1,000	1,000
	k=9	0,758	0,986	0,998	1,000	1,000
$\rho = 0,7$						
		Número de consumidores				
Número de pontos da EH		m=10	m=30	m=50	m=100	m=200
$\alpha = 0,01$	k=5	0,501	0,952	0,999	1,000	1,000
	k=7	0,457	0,949	0,997	1,000	1,000
	k=9	0,437	0,934	0,992	1,000	1,000
$\alpha = 0,05$	k=5	0,823	0,999	1,000	1,000	1,000
	k=7	0,785	0,997	1,000	1,000	1,000
	k=9	0,794	0,996	1,000	1,000	1,000
$\alpha = 0,10$	k=5	0,909	1,000	1,000	1,000	1,000
	k=7	0,888	1,000	1,000	1,000	1,000
	k=9	0,866	0,998	1,000	1,000	1,000
$\rho = 0,9$						
		Número de consumidores				
Número de pontos da EH		m=10	m=30	m=50	m=100	m=200
$\alpha = 0,01$	k=5	0,758	0,999	1,000	1,000	1,000
	k=7	0,804	0,999	1,000	1,000	1,000
	k=9	0,792	1,000	1,000	1,000	1,000
$\alpha = 0,05$	k=5	0,956	1,000	1,000	1,000	1,000
	k=7	0,965	1,000	1,000	1,000	1,000
	k=9	0,973	1,000	1,000	1,000	1,000
$\alpha = 0,10$	k=5	0,991	1,000	1,000	1,000	1,000
	k=7	0,987	1,000	1,000	1,000	1,000
	k=9	0,989	1,000	1,000	1,000	1,000

Tabela 22 Simulação Monte Carlo do poder do teste  $BP$ , considerando  $IQS=0,5$ 

$IQS=0,5$						
$\rho = 0,5$						
		Número de consumidores				
Número de pontos da EH		m=10	m=30	m=50	m=100	m=200
$\alpha = 0,01$	k=5	0,958	1,000	1,000	1,000	1,000
	k=7	0,953	1,000	1,000	1,000	1,000
	k=9	0,920	1,000	1,000	1,000	1,000
$\alpha = 0,05$	k=5	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000
	k=7	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000
	k=9	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000
$\alpha = 0,10$	k=5	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000
	k=7	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000
	k=9	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000
$\rho = 0,7$						
		Número de consumidores				
Número de pontos da EH		m=10	m=30	m=50	m=100	m=200
$\alpha = 0,01$	k=5	0,994	1,000	1,000	1,000	1,000
	k=7	0,990	1,000	1,000	1,000	1,000
	k=9	0,985	1,000	1,000	1,000	1,000
$\alpha = 0,05$	k=5	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000
	k=7	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000
	k=9	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000
$\alpha = 0,10$	k=5	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000
	k=7	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000
	k=9	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000
$\rho = 0,9$						
		Número de consumidores				
Número de pontos da EH		m=10	m=30	m=50	m=100	m=200
$\alpha = 0,01$	k=5	0,999	1,000	1,000	1,000	1,000
	k=7	0,999	1,000	1,000	1,000	1,000
	k=9	0,999	1,000	1,000	1,000	1,000
$\alpha = 0,05$	k=5	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000
	k=7	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000
	k=9	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000
$\alpha = 0,10$	k=5	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000
	k=7	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000
	k=9	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000

**APÊNDICE I - Simulações Monte Carlo do poder do teste  $t$  para amostras emparelhadas, considerando  $IQS=0,85; 0,71$  e  $0,5$**

Tabela 23 Simulação Monte Carlo do poder do teste  $t$ , considerando  $IQS=0,85$

<b><math>IQS=0,85</math></b>						
$\rho = 0,5$						
		Número de consumidores				
Número de pontos da EH		m=10	m=30	m=50	m=100	m=200
$\alpha = 0,01$	k=5	0,080	0,295	0,500	0,853	0,998
	k=7	0,081	0,267	0,478	0,806	0,990
	k=9	0,077	0,248	0,448	0,781	0,989
$\alpha = 0,05$	k=5	0,246	0,567	0,766	0,958	1,000
	k=7	0,263	0,507	0,724	0,942	0,997
	k=9	0,247	0,513	0,712	0,941	0,996
$\alpha = 0,10$	k=5	0,410	0,711	0,844	0,977	1,000
	k=7	0,392	0,690	0,849	0,972	0,999
	k=9	0,381	0,669	0,827	0,964	1,000
$\rho = 0,7$						
		Número de consumidores				
Número de pontos da EH		m=10	m=30	m=50	m=100	m=200
$\alpha = 0,01$	k=5	0,090	0,483	0,705	0,973	1,000
	k=7	0,102	0,399	0,705	0,963	1,000
	k=9	0,096	0,415	0,660	0,963	0,998
$\alpha = 0,05$	k=5	0,337	0,717	0,881	0,989	1,000
	k=7	0,314	0,699	0,892	0,991	0,999
	k=9	0,335	0,683	0,868	0,992	1,000
$\alpha = 0,10$	k=5	0,505	0,829	0,953	0,998	1,000
	k=7	0,508	0,817	0,952	0,996	1,000
	k=9	0,446	0,821	0,950	0,995	1,000
$\rho = 0,9$						
		Número de consumidores				
Número de pontos da EH		m=10	m=30	m=50	m=100	m=200
$\alpha = 0,01$	k=5	0,253	0,857	0,987	1,000	1,000
	k=7	0,219	0,856	0,982	1,000	1,000
	k=9	0,265	0,868	0,982	1,000	1,000
$\alpha = 0,05$	k=5	0,613	0,979	0,998	1,000	1,000
	k=7	0,586	0,970	1,000	1,000	1,000
	k=9	0,591	0,969	1,000	1,000	1,000
$\alpha = 0,10$	k=5	0,786	0,988	0,999	1,000	1,000
	k=7	0,747	0,986	1,000	1,000	1,000
	k=9	0,778	0,990	1,000	1,000	1,000

Tabela 24 Simulação Monte Carlo do poder do teste  $t$ , considerando  $IQS=0,71$ 

$IQS=0,71$						
$\rho = 0,5$						
		Número de consumidores				
Número de pontos da EH		m=10	m=30	m=50	m=100	m=200
$\alpha = 0,01$	k=5	0,347	0,907	0,998	1,000	1,000
	k=7	0,288	0,872	0,991	1,000	1,000
	k=9	0,299	0,860	0,988	1,000	1,000
$\alpha = 0,05$	k=5	0,655	0,984	0,999	1,000	1,000
	k=7	0,633	0,998	1,000	1,000	1,000
	k=9	0,605	0,967	1,000	1,000	1,000
$\alpha = 0,10$	k=5	0,786	0,995	1,000	1,000	1,000
	k=7	0,776	0,992	1,000	1,000	1,000
	k=9	0,760	0,990	1,000	1,000	1,000
$\rho = 0,7$						
		Número de consumidores				
Número de pontos da EH		m=10	m=30	m=50	m=100	m=200
$\alpha = 0,01$	k=5	0,491	0,991	1,000	1,000	1,000
	k=7	0,454	0,983	1,000	1,000	1,000
	k=9	0,459	0,969	0,998	1,000	1,000
$\alpha = 0,05$	k=5	0,828	1,000	1,000	1,000	1,000
	k=7	0,789	0,997	1,000	1,000	1,000
	k=9	0,785	0,997	1,000	1,000	1,000
$\alpha = 0,10$	k=5	0,928	1,000	1,000	1,000	1,000
	k=7	0,892	0,999	1,000	1,000	1,000
	k=9	0,888	0,998	1,000	1,000	1,000
$\rho = 0,9$						
		Número de consumidores				
Número de pontos da EH		m=10	m=30	m=50	m=100	m=200
$\alpha = 0,01$	k=5	0,813	1,000	1,000	1,000	1,000
	k=7	0,867	1,000	1,000	1,000	1,000
	k=9	0,854	1,000	1,000	1,000	1,000
$\alpha = 0,05$	k=5	0,977	1,000	1,000	1,000	1,000
	k=7	0,981	1,000	1,000	1,000	1,000
	k=9	0,991	1,000	1,000	1,000	1,000
$\alpha = 0,10$	k=5	0,994	1,000	1,000	1,000	1,000
	k=7	0,995	1,000	1,000	1,000	1,000
	k=9	0,996	1,000	1,000	1,000	1,000

Tabela 25 Simulação Monte Carlo do poder do teste  $t$ , considerando  $IQS=0,5$ 

$IQS=0,5$						
$\rho = 0,5$						
		Número de consumidores				
Número de pontos da EH		m=10	m=30	m=50	m=100	m=200
$\alpha = 0,01$	k=5	0,994	1,000	1,000	1,000	1,000
	k=7	0,980	1,000	1,000	1,000	1,000
	k=9	0,975	1,000	1,000	1,000	1,000
$\alpha = 0,05$	k=5	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000
	k=7	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000
	k=9	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000
$\alpha = 0,10$	k=5	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000
	k=7	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000
	k=9	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000
$\rho = 0,7$						
		Número de consumidores				
Número de pontos da EH		m=10	m=30	m=50	m=100	m=200
$\alpha = 0,01$	k=5	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000
	k=7	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000
	k=9	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000
$\alpha = 0,05$	k=5	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000
	k=7	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000
	k=9	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000
$\alpha = 0,10$	k=5	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000
	k=7	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000
	k=9	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000
$\rho = 0,9$						
		Número de consumidores				
Número de pontos da EH		m=10	m=30	m=50	m=100	m=200
$\alpha = 0,01$	k=5	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000
	k=7	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000
	k=9	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000
$\alpha = 0,05$	k=5	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000
	k=7	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000
	k=9	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000
$\alpha = 0,10$	k=5	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000
	k=7	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000
	k=9	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000