

**PRINCÍPIO DE EXTENSÃO DE ZADEH
APLICADO A FUNÇÕES NÃO MONÓTONAS
COM DOIS PARÂMETROS *FUZZY***

GABRIEL JESUS ALVES DE MELO

2009

GABRIEL JESUS ALVES DE MELO

**PRINCÍPIO DE EXTENSÃO DE ZADEH APLICADO A FUNÇÕES NÃO
MONÓTONAS COM DOIS PARÂMETROS *FUZZY***

Dissertação apresentada à Universidade Federal de Lavras,
como parte das exigências do Curso de Mestrado em Engenharia
de Sistemas, área de concentração em Modelagem de Sistemas
Biológicos, para obtenção do título de “Mestre”.

Orientador / Co-orientador

Prof. Onofre Rojas / Prof. Sérgio Martins

LAVRAS

MINAS GERAIS-BRASIL

2009

**Ficha Catalográfica Preparada pela Divisão de Processos Técnicos da
Biblioteca Central da UFLA**

Melo, Gabriel Jesus Alves de.

Princípio de extensão de Zadeh aplicado a funções não monótonas com dois parâmetros fuzzy / Gabriel Jesus Alves de Melo. – Lavras: UFLA, 2009. 69p. : il.

Dissertação (Mestrado)- Universidade Federal de Lavras, 2009.

Orientador: Onofre Rojas.

Bibliografia.

1. Lógica fuzzy. 2. Frequência 3. Amplitude. 4. Parâmetro incerto. 5. Oscilador harmônico I. Universidade Federal de Lavras. II. Título.

CDD - 515.39

GABRIEL JESUS ALVES DE MELO

**PRINCÍPIO DE EXTENSÃO DE ZADEH APLICADO A FUNÇÕES NÃO
MONÓTONAS COM DOIS PARÂMETROS *FUZZY***

Dissertação apresentada à Universidade Federal de Lavras,
como parte das exigências do Curso de Mestrado em Engenharia
de Sistemas, área de concentração em Modelagem de Sistemas
Biológicos, para obtenção do título de “Mestre”.

APROVADA em 18 de fevereiro de 2008

Prof. Samuel Maier Kurcbar - UFSJ

Prof. Solange Gomes Faria Martins - UFLA

Prof. João Domingos Scalon -UFLA

Prof. Tadayuki Yanagi Junior -UFLA

Prof. Onofre Rojas / Prof. Sérgio Martins
UFLA/UFLA
(Orientador/Co-orientador)

LAVRAS
MINAS GERAIS-BRASIL

“Entrega o teu Caminho ao Senhor, confia nele, e ele tudo fará.”

(Sl 37:5)

Aos meus pais, Railda e Bianco,

Aos meus irmãos, Milena e Neto.

Ofereço.

Aos meus pais pelo amor, carinho, proteção e dedicação.

Dedico.

AGRADECIMENTOS

Ao meu Senhor Deus que tanto fez e tanto faz por mim e por minha família. Obrigado, Pai, pela vida e por mais essa vitória.

A meus pais, Railda e Bianco, pela bravura de toda uma vida. Obrigado pelas orações, pela educação, amor, carinho, sabedoria, otimismo, enfim, obrigado por me fazerem existir.

A meu irmão Neto, pela preocupação e incentivo à pesquisa desde os princípios da graduação. Obrigado por me receber e compartilhar comigo momentos inesquecíveis em Itapetinga, durante a primeira fase longe da proteção de casa. Você é meu exemplo. Te amo!

À minha irmã Milena, por tudo que ela é e representa para mim. Com ela aprendi e compartilhei toda minha infância. Hoje, muito do que sei agradeço a você, minha irmã. Você é a menina da nossa família. Te amo!

Ao professor Jânio da UESB, pela compreensão e por me ajudar a voltar ao curso de Matemática.

A minha namorada Dani, por estar ao meu lado e por participar dessa vitória junto comigo.

Aos amigos Rosane e Jésus pela torcida, pelo carinho e pela amizade.

Aos amigos Tota e Júnior, pelos bons momentos na época da graduação.

A todos os colegas e amigos que moraram comigo durante a graduação e pós-graduação.

Aos ex-colegas do curso de matemática da UESC que compartilharam conhecimento, alegrias e dificuldades.

Aos meus orientadores Onofre Rojas e Sérgio Martins, pela orientação, empenho e, acima de tudo, pelo profissionalismo.

Aos funcionários do Departamento de Engenharia da UFLA (Daniela e Daiane).

Aos funcionários do Departamento de Ciências Exatas da UFLA.

Aos colegas da Engenharia de Sistemas: Cássia, Crysttian, Marlon, Alison e Ricardo.

Aos membros da banca de exame da proposta de tese, pelas valiosas orientações.

SUMÁRIO

RESUMO	i
ABSTRACT	ii
1 INTRODUÇÃO	1
2 OSCILADOR HARMÔNICO UNIDIMENSIONAL	5
2.1 Oscilador <i>fuzzy</i>	7
3 ALGUNS CONCEITOS DA TEORIA DOS CONJUNTOS <i>FUZZY</i>	8
3.1 Lógica <i>fuzzy</i>	8
3.2 Lógica <i>fuzzy</i> na física	9
3.3 Função característica	10
3.4 Conjuntos <i>fuzzy</i>	12
3.5 Variáveis linguísticas	14
3.6 Função de pertinência	15
3.7 Definições e operações	16
3.8 Números <i>fuzzy</i>	19
3.9 Sobre a extensão de Zadeh	21
3.10 Operações aritméticas com números <i>fuzzy</i>	25
3.11 Métodos de defuzzificação	28
3.11.1 Média dos máximos	29
3.11.2 Centro dos máximos	29
3.11.3 Centro de gravidade	30
3.12 Teoria dos conjuntos <i>fuzzy</i> X Teoria de probabilidade	31
4 METODOLOGIA	34
4.1 Princípio da Extensão - uma variável	34
4.2 Princípio de Extensão - duas variáveis (Aritimética <i>fuzzy</i>)	46
5 RESULTADO E DISCUSSÃO	54

5.1 Oscilador fuzzy com parâmetro amplitude incerto	54
5.2 Oscilador <i>fuzzy</i> com parâmetro frequência incerto	57
5.3 Oscilador fuzzy com parâmetro amplitude e frequência incertos	63
6 CONCLUSÃO	66
7 REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS	67

RESUMO

MELO, Gabriel Jesus Alves de. **Princípio de Extensão de Zadeh aplicado a funções não monotônas com dois parâmetros *fuzzy***. 2009. 69 p. Dissertação (Mestrado em Engenharia de Sistemas) - Universidade Federal de Lavras, Lavras, MG.*

Será apresentada neste trabalho uma metodologia computacional que permite aplicar o Princípio de Extensão para funções não monótonas com dois parâmetros *fuzzy*. Esse princípio é um conceito básico da Teoria dos Conjuntos Fuzzy que sustenta a extensão das expressões matemáticas do domínio clássico ao domínio *fuzzy*. Para aplicar e avaliar a metodologia proposta, foi escolhido o problema do Oscilador Harmônico Unidimensional, considerando que os parâmetros amplitude e frequência são parâmetros incertos. Dessa forma, foi inserido ao modelo clássico, incertezas naturais presentes em um sistema físico e, após o método de Defuzzificação de Centro de Gravidade, foi encontrada uma possível evolução temporal do modelo. Os resultados obtidos mostram que a solução *fuzzy* aproxima a solução clássica do Oscilador Harmônico Amortecido.

Palavras-chave: Lógica *fuzzy*, Frequência, Amplitude, Parâmetro Incerto, Oscilador Harmônico.

* **Comitê Orientador:** Onofre Rojas - UFLA (Orientador), Sérgio Martins - UFLA (Co-orientador).

ABSTRACT

MELO, Gabriel Jesus Alves de. **Zadeh's extension principle applied to non-monotonous functions with two parameters fuzzy**. 2008. 69 p. Dissertation (Master in Systems Engineering) - Federal University of Lavras, Lavras, MG.*

In the present work a computational method which permits the application of the extension principle to non-monotonic functions of two *fuzzy* parameters is presented. The extension principle is a basic concept of *fuzzy* set theory which allows the extension of a mathematical expression from the classical domain to the *fuzzy* domain. The harmonic oscillator with uncertain amplitude and frequency was chosen as a test case for the application and evaluation of the proposed method. The natural uncertainties which are present in a physical system were inserted into the classical model and by defuzzification of the center of gravity, a possible time evolution of the model was deduced. The results demonstrate that the *fuzzy* solution approximates the classical solution of the damped harmonic oscillator.

Key-words: *Fuzzy* Logic, Frequency, Amplitude, Parameter Uncertain, Harmonic Oscillator.

***Guidance Committee:** Onofre Rojas Santos - UFLA (Supervisor); Sérgio Martins de Souza - UFLA (Co-supervisor)

1 INTRODUÇÃO

Movimentos oscilatórios são encontrados por toda parte e estão presentes nas transmissões via satélite, nos Raios X, nos Laser, nos amortecedores dos carros, na construção civil, na televisão e no rádio, no celular, no computador, no estudo de terremotos e em diversas outras áreas. Um dos movimentos oscilatórios mais simples de se entender é o oscilador linear harmônico simples que é encontrado em vários sistemas. Em síntese, trata-se de uma massa presa a uma mola que está vinculada a uma posição por intermédio de uma força cujo módulo cresce proporcionalmente com o seu afastamento da posição de repouso. Os sistemas clássicos que são as realizações do oscilador harmônico incluem quaisquer sistemas ligeiramente deslocados das suas posições de equilíbrio, tais como: um pêndulo simples no limite de pequenos ângulos de oscilações ou um circuito elétrico composto de indutância e capacitância, quando as tensões e correntes são suficientemente baixas para que os elementos do circuito permaneçam lineares (Kittel & Knight, 1970).

O modelo matemático do oscilador harmônico unidimensional envolve equações diferenciais lineares cuja solução é uma função harmônica do tempo. Uma vez deslocado da sua posição de equilíbrio, a oscilação se inicia mantendo a harmonia e precisão do movimento. Dessa forma, os valores referentes a frequência e amplitude devem se repetir durante todos os períodos. Em uma situação prática é comum que os parâmetros do sistema, amplitude e frequência, tenham um certo grau de imprecisão. Normalmente, esses parâmetros são ajustados empiricamente em laboratórios e, dessa forma, trazem consigo muitas informações subjetivas e incertas, fruto de erros humanos, erros de amostragem ou de modelagem. Segundo Jornada (2007), a incerteza na área de calibração é um conceito

amplamente difundido e praticado pelos laboratórios e não levar em consideração essas incertezas pode comprometer a análise crítica de um modelo e, eventualmente, torná-lo inválido.

A matemática clássica, no entanto, não leva em consideração imprecisões desse tipo, pois assume apenas dois possíveis estados: verdadeiro ou falso representados por 0 ou 1. Embora em boa parte dos casos essa representação seja suficiente, existem situações em que valores intermediários a esses, representam melhor o raciocínio e a linguagem humana para solução de problemas. Supondo que após a realização de experimentos determinou-se que o parâmetro de rigidez da mola seja 0,8. Será que esse é realmente um valor exato e único ou outros valores próximo de 0,8 como 0,78 ou 0,82 também poderiam ser considerados aceitáveis por um especialista? Incertezas como essa são comuns no cotidiano das pessoas e, estão presentes na física, biologia, nas engenharias e em diversas outras áreas.

Como alternativa ao modelo clássico determinístico do oscilador harmônico definiu-se, nesse trabalho, o modelo do oscilador *fuzzy*. A descrição desse sistema se dá por meio de uma função cosseno com três parâmetros incertos: amplitude, frequência e fase inicial. Aqui, será analisada uma possível evolução do sistema, considerando dois parâmetros incertos: amplitude e frequência.

A Lógica *fuzzy*, com base na teoria dos conjuntos *fuzzy*, tem se mostrado adequada ao tratamento de termos incertos, subjetivos e vagos (Barros & Bassanezi, 2006). Como esta ferramenta considera graus de verdade, variando entre 0 e 1, pode-se dizer que um conjunto clássico é um caso particular dos conjuntos *fuzzy*.

O Princípio de extensão de Zadeh, aqui utilizado, possibilitou incorporar ao modelo determinístico incertezas naturais presentes no problema do Oscilador

Harmônico Unidimensional. Esse princípio é utilizado para estender operações típicas dos conjuntos clássicos. Também conhecido com Princípio de Extensão essa ferramenta promove a extensão de conceitos matemáticos não *fuzzy* em *fuzzy*.

É sabido que o princípio de extensão de Zadeh desempenha um importante papel na teoria dos conjuntos *fuzzy* e tem sido estudado e aplicado por muitos autores, incluindo Bassanezi et al. (2000), Román & Bassanezi (2001), Cabrelli et al. (1992), Shiang-Tai Liu (2004), entre outros. Aplicações bem sucedidas também são encontradas em problemas epidemiológicos (Melo, 2008), dinâmica populacional (Cecconello, 2006), medicina do câncer de próstata (Castanho et al., 2005) e construções de imagem (Forte et al., 1994). Recentemente, foi desenvolvido um modelo que combina equações diferenciais e lógica *fuzzy* para o estudo da dinâmica do HIV onde o princípio de extensão é utilizado para a solução determinística (Jafelice et al., 2008). Alguns problemas de Biomedicina utilizam essa ferramenta para a construção de regras *fuzzy* (Ortega, 2001).

Acredita-se que essa ferramenta apresenta princípios matemáticos relativamente simples, isso porque, baseia-se fundamentalmente na realização de operações de máximos e mínimos, conforme descrito mais a frente. No entanto, a sua utilização se faz, na grande maioria das vezes, por meio do computador, cabendo ao programador a sua implementação. Computacionalmente, a complexidade do problema aumenta de acordo com o tipo de função estudada e o número de variáveis incertas que estão em questão. Nas seções seguintes, será possível observar que a teoria dos conjuntos *fuzzy*, assim como a matemática clássica, permite a realização de operações matemáticas e essas operações podem ser realizadas via princípio de extensão. No entanto, apesar de encontrarmos na literatura significativas aplicações dessa ferramenta, não fica explícito nesses trabalhos a maneira como se implementa computacionalmente o princípio de extensão. Além disso,

em sua grande parte, essas aplicações se restringem a funções que são estritamente crescente ou decrescente. Vale ressaltar também que, apesar de possíveis, as operações aritméticas entre números *fuzzy* não são relativamente simples, principalmente quando se trabalha no domínio discreto ou com funções de pertinência não triviais.

Neste trabalho, será apresentada uma metodologia computacional que permite aplicar com sucesso essa ferramenta para funções não monótonas e realizar com eficiência operações aritméticas entre números *fuzzy*. Para aplicar essa metodologia, foi escolhido o problema do oscilador harmônico simples e, baseando-se na sua solução, foi definido o modelo do oscilador *fuzzy* com parâmetros amplitude e frequência incertos. A escolha do oscilador harmônico neste trabalho, deve-se principalmente ao fato, da sua solução ser uma função não monótona do tipo oscilante. Foi encontrado, dessa forma, uma possível evolução do sistema, levando em consideração incertezas existentes nos parâmetros.

Este trabalho está estruturado em capítulos como se segue: Na Seção 2, será revisto o modelo determinístico para o problema do Oscilador Harmônico Unidimensional e será definido o modelo do oscilador *fuzzy*. Na Seção 3, serão apresentadas algumas definições e conceitos da Teoria dos Conjuntos *Fuzzy*, fundamentais ao desenvolvimento do trabalho. Na Seção 4, será mostrada a metodologia adotada para o princípio de extensão com uma variável, bem como, o algoritmo que aqui desenvolvemos com o objetivo de obter o grau de pertinência máximo de um dado conjunto *fuzzy*. Ainda nessa seção será mostrada a metodologia do Princípio de Extensão para duas variáveis (aritmética de números *fuzzy*). Na Seção 5, serão apresentados os resultados e discussão e, na Seção 6, a conclusão.

2 OSCILADOR HARMÔNICO UNIDIMENSIONAL

Nesta seção será abordado brevemente o problema do oscilador harmônico, apresentando alguns conceitos que dão base ao modelo do oscilador *fuzzy* que será visto mais a frente. Para mais detalhes desta seção, consultar Kittel & Knight (1970) e Coelho (2003).

O mais simples modelo de oscilador simula o movimento de uma partícula deslocando-se para frente e para trás em torno de uma origem (Figura 2.1). Este movimento oscilatório é denominado Movimento Harmônico Simples e é descrito pela seguinte equação diferencial

$$m\ddot{x}(t) + kx(t) = 0. \quad (2.1)$$

A solução do problema (Equação 2.2) resume-se, basicamente, em resolver esta equação diferencial ordinária de segunda ordem não homogênea que é a equação do movimento para sistemas lineares não amortecidos

$$x(t) = A \cos(\omega t + \phi) \quad (2.2)$$

onde A é a amplitude, ω a frequência angular e $\omega t + \phi$ a fase. Por motivo de

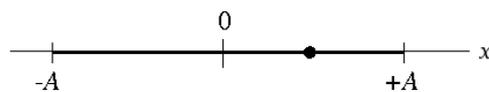


FIGURA 2.1 Movimento harmônico de uma partícula ao longo do eixo X .

simplicidade, não serão utilizadas unidades de medidas neste trabalho. Então, se $\omega = 1 \frac{rad}{s}$, usar-se-á simplesmente 1. O período do movimento τ é o tempo

necessário para completar uma oscilação e está relacionado à frequência por

$$\tau = \frac{2\pi}{\omega}. \quad (2.3)$$

O sistema oscilatório simples, sem amortecimento, pode ser modelado conforme mostrado na Figura 2.2, onde são apresentados seus dois componentes físicos fundamentais: o parâmetro de massa m e o parâmetro de rigidez k . O parâmetro

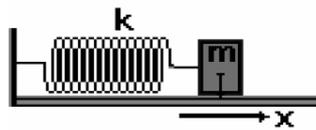


FIGURA 2.2 Oscilador harmônico não amortecido.

m representa a inércia do sistema que é responsável pelo armazenamento de sua energia cinética. O parâmetro de rigidez k é usualmente representado por uma mola, sendo responsável pelo armazenamento da energia potencial (ou de deformação do sistema). A unidade de k no SI é $\frac{Ns}{m}$. Um sistema mecânico é linear quando as forças elásticas forem dadas por funções lineares do deslocamento e da velocidade. Caso contrário, diz-se que o sistema é não linear. Embora diversos sistemas mecânicos apresentem comportamentos não lineares, em maior ou menor grau, na grande maioria das vezes os efeitos não lineares são desprezados com intuito de simplificar a análise e a resolução do problema. Vale ainda ressaltar que, embora uns números relativamente pequenos de sistemas mecânicos possam ser modelados como sistemas simples, o estudo destes modelos é de fundamental importância, uma vez que vários conceitos a eles pertinentes podem ser estendidos a outros sistemas.

2.1 Oscilador *fuzzy*

Baseando-se na solução do oscilador harmônico simples unidimensional (Equação 2.2) definiu-se o modelo do oscilador *fuzzy* com parâmetros A , ω e ϕ incertos. Assim, o problema pode ser interpretado da seguinte maneira:

$$x(t)_{fuzzy} \equiv \overbrace{A}^{fuzzy} \underbrace{\cos(\omega t + \phi)}_{fuzzy}$$

Dessa forma, é de interesse saber como se comporta o sistema após serem inseridas incertezas naturais nos parâmetros frequência e amplitude. Vale ressaltar que essa é apenas uma possível maneira de tratar o problema. Pode-se, por exemplo, analisar a evolução temporal do modelo, inserindo incertezas apenas na condição inicial do sistema. Entretanto, foi desenvolvido neste trabalho, um ferramental computacional que permite analisar esse problema com dois parâmetros incertos. Contudo, outros autores, como Bassanezi et al. (2000) e Barros (1997) estudam sistemas dinâmicos por meio de equação diferencial *fuzzy*. As ferramentas aqui utilizadas para tais fins, serão discutidas nas seções seguintes.

3 ALGUNS CONCEITOS DA TEORIA DOS CONJUNTOS FUZZY

3.1 Lógica *fuzzy*

O filósofo grego Aristóteles (384 - 322 a.C.) considerado o pai da ciência da lógica, estabeleceu um conjunto de regras rígidas para que conclusões pudessem ser aceitas como logicamente válidas. O emprego da lógica de Aristóteles levou a uma linha de raciocínio lógico, baseado em premissas e conclusões. Essa lógica trata as afirmações de forma binária, classificando-as como verdadeiras ou falsas. No entanto, muitas das experiências do mundo real não podem ser classificadas simplesmente como verdadeiras ou falsas, sim ou não, branco ou preto. Por exemplo, aquele homem é alto ou baixo? A taxa de risco para aquele empreendimento é grande ou pequena? Um sim ou um não como resposta a estas questões é, na maioria das vezes, incompleta. Na verdade, entre a certeza de ser e a certeza de não ser, existem infinitos graus de incerteza. A lógica *fuzzy* considera que existem vários níveis entre o verdadeiro e o falso. De modo figurativo, enquanto a lógica clássica enxerga apenas o preto e o branco, a lógica *fuzzy* é capaz de, além do preto e o branco, enxergar vários tons de cinza, como ilustrado na Figura 3.1.



FIGURA 3.1 Comparação entre as lógicas clássica e *fuzzy*.

De forma mais objetiva e preliminar, pode-se definir lógica *fuzzy* como sendo uma ferramenta capaz de capturar informações vagas, em geral descritas em uma linguagem natural e convertê-las para um formato numérico, de fácil manipu-

lação pelos computadores (Tanaka,1997).

A fim de introduzir um tratamento matemático a essas imprecisões, Lotfi Asker Zadeh, em 1965, “introduziu” no contexto científico a Teoria de Conjuntos *Fuzzy* (Zadeh,1965), por meio da publicação do artigo *Fuzzy Sets in Journal Information and Control*. Dessa forma, a ele é atribuído o reconhecimento como grande colaborador do que hoje se conhece como Lógica *Fuzzy*. No entanto, antes de Zadeh, outros estudiosos já questionavam a lógica bivalente. Por exemplo, a lógica de três valores proposta por Jan Lukasiewicz (1878-1956) introduziu conjuntos com graus de pertinência 0, $1/2$ e 1 onde 1 é verdadeiro, 0 é falso e $1/2$ é possível. Em contrapartida, a lógica *fuzzy* define graduações contínuas de pertinência compreendidas no intervalo $[0, 1]$. Contudo, Cox (1995) afirma que os conceitos básicos que justamente diferenciam a lógica *fuzzy* da lógica booleana, já existiam anteriormente a Aristóteles.

Com o passar dos anos, a lógica *fuzzy* encontrou aplicações em uma infinidade de áreas, por meio das quais tem mostrado capacidade de adaptação e facilidade de interface com o ser humano. Atualmente, podem ser encontrados diversos aparelhos como de ar condicionado, câmeras fotográficas e lavadoras de roupa que utilizam a tecnologia *fuzzy*. O uso crescente de aplicações baseadas na lógica *fuzzy* tem levado a um aumento do interesse nesta área, seja junto à comunidade acadêmica, ou junto às empresas privadas.

3.2 Lógica *fuzzy* na física

A Lógica *fuzzy* ainda é uma teoria desconhecida para a grande maioria dos físicos e são relativamente poucos os trabalhos em física utilizando essa teoria. Todavia, a junção das teorias físicas com a lógica *fuzzy* parece bastante promissora, principalmente com o advento crescente de pesquisas interdisciplinares, onde a

intenção de se abordar problemas complexos e mais realistas exige a colaboração de profissionais de diversas áreas e uma mistura de teorias. Muitos consideram a física nuclear como área pioneira da física que mais tenha explorado a teoria dos conjuntos *fuzzy*. A motivação para estudos desse tipo surge do fato reconhecido de que as medidas físicas estão sujeitas a erros e que, muitas vezes, esses erros não são controláveis. Assumir a atitude de que a imprecisão experimental envolvida nos processos de medida é, em si mesma, um fato da realidade física impulsionou alguns pesquisadores a buscar a incorporação dessas incertezas às teorias físicas. Claramente, essa atitude resulta na reformulação de muitas questões de caráter matemático e físico, dando ensejo ao aparecimento de outros trabalhos. Para maiores detalhes consultar Ortega (2001).

3.3 Função característica

Nesta seção, será dado início ao tratamento de alguns conceitos da teoria dos conjuntos *fuzzy* que são fundamentais para o entendimento deste trabalho. Para maiores detalhes desta seção consultar (Barros & Bassanezi, 2006). Para obter a formalização matemática de um conjunto *fuzzy*, Zadeh baseou-se no fato de que qualquer conjunto clássico pode ser caracterizado por uma função: sua *função característica*, cuja definição é dada a seguir.

Definição 3.3.1. *Seja U um conjunto e A um subconjunto de U . A função característica de A é dada por*

$$\chi_A(x) = \begin{cases} 1, & \text{se } x \in A \\ 0, & \text{se } x \notin A \end{cases} . \quad (3.1)$$

Desta forma, χ_A é uma função cujo domínio é U e a imagem está contida no conjunto $\{0, 1\}$, com $\chi_A(x) = 1$ indicando que o elemento de x está em A , en-

quanto $\chi_A(x) = 0$ indica que x não é elemento de A . Assim, a função característica descreve completamente o conjunto A já que a função indica quais elementos do conjunto universo U são elementos também de A . Entretanto, existem casos em que a pertinência entre elementos e conjuntos não é precisa, isto é, não é possível ao certo, dizer se um elemento pertence efetivamente a um conjunto ou não. O que é plausível é dizer qual elemento do conjunto universo se enquadra “melhor” ao termo que caracteriza o subconjunto. Por exemplo, considere o subconjunto dos números reais “*próximo de 2*”.

$$A = \{x \in \mathbb{R} : x \text{ é próximo de } 2\} . \quad (3.2)$$

Pergunta: O número 7 e o número 2,001 pertencem a A ?

A resposta a esta pergunta é incerta, pois não se sabe até que ponto pode-se dizer objetivamente quando um número está próximo de 2. A única afirmação razoável, nesse caso, é que 2,001 está mais próximo de 2 do que 7. Funções características são, raramente, usadas em aplicações dos conjuntos clássicos. Porém, quando estende-se esta idéia para conjuntos *fuzzy* a regra de funções características torna-se significativa. Enquanto os conjuntos clássicos podem ser definidos por *funções características*, os conjuntos *fuzzy* podem ser caracterizados por *funções de pertinência*. Conjuntos *fuzzy* podem ser assumidos como uma ampliação dos conjuntos clássicos. Consequentemente, *funções de pertinência* são uma extensão de *funções características*. Na *função característica* dos conjuntos clássicos deve-se decidir o grau, 0 ou 1, enquanto que as *funções de pertinência* nos permitem escolher um valor real arbitrário entre 0 e 1.

3.4 Conjuntos *fuzzy*

Para obter detalhes sobre esse t3pico consultar Tanaka (1997).

Defini33o 3.1. *Um conjunto ou subconjunto fuzzy F de um universo U 3e um conjunto definido por uma fun333o de pertin33ncia φ_F representando um mapeamento $\varphi_F : U \longrightarrow [0, 1]$ onde o valor de φ_F para o conjunto fuzzy 3e chamado de valor de pertin33ncia ou grau de pertin33ncia de $x \in U$. O valor de pertin33ncia representa o grau com que x faz parte do conjunto fuzzy F .*

Do ponto de vista formal, a defini33o de subconjunto *fuzzy* foi obtida simplesmente ampliando-se o contradom3nio da fun33o caracter3stica que 3e $\{0, 1\}$ para o intervalo $[0, 1]$. Nesse sentido, podemos dizer que um *conjunto cl3ssico* 3e um caso particular de um conjunto *fuzzy* cuja fun33o de pertin33ncia $\varphi_F(x)$ 3e sua fun33o caracter3stica χ_F . Um subconjunto *fuzzy* 3e composto de elementos de x de um *conjunto cl3ssico* U , providos de um valor de pertin33ncia a F , dado por $\varphi_F(x)$. Pode-se dizer que um subconjunto *fuzzy* F de U 3e dado por um conjunto (cl3ssico) de pares ordenados:

$$F = \{(x, \varphi_F(x)), \text{com } x \in U\} \quad (3.3)$$

Os conjuntos *fuzzy* podem ser expressos como uma extens3o dos conjuntos cl3ssicos, no entanto, deve-se tomar cuidado com a not33o dos conjuntos *fuzzy*, porque eles fazem uso especial de s3mbolos que aparecem na matem3tica cl3ssica. Muitos estudiosos ficaram confusos com a not33o especial dos conjuntos *fuzzy*. Os m3todos de expressar os conjuntos *fuzzy* podem ser divididos em dois, de acordo com as seguintes defini33es:

- Express3es discretas (quando o universo 3e finito).

Considere o universo U com $U = \{x_1, x_2, x_3, \dots, x_n\}$. Então, um subconjunto *fuzzy* F em U pode ser representado como:

$$F = \varphi_F(x_1)/x_1 + \varphi_F(x_2)/x_2 + \dots + \varphi_F(x_n)/x_n = \sum_{i=1}^n \varphi_F(x_i)/x_i \quad (3.4)$$

- Expressões contínuas (quando o universo é infinito).

Quando o universo U é um conjunto infinito, um conjunto *fuzzy* pode ser representado como:

$$F = \int_U \varphi_F(x_i)/x_i \quad (3.5)$$

O símbolo $/$ (Equação 3.4 e 3.5) é chamado de separador. À direita do separador, aparece o elemento do universo, enquanto que no lado esquerdo, seu valor de pertinência no conjunto definido. Cada elemento é descrito da mesma forma, sendo conectado através do símbolo “+”. Na matemática clássica, os símbolos $/$ e $+$ significam divisão e adição, respectivamente, mas eles têm diferentes definições em conjuntos *fuzzy*. Se for necessário juntar termos em expressões discretas, utiliza-se o símbolo \sum cujo significado também é diferente do símbolo clássica em matemática.

Existem duas outras regras para expressões discretas:

- Quando o grau de pertinência de um elemento x é zero, isto é, $\varphi_A(x) = 0$, não se escreve $0/x$; o termo é omitido.
- Se existem vários valores atribuídos a um elemento do universo, pode-se tomar o valor máximo para representar o valor de pertinência.

Por exemplo, para $0,6/x + 0,7/x + 0,3/x \longrightarrow 0,7/x$.

Por outro lado, em uma expressão contínua, o símbolo \int é usado como generalização de \sum para o mundo contínuo, e não tem nenhuma conexão com

integral. No lado inferior direito do símbolo \int , escreve-se o nome do universo de forma que indique em qual universo o conjunto *fuzzy* está representado. Coloca-se os elementos como uma variável x à direita do separador, e a função de pertinência no lado esquerdo.

Computacionalmente, a expressão discreta é mais apropriada que a expressão contínua, isso porque os conjuntos *fuzzy* são representados por vetores, como será mostrado mais à frente. Expressões contínuas de conjuntos *fuzzy* são frequentemente aproximadas por expressões discretas. O problema da expressão discreta para o conjunto contínuo é quantos elementos devem ser especificados para a expressão discreta. Ao se designar poucos elementos, a precisão da aproximação do conjunto *fuzzy* não é muito boa. Por outro lado, com muitos elementos há um consumo grande de memória. Consequentemente, torna-se necessário selecionar um número apropriado de elementos para a expressão discreta.

3.5 Variáveis linguísticas

Uma variável linguística é uma variável cujos valores são nomes de conjuntos *fuzzy*. Por exemplo, a *estatura* de um determinado processo pode ser uma variável linguística assumindo valores *baixa*, *média*, e *alta*. Esses valores são descritos por intermédio de conjuntos *fuzzy*. A principal função das variáveis linguísticas é fornecer uma maneira sistemática para uma caracterização aproximada de fenômenos complexos ou mal definidos. Em essência, a utilização do tipo de descrição linguística empregada por seres humanos, e não de variáveis quantificadas, permite o tratamento de sistemas que são muito complexos para serem analisados por meio de termos matemáticos convencionais.

3.6 Função de pertinência

As funções de pertinência podem ter diferentes formas, dependendo do conceito que se deseja representar e do contexto em que serão utilizadas. As funções de pertinência podem ser definidas a partir da experiência do usuário, mas é comum fazer-se uso de funções de pertinência padrão, como, por exemplo, as de forma triangular, trapezoidal e Gaussiana. Em aplicações práticas, as formas escolhidas inicialmente podem sofrer ajustes em função dos resultados observados. Funções de pertinência contínuas podem ser definidas por intermédio de funções analíticas. Para exemplificar o quanto o contexto é relevante na definição de funções de pertinência e de sua distribuição ao longo de um dado universo, considere-se a variável linguística estatura (de pessoas), constituída dos seguintes termos: baixa, média e alta. A esses faz-se corresponder conjuntos *fuzzy* definidos por suas funções de pertinência. Na Figura 3.2 verifica-se uma escolha possível de funções de pertinência para os termos baixa, média e alta.

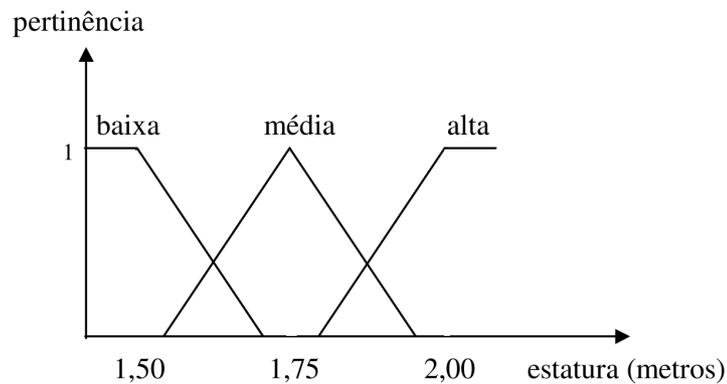


FIGURA 3.2 Função de pertinência para variável estatura.

Note-se que as estaturas até 1,5 metros apresentam grau de pertinência igual a 1 no conjunto baixo; o grau de pertinência, neste conjunto, decresce à me-

dida que a estatura aumenta. Considera-se que uma pessoa com estatura de 1,75 metros é “totalmente compatível” com o conjunto média, ao passo que estaturas acima de 1,8 metros (aproximadamente) apresentam grau de pertinência diferente de zero em alto. Pessoas com estatura acima de 2 metros são “definitivamente” altas. Observa-se que, nesta definição das funções de pertinência, estaturas em torno de 1,75 metros têm grau de pertinência diferente de zero, somente no conjunto média, o que poderia parecer inadequado para alguns observadores. Estes prefeririam que as funções de pertinência de baixo e média se interceptassem em 1,75 metros. Além disso, diferentes pessoas, ou grupos de pessoas, podem ter noções distintas a respeito das estaturas de seus semelhantes. Ou seja, o contexto é particularmente relevante para a definição de funções de pertinência. Para mais detalhes consultar Tancheit (2003).

3.7 Definições e operações

Operações típicas da matemática clássica como união, intersecção e complementação também podem ser realizadas por meio de subconjuntos *fuzzy* conforme definições a seguir. Esse é um tópico importante deste trabalho, pois introduz conceitos que envolvem operações de mínimos e máximos que, *a priori*, fornecem a base para outras ferramentas aqui utilizadas, tais como: princípio de extensão e operações aritméticas via princípio de extensão. Introduziu-se aqui também o conceito de α – nível que permite realizar o princípio de extensão e operações aritméticas analiticamente.

Sejam A e B dois subconjuntos *fuzzy* de U , com funções de pertinência indicadas por φ_A e φ_B , respectivamente.

Definição 3.7.1. Um conjunto *fuzzy* A em X é vazio se e somente se sua função de pertinência é igual a zero sobre todo X :

$$A = \emptyset \text{ é vazio se somente se } \varphi_A(x) = 0 \quad \forall x \in X.$$

Definição 3.7.2. Dois conjuntos *fuzzy* A e B em X são iguais se suas funções de pertinência forem iguais sobre todo X :

$$A = B \text{ se somente se } \varphi_A(x) = \varphi_B(x), \quad \forall x \in X.$$

Definição 3.7.3. A união entre A e B é o subconjunto *fuzzy* U cuja função de pertinência é dada por:

$$\varphi_{A \cup B}(x) = \max_{x \in U} \{ \varphi_A(x), \varphi_B(x) \}. \quad (3.6)$$

Definição 3.7.4. A intersecção entre A e B é o subconjunto *fuzzy* de U cuja função de pertinência é da por:

$$\varphi_{A \cap B}(x) = \min_{x \in U} \{ \varphi_A(x), \varphi_B(x) \}. \quad (3.7)$$

Definição 3.7.5. O complementar de A é subconjunto *fuzzy* cuja função de pertinência é dada por:

$$\varphi_{A'}(x) = 1 - \varphi_A(x), \quad x \in U. \quad (3.8)$$

Definição 3.7.6. Seja um subconjunto *fuzzy* A em U e $\alpha \in [0, 1]$. O α - nível de A é o subconjunto clássico de U definido por

$$[A]^\alpha = \{ x \in U : \varphi_A(x) \geq \alpha \text{ para } 0 < \alpha \leq 1 \}.$$

O exemplo abaixo ajuda a compreender a Definição 3.7.6.

Exemplo 3.7.1. Seja $U = \mathbb{R}$ o conjunto dos números reais e A um sub-conjunto *fuzzy* de \mathbb{R} com a seguinte função de pertinência

$$\varphi_A(x) = \begin{cases} x - 1, & \text{se } 1 < x \leq 2 \\ 3 - x, & \text{se } 2 \leq x < 3 \\ 0, & \text{se } x \notin (1, 3) \end{cases} .$$

Fazendo

$$\varphi_A(x) = \alpha, \text{ temos que } \alpha = x - 1, \quad x = \alpha + 1 \quad \alpha = 3 - x, \quad x = 3 - \alpha \quad (3.9)$$

Assim,

$$[A]^\alpha = [\alpha + 1, 3 - \alpha] \text{ para } 0 < \alpha \leq 1 \text{ e } [A]^0 = [1, 3].$$

Conforme Figura 3.3, 0,5-nível de A é

$$[A]^{0,5} = [1, 5, 2, 5]. \quad (3.10)$$

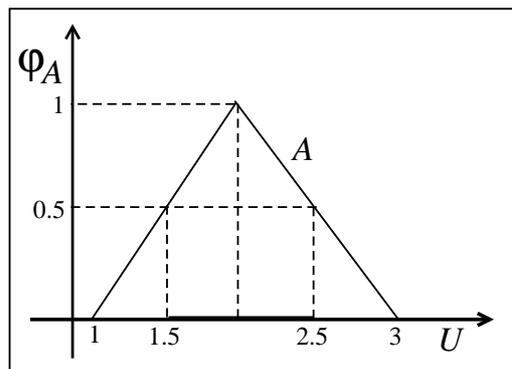


FIGURA 3.3 α nível = 0,5

Exemplo 3.7.2. Seja $A = \{0, 2/3 + 0, 4/5 + 0, 6/7 + 1/9\}$. Então podemos escrever A como a união dos α – nível:

$$A_{0,2} = \{0, 2/3 + 0, 4/5 + 0, 6/7 + 1/9\}$$

$$A_{0,4} = \{0, 4/5 + 0, 6/7 + 1/9\}$$

$$A_{0,6} = \{0, 6/7 + 1/9\}$$

$$A_{1,0} = \{1/9\}$$

3.8 Números *fuzzy*

Assim como no caso clássico, aqui também existe o objetivo de fazer “contas”. A diferença é que aqui pretende-se calcular quantidades imprecisas. Por exemplo, todos nós somos unânimes em dizer que o dobro de uma quantidade “em torno de 5” resulta em outra “em torno de 10”. Para isso, “serão criados” objetos que generalizam os números reais. Tais objetos são chamados de números fuzzy (Klir & Yuan, 1995).

Definição 3.8.1. Um subconjunto fuzzy A é chamado de *número fuzzy* quando o conjunto universo no qual φ_A está definida, é o conjunto dos números reais \mathbb{R} e satisfaça às seguintes condições:

- A é um conjunto fuzzy convexo;
- Existe somente um x_0 que satisfaz $\varphi_A(x_0) = 1; e$
- φ_A é contínua em um intervalo.

Os números fuzzy mais comuns são dos tipos triangulares, trapezoidais e em forma de sino. A fim de obter suporte para as seções seguintes, será discutido, a seguir, o número fuzzy tipo triangular.

Definição 3.8.2. Um número fuzzy A é dito triangular se sua função de pertinência é da forma

$$\varphi_A(x) = \begin{cases} 0, & \text{se } x \leq a \\ \frac{x-a}{x_0-a}, & \text{se } a < x \leq x_0 \\ \frac{b-x}{b-x_0}, & \text{se } x_0 \leq x < b \\ 0, & \text{se } x \geq b \end{cases} \quad (3.11)$$

em que $a = x_0 - \delta_1$, $b = x_0 + \delta_2$ e x_0 é o elemento do domínio com pertinência máxima igual a 1. O gráfico de um número *fuzzy* triangular (Figura 3.4) tem a forma de um triângulo e tem a base no intervalo $[a, b]$.

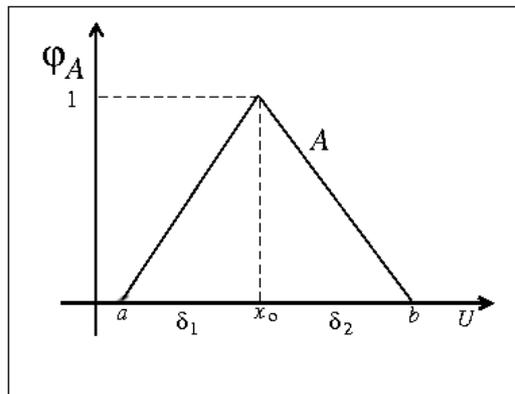


FIGURA 3.4 Número *fuzzy* triangular

Desse modo, os números reais a, x_0, b definem o número *fuzzy* triangular A que será denotado pela terna (a, x_0, b) . De outro modo, dizemos que A é o número *fuzzy* dado por

$$A = (x_0 - \delta_1, x_0, x_0 - \delta_2). \quad (3.12)$$

O α -nível desse número *fuzzy* tem a seguinte forma simplificada

$$[A]^\alpha = [(x_0 - a)\alpha + a, (x_0 - b)\alpha + b] \quad (3.13)$$

para todo $\alpha \in [0, 1]$. Note que um número *fuzzy* triangular não é necessariamente simétrico, já que $\delta_1 = x_0 - a$ pode ser diferente de $\delta_2 = b - x_0$, porém, $\varphi_A(x) = 1$.

3.9 Sobre a extensão de Zadeh

Como descrito anteriormente, será apresentado neste trabalho o modelo do oscilador *fuzzy* com parâmetros amplitude e frequência incertos, e para isso, será utilizada lógica *fuzzy* e, em particular, o Princípio de Extensão de Zadeh. Essa ferramenta foi proposta por Zadeh e é conceito básico da teoria de lógica *fuzzy* que sustenta a extensão das expressões matemáticas do domínio clássico ao domínio *fuzzy*. Essa ferramenta permite calcular a imagem de um número *fuzzy* por meio de uma função conhecida. Como ferramenta, é indispensável para a estruturação matemática quando se modelam fenômenos envoltos em grande grau de incerteza. Como os parâmetros acima citados são incertos, essa ferramenta foi utilizada para encontrar uma possível evolução temporal do oscilador *fuzzy*. O exemplo a seguir introduz o que aqui foi apresentado. Para maiores detalhes desta seção, consultar Gomide & Pedrycz (1998), Tanaka (1997) e Barros (1997).

Exemplo 3.9.1. Seja a relação $y = 3x + 2$. Sabemos que

$$\text{se } x = 4 \text{ então } y = 3 \times 4 + 2 = 14.$$

Então, como é possível calcular o valor de y se x for dado por um conjunto *fuzzy*

tal que $x = \text{“próximo de 4”}$?.

O princípio da extensão fornece um método para fazer isto. A “idéia” do cálculo é mostrada a seguir.

$$y = 3 \times \text{“próximo de 4”} + 2 = \text{“próximo de 12”} + 2 = \text{“próximo de 14”}$$

Definição 3.9.1. Sejam X e Y conjuntos e f uma aplicação de X em $f : X \rightarrow Y$. Seja A um conjunto *fuzzy* em X . O princípio de extensão afirma que a imagem de A pela função f é um conjunto *fuzzy* $B = f(A)$ em Y , cuja função de pertinência é dada por

$$\varphi_B(y) = \max_{\{x:f(x)=y\}} \varphi_A(x) \quad (3.14)$$

como é ilustrado na Figura abaixo.

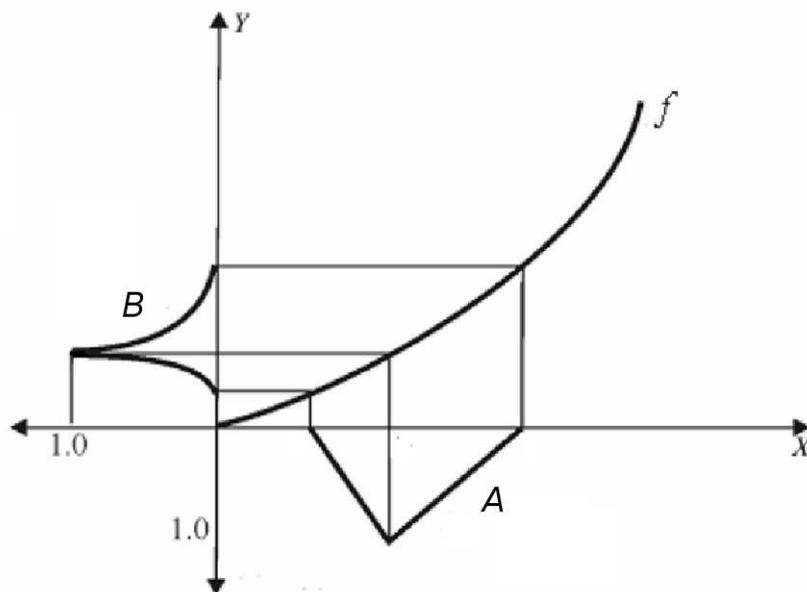


FIGURA 3.5 Imagem de um subconjunto *fuzzy* A a partir do princípio de extensão para uma função f estritamente crescente.

Pode-se descrever o princípio da extensão da seguinte forma (Jafelice,2004):

- O grau de pertinência de um valor do contradomínio é definido diretamente pelo grau de pertinência de sua pré imagem.
- Quando um valor do contradomínio é mapeado por vários do domínio, o seu grau de pertinência é obtido pelo valor máximo dos graus de pertinência dos valores da entrada.

O princípio de extensão pode ser facilmente generalizado para funções de várias variáveis.

Sejam $X = X_1 \times X_2 \times \dots \times X_n$ e Y conjuntos universos. Considere os conjuntos *fuzzy* A_i em X_i , $i = 1, \dots, n$, e uma função $f : X \rightarrow Y$. Os conjuntos *fuzzy* A_1, A_2, \dots, A_n são então transformados pela função f produzindo o conjunto *fuzzy* $B = f(A_1, A_2, \dots, A_n)$ em Y , cuja a função de pertinência é

$$\varphi_A(y) = \max_x \min[\varphi_{A_1}(x_1), \varphi_{A_2}(x_2), \dots, \varphi_{A_n}(x_n)] \quad (3.15)$$

para $x \in X$, $x = (x_1, \dots, x_n) \in X_1 \times X_2 \times \dots \times X_n$ e $y = f(x)$.

Exemplo 3.9.2. Considere $X = \{1, 2, 3, 4\}$, $Y = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ e $f(x) = x + 2$. Se $A = \{0.1/1 + 0.2/2 + 0.7/3 + 1/4\}$ então a imagem de A por meio de f é dado por

$$B = f(A) = \{0.1/3 + 0.2/4 + 0.7/5 + 1/6\}. \quad (3.16)$$

Teorema 3.9.1. Sejam $f : X \rightarrow Y$ uma função contínua e A um subconjunto *fuzzy* de X e $B = F(A)$ um subconjunto de Y . Então, para todo $\alpha \in [0, 1]$ vale

$$[F(A)]^\alpha = f([A]^\alpha). \quad (3.17)$$

Este resultado indica que os α – níveis do conjunto *fuzzy*, obtidos pelo princípio de extensão, coincidem com as imagens dos α – níveis pela função clássica. Pode-se

assim, obter analiticamente imagem de A por meio de f . Veja o exemplo a seguir.

Exemplo 3.9.3. Considere a função $f(x) = e^x$ e o número *fuzzy* triangular dado pela terna $A = (0; \ln 2; \ln 3)$. (Ver Equação 3.12). A partir da Equação 3.13 é fácil verificar que os α – níveis de A são os intervalos

$$[A]^\alpha = [(\ln 2)\alpha, (\ln 2 - \ln 3)] = [\ln 2^\alpha, \ln(3(\frac{2}{3})^\alpha)], \text{ com } \alpha \in [0, 1].$$

Note que os α – níveis poderiam ser obtidos conforme Exemplo 3.7.1. Baseando-se no Teorema 3.9.1 chega-se que

$$[F(A)]^\alpha = f([A]^\alpha) = f([\ln 2^\alpha, \ln(3(\frac{2}{3})^\alpha)]) = [e^{\ln 2^\alpha}, e^{\ln(3(\frac{2}{3})^\alpha)}] = [2^\alpha, 3(\frac{2}{3})^\alpha].$$

Portanto,

- se $\alpha = 0$ então $[F(A)]^0 = [1, 3]$;
- se $\alpha = 0.5$ então $[F(A)]^{0.5} = [\sqrt{2}, \sqrt{6}]$;
- se $\alpha = 1$ então $[F(A)]^1 = \{2\}$;

Fazendo,

$$y = 2^\alpha \text{ e } y = 3(\frac{2}{3})^\alpha$$

Tem-se que:

$$\varphi_{F(A)}(y) = \begin{cases} 0, & \text{se } x \leq 0 \\ \frac{\ln y}{\ln 2}, & \text{se } 0 < x \leq \ln 2 \\ \frac{\ln y - \ln 3}{\ln 2 - \ln 3}, & \text{se } \ln 2 \leq x < \ln 3 \\ 0, & \text{se } x \geq \ln 3 \end{cases} .$$

É fácil observar que $F(A)$ não é um número *fuzzy* triangular.

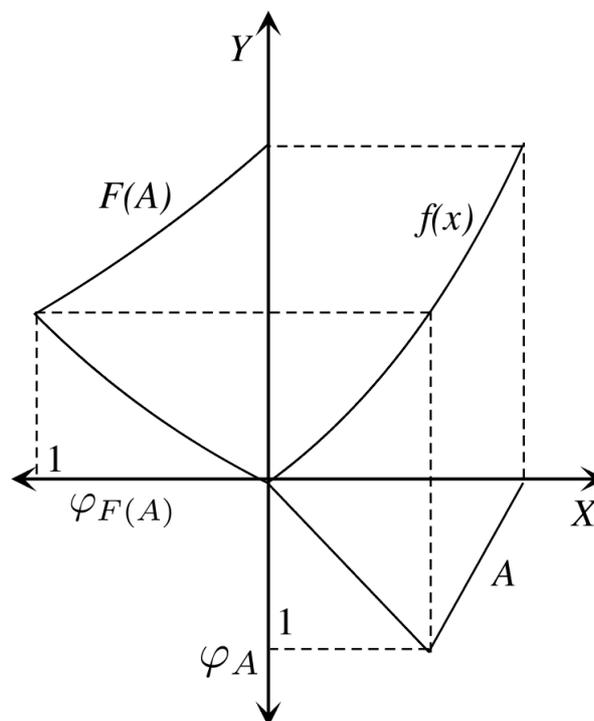


FIGURA 3.6 Princípio de extensão de Zadeh do número *fuzzy* A para $f(x) = e^x$.

3.10 Operações aritméticas com números *fuzzy*

As definições que seguem podem ser vistas como casos particulares do princípio de extensão, tanto para funções de uma quanto para duas variáveis. Nas seções seguintes, serão realizadas operações aritméticas da multiplicação via princípio de extensão e como será trabalhado no domínio discreto, esse método é mais aconselhável. Dessa forma, destaca-se para leitor uma maior atenção a Definição 3.10.4.

Sejam A e B dois números *fuzzy* e λ um número real.

Definição 3.10.1. A soma dos números *fuzzy* A e B é o número *fuzzy*, $A + B$, cuja função de pertinência é

$$\varphi_{(A+B)}(z) = \max_{\{(x,y):x+y=z\}} \min[\varphi_A(x), \varphi_B(y)]. \quad (3.18)$$

Definição 3.10.2. A multiplicação de λ por A é o número *fuzzy* λA , cuja função de pertinência é

$$\varphi_{\lambda A}(z) = \max_{\{x:\lambda x=z\}} \min[\varphi_A(x)] = \begin{cases} \varphi_A(\lambda^{-1}z), & \text{se } \lambda \neq 0 \\ 0, & \text{se } \lambda = 0 \end{cases}. \quad (3.19)$$

Definição 3.10.3. A diferença $A - B$ é o número *fuzzy* cuja função de pertinência é dada por:

$$\varphi_{(A-B)}(z) = \max_{\{(x,y):x-y=z\}} \min[\varphi_A(x), \varphi_B(y)]. \quad (3.20)$$

Definição 3.10.4. A multiplicação de A por B é o número *fuzzy* $A.B$ cuja função de pertinência é dada por:

$$\varphi_{(A.B)}(z) = \max_{\{(x,y):x.y=z\}} \min[\varphi_A(x), \varphi_B(y)]. \quad (3.21)$$

Definição 3.10.5. A divisão de A por B , se $0 \notin \text{supp } B$ é o número *fuzzy* cuja função de pertinência é dada por:

$$\varphi_{(A/B)}(z) = \max_{\{(x,y):x/y=z\}} \min[\varphi_A(x), \varphi_B(y)]. \quad (3.22)$$

Em algumas situações é conveniente realizar tais operações analiticamente. Por exemplo, quando trabalha-se no domínio contínuo com funções de pertinência mais simples e conhecidas, como do tipo triangular ou trapezoidal. Dessa forma, se um α - nível de um conjunto *fuzzy* leva a um intervalo fechado, pode-se substituir a aritmética discreta de números *fuzzy* por operações analíticas de intervalos.

Proposição 3.10.1. Sejam A e B números *fuzzy*, com α -níveis dados respectivamente por $[A]^\alpha = [a_1^\alpha, a_2^\alpha]$ e $[B]^\alpha = [b_1^\alpha, b_2^\alpha]$. Então valem as seguintes propriedades:

- A soma entre A e B é o número *fuzzy* $A + B$ cujos α -níveis são

$$[A + B]^\alpha = [A]^\alpha + [B]^\alpha = [a_1^\alpha + b_1^\alpha, a_2^\alpha + b_2^\alpha] \quad (3.23)$$

- A diferença entre A e B é o número *fuzzy* $A - B$ cujos α -níveis são

$$[A - B]^\alpha = [A]^\alpha - [B]^\alpha = [a_1^\alpha - b_1^\alpha, a_2^\alpha - b_2^\alpha] \quad (3.24)$$

- A multiplicação entre A e B é o número *fuzzy* $A.B$ cujos α -níveis são

$$[A.B]^\alpha = [A]^\alpha [B]^\alpha = [\min P, \max P], \quad (3.25)$$

onde $P = \{a_1^\alpha b_1^\alpha, a_1^\alpha b_2^\alpha, a_2^\alpha b_1^\alpha, a_2^\alpha b_2^\alpha\}$.

- A multiplicação entre λ por A é o número *fuzzy* λA cujos α -níveis são

$$[\lambda A]^\alpha = \lambda [A]^\alpha = \begin{cases} [\lambda a_1^\alpha, \lambda a_2^\alpha], & \text{se } \lambda \geq 0 \\ [\lambda a_2^\alpha, \lambda a_1^\alpha], & \text{se } \lambda < 0 \end{cases} . \quad (3.26)$$

- A divisão de A por B , se $0 \notin \text{supp}B$, é o número *fuzzy* cujos α -níveis são

$$\left[\frac{A}{B}\right]^\alpha = \frac{[A]^\alpha}{[B]^\alpha} = [a_1^\alpha, a_2^\alpha] \cdot \left[\frac{1}{b_2^\alpha}, \frac{1}{b_1^\alpha}\right]. \quad (3.27)$$

Exemplo 3.10.1. Seja A e B números *fuzzy* para as variáveis x e y .

$$A(x) = 0.3/1 + 0.6/2 + 0.8/3 + 1/4 + 0.7/5 + 0.1/6$$

$$B(y) = 0.4/3 + 0.8/4 + 1/5 + 0.2/6$$

Então a soma desses conjuntos pode ser obtida pela Equação 3.18. Analisando todas as combinações possíveis de x e y e usando o operador \min obtemos:

$$A+B = 0.3/4 + 0.3/5 + 0.3/6 + 0.2/7 + 0.4/5 + 0.6/6 + 0.6/7 + 0.2/8 + 0.4/6 + 0.8/7 + 0.8/8 + 0.2/9 + 0.4/7 + 0.8/8 + 1/9 + 0.2/10 + 0.4/8 + 0.7/9 + 0.7/10 + 0.2/11 + 0.1/9 + 0.1/10 + 0.1/11 + 0.1/12$$

Aplicando o operador \max sobre os valores repetidos obtém-se

$$A+B = 0,3/4 + 0,4/5 + 0,6/6 + 0,8/7 + 0,8/8 + 1/9 + 0,7/10 + 0,2/11 + 0,1/12$$

Note que o domínio do conjunto *fuzzy* (número *fuzzy*) resultante da soma de dois outros conjuntos *fuzzy* é maior do que o domínio de A e B .

3.11 Métodos de defuzzificação

A defuzzificação é um procedimento que permite interpretar a distribuição de possibilidades da saída de um modelo linguístico *fuzzy* de forma quantitativa, ou seja, fornece um valor num risco representativo que captura o significado essencial

dessa distribuição de possibilidades. Existem muitas técnicas de defuzzificação e dentre as mais utilizadas estão: média dos máximos, centro de massa e método das alturas.

3.11.1 Média dos máximos

Para um domínio discreto, é comum usar a média dos máximos (MM) cuja definição é dada por

$$M(B) = \frac{\sum u_i}{\sum i} \quad (3.28)$$

onde u_i são os elementos de maior pertinência ao conjunto *fuzzy* B , isto é, para cada i toma-se

$$\varphi_B(u_i) = \max_u \varphi_B(u). \quad (3.29)$$

A principal limitação do método MM é que ele não considera a forma total do conjunto *fuzzy* de saída. Sendo assim, duas distribuições de possibilidades que apresentam diferentes formas, porém o mesmo conjunto de valores com grau de pertinência máximo, quando defuzzificados fornecerá o mesmo valor clássico, o que é contra-intuitivo.

3.11.2 Centro dos máximos

Este é um procedimento que leva em conta apenas as regiões de maior possibilidade entre os possíveis valores da variável que modela o conceito *fuzzy* em questão. Neste caso tem-se:

$$C(B) = \frac{i+s}{2} \quad (3.30)$$

em que

$$i = \inf\{u \in \mathbb{R} : \varphi_B(u) = \max_u \varphi_B(u)\} \quad e \quad s = \sup\{u \in \mathbb{R} : \varphi_B(u) = \max_u \varphi_B(u)\} \quad (3.31)$$

3.11.3 Centro de gravidade

O método do centro de gravidade (CG) é a técnica de defuzzificação mais comumente usada. Diferentemente do MM, a técnica do Centro de Gravidade para calcular o valor clássico representativo considera toda a distribuição de possibilidade de saída do modelo. O procedimento é similar ao usado para calcular o centro de gravidade em física, se for considerada a função de pertinência $\varphi_B(u)$ como a densidade de massa de u . Por outro lado, o método do centro de gravidade pode ser compreendido como uma média ponderada, onde $\varphi_B(u)$ funciona como o peso do valor u . Entre todos os métodos de defuzzificação esse é o mais utilizado, mesmo sendo, talvez, o mais complicado. As equações 3.32 e 3.33 referem-se ao domínio discreto e contínuo respectivamente. A Figura a seguir mostra o gráfico do defuzzificador $G(B)$.

$$G(B) = \frac{\sum_{i=0}^n u_i \varphi_B(u_i)}{\sum_{i=0}^n \varphi_B(u_i)} \quad (3.32)$$

$$G(B) = \frac{\int_{\mathbb{R}} u \varphi_B(u) du}{\int_{\mathbb{R}} \varphi_B(u) du} \quad (3.33)$$

Para mais detalhes desta seção consultar Klir & Yuan (1995) e Yen & Langari (1999).

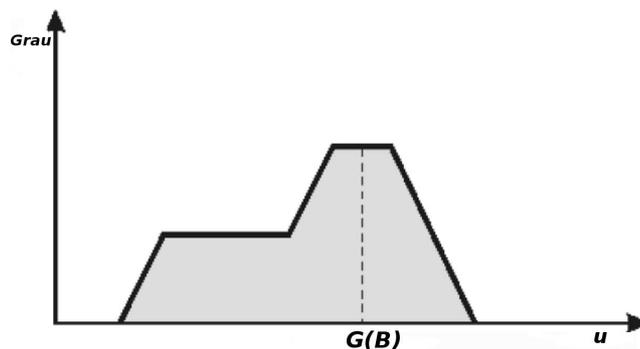


FIGURA 3.7 Defuzzificação pelo método do centro de gravidade.

3.12 Teoria dos conjuntos *fuzzy* X Teoria de probabilidade

A teoria de probabilidades e a teoria de conjuntos *fuzzy* lidam, em geral, com tipos de incertezas distintos. A teoria dos conjuntos *fuzzy* é baseada no fato de que os conjuntos existentes no mundo real não possuem limites precisos. Um conjunto *fuzzy* é um agrupamento impreciso e indefinido, onde a transição de não-pertinência para a pertinência é gradual, não abrupta. A “característica *fuzzy*” implica em existência de imprecisão, incerteza, definições qualitativas. A teoria *fuzzy* de conjuntos, fornece um método para manipulação de conjuntos, cujos limites são imprecisos ao invés de restritos. A incerteza de um elemento, isto é, seu grau fracionário de pertinência, pode ser concebido como uma medida de possibilidade, ou seja, a possibilidade de que um elemento seja membro do conjunto. O conceito de possibilidade não é o mesmo que de *probabilidade*. A probabilidade expressa a chance de que um elemento seja membro de um conjunto, sendo também no intervalo numérico $[0, 1]$.

Na teoria de *probabilidades* tem-se o evento muito bem definido e a dúvida paira sobre a ocorrência do evento. No entanto, uma vez que o evento ocorreu não existirá mais dúvida alguma. Pode-se calcular qual a probabilidade de se sortear

uma bola vermelha em uma urna contendo n_b bolas brancas e n_v bolas vermelhas. Todavia, uma vez sorteada a bola não há nada mais a fazer, a bola será branca ou vermelha, e a incerteza desaparecerá. No entanto, supondo-se que haja em uma urna várias bolas com diversos tons de rosa, variando do vermelho ao branco. Neste caso não se pode simplesmente perguntar qual a chance de sortear uma bola branca, pois haveria dificuldades para decidir sobre as bolas rosas. Na verdade, não se pode fazer uma pergunta de caráter puramente estatístico pois o evento não está bem definido, existirão bolas quase vermelhas, bolas quase brancas e bolas com diversos tons de rosa (o que configura uma situação de imprecisão). Precisa-se saber nesses casos, qual é a pergunta a ser realizada e como respondê-la.

Exemplo 3.12.1. Supor que a probabilidade de um certo elemento pertencer ao conjunto seja 0,8 ou 80%. A possibilidade, por outro lado, expressaria o grau em que o elemento é membro do conjunto. Para ilustrar esse conceito, suponha a seguinte escala de pertinência:

1,0 = membro; 0,8 = quase-membro; 0,6 = mais-ou-menos-membro; 0,4 = não-muito-membro; 0 = não membro. Portanto, *possibilidade* de que um dado elemento seja quase-membro é 0,8.

Exemplo 3.12.2. Em um sistema diagnóstico, percebe-se que o raciocínio médico parece estar muito mais baseado em graus de possibilidade do que de probabilidade, uma vez que seria humanamente impossível para o médico guardar todas as informações exatas sobre as frequências dos sintomas das doenças, tanto quanto a prevalência das doenças em uma dada população. Os médicos raramente expressam suas impressões com valores numéricos, utilizam termos linguísticos tanto para se expressar quanto para associar cognitivamente os sintomas/doenças. Além disso, sabe-se que um paciente ao procurar um médico não deseja saber “qual a chance” de que ele tenha uma determinada doença, ele quer saber “qual” doença

ele tem. O médico, a partir de um exame clínico, lista as possíveis patologias e segue um estudo mais profundo (com exames laboratoriais, por exemplo) a partir de graus de possibilidade, ou seja, do que é mais razoável. Um exemplo prático para ilustrar a diferença entre probabilidade e possibilidade pode ser demonstrado como segue.

Exemplo 3.12.3. Sejam dois copos A e B e dois tipos de líquidos: água e veneno. Suponha que esses copos estejam cheios e que A contenha certa quantidade de veneno mortal com grau de pertinência (possibilidade) $0,5$, ou seja, metade do conteúdo de A é veneno e a outra metade água. Imagine que B contenha certa quantidade de veneno com probabilidade 0.5 . Suponha agora que uma pessoa deve escolher algum dos copos para beber, sabendo que, se 70% do conteúdo de algum dos copo for veneno, essa pessoa morre. Sendo assim, qual seria a melhor escolha? Note que, se a escolha for o copo B essa pessoa tem 50% de chance de morrer e outros 50% de sobreviver. Se a escolha for o copo A essa pessoa sabe que estará ingerindo metade do conteúdo de veneno, e como essa quantidade não é mortal, essa pessoa pode não morrer.

Para mais detalhes desta seção consultar Bezdek & Sanka (1992), Ortega (2001), Shaw & Simões (1999).

4 METODOLOGIA

Nesta seção, é mostrado o método que desenvolvemos que permite implementar computacionalmente o princípio de extensão para funções não monótonas (neste caso, uma função oscilante). Vale ressaltar que essa metodologia permite, também, aplicar o princípio de extensão a outras funções que são estritamente crescente ou decrescente. O modelo do oscilador fuzzy (ver Seção 2) é caracterizado por uma função do tipo cosseno com parâmetros incertos. Foi suposto aqui que os parâmetros *amplitude* e *fase inicial* são números reais (número clássico) e que o parâmetro *frequência* é um número incerto e, dessa forma, caracterizado por um número fuzzy W triangular. Outras funções de pertinência, como, trapezoidal, Gaussiana poderiam ser utilizadas, isso depende do especialista que estuda o problema. Como o principal objetivo é desenvolver e simplesmente aplicar a metodologia, escolhemos a função de pertinência triangular para realizar nossas simulações. A solução do modelo em um dado instante t_1 e a metodologia adotada que permite encontrar a imagem de W através da função cosseno seguem abaixo.

4.1 Princípio da Extensão - uma variável

Considere a função clássica $f(t) = A_1 \cos(\omega t + \phi)$, $f : X \rightarrow Y$ e W um subconjunto fuzzy de \mathbb{R} . Partindo-se do princípio de que ω é um parâmetro incerto, pode-se representar essa incerteza por meio de um número fuzzy W dado por uma função de pertinência do tipo triangular (ver Figura 4.1).

$$\varphi_W(\omega) = \begin{cases} 0, & \text{se } \omega \leq \omega_0 - \delta \\ \frac{\omega - \omega_0 + \delta}{\delta}, & \text{se } \omega_0 - \delta < \omega \leq \omega_0 \\ \frac{\omega_0 + \delta - \omega}{\delta}, & \text{se } \omega_0 \leq \omega < \omega_0 + \delta \\ 0, & \text{se } \omega \geq \omega_0 + \delta \end{cases} \quad (4.1)$$

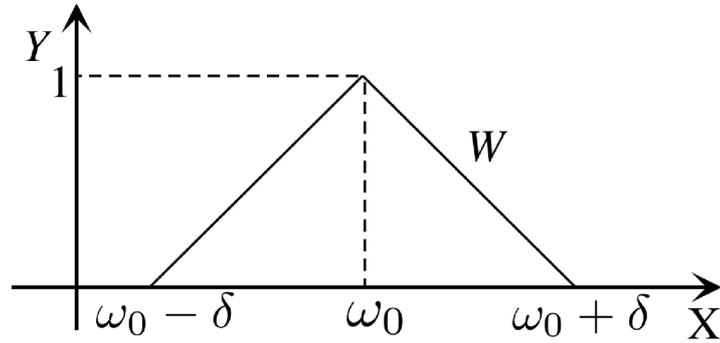


FIGURA 4.1 Função de pertinência do número fuzzy W .

Para indicar como deve ser a imagem de $\varphi_W(\omega)$ por meio de $f(t)$ foi realizado o mapeamento via princípio de extensão. Considere $A_1 = 1$, $\phi = 0$ e para simplicidade considere o instante $t = t_1$. Dessa forma, $f(t_1) = \cos(\omega t_1)$ onde $\omega \in [\omega_0 - \delta, \omega_0 + \delta]$, $\omega_0 - \delta$ e $\omega_0 + \delta$ são os extremos da função de pertinência. Esses pontos possuem pertinência 0 e ω_0 possui pertinência máxima igual a 1.

Agora, considere um Δ tal que

$$\Delta = \frac{(\omega_0 + \delta) - (\omega_0 - \delta)}{n - 1} = \frac{2\delta}{n - 1} \quad (4.2)$$

onde Δ é um passo no intervalo $[\omega_0 - \delta, \omega_0 + \delta]$ e n é o número de pontos da função de pertinência, ou seja, o número de pontos neste intervalo (ver Figura 4.2). Dessa forma esta sendo realizada a discretização do domínio em um conjunto de pontos. Agora avalia-se a função f nesse conjunto de pontos. Assim, para todo t tem-se

$$f(t) = \cos((\omega_0 - \delta + p\Delta)t) = f_p \quad (4.3)$$

onde $p \in \mathbb{N}$, $p \mapsto [0, n - 1]$ e $\omega = (\omega_0 - \delta + p\Delta)$.

No instante $t = t_1$ chega-se que:

$$\begin{aligned}
\text{se } p = 0, f(t_1) &= \cos((\omega_0 - \delta)t_1) = f_0 \\
\text{se } p = 1, f(t_1) &= \cos((\omega_0 - \delta + 1\Delta)t_1) = f_1 \\
\text{se } p = 2, f(t_1) &= \cos((\omega_0 - \delta + 2\Delta)t_1) = f_2 \\
&\vdots \\
\text{se } p = n - 1, f(t_1) &= \cos((\omega_0 - \delta + p\Delta)t_1) = f_p.
\end{aligned}$$

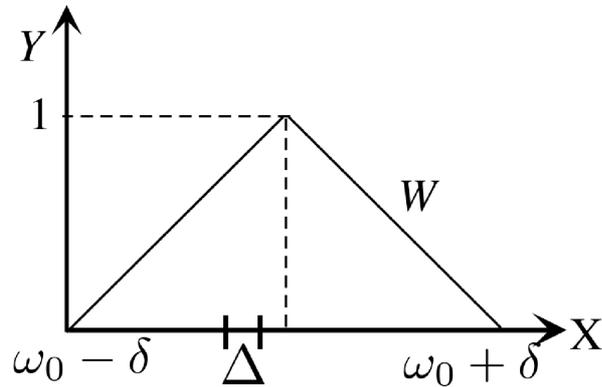


FIGURA 4.2 Discretização do domínio com passo de tamanho Δ .

Agora, utilizando a Equação (4.1), podem-se encontrar os graus de pertinência correspondente a cada elemento do domínio. Assim:

$$\begin{aligned}
\varphi_W(\omega_0 - \delta + 0\Delta) &= \varphi_0 \\
\varphi_W(\omega_0 - \delta + 1\Delta) &= \varphi_1 \\
\varphi_W(\omega_0 - \delta + 2\Delta) &= \varphi_2 \\
&\vdots \\
\varphi_W(\omega_0 - \delta + p\Delta) &= \varphi_p.
\end{aligned}$$

Uma forma “compacta” de escrever todos os valores t , $\varphi_W(\omega)$ e $f(t)$ é por meio de uma matriz conforme especificado a seguir. Na primeira coluna, estão os valores t , na segunda, os valores $f(t)$ e, na terceira, $\varphi_W(\omega)$. Esses dados poderiam ser escritos em um arquivo simples, no entanto, a escolha da matriz deve-se ao fato de que nas próximas seções serão realizadas algumas operações de máximos e

mínimos e, dessa forma, essa matriz se faz necessário.

$$M_{p,3} = \begin{bmatrix} t_1 & f_0 & \varphi_0 \\ t_1 & f_1 & \varphi_1 \\ t_1 & f_2 & \varphi_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ t_1 & f_p & \varphi_p \end{bmatrix} \quad (4.4)$$

Vale ressaltar que, se W é um subconjunto *fuzzy* finito dado por

$$W = \sum_{i=1}^n \varphi_W(\omega_i)/\omega_i \quad (4.5)$$

então o princípio de extensão garante que a imagem de W por $f(t)$ é dado por

$$F(W) = \sum_{i=1}^n \varphi_W(\omega_i)/f(t) = \varphi_W(\omega_i)/\cos(\omega_i t) \text{ com } \varphi_W = \varphi_{F(W)}. \quad (4.6)$$

A notação $\varphi_W(\omega_i)/\omega_i$ não significa “divisão” é apenas uma forma de visualizar o elemento ω_i e seu respectivo grau de pertinência $\varphi_W(\omega_i)$.

Exemplo 4.1.1. Oscilador *fuzzy* com incerteza no parâmetro frequência.

Seja $f : X \rightarrow Y$, X e Y conjuntos, $f(t) = \cos(\omega t) = \cos(2t)$ e W um subconjunto *fuzzy* de X dado pela função de pertinência conforme Equação (4.1). Suponha que existe uma incerteza em torno de 2 tal que $\omega_0 = 2$ e $\delta = 1$. Observe que ω_0 é o valor de X que possui pertinência máxima igual a 1. A base da função de pertinência triangular então está definida no intervalo $[1, 3]$, $\omega \in [1, 3]$ e $p \mapsto [0, 4]$ e $n = 5$.

Note que: $f(t) = \cos(\omega t) = \cos((\omega_0 - \delta + p\Delta)t) = f_p$

$\Delta = \frac{(2+1)-(2-1)}{5-1} = \frac{2}{4} = 0,5$. Ver equação (4.2).

Se $p = 0$ e $t = 0,1$ chega-se que:

$$\omega = ((2-1) + 0(0,5)) = 1, f(t) = \cos(\omega t) = \cos(1(0,1)) = \cos(0,1) = 0,99500418.$$

O próximo passo do algoritmo consiste em “montar” a matriz (ver Equação 4.4).

Dessa forma, para montar a segunda coluna da matriz avalia-se $f(t)$ em cada ponto resultante da discretização. Então segue que:

$$\text{se } p = 0 \text{ então } f(0,1) = \cos(0,1) = 0,99500418$$

$$\text{se } p = 1 \text{ então } f(0,1) = \cos(0,15) = 0,98877108$$

$$\text{se } p = 2 \text{ então } f(0,1) = \cos(0,2) = 0,98006660$$

$$\text{se } p = 3 \text{ então } f(0,1) = \cos(0,25) = 0,96891242$$

$$\text{se } p = 4 \text{ então } f(0,1) = \cos(0,3) = 0,95533651.$$

Agora, será estruturada a terceira coluna da matriz e, para isso, determina-se o grau de pertinência de ω (ver Equação 4.1).

$$\text{Note que } \varphi_W(\omega) = \varphi_W(\omega_0 - \delta + p\Delta).$$

$$\text{Assim, se } p = 0, \varphi_W(2 - 1 + 0(0,5)) = \varphi_W(1).$$

Então segue:

$$\text{se } p = 0, \text{ então } \varphi_W(1) = 0$$

$$\text{se } p = 1, \text{ então } \varphi_W(1,5) = 0,5$$

$$\text{se } p = 2, \text{ então } \varphi_W(2) = 1$$

$$\text{se } p = 3, \text{ então } \varphi_W(2,5) = 0,5$$

$$\text{se } p = 4, \text{ então } \varphi_W(3) = 0.$$

Com isso, a matriz M representa a imagem de W por meio da função $f(t)$. Dessa forma, no instante $t = 0,1$ chega-se que

$$M_{3,3} = \begin{bmatrix} 0,1 & 0,99500418 & 0 \\ 0,1 & 0,98877108 & 0,5 \\ 0,1 & 0,98006660 & 1,0 \\ 0,1 & 0,96891242 & 0,5 \\ 0,1 & 0,95533651 & 0 \end{bmatrix} .$$

Cada linha da matriz representa a coordenada tridimensional no espaço XYT , onde $\varphi \in T$. O número *fuzzy* W com domínio discreto pode ser representado como segue:

$$W = 0/1 + 0,5/1,5 + 1/2 + 0,5/2,5 + 0/3 \text{ (ver Equação 4.5).}$$

Outra forma de representar os valores da matriz M referente as colunas 2 e 3 segue abaixo.

$$F(W) = 0/0,99500418 + 0,5/0,98877108 + 1,0/0,98006660 + 0,5/0,96891242 + 0/0,95533651 \text{ (ver Equação 4.6).}$$

Com isso, agora é possível visualizar graficamente a imagem de W (Figura 4.3) plotando os valores de ω e $\varphi_W(\omega)$, ou seja, deve-se graficar valores correspondentes às colunas 2 e 3. Observe que $f(t) = -0,75$ faz correspondência a outros dois valores de pertinência. Nesse caso, deve-se escolher o máximo = $\max(0,21, 0,93) = 0,93$ (ver Figura 4.3). Deve-se repetir esse procedimento para todos valores $f(t)$ que possuem mais de um grau de pertinência. Dessa forma, obtem-se a solução resultado desta operação (ver Figura 4.4).

A Figura 4.5 apresenta o processo gráfico do princípio de extensão aplicado a uma função oscilante. Observe que é possível identificar o intervalo em X que “reflete” por meio de f apenas os valores máximos de $F(W)$.

Na Figura 4.6 é apresenta uma situação na qual uma entrada faz correspondência a mais de um grau de pertinência, no entanto, em razão de se estar

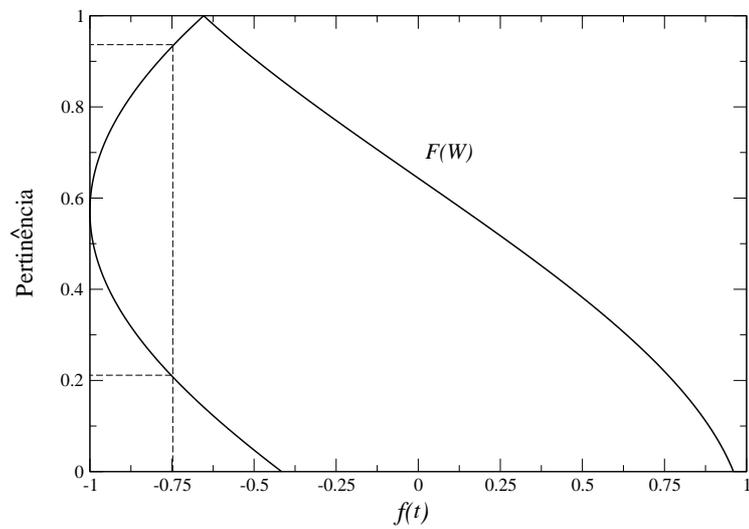


FIGURA 4.3 Número *fuzzy* $F(W)$ não triangular (sem operação de máximos).

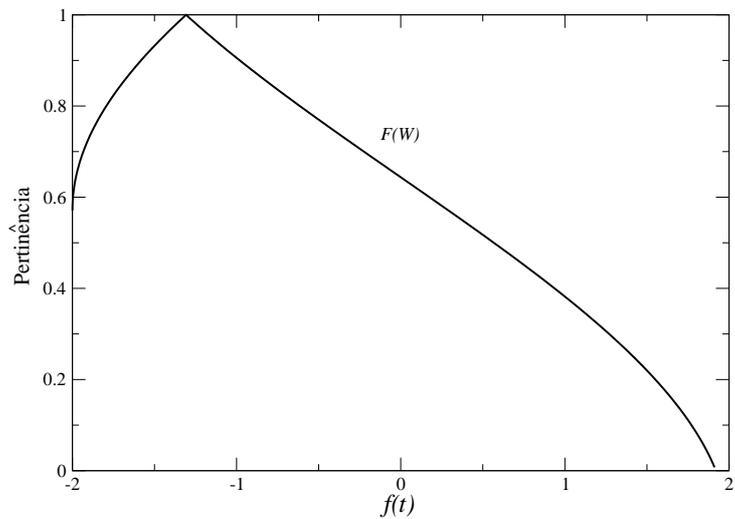


FIGURA 4.4 Número *fuzzy* $F(W)$ não triangular obtido após a operação de máximos ($n=120$).

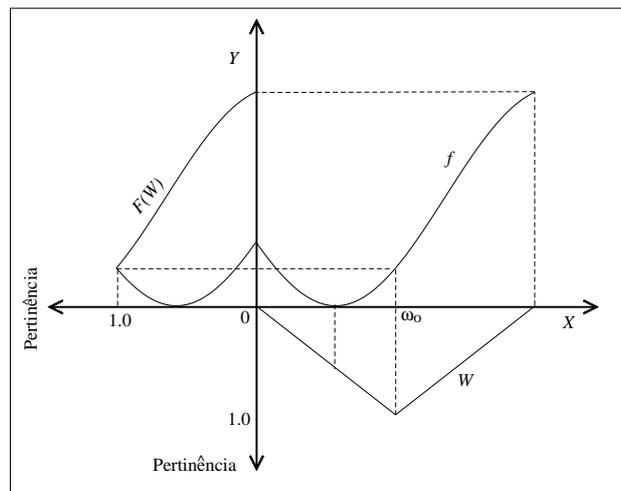


FIGURA 4.5 Processo gráfico da extensão de Zadeh. Imagem W por meio de f para o instante $t = 2$.

trabalhando com valores discretos, alguns desses graus não estão explícitos. Note que $f(t) = 0,4$ faz correspondência ao grau de pertinência $0,15$ e a outros dois que não estão explícitos (próximos a $0,3$ e $0,8$). No entanto, para se obter apenas os valores de $F(W)$ o grau com valor $0,15$ e $0,3$ devem ser descartados. A solução apresentada neste trabalho para resolver este problema, consistiu em **desenvolver um algoritmo** em Linguagem Fortran 90 para eliminar com eficiência os valores $\varphi_{F(W)}/f(t)$ não desejáveis à obtenção dos máximos.

Obs.: Para simplicidade vale ressaltar que $\varphi_{F(W)}/f(t)$ é o ponto cartesiano com coordenadas $(f(t), \varphi_{F(W)})$, onde $\varphi_{F(W)}$ é a pertinência de $F(W)$.

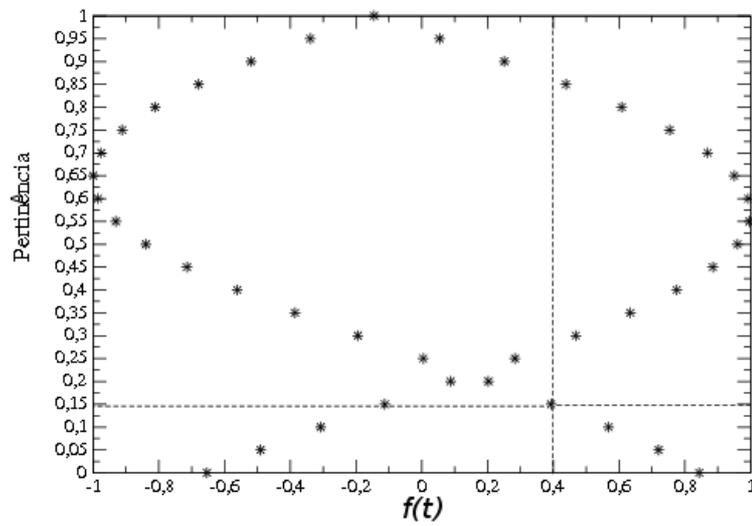


FIGURA 4.6 Imagem de $\varphi_W(w)$ por meio de f em $t = 4$ e $n = 43$.

O algoritmo

Considere a matriz M , onde t são os valores da coluna 1, $f(t)$ da coluna 2 e $\varphi_{F(w)}$ da coluna 3, ou seja

$$M_{n,3} = \begin{bmatrix} m_{1,1} & m_{1,2} & m_{1,3} \\ m_{2,1} & m_{2,2} & m_{2,3} \\ m_{3,1} & m_{3,2} & m_{3,3} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ m_{n,1} & m_{n,2} & m_{n,3} \end{bmatrix}$$

onde n é o número de pontos da função de pertinência.

ETAPA 1

O algoritmo consiste primeiramente em por em ordem crescente $f(t)$, ou seja

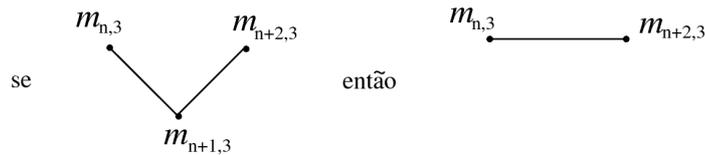
$$m_{1,2} \leq m_{2,2} \leq m_{3,2} \leq \dots \leq m_{n,2}$$

de modo que o processo de ordenação não altere as posições $\varphi_{F(W)}/f(t)$.

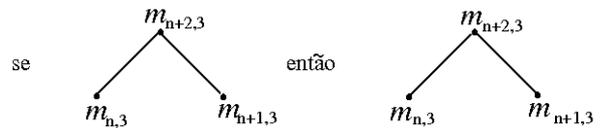
ETAPA 2

Em seguida, o algoritmo compara $m_{n,3}$, $m_{n+2,3}$ e $m_{n+1,3}$ tal que:

se $m_{n,3} \geq m_{n+1,3}$ e $m_{n+1,3} \leq m_{n+2,3}$ ocorrem, então descarta-se $m_{n+1,3}$, ou seja:



Repete-se a ETAPA 2 enquanto se mantém a condicional. No entanto, se $m_{n,3} < m_{n+1,3}$ e $m_{n+1,3} > m_{n+2,3}$ ocorrem, então o algoritmo continua e não descarta nenhum ponto, ou seja:



O exemplo abaixo ilustra o “funcionamento” deste algoritmo.

Exemplo 4.1.2.

Na Figura 4.7 tem-se o conjunto *fuzzy* discreto A , onde $a \leq b \leq \dots \leq m$. Para obter apenas os máximos do conjunto *fuzzy* é necessário descartar os valores

φ_1/c e φ_2/e . Observe que é possível resolver parte desse problema, usando a seguinte condição:

“Se certas entradas do conjunto universo possuem igual pertinência então tome os valores que são máximo e mínimo das entradas”.

Dessa forma, seria utilizada a idéia de α - nível. Por exemplo, para $\alpha = \varphi_2$ existem três entradas correspondentes: “a”, “e” e “i”. Assim, descarta-se a entrada “e”. Isso resolve somente parte do problema, pois se $\alpha = \varphi_1$ o valor máximo no domínio é “j” e o mínimo é “c”. No entanto, sabe-se que φ_1/c é um ponto que deve ser descartado. O algoritmo que foi desenvolvido resolve esse problema com eficiência.

APLICAÇÃO DO ALGORITMO

- Deve-se comparar primeiramente φ_2, φ_3 e φ_1 e verificar se $\varphi_2 > \varphi_3$ e $\varphi_3 < \varphi_1$. O que de fato não é verdade pois $\varphi_2 < \varphi_3$ e $\varphi_3 > \varphi_1$. (ver Figura 4.7)

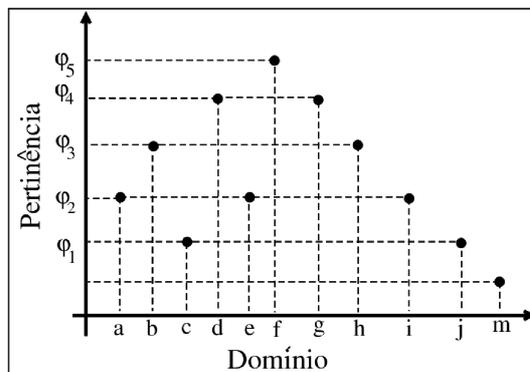


FIGURA 4.7 Processo gráfico - aplicação do algoritmo.

- Compara-se agora $\varphi_3, \varphi_1, \varphi_4$. Como $\varphi_3 > \varphi_1$ e $\varphi_1 < \varphi_4$, então descarta-se φ_1 (ver Figura 4.8).

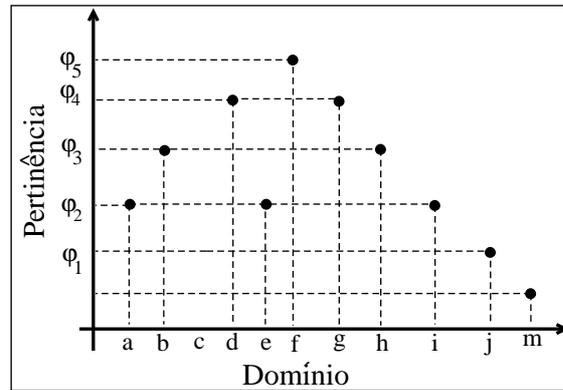


FIGURA 4.8 Aplicação do algoritmo para obtenção dos máximos - primeira etapa.

- Deve-se agora, comparar $\varphi_4, \varphi_2, \varphi_5$. Como $\varphi_4 > \varphi_2$ e $\varphi_2 < \varphi_5$ então descarta-se φ_2 (ver Figura 4.9).

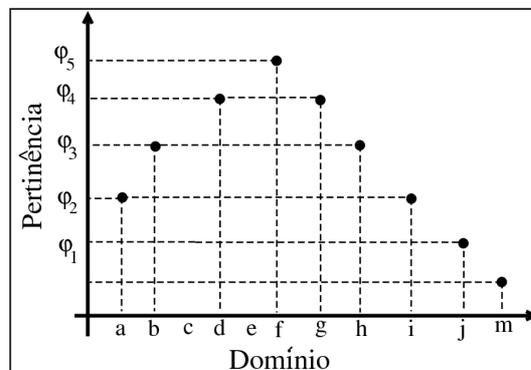


FIGURA 4.9 Aplicação do algoritmo para obtenção dos máximos - segunda etapa.

4.2 Princípio de Extensão - duas variáveis (Aritimética *fuzzy*)

Na seção anterior, mostrou-se um método para obter a imagem de um número *fuzzy* para uma função não monótona oscilante do tipo $f(t) = A_1 \cos(\omega t)$, onde A_1 é amplitude da oscilação. Considerou-se a frequência angular como parâmetro *fuzzy* e através do princípio de extensão, encontrou-se a imagem de W em um dado instante. Nas seções seguintes, será mostrada uma possível solução do problema, após a evolução do sistema. É de interesse agora, saber qual a solução em $t = t_1$, considerando ambos os parâmetros (*amplitude* e *frequência*) como parâmetros incertos. Buscou-se essa solução via Princípio de Extensão e aritmética de números *fuzzy*. Conforme definições da Seção (3.7), as operações aritméticas de números *fuzzy*, aqui utilizadas, são vistas como casos particulares do Princípio de Extensão.

Vale ressaltar que as operações aritméticas de números *fuzzy* nem sempre são triviais. O problema pode ser simples ou mais complicado, dependendo da função de pertinência, dos limites do número *fuzzy* e da operação que será utilizada. Por exemplo, as operações de adição e subtração de números *fuzzy* triangular também são números *fuzzy* triangulares. No entanto, o mesmo não ocorre com as operações de multiplicação e divisão. Realizar a aritmética via operação intervalar (α - nível) nem sempre é simples, principalmente se as operações são *multiplicação* ou *divisão* e os intervalos (base da função de pertinência) não são números apenas positivos.

Interpretação do problema:

$$f(t)_{fuzzy} = \overbrace{A}^{fuzzy} \underbrace{\cos(\omega t)}_{fuzzy}$$

Partindo-se do princípio de que a *amplitude* é um parâmetro incerto, pode-se representar essa incerteza por meio de um número *fuzzy* dado por uma função de pertinência do tipo triangular

$$\varphi_A(a) = \begin{cases} 0, & \text{se } a \leq a_0 - \delta_1 \\ \frac{a - a_0 + \delta_1}{\delta_1}, & \text{se } a_0 - \delta_1 < a \leq a_0 \\ \frac{a_0 + \delta_2 - a}{\delta_2}, & \text{se } a_0 \leq a < a_0 + \delta_2 \\ 0, & \text{se } a \geq a_0 + \delta_2 \end{cases} . \quad (4.7)$$

Como a *frequencia* é também um parâmetro incerto, essa incerteza pode ser representada através de um número *fuzzy* dado por uma função de pertinência do tipo triangular

$$\varphi_W(\omega) = \begin{cases} 0, & \text{se } \omega \leq \omega_0 - \delta \\ \frac{\omega - \omega_0 + \delta}{\delta}, & \text{se } \omega_0 - \delta < \omega \leq \omega_0 \\ \frac{\omega_0 + \delta - \omega}{\delta}, & \text{se } \omega_0 \leq \omega < \omega_0 + \delta \\ 0, & \text{se } \omega \geq \omega_0 + \delta \end{cases} . \quad (4.8)$$

A imagem de W por meio de $f(t)$ via Princípio de Extensão, conforme visto anteriormente, é o número *fuzzy* $F(W)$ (ver Equação 4.6). Será representado agora na matriz Q , os valores discretos de $F(W)$ onde os valores de $f(t)$ estão representados na *coluna 1* e os valores $\varphi_{F(W)}$ representados na *coluna 2*, ou seja Em $t = t_n$ tem-se

$$Q_{n,2} = \begin{bmatrix} q_{1,1} & q_{1,2} \\ q_{2,1} & q_{2,2} \\ \vdots & \vdots \\ q_{n,1} & q_{n,2} \end{bmatrix} \quad (4.9)$$

onde n é o número de elementos especificados da função de pertinência φ_W . Para melhor entendimento das operações aritméticas que serão aqui realizadas “omiti-

mos” a variável t da matriz. Nota-se também que não se faz necessário armazenar essa variável na matriz, isso implicaria maior custo computacional. Dessa forma, na “coluna 1” estão os elementos especificados e na “coluna 2” seus respectivos grau de pertinência, ou seja

$$B = F(W) = \sum_{i=1}^n q_{n,2}/q_{n,1} = q_{1,2}/q_{1,1} + q_{2,2}/q_{2,1} + \dots + q_{n,2}/q_{n,1}. \quad (4.10)$$

Obs.: As matrizes $M_{p,3}$ (Equação 4.4) e $Q_{n,2}$ (Equação 4.9) são similares, no entanto, em $Q_{n,2}$ omitimos os valores de t .

Até aqui, uma vez que os valores de B já são conhecidos (número *fuzzy* B), foi resolvido o problema para apenas um parâmetro incerto (*frequência*) em um dado $t = t_n$. Da mesma forma, representa-se os valores de A (amplitude) em uma matriz P

$$P_{k,2} = \begin{bmatrix} p_{1,1} & p_{1,2} \\ p_{2,1} & p_{2,2} \\ \vdots & \vdots \\ p_{k,1} & p_{k,2} \end{bmatrix} \quad (4.11)$$

$$A = \sum_{j=1}^k p_{k,2}/p_{k,1} = p_{1,2}/p_{1,1} + p_{2,2}/p_{2,1} + p_{3,2}/p_{3,1} + \dots + p_{k,2}/p_{k,1}$$

onde k é o número de elementos especificados da função de pertinência φ_A , $p_{k,1} = a$ e $p_{k,2} = \varphi_A(a)$. Como A e B são números *fuzzy* resta agora saber qual o resultado da operação de multiplicação entre A por B . De acordo com a definição para

produto de números *fuzzy* (Equação 3.21) tem-se qu

$$\varphi_{(A,B)}(z) = \max_{\{(a,\omega):a.\omega=z\}} \min[\varphi_A(a), \varphi_B(\omega)].$$

Para se encontrar $\varphi_{(A,B)}$, primeiro deve-se realizar a operação min seguida da operação produto (ver Exemplo 3.10.1).

Seja AB_{\min} o resultado da operação $\min(\varphi_A(a), \varphi_B(\omega))$, isto é

$$\begin{aligned} AB_{\min} = & q_{1,2} \wedge p_{1,2}/q_{1,1} \cdot p_{1,1} + q_{1,2} \wedge p_{2,1}/q_{1,1} \cdot p_{2,1} + \dots + q_{1,2} \wedge p_{k,2}/q_{1,1} \cdot p_{k,1} \\ & + \\ & q_{2,2} \wedge p_{1,2}/q_{2,1} \cdot p_{1,1} + q_{2,2} \wedge p_{2,1}/q_{2,1} \cdot p_{2,1} + \dots + q_{2,2} \wedge p_{k,2}/q_{2,1} \cdot p_{k,1} \\ & + \\ & q_{n,2} \wedge p_{1,2}/q_{n,1} \cdot p_{1,1} + q_{n,2} \wedge p_{2,1}/q_{n,1} \cdot p_{2,1} + \dots + q_{n,2} \wedge p_{k,2}/q_{n,1} \cdot p_{k,1}. \end{aligned}$$

Obs.: O símbolo \wedge significa “operação mim” e “.” multiplicação. Agora deve-se realizar a operação max, de modo que, cada elemento do domínio possua apenas um grau de pertinência, sendo esse, o grau com maior valor. Por exemplo, se

$$q_{1,1} \cdot p_{2,1} = q_{2,1} \cdot p_{1,1} \text{ e } q_{1,2} \wedge p_{2,1} \text{ é maior que } q_{2,2} \wedge p_{1,2}$$

então devemos escolher o $\max \{q_{1,2} \wedge p_{2,1}, q_{2,2} \wedge p_{1,2}\}$ e associar o resultado da operação de max ao valor resultado da operação de multiplicação. Dessa forma, obtém-se: $q_{1,1} \cdot p_{2,1}/q_{1,2} \wedge p_{2,1}$.

Agora armazenar-se na matriz C os valores de AB_{\min} .

$$C_{nk,2} = \begin{bmatrix} q_{1,1} \cdot p_{1,1} & q_{1,2} \wedge p_{1,2} \\ q_{1,1} \cdot p_{2,1} & q_{1,2} \wedge p_{2,1} \\ \vdots & \vdots \\ q_{1,1} \cdot p_{k,1} & q_{1,2} \wedge p_{k,2} \\ \\ q_{2,1} \cdot p_{1,1} & q_{2,2} \wedge p_{1,2} \\ q_{2,1} \cdot p_{2,1} & q_{2,2} \wedge p_{2,1} \\ \vdots & \vdots \\ q_{2,1} \cdot p_{k,1} & q_{2,2} \wedge p_{k,2} \\ \\ q_{n,1} \cdot p_{1,1} & q_{n,2} \wedge p_{1,2} \\ q_{n,1} \cdot p_{2,1} & q_{n,2} \wedge p_{2,1} \\ \vdots & \vdots \\ q_{n,1} \cdot p_{k,1} & q_{n,2} \wedge p_{k,2} \end{bmatrix}$$

Note que a matriz P possui um número nk de linhas. Isso significa que quanto mais pontos (*elementos especificados*) maior será o valor nk o que implica em maior custo computacional. Para se realizar a operação de máximo (max) com eficiência, novamente deve-se aplicar o algoritmo que foi explicado na secção passada. Mais uma vez é de valia observar que para aplicar o algoritmo, os valores $q_{n,1} \cdot p_{k,1}$ devem estar ordenados em ordem decrescente com o respectivo valor de $q_{n,2} \wedge p_{k,2}$. Em outras palavras, os elementos da “coluna 1” devem estar ordenados em ordem decrescente, de modo que, se algum dos elementos mudar de posição o seu grau de pertinência deve acompanhá-lo para posição de destino. Após a aplicação do algoritmo encontra-se o resultado da operação de $AB = A.F(W)$. No exemplo que segue, foi realizada a operação aritmética *fuzzy* via operação intervalar e compara-se o resultado com o método que aqui é utilizado.

Exemplo 4.2.1. Multiplicação de números *fuzzy*

Sejam A e B dois números *fuzzy* triangulares definidos por $A = (1, 2, 4)$ e $B = (2, 4, 6)$:

$$\varphi_A(x) = \begin{cases} 0, & \text{se } x \leq 1 \\ x - 1, & \text{se } 1 < x \leq 2 \\ \frac{-x}{2} + 2, & \text{se } 2 \leq x < 4 \\ 0, & \text{se } x \geq 4 \end{cases} . \quad (4.12)$$

$$\varphi_B(y) = \begin{cases} 0, & \text{se } y \leq 2 \\ \frac{y}{2} - 1, & \text{se } 2 < y \leq 4 \\ \frac{-y}{2} + 3, & \text{se } 4 \leq y < 6 \\ 0, & \text{se } y \geq 6 \end{cases} . \quad (4.13)$$

O primeiro passo é obter o α -níveis dos números *fuzzy* em questão:

$$\varphi_A = x - 1 \longrightarrow x = \varphi_A + 1 = \alpha + 1$$

$$\varphi_A = \frac{-x}{2} + 2 \longrightarrow x = 4 - 2\varphi_A = 4 - 2\alpha. \text{ Assim,}$$

- $[A]^\alpha = [\alpha + 1, 4 - 2\alpha]$

$$\varphi_B = \frac{y}{2} - 1 \longrightarrow y = 2\varphi_B + 2 = 2\alpha + 2$$

$$\varphi_B = \frac{-y}{2} + 3 \longrightarrow y = 6 - 2\varphi_B = 6 - 2\alpha. \text{ Assim,}$$

- $[B]^\alpha = [2\alpha + 2, 6 - 2\alpha]$

Observa-se que, para $\alpha \in [0, 1]$, todos elementos de cada intervalo são números positivos. Logo a operação de multiplicação dos dois intervalos é simples. Assim,

$$\begin{aligned} [A]^\alpha \cdot [B]^\alpha &= [\alpha + 1, 4 - 2\alpha] \cdot [2\alpha + 2, 6 - \alpha] \\ &= [(\alpha + 1)(2\alpha + 2), (4 - 2\alpha)(6 - 2\alpha)] \\ &= [(2\alpha^2 + 4\alpha + 2), (4\alpha^2 - 20\alpha + 24)] \end{aligned}$$

Note que se $\alpha = 1$ então tem-se $[8, 8]$ e se $\alpha = 0$ então tem-se $[2, 24]$.

Agora será determinada a função de pertinência resultado da operação de multiplicação. Fazendo $x = 2\alpha^2 + 4\alpha + 2$ tem-se

$$\alpha = \frac{-4 \pm \sqrt{8x}}{4}$$

Como a pertinência é um valor entre 0 e 1, então

$$\alpha = \frac{-4 + \sqrt{8x}}{4}$$

Fazendo $x = 4\alpha^2 - 20\alpha + 24$ tem-se

$$\alpha = \frac{5 \pm \sqrt{x+1}}{2}, \text{ assim}$$

$$\alpha = \frac{5 - \sqrt{x+1}}{2}$$

Chega-se então que

$$\varphi_{AB}(x) = \begin{cases} \frac{-4 + \sqrt{8x}}{4}, & \text{se } 2 < a \leq 8 \\ \frac{5 - \sqrt{x+1}}{2}, & \text{se } 8 \leq a < 24 \end{cases} \quad (4.14)$$

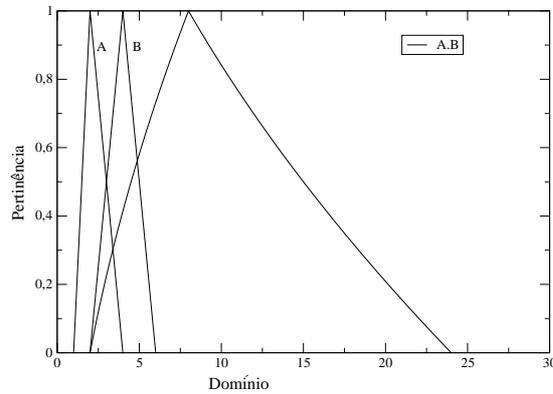


FIGURA 4.10 Operação aritmética da multiplicação (intervalar) dos números *fuzzy* A e B.

- Tem-se na Figura 4.11, a solução via algoritmo baseado na definição:

$$\varphi_{(A.B)}(z) = \sup_{\{(x,y):x,y=z\}} \min[\varphi_A(x), \varphi_B(y)]$$

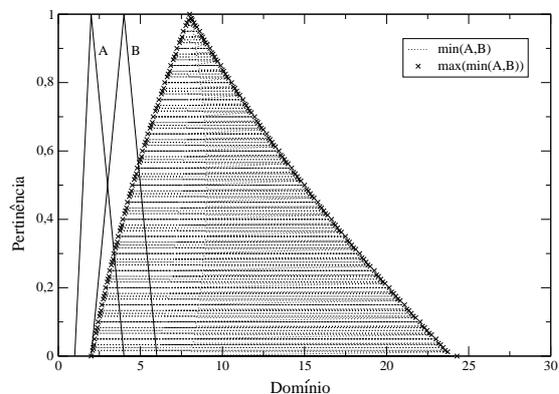


FIGURA 4.11 Operação aritmética da multiplicação dos números *fuzzy* A e B.

- Na Figura 4.12 ambos os resultados são comparados.

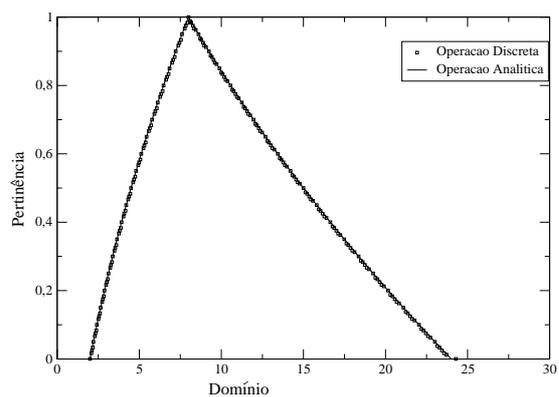


FIGURA 4.12 Operação aritmética analítica (intervalar) e discreta (princípio de extensão).

Nota-se que as soluções analítica e discreta se sobrepõem. Observa-se também que o algoritmo mostrou-se eficiente para obtenção dos máximos. Vale ressaltar que essa metodologia tem se mostrado eficiente para outras operações (adição, subtração e divisão), mesmo se os elementos do intervalo não são somente números positivos.

5 RESULTADO E DISCUSSÃO

5.1 Oscilador fuzzy com parâmetro amplitude incerto

Em um sistema vibratório, a amplitude do movimento é uma grandeza física que é determinada experimentalmente por meio de medidas ou conjunto de medidas. Essas medidas têm uma incerteza própria que depende das características dos equipamentos utilizados na sua determinação e também do operador. Assim, uma medida repetida várias vezes com o mesmo cuidado e procedimento pelo mesmo operador ou por vários operadores, os resultados obtidos não são, em geral, idênticos. Como amplitude é um parâmetro incerto, essa incerteza foi representada por meio de um número fuzzy modelado por uma função de pertinência do tipo triangular. Seja $x(t) = A_1 \cos(\omega t + \phi)$, $\omega = 1$ e $\phi = 0$ (números reais) e considere o parâmetro amplitude A_1 com valor igual a 2. Partindo de dados fictícios, foi suposto que existe uma incerteza em torno de 2 tal que $A = (1, 2, 5)$ (ver Seção 3.8). Esse é um modelo matemático razoável para a expressão linguística “perto de 2”. Dessa forma

$$\varphi_A(a) = \begin{cases} 0, & \text{se } a \leq 1 \\ a - 1, & \text{se } 1 < a \leq 2 \\ 5 - a, & \text{se } 2 \leq a < 5 \\ 0, & \text{se } a \geq 5 \end{cases} .$$

Utilizando o princípio de extensão obteve-se a imagem fuzzy do modelo por meio de $x(t)$. (Ver Figura 5.1).

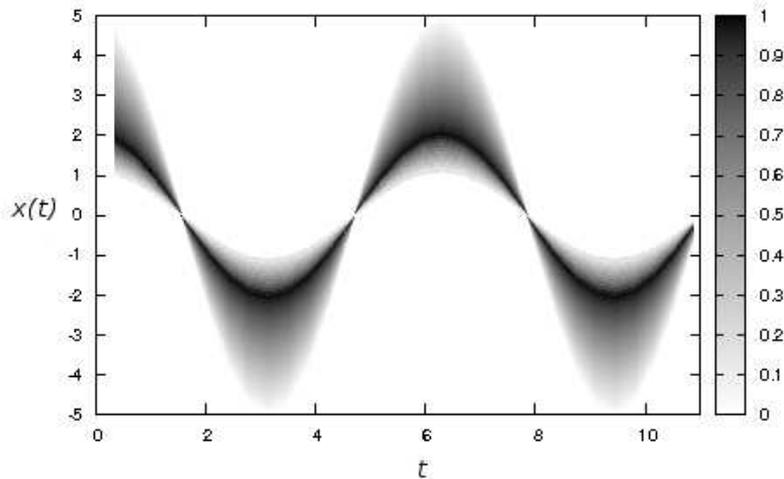


FIGURA 5.1 Solução do oscilador *fuzzy* com parâmetro $\omega = 1$ (valor clássico) e amplitude (incerto) $A_1 = 2$.

A Figura acima possui uma escala entre 0 a 1 que representa os graus de pertinência. A “linha ” mais escura representa os valores de $x(t)$ com pertinência máxima igual 1 em determinado instante t . Observe que, em determinado instante, podem existir diferentes posições para a amplitude com diferentes possibilidades na escala 0 a 1. Note, por exemplo, que em $t = 6$, $x(t) = 2$ com possibilidade próximo a 1 e $x(t) = 4$ com possibilidade próximo a 0. Ou seja, entre 0 e 1 temos infinitas possibilidades. Observe também, que onde ocorrem os máximos e mínimos da função $x(t)$ é onde também ocorrem as maiores concentrações de incertezas e essas se tornam mínimas quando $x(t)$ se aproxima de zero.

A fim de encontrar uma curva representativa dessas famílias de soluções, foi utilizado o método de defuzzificação do centro de gravidade (Figura 5.2). Este método é semelhante à média aritmética para uma distribuição de dados, com a diferença que os pesos aqui são os valores de pertinência que indicam o grau de

compatibilidade do valor x com o conceito modelado pelo conjunto *fuzzy* A .

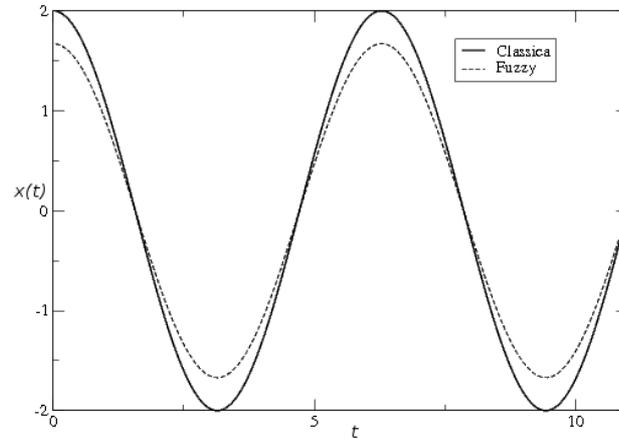


FIGURA 5.2 Solução do oscilador *fuzzy* com parâmetro $\omega = 1$ (valor clássico) e amplitude (incerto) $A_1 = 2$ após o método de defuzzificação do centro de gravidade.

Em outra simulação, fez-se a suposição de uma incerteza em torno de 2 tal que $\delta_1 = 0.3$ e $\delta_2 = 0.6$. Ou seja, $A = (1.7, 2, 2.6)$ (Figura 5.3).

Note que a dispersão da incerteza (“borrão”) agora é menor, o que é natural, visto que incerteza em torno de 2 também é menor. A solução defuzzificada do modelo segue abaixo (Figura 5.4).

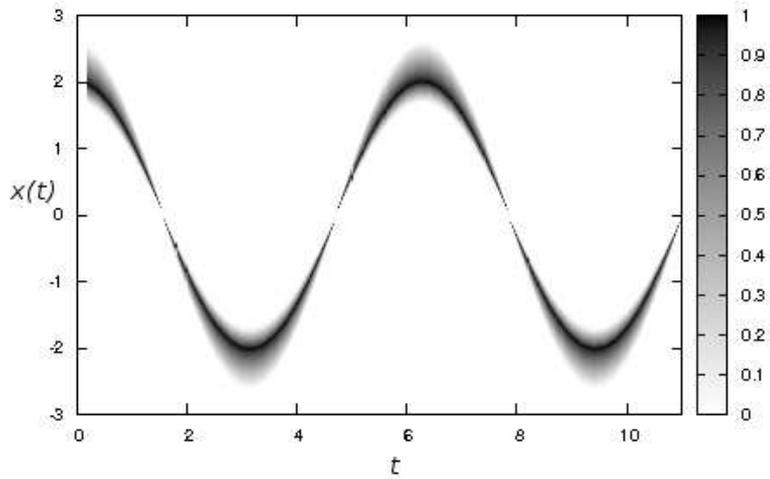


FIGURA 5.3 Solução do oscilador *fuzzy* com parâmetro $\omega = 1$ (valor clássico) e amplitude (incerto) $A_1 = 2$. Nesse caso, foi considerado uma incerta menor em torno de A_1 .

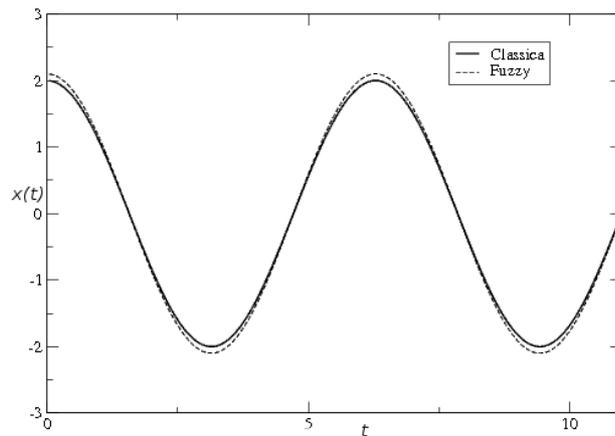


FIGURA 5.4 Solução do oscilador *fuzzy* com parâmetro $\omega = 1$ (valor clássico) e amplitude (incerto) $A_1 = 2$. Resultado após o método de defuzzificação do centro de gravidade.

5.2 Oscilador *fuzzy* com parâmetro frequência incerto

Nesta seção, será aplicado o Princípio de Extensão em uma função oscilante e, em paralelo, será encontrada uma possível evolução temporal do oscilador

fuzzy, considerando o parâmetro frequência como incerto. Vale ressaltar que o parâmetro incerto, nesse caso, está “dentro” da função, diferente do que ocorre com o parâmetro amplitude.

Conforme Seção 2, sabe-se que o modelo matemático clássico para um sistema oscilatório simples pode ser representado pela seguinte equação diferencial:

$$\ddot{x}(t) + \omega_0^2 x(t) = 0$$

onde $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$ representa a *frequência natural* do sistema, m a massa (inércia do sistema) e k o parâmetro de rigidez da mola. O problema tem solução da forma

$$x(t) = A_1 \cos(\omega_0 t + \varphi).$$

A quantidade A_1 é a amplitude do movimento (seu valor depende de como o movimento foi iniciado) e ω_0 é a frequência natural do sistema. O parâmetro ω_0 depende de dois outros parâmetros: o parâmetro m e o parâmetro k , que a *priori*, são incertos, logo, ω_0 também é incerto. Partindo da solução clássica $x(t)$ buscou-se a solução *fuzzy* do problema via extensão de Zadeh como segue.

Seja $\omega_0 = 1$ e $A_1 = 2$. Considere a frequência como número *fuzzy* modelado por função de pertinência triangular, tal que

$$\varphi_W(\omega) = \begin{cases} 0, & \text{se } \omega \leq 0.8 \\ \omega - 0.8, & \text{se } 0.8 < \omega \leq 1 \\ 1.2 - \omega, & \text{se } 1 \leq \omega < 1.2 \\ 0, & \text{se } \omega \geq 1.2 \end{cases}. \quad (5.1)$$

Utilizando W e o Princípio de Extensão encontra-se a solução *fuzzy* do modelo (Figura 5.5). Note que, nesse caso, a incerteza se propaga aumentando à medida

que o sistema evolui, contrário ao que ocorre com a amplitude.

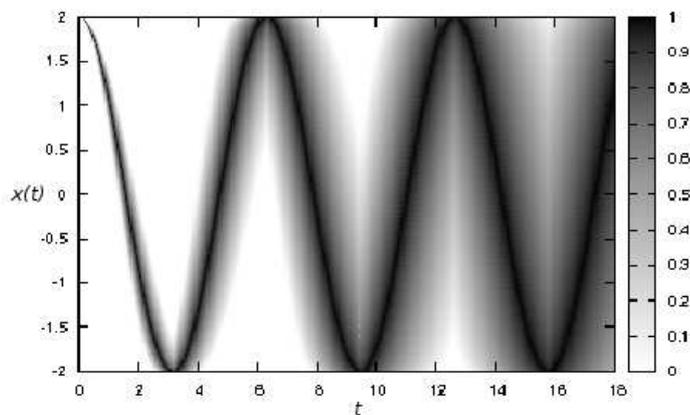


FIGURA 5.5 Solução do oscilador *fuzzy* com parâmetro $\omega = 1$ (valor incerto) e amplitude (valor clássico) $A_1 = 2$.

Dessa forma, é difícil “prever” uma certa posição no espaço $(t, x(t))$, isso porque, à medida que o tempo evolui tem-se que, para um dado t , existem várias posições possíveis e cada posição está associada a uma possibilidade igual ou muito próximo a 1. É fácil perceber que o “borrão” (incerteza) nos instantes iniciais é menor. Pode-se verificar na Figura 5.6, que a solução defuzzificada do oscilador *fuzzy* com parâmetro frequência incerto aproxima a solução do oscilador harmônico amortecido. Ao se incluir a frequência com um certo grau de incerteza, o sistema se comporta análogo a um sistema dissipativo. Isso ocorre porque, à medida que o sistema evolui, a incerteza na frequência torna-se cada vez mais relevante. É de grande importância observar que as soluções *fuzzy* para o parâmetro amplitude e frequência não se comportam de modo análogo. Na primeira, a incerteza se propaga de “modo” constante e, na segunda, a incerteza também se propaga mas se torna mais relevante à medida que “ t ” cresce. A seguir, será esclarecido o comportamento “amortecido” da solução *fuzzy* após defuzzificação e, dessa forma,

será discutido um caso particular das soluções num dado instante t . Será mostrado também os cálculos da defuzzificação tomando uma quantidade menor de pontos na função de pertinência $\varphi_W(\omega)$. Os valores $f(t)$ e $\varphi_{F(W)}$ obtidos após aplicação

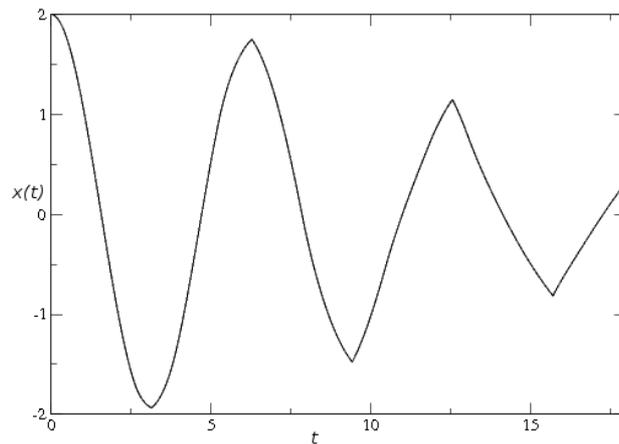


FIGURA 5.6 Solução do oscilador *fuzzy* com parâmetro $\omega = 1$ (valor incerto) e amplitude (valor clássico) $A_1 = 2$ após o método de defuzzificação do centro de gravidade.

do algoritmo em $t = 30$ e com $n = 7$ seguem na Tabela 5.1 (ver Figura 5.7).

$f(\omega t)$	$\varphi_{F(W)}$
-2.0000000000000000	0.71238898038468967
-1.6180339887498962	0.81710873550434959
-0.61803398874989024	0.92182849062400951
0.30850289977516809	1.00000000000000000
1.4110849236127916	0.89528024488034008
1.9746804676428777	0.79056048976068016

TABELA 5.1 Valores discretos.

A Figura 5.7, mostra a imagem $F(W)$ (imagem de W por meio de $x(t)$) no instante $t = 30$ após a operação dos máximos. Observe que para $t = 30$, $x(t)$ é um valor próximo de zero, ou seja, a média obtida com o resultado da defuzzificação por

centro gravidade é um valor próximo a zero. Isso pode ser confirmado fazendo os cálculos da defuzzificação para os valores da Tabela 5.1 como segue. Baseado na Equação 3.32 verifica-se:

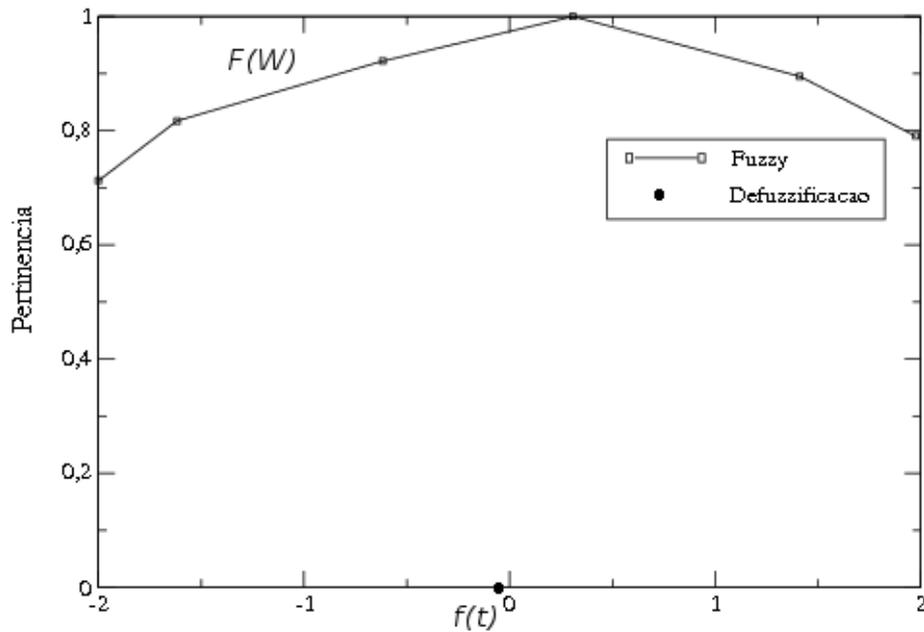


FIGURA 5.7 Solução *fuzzy* no instante $t = 30$ após operação de máximo.

$$G(F(W)) = \frac{(-2)(0.71) + (-1.61)(0.81) + \dots + (1.41)(0.89) + (1.97)(0.79)}{0.71 + 0.81 + 0.92 + 1 + 0.89 + 0.79}$$

$$= \frac{-0.18}{5.13} = -0.035.$$

Assim, percebe-se que à medida que o sistema evolui, o resultado da defuzzificação do centro de gravidade realmente converge para zero, justificando o comportamento da curva que poderia ser interpretado como “dissipação de energia” em razão das incertezas nos parâmetros. No entanto, se as incertezas tendem

a zero a solução fuzzy aproxima a solução clássica, ou seja, no limite ambas soluções se sobrepõem. Assim, seja $A_1 = 1$ (número clássico) e a frequência um número *fuzzy*, tal que $W = (0,09; 1; 1,01)$ (Solução Fuzzy A) e $W = (0,1; 1; 1,9)$ (Solução Fuzzy B). A Figura 5.8 ilustra ambas simulações.

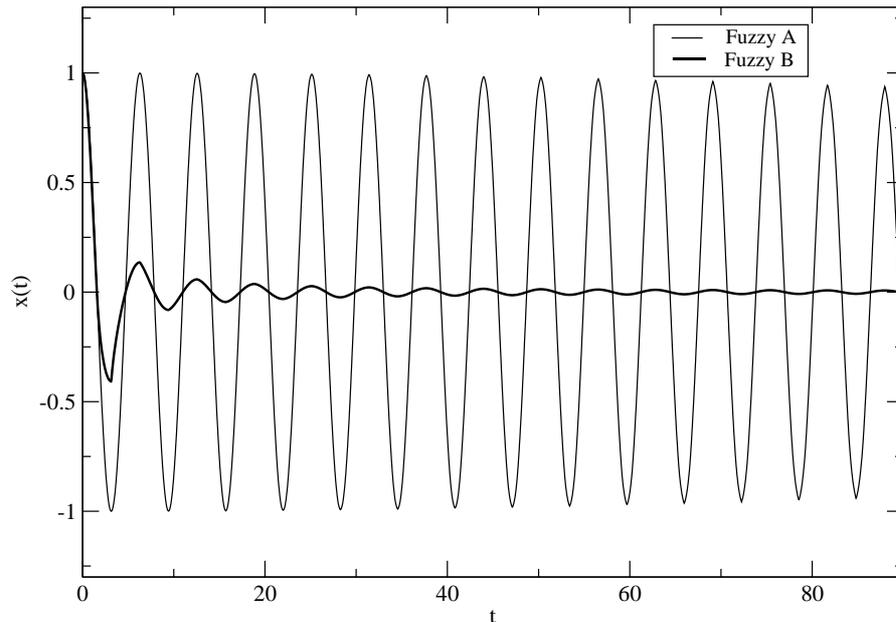


FIGURA 5.8 Solução *fuzzy* A com $\delta = 0.01$ e solução *fuzzy* B com $\delta = 1$.

Note que na solução A o “amortecimento” é suave e praticamente esta solução reproduz o movimento harmônico da solução clássica. Observe que o amortecimento torna-se um pouco mais relevante nos instantes finais. Como na solução B as incertezas consideradas são maiores, o amortecimento é mais significativo.

Vale ressaltar que na literatura são encontradas diversas aplicações bem sucedidas do princípio de extensão, conforme discutido na seção 3.9, no entanto, essas aplicações, em sua grande parte, se restringem a aplicações que envolvem funções clássicas relativamente simples. O que aqui se apresenta é uma aplicação do princípio de extensão para uma função não monôtona. Os resultados quando

ambos os parâmetros (amplitude e frequência) são incertos, seguem na próxima seção.

5.3 Oscilador fuzzy com parâmetro amplitude e frequência incertos

Considere que ambos os parâmetros (*amplitude* e *frequência*) são parâmetros incertos. Essa incerteza pode ser representada por meio de números fuzzy dados por funções de pertinência do tipo triangular, tal que

$$\varphi_A(a) = \begin{cases} 0, & \text{se } a \leq 2 \\ a - 1.7, & \text{se } 1.7 < a_0 \leq 2 \\ 2.6 - a, & \text{se } 2 \leq a_0 < 2.6 \\ 0, & \text{se } a \geq 2.6 \end{cases} \quad \varphi_W(\omega) = \begin{cases} 0, & \text{se } \omega \leq 0.8 \\ \omega - 0.8, & \text{se } 0.8 < \omega_0 \leq 1 \\ 1.2 - \omega, & \text{se } 1 \leq \omega_0 < 1.2 \\ 0, & \text{se } \omega \geq 1.2 \end{cases}.$$

Dessa forma, foi encontrada a solução via princípio de extensão e aritmética de números fuzzy conforme discutido nas Seções 4.1 e 4.2. Na figura 5.9, tem-se a solução do oscilador fuzzy com ambos parâmetros incertos.

Observe que para os valores $x(t) \geq 2$ e $x(t) \leq -2$ existe um conjunto de possibilidades no intervalo $[0, 1]$, ao contrário da solução anterior para o parâmetro frequência incerto. A solução anterior apresenta um “corte” na região próxima a 2 e -2 . Isso pode ser melhor entendido conforme Figura 5.10.

Note que na curva $F(W)$ a possibilidade de $f(t) = -1$ é 0 (“corte”). No entanto, em $A.F(W)$ a possibilidade de $f(t) = -2$ é próximo a 0.5, ou seja, não possui o “corte”. A solução, após o método de defuzzificação por Centro de Gravidade é ilustrada na Figura 5.11.

Essa solução é mais elaborada que as anteriores (com um parâmetro incerto), visto que, as incertezas presentes em dois parâmetros foram inseridas ao

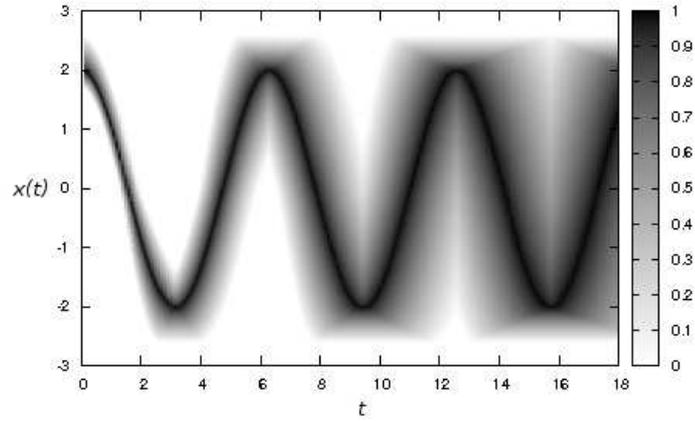


FIGURA 5.9 Solução do oscilador fuzzy com parâmetros amplitude e frequência incertos.

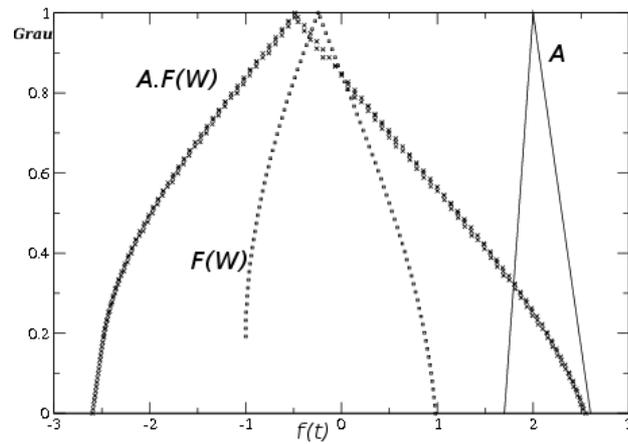


FIGURA 5.10 Multiplicação dos números fuzzy A e W em $t = 8$. No eixo x está representado a base da função de pertinência da amplitude e de $f(t)$.

sistema. Além disso, a última solução mostra que para todo instante t encontra-se valores de possibilidades para $x(t)$ em $[0,1]$.

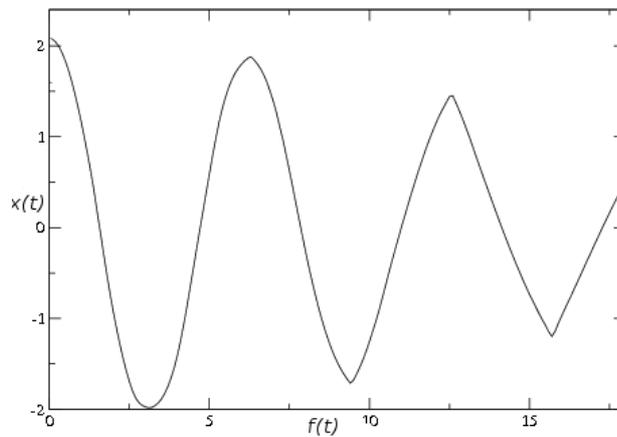


FIGURA 5.11 Solução do oscilador fuzzy com parâmetros amplitude e frequência incertos após o método de defuzzificação.

Na Figura 5.12 foi comparado o resultado obtido com a solução clássica. Observe que, nos instantes iniciais, as soluções praticamente se sobrepõem e, isso deve-se ao fato que nos instantes iniciais, as incertezas são “menores” e, essas se tornam mais relevantes, a medida que o sistema evolui.

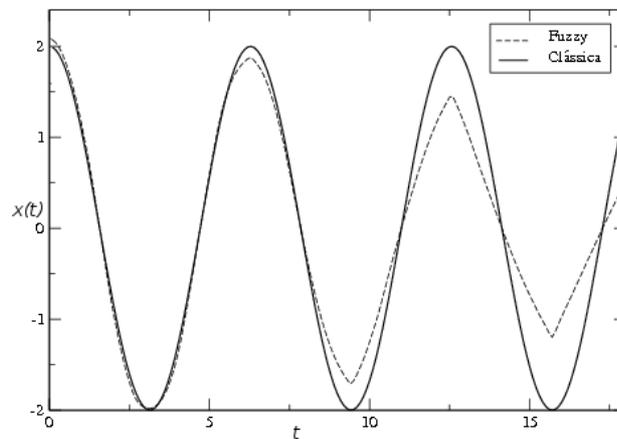


FIGURA 5.12 Solução do oscilador fuzzy com parâmetros amplitude e frequência incertos após o método de defuzzificação e solução clássica do oscilador harmônico.

6 CONCLUSÃO

Por meio da ferramenta de lógica *fuzzy*, verificou-se que o oscilador *fuzzy*, com incerteza na frequência ou, na frequência e amplitude, tem um comportamento semelhante ao oscilador harmônico amortecido.

Observando a solução *fuzzy* não defuzzificada é possível concluir que as incertezas existentes em torno dos parâmetros se tornam cada vez maiores à medida que o sistema evolui, ou seja, a amplitude vai diminuindo e, dessa forma, como as incertezas tendem a se tornar cada vez maiores, o sistema passa a se comportar análogo a um sistema “dissipativo”.

Verifica-se que a metodologia desenvolvida para a aplicação e implementação do princípio de extensão e aritmética *fuzzy*, generaliza o princípio de extensão, ou seja, permite sua aplicação sobre diferentes tipos de funções. Conclui-se também que o ferramental computacional desenvolvido, permite realizar por meio de conjuntos discretos, as operações aritméticas entre números *fuzzy* definidos em intervalos positivos ou negativos e com funções de pertinência que sejam conhecidas ou não.

Como trabalho futuro, espera-se explorar o problema por um outro ângulo, analisando, por exemplo, o sistema de oscilação acoplado ou um sistema já amortecido. Cabe aqui ainda, a interpretação física detalhada do problema e outras discussões sobre a aplicação do princípio de extensão em uma função oscilante.

7 REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- BARROS, L.C.; BASSANEZI, R.C. **Tópicos de lógica fuzzy e biomatemática**. Campinas: IMECC–UNICAMP, 2006. 354 p.
- BARROS, L.C. **Sobre sistemas dinâmicos fuzzy: teoria e aplicações**. 1997. 103 p. Tese (Doutorado em Matemática Aplicada) – Instituto de Matemática Estatística e Computação Científica. Universidade Estadual de Campinas, Campinas, SP.
- BASSANEZI, R.C.; TONELLI, P.A.; BARROS, L.C. Fuzzy modelling in population dynamics. **Ecological Modelling**, Amsterdam, v. 128, n. 18, p. 27-33, 2000.
- BEZDEK, J.C.; SANKAR, P.K. **Fuzzy models for pattern recognition: methods that search for structures in data**. New York: IEEE, 1992. 539 p.
- CABRELLI, C.A.; FORTE, B.; MOLTER, U.M.; VRSCAY, E.R. **Iterated fuzzy sets systems: a new approach to the inverse problem for fractals and other sets**. *Journal of Mathematics*, San Diego, v. 171, n. 1, p. 79-100, out. 1992.
- CASTANHO, M.J.P.; YAMAKAMI, A.; BARROS, L.C.; VENDITE, L.L. Modelo matemático fuzzy para descrever o crescimento do câncer de próstata. **Revista de Biomatemática**, Campinas, v. 15, n. 15, p. 41-50, ago. 2005.
- CECCONELLO, M. **Modelagem alternativa para dinâmica populacional: sistemas dinâmicos fuzzy**. 2006. 93 p. Dissertação (Mestrado em Matemática Aplicada) – Universidade Estadual de Campinas, Campinas, SP.
- COELHO, M. **Osciladores harmônicos**. 2003. 29 p. Monografia (Graduação em Matemática) – Universidade Federal de Goiás, Goiânia, GO.
- COX, E.D. **Fuzzy logic for business and industry**. Massachusetts: Charles River Media, 1995. 602 p.
- FORTE, B.; LO SCHIAVO, M.; VISCAY, E.R. Continuity properties of attractors for iterated fuzzy set systems. **Journal of the Australian Mathematical**, Australia, v. 36, n. 2, p. 175-193, 1994.
- GOMIDE, F.; PEDRYCZ, W. **An introduction to fuzzy sets-analysis and design**. New York: MIT, 1998. 475 p.

JAFELICE, R.S.M.; BARROS, L.C.; BASSANEZI, C. Sobre sistemas dinâmicos fuzzy com retardo: uma aplicação na dinâmica do HIV com tratamento. **Revista de Biomatemática**, Campinas, v. 18, n. 4, p. 131-148, set. 2008.

JAFELICE, R. M. **Modelagem fuzzy para dinâmica de transferência de soropositivos para HIV em doença plenamente manifesta**. 2004. 187 p. Tese (Doutorado em Engenharia Elétrica) – Faculdade de Engenharia Elétrica e Computação. Universidade Estadual de Campinas, Campinas, SP.

JORNADA, A.H. Calcular a incerteza em ensaios é realmente importante? **Jornal da Metrologia**, São Paulo, v. 16, n. 4, p. 5, mar. 2007.

KITTEL, C.; KNIGHT, W.D. **Curso de física de Berkeley**. 2.ed. São Paulo: Ed. Blücher, 1970. 403 p.

KLIR, G.; YUAN, B. **Fuzzy sets and fuzzy logic: theory and applications**. New Jersey: Prentice-Hall PTR, 1995. 592 p.

MELO, G.J.A. Lógica fuzzy aplicada ao problema de propagação de um vírus. In: SIMPÓSIO DE APLICAÇÕES COM LÓGICA FUZZY, 2., 2008, Sorocaba-SP. **Anais...** Sorocaba: USP, 2008. p. 39-45.

ORTEGA, N.R.S. **Aplicação da teoria de conjuntos fuzzy a problemas da biomedicina**. 2001. 152 p. Tese (Doutorado em Ciências) – Instituto de Física. Universidade de São Paulo, São Paulo, SP.

ROMÁN, H.; BASSANEZI, R. A note on the zadeh's extensions. **Fuzzy Sets and Systems**, Amsterdam, v. 117, n. 36, p. 327-331, nov. 2001.

SHAW, I.; SIMÕES, M. **Controle e modelagem Fuzzy**. São Paulo: Edgard Blücher, 1999. 200 p.

SHIANG-TAI LIU, C.K. Solving fuzzy transportation problems based on extension principle. **European Journal of Operational Research**, New York, v. 153, n. 3, p. 661-674, 2004.

TANAKA, K. **An introduction to fuzzy logic for practical applications**. New York, 1997. 148 p.

TANCHEIT, R. **Sistemas fuzzy**. 2003. 120 p. Tese (Doutorado em Engenharia Elétrica) – Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, RJ.

YEN, J.; LANGARI, R. **Fuzzy logic**: intelligence, control, and information.
EUA: Prentice Hall, 1999. 547 p.

ZADEH, L.A. Fussy sets. **Information and Control**, Berkeley, v. 8, n. 1, p.
338-353, 1965.