



SÍLVIO DE CASTRO SILVEIRA

**MODELAGEM BAYESIANA DA FREQUÊNCIA CARDÍACA
COM CARGAS CRESCENTES DE TRABALHO**

**LAVRAS - MG
2017
SÍLVIO DE CASTRO SILVEIRA**

**MODELAGEM BAYESIANA DA FREQUÊNCIA CARDÍACA COM CARGAS
CRESCENTES DE TRABALHO**

Tese apresentada à Universidade Federal de Lavras, como parte das exigências do Programa de Pós-Graduação em Estatística e Experimentação Agropecuária, área de concentração Estatística e Experimentação Agropecuária, para obtenção do título de Doutor.

Prof. Dr. Joel Augusto Muniz
Orientador

**LAVRAS – MG
2017**

**Ficha catalográfica elaborada pelo Sistema de Geração de Ficha Catalográfica da Biblioteca
Universitária da UFLA, com dados informados pelo(a) próprio(a) autor(a).**

Silveira, Sílvio de Castro.

Modelagem Bayesiana da frequência cardíaca com cargas crescentes de trabalho / Sílvio de Castro Silveira. - 2017.

60 p. : il.

Orientador(a): Joel Augusto Muniz.

Tese (doutorado) - Universidade Federal de Lavras, 2017.

Bibliografia.

1. Fator de Bayes. 2. Fisiologia do esporte. 3. Limiar de transição metabólica. I. Muniz, Joel Augusto. . II. Título.

SÍLVIO DE CASTRO SILVEIRA

**MODELAGEM BAYESIANA DA FREQUÊNCIA CARDÍACA COM CARGAS
CRESCENTES DE TRABALHO**

Tese apresentada à Universidade Federal de Lavras, como parte das exigências do Programa de Pós-Graduação em Estatística e Experimentação Agropecuária, área de concentração Estatística e Experimentação Agropecuária, para obtenção do título de Doutor.

APROVADA em 09 de março de 2017

Dr^a. Thelma Safadi

UFLA

Dr^a. Izabela Regina Cardoso de Oliveira

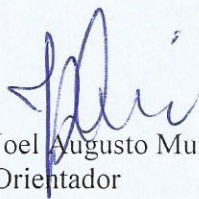
UFLA

Dr^a. Carla Regina Guimarães Brighenti

UFSJ

Dr^a. Rejane Correa da Rocha

UFSJ



Prof. Dr. Joel Augusto Muniz
Orientador

**LAVRAS – MG
2017**

Ao meu pai, Sílvio Paulo da Silveira, e a minha mãe, Lenice Pereira de Castro da Silveira (in memoriam), que me deram o exemplo de honestidade, trabalho e fé, que, mesmo na ausência física, me impulsionam a seguir.

À minha esposa, Raquel Marília da Silva, por todos estes anos de amor, paciência, amizade, carinho e companheirismo.

Aos meus familiares, especialmente à minha irmã, Marilaine, e ao meu cunhado, André, pelo apoio, confiança, paciência e pelo tesouro de nossas vidas, seus filhos William e Gabriel.

A todos meus amigos que de certo modo contribuíram para que este trabalho se concretizasse.

Dedico

AGRADECIMENTOS

A Deus, em primeiro lugar, por ter me concedido esta oportunidade e sempre ter iluminado meu caminho.

Ao professor Joel Augusto Muniz, pelas orientações, conselhos, amizade e que desde os anos iniciais da minha graduação em Matemática sempre tem acreditado no meu trabalho.

À Universidade Federal de Lavras e ao Departamento de Ciências Exatas, em especial aos professores do Programa de Pós-Graduação em Estatística e Experimentação Agropecuária, pelos ensinamentos e pela preparação profissional.

Aos meus grandes amigos e parceiros Leandro Pouso Alegre, Tales, Tadeu, Leandro Engenheiro e Zélio, pela paciência, compreensão e amizade.

Ao Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico (CNPq), pela bolsa de estudos.

“Tudo coopera para o bem daqueles que amam a DEUS” – (Romanos 8.28)

RESUMO

Considerando a frequência cardíaca uma das variáveis fisiológicas mais utilizadas em programas de avaliação e prescrição de exercício físico, muitos estudos são feitos para analisar o seu comportamento em testes progressivos por representar uma alternativa não invasiva para identificação dos limiares de transição metabólica. Ajustes de modelos lineares ainda são muito utilizados para representar a curva da frequência cardíaca em função de cargas crescentes de trabalho, mesmo existindo indicativos de comportamento não linear nos extremos da curva da frequência cardíaca em cargas crescentes de trabalho. O objetivo deste trabalho foi avaliar e comparar, através do procedimento bayesiano, os modelos Logístico e Sigmoidal de Boltzmann para a curva da frequência cardíaca em cargas crescentes de trabalho em pessoas saudáveis, para verificar se, com a melhora na estimação dos parâmetros, há alguma modificação na associação dos pontos de transição da curva da frequência cardíaca com os limiares de lactato. Mais especificamente, espera-se que o ponto de inflexão da frequência cardíaca esteja associado ao primeiro limiar de lactato e o ponto de deflexão da frequência cardíaca ao segundo limiar de lactato. Foram utilizados os dados da média de 16 indivíduos, testados em cicloergômetro de frenagem mecânica, carga inicial de 0 kpm.min⁻¹ e incremento de 90kpm.min⁻¹ a cada minuto até a exaustão. As cadeias para os modelos foram geradas através do software OpenBugs, que usa o método MCMC. A convergência das cadeias foi verificada por meio pacote BOA do software R. Os gráficos, estimativas e intervalo HPD também foram feitos por meio do software R. Os modelos foram comparados pelo Fator de Bayes e os resultados indicaram que o modelo sigmoide de Boltzmann é superior ao modelo Logístico, houve associação entre o ponto de inflexão da frequência cardíaca e o primeiro limiar de lactato para ambos modelos e houve associação entre o ponto de deflexão da frequência cardíaca e o segundo limiar de lactato apenas para o modelo sigmoide de Boltzmann.

Palavras-chave: Fator de Bayes. Fisiologia do esporte. Limiar de transição metabólica. Sigmoidal de Boltzmann.

ABSTRACT

Considering heart rate as one of the most used physiological variables in physical exercise assessment and prescription programs, many studies are conducted to analyze its behavior in progressive tests because it represents a noninvasive alternative for the identification of metabolic transition thresholds. Linear model adjustments are still widely used to represent the heart rate curve as a function of increasing loads, even though there are indications of nonlinear behavior at the extremes of the heart rate curve at increasing loads. The objective of this study was to evaluate and compare, through the Bayesian procedure, Logistic model and Boltzmann's Sigmoidal model for the heart rate curve in increasing loads of healthy people, to verify if, with the improvement in the parameter estimation, there is some modification of the association of the transition points of the heart rate curve with the lactate thresholds. More specifically, we expect the heart rate inflection point to be associated with the first lactate threshold and the heart rate deflection point at the second lactate threshold. We used the data of the average of 16 individuals, tested in mechanical braking cycle ergometer, initial load of 0 kpm.min⁻¹ and increment of 90kpm.min⁻¹ every minute until exhaustion. The chains for the models were generated using OpenBugs software that uses the MCMC method. The convergence of the chains was verified through a package BOA of software R. The graphs, estimates and interval HPD were also made using software R. The models were compared by the Bayes factor and the results indicated that the Boltzmann sigmoidal model is superior to the Logistic model, there was an association between the heart rate inflexion point and the first lactate threshold, and there was an association between the heart rate deflection point and the second lactate threshold only to Boltzmann sigmoidal model.

Keywords: Bayes Factor. Boltzmann sigmoidal. Metabolic transition threshold. Sports physiology.

Lista de Tabelas

Tabela 1 - Interpretação do fator de Bayes proposto por Jeffreys(1961).....	38
Tabela 2 - Critérios de Raftery e Lewis (fator de dependência - FD), Gelman e Rubin (R) e Geweke (Valor p) utilizados na avaliação da convergência das cadeias.....	39
Tabela 3 - Estimativas da média e mediana a posteriori, intervalo de máxima densidade a posteriori (HPD) para parâmetros do modelo sigmoide de Boltzmann.....	44
Tabela 4 - Critérios de Raftery e Lewis (fator de dependência - FD), Gelman e Rubin (R') e Geweke (Valor p) utilizados na avaliação da convergência das cadeias.....	46
Tabela 5 - Estimativas da média e mediana a posteriori, intervalo de máxima densidade a posteriori (HPD) para os parâmetros do modelo Logístico.....	50
Tabela 6 - Critérios de Raftery e Lewis (fator de dependência- FD), Gelman e Rubin (R) e Geweke (Valor p) utilizados na avaliação da convergência das cadeias.....	51
Tabela 7 - Estimativas da média e mediana a posteriori, intervalo de máxima densidade a posteriori (HPD) para o parâmetro PDFC ajustados pelos modelos sigmoide de Boltzmann e Logístico.....	53

Lista de Figuras

Figura 1 - Esquema que ilustra a identificação do ponto de deflexão da frequência cardíaca pelo Método D _{máx}	20
Figura 2 - Esquema que ilustra a identificação do ponto de deflexão da frequência cardíaca pelo Método D _{máx} modificado.(bpm) (kpm.min-1).....	20
Figura 3 - Valores médios das 32 amostras dos indivíduos avaliados em cargas crescentes incrementadas a cada minuto de 90kpm.....	30
Figura 4 - Gráfico de uma densidade Beta Generalizada (2,2) definida no intervalo (50, 100) utilizada como <i>priori</i> para o parâmetro AI.....	33
Figura 5 - Gráfico de uma densidade Beta Generalizada (2,2) definida no intervalo (150, 250) utilizada como <i>priori</i> para o parâmetro AS.....	34
Figura 6 - Gráfico de uma densidade Beta Generalizada (2,2) definida no intervalo (600, 800) utilizada como <i>priori</i> para o parâmetro PI.....	34
Figura 7 - Gráfico de uma densidade Beta Generalizada (2,2) definida no intervalo (0, 500) utilizada como <i>priori</i> para o parâmetro Inc do modelo sigmoide de Boltzmann.....	35
Figura 8 - Gráfico de uma densidade Beta (2,2) utilizada como <i>priori</i> para o parâmetro Inc do modelo Logístico.....	36
Figura 9 - Gráfico de uma densidade Beta Generalizada (3,2) no intervalo (0,2) utilizada como <i>priori</i> para o parâmetro do modelo sigmoide de Boltzmann.....	36
Figura 10 - Gráfico de uma densidade Beta Generalizada (2,3) no intervalo (0;0,1) utilizada como <i>priori</i> para o parâmetro Tau do modelo Logístico.....	37
Figura 11 - Densidade a <i>posteriori</i> e traço da cadeia gerada pelo método MCMC para o parâmetro AI do modelo sigmoide de Boltzmann.....	40
Figura 12 - Densidade a <i>posteriori</i> e traço da cadeia gerada pelo método MCMC para o parâmetro AS do modelo sigmoide de Boltzmann.....	41
Figura 13 - Densidade a <i>posteriori</i> e traço da cadeia gerada pelo método MCMC para o parâmetro PI do modelo sigmoide de Boltzmann.....	42
Figura 14 - Densidade a <i>posteriori</i> e traço da cadeia gerada pelo método MCMC para o parâmetro Inc do modelo sigmoide de Boltzmann.....	43
Figura 15 - Densidade a <i>posteriori</i> e traço da cadeia gerada pelo método MCMC para o parâmetro Tau referente ao modelo sigmoide de Boltzmann.....	44
Figura 16 - Densidade a <i>posteriori</i> e traço da cadeia gerada pelo método MCMC para o parâmetro AS do modelo Logístico.....	47
Figura 17 - Densidade a <i>posteriori</i> e traço da cadeia gerada pelo método MCMC para o parâmetro PI do modelo Logístico.....	48
Figura 18 - Densidade a <i>posteriori</i> e traço da cadeia gerada pelo método MCMC para o parâmetro Inc do modelo Logístico.....	49
Figura 19 - Densidade a <i>posteriori</i> e traço da cadeia gerada pelo método MCMC para o parâmetro Tau referente ao modelo Logístico.....	50
Figura 20 - Estimativa do ponto de deflexão da frequência cardíaca obtida pelo ajuste do modelo Logístico.....	52
Figura 21 Estimativa do ponto de deflexão da frequência cardíaca obtida pelo ajuste do modelo sigmoide de Boltzmann.....	53
Figura 22 Gráficos dos ajustes dos modelos sigmoide de Boltzmann e Logístico para os dados da FC em CCT.....	55

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO.....	13
2	REFERENCIAL TEÓRICO.....	16
2.1	Geração de energia.....	16
2.2	Frequência cardíaca.....	16
2.3	Limiar de lactato.....	17
2.4	Fisiologia da atividade física.....	18
2.5	Modelagem da frequência cardíaca.....	18
2.6	Análise de Regressão.....	20
2.7	Análise Bayesiana.....	22
2.8	Distribuição <i>a Priori</i>	23
2.9	Estimação Bayesiana.....	24
2.10	Métodos de integração.....	25
2.10.1	Método de Monte Carlo via Cadeias de Markov.....	25
2.10.1.1	Algoritmo Metropolis-Hastings.....	26
2.10.1.2	Amostrador de Gibbs.....	26
2.11	Diagnóstico formal da convergência.....	27
2.11.1	Gelman e Rubin (1992).....	27
2.11.2	Raftery e Lewis (1992).....	28
2.11.3	Geweke (1992).....	28
2.11.4	Heidelberger e Welch (1993).....	28
2.12	CrITÉRIOS para seleção de modelos.....	29
3	MATERIAL E MÉTODOS.....	30
3.1	Dados.....	30
3.2	Modelos estudados.....	30
3.3	Distribuição para o ponto de deflexão da frequência cardíaca.....	31
3.4	Definição das <i>prioris</i>	31
3.5	Análise dos dados.....	38
4	RESULTADOS E DISCUSSÕES.....	39
5	CONCLUSÃO.....	56
	REFERÊNCIAS.....	57

1. INTRODUÇÃO

No meio esportivo existe uma busca constante pelos melhores resultados e, com o desenvolvimento de novas tecnologias, novos recordes têm sido alcançados, novas metas têm sido traçadas (BÖHME, 2003; RUBIO; NUNES, 2010; DIAS; SOUSA, 2012). Para dar suporte a esta busca faz-se necessário que novos métodos de treinamento sejam desenvolvidos e meios mais confiáveis para se avaliar a capacidade física destes sejam criados de modo a não colocar em risco a vida dos atletas, podendo assim lhes recomendar métodos seguros de treinamento (LIMA, 1997, VILARÓ; RESQUETI; FREGONEZI, 2008).

Segundo Cambri et al (2006), a frequência cardíaca é uma das variáveis fisiológicas mais utilizadas em programas de avaliação e prescrição de exercício físico e muitos estudos foram feitos para analisar o seu comportamento em atletas por meio de testes progressivos por representar uma alternativa não invasiva para identificação dos limiares de transição metabólica (FERREIRA et al, 2014; COSTA; LIMA; De-OLIVEIRA, 2007; CONDE et al., 2014).

Diversos trabalhos na literatura (HOFMANN et. al., 2000; VANDERLEI et al, 2009; BOHM, 2012; LEITE et al., 2012) abordam a importância da frequência cardíaca (FC) e a sua variabilidade tanto para os seres humanos quanto também para uma grande quantidade de seres vivos, pois é sabido que esta variável se associa diretamente a saúde, seja para o funcionamento regular dos órgãos e manutenção da vida, seja para a disposição para a prática de atividades físicas e lazer e também com a disposição para a realização dos trabalhos do dia a dia. Quando tratamos sobre a frequência cardíaca, estamos nos referindo ao total de batimentos cardíacos em um determinado intervalo de tempo, no geral, ao total de batimentos cardíacos dentro de um minuto (bpm).

Os primeiros trabalhos a descrever a frequência cardíaca (TAYLOR, 1941; WAHLUND, 1948) já demonstravam que a relação da frequência cardíaca pelas cargas crescentes de trabalho não era linear. A frequência cardíaca apresentava comportamento de uma reta em cargas intermediárias e, em cargas baixas e altas, apresentava um comportamento assintótico. Taylor (1941), por exemplo, afirmava que, após um período de treinamento, a frequência cardíaca acelerava menos para uma determinada atividade.

Mesmo com crítica ao modelo de regressão linear, os autores não apresentaram uma alternativa não linear para descrever o comportamento da frequência cardíaca e, como o modelo de regressão linear se mostrava útil na solução de problemas práticos, continuou sendo usado apesar de suas limitações (CONCONI et al, 1982).

Por muitos anos foi tido como verdadeiro o fato da frequência cardíaca crescer de forma linear em cargas crescentes de trabalho e, com base na regressão linear para interpretação da curva da frequência cardíaca, vários modelos teóricos foram desenvolvidos para apoiar procedimentos de

monitoramento da frequência cardíaca e de predição de potência aeróbia máxima, tradicionalmente utilizados em pesquisa, em avaliação e em treinamento (LIMA, 1997).

Como o modelo até então estudado não apresentava um bom ajuste de todos os valores da curva, uma alternativa de modelagem não linear para o problema da frequência cardíaca em cargas crescentes de trabalho, o modelo Sigmóide de Boltzmann, foi apresentado por Lima (1997). Este modelo obteve bons ajustes tanto em cargas baixas quanto em cargas altas, nas quais a frequência cardíaca tendia a um platô, e também teve uma boa recepção por pesquisadores da área, pois passou então a ser amplamente utilizado em outras pesquisas (CAMBRI et al., 2006, COSTA; LIMA; OLIVEIRA, 2007).

Há na literatura outros modelos não lineares, como os modelos Gompertz e Logístico, largamente utilizados por pesquisadores para descrever curvas de crescimento de caráter sigmoidal (PRADO; SAVIAN; MUNIZ, 2013, SOUSA et al., 2014), que também são adequados para modelar a frequência cardíaca (SILVEIRA; SOUZA; MUNIZ, 2014), para comparação com o modelo Sigmóide de Boltzmann.

Os procedimentos adotados, até então, para a análise da curva da frequência cardíaca, têm sido basicamente frequentistas através de modelos lineares, como o ajuste de duas retas ou polinômios de 3º grau e ajustes de modelos não lineares (COUTO et al., 2013; FERREIRA et al., 2014; NASCIMENTO et al., 2011, SILVEIRA; SOUZA; MUNIZ, 2014).

Entre os procedimentos utilizados para estimar os parâmetros dos modelos de regressão, o bayesiano tem se mostrado como um dos mais eficientes, pois além de levar em consideração a informação contida na amostra (função de verossimilhança), considera também o conhecimento prévio do pesquisador a respeito dos parâmetros do modelo (distribuição a *priori*) para o cálculo da densidade a *posteriori* dos parâmetros. Enquanto que na abordagem frequentista apenas as observações são consideradas variáveis aleatórias, na inferência bayesiana considera-se que tanto as observações quanto os parâmetros do modelo são variáveis aleatórias.

Em experimentos para avaliar a frequência cardíaca e a concentração de lactato, através do procedimento bayesiano, um menor número de observações seria necessário e por consequência menos interferência na prática da atividade física, o que torna os resultados mais fiéis.

O objetivo deste trabalho foi avaliar e comparar, por meio do procedimento bayesiano, os modelos Logístico e sigmoide de Boltzmann para a curva da frequência cardíaca em cargas crescentes de trabalho em pessoas saudáveis para verificar se, com a melhora na estimação dos parâmetros, há alguma modificação na associação dos pontos de transição da curva da frequência cardíaca com os limiares de lactato.

Entende-se que, ao se obter ajustes mais precisos para a curva da frequência cardíaca em cargas crescentes de trabalho, identificar-se-á com maior precisão o ponto de inflexão e o de deflexão

da frequência cardíaca, o que conseqüentemente otimiza as prescrições de treinamento e a melhora do desempenho do atleta.

2 REFERENCIAL TEÓRICO

2.1 Geração de energia

A energia para os seres humanos crescerem e realizarem atividades vem dos alimentos ingeridos. Quando o ser humano se alimenta, uma série de reações químicas ocorre a nível celular para produção de energia na forma de trifosfato de adenosina (ATP), seja na presença ou ausência de oxigênio (FOSS; KETEYIAN, 2000).

Para que essas reações químicas ocorram, duas moléculas desempenham papel importante: A nicotinamida adenina dinucleotídeo (NAD) e a flavina adenina dinucleotídeo (FAD), moléculas estas que fazem a transferência de hidrogênio (H). Para o organismo dos seres humanos produzir energia na presença de oxigênio, ocorrem sequencialmente e, repetidamente, os processos de glicólise, ciclo de Krebs e cadeia respiratória (POWERS; HOWLEY, 2005; VOET; VOET, 2013).

No processo de glicólise há a quebra da molécula de glicose produzindo-se 2 moléculas de piruvato e 2 ATP. No ciclo de Krebs, cada piruvato transforma as moléculas de NAD em NADH, FAD em FADH₂ e produz 1 ATP. Na cadeia respiratória as moléculas de NADH e FADH₂ são novamente convertidos em NAD e FAD e junto com o O₂ que entrou pelos pulmões produzem 28 ATP. O processo aeróbio todo totaliza cerca de 32 ATP para cada molécula de glicose (FOSS; KETEYIAN, 2000; POWERS; HOWLEY, 2005; VOET; VOET, 2013).

Na ausência de O₂ (processo anaeróbico) a cadeia respiratória para, e o NADH e FADH₂ não voltam a ser NAD e FAD, sem ambos o ciclo de Krebs para, pois precisa de NAD e FAD e a glicólise também pararia, pois precisa de NAD, porém neste momento entra em funcionamento outro mecanismo: a fermentação, que tem a função de restaurar a produção de NAD para que a glicólise não seja interrompida. No processo anaeróbio, cada molécula de glicose produz somente 2 ATP, proveniente da glicólise, e o piruvato também proveniente da glicólise é convertido em lactato (FOSS; KETEYIAN, 2000; POWERS; HOWLEY, 2005; VOET; VOET, 2013).

2.2 Frequência Cardíaca

É através do sangue que as células recebem os nutrientes e o oxigênio para a realização de todo o processo de produção de energia (FOSS; KETEYIAN, 2000; POWERS; HOWLEY, 2005; VOET; VOET, 2013). A velocidade com que isso ocorre depende de quão rápido nosso coração bombeia sangue para o organismo. Esta velocidade depende da frequência cardíaca, que pode ser mensurada através do número de batimentos cardíacos por minutos (bpm) ou através da variabilidade da frequência cardíaca (Var-FC), que é o intervalo de tempo entre batimentos cardíacos sucessivos (LIMA, 1997; VANDERLEI et al, 2009).

Em indivíduos saudáveis, a frequência cardíaca varia durante um dia entre 53 a 95 bpm (BJERREGAARD, 1983), todavia, sobre uma carga de stress ou alguma atividade física, estes valores podem se alterar bastante, principalmente a frequência cardíaca máxima.

O número máximo de batimentos que o coração pode dar em um minuto é conhecido como frequência cardíaca máxima e é comumente obtida através da expressão $FC_{MÁX} = 220 - IDADE$, e mais recentemente foi proposta uma nova expressão: $FC_{MÁX} = 208 - 0,7 \times IDADE$, para adultos saudáveis, ou seja, em ambas as expressões o valor máximo a ser alcançado para frequência cardíaca do indivíduo é uma função decrescente que depende somente da idade (MAHLER et al., 2000; TANAKA, 2001).

2.3 Limiar de lactato

Amorim (2002) afirma que, quando a intensidade dos exercícios atinge níveis altos, a necessidade de oxigênio é superior à capacidade do sistema cardiorrespiratório de extrair e transportar oxigênio. As demandas energéticas passam, então, a ser complementadas pelo mecanismo anaeróbio, que transformam o piruvato em lactato em âmbito celular.

Quando a capacidade do organismo de retirar o lactato for inferior à sua produção, inicia-se o acúmulo. Se mantivermos ou aumentarmos a intensidade, conseqüentemente ocorrerá a deterioração da capacidade de continuidade do exercício com a mesma eficiência (BENETTI; SANTOS; CARVALHO, 2000).

Os limiares de transição metabólica podem ser entendidos como intensidades de exercício a partir das quais começam a acontecer alterações metabólicas no organismo. O limiar de lactato, um dos limiares de transição metabólica, é definido como o momento em que ocorre o início do acúmulo de lactato, ou então como intensidade do exercício em que ocorre elevação sistemática e contínua da concentração de lactato (POWERS; HOWLEY, 2005).

Os autores ainda distinguem o limiar de lactato em duas categorias distintas: o primeiro limiar de lactato, ou LL_1 que pode ser identificado pelo menor equivalente de $[La] \cdot W^{-1}$ (concentração de lactato dividido pela carga) ou por meio da concentração fixa de $2 \text{ mmol} \cdot l^{-1}$. O segundo limiar de lactato, ou LL_2 pode ser obtido adicionando-se o valor fixo de $1,5 \text{ mmol} \cdot l^{-1}$ ao menor equivalente ou ao valor fixo de $4 \text{ mmol} \cdot l^{-1}$ (AMORIM, 2002; COSTA; LIMA; De-OLIVEIRA, 2007).

A identificação do limiar de lactato é feita por meio da curva da concentração sanguínea de lactato em função da intensidade/tempo em teste progressivo (COSTA; LIMA; De-OLIVEIRA, 2007). Para se obter a concentração de lactato em cada intensidade, é necessário coletar uma pequena amostra sanguínea da pessoa. Esse método é conhecido como invasivo e, para tal, é necessário um profissional qualificado e equipamentos específicos, o que o torna mais complicado em determinadas faixas etárias e locais, seja por questões operacionais ou por questões éticas (RIBEIRO, 1995).

Portanto, ao se avaliar o comportamento da frequência cardíaca em cargas crescentes de trabalho, pode-se obter uma forma não invasiva para identificar estes momentos de transição (LIMA, 1997).

2.4 Fisiologia da atividade física

A evidente busca pelos melhores resultados, melhores desempenhos em diversas modalidades de competição esportivas em quaisquer que sejam os níveis, seja este olímpico, mundial, nacional ou regional, requer o suporte da tecnologia, de modo que esta dê indicadores capazes de refletir a perfeita integração entre os sistemas cardiovascular, respiratório e muscular em função do grande aumento de gasto energético proporcionado pelo exercício.

Portanto, para que um treinamento seja efetivo e possa conduzir a uma resposta ótima de desempenho, os princípios do suprimento energético devem ser bem compreendidos e aplicados (AMORIM, 2002).

Todos os atletas e não atletas são forçados a aprender lutar com a forte acidose muscular e a subsequente fadiga advinda do treinamento intenso, e o que ocorre com o treino adequado é exatamente a melhora dessa capacidade de tolerância (JANSSEN, 2001; PELICER et al, 2011).

Quanto à importância do treinamento Amorim (2002, p. 52) afirma que

Um ótimo treinamento depende da intensidade adequada de trabalho capaz de ativar completamente o sistema de energia solicitado, primordialmente, pela atividade fim. As intensidades baixas não promovem as adaptações necessárias e as muito elevadas podem deteriorar a performance como resultado de um quadro de sobretreinamento; assim, a avaliação da correta intensidade do treinamento é tanto uma arte como uma ciência.

Diversos autores citam que os principais métodos de controle do treinamento são o consumo máximo de oxigênio, limiar de lactato e frequência cardíaca (COSTA; LIMA; De-OLIVEIRA, 2007; COUTO et al., 2013, LIMA, 1997).

2.5 Modelagem da frequência cardíaca

Ao se ajustar a curva da frequência cardíaca por modelos de regressão linear, consegue-se um bom ajuste apenas quando se desprezam as entradas inferiores e superiores da curva. Åstrand et al (2003) justificavam que quando se trabalha com os valores da porção inferior da curva, não se tinham resultados fiéis, pois, em cargas baixas, outros fatores se juntam ao stress da atividade, como os fatores emocionais e ambientais. Para a porção superior da curva também era percebido um comportamento assintótico da frequência cardíaca, mas eram considerados como sendo exceções ao modelo de regressão linear.

Com a melhora na qualidade do ajuste de modelos à frequência cardíaca, ao se utilizarem modelos não lineares (LIMA, 1997), veio a associação dos pontos de transição da curva da frequência cardíaca com os limiares metabólicos. O ponto de inflexão da curva da frequência cardíaca tem o mesmo conceito que temos sobre o ponto de inflexão de uma curva de crescimento qualquer. É o momento no qual a frequência cardíaca muda de um crescimento acelerado e passa para um crescimento desacelerado, que acredita-se estar associado ao LL_1 .

Este ponto é determinado derivando-se a curva da frequência cardíaca em relação à variável carga de trabalho e igualando-se a zero. Quando se consideram modelos de regressão não lineares simétricos, o seu ponto de inflexão é dado na metade exata da curva.

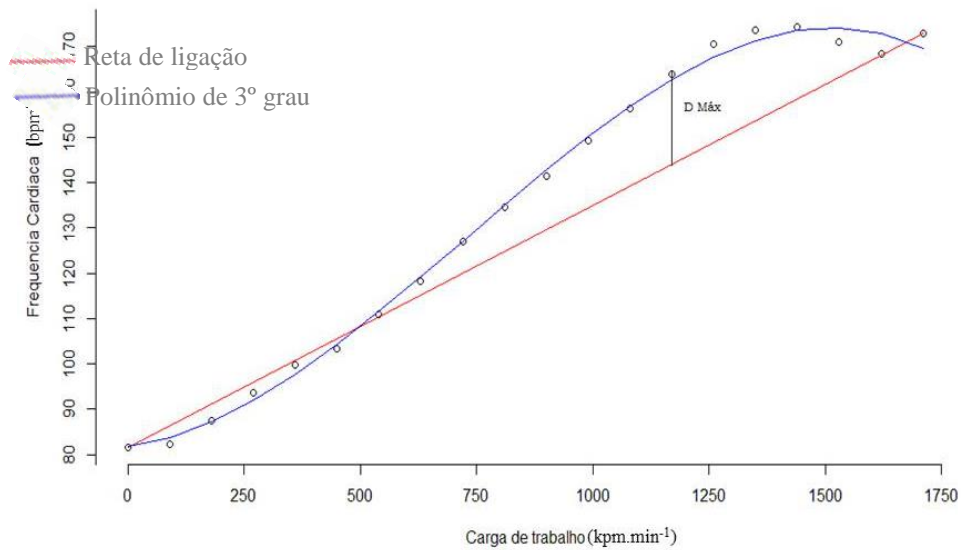
Ao se avaliar a totalidade das observações da frequência cardíaca, vê-se, ao se aproximar das últimas observações, uma tendência a um platô, momento no qual Conconi et al. (1982) definem o ponto de deflexão. A frequência cardíaca cresce até determinado momento, quando começa a se estabilizar. Alguns autores chamam este momento de quebra de linearidade, momento no qual o ajuste por uma reta já não é mais eficiente, e um ajuste por um modelo não linear passa a ser mais eficiente (KARA et al, 1996; LIMA, 1997).

A associação do ponto de deflexão da frequência ao LL_2 , porém, não é tão simples como a determinação do ponto de inflexão, não existe uma forma algébrica para se determinar o momento a partir do qual há a tendência ao platô e sua determinação tornou-se muito subjetiva.

Para diminuir a dificuldade de determinação do ponto de deflexão, vários métodos foram propostos. O método da distância máxima ($D_{m\acute{a}x}$) foi originalmente proposto por Cheng et al (1992), que consistia em ajustar os pontos da frequência cardíaca por um polinômio de terceiro grau, ligar o primeiro e o último ponto da curva com uma reta e verificar em qual ponto ocorre a maior distância entre a reta e o polinômio de terceiro grau, daí a origem no nome $D_{m\acute{a}x}$.

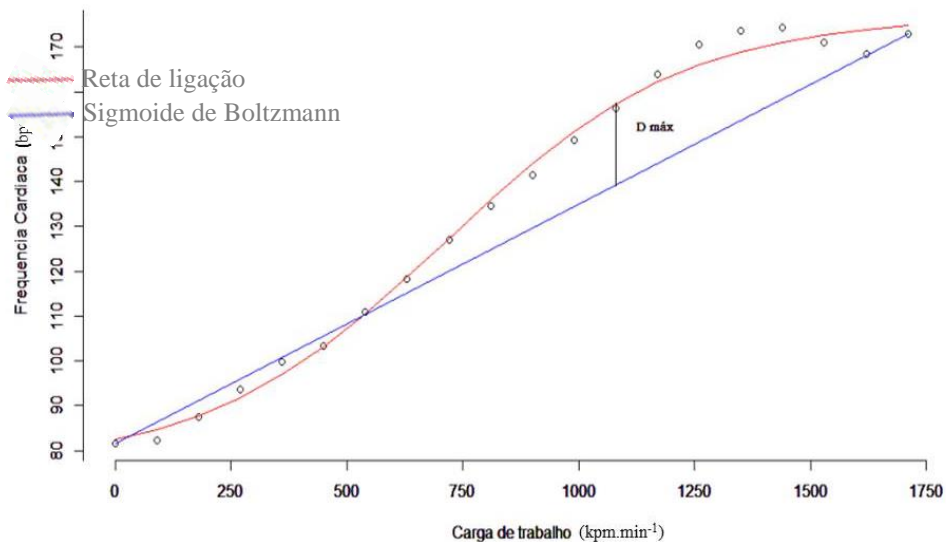
Uma ilustração do método $D_{m\acute{a}x}$ pode ser observada na Figura 1. No ponto onde ocorre a $D_{m\acute{a}x}$ teremos a frequência cardíaca do ponto de deflexão e a carga no ponto de deflexão.

Figura 1 - Esquema que ilustra a identificação do ponto de deflexão da frequência cardíaca pelo Método Dmáx



Mais recentemente, Costa, Lima e Oliveira (2007) utilizaram uma modificação desse método para a determinação do ponto de deflexão da frequência cardíaca de dez “mountain bikers” de alto desempenho. No lugar de ajustar um polinômio de terceiro grau ele utilizou o ajuste sigmoide de Boltzmann, conforme a Figura 2.

Figura 2 - Esquema que ilustra a identificação do ponto de deflexão da frequência cardíaca pelo Método Dmáx modificado.(bpm) (kpm.min-1)



2.6 Análise de Regressão

Análise de regressão é uma metodologia estatística que utiliza a relação entre duas ou mais variáveis, de tal forma que uma variável pode ser predita a partir de outra ou de outras (PAULA, 2004).

Para a análise de regressão, os dados podem ser obtidos a partir de duas situações:

- a) dados experimentais: as variáveis dependentes e independentes são planejadas como o resultado de um experimento;
- b) dados observacionais: observam-se os valores das variáveis dependentes e independentes, nenhuma delas sob controle.

Draper e Smith (1998) classificam os modelos de regressão como lineares, linearizáveis e não lineares. Essa classificação é baseada no conceito de derivadas.

- a) Modelos Lineares: aqueles que são lineares em relação aos parâmetros, ou seja, a derivada do modelo em relação aos parâmetros não depende dos parâmetros:

$$\frac{\partial}{\partial \theta_j} f_i(X, \theta) = g(X) \quad (1)$$

com $i = 1, 2, \dots, n$ e $j = 1, 2, \dots, p$

em que $f_i(X, \theta)$ é a função resposta, n é o número de observações e p o número de parâmetros do modelo.

A seguir, tem-se um exemplo:

$$y = \theta_0 + \theta_1 x + \theta_2 x^2 + \dots + \theta_n x^n + \varepsilon \quad (2)$$

em que:

$\theta_0, \theta_1, \theta_2, \dots, \theta_n$ são os parâmetros do modelo,

x - a variável preditora do modelo,

y - a variável resposta

ε - o erro

O cálculo das derivadas parciais de y em relação a $\theta_0, \theta_1, \theta_2, \dots, \theta_n$ fornecem:

$$\frac{\partial y}{\partial \theta_0} = 1, \quad \frac{\partial y}{\partial \theta_1} = x, \quad \frac{\partial y}{\partial \theta_2} = x^2, \quad \dots, \quad \frac{\partial y}{\partial \theta_n} = x^n$$

Como as derivadas não dependem dos parâmetros pode-se concluir que este é um modelo linear.

- b) Modelos linearizáveis: aqueles que, por meio de alguma transformação, tornam-se lineares. Considere o modelo:

$$Y = \theta^x \varepsilon \quad (3)$$

em que θ é o parâmetro a ser estimado e o erro é multiplicativo. Aplicando-se logaritmo a ambos os lados da igualdade obtém-se:

$$\ln Y = \ln(\theta^x \varepsilon)$$

$$\ln Y = \ln \theta^x + \ln \varepsilon$$

$$\ln Y = x \ln \theta + \ln \varepsilon$$

Definindo $Z = \ln Y$; $b = \ln \theta$ e $\varepsilon^* = \ln \varepsilon$ o modelo fica:

$$Z = bx + \varepsilon^*$$

que é linear, pois a derivada independe do parâmetro, mostrando que o modelo original é linearizável.

$$\frac{\partial Z}{\partial b} = X = g(X)$$

- c) Modelos Não Lineares: são os modelos em que pelo menos uma das derivadas parciais depende de algum parâmetro do modelo. Por exemplo:

$$Y = \theta_0 + \theta_1^x + \varepsilon \quad (4)$$

sendo θ_0 e θ_1 os parâmetros a serem estimados e ε o erro aditivo. Não existe operação capaz de transformá-lo em um modelo linear e as derivadas parciais de Y são:

$$\frac{\partial Y}{\partial \theta_0} = 1 \quad \text{e} \quad \frac{\partial Y}{\partial \theta_1} = X \theta_1^{x-1} = g(X, \theta_1),$$

Portanto, o modelo é dito não linear.

2.7 Análise Bayesiana

Os procedimentos frequentistas consideram que os parâmetros a serem estimados são desconhecidos, porém fixos, isto é, igual ao valor do parâmetro particular, e toda informação sobre ele é tomada com base na amostra, enquanto que no modelo bayesiano o parâmetro é aleatório, e isso pode ser quantificado em termos de probabilidade.

A análise bayesiana tem por base o teorema de Bayes e para a compreensão deste é necessário o conhecimento de probabilidade condicional e do teorema da probabilidade total (BOX; TIAO, 1992).

A probabilidade condicional é o caminho para se obter a probabilidade do evento A dado o que o evento B ocorreu, assumindo que $P[B] \neq 0$, denota-se por $P[A|B]$ e define-se como:

$$P[A|B] = \frac{P[A \cap B]}{P[B]} \quad (5)$$

Considerando a probabilidade condicional podemos escrever o teorema da probabilidade total da seguinte maneira: Para um dado espaço de probabilidade $(\Omega, \mathcal{A}, P[\cdot])$, se B_1, B_2, \dots, B_n é uma coleção de eventos mutuamente disjuntos em \mathcal{A} , satisfazendo $\Omega = \bigcup_{j=1}^n B_j$ e $P[B_j] > 0$ para $j = 1, \dots, n$, então para todo $A \in \mathcal{A}$,

$$P[A] = \sum_{j=1}^n P[B_j \cap A] = \sum_{j=1}^n P[A|B_j] P[B_j] \quad (6)$$

Finalmente podemos definir o Teorema de Bayes para o caso discreto. Se B_1, B_2, \dots, B_n é uma coleção de eventos mutuamente disjuntos em \mathcal{A} , satisfazendo $\Omega = \bigcup_{j=1}^n B_j$ e $P[B_j] > 0$ para $j = 1, \dots, n$, então para todo $A \in \mathcal{A}$ e $P[A] > 0$

$$P[B_k|A] = \frac{P[A|B_k]P[B_k]}{P[A]} = \frac{P[A|B_k]P[B_k]}{\sum_{j=1}^n P[A|B_j]P[B_j]} \quad (7)$$

Para o caso contínuo em que se observa $X = x$, e considerando um elemento de uma família de distribuições, $f(x|\theta)$, e a distribuição $P(\theta)$, o teorema de Bayes para densidades, conduz à relação:

$$P(\theta|x) = \frac{f(x|\theta)P(\theta)}{\int_{\Theta} f(x|\theta)P(\theta)d\theta} \quad (8)$$

em que $\theta \in \Theta$ e $P(\theta|x)$ é a distribuição de θ depois de saber que se obteve $X = x$. Observando-se uma amostra, tem-se:

$$P(\theta|x_1, x_2, \dots, x_n) = \frac{\prod_{\Theta} f(x_i|\theta)P(\theta)}{\int_{\Theta} \prod_{\Theta} f(x_i|\theta)P(\theta)d\theta} \quad (9)$$

em que $P(\theta|x_1, x_2, \dots, x_n)$ é a distribuição a *posteriori* de θ depois de conhecida a amostra (x_1, x_2, \dots, x_n) , o denominador é uma integral múltipla no parâmetros e não depende de θ , funcionando como uma constante normalizadora. A menos da constante, podemos reescrever o teorema da seguinte maneira (BOX; TIAO, 1992):

$$P(\theta|x) \propto f(x|\theta)P(\theta) \quad (10)$$

Para um valor fixo de x , a função $f(x|\theta)$ fornece a verossimilhança $l(\theta; x)$ enquanto $P(\theta)$ é chamada de distribuição a *priori* de θ . O produto de ambas levam à distribuição a *posteriori* de θ .

$$P(\theta|x) \propto l(\theta; x)P(\theta) \quad (11)$$

Apesar do teorema de Bayes ser de 1763 a metodologia bayesiana em si é recente, pois, dada a dificuldade na resolução algébrica de algumas integrais, o método ficou muito tempo sem ser utilizado e seu desenvolvimento foi apoiado pelo avanço computacional (PAULINO; TURKMAN; MURTEIRA, 2003).

2.8 Distribuições a *Priori*

Na inferência bayesiana, a opinião, ou crença do pesquisador sobre um determinado problema concreto é incorporado na análise através da *priori*, ela contém elementos muitas vezes subjetivos, que expressam o estado de conhecimento ou ignorância sobre os parâmetros, antes da obtenção dos dados. A introdução deste conhecimento prévio na análise bayesiana é feita sob a forma de uma distribuição de probabilidade para o parâmetro de interesse.

De acordo com Ehlers (2007), a distribuição a *priori* é representada por uma forma funcional, cujos parâmetros devem ser especificados também de acordo com o conhecimento prévio do pesquisador. Estes parâmetros indexadores da família de distribuições a *priori* são chamados de hiperparâmetros para diferenciá-lo dos parâmetros de interesse.

No caso de não considerarmos diretamente valores para os hiperparâmetros podemos usar outra distribuição a *priori*. Escrevendo $p(\theta|\varphi)$ a *priori* para θ com hiperparâmetros φ , tomamos $p(\varphi)$, completando assim o segundo estágio na hierarquia, e, segundo Ehlers (2007) as *prioris* hierárquicas são especificadas em geral em 2 ou 3 estágios.

$$p(\theta) = \int p(\theta, \varphi) d\varphi = \int p(\theta|\varphi)p(\varphi) d\varphi \quad (12)$$

Há situações na qual o pesquisador não dispõe de nenhuma informação a *priori* a respeito dos parâmetros, ou informações pouco significativas em relação aos dados amostrais. Nestas situações o pesquisador é levado a utilizar *prioris* pouco informativas ou distribuições a *priori* não informativas (SAVIAN et al, 2009).

Entre os métodos para obtenção de *prioris* não informativas podemos citar o método de Bayes-Laplace e o método de Jeffreys.

O método de Bayes-Laplace usa o princípio da razão insuficiente. De acordo com esse princípio, na ausência da razão suficiente para privilegiar uma probabilidade em detrimento de outras, decorrente da escassez informativa a *priori*, deve-se adotar que todas têm a mesma chance de ocorrer. Um exemplo seria utilizar como *priori* a distribuição uniforme (PAULINO; TURKMAN; MURTEIRA, 2003).

O método de Jeffreys é obtido a partir da matriz de informação de Fisher $I(\theta)$. Para o caso uniparamétrico, a *priori* de Jeffreys é dada por:

$$P(\theta) = \sqrt{I(\theta)} \quad (13)$$

sendo

$$I(\theta) = E\left[\left(\frac{\partial}{\partial \theta} \ln f(x|\theta)\right)^2 \middle| \theta\right] \quad (14)$$

Para o caso multiparamétrico a matriz de informação de Fisher é dada por $I(\theta)$, na qual o ij -ésimo elemento da matriz é:

$$I(\theta) = E\left[\frac{\partial \ln f(x|\theta)}{\partial \theta_i} \frac{\partial \ln f(x|\theta)}{\partial \theta_j} \middle| \theta\right] \quad (15)$$

2.9 Estimação Bayesiana

Após a obtenção da distribuição a *posteriori* conjunta dos parâmetros $P(\theta|x)$ devemos integrar esta distribuição para a obtenção das distribuições marginais a *posteriori*, as quais contêm toda informação probabilística a respeito dos parâmetros (EHLERS, 2007).

$$P(\theta_1|x) = \int_{\theta \neq \theta_1} P(\theta|x) d\theta_{\theta \neq \theta_1} \quad (16)$$

As inferências sobre os parâmetros de interesse são feitas sobre a sua distribuição marginal a *posteriori* e podem ser pontuais (moda, média e mediana) ou intervalar (o equivalente bayesiano de região de confiança). Paulino; Turkman e Murteira (2003) destacam que um resumo mais informativo que qualquer estimativa pontual é obtido através de uma região de θ que contenha uma parte substancial da massa probabilística a *posteriori*.

$R(x)$ é uma região de credibilidade γ para θ se

$$P[\theta \in R(x)|x] \equiv \int_{R(x)} P(\theta|x) d\theta \geq \gamma \quad (17)$$

De acordo com Ehlers (2007) é possível construir uma infinidade de intervalos, mas estamos interessados apenas naquele com o menor comprimento possível. Pode-se mostrar que intervalos de comprimento mínimo são obtidos tomando-se os valores de θ com maior densidade a *posteriori*, denominados intervalos de credibilidade de máxima densidade a *posteriori*, ou intervalos HPD.

2.10 Métodos de Integração

Um ponto chave na inferência bayesiana refere-se à solução de integrais complexas, um dos motivos pelo qual a metodologia bayesiana possa ter ficado por longo tempo sem aplicação generalizada (PAULINO; TURKMAN; MURTEIRA, 2003). Dificilmente se obtêm expressões explícitas para as integrais envolvidas no problema e uma solução por aproximação numérica para o caso se faz necessária. Todavia, Ehlers (2007) adverte que, mesmo que os custos dos processos computacionalmente intensivos tenham se tornados mais baratos, eles não devem ser substitutos do pensamento crítico e sempre que possível deve-se utilizar soluções exatas.

Como método analítico pode-se citar a aproximação da distribuição a *posteriori* por uma distribuição multivariada e a abordagem de Laplace; como método numérico a quadratura gaussiana e os métodos de simulação como método Monte Carlo ordinário, método de Monte Carlo com amostragem por importância e Método Monte Carlo via Cadeia de Markov (MCMC) (PAULINO; TURKMAN; MURTEIRA, 2003).

2.10.1 Método de Monte Carlo via Cadeias de Markov

Uma sequência θ^i é uma cadeia de Markov se dado o valor atual da cadeia θ^i , o próximo valor da cadeia, θ^{i+1} depende somente do valor atual θ^i e não dos valores anteriores, o que implica que, sob certas condições, o método gradualmente “esquece” os valores iniciais e converge para uma distribuição estacionária. Isto é, a probabilidade de ocorrência de um valor de θ permanece a mesma e não depende do valor inicial da cadeia.

$$P(\theta^{i+1}|\theta^1, \dots, \theta^i) = P(\theta^{i+1}|\theta^i) \quad (18)$$

A ideia do método de Monte Carlo via Cadeias de Markov é a de se obter uma amostra das distribuições marginais a *posteriori* dos parâmetros de interesse, por meio de um processo iterativo, utilizando as distribuições condicionais completas de cada parâmetro.

De acordo com Paulino; Turkman e Murteira (2003), Metropolis et al. (1953) desenvolveram um algoritmo que mais tarde foi generalizado por Hastings (1970), hoje conhecido na literatura com o algoritmo de Metropolis-Hastings. Em um caso particular destes métodos, Gelfand e Smith (1990) mostraram como o método de amostragem de Gibbs proposto por Geman e Geman (1984), pode ser utilizado para simular distribuições a *posteriori*.

2.10.1.1 Algoritmo Metropolis-Hastings

O algoritmo Metropolis-Hasting possibilita a geração de uma amostra da distribuição a *posteriori* conjunta $P(\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_n | x)$, a partir das distribuições condicionais completas quando estivermos num caso em que não é possível identificá-la ou se a geração não iterativa for complicada (PAULINO; TURKMAN; MURTEIRA, 2003).

Suponha que a cadeia esteja no estado θ e um valor θ' é gerado de uma distribuição proposta $q(\cdot | \theta)$, sendo, portanto dependente do estado atual da cadeia. O novo valor θ' é aceito com probabilidade (EHLERS, 2007)

$$\alpha(\theta, \theta') = \min\left(1, \frac{P(\theta')q(\theta|\theta')}{P(\theta)q(\theta'|\theta)}\right) \quad (19)$$

Em termos práticos, o algoritmo de Metropolis-Hastings pode ser especificado pelos seguintes passos,

- i. Inicialize o contador de iterações $t = 0$ e especifique um valor inicial $\theta^{(0)}$.
- ii. Gere um novo valor θ' da distribuição $q(\cdot | \theta)$.
- iii. Calcule a probabilidade de aceitação $\alpha(\theta, \theta')$ e gere $u \sim U(0, 1)$.
- iv. Se $u \leq \alpha$ então aceite o novo valor e faça $\theta^{(t+1)} = \theta'$, caso contrário rejeite e faça $\theta^{(t+1)} = \theta$.
- v. Incremente o contador de t para $t + 1$ e volte ao passo ii.

2.10.1.2 Amostrador de Gibbs

O amostrador de Gibbs é um caso especial do Metropolis-Hastings, que permite gerar uma amostra da distribuição conjunta a *posteriori* $P(\theta|y)$ desde que as distribuições condicionais cheias possuam forma fechada, no sentido que seja fácil amostrar de seus elementos (GELFAND; SMITH, 1990).

Suponha que θ , um vetor de parâmetros, tem k componentes $(\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_k)$ e que as distribuições condicionais de cada parâmetro sejam conhecidas. Seja $P(\theta_i | \theta_{-i}, y)$, com $i = 1, \dots, k$, a distribuição condicional completa para todos os componentes individuais do vetor θ , dadas as observações.

Dado um conjunto de pontos iniciais, $\theta^{(0)} = (\theta_1^{(0)}, \theta_2^{(0)}, \dots, \theta_k^{(0)})$ para o vetor θ desconhecido, implementa-se o seguinte procedimento iterativo:

- i) Gerar $\theta_1^{(1)}$ da densidade condicional cheia $P(\theta_1 | \theta_2^{(0)}, \theta_3^{(0)}, \dots, \theta_k^{(0)}, y)$
- ii) Gerar $\theta_2^{(1)}$ da densidade condicional cheia $P(\theta_2 | \theta_1^{(1)}, \theta_3^{(0)}, \dots, \theta_k^{(0)}, y)$
- iii) Gerar $\theta_k^{(1)}$ da densidade condicional cheia $P(\theta_k | \theta_1^{(1)}, \theta_2^{(1)}, \dots, \theta_{k-1}^{(1)}, y)$

Executando os passos de i até k M vezes, obtém-se um vetor de amostras $\theta^{(0)}, \theta^{(1)}, \dots, \theta^{(M)}$ que é uma realização da cadeia de Markov e pode-se provar que quando $M \rightarrow \infty$, $(\theta_1^{(M)}, \theta_2^{(M)}, \dots, \theta_k^{(M)})$ tende em distribuição para um vetor aleatório cuja função de densidade de probabilidade conjunta é $P(\theta|Y)$. Além disso, $\theta_i^{(M)}$ pode ser considerado como uma observação simulada da distribuição marginal a *posteriori* de θ_i , $P(\theta_i|Y)$.

2.11 Diagnóstico formal da convergência

Os processos MCMC utilizados em inferência bayesiana geram amostras através de processos iterativos no intuito de se aproximar da distribuição de interesse. Logo, se faz necessário verificar se as cadeias geradas estão ou não convergindo para esta distribuição a fim de poder decidir até quantas iterações serão feitas.

Há na literatura abordagens informais para verificação da convergência e métodos formais para monitoramento da convergência, dentre os métodos formais. Os mais utilizados são os propostos por Gelman e Rubin (1992), Raftery e Lewis (1992), Geweke (1992) e o de Heidelberger e Welch (1993). Nogueira, Sáfiadi e Ferreira (2004) apresentaram um roteiro para se verificação da convergência.

2.11.1 Gelman e Rubin (1992)

O método proposto por Gelman e Rubin (1992) pressupõe que m sequências de comprimento $2n$ tenham sido simuladas individualmente, partindo de pontos iniciais distintos. Tendo obtido os pontos iniciais satisfatórios, ou seja, pertencentes ao espaço paramétrico da *posteriori*, as n primeiras iterações de cada cadeia são descartadas a fim de se evitar o período de aquecimento da cadeia (*burn-in*), ou seja, evitar o uso de valores de uma amostra não estacionária.

O método calcula um fator R , chamado fator de redução de escala potencial que pode ser entendido como um fator de diagnóstico de convergência. Quando a estimativa de R for próxima de 1

conclui-se que os m conjuntos de tamanho n simulados se aproxima da distribuição alvo, enquanto que para R grande, sugere-se que qualquer das estimativas das variâncias pode ser reduzida com a utilização de mais iterações.

2.11.2 Raftery e Lewis (1992)

O procedimento de diagnóstico de Raftery e Lewis (1992) estima quantas iterações são necessárias para que o amostrador de Gibbs apresente convergência à distribuição estacionária. O método fornece as estimativas do *burn-in* (número de iterações que devem ser descartadas), o número de iterações que devem ser computadas e o k , distância mínima de uma iteração à outra (*thin*), para se obter a sub amostra aproximadamente independente.

Outro resultado importante deste método é o fator de dependência, responsável pelo acréscimo multiplicativo do número de iterações necessárias para se alcançar a convergência. Quando o fator de dependência for menor que 5 a cadeia atingiu a convergência (NOGUEIRA; SÁFADI; FERREIRA, 2004).

2.11.3 Geweke (1992)

O critério propõe uma avaliação de convergência baseada no teste de igualdade de médias da primeira e da última parte da cadeia, geralmente, dos primeiros 10% e dos últimos 50%, esta cadeia deve ser tomada depois de descartadas algumas observações iniciais. A cadeia convergirá quando a maioria dos dados estiver entre os limites de uma distribuição normal padrão.

Segundo Nogueira, Sáfadi e Ferreira (2004), este critério de diagnóstico serve para verificar uma necessária, mas não suficiente condição de convergência, informa ao pesquisador somente se a convergência não foi alcançada, e não se realmente convergiu.

2.11.4 Heidelberger e Welch (1993)

O critério apresentado por Heidelberger e Welch (1993) utiliza testes estatísticos para avaliar a hipótese nula de estacionariedade da amostra gerada. Se a hipótese nula é rejeitada para um dado valor, o teste é repetido depois de descartados os primeiros 10% das iterações. Se a hipótese é novamente rejeitada, outros 10% são descartados após o descarte dos 10% primeiros. Este processo é repetido até se ter uma proporção de 50%.

Se a hipótese nula for novamente rejeitada, isso indica que é necessário um número maior de iterações. Caso contrário, o número de iterações descartadas é indicado como o tamanho do *burn-in* (NOGUEIRA; SÁFADI; FERREIRA, 2004).

2.12 Critérios para seleção de Modelos

Em muitas situações é possível modelar um determinado problema através de mais de um modelo, podem ocorrer situações na qual se varia o modelo para os dados ou as *prioris* para este modelo, levando o pesquisador a optar por um ou outro modelo para o seu problema.

A literatura já tem abordado extensivamente alguns critérios de seleção como o Critério de Informação de Akaike, Critério de Informação Bayesiano e Critério de Informação Deviance, que, segundo Paulino, Turkman e Murteira (2003) são baseados no fator de Bayes e têm como objetivo considerar, no processo de seleção, a complexidade dos modelos.

O fator de Bayes a favor de M_i contra M_j é a razão das chances:

$$FB_{ij} = \frac{\frac{P(M_i|Y)}{P(M_i)}}{\frac{P(M_j|Y)}{P(M_j)}} = \frac{\frac{P(M_i|Y)}{P(M_j|Y)}}{\frac{P(M_i)}{P(M_j)}} = \frac{P(Y|M_i)}{P(Y|M_j)} \quad (20)$$

Quanto à interpretação do fator de Bayes, pode-se dizer que se FB_{ij} é maior que 1, tem-se a indicação que o modelo disposto no numerador é mais plausível ou verossímil do que o modelo disposto no denominador, caso contrário, o modelo no denominador é mais plausível que o modelo disposto no numerador.

3 MATERIAL E MÉTODOS

3.1 Dados

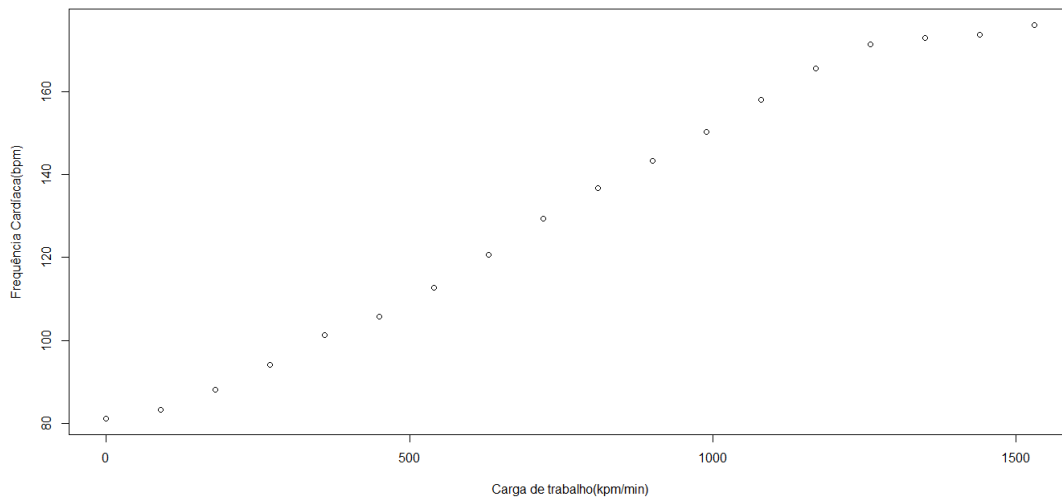
Para a execução da metodologia utilizaram-se os dados experimentais (LIMA, 1997). Os dados analisados foram a média da frequência cardíaca de 16 indivíduos. Disponha-se também dos valores de LL_1 dos 16 indivíduos.

Todos se submeteram ao teste progressivo em uma bicicleta ergométrica de frenagem mecânica, com cargas incrementadas em $90kpm.min^{-1}$ até a exaustão, sendo a frequência cardíaca medida em bpm e armazenada na memória do cardiofrequencímetro da marca Polar para ser posteriormente transferida para o computador.

Aos 50 s de cada carga foi colhida uma gota de sangue arterializado do lóbulo da orelha para determinação da concentração de lactato, em $mmol.l^{-1}$, no lactímetro portátil da marca Accusport.

O gráfico da média da frequência cardíaca dos indivíduos pode ser observado na Figura 3.

Figura 3 - Valores médios dos 16 indivíduos avaliados em cargas crescentes incrementadas a cada minuto de 90kpm.



3.2 Modelos estudados

Silveira (2013) mostrou que dada a violação dos pressupostos da análise de regressão, o modelo linear não deve ser utilizado. Portanto os modelos utilizados para ajustar a frequência cardíaca em relação a cargas crescentes de trabalho serão:

a) Modelo sigmoide de Boltzmann

$$Y_i = AI + \frac{(AS - AI)}{1 + e^{\left(\frac{PI-x}{Inc}\right)}} + \varepsilon_i \quad (21)$$

em que:

- Y_i é a frequência cardíaca para a carga i ;
- AI é a assíntota inferior (Frequência cardíaca em repouso);
- AS é a assíntota Superior (Frequência cardíaca máxima alcançada pelo indivíduo);
- PI é o ponto de inflexão;
- Inc é a Inclinação da curva no PI ;
- x é a variável carga de trabalho;
- ε_i é o resíduo suposto independente e identicamente distribuído, para a carga i seguindo $\varepsilon_i \sim N(0, \tau)$.

Considerando $\theta_1' = [AI, AS, PI, Inc, \tau]$, a verossimilhança para o modelo sigmoide de Boltzmann é dada por:

$$L(Y|\theta_1') = \tau^{n/2} \exp \left\{ -\frac{\tau}{2} \sum_{i=1}^n \left(y_i - AI - \frac{(AS - AI)}{1 + \exp\left(\frac{PI-x}{Inc}\right)} \right)^2 \right\} \quad (22)$$

b) Modelo Logístico

$$Y_i = \frac{AS}{1 + e^{-Inc*(x-PI)}} + \varepsilon_i \quad (23)$$

Nesta parametrização apresentada, os parâmetros possuem a mesma interpretação que a do modelo sigmoide de Boltzmann (21), tomando $\theta_2' = [AS, PI, Inc, \tau]$, a verossimilhança para o modelo Logístico é dada por:

$$L(Y|\theta_2') = \tau^{n/2} \exp \left\{ -\frac{\tau}{2} \sum_{i=1}^n \left(y_i - \frac{AS}{1 + e^{-Inc*(x-PI)}} \right)^2 \right\} \quad (24)$$

3.3 Distribuição para o ponto de deflexão da frequência cardíaca

A distribuição para o ponto de deflexão da frequência cardíaca será obtida através da metodologia proposta por Costa, Lima e De-Oliveira (2007). Estimadas as cadeias dos parâmetros dos modelos não lineares, será ajustado, para cada estimativa dos parâmetros, o modelo de regressão não linear, o qual será comparado com a reta para a obtenção da carga na qual ocorre a $D_{m\acute{a}x}$. Isto nos dará uma cadeia, estimada iterativamente, para o ponto de deflexão da frequência cardíaca.

3.4 Definição das *prioris*

Para se obter a distribuição a *posteriori* conjunta dos parâmetros será necessário atribuir uma *priori* para cada um dos parâmetros.

A distribuição Beta (α, β) é geralmente utilizada para modelar proporção ou uma variável aleatória cujo intervalo de variação esteja definido entre $(0,1)$, todavia esta distribuição pode ser generalizada para um intervalo (m, n) finito qualquer. Seja Z uma variável aleatória definida no intervalo $(0,1)$ seguindo uma distribuição Beta (α, β) , aplicando a seguinte relação: $W = (n - m)Z + m$, teremos deste modo, uma variável W seguindo uma distribuição Beta Generalizada (α, β) num intervalo (m, n) (FERNANDES, 2016).

Serão utilizadas, neste trabalho, as distribuições a *priori* Beta e Beta generalizada, pois, de acordo com Moala e Penha (2016), esta é uma das distribuições mais utilizadas para se modelar a *priori* de um especialista. A *priori* para os parâmetros possuirá a seguinte expressão:

$$P(\theta) \propto \theta^{\alpha-1}(1 - \theta)^{\beta-1} \quad (25)$$

em que α e β são hiperparâmetros da distribuição Beta.

Priori para o parâmetro AI

Como já descrito no modelo, o parâmetro AI refere-se à frequência cardíaca do indivíduo no momento de repouso. Bjerregaard (1983) afirma que sem carga de exercício a frequência cardíaca varia de 53 a 95 bpm, portanto a *priori* para este parâmetro deve variar neste intervalo. Em estudos anteriores Silveira (2013) estimou o parâmetro AI próximo ao valor de 80 bpm, portanto considerar-se-á como *priori* para este parâmetro uma distribuição Beta $(2; 2)$ definida no intervalo 50 a 100 bpm. Esta *priori* será utilizada apenas no modelo sigmoide de Boltzmann.

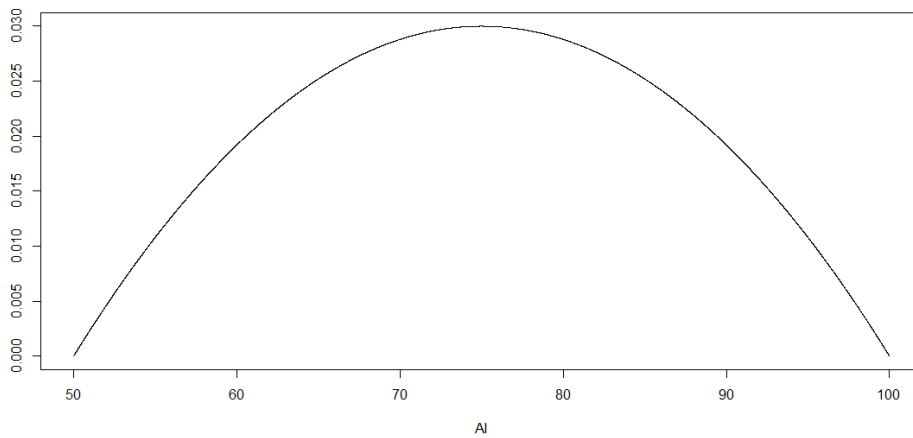
Seja $Z \sim \text{Beta}(2,2)$ definida no intervalo $(0,1)$, a variável aleatória AI será dada por:

$$AI = (100 - 50) * Z + 50$$

$$AI = 50 * Z + 50$$

AI terá, portanto, uma distribuição Beta Generalizada $(2,2)$ definida no intervalo $(50,100)$, cuja densidade pode ser observada na Figura 4.

Figura 4 - Gráfico de uma densidade Beta Generalizada (2,2) definida no intervalo (50, 100) utilizada como *priori* para o parâmetro AI.



Priori para o parâmetro AS

Considerando a fórmula para se obter a frequência cardíaca máxima, $FC_{MÁX}=220 - IDADE$, e tendo por base que a média de idade para a amostra foi próxima de 24 anos, a distribuição a *priori* para o parâmetro AS será uma Beta Generalizada (2,2) definida no intervalo 150 a 250. Esta *priori* será utilizada para ambos os modelos.

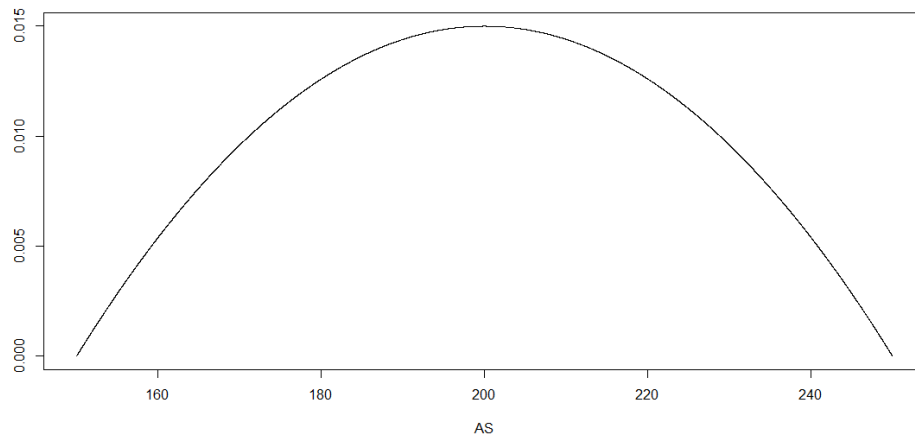
Seja $Z \sim Beta(2,2)$ definida no intervalo (0,1), a variável aleatória AS será dada por:

$$AS = (250 - 150) * Z + 150$$

$$AS = 100 * Z + 150$$

AS terá, portanto, uma distribuição Beta Generalizada (2,2) definida no intervalo (150,250), cuja densidade pode ser observada na Figura 5. Neste caso não foi possível comparar com a média dos atletas porque, diferentemente da frequência cardíaca em repouso que todos os indivíduos possuíam, a máxima frequência cardíaca que os indivíduos atingiram ocorreram em cargas distintas, sendo que a minoria dos indivíduos conseguiu atingir.

Figura 5 - Gráfico de uma densidade Beta Generalizada (2,2) definida no intervalo (150, 250) utilizada como *priori* para o parâmetro AS.



Priori para o parâmetro PI

A *priori* será uma Beta Generalizada (2,2) no intervalo 600 a 800 $kpm.min^{-1}$. Esta *priori* será utilizada para ambos os modelos.

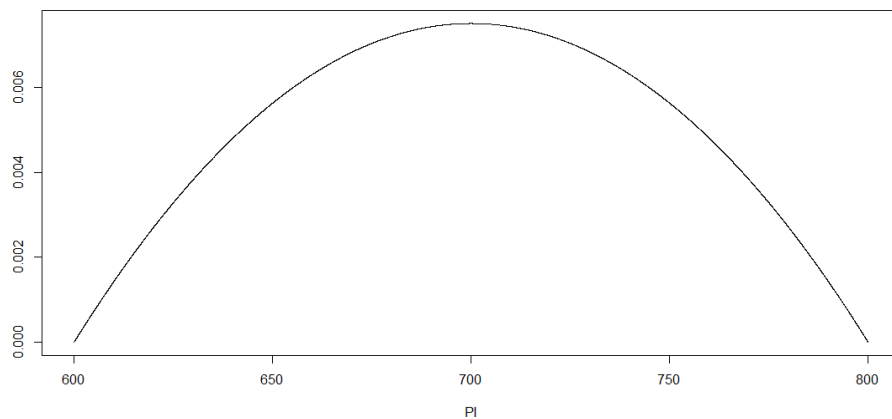
Seja $Z \sim Beta(2,2)$ definida no intervalo (0,1), a variável aleatória PI será dada por:

$$PI = (800 - 600) * Z + 600$$

$$PI = 200 * Z + 600$$

PI terá, portanto, uma distribuição Beta Generalizada (2,2) definida no intervalo (600,800). Utilizaram-se estes intervalos devido a conhecimentos prévios e devido ao fato de que sendo os modelos simétricos, o ponto de inflexão deve ocorrer próximo a carga central. O gráfico apresentado da densidade está representado na Figura 6.

Figura 6 - Gráfico de uma densidade Beta Generalizada (2,2) definida no intervalo (600, 800) utilizada como *priori* para o parâmetro PI.



Priori para o parâmetro Inc

O parâmetro Inc se refere à inclinação da curva no ponto de inflexão. Diferente dos outros parâmetros, neste estudo ele não possui interesse prático. Para ele, considerou-se como *priori*, uma distribuição Beta Generalizada (2,2) no intervalo 0 a 500 para o modelo sigmoide de Boltzmann.

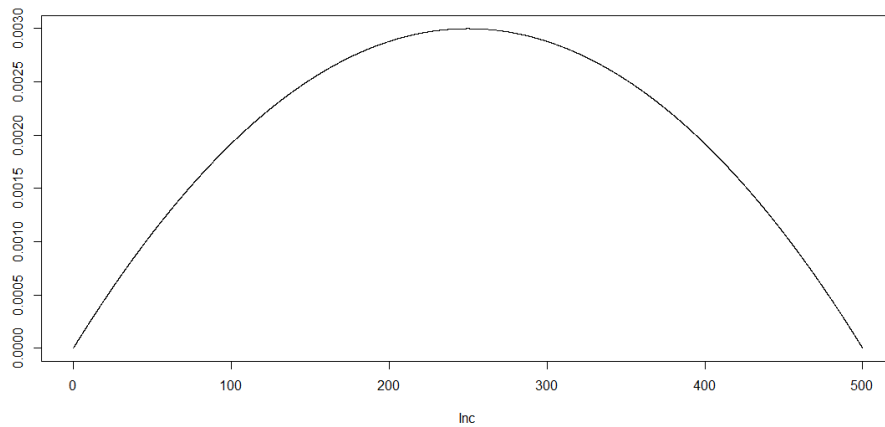
Seja $Z \sim \text{Beta}(2,2)$ definida no intervalo (0,1), a variável aleatória Inc será dada por:

$$\text{Inc} = (500 - 0) * Z + 0$$

$$\text{Inc} = 500 * Z$$

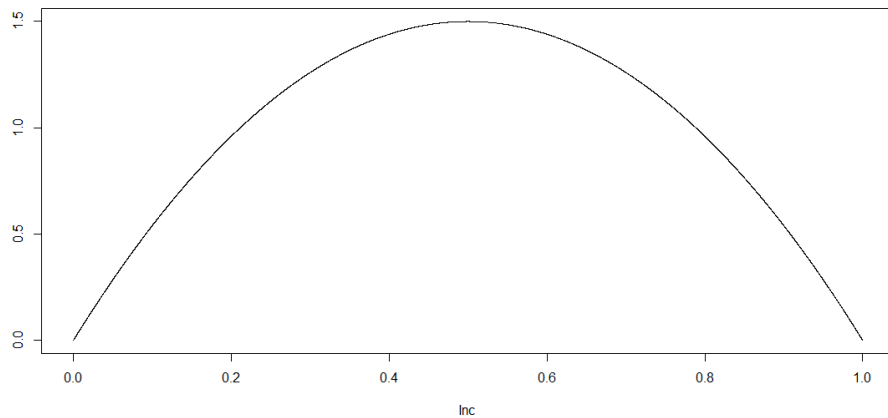
Inc terá, portanto, uma distribuição Beta Generalizada (2,2) definida no intervalo (0,500), cuja densidade pode ser observada na Figura 7.

Figura 7 - Gráfico de uma densidade Beta Generalizada (2,2) definida no intervalo (0, 500) utilizada como *priori* para o parâmetro Inc do modelo sigmoide de Boltzmann.



Já para o modelo Logístico será atribuída uma *priori* Beta (2,2) no intervalo (0,1) com base nos estudos de Silveira (2013), cuja densidade pode ser observada na Figura 8.

Figura 8 - Gráfico de uma densidade Beta (2,2) utilizada como *priori* para o parâmetro Inc do modelo Logístico.



Priori para o parâmetro τ

A distribuição a *priori* para parâmetro τ do modelo sigmoide de Boltzmann será uma distribuição Beta Generalizada (3,2) no intervalo (0,2).

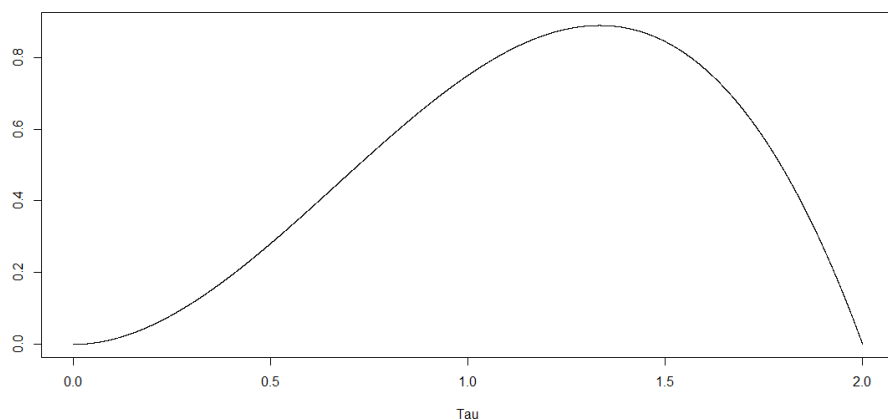
Seja $W \sim \text{Beta}(3,2)$ definida no intervalo (0,2), a variável aleatória τ será dada por:

$$\tau = (2 - 0) * W + 0$$

$$\tau = 2 * W$$

τ terá, portanto, uma distribuição Beta Generalizada (3,2) definida no intervalo (0,2), cuja densidade pode ser observada na figura 9.

Figura 9 - Gráfico de uma densidade Beta Generalizada (3,2) no intervalo (0,2) utilizada como *priori* para o parâmetro τ do modelo sigmoide de Boltzmann.



Para o modelo Logístico será utilizada uma distribuição Beta Generalizada (2,3) no intervalo (0;0,1).

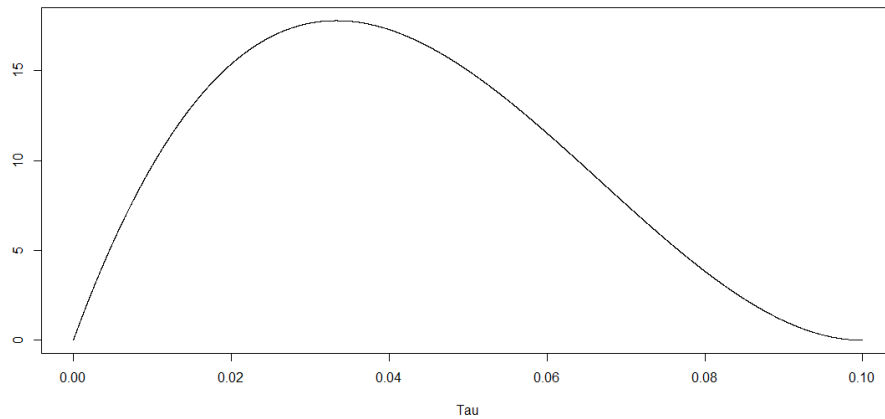
Seja $K \sim \text{Beta}(2,3)$ definida no intervalo (0;0,1), a variável aleatória τ será dada por:

$$\tau = (0,1) * K + 0$$

$$\tau = 0,1 * K$$

τ terá, portanto, uma distribuição Beta Generalizada (2,3) definida no intervalo (0;0,1), cuja densidade pode ser observada na Figura 10.

Figura 10 Gráfico de uma densidade Beta Generalizada (2,3) no intervalo (0;0,1) utilizada como *priori* para o parâmetro τ do modelo Logístico.



Priori conjunta para os vetores de parâmetros

A distribuição a *priori* conjunta para o modelo sigmoide de Boltzmann será:

$$\begin{aligned}
 P(\theta) &\propto P(AI)P(AS)P(PI)P(Inc)P(\tau) \\
 P(\theta) &\propto [50 * Beta(2,2) + 50][100 * Beta(2,2) + 150][200 * \\
 &Beta(2,2) + 600][500 * Beta(2,2)][2 * Beta(3,2)] \quad (26) \\
 P(\theta) &\propto [50 * AI(1 - AI) + 50][100 * AS(1 - AS) + 150][200 * \\
 &PI(1 - PI) + 600][500 * Inc(1 - Inc)][2 * \tau^2(1 - \tau)]
 \end{aligned}$$

A distribuição a *priori* conjunta para o modelo Logístico será dada por:

$$\begin{aligned}
 P(\theta) &\propto P(AS)P(PI)P(Inc)P(\tau) \\
 P(\theta) &\propto [100 * Beta(2,2) + 150][200 * Beta(2,2) + \\
 &600][Beta(2,2)][0,1 * Beta(2,3)] \quad (27) \\
 P(\theta) &\propto [100 * AS(1 - AS) + 150][200 * PI(1 - PI) + \\
 &600][Inc(1 - Inc)][0,1 * \tau(1 - \tau)^2]
 \end{aligned}$$

Por meio do teorema de Bayes, as distribuições a *posteriori* conjunta para os parâmetros de ambos os modelos ficam:

$$P(\theta|y) \propto L(y|\theta)P(\theta) \quad (28)$$

3.5 Análise dos dados

Para a geração das cadeias dos parâmetros, obtenção das estimativas pontuais (média e mediana), intervalo HPD e obtenção dos gráficos serão utilizados os softwares R (R DEVELOPMENT CORE TEAM, 2016) e OpenBugs (SPIEGELHALTER et al., 2007), que utiliza os algoritmos MCMC.

A verificação da convergência será feita de acordo com o procedimento proposto por Nogueira, Sáfiadi e Ferreira (2004), utilizando o pacote BOA do software R através dos seguintes passos:

i) aplicar Raftery e Lewis (1992) em uma amostra piloto e determinar o tamanho ideal da sequência;

ii) monitorar a convergência das sequências nas proximidades do tamanho ideal, indicado pelo critério de Raftery e Lewis (1992), por meio dos critérios de Gelman e Rubin (1992) e Geweke (1992);

iii) determinar o tamanho do *burn-in*, ou seja, do número de iterações desprezadas para se retirar o efeito dos valores iniciais do parâmetro, pelo critério de Heidelberger e Welch (1993)

A associação entre os pontos de transição da curva e os limiares de lactato será verificada se os limiares estiverem dentro do intervalo HPD para os parâmetros correspondentes. A comparação entre os modelos sigmoide de Boltzmann e Logístico será feita utilizando o fator de Bayes (FB), cuja conclusão será dada conforme a Tabela 1, que apresenta uma interpretação dada por Jeffreys (1961) e pode ser utilizada na escolha do melhor modelo.

Tabela 1 Interpretação do fator de Bayes proposto por Jeffreys(1961)

Valores de $FB_{(M_i, M_j)}$	Conclusão
$FB_{(M_i, M_j)} < 1$	Evidência a favor de M_j
$1 \leq FB_{(M_i, M_j)} < 3,2$	Evidência muito fraca a favor de M_i
$3,2 \leq FB_{(M_i, M_j)} < 10$	Evidência fraca a favor de M_i
$10 \leq FB_{(M_i, M_j)} < 100$	Evidência forte a favor de M_i
$FB_{(M_i, M_j)} \geq 100$	Evidência muito forte a favor de M_i

4 RESULTADOS E DISCUSSÕES

Não se detectou autocorrelação residual em ambos modelos estudados ($p > 0,05$), portanto, na sequência das análises, considerou-se somente os modelos com erros independentes.

Silveira (2013), ao modelar a frequência cardíaca em cargas crescentes de trabalho para a média de 22 indivíduos, obteve erros correlacionados para os modelos estudados. Outros trabalhos também avaliaram a dependência residual (PRADO et al., 2013; SOUSA et al., 2014) e obtiveram autocorrelação residual de primeira ordem nos modelos estudados.

Nem sempre se verifica a presença de autocorrelação residual em ajustes de modelos não lineares em dados tomados ao longo do tempo. Lopes (2007), ao estudar diversos modelos de regressão não linear para ajustar a produção de biogás, não detectou autocorrelação residual. O mesmo ocorreu com Sousa (2014), ao modelar a germinação de sementes de café, e Mendes (2011) ao modelar o crescimento do diâmetro de tomates.

Deve-se sempre avaliar a necessidade de modelar o erro proveniente dos ajustes dos modelos, visto que a não consideração da correlação residual, quando significativa, pode levar à obtenção de estimativas viesadas e à subestimação das variâncias dos parâmetros (PRADO et al. 2013). Na ausência de autocorrelação deve-se optar pelo modelo mais simples.

Ajuste do modelo sigmoide de Boltzmann

Gerou-se inicialmente uma amostra piloto de tamanho 11.000, descartando-se as 1000 primeiras iterações, e fez-se o teste de Raftery e Lewis (1992) o qual indicou uma cadeia de tamanho 60.000, um *thin* de tamanho 2 e um *burn-in* de tamanho 5. Duas novas cadeias foram geradas nestas condições e repetiu-se o teste de Raftery e Lewis (1992) em uma das cadeias.

Em seguida aplicou-se o teste de Gelman e Rubin (1992), utilizando-se as duas cadeias geradas a partir de pontos distintos, e o teste de Geweke (1992).

Os resultados dos testes acima citados estão resumidos na Tabela 2.

Tabela 2 Critérios de Raftery e Lewis (fator de dependência- FD), Gelman e Rubin (\hat{R}) e Geweke (Valor p) utilizados na avaliação da convergência das cadeias.

Parâmetros	Raftery e Lewis (FD)	Gelman e Rubin (\hat{R})	Geweke (Valor p)
AI	1,0165	0,9999	0,7176
AS	1,0662	1,0001	0,7108
PI	1,0165	0,9993	0,7177
Inc	1,0240	1,0000	0,7153
τ	0,9967	1,0001	0,6634

Conforme apresentado na Tabela 2, para todos os parâmetros se obteve um fator de dependência menor que 5, a estimativa R do teste de Gelman e Rubin ficou próxima de 1 e todos os valores p do teste de Geweke foram superiores a 0,05, indicando que as cadeias convergiram. O critério de Heidelberger e Welch (1993) indicou não rejeição da hipótese nula de estacionariedade para as cadeias.

Os resultados apresentados na Tabela 2 podem ser confirmados por meio da inspeção gráfica das distribuições *a posteriori* dos parâmetros e pelo traço das cadeias, nas Figuras 11 a 15.

Figura 11 - Densidade *a posteriori* e traço da cadeia gerada pelo método MCMC para o parâmetro AI do modelo sigmoide de Boltzmann.

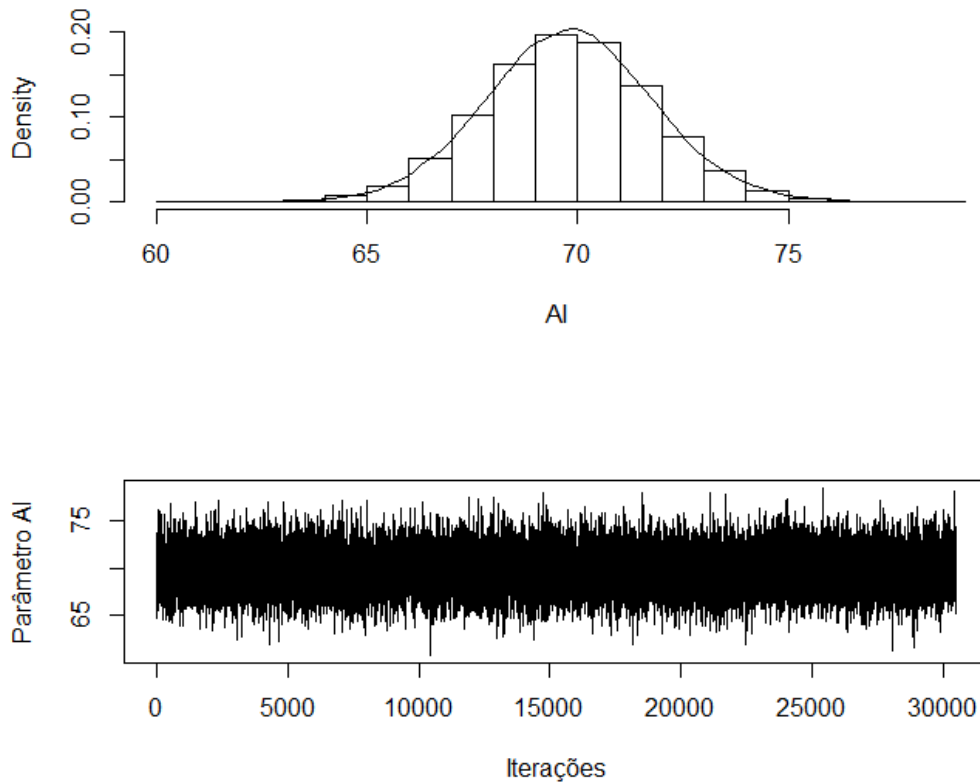


Figura 12 Densidade a posteriori e traço da cadeia gerada pelo método MCMC para o parâmetro AS do modelo sigmoide de Boltzmann.

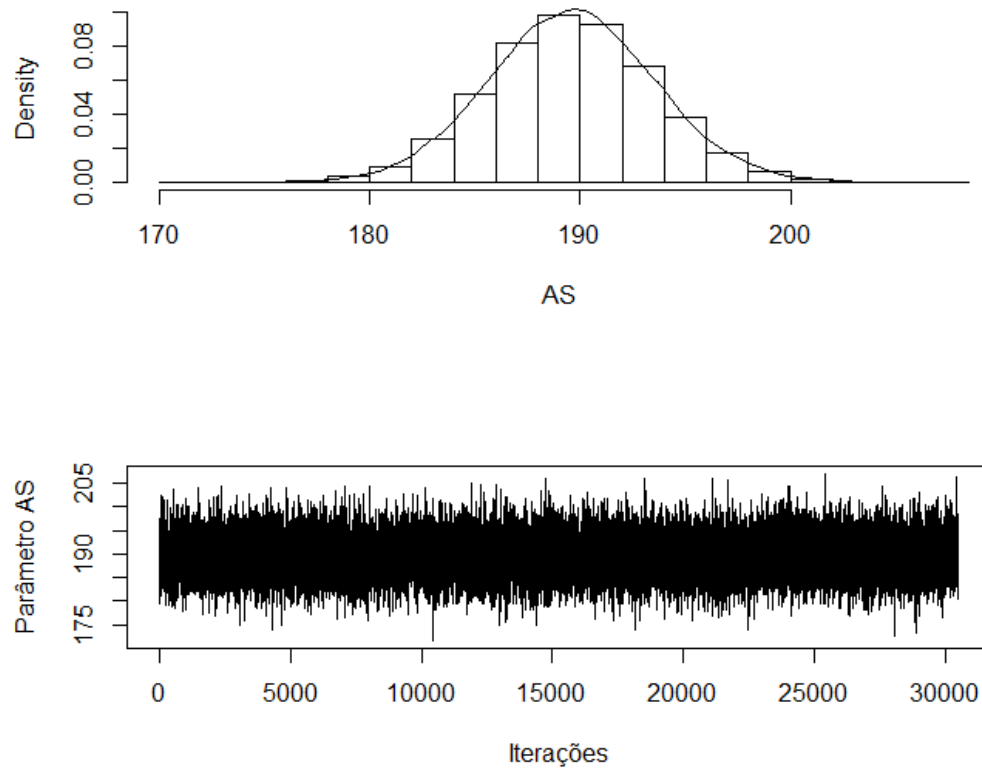


Figura 13 Densidade a posteriori e traço da cadeia gerada pelo método MCMC para o parâmetro PI do modelo sigmoide de Boltzmann.

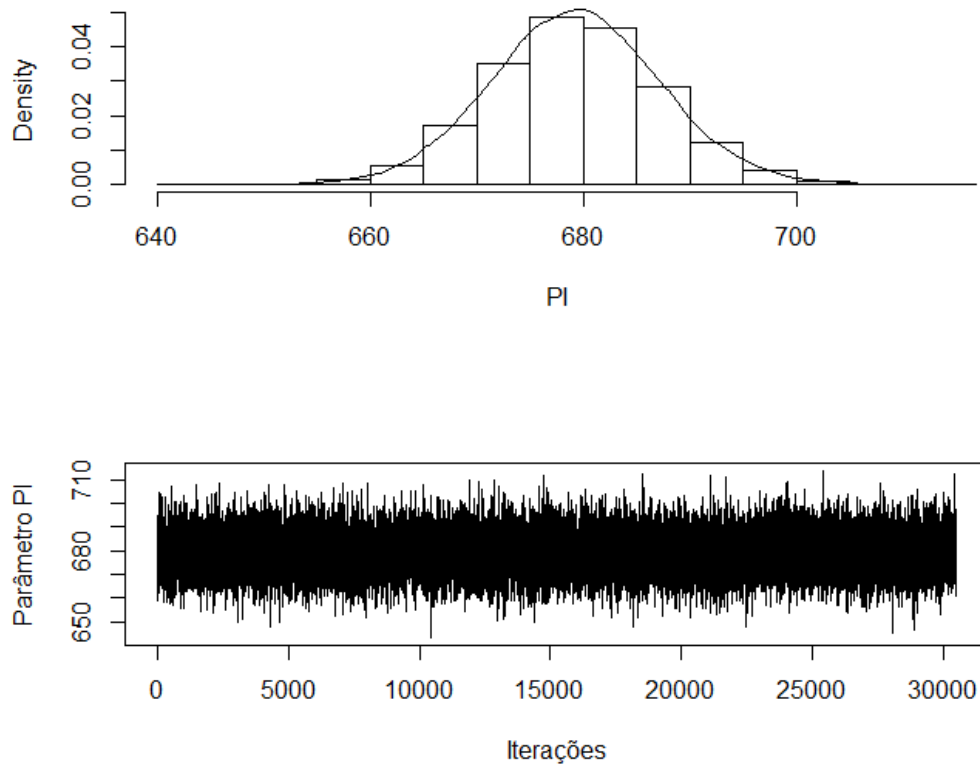


Figura 14 Densidade a posteriori e traço da cadeia gerada pelo método MCMC para o parâmetro Inc do modelo sigmoide de Boltzmann.

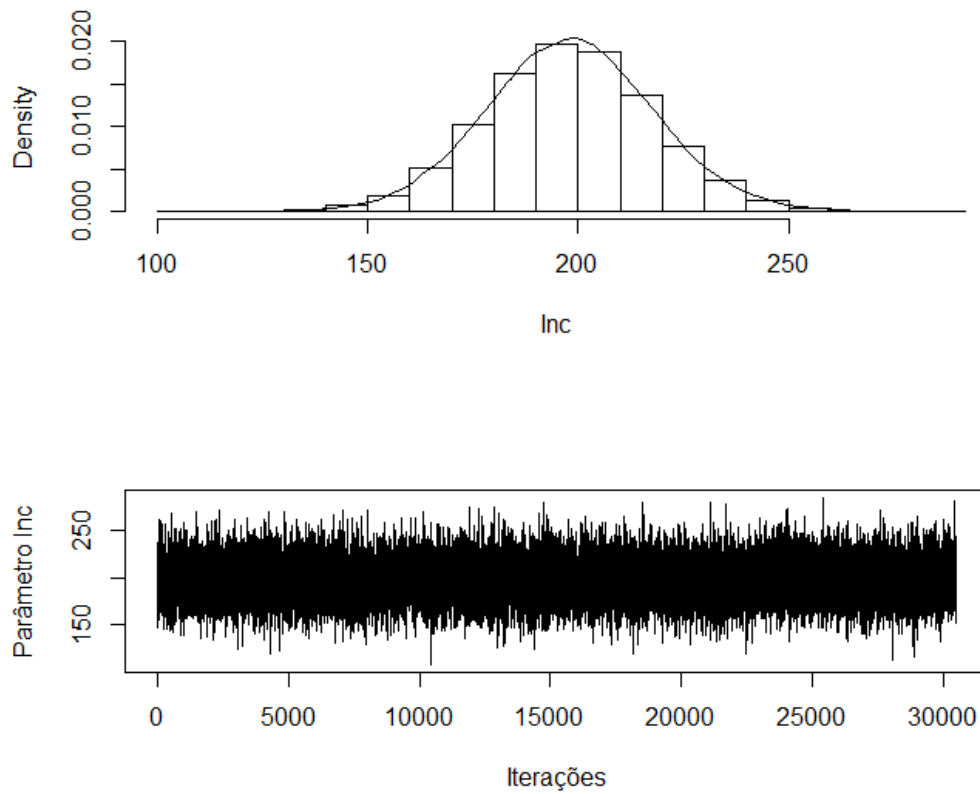
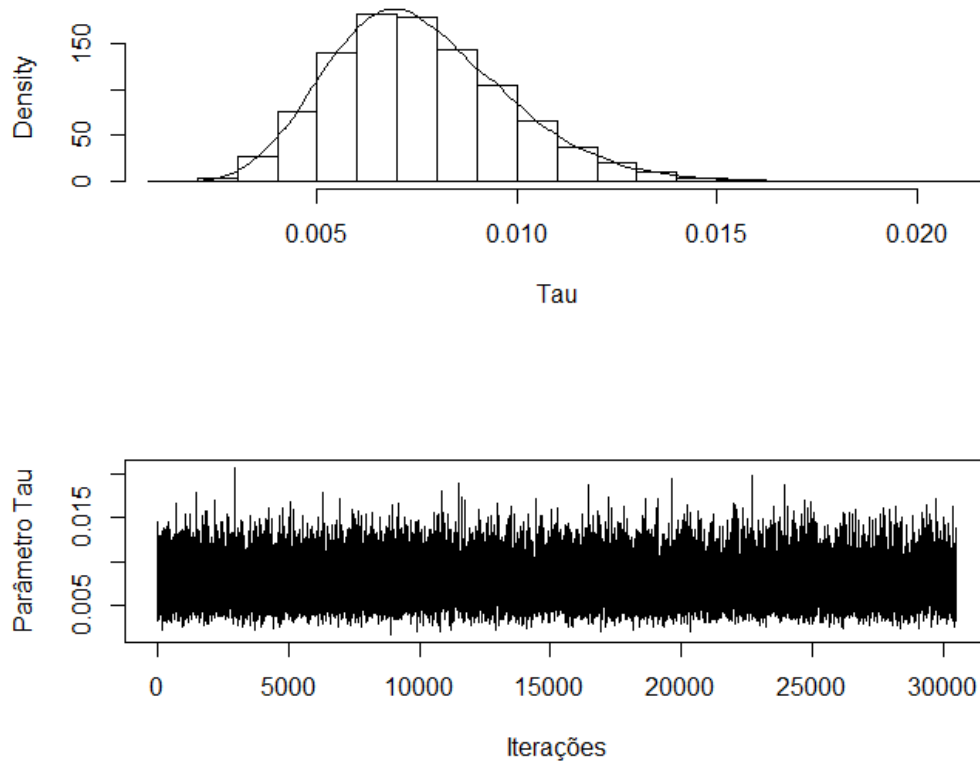


Figura 15 Densidade a posteriori e traço da cadeia gerada pelo método MCMC para o parâmetro τ referente ao modelo sigmoide de Boltzmann.



Na Tabela 3 estão apresentadas as estimativas da média e mediana a posteriori e o intervalo de máxima densidade a posteriori (HPD) para os parâmetros do modelo.

Tabela 3 Estimativas da média e mediana a posteriori, intervalo de máxima densidade a posteriori (HPD) para parâmetros do modelo sigmoide de Boltzmann.

Parâmetros	Média	Mediana	HPD (95%)	
			LI	LS
AI	69,81	69,81	65,90	73,82
AS	189,62	189,60	181,8	197,6
PI	679,24	679,20	664,1	695,7
Inc	198,11	198,20	158,4	237,6
τ	0,0076	0,0073	0,0035	0,0121

Observa-se, pela análise das Figuras 11 a 15, que as cadeias geradas para todos os parâmetros do modelo sigmoide de Boltzmann oscilaram em torno das médias estimadas apresentadas na Tabela 3, não apresentando valores discrepantes ao longo das cadeias.

A estimativa para o parâmetro AI , quanto ao ajuste médio dos dados, representa a frequência cardíaca do indivíduo no período de repouso e de início de treinamento, quando a carga de trabalho ainda é muito baixa. O valor estimado de aproximadamente 69 bpm tanto para média quanto para a mediana concordam com o trabalho de Afonso et al. (2006) ao avaliar a frequência cardíaca de repouso de 11 indivíduos do gênero masculino com média de idades de $22 \pm 1,6$ anos.

Ao se avaliar a média da frequência cardíaca na carga inicial dos indivíduos, obtemos um valor cerca de 20% acima do estimado pelo modelo. Como já dito anteriormente, Åstrand et al (2003) defende que nos instantes que precedem a atividade e mesmo nas cargas iniciais outros fatores se juntam ao stress da atividade provocando um aumento na frequência cardíaca real no momento de repouso. É provável que o uso da abordagem Bayesiana consiga captar esta frequência cardíaca real no momento de repouso.

O valor obtido para o parâmetro AS , estimou cerca de 90% da frequência cardíaca máxima que o grupo poderia alcançar, sendo, portanto, mais um indicativo de que a modelagem Bayesiana consegue captar a real condição cardíaca dos indivíduos testados.

O ponto de inflexão da frequência cardíaca, PI , é a carga na qual é atingida exatamente a metade da frequência cardíaca máxima estimada pela curva. No modelo sigmoide de Boltzmann, tanto média, quanto mediana, estimaram $790kpm \cdot min^{-1}$ para o PI .

Ao considerarmos o intervalo HPD para o parâmetro PI ([664,1; 695,7]) e o intervalo de confiança para o LL_1 ([625; 793]) vemos que estes se sobrepõem o que nos indica que as médias de LL_1 e PI são iguais no modelo sigmoide de Boltzmann, confirmando a hipótese de associação entre LL_1 e PI .

A FC na qual ocorre o PI corresponde a 60% da $FC_{MÁX}$, fato que corrobora com outros achados na literatura (LIMA, 1997, COUTO et al., 2013, COSTA; LIMA E De-OLIVEIRA, 2007) obtiveram estimativas próximas entre LL_1 e o PI da frequência cardíaca ajustada pelo modelo sigmoide de Boltzmann, fato também observado por Silveira (2013) e Lima (1997).

O Parâmetro Inc não apresentou interesse prático neste trabalho, porém, em trabalhos futuros pode ser usado para se comparar a aptidão aeróbia de diferentes grupos ao se modelar a frequência cardíaca por um mesmo modelo, o grupo com menor valor para este parâmetro apresentará maior aptidão aeróbia.

Ajuste do modelo Logístico

Assim como no modelo sigmoide de Boltzmann, no modelo Logístico também avaliaremos a convergência das cadeias de cada um dos parâmetros do modelo por meio dos testes de Raftery e Lewis (1992), Gelman e Rubin (1992), Geweke (1992) e Heidelberger e Welch (1993) e também pela inspeção gráfica dos traços das cadeias geradas pelo método MCMC.

Para este modelo também se gerou inicialmente uma amostra piloto de tamanho 11.000, descartando-se as 1000 primeiras iterações e fez-se o teste de Raftery e Lewis (1992) o qual indicou uma cadeia de tamanho 50.000, um *thin* de tamanho 10 e um *burn-in* de tamanho 100. Duas novas cadeias foram geradas nestas condições e repetiu-se o teste de Raftery e Lewis (1992) em uma das cadeias. Em seguida aplicou-se o teste de Gelman e Rubin (1992), para este teste utilizou-se das duas cadeias geradas a partir de pontos distintos, e o teste de Geweke (1992).

Os resultados dos testes acima citados estão resumidos na Tabela 4.

Tabela 4 Critérios de Raftery e Lewis (fator de dependência- FD), Gelman e Rubin (\hat{R}) e Geweke (Valor p) utilizados na avaliação da convergência das cadeias.

Parâmetros	Raftery e Lewis (FD)	Gelman e Rubin (\hat{R})	Geweke (Valor p)
AS	1,1668	0,9999	0,3784
PI	2,5184	0,9999	0,3646
Inc	2,2658	1,0000	0,3815
τ	1,0157	1,0001	0,8293

Conforme a Tabela 4, para todos os parâmetros se obteve um fator de dependência menor que 5, a estimativa R do teste de Gelman e Rubin ficou próxima de 1 para todos os parâmetros e todos os valores p do teste de Geweke foram superiores a 0,05, indicando que as cadeias convergiram. O critério de Heidelberger e Welch (1993) apesar de não ter sido apresentado na Tabela 4, indicou a aceitação da hipótese nula de estacionariedade para as cadeias.

Os resultados apresentados na Tabela 4 podem ser confirmados por meio da inspeção gráfica das distribuições *a posteriori* dos parâmetros e pelo traço das cadeias, nas Figuras 16 a 19.

Figura 16 Densidade a *posteriori* e traço da cadeia gerada pelo método MCMC para o parâmetro AS do modelo Logístico.

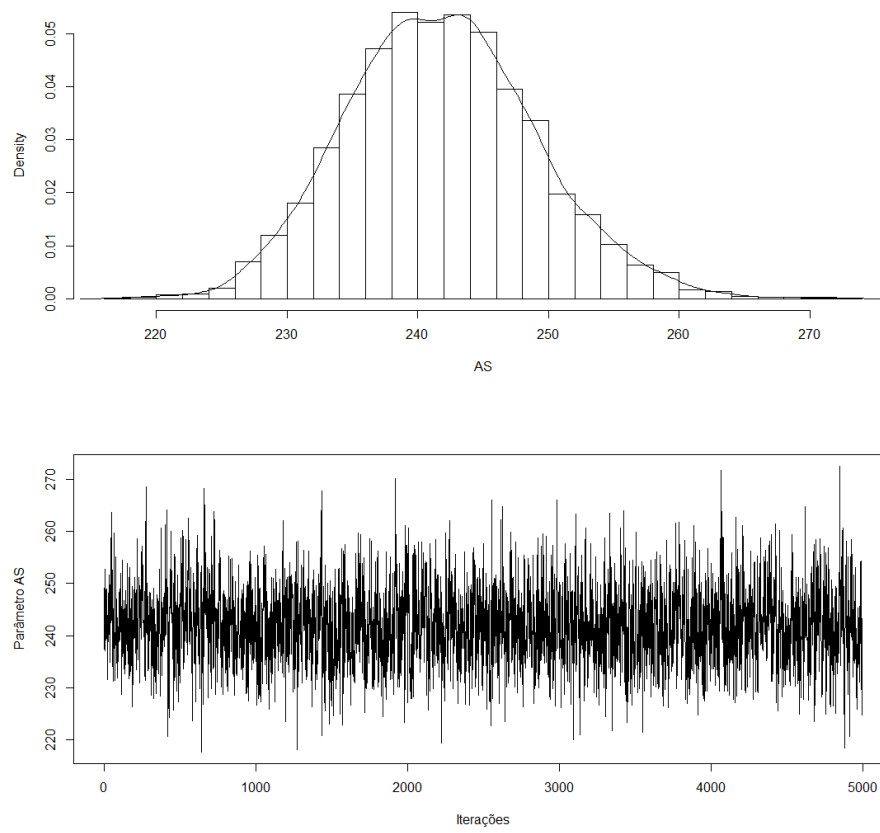


Figura 17 Densidade *a posteriori* e traço da cadeia gerada pelo método MCMC para o parâmetro PI do modelo Logístico

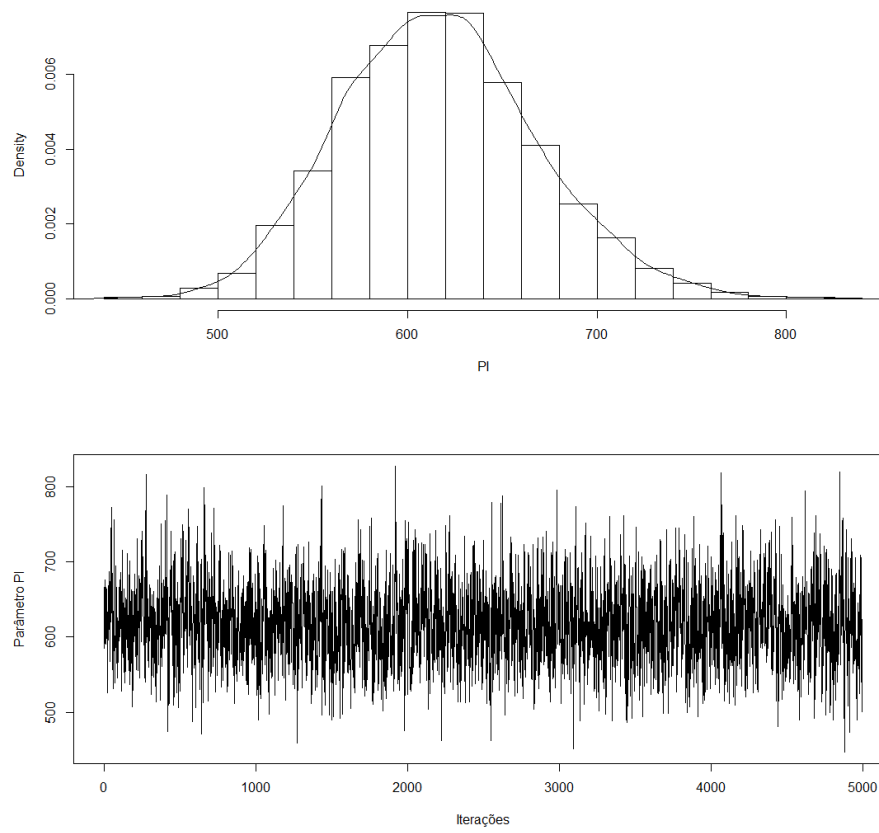


Figura 18 Densidade a *posteriori* e traço da cadeia gerada pelo método MCMC para o parâmetro Inc do modelo Logístico.

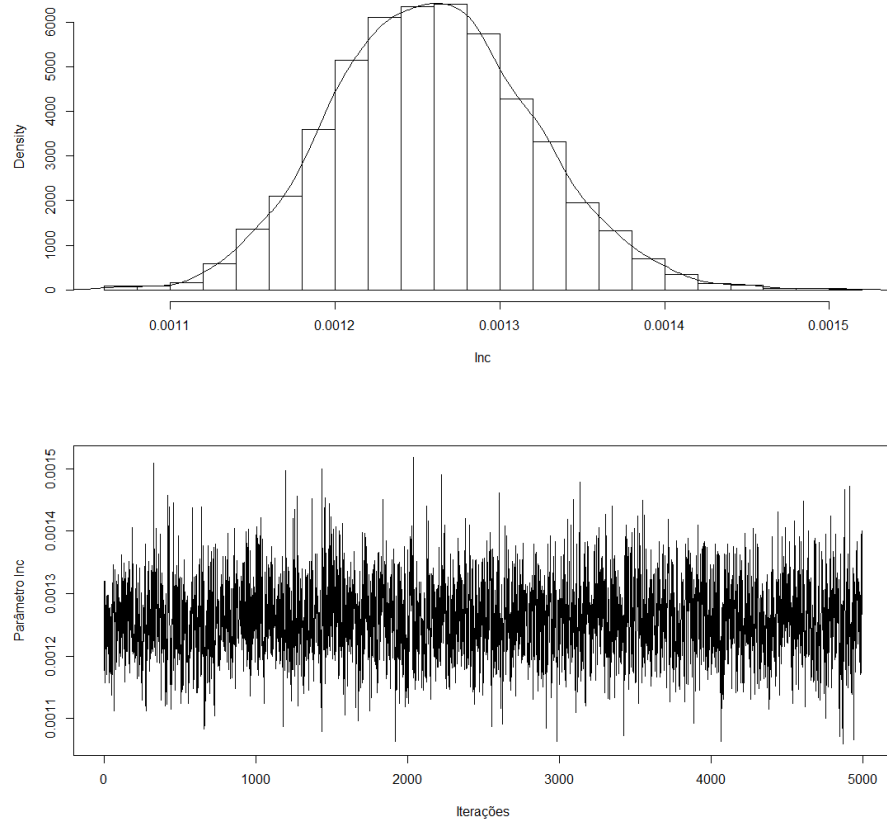
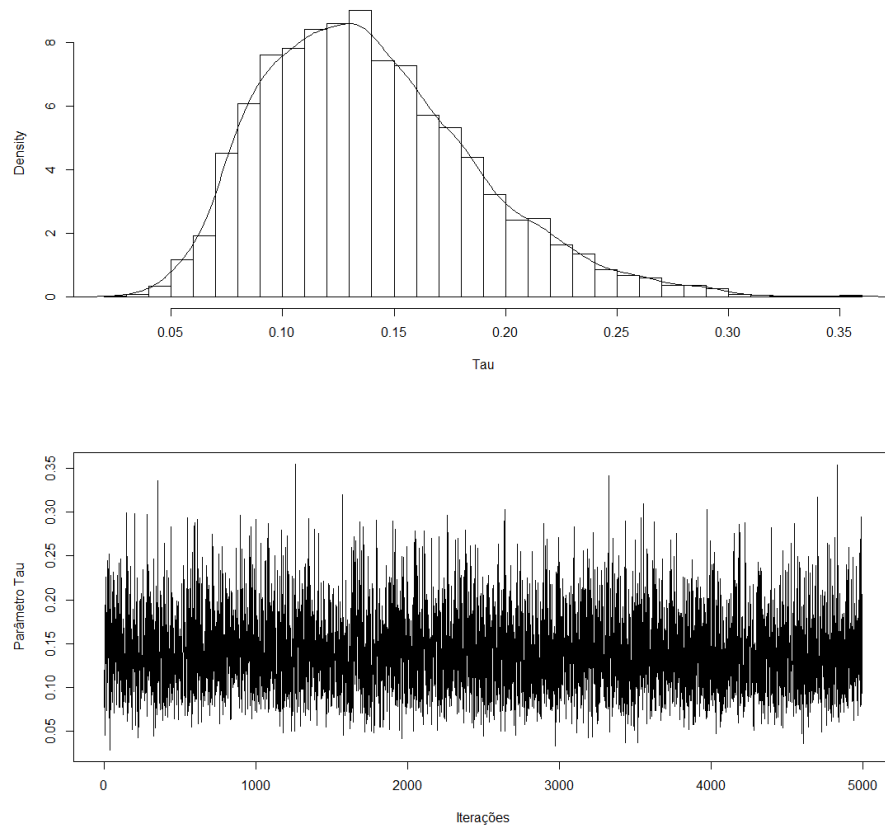


Figura 19 Densidade *a posteriori* e traço da cadeia gerada pelo método MCMC para o parâmetro τ referente ao modelo Logístico



Na Tabela 5 estão apresentadas as estimativas da média e mediana *a posteriori* e o intervalo de máxima densidade *a posteriori* (HPD) para os parâmetros do modelo.

Tabela 5 Estimativas da média e mediana *a posteriori*, intervalo de máxima densidade *a posteriori* (HPD) para os parâmetros do modelo Logístico.

Parâmetros	Média	Mediana	HPD (95%)	
			LI	LS
AS	241,82	241,6	228,2	256,4
PI	616,91	615,1	520,1	721,3
Inc	0,0012	0,0012	0,0011	0,0013
τ	0,1396	0,1342	0,0563	0,2338

Observa-se, pela análise das Figuras 16 a 19, que as cadeias geradas para todos os parâmetros do modelo Logístico oscilaram em torno das médias estimadas apresentadas na Tabela 5, não apresentando valores discrepantes ao longo das cadeias.

O valor obtido para o parâmetro AS, superestimou a frequência cardíaca máxima que o grupo poderia alcançar, uma possibilidade para isto ter ocorrido se deve ao fato que, diferente do modelo

sigmoide de Boltzmann que apresenta um parâmetro para modelar as cargas iniciais, o modelo Logístico assume assíntota inferior no zero.

A estimativa do parâmetro PI para o modelo Logístico foi de 616,91 para a média, porém ao se considerar o intervalo HPD ([520,1; 721,3]), este também se sobrepõe ao intervalo do LL_1 ([625; 793]), indicando a associação entre o PI e o LL_1 também para o modelo Logístico.

O parâmetro Inc corresponde à inclinação da curva da frequência cardíaca no PI , dada a estrutura do modelo, o parâmetro Inc do modelo Logístico apresentou média muito diferente da apresentada pelo modelo sigmoide de Boltzmann.

Identificação do PDFC

Avaliou-se a convergência das cadeias do parâmetro PDFC estimado por diferença para os modelos sigmoide de Boltzmann e Logístico, por meio dos testes de Raftery e Lewis (1992), Gelman e Rubin (1992), Geweke (1992) e Heidelberger e Welch (1993) e também pela inspeção gráfica dos traços das cadeias.

Os resultados dos testes acima citados estão resumidos na Tabela 6.

Tabela 6 Critérios de Raftery e Lewis (fator de dependência- FD), Gelman e Rubin (\hat{R}) e Geweke (Valor p) utilizados na avaliação da convergência das cadeias

PDFC	Raftery e Lewis (FD)	Gelman e Rubin (\hat{R})	Geweke (Valor p)
S. Boltzmann	1,0185	0,9999	0,6185
Logístico	1,5381	0,9999	0,4536

Conforme a Tabela 6 verificou-se a convergência das cadeias. O critério de Heidelberger e Welch (1993) apesar de não ter sido apresentado na Tabela 6, indicou a aceitação da hipótese nula de estacionariedade para as cadeias.

Os resultados apresentados na Tabela 6 podem ser confirmados por meio da inspeção gráfica das distribuições *a posteriori* dos parâmetros e pelo traço das cadeias, nas Figuras 20 a 21.

Figura 20 - Densidade a posteriori e traço da cadeia gerada por diferença para o parâmetro PDFC referente ao modelo sigmoide de Boltzmann.

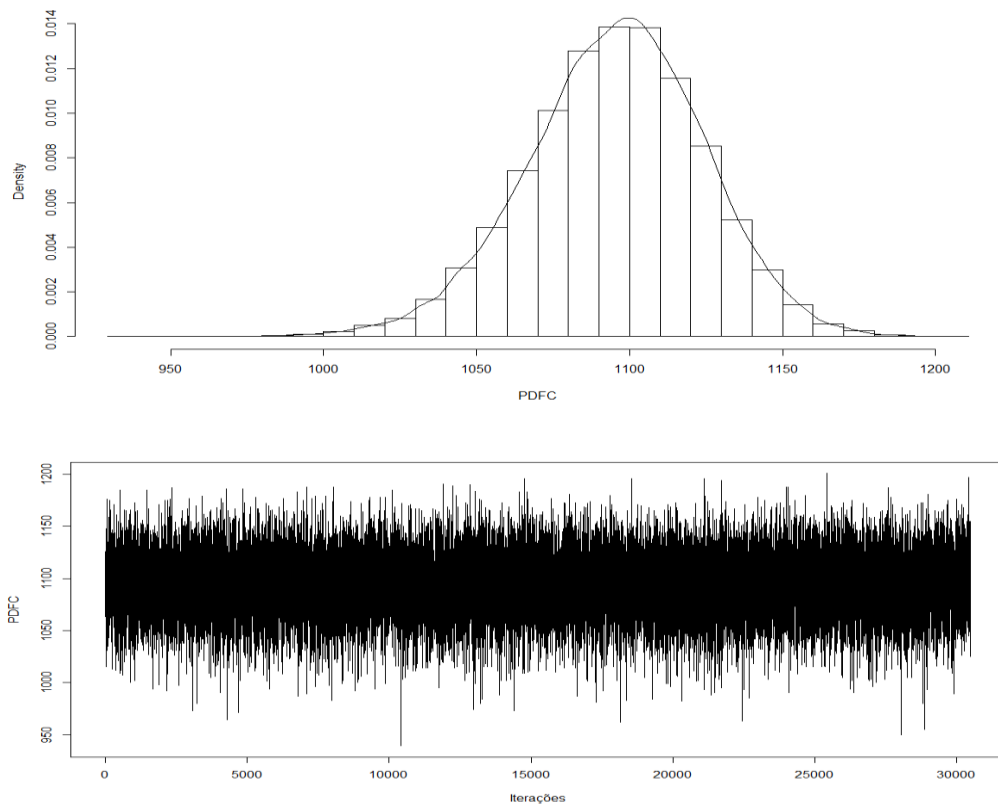
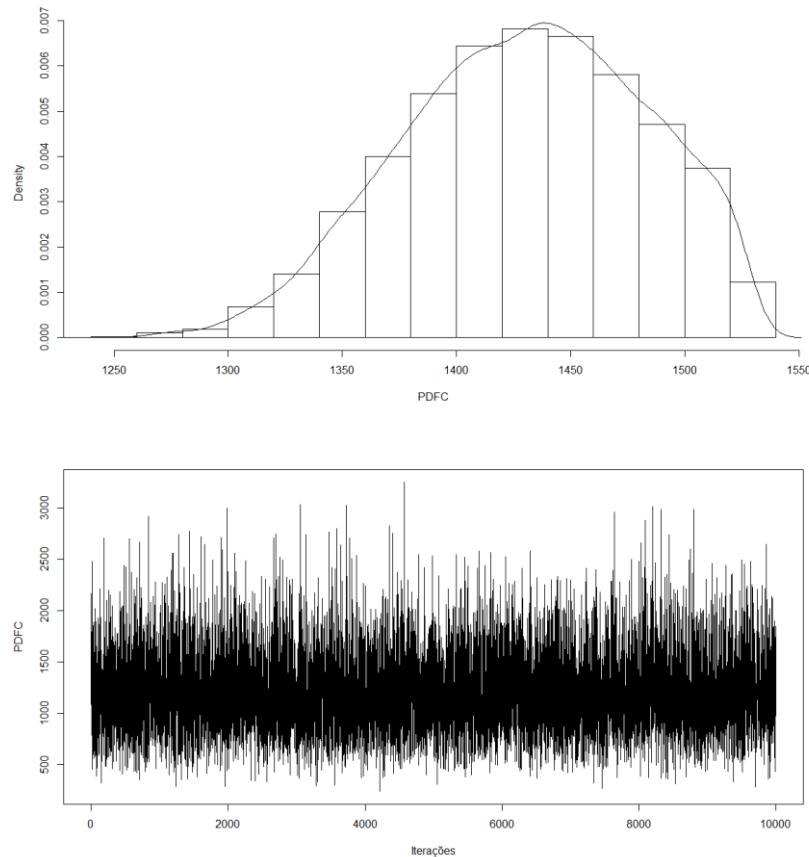


Figura 21 Densidade a posteriori e traço da cadeia gerada por diferença para o parâmetro PDFC referente ao modelo sigmoide de Boltzmann.



Na Tabela 7 estão apresentadas as estimativas da média e mediana a posteriori e o intervalo de máxima densidade a posteriori (HPD) para o parâmetro PDFC obtidos por ambos modelos.

Tabela 7 Estimativas da média e mediana a posteriori, intervalo de máxima densidade a posteriori (HPD) para o parâmetro PDFC ajustados pelos modelos sigmoide de Boltzmann e Logístico.

PDFC	Média	Mediana	HPD (95%)	
			LI	LS
S. Boltzmann	1095	1097	1038	1151
Logístico	1430	1433	1339	1526

Observa-se, pela análise das Figuras 20 e 21 que as cadeias do PDFC, obtidas tanto pelo modelo sigmoide de Boltzmann quanto para o modelo Logístico, oscilaram em torno das médias estimadas apresentadas na Tabela 7, não apresentando valores discrepantes ao longo das cadeias.

O segundo limiar de lactato foi identificado na carga de $1080 \text{ kpm} \cdot \text{min}^{-1}$, seguindo a metodologia de Costa, Lima e De-Oliveira (2007) obteve-se a distribuição para o PDFC e verificou-se

que para o modelo sigmoide de Boltzmann, o segundo limiar de lactato encontra-se dentro do intervalo HPD para o PDFC.

A FC na qual ocorre o PDFC corresponde a 86% da $FC_{MÁX}$, ficando ligeiramente abaixo de outros valores encontrados na literatura (BODNER; RHODES, 2000; LIMA, 1997; De-OLIVEIRA, 2004; COUTO et al., 2013)

Comparação dos modelos estudados

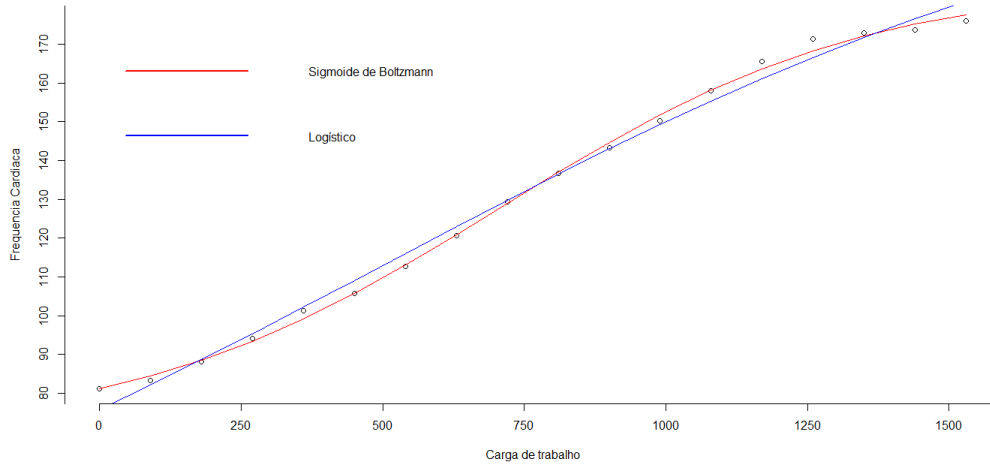
A escolha do modelo que melhor se ajusta aos dados foi feita com base no critério denominado Fator de Bayes, descrito anteriormente na seção 2.12. Ao comparar os modelos utilizando o Fator de Bayes, objetiva-se verificar qual dos modelos melhor se ajusta aos dados da frequência cardíaca em cargas crescentes de trabalho.

Para o cálculo do Fator de Bayes o modelo sigmoide de Boltzmann foi posto no numerador e o modelo Logístico, no denominador, obtendo-se um resultado de $FB_{(Boltzmann,Logístico)} = 12,86$.

De acordo com este resultado e seguindo a interpretação sugerida por Jeffreys (1961) já descrita na Tabela 1, verifica-se evidência forte em favor do modelo sigmoide de Boltzmann, portanto é o modelo mais plausível para se descrever a frequência cardíaca em função de cargas crescentes de trabalho concordando com outros trabalhos presentes na literatura (LIMA, 1997; De-OLIVEIRA, 2004; SILVEIRA, 2013; SILVEIRA; SOUZA; MUNIZ, 2014).

Os gráficos para os ajustes sigmoide de Boltzmann e Logístico podem ser observados na Figura 22

Figura 22 - Gráficos dos ajustes dos modelos sigmoide de Boltzmann e Logístico para os dados da FC em CCT



5 CONCLUSÃO

Pelos resultados obtidos neste trabalho, pode-se concluir que:

Ambos os modelos ajustaram bem a frequência cardíaca em cargas crescentes de trabalho, porém o modelo sigmoide de Boltzmann foi superior ao modelo Logístico para ajustar a frequência cardíaca avaliada em cargas crescentes de trabalho.

Os valores encontrados para o ponto de inflexão da frequência cardíaca em ambos os modelos se associaram ao primeiro limiar de lactato. Houve associação entre o ponto de deflexão da frequência estimado para o modelo sigmoide de Boltzmann e não houve no modelo Logístico.

A metodologia bayesiana mostrou-se eficiente estimando valores condizentes com a realidade.

REFERÊNCIAS

- AFONSO, L. dos S. et al. Frequência cardíaca máxima em esteira ergométrica em diferentes horários. **Rev Bras Med Esporte**, Niterói, v. 12, n. 6, p. 318-322, 2006.
- AMORIM, P. R. S. Fisiologia do exercício: considerações sobre o controle do treinamento aeróbio. **Revista Mineira de Educação Física**, Viçosa, MG, v. 10, n. 1, p. 51-63, 2002.
- ÄSTRAND, P.; RODAHL, K. **Textbook of work physiology**. 2. ed. New York: McGraw-Hill, 1977.
- BENETTI, M.; SANTOS, R. T.; CARVALHO, T. Cinética de lactato em diferentes intensidades de exercícios e concentrações de oxigênio. **Rev Bras Med Esporte**, Niterói, v. 6, n. 2, p. 50-56, Abr. 2000.
- BJERREGAARD, P. Mean 24 hour heart rate, minimal heart rate and pauses in healthy subjects 40–79 years of age. **European Heart Journal**, Oxford, v. 4, n.1, p. 44–51, 1983.
- BODNER, M. E.; RHODES, E.C. A review of the concept of the heart rate deflection point. **Sports Medicine**, Auckland, v. 30, n. 1, p. 31-46, 2000.
- BOHM, M, R. J.C. Heart rate: surrogate or target in the management of heart failure? **Heart**, v. 99, n. 2, p. 72-75, 2012.
- BÖHME M.T.S. Relações entre aptidão física, esporte e treinamento esportivo. **Revista Brasileira de Ciência e Movimento**, Brasília, v. 11, n. 3, p. 91-96, 2003.
- BOX, G. E. P.; TIAO, G. C. **Bayesian inference in statistical analysis**. New York: J. Wiley, 1992. 588 p.
- CAMBRI, L. T. et al. Frequência cardíaca e a identificação dos pontos de transição metabólica em esteira rolante. **Revista da Educação Física**, Maringá, v. 17, n. 2, p. 131-137, 2006.
- CHENG, B. et al. A new approach for the determination of ventilatory and lactate thresholds. **International Journal of Sports Medicine**, Stuttgart, v. 13, n. 7, p. 518-522, 1992.
- CONCONI, F. et al. Determination of the anaerobic threshold by a noninvasive field test in runners. **Journal of Applied Physiology: Respiratory Environment Exercise Physiology**, v.52, p.869-73, 1982.
- CONDE, J. H. S. et al. Identification of the Lactate Threshold and the Heart Rate Deflection Point by the Perceived Exertion Curve. **Journal of Exercise Physiology Online**, v. 17, p. 32-38, 2014
- COSTA, V. P.; LIMA, J. R. P.; De-OLIVEIRA, F. R. Identificação de limiares metabólicos em curvas de frequência cardíaca ajustadas. **Revista Brasileira de Educação Física e Esporte**, São Paulo, v. 21, n. 3, p. 219-227, set. 2007.
- COUTO, P. G. et al. Pontos de transição da frequência cardíaca em teste progressivo máximo. **Motriz**, Rio Claro. v. 19 n. 2, p. 261-268, 2013.

De-OLIVEIRA, F. R. **Prediccion de los umbrales de lactato y ajustes de frecuencia cardiaca em el test de Léger-Boucher**. 2004. 229 p. Tese (Doutorado em Atividade Física e Esporte) - Universidad del Pais Vasco, San Sebastian, 2004.

DIAS, M. H.; SOUSA, E. L. A. de. Esporte de alto rendimento: reflexões psicanalíticas e utópicas. **Psicol. Soc.**, Belo Horizonte, v. 24, n. 3, p. 729-738, 2012.

DRAPER, N. R.; SMITH, H. **Applied regression analysis**. 3rd ed. New York: J. Wiley, 1998. 706 p.

EHLERS, R. S. **Introdução à inferência bayesiana**. Departamento de Estatística, UFPR, 2007. 68p. Disponível em: < <http://www.icmc.usp.br/~ehlers/bayes/bayes.pdf> >. Acesso em: 10 mar. 2015.

FERNANDES, T. J. **Modelos duplo sigmoidais para o crescimento de frutos do cafeeiro**. 2016. 88 p. Tese (Doutorado em Estatística e Experimentação Agropecuária) - Universidade Federal de Lavras, Lavras, 2016.

FERREIRA, G. A. et al. Validade de limiares de transição identificados a partir da frequência cardíaca. **Revista Brasileira de Ciência e Movimento**, v. 22, p. 47-56, 2014.

FOSS, M. L.; KETAYIAN, S. J. **Bases Fisiológicas da Educação Física e dos Desportos**. 6 ed. Rio de Janeiro: Guanabara Koogan, 2000. 560 p.

GELFAND, A. E.; SMITH, A. F. M. Sampling based approaches for calculating marginal densities. **Journal of the American Statistical Association**, London, v. 85, n. 410, p. 398-409, 1990.

GELMAN, A.; RUBIN, D. B. Inference from iterative simulation using multiple sequences. **Statistical Science**, Hayward, v. 7, n. 4, p. 457-511, 1992.

GEMAN, S.; GEMAN, D. Stochastic relaxation, Gibbs distributions and the Bayesian restoration of images. **IEEE Transactions on pattern Analysis and Machine Intelligence**, Los Alamitos, v. 6, n. 6, p. 721-741, 1984.

GEWEKE, J. **Evaluating the accuracy of sampling-based approaches to the calculation of posterior moments**. New York: Oxford University, 1992. 631 p.

HASTINGS, W. K. Monte Carlo sampling methods using Markov chains and their applications. **Biometrika**, London, v. 57, p. 97-109, 1970.

HEIDELBERG, P.; WELCH, P. Simulation run length control in the presence of an initial transient. **Operations Research**, Landing, v. 31, n. 6, p. 1109-1144, 1993.

HOFMANN, P. et al. %HRmax target heart rate is dependent on heart rate performance curve deflection. **Medicine & Science in Sports & Exercise**, Indianápolis, v. 33, n. 10, p. 1726-1731, 2001

JANSSEN, P. G. J. M. **Lactate threshold training**. Champaign: Human Kinetics, 2001. 302 p.

JEFFREYS, H. **Theory of probability**. Oxford: Claredon, 1961. 325 p.

KARA, M. et al. Determination of the heart rate deflection point by the Dmax method. **Journal of Sports Medicine and Physical Fitness**, Torino, v. 36, n. 1, p. 31-34, 1996.

- LEITE, J. R. de S. et al. Influência de fatores bioclimáticos nos índices produtivos e fisiológicos de caprinos nativos confinados. **Rev. Bras. Eng. Agríc. Ambient.**, Campina Grande, v. 16, n. 4, p. 443-448, 2012
- LIMA, J. R. P. **Frequência cardíaca em cargas crescentes de trabalho: ajuste sigmóide, ponto de inflexão e limiar de variabilidade da frequência cardíaca.** 1997. 129 f. Tese (Doutorado em Educação Física) - Universidade de São Paulo, São Paulo, 1997.
- LOPES, G. N. Modelagem não linear da produção acumulada de biogás em rede de biodigestores anaeróbios. **Revista Agro@mbiente on line**, Boa Vista, v.1, n.1, p.37-40, 2007.
- MAHLER, D. A. et al. Cálculos metabólicos: apêndice D. *In: Manual do ACMS para teste de esforço e prescrição de exercício.* Tradução: Paulo Chermont P. Estima. Rio de Janeiro: Revinter, 2000. 5 ed. p.237-250.
- MENDES, P. N. **Ajuste dos modelos Gompertz e Logístico na descrição das curvas de crescimento de tomates: Uma abordagem bayesiana.** 2011. 82 p. Tese (Doutorado em Estatística e Experimentação Agropecuária) - Universidade Federal de Lavras, Lavras, 2011.
- METROPOLIS, N. et al. Equations of state calculations by fast computing machines. **Journal of Chemical Physics**, Woodbury, v. 21, n. 6, p. 1087-1092, 1953.
- MOALA, F. A.; PENHA, D. L. Métodos de elicitação da distribuição à priori Beta. **Revista Brasileira de Biometria**, São Paulo, v. 34, n. 1, p. 49-62, 2016.
- NASCIMENTO, E. M. F. et al. Caracterização da curva da frequência cardíaca durante teste incremental máximo em esteira. **Rev. Bras. Cineantropom. Desempenho Hum.**, v.13, n. 4, p. 285-291, 2011.
- NOGUEIRA, D. A.; SÁFADI, T.; FERREIRA, D. F. Avaliação de critérios de convergência para o método de Monte Carlo via Cadeias de Markov. **Revista Brasileira de Estatística**, Rio de Janeiro, v. 65, n. 224, p. 59-88, 2004.
- PAULA, G. A. **Modelos de regressão com apoio computacional.** São Paulo: IME-USP, 2004. 245 p.
- PAULINO, C. D.; TURKMAN, A. A.; MURTEIRA, B. **Estatística Bayesiana**, Lisboa: Fundação Calouste Gulbenkian, 2003. 446 p.
- PELICER, F. R. et al . A influência da fadiga neuromuscular e da acidose metabólica sobre a corrida de 400 metros. **RevBrasMedEsporte**, São Paulo , v. 17, n. 2, p. 127-131, Abr. 2011 .
- POWERS, S. K.; HOWLEY, E. T. **Fisiologia do exercício: teoria e aplicação ao condicionamento e ao desempenho.** 5. ed. Barueri: Manole, 2005. 576 p.
- PRADO, T. K. L. do et al. Ajuste do modelo Logístico na descrição do crescimento de frutos de coqueiro anão por meio de algoritmos iterativos. **Revista Brasileira de Biometria**, São Paulo, v.31, n.2, p.216-232, 2013.
- PRADO, T.K.L. do; SAVIAN, T. V.; MUNIZ, J.A. Ajuste dos modelos Gompertz e Logístico aos dados de crescimento de frutos de coqueiro anão verde. **Ciência Rural**, Santa Maria, v. 43, p. 803-809, 2013

R DEVELOPMENT CORE TEAM. **R**: a language and environment for statistical computing. Vienna: R Foundation for Statistical Computing, 2016. Disponível em: <<https://www.R-project.org>>. Acesso em: 21 nov. 2016.

RAFTERY, A. L.; LEWIS, S. Comment: one long run with diagnostics: implementation strategies for Markov chain Monte Carlo. **Statistical Science**, Hayward, v. 7, n. 4, p. 493-497. 1992.

RIBEIRO J. P. Limiares metabólicos e ventilatórios durante o exercício. Aspectos fisiológicos e metodológicos. **Arq Bras Cardiol**, v. 64, n. 2, p.171-81, 1995

RUBIO, K.; NUNES, A. V. Comportamento de risco entre atletas: os recursos ergogênicos e o doping no Século XXI. **Revista Brasileira de Psicologia do Esporte**, São Paulo, v.3, n. 4, 2010.

SAVIAN, T.V. et al. Análise bayesiana para modelos de degradabilidade ruminal. **Ciencia Rural**. v. 39, n.7, p. 2169-2177, 2009.

SILVEIRA, S. C. **Modelagem não linear com erros correlacionados da frequência cardíaca com carga**. 2013. 65 p. Dissertação (Mestrado em Estatística e Experimentação Agropecuária) - Universidade Federal de Lavras, Lavras, 2013.

SILVEIRA, S. C.; SOUZA, T. V.; MUNIZ, J. A. Comparação de modelos não lineares na descrição da frequência cardíaca de indivíduos do sexo feminino. **Revista da Estatística da Universidade Federal de Ouro Preto**, v. 3, p. 285-288, 2014.

SOUSA, I. F. et al. Fitting nonlinear autoregressive models to describe coffee seed germination. **Ciência Rural**, Santa Maria, v. 44, n. 11, p. 2016-2021, 2014.

SPIEGELHALTER, D. J. et al. OpenBUGS Version 3.0.2 User Manual. Cambridge: Medical Research Council Biostatistics Unit. 2007. Disponível em: <http://mathstat.helsinki.fi/openbugs>.

TANAKA, H. et al. Age-predicted maximal heart rate revisited. **Journal of American College of Cardiology**, v. 37, n. 1, p. 153-156, 2001.

TAYLOR, C. Studies in exercise physiology. **American Journal of Physiology**, n. 135, p. 27-42, 1941.

VANDERLEI, L. C. M. et al. Noções básicas de variabilidade da frequência cardíaca e sua aplicabilidade clínica. **Rev Bras Cir Cardiovasc**, São José do Rio Preto , v. 24, n. 2, p. 205-217, 2009

VILARO, J.; RESQUETI, V.R.; FREGONEZI, G.A.F. Avaliação clínica da capacidade do exercício em pacientes com doença pulmonar obstrutiva crônica. **Rev. bras. fisioter.**, São Carlos , v. 12, n. 4, p. 249-259, Ago. 2008.

VOET, D.; VOET, J. G. **Bioquímica**. 4. ed. Porto Alegre: Artmed, 2013. 1512p.

WHALUND, H. Determination of the physical working capacity. **Acta Medica Scandinavica**, suppl. 215, p. 1-78, 1948.