

TEORIA DE APREÇAMENTO DE OPÇÕES POR
ARBITRAGEM UTILIZANDO O MODELO
BINOMIAL

DEVANIL JAQUES DE SOUZA

2005

DEVANIL JAQUES DE SOUZA

TEORIA DE APREÇAMENTO DE OPÇÕES POR
ARBITRAGEM UTILIZANDO O MODELO
BINOMIAL

Dissertação apresentada à Universidade Federal de Lavras, como parte das exigências do Programa de Pós-Graduação em Agronomia, área de concentração em Estatística e Experimentação Agropecuária, para a obtenção do título de “Mestre”.

Orientador:
Prof. Dr. Lucas Monteiro Chaves

LAVRAS
Minas Gerais - Brasil
... 2005

**Ficha Catalográfica Preparada pela Divisão de Processos Técnicos da
Biblioteca Central da UFLA**

Souza, Devanil Jaques de

Teoria de apreçamento de opções por arbitragem utilizando o modelo binomial / Devanil Jaques de Souza. – Lavras : UFLA, 2005.

113 p. : il.

Orientador: Lucas Monteiro Chaves.

Dissertação (Mestrado) – UFLA.

Bibliografia.

1. Estatística. 2. Finança. 3. Opção. 4. Modelo binomial. 5. Arbitragem. I. Universidade Federal de Lavras. II. Título.

CDD-519.5

DEVANIL JAQUES DE SOUZA

TEORIA DE APREÇAMENTO DE OPÇÕES POR
ARBITRAGEM UTILIZANDO O MODELO
BINOMIAL

Dissertação apresentada à Universidade Federal de Lavras, como parte das exigências do Programa de Pós-Graduação em Agronomia, área de concentração em Estatística e Experimentação Agropecuária, para a obtenção do título de "Mestre".

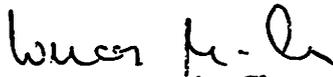
Aprovada em 22 de julho de 2005.

Prof. Dr. Daniel Furtado Ferreira

UFLA

Prof. Dr. Mário Javier Ferrua Vivanco

UFLA



Prof. Dr. Lucas Monteiro Chaves

UFLA

(Orientador)

LAVRAS
MINAS GERAIS - BRASIL

Este trabalho é dedicado a minha esposa,

Ângela Maria Leite de Castro Souza

*porque tem sido a
companheira e amiga
inigualável em todos os
momentos,*

e às memórias de

Carlos Eduardo Leite de Castro Souza

meu filho,

Jorge Fernandes de Souza

Maria dos Reis de Souza

meus pais

Jorge Juvenil Fernandes

José Adriano Fernandes

meus irmãos.

Agradecimentos

Não sei se por acaso ou, quem sabe, por algum desígnio, tive a satisfação de ter tido professores de matemática muito bons: no Colégio São José, em Pouso Alegre, o Padre Carlos, uma paciência de fazer inveja a Dalai Lama; na Escola Técnica de Eletrônica Francisco Moreira da Costa, em Santa Rita do Sapucaí, o professor Carlos Calomam, que aplicava provas ao som de Bach e, ao mostrar que $i^i = 1/\sqrt{e^\pi}$, exclamou, para espanto do adolescente de então: “pura poesia!”; na Universidade Federal do Rio de Janeiro, o professor José Paulo Carneiro, que, já nos idos da década de 1970, iniciava seus alunos de cálculo nessa coisa mágica chamada Teoria dos Conjuntos. Agradeço a Deus por tê-los colocado no meu caminho (e por muito mais) e a eles, a quem devo o prazer que tenho cada vez que aprendo um pouco mais de matemática.

Agradeço aos meus professores no Departamento de Ciências Exatas da UFLA, por terem me mostrado o quanto é interessante essa ciência, nova para mim, chamada Estatística.

Agradeço aos meus colegas de curso. Foi muito bom conviver com essa garotada tão competente e tão especial.

Agradeço à CAPES, pelo suporte financeiro.

Agradeço, muito especialmente, ao meu orientador, Prof. Lucas Monteiro Chaves. A sua vivacidade intelectual e a nossa convivência tão fraterna têm sido, além de um grande incentivo, uma grande satisfação. Mais um grande professor na minha vida!

Finalmente, volto a agradecer a Deus pela família que tenho, minhas alegrias e minhas razões de ser.

SUMÁRIO

	Página
Resumo	i
Abstract	ii
1 Introdução e justificativa	1
2 Referencial teórico	5
2.1 Funções convexas	5
2.2 Descrição do mercado	9
2.3 Modelo binomial de apreçamento dos ativos de risco ..	10
2.4 Fundamentos de probabilidade axiomática	12
2.4.1 Probabilidade axiomática básica	12
2.4.2 Probabilidade condicional	16
2.4.3 Martingales	22
2.5 Tempo de parada ótimo	28
2.6 Modelo binomial de 1 passo	29
2.6.1 Preço de opção europeia de compra no modelo binomial de 1 passo	29
2.7 Modelo binomial de n passos	35
2.7.1 Preço e réplica de opções europeias no modelo de n passos	39
2.7.2 Preço e réplica de opções americanas no modelo de n passos	56
2.7.2.1 Preço, réplica e tempo ótimo de exercício para uma opção americana de compra	57
2.7.2.2 Preço, réplica e tempo ótimo de exercício para uma opção americana de venda	60
3 Metodologia	63
3.2 Simulações	63

4	Resultados e discussão	65
4.1	Valor arbitral de uma opção européia de compra	65
4.2	Valor arbitral de uma opção européia de venda	68
4.3	Valor arbitral de uma opção americana	71
4.3.1	Valor arbitral de uma opção americana de compra no modelo de 1 passo	72
4.3.2	Valor arbitral de uma opção americana de compra no modelo de T passos	75
4.3.3	Valor arbitral de uma opção americana de venda no modelo de 1 passo	80
4.3.4	Valor arbitral de uma opção americana de compra no modelo de T passos	82
5	Conclusão	89
Apêndice A Propriedades da esperança condicional – demonstrações		91
Apêndice B Rotinas em R		97
Referências bibliográficas		113

RESUMO

SOUZA, Devanil Jaques de. **Teoria de apreçamento de opções por arbitragem utilizando o modelo binomial**. 2005. 113p. Dissertação (Mestrado em Estatística e Experimentação Agropecuária). Universidade de Lavras – Lavras, MG.¹

Neste trabalho utilizam-se técnicas matemáticas elementares, baseadas em propriedades de funções convexas, para derivar o preço arbitral de opções americanas. Considera-se que os mercados são completos e discretos no tempo e que os preços das ações negociadas nesses mercados se comportam segundo o modelo binomial. São mostradas também as formas tradicionais de obtenção desses mesmos resultados, tanto utilizando argumentação estritamente financeira como pelo uso da sofisticada ferramenta dos Martingales. A título de estabelecer os fundamentos teóricos necessários a essa última forma de tratamento do problema, são revistos os conceitos de esperança condicional como variável aleatória, tempo ótimo de parada e martingales. As rotinas para cálculo das carteiras de réplica e valores de arbitragem foram desenvolvidas usando a linguagem R.

¹ Orientador: Prof Dr. Lucas Monteiro Chaves - UFLA

ABSTRACT

SOUZA, Devanil Jaques de. Arbitrage options pricing theory using the binomial model. 2005. 113 p. Dissertation (Master in Statistics and Agricultural Experimentation). Universidade de Lavras – Lavras, MG.²

In this work, elementary mathematical tools, based on convex functions properties, are used to derive the arbitrage price for american options. Markets are considered complete and discrete in time and stock prices are supposed to behave according to binomial models. It is also shown the traditional way to obtain the same results, either using strictly financial arguments or by the use of sophisticated Martingales tools. Aiming to establish the theoretical basis necessary to this latter approach to the problem, the concepts of mathematical expectation as a random variable, optimum stopping time and Martingales are reviewed. The routines used to obtain hedging wealth and arbitrage values were developed using R language.

² Adviser: Prof. Lucas Monteiro Chaves - UFLA

1 INTRODUÇÃO E JUSTIFICATIVA

O desenvolvimento científico usualmente se dá de maneira contínua como soma de pequenas contribuições individuais. De tempos em tempos, porém, um trabalho mais significativo resulta em um salto para um novo patamar. No domínio da chamada matemática financeira, o conjunto dessas mudanças de paradigma deve certamente incluir:

(i) a extraordinária tese de doutorado de Louis Bachelier (1900), *Théorie de la Espéculacion*, citado por Davis (2004), quando pela primeira vez foi proposto modelar o comportamento dos preços de ações como um movimento Browniano. Para se ter idéia do quanto isto estava à frente do seu tempo, basta lembrar que cinco anos mais tarde, o físico Albert Einstein utilizou um modelo semelhante para descrever o movimento de partículas imersas em um líquido;

(ii) os artigos de Black & Scholes (1973) e Merton (1973), em que, a partir de uma equação diferencial parcial associada a condições iniciais apropriadas, estabeleceu-se o preço justo para uma opção do tipo européia. Esses artigos, em razão de sua importância, resultaram em um Prêmio Nobel de Economia para seus autores (<http://www.nobelprizes.com/>). A partir daí foi que se desenvolveu a primeira Bolsa de Futuros de Chicago e tiveram início os crescimentos explosivos, tanto do mercado de derivativos financeiros como do volume de pesquisa científica dedicada ao assunto.

(iii) o artigo de Cox et al. (1979), propondo o chamado modelo binomial para o comportamento do preço das ações. Baseando-se nesse modelo e utilizando apenas matemática considerada elementar, os autores derivaram o chamado preço de arbitragem para opções européias, mostrando que, assintoticamente, o modelo contém os mesmos celebrados resultados obtidos por Black & Scholes (1973) e Merton (1973).

É justamente a relevância do tema, aliada à constatação de que se trata de área de pesquisa de resultados significativos, além de sofisticados, que motiva este trabalho: estudar as contribuições que a ciência estatística tem dado à busca da compreensão da dinâmica de comportamento dos mercados financeiros.

Tratar de finanças significa, principalmente, tratar de contratos derivativos: contratos cujo valor deriva do valor de algum outro ativo financeiro, chamado de ativo subjacente. Dá-se ênfase, neste trabalho, a um tipo de derivativo em especial: o chamado contrato de opção ou, simplesmente, opção, cujo ativo subjacente é um lote de alguma ação negociada em bolsa.

Uma opção de compra (ou de venda) é um contrato que assegura ao seu detentor o direito, não a obrigação, de comprar (ou vender) um lote de alguma ação específica por um preço determinado, chamado preço de exercício (strike price), doravante denotado por K . Apesar de existirem tratamentos teóricos para os chamados contratos perpétuos, no mundo real as opções têm um tempo de validade, ou seja, só existem em um intervalo de tempo $[0, T]$, em que T é chamado de **Tempo de Maturação**. Opções que só podem ser exercidas no momento T de término do contrato são chamadas **opções européias**. Opções que facultam o exercício a qualquer tempo no conjunto $\{0, \dots, T\}$ são chamadas **opções americanas**. Apesar de existir uma quantidade enorme de outros tipos, o presente trabalho estará focado apenas nessas duas modalidades.

Opções são usadas basicamente como garantias (*hedge*) contra as incertezas do mercado de ações. Opções de compra garantem um preço máximo; opções de venda, um preço mínimo. Secundariamente prestam-se também à especulação.

Um exemplo ilustra o mecanismo de funcionamento de um contrato de opção. Suponha que um lote de ações da Petrobrás esteja sendo negociado a R\$40,00 e que uma opção européia de compra do mesmo lote, com vencimento

em 3 meses, esteja sendo com valor de exercício $K=R\$50,00$. Então, se ao final de três meses o valor de mercado do lote de ações for $R\$45,00$, por exemplo, a opção não é exercida (não faz sentido comprar por $R\$50,00$ o que se pode comprar no mercado a $R\$45,00$) e portanto seu valor final é nulo. Caso o preço de mercado do lote de ações em questão seja $R\$ 60,00$, a opção é exercida e resulta em um lucro de $R\$ 10,00$.

Opções, portanto, representam um direito que, se exercido, pode se transformar em um lucro. Sendo assim, opções têm um preço. A primeira questão que se apresenta é exatamente o estabelecimento desse preço de maneira a não se permitir, a priori, nem um ganho certo e nem uma perda certa, considerando que o resultado do exercício da opção depende da evolução do preço do ativo subjacente (S), que é aleatório. Esse preço é o que se convencionou chamar de **preço de arbitragem** (*arbitrage price*).

Outras questões relacionadas são: Existe alguma estratégia que permita ao vendedor da opção se proteger contra o prejuízo representado pelo eventual exercício da opção? Existe um momento ótimo para o exercício de uma opção americana?

A busca de respostas a essas perguntas resultou na chamada teoria de arbitragem de apreçamento de ativos e constitui a espinha dorsal deste trabalho, qual seja:

- estudar os mecanismos existentes para a determinação do preço de arbitragem de opções, tanto européias como americanas;
- estudar as estratégias de proteção usadas pelos vendedores de opções;
- estudar as conexões existentes entre a teoria estatística de tempo ótimo de parada e o exercício de opções americanas.

O trabalho está voltado e limitado a mercados discretos, ou seja, mercados cujos negócios se dão a intervalos regulares de tempo e cujas ações têm seu preço restrito a conjuntos discretos de valores.

Vale ressaltar que o interesse por opções não é puramente acadêmico. O mercado de derivativos é, hoje, muito maior que o mercado de ações, ou seja, investe-se muito mais dinheiro em opções do que em ações (Bass, 2004). Para se ter uma idéia da importância do problema, basta que se considere que a revista Risk Magazine (12/97) estimou em U\$35 trilhões o volume mundial negociado nesse mercado, em 1996.

2 REFERENCIAL TEÓRICO

A principal ferramenta de análise utilizada neste trabalho é o conceito de função convexa. Sendo assim, é conveniente a revisão de algumas definições e propriedades dessas funções.

2.1 Funções convexas

Um subconjunto A de \mathbb{R}^n é definido como **convexo** se, dados dois pontos quaisquer $x_1, x_2 \in A$, para todo $0 \leq \lambda \leq 1$

$$\lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2 \in A$$

Uma função contínua $f : D \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ é definida como **convexa** se o seu domínio D é um subconjunto convexo de \mathbb{R}^n e, para todo $x_1, x_2 \in D$ e todo $\lambda \in [0, 1]$,

$$f(\lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2) \leq \lambda f(x_1) + (1 - \lambda)f(x_2) \quad (2.1.1)$$

No conjunto dos reais \mathbb{R} , em que estão os domínios das funções convexas de interesse neste trabalho, um subconjunto convexo é um **intervalo**.

O que essas definições dizem é que:

- i) um subconjunto A de \mathbb{R}^n é convexo se, tomando-se dois pontos quaisquer pertencentes a A , o segmento de reta que une esses dois pontos está todo contido em A ;
- ii) uma função contínua $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ é convexa se dados dois pontos quaisquer $(x_1, f(x_1))$ e $(x_2, f(x_2))$ em seu gráfico, o segmento de reta que une esses pontos está todo acima do gráfico da função (Figura 2.1.1).

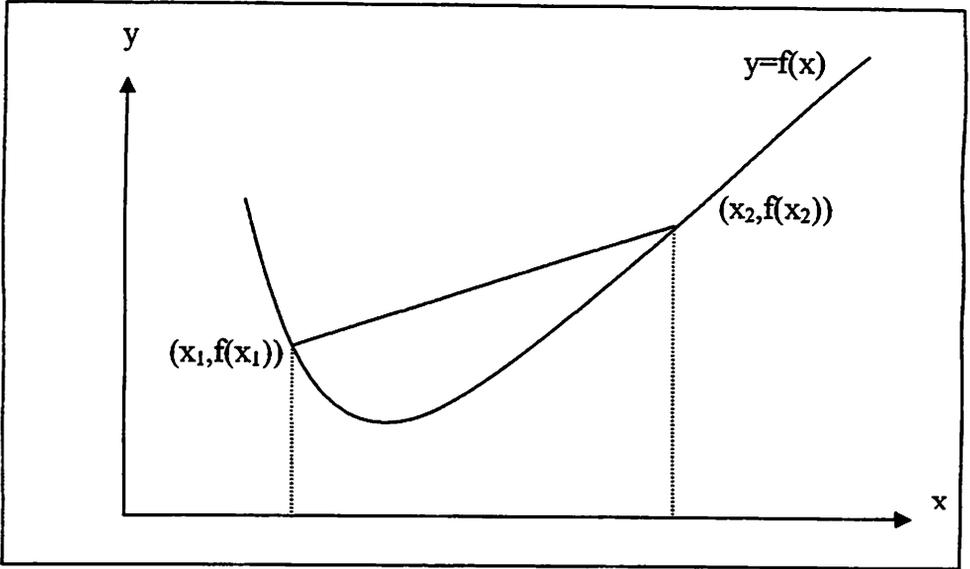


FIGURA 2.1.1 Função convexa

Uma outra definição de função convexa, equivalente à anterior, é dada por: uma função contínua $f : D \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ é definida como convexa se, para todo ponto x_0 pertencente ao seu domínio D , existe uma constante $c(x_0)$, tal que

$$f(x) \geq f(x_0) + c(x_0)(x - x_0) \text{ para todo } x \in D \quad (2.1.2)$$

A interpretação geométrica desta definição é que funções convexas têm **retas suporte** sempre abaixo de seu gráfico (Figura 2.1.2).

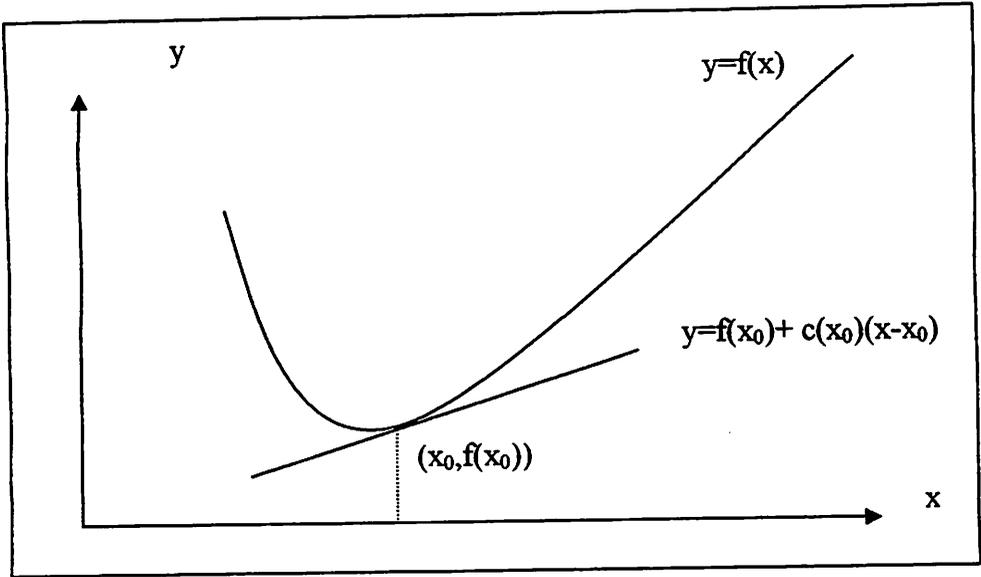


FIGURA 2.1.2 Função convexa, segundo (2.1.2)

Dizer que essas definições são equivalentes é o mesmo que dizer que qualquer uma delas pode ser obtida a partir da outra. Por exemplo, tomando-se a segunda definição e supondo-se, sem perda de generalidade, que x_0 é qualquer ponto no intervalo $[x_1, x_2]$, pode-se escrever

$$x_0 = \lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2 \quad (2.1.3)$$

$$f(x_1) \geq f(x_0) + c(x_0)(x_1 - x_0) \quad (2.1.4)$$

$$f(x_2) \geq f(x_0) + c(x_0)(x_2 - x_0) \quad (2.1.5)$$

Multiplicando-se (2.1.4) por λ , (2.1.5) por $(1 - \lambda)$ e somando-se

$$\begin{aligned} \lambda f(x_1) + (1 - \lambda)f(x_2) &\geq \lambda f(x_0) + (1 - \lambda)f(x_0) + \\ &+ \lambda c(x_0)(x_1 - x_0) + (1 - \lambda)c(x_0)(x_2 - x_0) = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \lambda f(x_0) + f(x_0) - \lambda f(x_0) + \\
&\quad + c(x_0)(\lambda x_1 - \lambda x_0 + x_2 - x_0 - \lambda x_2 + \lambda x_0) = \\
&= f(x_0) + c(x_0)\{\lambda x_1 + x_2 - [\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2] - \lambda x_2\} = \\
&= f(x_0) + c(x_0)\{\lambda x_1 + x_2 - \lambda x_1 - x_2 + \lambda x_2 - \lambda x_2\} = \\
&= f(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2)
\end{aligned}$$

que é a expressão da primeira definição. Também se pode obter a primeira definição a partir da segunda, simplesmente fazendo-se o caminho inverso no desenvolvimento acima.

Um resultado que deve ser provado, em razão de sua utilização no que segue, é que, dadas duas funções $f_1(x)$ e $f_2(x)$, ambas convexas em um intervalo D , a função

$$f(x) = af_1(x) + bf_2(x)$$

com $a > 0$ e $b > 0$, é também convexa.

Prova: Como $f_1(x)$ e $f_2(x)$ são ambas convexas, tomando-se $a > 0$, $b > 0$, $\lambda \in [0,1]$, $x_1 \in D$ e $x_2 \in D$, pode-se escrever

$$af_1(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2) \leq \lambda af_1(x_1) + (1-\lambda)af_1(x_2)$$

$$bf_2(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2) \leq \lambda bf_2(x_1) + (1-\lambda)bf_2(x_2)$$

Somando-se essas expressões

$$af_1(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2) + bf_2(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2) \leq$$

$$\leq \lambda[af_1(x_1) + bf_2(x_1)] + (1-\lambda)[af_1(x_2) + bf_2(x_2)] \Rightarrow$$

$$f(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2) \leq \lambda f(x_1) + (1-\lambda)f(x_2) \quad \square$$

Deve-se ressaltar que o resultado acima vale para $f(x) = \sum a_i f_i(x)$,

desde que $a_i > 0$ e as funções $f_i(x)$ sejam convexas.

Em seguida, são abordados três tópicos: modelo binomial de apreçamento de ativos, fundamentos de probabilidade axiomática e tempo ótimo de parada. As referências para os dois primeiros são: Shreve (2004), Bass (2004), Williams (2002) e Williams (2005). Para o último, Ferguson (2004).

2.2 Descrição do mercado

Considera-se um mercado cujas negociações se dão a intervalos regulares de tempo e onde se negociam três tipos de ativos, descritos a seguir.

Um ativo sem risco, cujo valor B no tempo seguinte é o seu valor atual acrescido de um rendimento pré-determinado, ou seja,

$$B_1 = B_0 + B_0 \cdot r = B_0(1 + r) \Rightarrow B_t = B_0(1 + r)^t \text{ em que } r \geq 0$$

Esses ativos são basicamente o próprio dinheiro, que pode ser aplicado ou tomado a uma taxa fixa, ou títulos públicos, os chamados bonds.

Um ativo de risco, cujo valor S no tempo seguinte é aleatório, ou seja, conhecendo-se S_0 , o valor de S_1 é desconhecido.

Os ativos de risco considerados aqui são lotes de ações (stocks) negociadas em bolsas de valores.

Um ativo derivativo, cujo valor D é função do valor de algum ativo de risco S , chamado ativo subjacente, ou seja,

$$D_1 = f(S_1)$$

Considera-se ainda que nesse mercado compram-se ou vendem-se quantidades ilimitadas e/ou fracionadas de quaisquer dos ativos, as transações não têm custo, compradores e vendedores são tomadores de preço, ou seja, nenhum tem volume suficiente para influenciar o preço praticado e entende-se por comportamento racional dos agentes a busca do melhor resultado possível.

2.3 Modelo binomial de apreçamento dos ativos de risco

Nesse modelo, proposto por Cox et al. (1979), o processo de preço de um ativo de risco (S) se comporta segundo um caminho aleatório multiplicativo, tal que, no tempo $t=0$, o valor S_0 é uma constante estritamente positiva e que, em um tempo t qualquer, o ativo só pode assumir um de dois valores:

$$S_t = \begin{cases} uS_{t-1} & \text{com probabilidade } p \\ dS_{t-1} & \text{com probabilidade } q = 1 - p \end{cases}$$

em que as constantes u e d guardam a relação

$0 < d < 1 + r < u$ e $r \geq 0$ é a taxa de remuneração dos ativos B livres de risco.

A relação acima garante a viabilidade da coexistência dos ativos B e S visto que, se $1 + r$ fosse menor que d , só se negociaria no mercado de risco e, por outro lado, se $1 + r$ fosse maior que u , o mercado de risco se tornaria inviável.

Suponha-se que a ocorrência de u ou d seja governada pelo lançamento de uma moeda, não necessariamente honesta, associando-se ao resultado “cara” (H) a constante u com probabilidade p e, ao resultado “coroa” (T), a constante d com probabilidade $q = 1 - p$. Com isso tem-se

$$S_t(H) = uS_{t-1} \text{ com probabilidade } p$$

$$S_t(T) = dS_{t-1} \text{ com probabilidade } q = 1 - p$$

Graficamente esse comportamento pode ser representado por uma árvore binomial, cuja aparência, considerando-se apenas dois passos, é a seguinte:

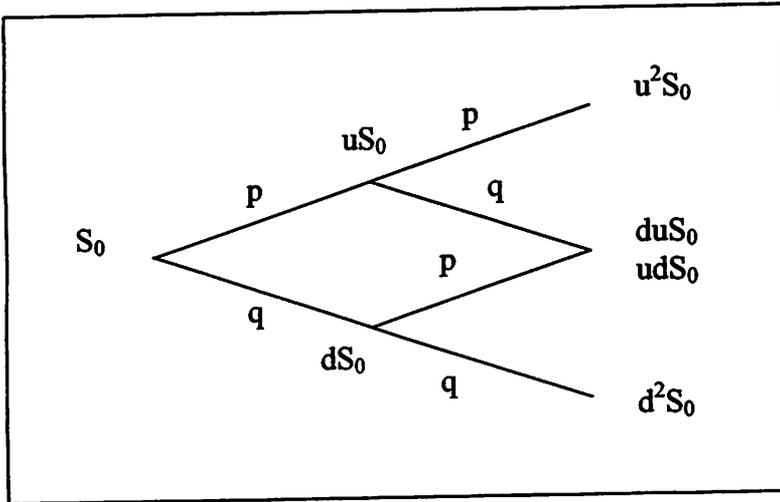


FIGURA 2.3.1 Árvore binomial de dois passos

Note-se que os dois valores centrais de S_2 , duS_0 e udS_0 , são iguais. Só estão mostrados com dois rótulos para ressaltar que se chega até eles por dois caminhos diferentes.

Segundo Shreve (2004) “... certamente o comportamento do preço das ações é muito mais complicado que o modelo binomial. Nós consideramos esse modelo simples por três razões: primeiro porque nesse modelo o conceito de preço de arbitragem e sua relação com o preço neutro ao risco ficam claros; segundo, o modelo é usado na prática porque, com um número suficiente de passos, fornece uma boa e computacionalmente tratável aproximação para os modelos contínuos no tempo; e terceiro porque o uso desse modelo permite o desenvolvimento das teorias de esperança condicional e dos martingales, que estão na raiz dos modelos contínuos no tempo.”

Justifica-se então uma revisão dos fundamentos de probabilidade axiomática, necessários ao estabelecimento dos conceitos de esperança condicional, martingales e tempo de parada ótimo.

2.4 Fundamentos de probabilidade axiomática

Tratar de fundamentos de probabilidade axiomática é tratar de fundamentos de teoria da medida. Sobre o assunto Williams (2002) afirma que: “...a teoria da medida, o mais árido dos assuntos quando tratado por si só, torna-se agradavelmente mais viva quando usada em probabilidade, não somente porque então ela é aplicada, mas também porque é imensamente enriquecida.”

2.4.1 Probabilidade Axiomática Básica

Seja Ω um conjunto não vazio. Uma σ -álgebra em Ω é uma coleção (conjunto) Σ de subconjuntos de Ω , com as seguintes propriedades:

- i) $\emptyset \in \Sigma$
- ii) Se $A \in \Sigma$, então o complemento $A^c \in \Sigma$
- iii) Se $A_1, A_2, \dots \in \Sigma$, então $\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k \in \Sigma$

Decorre dessa definição que:

- i) a união finita $\bigcup_{k=1}^n A_k \in \Sigma$, visto que é sempre possível tomar-se

$$A_k = \emptyset \quad \forall k > n$$

- ii) $\bigcap_{k=1}^{\infty} A_k \in \Sigma$ pois, se $A_1, A_2, \dots \in \Sigma$, então $A_1^c, A_2^c, \dots \in \Sigma$ e

$$\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k^c\right)^c = \bigcap_{k=1}^{\infty} A_k \in \Sigma$$

e, tomando-se $A_k = \Omega \quad \forall k > n$,

- iii) a interseção finita $\bigcap_{k=1}^n A_k \in \Sigma$

O par (Ω, Σ) é chamado de **espaço mensurável**. Neste trabalho, Ω é tomado como um conjunto finito de todos os resultados possíveis de um experimento e Σ o conjunto de todos os subconjuntos de Ω . Acrescentando-se a esse espaço uma medida de probabilidade P , isto é, uma aplicação de Σ no intervalo $[0,1]$ com as propriedades

$$i) P[\emptyset] = 0$$

ii) Se $A \in \Sigma$, então $P[A^c] = 1 - P[A]$, em que A^c é o complemento de A em relação a Ω .

iii) Se $A_1, A_2, \dots \in \Sigma$ e $A_i \cap A_j = \emptyset \forall i \neq j$, então

$$P[A_1 \cup A_2 \cup \dots] = P[A_1] + P[A_2] + \dots,$$

fica definido o *espaço probabilístico* (Ω, Σ, P) .

Como exemplo, considerem-se três lançamentos consecutivos de moeda, em que a probabilidade de ocorrência de H é p . O conjunto de todos os resultados possíveis é $\Omega = \{HHH, HHT, HTH, HTT, THH, THT, TTH, TTT\}$; a σ -álgebra Σ é dada por $\Sigma = \{\emptyset, \{HHH\}, \{HHT\}, \{HTH\}, \{HTT\}, \{THH\}, \{THT\}, \{TTH\}, \{TTT\}$ e todas as uniões possíveis}; e a medida de probabilidade P é dada por

$$P[\{HHH\}] = p^3 \quad P[\{HHT\}] = p^2 q$$

$$P[\{HTH\}] = p^2 q \quad P[\{HTT\}] = p q^2$$

$$P[\{THH\}] = p^2 q \quad P[\{THT\}] = p q^2$$

$$P[\{TTH\}] = p q^2 \quad P[\{TTT\}] = q^3$$

e, além disso, se $w = w_1 w_2 w_3$ é qualquer elemento de Ω , e $A \in \Sigma$, então

$$P[A] = \sum_{w \in A} P[\{w\}]$$

Por exemplo, tomando-se $A = \{HHH, HHT, HTH, HTT\}$ tem-se

$P[A] = p^3 + 2p^2q + pq^2 = p$, que nada mais é que a probabilidade de se ter H no primeiro lançamento.

Uma seqüência de σ - álgebras \mathcal{G}_i ($i = 0, 1, \dots, n$) é chamada de *filtro* se $\mathcal{G}_0 \subset \mathcal{G}_1 \subset \dots \subset \mathcal{G}_n \subset \Sigma$.

Como exemplo de um filtro, pode-se definir em Ω as σ - álgebras:

$$\Sigma_0 = \{\emptyset, \Omega\}$$

$$\Sigma_1 = \{\emptyset, \Omega, \{HHH, HHT, HTH, HTT\}, \{THH, THT, TTH, TTT\}\}$$

$$\Sigma_2 = \{\emptyset, \Omega, \{HHH, HHT\}, \{HTH, HTT\}, \{THH, THT\}, \{TTH, TTT\}\}$$

todas as uniões possíveis }

Note-se que $\Sigma_0 \subset \Sigma_1 \subset \Sigma_2 \subset \Sigma$.

Uma maneira apropriada de se interpretar uma σ - álgebra é associá-la ao nível de informação que se tem do experimento. No exemplo acima, Σ_1 informa o resultado do primeiro lançamento e Σ_2 informa o resultado do primeiro e do segundo lançamentos.

Uma **variável aleatória** X é uma aplicação de Ω em \mathbb{R} tal que, para todo $k \in \mathbb{R}$, $\{\omega \in \Omega \mid X(\omega) \leq k\} \in \Sigma$, ou seja, a pré-imagem de qualquer intervalo do tipo $(-\infty, k]$ é um elemento de Σ . Observe-se que isto implica em que a pré-imagem de qualquer intervalo em \mathbb{R} , ou de qualquer elemento de \mathbb{R} , pertence a Σ , visto que

$$- \quad \bigcup_{n=1}^{\infty} (-\infty, a - \frac{1}{n}] = (-\infty, a)$$

$$- \quad (a, \infty) = (-\infty, a]^c \quad \text{e} \quad [a, \infty) = (-\infty, a)^c$$

$$- \quad \{a\} = \{(-\infty, a] \cap [a, \infty)\}$$

Qualquer intervalo finito pode ser escrito como complemento de alguma união dos intervalos acima. Por exemplo, se $a < b$,

$$[a, b) = \{(-\infty, a) \cup [b, \infty)\}^c.$$

Mais que isso, implica em que a pré-imagem, sob a variável aleatória X , de uniões ou interseções de intervalos em \mathbb{R} pertence a Σ .

Seja \mathcal{G} uma sub- σ -álgebra de Σ , ou seja, uma σ -álgebra de subconjuntos de Ω , cujos elementos são também elementos de Σ . Uma variável aleatória X é definida como \mathcal{G} -mensurável se a pré-imagem de qualquer intervalo do tipo $(-\infty, k]$ é um elemento de \mathcal{G} . A interseção de todas as σ -álgebras sob as quais X é mensurável é a menor dessas σ -álgebras e é chamada de σ -álgebra induzida em Ω pela variável aleatória X .

O valor esperado $E[X]$ e a variância $Var[X]$ de uma variável aleatória X são definidos como

$$E[X] = \sum_{w \in \Omega} X(w)P[\{w\}] = \sum_{x \in \mathbb{R}} xP[X = x]$$

$$Var(X) = \sum_{w \in \Omega} [X(w) - E(X)]^2 P[\{w\}]$$

Dados dois conjuntos $A \in \Sigma$ e $B \in \Sigma$, define-se a **probabilidade condicional** de A dado B , como

$$P[A | B] = P[A \cap B] / P[B] \quad \text{se } P[B] > 0$$

e $P[A | B]$ não é definido se $P[B] = 0$.

Se o conhecimento de B não altera a probabilidade da ocorrência de A , ou seja, se

$$P[A | B] = P[A]$$

diz-se que A e B são **independentes**. Desta definição decorre que, se A e B são independentes, então

$$P[A \cap B] = P[A]P[B]$$

Sejam X e Y duas variáveis aleatórias definidas em um mesmo espaço probabilístico (Ω, Σ, P) . Sejam \mathcal{G}_X e \mathcal{G}_Y as σ -álgebras induzidas por X e Y . Diz-se então que X e Y são **variáveis aleatórias independentes** se e somente se $\forall A \in \mathcal{G}_X$ e $\forall B \in \mathcal{G}_Y$, A e B forem independentes.

2.4.2 Esperança Condicional

Suponha que exista uma quantidade finita (ou enumerável) de conjuntos disjuntos $B_1 \in \Sigma$, $B_2 \in \Sigma, \dots$, todos com probabilidade positiva e cuja união seja Ω . Seja \mathcal{G} a σ -álgebra que se obtém quando se tomam todas as uniões e complementos possíveis desses conjuntos. Os B_i 's são chamados de **átomos** da σ -álgebra \mathcal{G} e é comum a notação $\mathcal{G} = \sigma(B_i)$. Define-se, então, a **probabilidade condicional** de um conjunto $A \in \Sigma$, dado \mathcal{G} , como

$$P[A | \mathcal{G}] = \sum_i \frac{P[A \cap B_i]}{P[B_i]} 1_{B_i}$$

em que a função indicadora 1_{B_i} é definida como

$$1_{B_i}(w) = \begin{cases} 1 & \text{se } w \in B_i \\ 0 & \text{se } w \notin B_i \end{cases}$$

$P[A | \mathcal{G}]$ define, então, uma função de Ω em \mathbb{R} que é constante em cada B_i (nula se $A \cap B_i = \emptyset$ e igual a $P(A | B_i)$, caso contrário). Como $P[A | \mathcal{G}]$ é \mathcal{G} -mensurável, segue que é Σ -mensurável e, conseqüentemente, uma variável aleatória.

Se \mathcal{G} é a σ -álgebra induzida em Ω por alguma variável aleatória Y , então, a probabilidade condicional de A , dado que se conhece Y , isto é, não se conhece w , mas, sabe-se o valor de $Y(w)$, é definida como

$$P(A | Y) = P(A | \mathcal{G}).$$

Exemplo 1: seja (Ω, Σ, P) o espaço probabilístico associado a três lançamentos consecutivos de uma moeda, já definido anteriormente. Considera-se, sem perda de generalidade, uma moeda honesta. Seja A o conjunto dos resultados com, pelo menos, dois H, dado por $A = \{HHH, HHT, HTH, THH\} \in \Sigma$. Quem é, neste caso, $P[A | \mathcal{G}]$, se \mathcal{G} é a σ -álgebra definida pelo conhecimentos dos dois primeiros lançamentos? Os B_i 's são:

$$B_1 = \{TTH, TTT\} \quad B_2 = \{THH, THT\}$$

$$B_3 = \{HTH, HTT\} \quad B_4 = \{HHH, HHT\}$$

Então, dependendo do resultado do lançamento $w = (w_1 w_2 w_3)$,

$P[A | \mathcal{G}]$ é um dos valores abaixo:

$$\text{Se } w \in B_1 \quad P[A | \mathcal{G}](w) = \frac{P[A \cap B_1]}{P[B_1]} = \frac{P[\emptyset]}{P[B_1]} = \frac{0}{1/4} = 0$$

$$\text{Se } w \in B_2 \quad P[A | \mathcal{G}](w) = \frac{P[A \cap B_2]}{P[B_2]} = \frac{P[\{THH\}]}{P[B_2]} = \frac{1/8}{1/4} = \frac{1}{2}$$

$$\text{Se } w \in B_3 \quad P[A | \mathcal{G}](w) = \frac{P[A \cap B_3]}{P[B_3]} = \frac{P[\{HTH\}]}{P[B_3]} = \frac{1/8}{1/4} = \frac{1}{2}$$

Se $w \in B_4$

$$P[A | \mathcal{G}](w) = \frac{P[A \cap B_4]}{P[B_4]} = \frac{P[\{HHH, HHT\}]}{P[B_4]} = \frac{1/4}{1/4} = 1$$

A **esperança condicional** da variável aleatória X , dado que se conhece \mathcal{G} , é uma nova variável aleatória $Y = E[X | \mathcal{G}]$, definida como

$$Y(\omega) = E[X | \mathcal{G}](\omega) = \sum_i \frac{E[X; B_i]}{P(B_i)} 1_{B_i}(\omega) \quad \text{em que}$$

$$E[X; B_i] = \sum_{\omega \in B_i} X(\omega)P[\omega] = E[X1_{B_i}] \quad \text{deve ser vista}$$

como a esperança parcial de X no conjunto B_i . Note-se que se escreveu $P[\omega]$ quando o correto seria $P[\{\omega\}]$. No restante do trabalho, este abuso de notação passa a ser adotado.

A interpretação da esperança condicional é um pouco sutil: suponha-se que um experimento aleatório é realizado, ou seja, um elemento $\omega \in \Omega$ é selecionado. O valor de ω não é revelado, a não ser parcialmente, pela informação de que pertence a algum dos B_i , digamos B_k . Com isso, na impossibilidade de se estabelecer o valor de $X(\omega)$, toma-se a $E[X | B_k]$ como um estimador de $X(\omega)$, que é o mesmo para todo $\omega \in B_k$, ou seja, $Y(\omega) = E(X | \mathcal{G})$ é uma constante, digamos y_k , dada por $y_k = \frac{E[X; B_k]}{P[B_k]}$ para todo $\omega \in B_k$.

Exemplo 2: retomando o espaço probabilístico definido pelos três lançamentos de uma moeda e tomando-se como números binários os elementos de Ω (considerando $T=0$ e $H=1$), seja X a variável aleatória que associa a cada um desses elementos o seu correspondente decimal ($X(TTT) = X(000) = 0, \dots, X(HTT) = X(100) = 4, \dots, X(HHH) = X(111) = 7$). Sejam $\mathcal{H} = \Sigma_1$ e $\mathcal{G} = \Sigma_2$ as σ -álgebras definidas, respectivamente, pelo

primeiro e pelos dois primeiros lançamentos. Os átomos dessas σ -álgebras estão ilustrados na Figura 2.4.2.1.

Os valores das variáveis aleatórias $Y_1 = E(X | \mathcal{H})$ e $Y_2 = E(X | \mathcal{G})$ são:

Se $w \in B_{21}$

$$Y_2(TTT) = Y_2(TTH) = \frac{\sum_{w \in B_{21}} X(w)P(w)}{P[B_{21}]} = \frac{(0+1)(1/8)}{1/4} = \frac{1/8}{1/4} = \frac{1}{2}$$

Se $w \in B_{22}$

$$Y_2(THT) = Y_2(THH) = \frac{\sum_{w \in B_{22}} X(w)P(w)}{P[B_{22}]} = \frac{(2+3)(1/8)}{1/4} = \frac{5/8}{1/4} = \frac{5}{2}$$

Se $w \in B_{23}$

$$Y_2(HTT) = Y_2(HTH) = \frac{\sum_{w \in B_{23}} X(w)P(w)}{P[B_{23}]} = \frac{(4+5)(1/8)}{1/4} = \frac{9/8}{1/4} = \frac{9}{2}$$

Se $w \in B_{24}$

$$Y_2(HHT) = Y_2(HHH) = \frac{\sum_{w \in B_{24}} X(w)P(w)}{P[B_{24}]} = \frac{(6+7)(1/8)}{1/4} = \frac{13/8}{1/4} = \frac{13}{2}$$

Se $w \in B_{11}$

$$\begin{aligned} Y_1(THH) = Y_1(THT) = Y_1(TTH) = Y_1(TTT) &= \frac{\sum_{w \in B_{11}} X(w)P(w)}{P[B_{11}]} = \\ &= \frac{(3+2+1+0)(1/8)}{1/2} = \frac{3/4}{1/2} = \frac{3}{2} \end{aligned}$$

Se $w \in B_{12}$

$$\begin{aligned}
 Y_1(HHH) = Y_1(THT) = Y_1(HTH) = Y_1(HTT) &= \frac{\sum_{w \in B_{12}} X(w)P(w)}{P[B_{12}]} = \\
 &= \frac{(7+6+5+4)(1/8)}{1/2} = \frac{22/8}{1/2} = \frac{11}{2}
 \end{aligned}$$

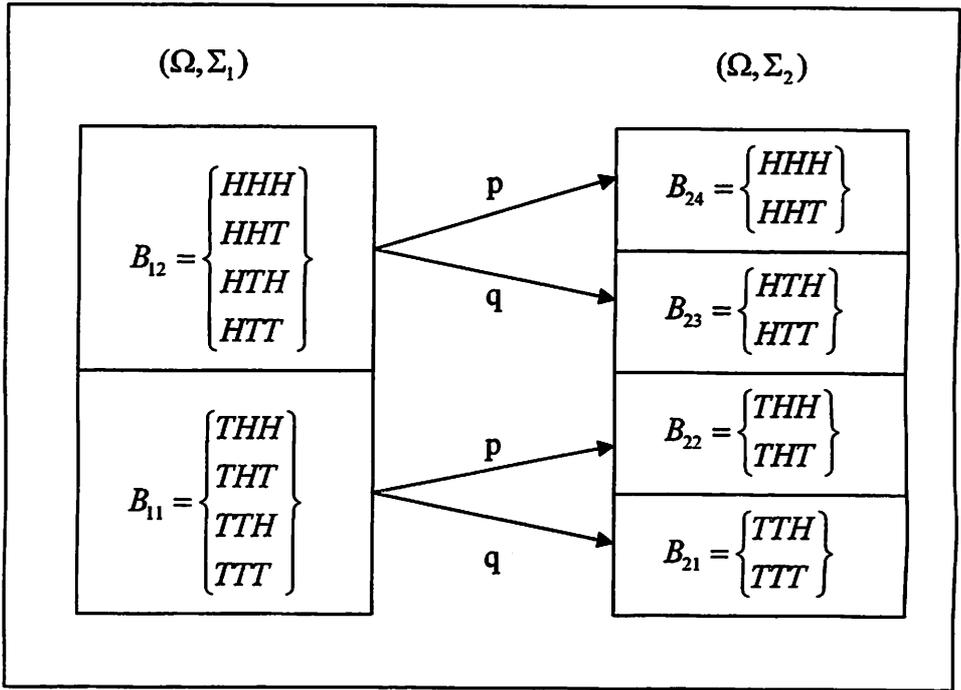


FIGURA 2.4.2.1 Átomos das σ -álgebras $\mathcal{H} = \Sigma_1$ e de $\mathcal{G} = \Sigma_2$ do exemplo 2 à pagina 18

Em seguida, são enumeradas algumas propriedades da esperança condicional que, segundo Bass (2004), “...podem parecer um tanto técnicas. De

fato o são. Contudo, são cruciais para a compreensão do que se segue e não há outra escolha senão dominá-las.”

- 1 - $Y = E[X | \mathcal{G}]$ é \mathcal{G} -mensurável, ou seja, $\{\omega | Y(\omega) \leq k\} \in \mathcal{G}$ para todo $k \in \mathbb{R}$.
- 2 - Se $C \in \mathcal{G}$ e $Y = E(X | \mathcal{G})$, então, $E[Y; C] = E[X; C]$.
- 3 - Se uma variável aleatória Z é \mathcal{G} -mensurável e $E[Z; C] = E[X; C]$ para todo $C \in \mathcal{G}$, então $Z = E(X | \mathcal{G})$.
Em muitos textos, essa propriedade é tomada como uma outra definição de esperança condicional.
- 4 - Se X é \mathcal{G} -mensurável, então, $E[X | \mathcal{G}] = X$, ou seja, $E[X | \mathcal{G}]$ é uma constante em cada B_i .
- 5 - Se $X_1 \geq X_2$, então, $E[X_1 | \mathcal{G}] \geq E[X_2 | \mathcal{G}]$.
- 6 - $E[(a.X_1 + b.X_2) | \mathcal{G}] = a.E[X_1 | \mathcal{G}] + b.E[X_2 | \mathcal{G}]$.
- 7 - $E[E[X | \mathcal{G}]] = E[X]$.
- 8 - Se X é independente de \mathcal{G} , então, $E[X | \mathcal{G}] = E[X]$.
- 9 - Se Z é \mathcal{G} -mensurável, então, $E[XZ | \mathcal{G}] = ZE[X | \mathcal{G}]$.
- 10 - Se $\mathcal{H} \subset \mathcal{G} \subset \Sigma$ então
 $E[E[X | \mathcal{H}] | \mathcal{G}] = E[X | \mathcal{H}] = E[E[X | \mathcal{G}] | \mathcal{H}]$.
Esta propriedade é, em muitos textos, referida como a **propriedade da torre**.
- 11 - Se X é uma variável aleatória, o melhor preditor de X dentre todas as variáveis aleatórias \mathcal{G} -mensuráveis é $Y = E[X | \mathcal{G}]$.

As demonstrações para as propriedades anteriores estão no apêndice A. Como a propriedade 10 é muito usada, especialmente a segunda igualdade, é conveniente exemplificá-la. No exemplo 1 anterior foram calculados $Y_1 = E[X | \mathcal{H}]$ e $Y_2 = E[X | \mathcal{G}]$. Com isso, mostrar que $E[X | \mathcal{H}] = E[E[X | \mathcal{G}] | \mathcal{H}]$ é mostrar que $E[X | \mathcal{H}] = E[Y_2 | \mathcal{H}]$.

Se $w \in B_{11}$

$$E[Y_2 | \mathcal{H}](w) = \frac{\sum_{w \in B_{11}} Y_2(w)P(w)}{P[B_{11}]} = \frac{(\frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{5}{2} + \frac{5}{2})\frac{1}{8}}{\frac{1}{2}} = \frac{3}{2} = E[X | \mathcal{H}](w)$$

Se $w \in B_{12}$

$$E[Y_2 | \mathcal{H}](w) = \frac{\sum_{w \in B_{12}} Y_2(w)P(w)}{P[B_{12}]} = \frac{(\frac{13}{2} + \frac{13}{2} + \frac{9}{2} + \frac{9}{2})\frac{1}{8}}{\frac{1}{2}} = \frac{11}{2} = E[X | \mathcal{H}](w)$$

□

2.4.3 Martingales

Seja um filtro $\mathcal{G}_0 \subset \mathcal{G}_1 \subset \dots \mathcal{G}_k \subset \dots \subset \Sigma$. Um **martingale** é uma seqüência de variáveis aleatórias M_n (um processo estocástico) com as seguintes propriedades:

- 1 - M_n é integrável para todo n , isto é, $E[|M_n|] < \infty$
- 2 - M_n é \mathcal{G}_n -mensurável para todo n , isto é, M_n é adaptada ao filtro.
- 3 - Para todo n , $E[M_{n+1} | \mathcal{G}_n] = M_n$

Aplicando-se a propriedade 7 da esperança condicional tem-se, ainda, que

$$E[M_n] = E[E[M_{n+1} | \mathcal{G}_n]] = E[M_{n+1}]$$

e, portanto,

$$E[M_0] = E[M_1] = E[M_2] = \dots = E[M_n] = \dots \quad (2.4.3.1)$$

Martingales tendem a permanecer estáveis. Caso a terceira propriedade acima seja substituída por $E[M_{n+1} | \mathcal{G}_n] \leq M_n$ tem-se um supermartingale, que tende a decrescer. Caso $E[M_{n+1} | \mathcal{G}_n] \geq M_n$ tem-se um submartingale, que tende a crescer.

Martingales são onipresenças em matemática financeira. Shreve (2004) cita o exemplo seguinte, extraído do modelo binomial. Nesse modelo,

$$S_t = \begin{cases} u.S_{t-1} & \text{com probabilidade } p \\ d.S_{t-1} & \text{com probabilidade } q = 1 - p \end{cases}$$

e, portanto, se o filtro for construído de maneira que cada \mathcal{G}_k ($k = 0, 1, \dots, n$) é a σ -álgebra determinada pelos k primeiros lançamentos, com notação $\mathcal{G}_k = \sigma(w_1 \dots w_k)$, segue que

$$E[S_{t+1} | \mathcal{G}_t] = uS_t P[S_{t+1} = uS_t] + dS_t P[S_{t+1} = dS_t] = (pu + qd)S_t,$$

A primeira igualdade acima se fundamenta no fato de que conhecer \mathcal{G}_t é o mesmo que saber em que átomo de \mathcal{G}_t está w e, como S_t é \mathcal{G}_t -mensurável (constante em cada átomo de \mathcal{G}_t), é o mesmo que conhecer S_t .

Como a primeira propriedade é facilmente verificável e S_t é adaptado ao filtro por construção, segue que

se $(pu + qd) = 1$, S_t é um martingale;

se $(pu + qd) > 1$, S_t é um submartingale e

se $(pu + qd) < 1$, S_t é um supermartingale.

A Figura 2.3.3.1 mostra os valores de S_1 e S_2 , constantes em cada um dos átomos (B_i 's) das sub- σ -álgebras Σ_1 e Σ_2 , para o caso de três lançamentos consecutivos de uma moeda.

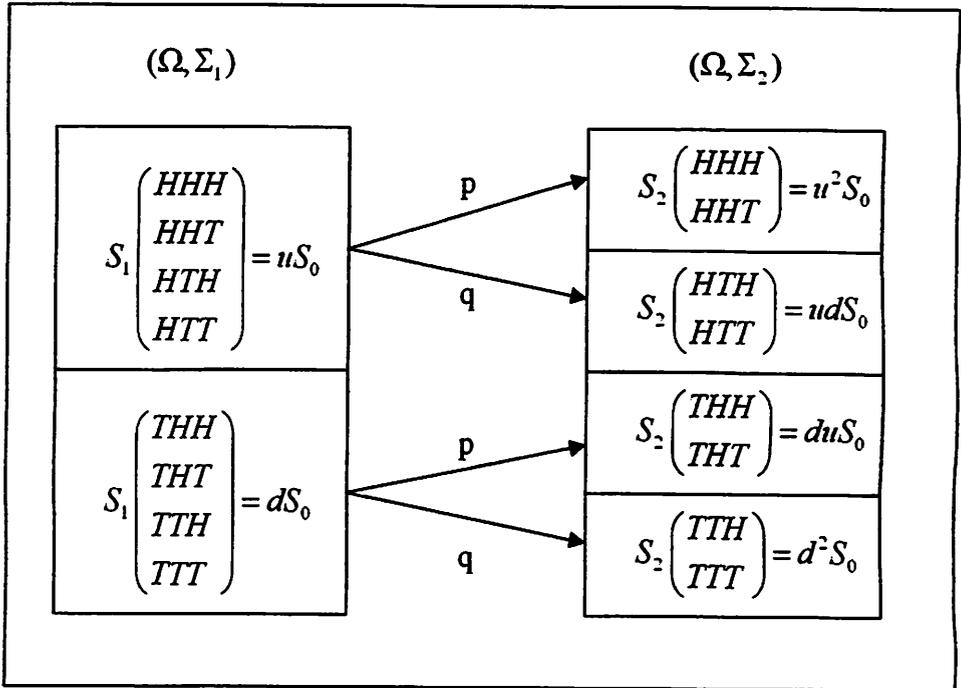


FIGURA 2.4.3.1 Valores de S_1 em Σ_1 e de S_2 em Σ_2 , para uma ação com valor inicial S_0 em árvore binomial de três passos

Algumas propriedades importantes dos martingales são (Bass, 2004):

- 1) Se M_n é um martingale, então, para $k < T$,

$$E[M_T | \mathcal{G}_k] = M_k$$

Prova: para $k = T - 1$

$$E[M_T | \mathcal{G}_{T-1}] = M_{T-1}$$

segue diretamente da definição de martingale. Para $k = T - 2$, aplicando-se a propriedade da torre,

$$\begin{aligned} E[M_T | \mathcal{G}_{T-2}] &= E[E[M_T | \mathcal{G}_{T-1}] | \mathcal{G}_{T-2}] = \\ &= E[M_{T-1} | \mathcal{G}_{T-2}] = M_{T-2} \end{aligned}$$

Para $k = T - 3, T - 4, \dots$, o padrão se mantém e demonstra a propriedade.

2 - Se M_n é um martingale e $g(\cdot)$ uma função convexa, então, $g(M_n)$ é um submartingale (supondo que todas as esperanças envolvidas existam).

Prova: Uma função $g(\cdot)$ é dita convexa se o seu gráfico se localiza acima de qualquer de suas tangentes, ou, melhor dizendo, se para todo x_0 existe $c(x_0)$ tal que

$$g(x) \geq g(x_0) + c(x_0) \cdot (x - x_0)$$

Fazendo-se $x = X(w)$, $x_0 = E[X | \mathcal{G}](w)$ e tomando-se a esperança condicional, dado \mathcal{G} , tem-se

$$\begin{aligned} g(X) &\geq g(E[X | \mathcal{G}]) + c(E[X | \mathcal{G}]) \cdot (X - E[X | \mathcal{G}]) \\ E[g(X) | \mathcal{G}] &\geq E[g(E[X | \mathcal{G}]) + \\ &\quad + c(E[X | \mathcal{G}]) \cdot (X - E[X | \mathcal{G}]) | \mathcal{G}] \end{aligned}$$

Como $g(E[X | \mathcal{G}])$ é \mathcal{G} -mensurável, aplicando-se a propriedade 4 da esperança condicional (pag. 16), a segunda parcela da direita se anula, resultando na desigualdade conhecida como desigualdade de

Jensen:

$$\begin{aligned}
 E[g(X) | \mathcal{G}] &\geq E[g(E[X | \mathcal{G}]) | \mathcal{G}] + \\
 &\quad + E[c(E[X | \mathcal{G}]) (X - E[X | \mathcal{G}]) | \mathcal{G}] = \\
 &= g(E[X | \mathcal{G}]) + c(E[X | \mathcal{G}]) E[X | \mathcal{G}] - \\
 &\quad - E[X | \mathcal{G}] E[X | \mathcal{G}] \\
 E[g(X) | \mathcal{G}] &\geq g(E[X | \mathcal{G}])
 \end{aligned}$$

que aplicada em um martingale M_n resulta na propriedade (2).

$$E[g(M_{n+1}) | \mathcal{G}_n] \geq g(E[M_{n+1} | \mathcal{G}_n]) = g(M_n)$$

Como esta propriedade é fundamental no tratamento de opções americanas, é conveniente ressaltar o seu significado: a aplicação de uma função convexa $g(\cdot)$ a um martingale (uma seqüência de variáveis aleatórias M_n que tendem a permanecer estáveis, ou seja, $E[M_{n+1} | \mathcal{G}] = M_n$) resulta em uma outra seqüência de variáveis aleatórias que tendem a crescer ($E[g(M_{n+1}) | \mathcal{G}_n] \geq g(M_n)$).

- 3 - Se K é inteiro positivo, N um tempo de parada (uma aplicação de Ω nos inteiros não negativos, tal que $\{\omega | N(\omega) = i\} \in \mathcal{G}_i$) limitado em K , ou seja, $N \leq K$, e M_n um martingale, então

$$E[M_N] = E[M_K].$$

Esta propriedade é conhecida como Teorema da Parada Opcional de Doob e se aplica também para submartingales. Decorre dessa propriedade que, se M_n é um martingale, a igualdade

$$E[M_0] = E[M_1] = E[M_2] = \dots = E[M_n] = \dots$$

estabelecida em (2.4.3.1), página 17, se mantém quando os tempos fixos n são substituídos por tempos de parada N .

Prova: Primeiro é preciso ter bem claro que M_N significa tomar, primeiro, o valor de $N(w)$ e, depois, o valor de M para esse valor de N , ou seja,

$$M_N(w) = M_{N(w)}(w)$$

Sendo assim

$$E[M_N] = \sum_{k=0}^K E[M_N; N = k]$$

Se for mostrado que a k -ésima parcela da soma acima é igual a

$$E[M_K; N = k],$$

então, a propriedade fica demonstrada, visto que, nesse caso

$$E[M_N] = \sum_{k=0}^K E[M_N; N = k] = \sum_{k=0}^K E[M_K; N = k] = E[M_K]$$

Pela definição de M_N

$$E[M_N; N = k] = E[M_k; N = k]$$

Já foi visto (2.4.3.1 – pág. 23) que

$$E[M_0] = E[M_1] = E[M_2] = \dots = E[M_n] = \dots$$

Como $E[M_k; N = k]$ é \mathcal{G}_k -mensurável e como $\mathcal{G}_k \subset \mathcal{G}_{k+1} \subset \dots \subset \mathcal{G}_K$, segue que $E[M_j; N = k] = E[M_K; N = k]$ para todo $j = k, k+1, \dots, K$.

Juntando isto com (2.4.3.1) pode-se, então, escrever

$$E[M_k; N = k] = E[M_{k+1}; N = k] = \dots = E[M_K; N = k]$$

que é o que se queria mostrar.

2.5 Tempo de parada ótimo

O conceito de tempo de parada, já utilizado na propriedade 3 dos martingales, é revisto aqui de forma um pouco mais formal. Seja um espaço mensurável (Ω, Σ) e um filtro

$$\{\mathcal{G}_k\} = \{\mathcal{G}_0, \mathcal{G}_1, \dots, \mathcal{G}_j, \dots \mid \mathcal{G}_0 \subset \mathcal{G}_1 \subset \mathcal{G}_2 \subset \dots \subset \mathcal{G}_j \subset \dots \subset \Sigma\}.$$

Uma aplicação T de Ω nos inteiros não negativos $\{0, 1, 2, \dots\}$ tal que $\{w \mid N(w) = j\} \in \mathcal{G}_j$ é, por definição, um **tempo de parada**.

Segundo Ferguson (2004) “*A teoria do tempo de parada ótimo trata do problema da escolha do melhor momento de se executar uma determinada ação, baseado na observação seqüencial de uma variável aleatória, com o intuito de maximizar o valor esperado de uma remuneração ou minimizar o valor esperado de um custo.*”

Mais explicitamente, o problema se coloca da seguinte maneira: observa-se uma seqüência de variáveis aleatórias X_1, X_2, \dots de distribuição conjunta conhecida e, a cada momento j , pode-se escolher entre parar e receber a recompensa (ou pagar o custo) $y_j(X_1, X_2, \dots, X_j)$ ou continuar e observar X_{j+1} . Há, então, a necessidade de se estabelecerem critérios objetivos para essa escolha, baseados na comparação entre a recompensa disponível $y_j(x_1, x_2, \dots, x_j)$ e o que se espera como resultado de uma observação adicional, $E[y_{j+1}(x_1, x_2, \dots, x_j, X_{j+1})]$. Se existe um limite máximo, T por exemplo, para o número de observações, o problema é chamado de **problema de horizonte finito**. Nesse caso, é teoricamente possível encontrar uma solução por meio de uma **indução reversa**: estabelece-se uma regra ótima para o tempo $T-1$, em seguida para o tempo $T-2$ e, sucessivamente, até o tempo inicial.

Quando se tem em mãos uma opção americana e, conseqüentemente, o problema da escolha do melhor momento para o seu exercício, tem-se um problema típico de otimização do tempo de parada em que a seqüência de variáveis aleatórias observadas é o valor da ação subjacente S_j , de horizonte finito $k = 0, 1, 2, \dots, T$, com comportamento binomial, dado pela distribuição de probabilidade $(P[S_{j+1}(H) = uS_j] = p = 1 - P[S_{j+1}(T) = dS_j] = 1 - q)$, e a remuneração é o valor resultante do exercício da opção, caso se decida exercê-la, dado por $V_j = (S_j - K)^+ = \max\{0, (S_j - K)\}$, caso a opção seja de compra, e por $V_j = (K - S_j)^+ = \max\{0, (K - S_j)\}$ se a opção é de venda.

2.6 Modelo binomial de um passo

Voltando ao modelo binomial, é interessante, a título de facilitar a compreensão, estabelecer inicialmente o valor de uma opção do tipo européia considerando um modelo de um único passo, em que a maturação se dá no tempo seguinte. Em seguida generaliza-se para um modelo de n passos.

2.6.1 Preço de opção européia de compra no modelo binomial de um passo

Suponha-se que, no momento $t_0 = 0$, uma determinada ação esteja sendo negociada pelo valor S_0 e que uma opção européia de compra dessa mesma ação, com tempo de maturação $T = t_1 = 1$ e preço de exercício K , seja negociada por V_0 . Sabe-se que, no tempo seguinte, essa opção valerá

$$V_1 = (S_1 - K)^+ = \max\{0, (S_1 - K)\} \quad (2.6.1.1)$$

Pode-se, por outro lado, optar por aplicar o valor V_0 , parte em ações, digamos $\Delta_0 S_0$, e o restante, $V_0 - \Delta_0 S_0$, à taxa fixa r . O valor Δ_0 representa a quantidade de ações (ou de lotes de ações, já que ações normalmente são negociadas em lotes), um número não necessariamente inteiro, a ser comprada no tempo $t=0$ e mantido até $t=1$. Caso $\Delta_0 S_0$ seja maior que V_0 , o valor $V_0 - \Delta_0 S_0$ é negativo e representa, na realidade, um valor a ser tomado no mercado e não um valor aplicado. Chamando do X o portfólio assim constituído, seu valor no tempo $t=0$ é

$$X_0 = \Delta_0 S_0 + (V_0 - \Delta_0 S_0) = V_0$$

No tempo seguinte, o valor desse patrimônio será dado pela soma do valor das ações, $\Delta_0 S_1$, mais o valor atualizado da aplicação em dinheiro, $(1+r)(V_0 - \Delta_0 S_0)$, ou seja,

$$X_1 = \Delta_0 S_1 + (1+r)(V_0 - \Delta_0 S_0)$$

Partindo-se, pois, de um mesmo valor V_0 , o mercado considerado permite duas aplicações diferentes, com valores finais V_1 e X_1 . O que se argumenta é que a única hipótese de convivência desses ativos é existirem V_0 e Δ_0 tais que V_1 seja igual a X_1 , pois, caso contrário, todos os investimentos se concentrariam naquela aplicação de maior resultado. Deve-se então determinar V_0 e Δ_0 , conhecidos u , d e S_0 . Têm-se duas incógnitas e, como as ações se comportam, por hipótese, segundo o modelo binomial, duas equações:

$$\begin{cases} V_1(H) = (uS_0 - K)^+ = X_1(H) = \Delta_0 S_1(H) + (1+r)(V_0 - \Delta_0 S_0) \\ V_1(T) = (dS_0 - K)^+ = X_1(T) = \Delta_0 S_1(T) + (1+r)(V_0 - \Delta_0 S_0) \end{cases}$$

que podem ser reescritas como

$$\begin{cases} V_1(H) = [S_1(H) - (1+r)S_0]\Delta_0 + (1+r)V_0 \\ V_1(T) = [S_1(T) - (1+r)S_0]\Delta_0 + (1+r)V_0 \end{cases}$$

cuja solução é dada por

$$\Delta_0 = \frac{V_1(H) - V_1(T)}{S_1(H) - S_1(T)} \quad e$$

$$V_0 = \frac{1}{1+r} \left[\frac{1+r-d}{u-d} V_1(H) + \frac{u-(1+r)}{u-d} V_1(T) \right]$$

Fazendo-se

$$p^* = \frac{1+r-d}{u-d} \quad e \quad q^* = \frac{u-(1+r)}{u-d} \quad \text{tem-se}$$

$$V_0 = \frac{1}{1+r} [p^* V_1(H) + q^* V_1(T)] \quad (2.6.1.2)$$

Como $p^* + q^* = 1$ e, por hipótese, $0 < d < 1+r < u$ e $r \geq 0$, segue que $p^* > 0$, $q^* > 0$ e p^* e q^* podem ser vistos como uma nova medida de probabilidade, sob a qual o valor adequado para V_0 , chamado de **valor de arbitragem**, é o valor da esperança, tomada sob essa nova medida, da remuneração final da opção, $V_1 = (S_1 - K)^+$, descontada pela taxa r . Usando-se a notação $E^*[\cdot]$ para esta esperança, pode-se então escrever

$$V_0 = E^* \left[\frac{1}{1+r} V_1 \right] = \frac{1}{1+r} E^* [V_1]$$

Caso se tratasse de uma opção européia de venda, todo o desenvolvimento acima continuaria válido, com a única diferença de que o valor da remuneração final da opção passaria a ser dado por $V_1 = (K - S_1)^+$.

Vale ressaltar, antes de um exemplo, o significado dos resultados acima: a existência de Δ_0 garante, ao vendedor da opção, compor, partindo do valor

V_0 , um portfólio (uma carteira composta de lotes da ação subjacente e de aplicações no mercado certo), capaz de reproduzir o valor de exercício da opção. Sendo assim, V_0 é o valor justo para a venda da opção no tempo inicial.

Exemplo 3: Sejam os multiplicadores da árvore binomial dados por $u = 1,2$ e $d = 0,9$, o valor atual da ação subjacente $S_0 = 100$ e a taxa de remuneração fixa $r = 0,08$. No tempo seguinte essa ação pode assumir dois valores

$$S_1(H) = uS_0 = 120 \quad \text{ou}$$

$$S_1(T) = dS_0 = 90$$

Os valores de p^* e q^* são

$$p^* = \frac{1+r-d}{u-d} = \frac{1,08-0,9}{1,2-0,9} = \frac{0,18}{0,3} = 0,6$$

$$q^* = \frac{u-(1+r)}{u-d} = \frac{1,2-1,08}{1,2-0,9} = \frac{0,12}{0,3} = 0,4$$

Considerando o modelo de 1 passo, uma opção de compra dessa ação, com preço de exercício $K = 100$, pode resultar, no tempo seguinte, em dois valores

$$V_1(H) = (uS_0 - K)^+ = (120 - 100)^+ = 20 \quad \text{ou}$$

$$V_1(T) = (dS_0 - K)^+ = (90 - 100)^+ = 0$$

O valor de arbitragem para essa opção será, portanto,

$$\begin{aligned} V_0 &= \frac{1}{1+r} E^*[V_1] = \frac{1}{1+r} [p^* V_1(H) + q^* V_1(T)] = \\ &= \frac{1}{1,08} [0,6(20) + 0,4(0)] = \frac{12}{1,08} = \frac{100}{9} = 11,11 \end{aligned}$$

A quantidade de ações a ser comprada para se estabelecer o *hedging* da opção é dada por

$$\Delta_0 = \frac{V_1(H) - V_1(T)}{S_1(H) - S_1(T)} = \frac{20 - 0}{(1,2 - 0,9)100} = \frac{2}{3} = 0,666$$

e o portfólio de *hedging*, capaz de replicar o valor de exercício da opção, independente de o preço da ação aumentar ou diminuir, é dado por

$$X_0 = \Delta_0 S_0 + (V_0 - \Delta_0 S_0) = \frac{2}{3}100 + \left(\frac{100}{9} - \frac{2}{3}100\right) = \frac{100}{9} = V_0$$

e assumirá, no tempo seguinte, um de dois valores

$$\begin{aligned} X_1(H) &= \Delta_0 S_1(H) + (1+r)(V_0 - \Delta_0 S_0) = \\ &= \frac{2}{3}120 + 1,08\left(\frac{100}{9} - \frac{2}{3}100\right) = 20 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} X_1(T) &= \Delta_0 S_1(T) + (1+r)(V_0 - \Delta_0 S_0) = \\ &= \frac{2}{3}90 + 1,08\left(\frac{100}{9} - \frac{2}{3}100\right) = 0 \end{aligned}$$

reproduzindo, portanto, os resultados possíveis do exercício da opção (Figura 2.6.1.1)

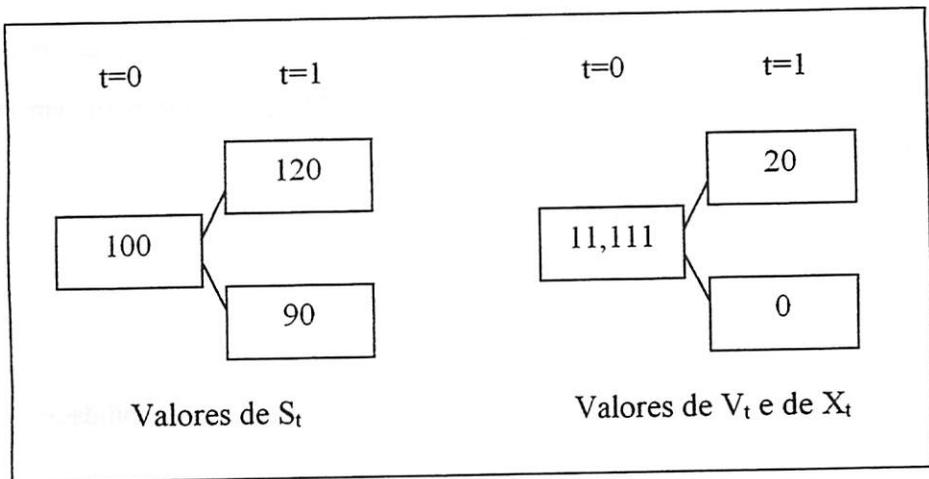


FIGURA 2.6.1.1 Árvores binomiais do exemplo 3 (pag. 32) para $K=100$

O Quadro 1 abaixo reproduz os valores obtidos para preço de exercício $K = 95$ e $K = 110$. Note-se que mudam todos os valores, mas o portfólio de *hedging* continua a reproduzir os resultados possíveis do exercício da opção ($X_1(H) = V_1(H)$ e $X_1(T) = V_1(T)$).

K	$V_1(H)$	$V_1(T)$	V_0	Δ_0	$X_1(H)$	$X_1(T)$
95	25	0	13,889	0,833	25	0
110	10	0	5,556	0,333	10	0

QUADRO 1 – Valores do exemplo 3 (pg 32) para $K = 95$ e $K = 110$

É interessante observar que p^* e q^* , apesar de completamente independentes da probabilidade real de variação do preço da ação, são, na realidade, a medida de probabilidade subjacente que controla o comportamento do preço da opção.

O que se mostrou acima é que é possível replicar exatamente o resultado obtido pela compra de uma opção, aplicando-se o valor V_0 em lotes da ação subjacente e no mercado de rendimento fixo. Mercados que permitem essa réplica são chamados de **mercados completos**.

Observe-se, ainda, que a esperança do valor de uma ação no tempo t_1 , descontado para o tempo t_0 , é dado por

$$E[(1+r)^{-1}S_1] = (1+r)^{-1}(pu + qd)S_0.$$

Considerando a hipótese de que p^* e q^* fossem as probabilidades reais de ocorrência de H e T , então, como

$$up^* + dq^* = u \frac{(1+r) - d}{u - d} + d \frac{u - (1+r)}{u - d} =$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{u(1+r) - ud + du - d(1+r)}{u-d} = \\
&= \frac{u(1+r) - d(1+r)}{u-d} = \\
&= 1+r
\end{aligned}$$

esse valor se reduziria a

$$E^*[(1+r)^{-1}S_1] = (1+r)^{-1}(p^*u + q^*d)S_0 = (1+r)^{-1}(1+r)S_0 = S_0$$

e portanto, um martingale, considerando a σ - álgebra trivial $\mathcal{G}_0 = \{\emptyset, \Omega\}$. No modelo binomial de n passos se constatará que, sob essa mesma hipótese, o valor descontado da ação também é um martingale. Trata-se de um caso especial do **teorema fundamental das finanças**, segundo o qual, em mercados completos, sempre existe uma medida probabilística, não necessariamente aquela observada empiricamente, sob a qual o preço de uma ação é um martingale.

2.7 Modelo binomial de n passos

Quando se considera o modelo binomial com múltiplos passos, em que o tempo t assume valores no conjunto de inteiros $\{0, 1, 2, \dots, T\}$, é conveniente, em razão da freqüência de sua utilização, conceituar precisamente a chamada **medida de probabilidade neutra ao risco ou medida martingale**.

Os elementos do espaço probabilístico (Ω, Σ, P) a ser considerado são: o conjunto Ω de todos os resultados possíveis em n lançamentos consecutivos de uma moeda não necessariamente honesta, representados por n -uplas da forma $w = (w_1, w_2, \dots, w_n)$ em que cada w_i pode assumir os valores H ou T . Sendo assim, cada $w \in \Omega$ pode ser visto como um caminho

possível em uma árvore binomial de n passos; a σ – álgebra Σ é a classe de todos os subconjuntos de Ω e a medida P é definida por

$$P(w_1, w_2, \dots, w_n) = (p)^{\#\{j|w_j=H\}} (q)^{\#\{j|w_j=T\}}$$

em que p é a probabilidade do resultado H em um lançamento da moeda, $q = 1 - p$ é a probabilidade do resultado T e $\#\{j | w_j = H\}$ é a cardinalidade do conjunto $\{j | w_j = H\}$, ou o número de ocorrências de H na n -upla (w_1, w_2, \dots, w_n) .

Tomando-se
$$p^* = \frac{1+r-d}{u-d} \quad \text{e} \quad q^* = \frac{u-(1+r)}{u-d}.$$
 é possível

construir uma nova medida probabilística, chamada **medida neutra ao risco** ou **medida de risco neutro** ou ainda **medida martingale**, dada por

$$P^*(w_1, w_2, \dots, w_n) = (p^*)^{\#\{j|w_j=H\}} (q^*)^{\#\{j|w_j=T\}}.$$

Sob essa medida o operador esperança será denotado por $E^*(\cdot)$, de modo que, por exemplo, o valor inicial de uma opção, no modelo de um passo, é dado por

$$\begin{aligned} V_0 &= (1+r)^{-1} \left[\frac{(1+r)-d}{u-d} V_1(H) + \frac{u-(1+r)}{u-d} V_1(T) \right] = \\ &= (1+r)^{-1} [p^* V_1(H) + q^* V_1(T)] = \\ &= (1+r)^{-1} E^*[V_1] \end{aligned}$$

Justifica-se, assim, o nome **medida de risco neutro**: sob P^* o valor esperado de uma opção se comporta como se fosse remunerado à mesma taxa r dos ativos de remuneração fixa (bonds).

O filtro $\mathcal{G}_0 \subset \mathcal{G}_1 \subset \dots \subset \mathcal{G}_T = \Sigma$ será tal que cada \mathcal{G}_k é a σ -álgebra determinada pelo conhecimento dos resultados dos k lançamentos iniciais, ou seja,

$$\mathcal{G}_k = \sigma(w_1, w_2, \dots, w_k), \quad k = 1, 2, \dots, n \quad \text{e} \quad \mathcal{G}_0 = \{\emptyset, \Omega\}$$

O primeiro resultado a se demonstrar é que, sob P^* , o processo descontado do preço das ações $\{(1+r)^{-k} S_k\}$, $k = 1, 2, \dots, n$, é um martingale, ou seja,

$$\begin{aligned} E^* [(1+r)^{-(k+1)} S_{k+1} | \mathcal{G}_k] &= (1+r)^{-(k+1)} (p^* u + q^* d) S_k \\ &= (1+r)^{-(k+1)} \left(\frac{u(1+r-d)}{u-d} + \frac{d(u-1-r)}{u-d} \right) S_k = \\ &= (1+r)^{-(k+1)} \left(\frac{u+ur-ud+ud-d-dr}{u-d} \right) S_k = \\ &= (1+r)^{-(k+1)} \left(\frac{u(1+r)-d(1+r)}{u-d} \right) S_k = \\ &= (1+r)^{-(k+1)} \left(\frac{(u-d)(1+r)}{u-d} \right) S_k = \\ &= (1+r)^{-(k+1)} (1+r) S_k = \\ &= (1+r)^{-k} S_k \end{aligned}$$

Um outro conceito a ser usado com freqüência será o de **estratégia autofinanciável**. Uma estratégia é um processo $\Delta = (\Delta_0, \Delta_1, \dots, \Delta_k, \dots, \Delta_{n-1})$, onde Δ_k é a quantidade de ações possuídas entre os tempos k e $k+1$ e cada Δ_k é uma variável aleatória \mathcal{G}_k -mensurável, ou seja, o valor de Δ_k é estabelecido conhecendo-se a k -upla (w_1, w_2, \dots, w_k) . Uma estratégia é autofinanciável se, dado um patrimônio inicial X_0 , existe $\Delta = (\Delta_0, \Delta_1, \dots, \Delta_{n-1})$, que permite a montagem de uma carteira autofinanciável cujo valor é dado, recorrentemente, por

$$X_{k+1} = \Delta_k S_{k+1} + (1+r)(X_k - \Delta_k S_k) =$$

$$= \Delta_{k+1} S_{k+1} + (X_{k+1} - \Delta_{k+1} S_{k+1})$$

tal que

$$X_T = V_T.$$

Essa carteira é dita autofinanciável porque, a cada tempo, altera-se a sua composição, isto é, a quantidade de ações e o valor aplicado no mercado certo, sem que, no entanto, se altere o seu montante.

Um outro resultado a ser guardado: X_k é \mathcal{G}_k -mensurável e, mais importante, sob P^* , a evolução do patrimônio, como definido acima, descontado para valor atual pela taxa r , é um martingale, ou seja,

$$\begin{aligned} E^* [(1+r)^{-(k+1)} X_{k+1} | \mathcal{G}_k] &= \\ &= E^* \{ (1+r)^{-(k+1)} [(1+r)X_k + \Delta_k [S_{k+1} - (1+r)S_k]] | \Sigma_k \} = \\ &= E^* [(1+r)^{-(k+1)} (1+r)X_k] + \\ &\quad E^* \{ (1+r)^{-(k+1)} \Delta_k [S_{k+1} - (1+r)S_k] | \Sigma_k \} = \\ &= E^* [(1+r)^{-k} X_k | \Sigma_k] + E^* [(1+r)^{-(k+1)} \Delta_k S_{k+1} | \Sigma_k] + \\ &\quad - E^* [(1+r)^{-k} \Delta_k S_k | \Sigma_k] \end{aligned}$$

Como X_k , S_k e Δ_k são \mathcal{G}_k -mensuráveis

$$\begin{aligned} E^* [(1+r)^{-(k+1)} X_{k+1} | \mathcal{G}_k] &= \\ &= (1+r)^{-k} X_k + \Delta_k E^* [(1+r)^{-(k+1)} S_{k+1} | \Sigma_k] - (1+r)^{-k} \Delta_k S_k = \\ &= (1+r)^{-k} X_k + \Delta_k (1+r)^{-k} S_k - (1+r)^{-k} \Delta_k S_k = \\ &= (1+r)^{-k} X_k \end{aligned}$$

Vistos os conceitos acima, já se pode tratar do problema do estabelecimento do preço justo e da estratégia de *hedging* de opções tanto americanas quanto européias.

2.7.1 Preço e réplica de opções européias no modelo de n passos

Uma opção européia, como descrita na introdução, pode ser vista como uma variável aleatória V_T , \mathcal{G}_T -mensurável, em que T é o tempo de maturação, ou, tempo em que a opção pode ser exercida, K é o preço de exercício e V_T é o resultado do exercício, dado por $V_T = (S_T - K)^+$ caso se trate de opção de compra, ou $V_T = (K - S_T)^+$ em caso de opção de venda. Dizer que V_T é \mathcal{G}_T -mensurável equivale a dizer que o conhecimento de \mathcal{G}_T implica no conhecimento de V_T . Realmente, quem conhece \mathcal{G}_T , conhece $w = (w_1, \dots, w_T)$, com isso conhece S_T e, conseqüentemente, conhece V_T .

Essa opção é dita **replicável** (*hedgeable*) se existe um valor inicial X_0 e uma estratégia $\Delta = (\Delta_0, \Delta_1, \dots, \Delta_{T-1})$, em que cada Δ_k é \mathcal{G}_k -mensurável, tais que o valor do processo autofinanciável X_0, X_1, \dots, X_T definido recursivamente por

$$\begin{aligned} X_{k+1} &= \Delta_k S_{k+1} + (1+r)(X_k - \Delta_k S_k) = \\ &= \Delta_{k+1} S_{k+1} + (X_{k+1} - \Delta_{k+1} S_{k+1}) \end{aligned} \quad (2.7.1.1)$$

em que $k = 0, 1, 2, \dots, T-1$, satisfaz a igualdade

$$X_T(w) = V_T(w), \quad \forall w \in \Omega.$$

Em razão disso o valor justo, chamado de **valor de arbitragem**, para a opção no tempo $t = 0$, é definido por $V_0 = X_0$ e, além disso, V_k , definido como

$$V_k = \frac{1}{(1+r)^{T-k}} E^*[V_T | \mathcal{G}_k]$$

é reproduzido exatamente por X_k , ou seja $V_k = X_k$, e é, por isso, chamado de **valor de arbitragem** da opção nos tempos $t = k$.

Uma característica do modelo binomial é ser **completo**, ou seja, dada uma opção européia V_T , cuja ação subjacente tem valor inicial S_0 , existe um valor inicial $X_0 = V_0 = E^*[(1+r)^{-T} V_T]$ e uma estratégia autofinanciável $\Delta = (\Delta_0, \Delta_1, \dots, \Delta_{T-1})$, em que cada Δ_k é \mathcal{G}_k -mensurável dado por

$$\Delta_k(w_1, \dots, w_k) = \frac{V_{k+1}(w_1, \dots, w_k, H) - V_{k+1}(w_1, \dots, w_k, T)}{S_{k+1}(w_1, \dots, w_k, H) - S_{k+1}(w_1, \dots, w_k, T)} \quad (2.7.1.2)$$

em que V_k é também Σ_k -mensurável dado por

$$V_k = E^*[(1+r)^{-(T-k)} V_T | \mathcal{G}_k], \quad (2.7.1.3)$$

tais que os valores do processo autofinanciável

$$\begin{aligned} X_{k+1} &= \Delta_k S_{k+1} + (1+r)(X_k - \Delta_k S_k) = \\ &= \Delta_{k+1} S_{k+1} + (X_{k+1} - \Delta_{k+1} S_{k+1}) \end{aligned} \quad (2.7.1.4)$$

replicam os valores de V_k , ou seja, $V_k = X_k$.

A expressão (2.7.1.1 – pag. 39) justifica o nome autofinanciável dado ao processo: a primeira igualdade representa o valor do portfólio ao se chegar ao tempo $k+1$, dado pela quantidade de ações possuídas tomadas no seu valor atual, ou seja, $\Delta_k S_{k+1}$, mais o valor aplicado no mercado certo no tempo anterior, corrigido pela remuneração fixa, $(1+r)(X_k - \Delta_k S_k)$. A segunda igualdade mostra a recomposição do patrimônio em uma outra quantidade de ações, Δ_{k+1} , e uma nova aplicação no mercado certo, $(X_{k+1} - \Delta_{k+1} S_{k+1})$. As duas igualdades mostram que o valor total do patrimônio não se altera, só se altera a sua composição. Daí dizer-se que o processo é autofinanciável.

A expressão (2.7.1.2) é simplesmente a transposição de Δ_0 , obtida no modelo de um passo, para um tempo k qualquer pois o que a expressão de Δ_0 diz é que o seu valor é dado pela diferença entre os valores da opção no

tempo seguinte dividida pela diferença dos valores da ação subjacente, também tomados no tempo seguinte.

A expressão (2.7.1.3) dá o valor de arbitragem da opção no tempo $t = k$, dado que se conhece \mathcal{G}_k . Essa expressão pode ser obtida tendo como base o valor de arbitragem do modelo de um passo

$$V_0 = \frac{1}{1+r} [p^* V_1(H) + q^* V_1(T)] = E^* \left[\frac{1}{1+r} V_1 \right].$$

No tempo $T-1$, conhecida a σ -álgebra \mathcal{G}_{T-1} , tudo se passa como no modelo de um passo e, portanto,

$$V_{T-1}(w_1 \dots w_{T-1}) = \frac{1}{1+r} [p^* V_T(w_1 \dots w_{T-1} H) + q^* V_T(w_1 \dots w_{T-1} T)],$$

ou, simplificando a notação,

$$V_{T-1} = \frac{1}{1+r} E^* [V_T | \mathcal{G}_{T-1}].$$

No tempo $T-2$

$$\begin{aligned} V_{T-2} &= \frac{1}{1+r} E^* [V_{T-1} | \mathcal{G}_{T-2}] = \\ &= \frac{1}{1+r} [p^* V_{T-1}(w_1 \dots w_{T-2} H) + q^* V_{T-1}(w_1 \dots w_{T-2} T)] = \\ &= \frac{1}{(1+r)^2} \{ p^* [p^* V_T(w_1 \dots w_{T-2} HH) + q^* V_T(w_1 \dots w_{T-2} HT)] + \\ &\quad + q^* [p^* V_T(w_1 \dots w_{T-2} TH) + q^* V_T(w_1 \dots w_{T-2} TT)] \} = \\ &= \frac{1}{(1+r)^2} [p^* p^* V_T(w_1 \dots w_{T-2} HH) + p^* q^* V_T(w_1 \dots w_{T-2} HT) + \\ &\quad + q^* p^* V_T(w_1 \dots w_{T-2} TH) + q^* q^* V_T(w_1 \dots w_{T-2} TT)] \\ V_{T-2} &= \frac{1}{(1+r)^2} E^* [V_T | \mathcal{G}_{T-2}]. \end{aligned} \tag{2.7.1.5}$$

Caminhando-se reversamente na árvore binomial, esse padrão se mantém e, portanto,

$$V_k = \frac{1}{(1+r)^k} E^*[V_T | \mathcal{G}_k]. \quad (2.7.1.6)$$

A expressão (2.7.1.5) também pode ser obtida pela aplicação da chamada propriedade da torre da esperança condicional:

$$\begin{aligned} V_{T-2} &= \frac{1}{1+r} E^*[V_{T-1} | \mathcal{G}_{T-2}] = \frac{1}{1+r} E^*\left[\frac{1}{1+r} E^*[V_T | \mathcal{G}_{T-1}] | \mathcal{G}_{T-2}\right] = \\ &= \frac{1}{(1+r)^2} E^*[E^*[V_T | \mathcal{G}_{T-1}] | \mathcal{G}_{T-2}] = \frac{1}{(1+r)^2} E^*[V_T | \mathcal{G}_{T-2}] \end{aligned}$$

Resta mostrar que, se $X_T = V_T$, então os valores do portfólio de hedging, X_k , replicam os valores de exercício da opção em qualquer tempo k . Já se mostrou que a seqüência dos valores descontados de X_k , dados por

$$X_0, (1+r)^{-1} X_1, (1+r)^{-2} X_2, \dots, (1+r)^{-T} X_T$$

é um martingale. Sendo assim, aplicando-se a propriedade (1) dos martingales (pag. 25)

$$\begin{aligned} E[M_T | \mathcal{G}_k] &= M_k \\ (1+r)^{-k} X_k &= E^*[(1+r)^{-T} X_T | \mathcal{G}_k] = (1+r)^{-T} E^*[V_T | \mathcal{G}_k] \Rightarrow \\ X_k &= (1+r)^k (1+r)^{-T} E^*[V_T | \mathcal{G}_k] = \\ &= (1+r)^{-(T-k)} E^*[V_T | \mathcal{G}_k] = V_k \end{aligned}$$

o que demonstra que o patrimônio de hedge tem o mesmo valor da opção em todo tempo k , e, mais que isso, que $X_0 = V_0$, ou seja, o valor inicial necessário para se compor o processo de hedge é o valor de arbitragem da opção.

A importância do modelo binomial ser completo está no fato de que, assim sendo, ficam resolvidos os dois problemas básicos da negociação de uma

opção do tipo européia, seja ela de compra ou de venda, a saber: primeiro, fica estabelecido o preço justo para a opção, dado por

$$V_0 = E^*[(1+r)^{-T} V_T], \quad (2.7.1.7)$$

valor que garante a inexistência de oportunidade de arbitragem, ou, em outras palavras, garante a inexistência de oportunidade de intermediação. Segundo, a estratégia $\Delta = (\Delta_0, \Delta_1, \dots, \Delta_{T-1})$ permite ao vendedor da opção se prevenir contra o risco de, caso a opção seja exercida, amargar um prejuízo, visto que, partindo de um patrimônio inicial igual ao valor de arbitragem de venda da opção, V_0 , é possível financiar uma carteira composta de lotes da ação subjacente e de aplicações de remuneração certa que, ao final, reproduz o valor da opção no seu exercício.

Voltando ao valor de arbitragem da opção, um pouco de álgebra permite que se obtenha uma fórmula mais computável. Caso a opção seja de compra, pode-se reescrever

$$\begin{aligned} V_0 &= \frac{1}{(1+r)^T} E^*[(S_T - K)^+] = \\ &= (1+r)^{-T} \sum_{j=0}^T (u^j d^{T-j} S_0 - K)^+ P^*[S_T = u^j d^{T-j} S_0] = \\ &= (1+r)^{-T} \sum_{j=0}^T (u^j d^{T-j} S_0 - K)^+ \binom{T}{j} (p^*)^j (q^*)^{T-j} \end{aligned}$$

Sabendo-se que os valores limites possíveis para o preço da ação subjacente são $d^T S_0$ e $u^T S_0$, não faz sentido considerar valores de K fora desse intervalo. Isso porque não parece razoável que se queira comprar uma ação por um preço superior ao máximo que esta pode alcançar ou vender por um preço inferior ao mínimo. Portanto, considera-se aqui que $K \in (d^T S_0, u^T S_0)$.

Diz-se que uma opção está **no dinheiro** se o resultado de seu exercício é positivo. Portanto, uma opção de compra está no dinheiro se

$$(S_T - K) > 0 \iff S_T > K \iff u^j d^{T-j} S_0 > K \text{ (Figura 2.7.1.1).}$$

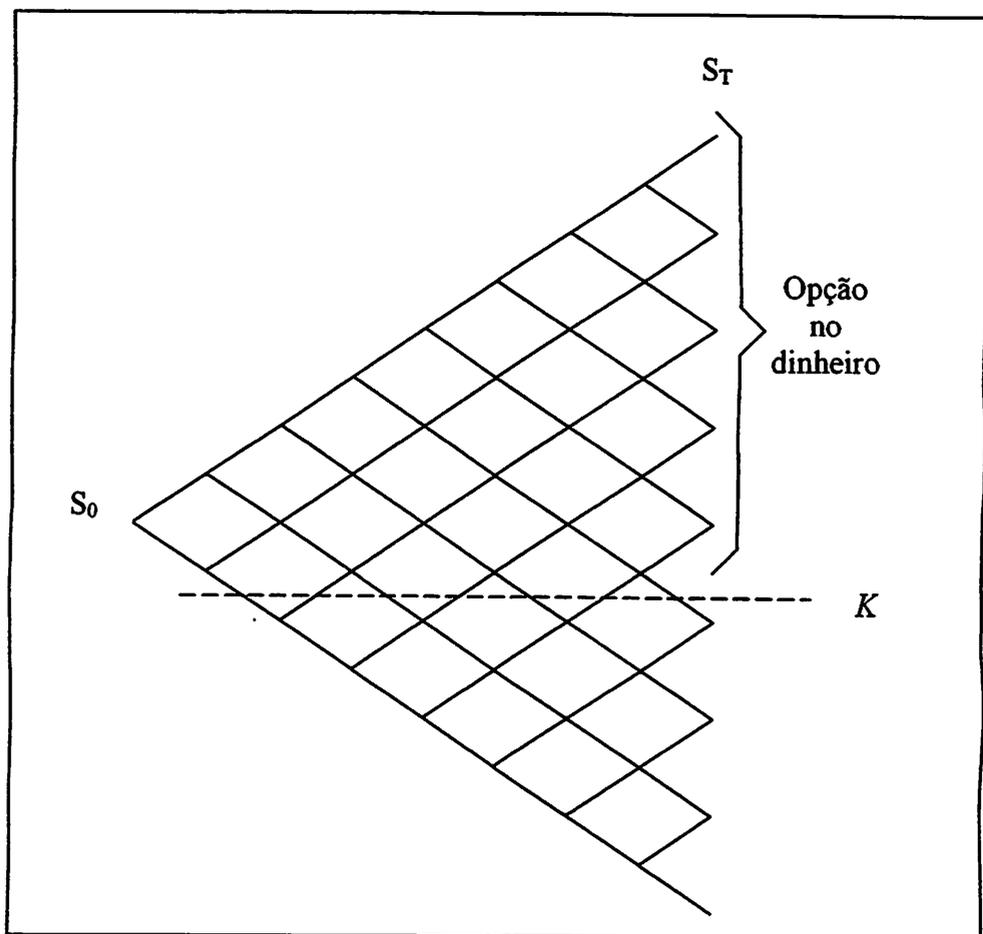


FIGURA 2.7.1.1 $S_T > K =$ Opção (de compra) no dinheiro

Com isso, e tendo-se em mente a árvore binomial dos preços da ação subjacente, existe um número mínimo α de ocorrências de H na T -upla

(w_1, w_2, \dots, w_T) , para que a opção europeia de compra fique no dinheiro, ou seja, existe um inteiro α , tal que

$$\text{para } j < \alpha \Rightarrow (u^j d^{T-j} S_0 - K)^+ = 0 \text{ e}$$

$$\text{para } j \geq \alpha \Rightarrow (u^j d^{T-j} S_0 - K)^+ = u^j d^{T-j} S_0 - K > 0.$$

O valor de α é dado, portanto, pelo menor inteiro positivo tal que

$$u^\alpha d^{T-\alpha} S_0 > K \Rightarrow \left(\frac{u}{d}\right)^\alpha > \frac{K}{d^T S_0} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \alpha > \frac{\text{Ln}\left(\frac{K}{d^T S_0}\right)}{\text{Ln}\left(\frac{u}{d}\right)}$$

O valor de arbitragem da opção pode assim ser reescrito como

$$V_0 = (1+r)^{-T} \sum_{j=\alpha}^T (u^j d^{T-j} S_0 - K) \binom{T}{j} (p^*)^j (q^*)^{T-j}$$

$$V_0 = S_0 (1+r)^{-T} \sum_{j=\alpha}^T \binom{T}{j} u^j d^{T-j} (p^*)^j (q^*)^{T-j} -$$

$$-K (1+r)^{-T} \sum_{j=\alpha}^T \binom{T}{j} (p^*)^j (q^*)^{T-j}$$

$$V_0 = S_0 \sum_{j=\alpha}^T \binom{T}{j} \left(\frac{up^*}{1+r}\right)^j \left(\frac{dq^*}{1+r}\right)^{T-j} -$$

$$-K (1+r)^{-T} \sum_{j=\alpha}^T \binom{T}{j} (p^*)^j (q^*)^{T-j}$$

Fazendo $p' = \frac{up^*}{1+r} > 0$ e $q' = \frac{dq^*}{1+r} > 0$, como $up^* + dq^* = 1+r$,

segue que, $p' + q' = 1$ e representam uma nova medida de probabilidade. O valor de V_0 pode, assim, ser reescrito novamente como:

$$V_0 = S_0 \sum_{j=\alpha}^T \binom{T}{j} (p')^j (q')^{T-j} - K(1+r)^{-T} \sum_{j=\alpha}^T \binom{T}{j} (p^*)^j (q^*)^{T-j}$$

$$V_0 = S_0 Bc [\alpha; T, p'] - K(1+r)^{-T} Bc [\alpha; T, p^*]$$

em que Bc é a distribuição binomial complementar acumulada, definida como: se $Bin(\alpha; n, p)$ é a distribuição binomial acumulada, então,

$$Bc(\alpha; n, p) = 1 - Bin(\alpha - 1; n, p)$$

Caso a opção seja de venda, seu valor de arbitragem também pode ser reescrito como

$$\begin{aligned} V_0 &= (1+r)^{-T} E^*[(K - S_T)^+] = \\ &= (1+r)^{-T} \sum_{j=0}^T (K - u^j d^{T-j} S_0)^+ P^*[(K - u^j d^{T-j} S_0)^+] = \\ &= (1+r)^{-T} \sum_{j=0}^T (K - u^j d^{T-j} S_0)^+ \binom{T}{j} (p^*)^j (q^*)^{T-j} \end{aligned}$$

Como uma opção europeia de venda está no dinheiro se e somente se

$$(K - S_T) > 0 \iff u^j d^{T-j} S_0 < K$$

então, considerando-se o modelo binomial, existe um número máximo α de ocorrências de H na T -upla (w_1, w_2, \dots, w_T) para que a opção fique no dinheiro, ou seja, existe um inteiro não negativo α , tal que

$$\text{para } j > \alpha \implies (K - u^j d^{T-j} S_0)^+ = 0 \text{ e}$$

$$\text{para } j \leq \alpha \implies (u^j d^{T-j} S_0 - K)^+ = K - u^j d^{T-j} S_0 > 0.$$

O valor de α é dado, portanto, pelo maior inteiro não negativo, tal que

$$u^\alpha d^{T-\alpha} S_0 < K \Rightarrow \left(\frac{u}{d}\right)^\alpha < \frac{K}{d^T S_0} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \alpha < \frac{\text{Ln}\left(\frac{K}{d^T S_0}\right)}{\text{Ln}\left(\frac{u}{d}\right)}$$

e o valor de arbitragem da opção de venda pode ser reescrito como

$$V_0 = (1+r)^{-T} \sum_{j=0}^{\alpha} (K - u^j d^{T-j} S_0) \binom{T}{j} (p^*)^j (q^*)^{T-j}$$

e, por um desenvolvimento semelhante ao anterior,

$$V_0 = K(1+r)^{-T} \text{Bin}[\alpha; T, p^*] - S_0 \text{Bin}[\alpha; T, p^*]$$

em que $p' = \frac{up^*}{1+r}$, $q' = \frac{dq^*}{1+r}$ e $\text{Bin}[\alpha; T, p]$ é a distribuição

binomial acumulada, de parâmetros T e p .

Com isso, ficam definidas fórmulas fechadas para o valor de arbitragem de uma opção européia, seja ela de compra ou de venda, e a estratégia de *hedging*, que permite replicar o seu valor de exercício para todos os caminhos possíveis do valor da ação subjacente na árvore binomial.

Exemplo 4: Retomando-se o exemplo 1 ($u=1,2$, $d=0,9$, $S_0=100$, $r=0,08$, $p^*=0,6$ e $q^*=0,4$), considerando um modelo de 2 passos, os valores finais possíveis para a ação subjacente e, respectivamente, para uma opção de compra com valor de exercício $K=100$, são :

$$S_2(TT) = d^2 S_0 = 81$$

$$V_2(TT) = (81 - 100)^+ = 0$$

$$S_2(TH) = S_2(HT) = duS_0 = 108 \quad V_2(TH) = V_2(HT) = 8$$

$$S_2(HH) = u^2S_0 = 144 \quad V_2(HH) = 44$$

Pode-se calcular o valor de V_0 , dados os valores de V_2 , como

$$\begin{aligned} V_0 &= (1+r)^{-2} E^*[V_2] = \\ &= (1,08)^{-2} [(q^*)^2 V_2(TT) + 2(p^*)(q^*) V_2(TH) + \\ &\quad + (p^*)^2 V_2(HH)] = \\ &= (1,08)^{-2} [(0,4)^2(0) + 2(0,6)(0,4)(8) + (0,6)^2(44)] = \\ &= 16,8724 \end{aligned}$$

ou pode-se usar a fórmula fechada

$$V_0 = S_0 Bc [\alpha; T, p] - K(1+r)^{-T} Bc [\alpha; T, p^*] \quad \text{em que}$$

$$\alpha > \frac{\text{Ln}\left(\frac{K}{d^T S_0}\right)}{\text{Ln}\left(\frac{u}{d}\right)} = \frac{-2\text{Ln}(0,9)}{\text{Ln}\left(\frac{1,2}{0,9}\right)} = 0,7325 \Rightarrow$$

$$\alpha = 1$$

$$p' = \frac{up^*}{1+r} = \frac{(1,2)(0,6)}{1,08} = \frac{72}{100} \frac{100}{108} = \frac{2}{3} \quad \text{e} \quad q' = \frac{1}{3}$$

$$\begin{aligned} Bc [\alpha ; T, p] &= Bc [1 ; 2, \frac{2}{3}] = 1 - Bin [0 ; 2, \frac{2}{3}] = \\ &= 1 - \binom{2}{0} \left(\frac{2}{3}\right)^0 \left(\frac{1}{3}\right)^{2-0} = \frac{8}{9} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} Bc [\alpha ; T, p^*] &= Bc [1 ; 2, \frac{3}{5}] = 1 - Bin [0 ; 2, \frac{3}{5}] = \\ &= 1 - \binom{2}{0} \left(\frac{3}{5}\right)^0 \left(\frac{2}{5}\right)^{2-0} = 1 - \frac{4}{25} = \frac{21}{25} \end{aligned}$$

$$V_0 = 100\left(\frac{8}{9}\right) - 100(1,08)^{-2}\left(\frac{21}{25}\right) = 16,8724$$

Para o cálculo de Δ_0 são necessários os valores de $V_1(H)$ e $V_1(T)$ dados por

$$\begin{aligned} V_1(H) &= (1+r)^{-1}[p \cdot V_2(HH) + q \cdot V_2(HT)] = \\ &= (1,08)^{-1}[0,6(44) + 0,4(8)] = 27,4074 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} V_1(T) &= (1+r)^{-1}[p \cdot V_2(TH) + q \cdot V_2(TT)] = \\ &= (1,08)^{-1}[0,6(8) + 0,4(0)] = 4,4444 \end{aligned}$$

$$\Delta_0 = \frac{V_1(H) - V_1(T)}{S_1(H) - S_1(T)} = \frac{27,4074 - 4,4444}{(1,2 - 0,9)100} = 0,7654$$

O portfólio a ser estabelecido:

$$\begin{aligned} X_0 &= \Delta_0 S_0 + (V_0 - \Delta_0 S_0) = \\ &= 0,7654(100) + [16,8724 - 0,7654(100)] = 16,8724 = V_0 \end{aligned}$$

Os valores do portfólio no tempo $t = 1$:

$$\begin{aligned} X_1(H) &= 0,7654(120) + 1,08[16,8724 - 0,7654(100)] = \\ &= 27,4074 = V_1(H) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} X_1(T) &= 0,7654(90) + 1,08[16,8724 - 0,7654(100)] = \\ &= 4,4444 = V_1(T) \end{aligned}$$

As quantidades de ações a serem mantidas entre o primeiro e o segundo passos, dependentes do primeiro passo, são dadas por

$$\Delta_1(H) = \frac{V_2(HH) - V_2(HT)}{S_2(HH) - S_2(HT)} = \frac{44 - 8}{144 - 108} = \frac{36}{36} = 1$$

$$\Delta_1(T) = \frac{V_2(TH) - V_2(TT)}{S_2(TH) - S_2(TT)} = \frac{8 - 0}{108 - 81} = \frac{8}{27}$$

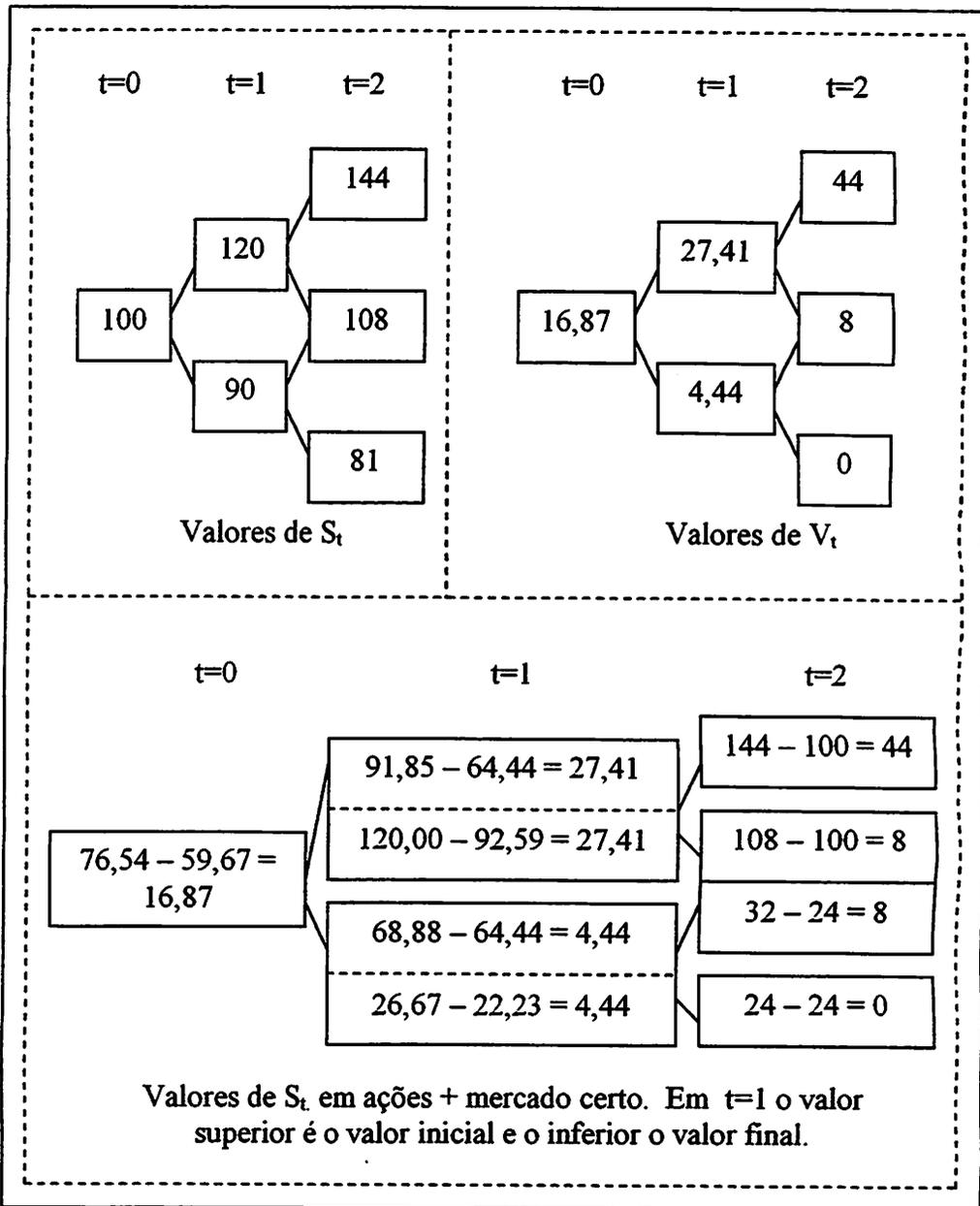


FIGURA 2.7.1.2 Árvore binomiais do exemplo 4 – pag. 47

Os valores do portfólio de *hedging*:

$$\begin{aligned}\Delta_1(H)S_1(H) + [X_1(H) - \Delta_1S_1(H)] &= \\ &= 120 + (27,4074 - 120) = 27,4074 = X_1(H)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\Delta_1(T)S_1(T) + [X_1(T) - \Delta_1S_1(T)] &= \\ &= \frac{8}{27}90 + (4,4444 - \frac{8}{27}90) = 4,4444 = X_1(T)\end{aligned}$$

Os valores desse portfólio no tempo final:

$$X_2(HH) = 144 + (1,08)(27,4074 - 120) = 44$$

$$X_2(HT) = 108 + (1,08)(27,4074 - 120) = 8$$

$$X_2(TH) = \frac{8}{27}108 + 1,08(4,4444 - \frac{8}{27}90) = 8$$

$$X_2(TT) = \frac{8}{27}81 + 1,08(4,4444 - \frac{8}{27}90) = 0$$

Note-se que esses valores, os valores finais do portfólio de *hedging* para cada percurso possível do preço da ação subjacente na árvore binomial, reproduzem exatamente os valores de exercício da opção.

Exemplo 5: No modelo de 5 passos, sejam $u=1,2$, $d=0,9$, $S_0=100$ e $r=0,05$. A árvore binomial dos valores da ação subjacente está representada na Figura 2.7.1.3 e a rotina para cálculo desses valores está no apêndice C.1.

As Figuras 2.7.1.4, 2.7.1.5 e 2.7.1.6 representam, respectivamente, os valores de uma opção europeia de compra dessa ação, os valores do processo de hedge e os valores do portfólio de hedge. Note-se que os valores do portfólio de hedge reproduzem exatamente os valores da opção, em qualquer tempo.

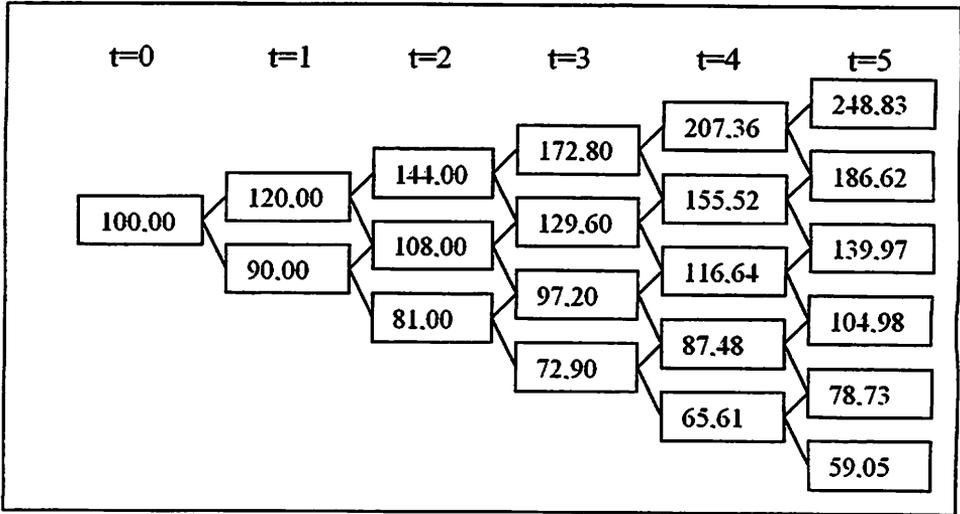


FIGURA 2.7.1.3 Valores da ação subjacente no modelo de 5 passos (Exemplo 5 – pág. 51)

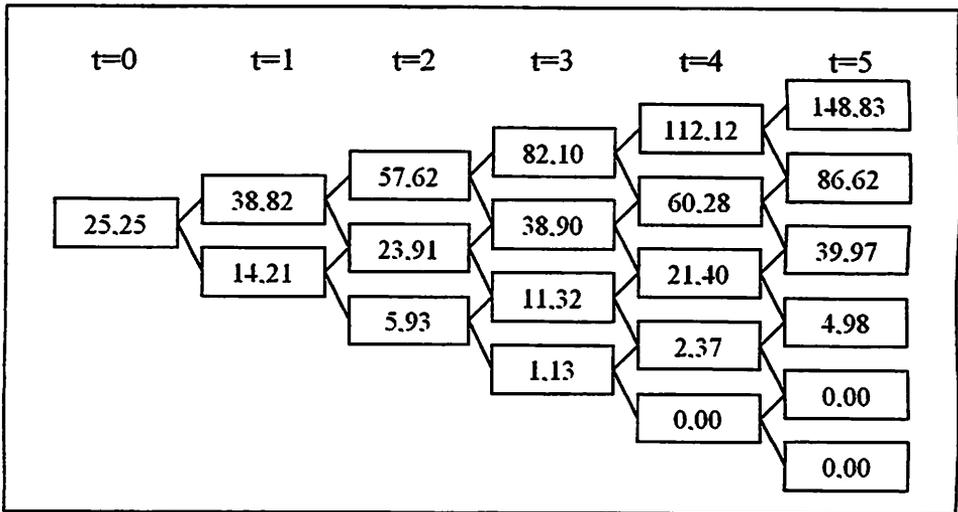


FIGURA 2.7.1.4 Valores de arbitragem da opção europeia de compra no modelo de cinco passos (Exemplo 5 – pág. 51)

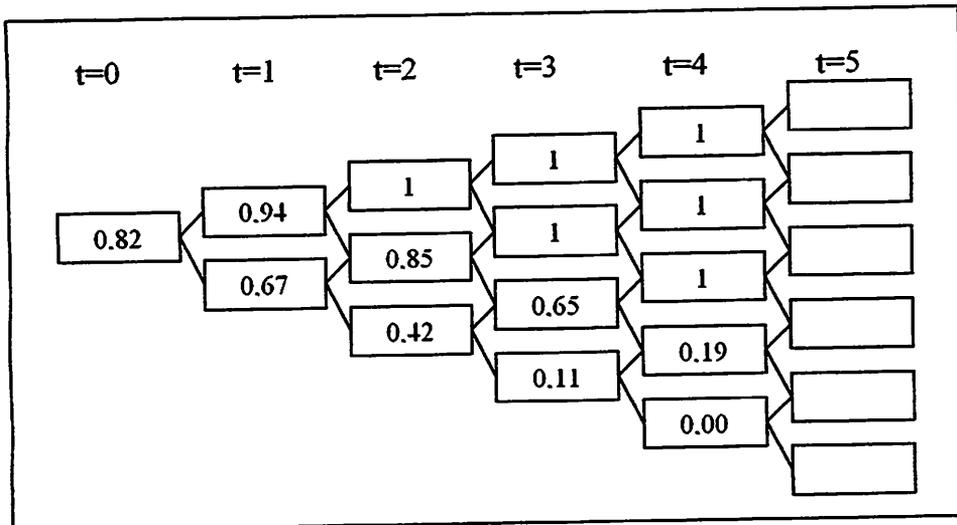


FIGURA 2.7.1.5 - Valores de Δ para opção europeia e compra no modelo de cinco passos (Exemplo 5 – pág. 51)

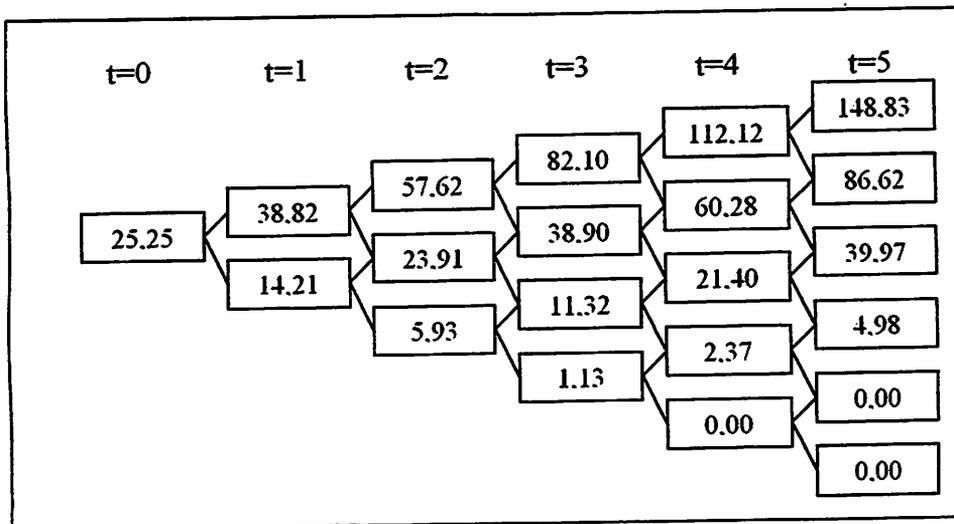


FIGURA 2.7.1.6 - Valores do portfólio de hedge para opção europeia de compra no modelo de cinco passos (Exemplo 5 – pág. 51)

As Figuras 2.7.1.7, 2.7.1.8 e 2.7.1.9 representam, respectivamente, os valores de uma opção europeia de venda dessa ação, os valores do processo de hedge e os valores do portfólio de hedge que, como suposto, reproduzem exatamente os valores da opção.

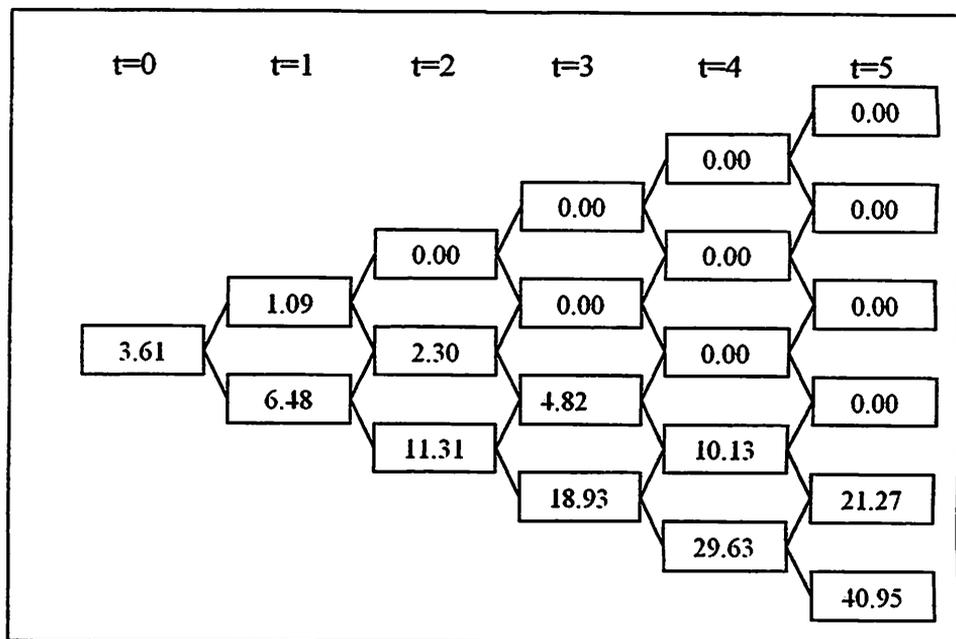


FIGURA 2.7.1.7 Valores da opção europeia de venda no modelo de cinco passos (Exemplo 5 – pág. 51)

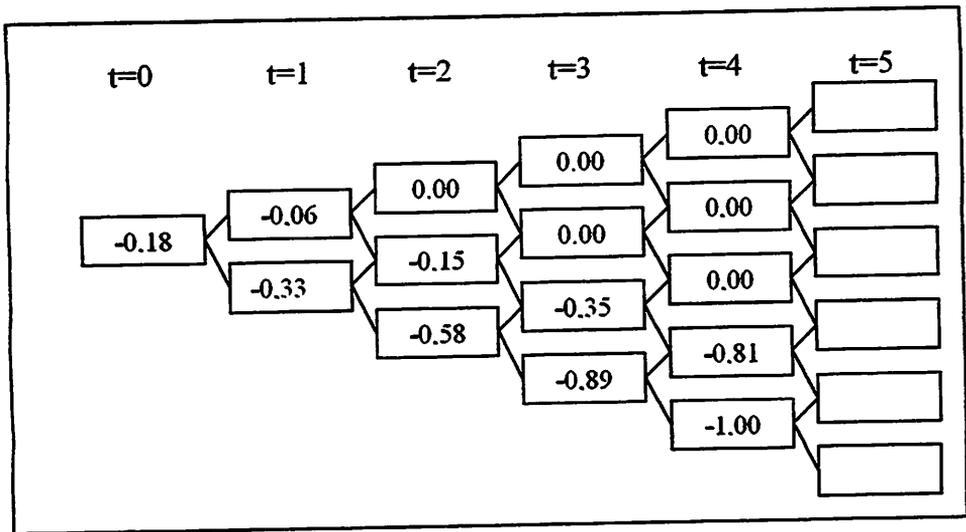


FIGURA 2.8.1.8 Valores de Δ para opção europeia de venda no modelo de cinco passos (Exemplo 5 – pág. 51)

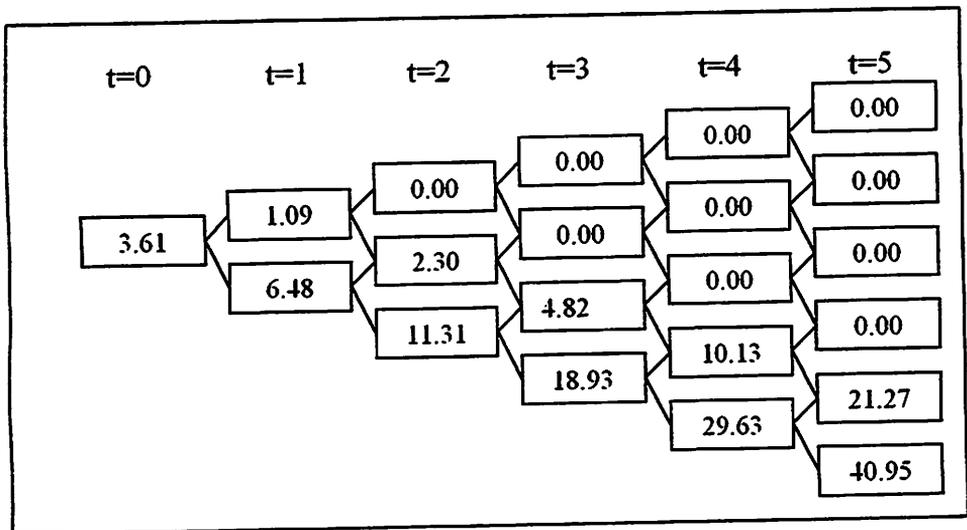


FIGURA 2.7.1.9 Valores do portfólio de hedge para opção europeia de venda no modelo de cinco passos (Exemplo 5 – pág. 51)

Os apêndices C.2 e C.3 trazem as rotinas para cálculo dos valores do exemplo 5, bem como os resultados obtidos quando se tomam os preços de exercício $K=95$ e $K=110$.

2.7.2 Preço e réplica de opções americanas no modelo de n passos

Uma opção americana, à semelhança das opções européias, também pode ser vista como um processo estocástico V_k , \mathcal{G}_k -mensurável, com a diferença de que agora k pode assumir qualquer valor inteiro não negativo menor ou igual a T , em que T é o tempo de maturação da opção. Com isso, tanto o portador (comprador) como o emissor (vendedor) da opção enfrentam situações um pouco diferentes daquelas encontradas quando a opção é do tipo européia. Ao primeiro cabe, agora, escolher, dentre todos os tempos de parada possíveis, aquele que maximiza o seu resultado, ou seja, buscar

$$\max \left\{ V_0, \frac{1}{1+r} E^*[V_1], \frac{1}{(1+r)^2} E^*[V_2], \dots, \frac{1}{(1+r)^T} E^*[V_T] \right\}:$$

ao segundo, cabe estabelecer uma estratégia de *hedge* que lhe permita replicar não somente o valor da opção ao final do seu período de maturação, mas em qualquer tempo de parada. Como isso é impossível, só lhe resta estabelecer um super-hedging, ou seja, cuidar para que o portfólio seja capaz de replicar o maior desses valores e, com isso, o valor inicial necessário é dado por

$$X_0 = \max \left\{ V_0, \frac{1}{1+r} E^*[V_1], \frac{1}{(1+r)^2} E^*[V_2], \dots, \frac{1}{(1+r)^T} E^*[V_T] \right\} \quad (2.7.2.1)$$

em que V_j é o valor de arbitragem da opção, caso seja exercida no tempo $t = j$ e X_0 é o valor inicial do portfólio de hedge.

O valor X_0 acima é, portanto, o valor de arbitragem de uma opção americana. Essa nova situação exige que opções de compra tenham tratamento diferente das opções de venda, como será mostrado em seguida.

2.7.2.1 Preço e tempo ótimo de exercício para uma Opção Americana de compra

O valor de arbitragem de uma opção americana de compra, se exercida em um tempo $0 \leq t \leq T$, é dado por

$$\begin{aligned} V_0 &= (1+r)^{-t} E^* [V_t] = (1+r)^{-t} E^* [(S_t - K)^+] = \\ &= (1+r)^{-t} E^* [g(S_t)] \end{aligned} \quad (2.7.2.1.1)$$

O que se mostra em seguida é que, dentre todos os tempos de parada $\mathcal{T}_{[0,T]}$ possíveis, o tempo ótimo, que maximiza a esperança do valor presente de V_t , é dado por $t = T$.

Seguem duas justificativas para essa afirmação:

Justificativa 1

Suponha-se que em um determinado tempo $t < T$ o valor da ação subjacente seja $S_t > K$ e, portanto, supostamente, o exercício da opção se justifica. Paga-se o valor K e passa-se a possuir uma ação. No tempo T , o valor dessa ação é S_T e o resultado dessa aplicação é $S_T - K$. Ora, o valor da opção no tempo T seria $(S_T - K)^+ \geq S_T - K$ e, portanto, o resultado do exercício antecipado da opção resulta em um valor que, no máximo, é igual ao obtido pelo exercício no tempo final. Verifica-se (e a Figura 2.7.2.1.1 ilustra isso) que, para valores de S_T maiores que K , o exercício antecipado e o exercício ao final têm resultados idênticos e que, para valores de S_T menores, o exercício antecipado leva a um resultado negativo, inferior, portanto, ao exercício ao final cujo resultado é nulo.

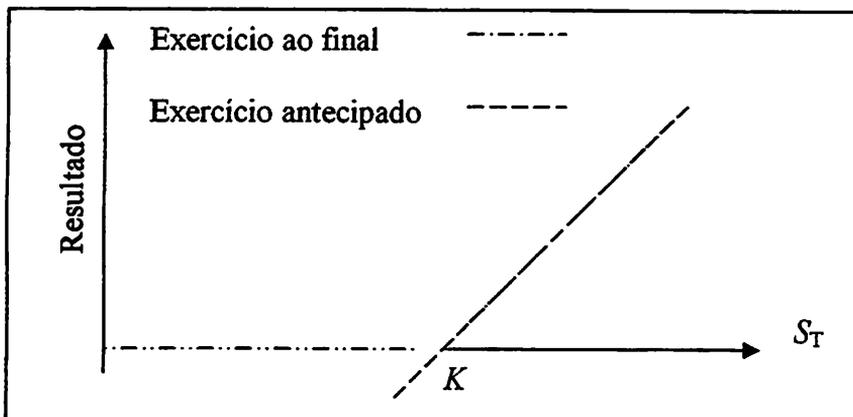


FIGURA 2.7.2.1.1 Comparação entre exercício antecipado e exercício ao final para opção americana de compra

Há ainda uma agravante: caso o valor K seja aplicado à taxa r no momento t o resultado do exercício antecipado se torna estritamente inferior, visto que $S_t - K < (S_t - K)^+ + [(1+r)^{T-t} - 1]K$, conforme se pode verificar na Figura 2.7.2.1.2.

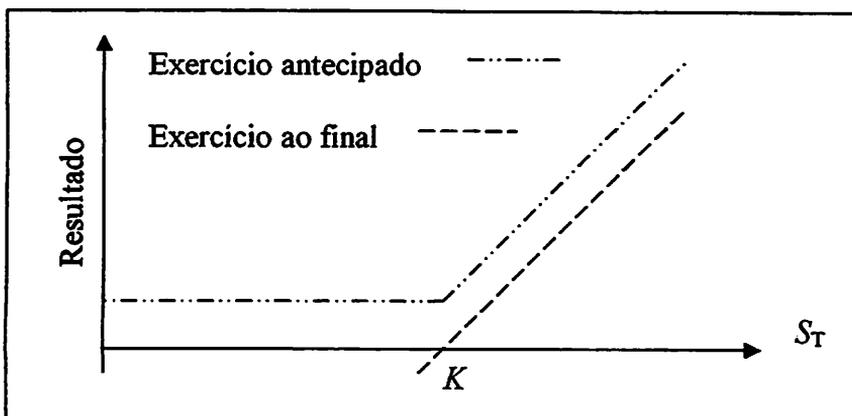


FIGURA 2.7.2.1.2 Comparação entre exercício antecipado e exercício ao final para opção americana de compra, supondo aplicação do valor de exercício.

Justificativa 2

Como o resultado do exercício de uma opção em um tempo t é dado pela função convexa $g(S_t) = (S_t - K)^+$, em que $g(0) = 0$ (atenção para esse fato porque é importante quando se tratar de opção de venda), segue que, para $\lambda \in [0,1]$,

$$g[\lambda x + (1 - \lambda)0] \leq \lambda g(x) + (1 - \lambda)g(0) \Leftrightarrow g(\lambda x) \leq \lambda g(x)$$

Aplicando-se esta propriedade de funções convexas ao valor presente de V_t ,

$$E^*[(1+r)^{-(t+1)}g(S_{t+1}) | \Sigma_t] = (1+r)^{-t} E^*[(1+r)^{-1}g(S_{t+1}) | \Sigma_t]$$

$$\geq (1+r)^{-t} E^*\left[g\left(\frac{1}{1+r}S_{t+1}\right) | \Sigma_t\right]$$

pela desigualdade de Jensen:

$$\geq (1+r)^{-t} g\left(E^*\left[\frac{1}{1+r}S_{t+1} | \Sigma_t\right]\right)$$

$$= (1+r)^{-t} g(S_t).$$

Esse resultado mostra que $(1+r)^{-t}g(S_t)$ é um submartingale. Aplicando-se a propriedade (3) do tempo de parada opcional de Dobb para submartingales, tem-se

$$E^*[(1+r)^{-\tau}g(S_\tau)] \leq E^*[(1+r)^{-T}g(S_T)]$$

Conclusão: sob a probabilidade de risco neutro, o valor presente esperado do resultado do exercício da opção em qualquer tempo de parada τ é, no máximo, igual ao do exercício no último tempo T . Isso que significa que o melhor momento para o exercício de uma opção americana de compra é ao final do contrato, em $\tau \equiv T$. Com isso, seu valor de arbitragem é exatamente o mesmo de uma opção européia, dado por

$$V_0 = E^*[(1+r)^{-T}V_T], \quad \text{em que} \quad V_T = (S_T - K)^+.$$

2.7.2.2 Preço e tempo ótimo de exercício para uma opção americana de venda

Em se tratando de uma opção americana de venda, as justificativas acima ficam comprometidas, visto que:

Comprometimento da justificativa 1

Caso, em um tempo $t < T$, o valor da ação subjacente seja inferior a K , o exercício da opção supostamente se justifica e resulta na venda da ação por K que, aplicado à taxa r , vale, no tempo T , $K(1+r)^{T-t} - S_T$, não necessariamente inferior ao resultado do exercício no tempo final, dado por $(S_T - K)^+$. Na Figura 2.7.2.2.1 (em que $K' = K(1+r)^{T-t}$) ilustra-se este fato.

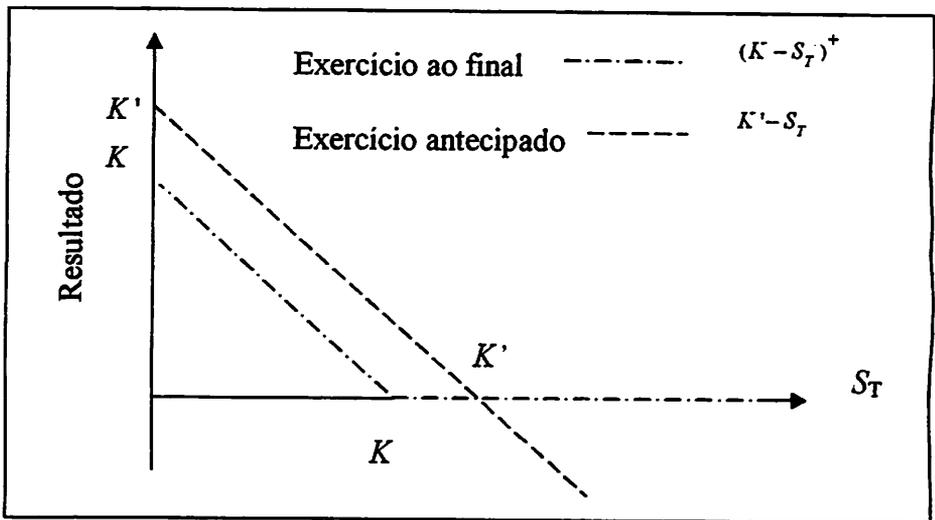


FIGURA 2.7.2.2.1 Comparação entre o exercício antecipado e o exercício ao final para opção americana de venda

O gráfico da Figura 2.7.2.2.1 mostra que, se no tempo T o valor da ação for inferior a $K' = K(1+r)^{T-t}$, o exercício antecipado se justifica.

Comprometimento da justificativa 2

O desenvolvimento da justificativa 2 não se aplica para opções americanas de venda, visto que, mesmo sendo $g(S_k) = (K - S_k)^+$ uma função convexa de S_k , $g(0) = K \neq 0$.

Segundo Bass (2004) “... apesar de se conhecerem boas aproximações, uma solução exata para o problema do estabelecimento do valor de uma opção americana de venda é desconhecida, e é um dos maiores problemas não resolvidos em matemática financeira.”

3 Metodologia

A principal ferramenta de análise utilizada na obtenção dos resultados deste trabalho são as funções convexas. Mais especificamente, a partir da constatação de que o valor de arbitragem de uma opção do tipo européia é uma função convexa do seu preço de exercício K , utiliza-se esse resultado como peça básica (building block) para mostrar que o valor de arbitragem de uma opção americana de compra é igual ao valor de arbitragem de uma opção européia de compra. A mesma peça básica é usada para mostrar ainda que, em se tratando de opções americanas de venda, não se chega a uma fórmula fechada para o valor de arbitragem. Esses resultados não são novos. O que o trabalho apresenta de novidade é a obtenção desses resultados através de matemática elementar, baseada simplesmente em propriedades de funções convexas.

3.1 Simulações

Os programas utilizados no desenvolvimento dos exemplos e simulações usados neste trabalho estão listados no apêndice C e foram desenvolvidos em R, um pacote de aplicativos para cálculos estatísticos de uso livre, disponível na internet nos endereços <http://gauss.est.ufpr.br/CRAN/> ou <http://www.r-project.org/>

4 RESULTADOS E DISCUSSÃO

4.1 Valor de arbitragem de uma opção europeia de compra

Já foi visto (2.7.1.7 - pág. 43) que, no modelo binomial de T passos, o preço de arbitragem de uma opção europeia de compra é dado por

$$\begin{aligned}
 V_0 &= E^*[(1+r)^{-T}V_T] = \frac{1}{(1+r)^T} E^*[(S_T - K)^+] = \\
 &= (1+r)^{-T} \sum_{j=0}^T (u^j d^{T-j} S_0 - K)^+ P^*[S_T = u^j d^{T-j} S_0] = \\
 &= (1+r)^{-T} \sum_{j=0}^T (u^j d^{T-j} S_0 - K)^+ \binom{T}{j} (p^*)^j (q^*)^{T-j} \quad (4.1.1)
 \end{aligned}$$

O interesse aqui está em ressaltar que, nesta expressão, os valores de r , u , d e, conseqüentemente, p^* e q^* , são dados pelo mercado; sendo assim, estabelecido o tempo T de maturação da opção, seu valor de arbitragem V_0 passa a ser função exclusivamente do preço de exercício K e pode ser escrito como

$$V_0(K) = (1+r)^{-T} \sum_{j=0}^T (u^j d^{T-j} S_0 - K)^+ \binom{T}{j} (p^*)^j (q^*)^{T-j} \quad (4.1.2)$$

Nesta expressão, cada parcela da soma à direita da igualdade tem a forma

$$(1+r)^{-T} (u^j d^{T-j} S_0 - K)^+ \binom{T}{j} (p^*)^j (q^*)^{T-j} \quad (j = 0, 1, 2, \dots, T)$$

e vale

$$(1) \quad 0 \text{ se } (u^j d^{T-j} S_0 - K) \leq 0, \text{ isto é, se } K \geq u^j d^{T-j} S_0$$

$$(2) \quad (1+r)^{-T} (u^j d^{T-j} S_0 - K) \binom{T}{j} (p^*)^j (q^*)^{T-j} \text{ se } K < u^j d^{T-j} S_0$$

Esta última expressão, como função de K , é uma reta de coeficiente linear dado por

$$\begin{aligned} \alpha_j &= \frac{1}{(1+r)^T} u^j d^{T-j} S_0 \binom{T}{j} (p^*)^j (q^*)^{T-j} = \\ &= \left(\frac{up^*}{1+r} \right)^j \left(\frac{dq^*}{1+r} \right)^{T-j} \binom{T}{j} S_0 > 0 \end{aligned} \quad (4.1.3)$$

e coeficiente angular

$$\begin{aligned} \beta_j &= \frac{-1}{(1+r)^T} \binom{T}{j} (p^*)^j (q^*)^{T-j} = \\ &= - \left(\frac{p^*}{1+r} \right)^j \left(\frac{q^*}{1+r} \right)^{T-j} \binom{T}{j} < 0 \end{aligned} \quad (4.1.4)$$

resultando que cada parcela de $V_0(K)$ é uma função convexa (Figura 4.1.1).

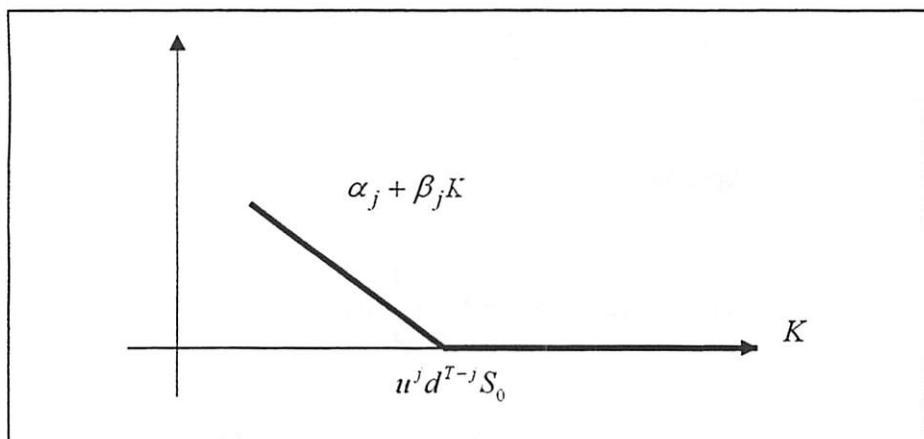


FIGURA 4.1.1 Função convexa dada por cada parcela de V_0

Sendo assim, $V_0(K)$ é uma soma de funções convexas e, conseqüentemente, uma função convexa. Os valores $u^j d^{T-j} S_0$, que por conveniência passam a ser chamados de pontos de quebra e denotados por $k(j)$, formam uma seqüência crescente de valores de K , conforme j toma valores crescentes no conjunto $\{0, 1, 2, \dots, T\}$, ou seja,

$$k(0) = d^T S_0 < k(1) = u d^{T-1} S_0 < \dots < k(T-1) = u^{T-1} d S_0 < k(T) = u^T S_0$$

visto que

$$0 < d < 1+r < u \text{ e } r > 0$$

e a forma de $V_0(K)$ é dada no gráfico da Figura 4.1.3 e pode ser obtida observando-se a Figura 4.1.2, em que são representadas as suas parcelas.

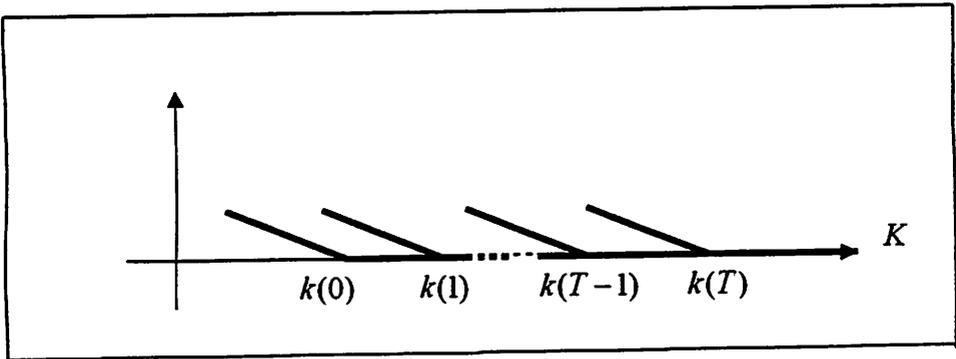


FIGURA 4.1.2 Parcelas de V_0 , valor de arbitragem de uma opção européia de compra

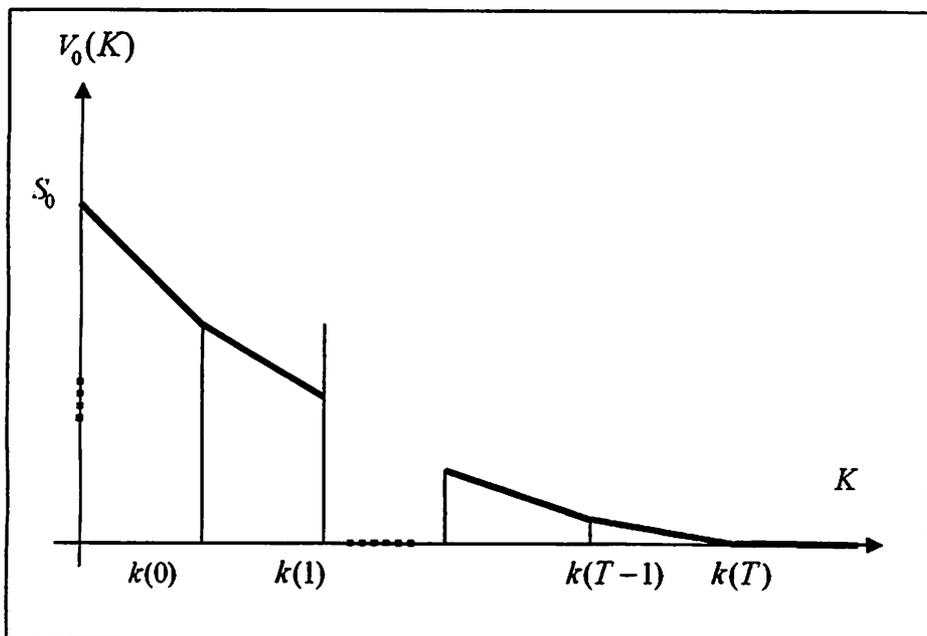


FIGURA 4.1.3 – Valor arbitral de uma opção europeia de compra como função convexa do preço de exercício K

Sendo assim, o valor de arbitragem da uma opção europeia de compra é obtido simplesmente tomando-se, no gráfico, a ordenada correspondente ao valor de K .

Vale ressaltar que cada segmento de reta que compõe a função convexa $V_0(K)$ determina uma reta suporte dessa função, ou seja, $V_0(K)$ é sempre igual ou maior que cada uma dessas retas.

4.2 Valor de arbitragem de uma opção europeia de venda

Considerando que o valor de arbitragem de uma opção europeia de venda, no modelo binomial de T passos, é dado por

$$\begin{aligned}
V_0 &= E^*[(1+r)^{-T} V_T] = (1+r)^{-T} E^*[(K - S_T)^+] = \\
&= (1+r)^{-T} \sum_{j=0}^T (K - u^j d^{T-j} S_0)^+ P^*[S_T = u^j d^{T-j} S_0] = \\
&= (1+r)^{-T} \sum_{j=0}^T (K - u^j d^{T-j} S_0)^+ \binom{T}{j} (p^*)^j (q^*)^{T-j} \quad (4.2.1)
\end{aligned}$$

novamente se pode tomar V_0 como uma função de K e escrever

$$V_0(K) = (1+r)^{-T} \sum_{j=0}^T (K - u^j d^{T-j} S_0)^+ \binom{T}{j} (p^*)^j (q^*)^{T-j}$$

em que cada parcela da soma à direita da igualdade tem a forma

$$\begin{aligned}
(1+r)^{-T} (K - u^j d^{T-j} S_0)^+ \binom{T}{j} (p^*)^j (q^*)^{T-j} \\
(j = 0, 1, 2, \dots, T)
\end{aligned}$$

e assume os valores

$$\begin{aligned}
0 \text{ se } (K - u^j d^{T-j} S_0) \leq 0, \text{ isto é, se } K \leq u^j d^{T-j} S_0, \text{ ou} \\
(1+r)^{-T} (K - u^j d^{T-j} S_0) \binom{T}{j} (p^*)^j (q^*)^{T-j} \text{ se } K > u^j d^{T-j} S_0
\end{aligned}$$

Esta última expressão é uma reta de coeficiente linear dado por

$$\begin{aligned}
\alpha_j &= -\frac{1}{(1+r)^T} u^j d^{T-j} S_0 \binom{T}{j} (p^*)^j (q^*)^{T-j} = \\
&= -\binom{T}{j} \left(\frac{u p^*}{1+r} \right)^j \left(\frac{d q^*}{1+r} \right)^{T-j} S_0 < 0 \quad (4.2.2)
\end{aligned}$$

e coeficiente angular

$$\begin{aligned}
\beta_j &= \frac{1}{(1+r)^T} \binom{T}{j} (p^*)^j (q^*)^{T-j} = \binom{T}{j} \left(\frac{p^*}{1+r} \right)^j \left(\frac{q^*}{1+r} \right)^{T-j} > 0 \\
&\quad (4.2.3)
\end{aligned}$$

resultando que cada parcela de $V_0(K)$ é uma função convexa (Figura 4.2.1).

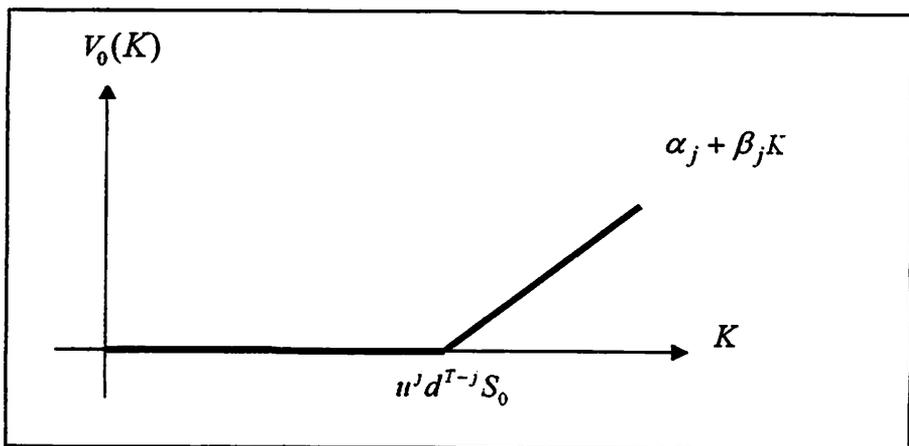


FIGURA 4.2.1 Função convexa dada por cada parcela do valor de arbitragem de opção europeia de compra V_0

Colocando-se em um mesmo gráfico as parcelas de $V_0(K)$ (Figura 4.2.2), fica claro que a forma de $V_0(K)$ é dada pela Figura 4.2.3 e o valor de arbitragem da opção europeia de venda é obtido simplesmente tomando-se a ordenada correspondente ao valor de exercício K .

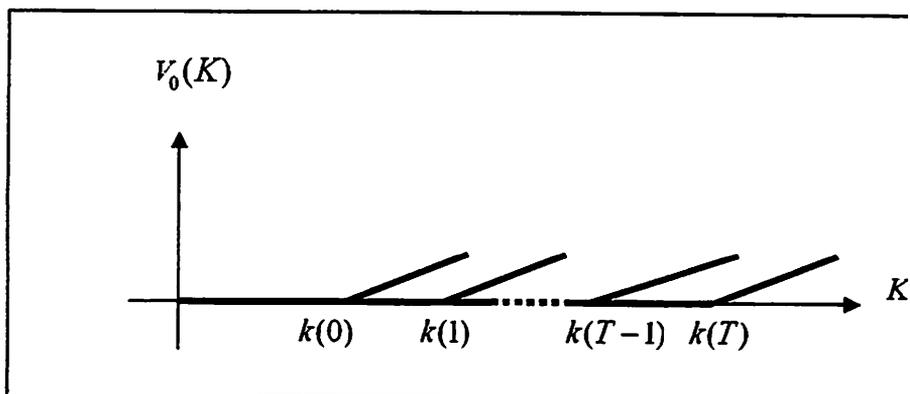


FIGURA 4.2.2 – Parcelas de V_0

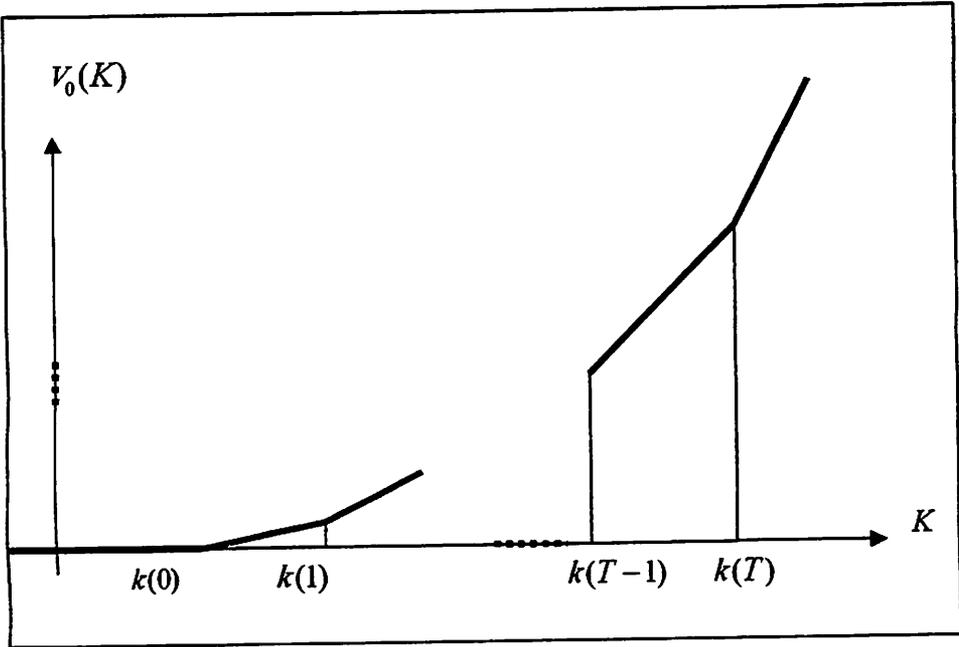


FIGURA 4.2.3 – Valor arbitral de uma opção europeia de venda como função convexa do valor de exercício K

4.3 Valor de arbitragem de uma opção americana.

Já foi visto (2.7.2.1 – pg. 56) que o valor de arbitragem de uma opção americana, no modelo binomial de T passos, é dado por

$$X_0(K) = \max\{V_0, (1+r)^{-1} E^*[V_1], \dots, (1+r)^{-T} E^*[V_T]\}$$

em que

$$V_j = (S_j - K)^+ = (u^j d^{T-j} S_0 - K)^+$$

caso a opção seja de compra e o exercício se dê em $t=j$, e

$$V_j = (K - S_j)^+ = (K - u^j d^{T-j} S_0)^+$$

caso seja de venda e o exercício se dê em $t=j$.

Essa escolha do melhor tempo de exercício permite a seguinte interpretação: tudo se passa como se o portador da opção americana tivesse em mãos $T+1$ opções européias, todas com custo de exercício igual a K , tempos de maturação iguais a $0,1,\dots,T$ e com uma condição especial: exercida uma delas, todas as outras perdem a validade. A questão é: qual delas exercer, de modo a maximizar o valor resultante.

4.3.1 Valor de arbitragem de uma opção americana de compra no modelo de um passo

No modelo de um passo, esse valor é dado por

$$\begin{aligned} X_0(K) &= \max\{V_0, (1+r)^{-1} E^*[V_1]\} = \\ &= \max\{(S_0 - K)^+, (1+r)^{-1} \sum_{j=0}^1 (u^j d^{1-j} S_0 - K)^+ P^*[S_1 = u^j d^{1-j} S_0]\} \\ &= \max\{(S_0 - K)^+, (1+r)^{-1} \sum_{j=0}^1 (u^j d^{1-j} S_0 - K)^+ \binom{1}{j} (p^*)^j (q^*)^{1-j}\} \\ &= \max\{(S_0 - K)^+, (1+r)^{-1} \sum_{j=0}^1 (u^j d^{1-j} S_0 - K)^+ (p^*)^j (q^*)^{1-j}\} \end{aligned}$$

O que se faz em seguida é mostrar algébrica e graficamente (Figura 4.3.1.1) que

$$(S_0 - K)^+ \leq (1+r)^{-1} \sum_{j=0}^1 (u^j d^{1-j} S_0 - K)^+ (p^*)^j (q^*)^{1-j} \quad \text{para todo } K \quad (4.3.1)$$

Se $K \geq uS_0$

$$(S_0 - K)^+ = 0 \quad \text{e}$$

$$(u^j d^{1-j} S_0 - K)^+ = 0$$

e, portanto, (4.3.1) é verdade.

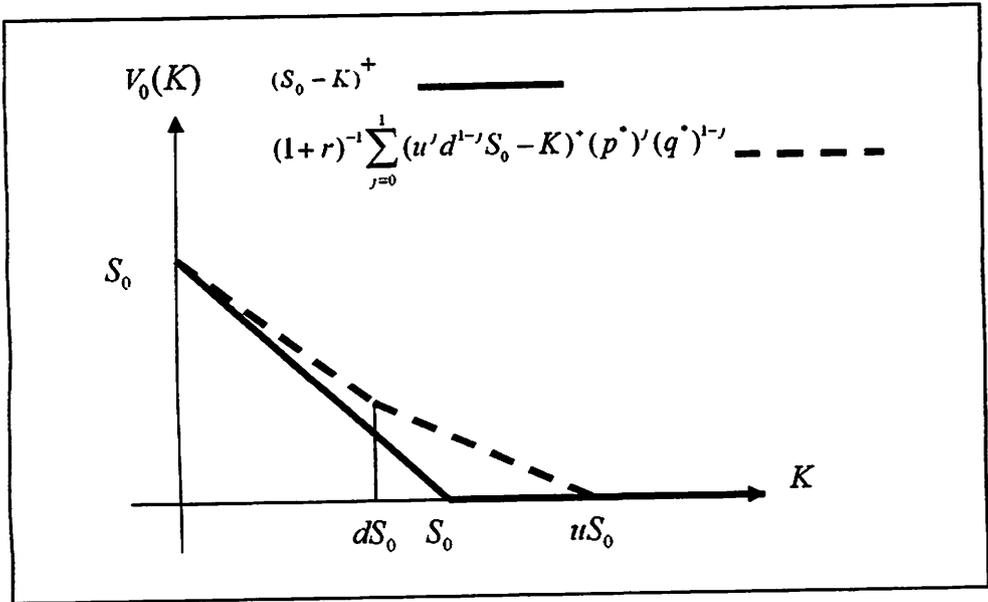


FIGURA 4.3.1.1 Comparação entre o exercício antecipado e o exercício ao final, para opção americana de compra no modelo de um passo

Se $S_0 \leq K < uS_0$

$$(S_0 - K)^+ = 0 \quad \text{e}$$

$$\left. \begin{array}{l} (uS_0 - K)^+ = uS_0 - K \\ (dS_0 - K)^+ = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow (1+r)^{-1} \sum_{j=0}^1 (u^j d^{1-j} S_0 - K)^+ (p^*)^j (q^*)^{1-j} =$$

$$= (1+r)^{-1} (uS_0 - K) (p^*) > 0$$

e, portanto, (4.3.1) é verdade.

Se $K = dS_0$

$$(S_0 - K)^+ = S_0 - K = S_0 - dS_0 = S_0(1-d)$$

$$\begin{aligned}
(1+r)^{-1} \sum_{j=0}^1 (u^j d^{1-j} S_0 - K)^+ (p^*)^j (q^*)^{1-j} &= \frac{1}{1+r} (uS_0 - dS_0)(p^*) = \\
&= \frac{1}{1+r} (u-d)S_0 \frac{(1+r)-d}{u-d} = S_0 \left(1 - \frac{d}{1+r}\right) > S_0(1-d)
\end{aligned}$$

e, portanto, para $dS_0 \leq K \leq S_0$, (4.3.1) é verdade.

Se $K=0$

$$(S_0 - K)^+ = S_0$$

$$(1+r)^{-1} \sum_{j=0}^1 (u^j d^{1-j} S_0 - K)^+ (p^*)^j (q^*)^{1-j} = \frac{1}{1+r} (uS_0 p^* - dS_0 q^*) = S_0$$

e, portanto, se $0 \leq K \leq dS_0$, (4.3.1) é verdadeiro.

Conclusão: no modelo binomial de 1 passo, independente do valor de K , o melhor tempo para se exercer uma opção americana de compra é em $t = T = 1$ e, conseqüentemente, tudo se passa como se o portador tivesse em mãos uma opção européia de compra.

Considerando que $f(K) = (1+r)^{-1} E^*[V_1] = (1+r)^{-1} E^*[(S_1 - K)^+]$ é uma função convexa (figura 4.3.1) e considerando a propriedade (2.1.2 – pág. 6) das retas suporte de funções convexas, essa conclusão é imediata, visto que

(i) como $f(K) = 0$ para $K \geq uS_0$, o eixo dos K 's é uma reta suporte de $f(K)$, e como $(S_0 - K)^+ = 0$ para $K \geq S_0$, segue que

$$f(K) \geq (S_0 - K)^+ \quad \text{para } K \geq S_0.$$

(ii) para $K \in [0, dS_0]$

$$\begin{aligned}
f(K) &= \frac{1}{1+r} [(uS_0 - K)(p^*) + (dS_0 - K)(q^*)] = \\
&= \frac{1}{1+r} (up^* + dq^*)S_0 - \frac{1}{1+r} K = S_0 - \frac{1}{1+r} K
\end{aligned}$$

Portanto, $S_0 - (1+r)^{-1}K$ é uma reta suporte de $f(K)$, ou seja,

$$S_0 - (1+r)^{-1}K \leq f(K) \quad \text{para todo } K \geq 0.$$

Sendo assim, para $K \in [0, S_0]$,

$$(S_0 - K)^+ = S_0 - K \leq S_0 - (1+r)^{-1}K$$

Juntando (i) e (ii), conclui-se que $(1+r)^{-1}E^*[V_1] \geq (S_0 - K)^+$ para todo $K \geq 0$, ou seja,

$$X_0(K) = \max\{V_0, (1+r)^{-1}E^*[V_1]\} = (1+r)^{-1}E^*[V_1]$$

4.3.2 Valor de arbitragem de uma opção americana de compra no modelo de T passos

Já se sabe que esse valor é dado por (2.7.2.1 – página 56)

$$X_0(K) = \max\{V_0, (1+r)^{-1}E^*[V_1], \dots, (1+r)^{-T}E^*[V_T]\}$$

em que V_j é o valor de arbitragem da opção, caso seja exercida no tempo $t = j$ e X_0 é o valor inicial do portfólio de hedge.

Caminhando-se reversamente nos valores acima, o que se mostra em seguida é que, para todo $j \in \{0, 1, \dots, T-1\}$

$$\max\left\{\frac{1}{(1+r)^j}E^*[V_j], \frac{1}{(1+r)^{j+1}}E^*[V_{j+1}]\right\} = \frac{1}{(1+r)^{j+1}}E^*[V_{j+1}]$$

(i) fazendo-se $j = T-1$

$$\begin{aligned} \max\left\{\frac{1}{(1+r)^{T-1}}E^*[V_{T-1}], \frac{1}{(1+r)^T}E^*[V_T]\right\} &= \\ &= \frac{1}{(1+r)^T} \max\{E^*[V_{T-1}], \frac{1}{(1+r)}E^*[V_T]\} = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{(1+r)^{T-1}} \max\{E^*[V_{T-1}], E^*[\frac{1}{(1+r)}V_T]\} = \\
&= \frac{1}{(1+r)^{T-1}} \max\{E^*[E^*[V_{T-1} | \mathcal{G}_{T-1}]], E^*[\frac{1}{(1+r)}E^*[V_T | \mathcal{G}_{T-1}]]\}
\end{aligned}$$

A variável aleatória $E^*[V_{T-1} | \mathcal{G}_{T-1}]$, por analogia com o resultado obtido no modelo de 1 passo, é sempre menor ou igual à variável aleatória $\frac{1}{(1+r)}E^*[V_T | \mathcal{G}_{T-1}]$ e. conseqüentemente.

$$\begin{aligned}
&E^*[E^*[V_{T-1} | \mathcal{G}_{T-1}]] \leq E^*[\frac{1}{(1+r)}E^*[V_T | \mathcal{G}_{T-1}]] \Rightarrow \\
&\Rightarrow \max\{\frac{1}{(1+r)^{T-1}}E^*[V_{T-1}], \frac{1}{(1+r)^T}E^*[V_T]\} = \frac{1}{(1+r)^T}E^*[V_T]
\end{aligned}$$

(ii) fazendo-se $j = T - 2$ demonstra-se, por um desenvolvimento semelhante, que

$$\max\{\frac{1}{(1+r)^{T-2}}E^*[V_{T-2}], \frac{1}{(1+r)^{T-1}}E^*[V_{T-1}]\} = \frac{1}{(1+r)^{T-1}}E^*[V_{T-1}]$$

Juntando-se os resultados em (i) e (ii) tem-se

$$\max\{\frac{1}{(1+r)^{T-2}}E^*[V_{T-2}], \dots, \frac{1}{(1+r)^T}E^*[V_T]\} = \frac{1}{(1+r)^T}E^*[V_T]$$

Esse padrão se mantém para valores decrescentes de j , de maneira que se pode concluir que

$$\begin{aligned}
X_0(K) &= \max\{V_0, (1+r)^{-1}E^*[V_1], \dots, (1+r)^{-T}E^*[V_T]\} = \\
&= (1+r)^{-T}E^*[V_T]
\end{aligned}$$

O que confirma o que já havia sido afirmado e duplamente justificado (item 2.7.2.1 - página 57): uma opção americana de compra se comporta da mesma maneira que uma opção européia e, portanto, da mesma maneira pode ser

tratada, tanto no que diz respeito ao seu preço de arbitragem quanto ao seu portfólio de hedge. A figura 4.3.2.1 ilustra esse resultado no modelo de 5 passos, para $u=1,2$, $d=0,9$, $S_0=100$ e $r=0,05$ (a rotina para geração do gráfico está no apêndice B.4). As linhas mais afastadas da origem correspondem a valores crescentes do número de passos.

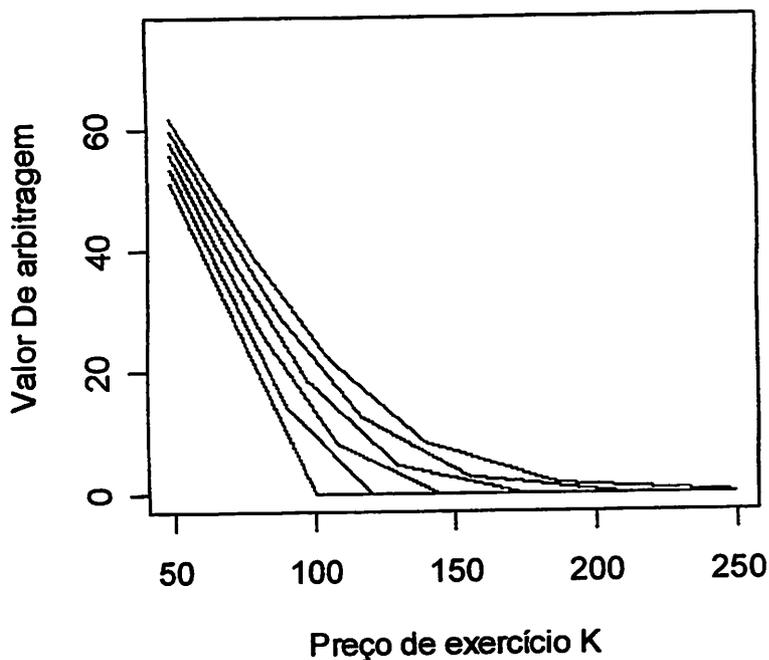


FIGURA 4.3.2.1 Comparação entre os exercícios de uma opção americana de compra, como função de K . para os tempos de exercício entre zero e cinco. Curvas mais afastadas da origem correspondem a tempos crescentes.

Considerando a conclusão acima, exemplificar o estabelecimento de valor de arbitragem e do portfólio de hedge de uma opção americana de compra

perde a razão, visto que opções européias já foram amplamente exemplificadas em 2.7.1. O interessante é comparar o resultado do exercício antecipado com o valor de arbitragem e verificar que o primeiro é sempre inferior ao último. Na Figura 4.3.2.2 estão ilustrados os valores resultantes do exercício antecipado de uma opção americana de compra (rotina de cálculo no apêndice B.5), considerando $u=1,2$, $d=0,9$, $S_0=100$, $r=0,05$ e $T=5$. A Figura 4.3.2.3 (idêntica à Figura 2.6.1.4) ilustra os valores de arbitragem. Note-se que esses valores são sempre maiores ou iguais aos valores de exercício. Então, se alguém está cogitando de exercer antecipadamente uma opção americana de compra, melhor é, considerando que o mercado é líquido, vender a opção.

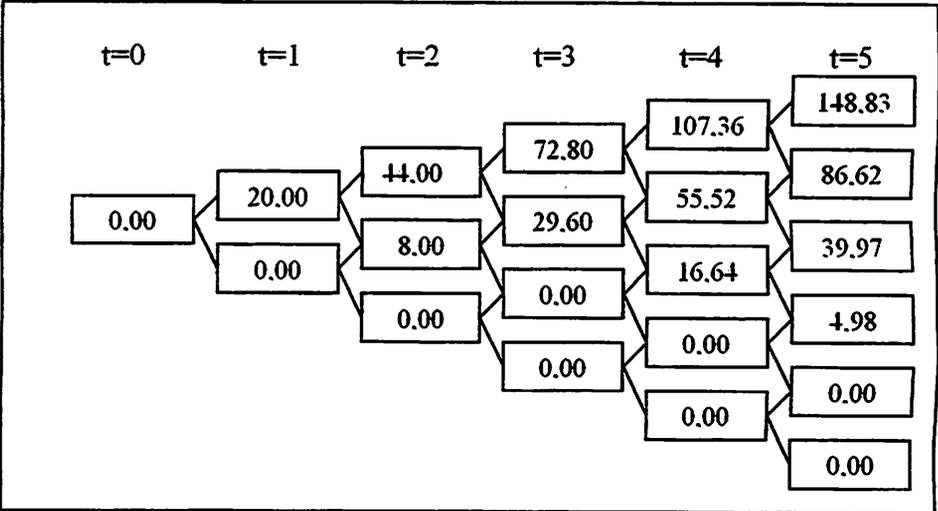


FIGURA 4.3.2.2 Valores resultantes do exercício antecipado de uma opção americana de compra

Nas Figuras 4.3.2.4 e 4.3.2.5 estão representadas as diferenças entre os valores arbitrais e os valores de exercício, respectivamente, para $K=95$ e $K=110$.

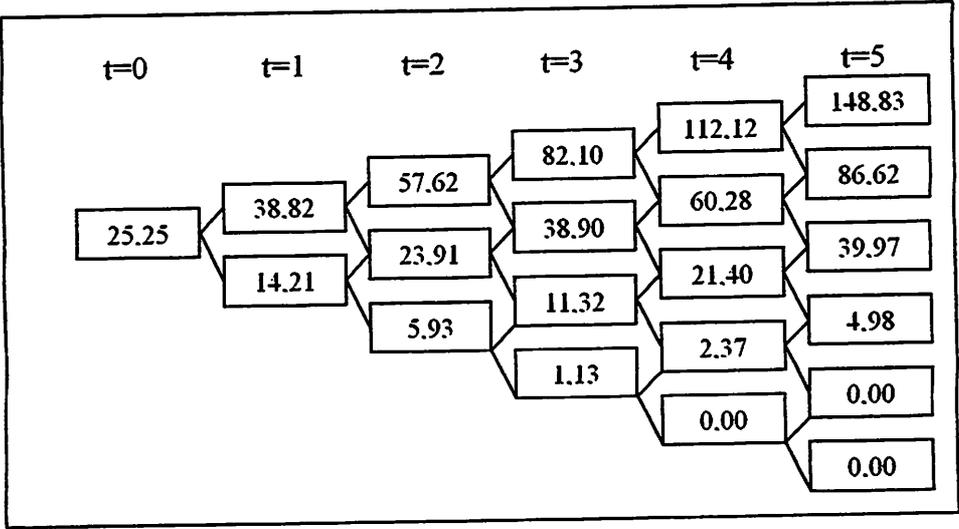


FIGURA 4.3.2.3 Valores de arbitragem de opção americana de compra

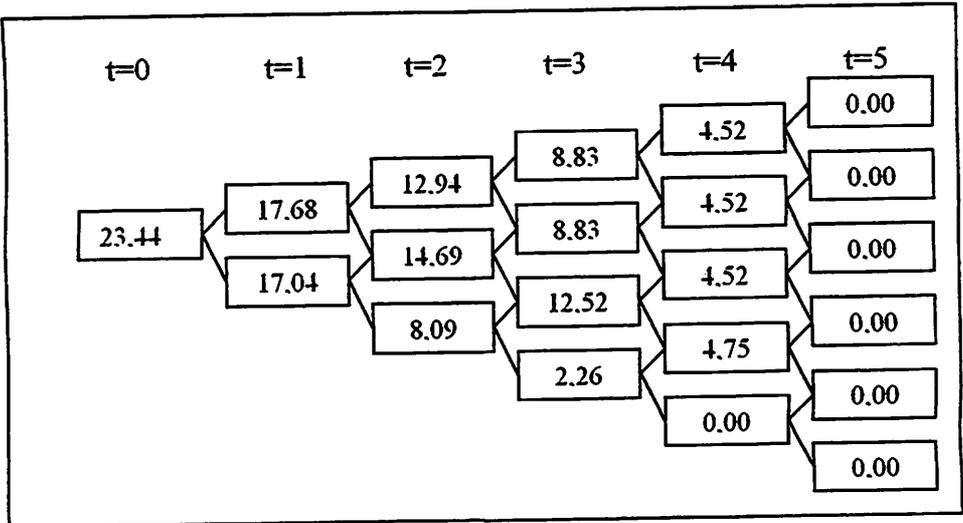


FIGURA 4.3.2.4 Diferença entre valor de arbitragem e de exercício antecipado de opção americana de compra para $K=95$

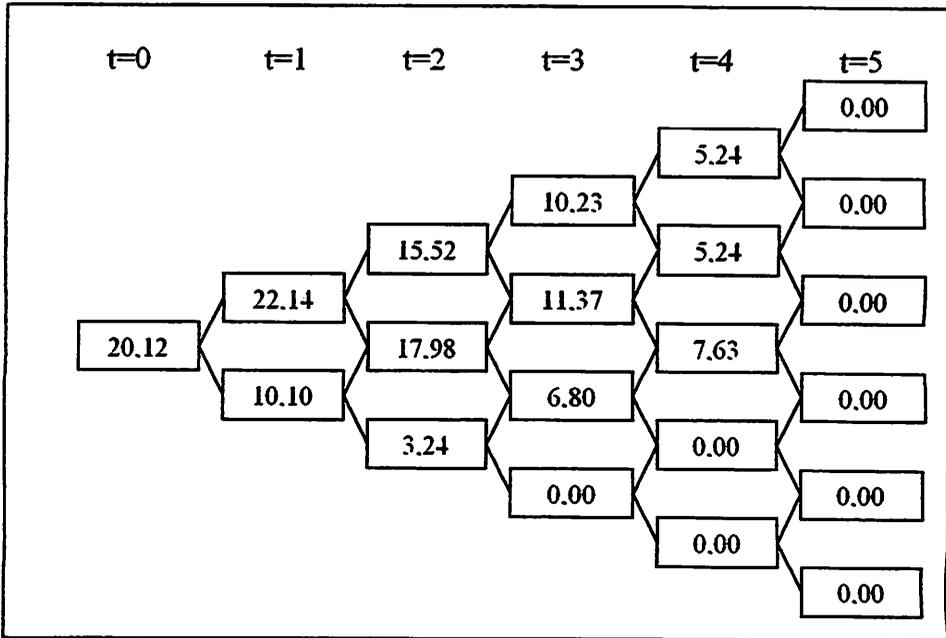


FIGURA 4.3.2.5 Diferença entre valor de arbitragem e exercício antecipado de opção americana de compra para $K=110$

Os valores positivos acima confirmam a conclusão: melhor vender a opção americana de compra do que exercê-la antecipadamente.

4.3.3 Valor de arbitragem de uma opção americana de venda no modelo de um passo.

No modelo de 1 passo, esse valor é dado por

$$\begin{aligned}
 X_0(K) &= \max\{V_0, (1+r)^{-1} E^*[V_1]\} = \\
 &= \max\{(K - S_0)^+, (1+r)^{-1} \sum_{j=0}^1 (K - u^j d^{1-j} S_0)^+ P^*[S_1 = u^j d^{1-j} S_0]\}
 \end{aligned}$$

$$= \max\{(K - S_0)^+, (1+r)^{-1} \sum_{j=0}^1 (K - u^j d^{1-j} S_0)^+ \binom{1}{j} (p^*)^j (q^*)^{1-j}\}$$

$$= \max\{(K - S_0)^+, (1+r)^{-1} \sum_{j=0}^1 (K - u^j d^{1-j} S_0)^+ (p^*)^j (q^*)^{1-j}\}$$

O que se verifica em seguida é que as funções acima se interceptam para algum valor de K entre dS_0 e uS_0 . No que segue, adota-se a notação

$$X_0^j(K) = (1+r)^{-j} E^*[V_j].$$

Se $K = S_0$

$$\left. \begin{aligned} X_0^1(S_0) &= (1+r)^{-1} (S_0 - dS_0)(q^*) = \frac{S_0 q^*}{1+r} (1-d) > 0 \\ X_0^0(S_0) &= (S_0 - S_0)^+ = 0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \boxed{X_0^0(K) < X_0^1(K)}$$

Se $K = uS_0$

$$X_0^1(uS_0) = \frac{1}{1+r} (uS_0 - dS_0)q^* = \frac{S_0 q^*}{1+r} (u-d) = \frac{S_0}{1+r} \frac{u-(1+r)}{u-d} (u-d) \Rightarrow$$

$$\left. \begin{aligned} X_0^1(uS_0) &= S_0 \left(\frac{u}{1+r} - 1 \right) \\ X_0^0(uS_0) &= (uS_0 - S_0)^+ = (uS_0 - S_0) = S_0(u-1) \end{aligned} \right\} \Rightarrow \boxed{X_0^0(K) > X_0^1(K)}$$

Existe assim algum valor de $K \in [S_0, uS_0]$ em que $X_0^0(K)$ e $X_0^1(K)$ se interceptam (Figura 4.3.3.1).

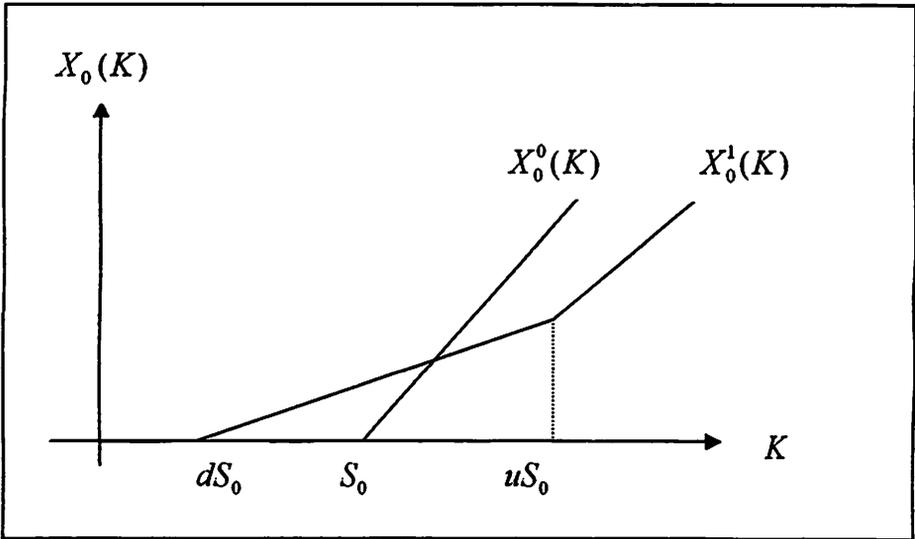


FIGURA 4.3.3.1 Opção americana de venda no modelo de 1 passo

Dado, portanto, um preço de exercício K , o valor de arbitragem de uma opção americana de venda, $X_0(K)$, no modelo binomial de 1 passo, só pode ser determinado comparando-se os valores de $X_0^0(K)$ e $X_0^1(K)$.

4.3.4 Valor de arbitragem de uma opção americana de venda no modelo de T passos

O resultado obtido no modelo de 1 passo pode ser uma complicação na determinação do valor de arbitragem visto que, segundo a teoria de arbitragem, esse valor é dado pelo valor inicial capaz de estabelecer um portfólio que reproduza o valor de exercício da opção em qualquer tempo. Na impossibilidade de se replicarem todos os valores possíveis, já foi visto, estabelece-se um super-hedge, ou seja, um portfólio capaz de replicar o maior dentre todos os valores de exercício. Para opções de compra isso foi

simplificado pela constatação de que o maior valor de exercício acontece no tempo final. No caso presente, já se viu que, mesmo no caso simples do modelo de 1 passo, isto não acontece. Então, com a finalidade de verificar se isto não passa de uma situação particular do modelo de 1 passo, e ainda de buscar alguma regularidade que possa simplificar a determinação do maior valor de exercício, examina-se o valor de arbitragem de uma opção americana de venda, supondo-se que o exercício se dê em um tempo t qualquer. Com a mesma notação usada em 4.3.3, esse valor é dado por

$$X_0^t = (1+r)^{-t} \sum_{j=0}^t (K - u^j d^{t-j} S_0)^+ \binom{t}{j} (p^*)^j (q^*)^{t-j}$$

O que se constata é que, para diferentes valores de t , as funções X_0^t se interceptam em algum valor de K .

Para todo $t \in \{0, 1, \dots, T\}$ e $K \in (d^t S_0, d^{t-1} S_0)$

$$\left. \begin{aligned} X_0^t &= \frac{1}{(1+r)^t} (K - d^t S_0) (q^*)^t > 0 \\ X_0^{t-1} &= 0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow X_0^t > X_0^{t-1} \quad (4.3.4.1)$$

Para $K = u^T S_0$

$$\begin{aligned} X_0^t &= (1+r)^{-t} \sum_{j=0}^t (u^T S_0 - u^j d^{t-j} S_0)^+ \binom{t}{j} (p^*)^j (q^*)^{t-j} = \\ &= \frac{1}{(1+r)^t} \left[\sum_{j=0}^t u^T S_0 \binom{t}{j} (p^*)^j (q^*)^{t-j} - \sum_{j=0}^t u^j d^{t-j} S_0 \binom{t}{j} (p^*)^j (q^*)^{t-j} \right] = \\ &= \frac{u^T S_0}{(1+r)^t} \sum_{j=0}^t \binom{t}{j} (p^*)^j (q^*)^{t-j} - S_0 \sum_{j=0}^t \binom{t}{j} \left(\frac{up^*}{1+r} \right)^j \left(\frac{dq^*}{1+r} \right)^{t-j} = \\ &= S_0 \left[\frac{u^T}{(1+r)^t} - 1 \right] \end{aligned} \quad (4.3.4.2)$$

Esse último resultado mostra que, para $K = u^T S_0$, X_0^t é uma função decrescente de t , ou seja $X_0^t(u^T S_0) < X_0^{t-1}(u^T S_0)$. O que se conclui, comparando-se este último resultado com (4.3.4.1), é que, para diferentes valores de t , as funções X_0^t se interceptam. O gráfico da figura 4.3.4.1 ilustra, para $u=1,2$, $d=0,9$, $S_0=100$, $r=0,05$ e $T=5$, as interseções entre os X_0^t 's (a rotina para geração do gráfico está no apêndice B.6)

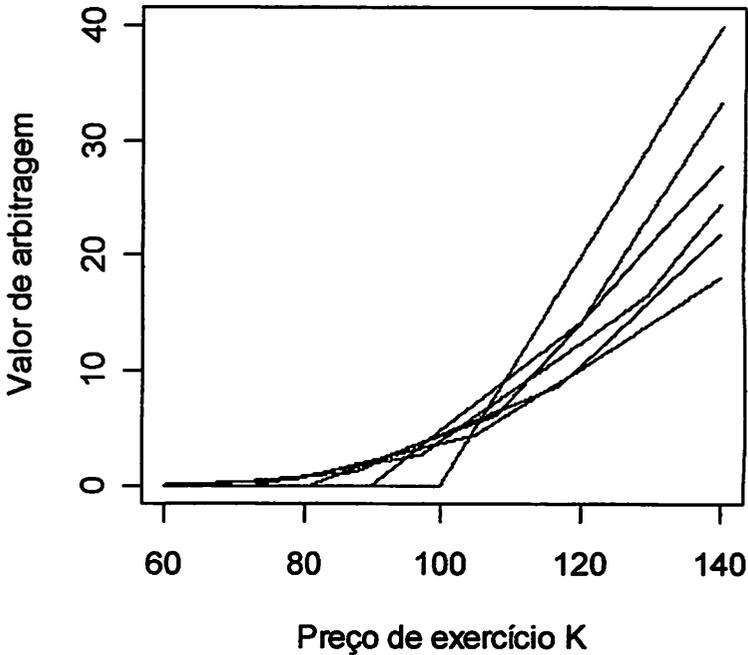


FIGURA 4.3.4.1 Comparação entre os exercícios de uma opção americana de venda, como função de K. para os tempos de exercício entre zero e cinco.

Confirma-se então o que já se podia antever, dado o resultado do modelo de um passo: preço de arbitragem de opção americana de venda não é trivial. A complicação está em que, para se estabelecer o valor inicial do portfólio de hedge, é preciso comparar o valor de exercício da opção no tempo inicial com os valores arbitrais da opção no tempo seguinte. Acontece que nenhum desses valores arbitrais está bem estabelecido, visto que a situação se repete, ou seja, o estabelecimento de qualquer um deles depende do valor de exercício da opção naquele momento e dos possíveis valores arbitrais do tempo seguinte. A conclusão é que, em se tratando de opções americanas de venda, o único caminho para se chegar ao valor de arbitragem inicial exato é pela construção de toda a árvore de hedge a partir do tempo final, visto que este último é o único tempo em que se conhece exatamente o valor de arbitragem da opção. Não se trata realmente de um grande problema, tendo em vista os recursos computacionais usualmente disponíveis. O algoritmo de construção do portfólio de hedge é dado por

$$X_T = (K - S_T)^+$$

$$X_t = \max\{(K - S_t)^+, (1+r)^{-1} E^*[X_{t+1} | \mathcal{G}_t]\}$$

e o melhor tempo de exercício é o primeiro tempo em que o valor do portfólio coincide com o valor de exercício da opção. Isto significa que, caso o portador da opção deixe passar esse tempo, o vendedor (emissor) pode “consumir” o valor correspondente a

$$(K - S_t)^+ - (1+r)^{-1} E^*[X_{t+1} | \mathcal{G}_t]$$

visto que, se

$$X_t = \max\{(K - S_t)^+, (1+r)^{-1} E^*[X_{t+1} | \mathcal{G}_t]\} = (K - S_t)^+$$

segue que

$$(K - S_t)^+ \geq (1+r)^{-1} E^*[X_{t+1} | \mathcal{G}_t]$$

e, como o valor necessário para reproduzir os valores arbitrários futuros é dado por

$$(1+r)^{-1} E^* [X_{t+1} | \mathcal{G}_t]$$

a diferença

$$(K - S_t)^+ - (1+r)^{-1} E^* [X_{t+1} | \mathcal{G}_t]$$

pode ser consumida.

Finalizando, é mostrado um exemplo de estabelecimento do preço de arbitragem de uma opção americana de venda.

Exemplo 6: Opção americana de venda em um mercado cujos parâmetros são $u=1,2$, $d=0,9$, $S_0=100$, $r=0,05$, $T=5$ e preço de exercício $K=110$. As rotinas de cálculo utilizadas estão no apêndice B.7.

A árvore binomial da Figura 4.3.4.2 representa dos valores da ação subjacente.

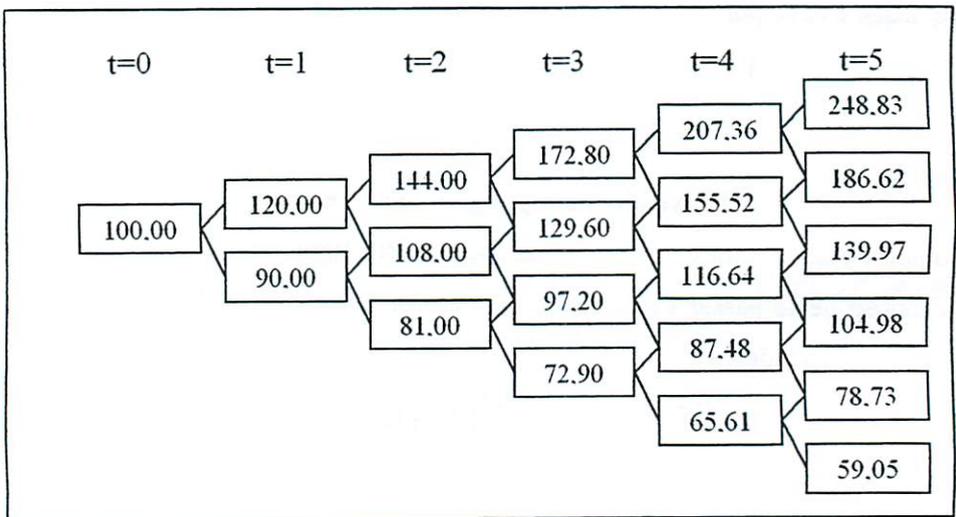


FIGURA 4.3.4.2 - Valores da ação subjacente no modelo de cinco passos

A árvore binomial da Figura 4.3.4.3 representa os valores de exercício da opção americana de venda. Os valores arbitrários estão na Figura 4.3.4.4.

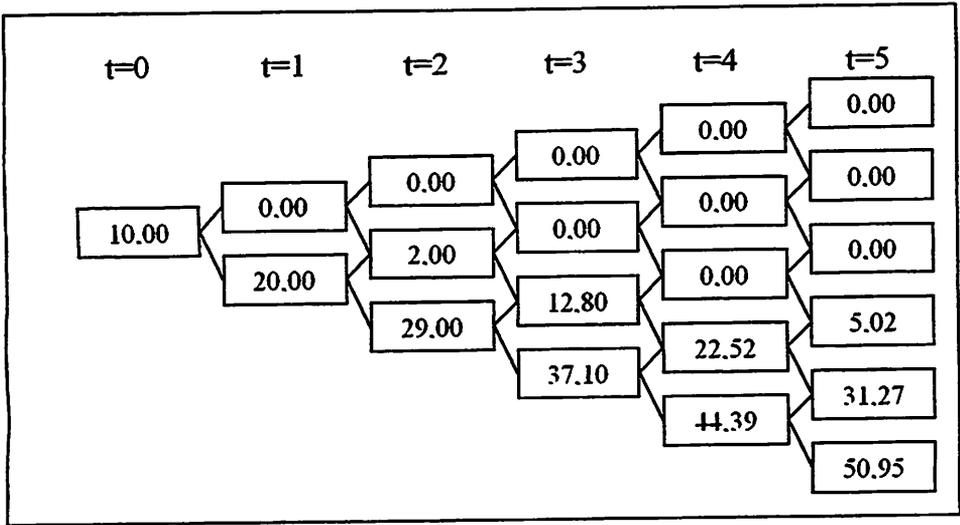


FIGURA 4.3.4.3 - Valores de exercício da opção americana de venda

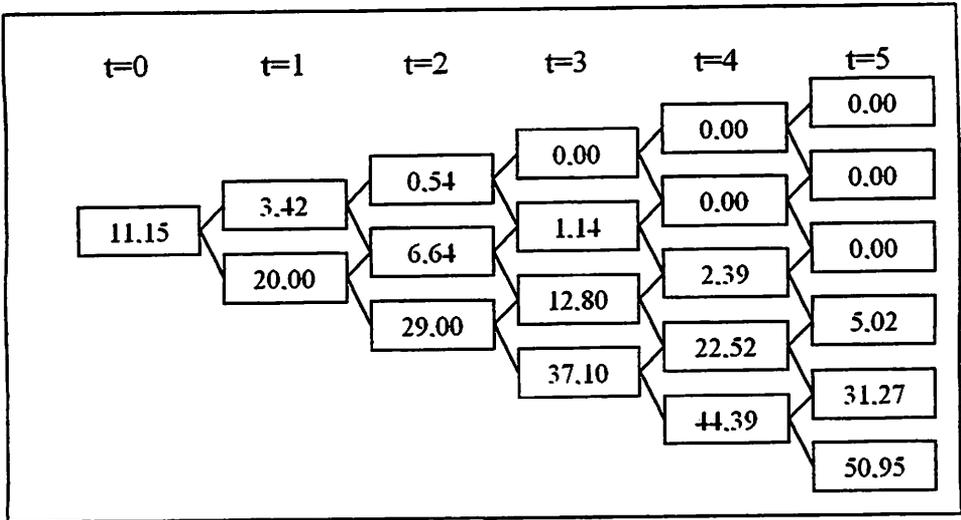


FIGURA 4.3.4.4 - Valores arbitrais da opção no modelo de cinco passos

Observe-se que, no tempo $t=1$, o valor de arbitragem coincide com o valor de exercício em 20.00. Esse é um tempo ótimo para o portador da opção. Caso ele não exerça, o emissor pode consumir

$$\begin{aligned}20 - (1+r)^{-1} E^*[X_2 | \mathcal{G}_1] &= 20 - \frac{1}{1,05} \left(\frac{1}{2} 6,64 + \frac{1}{2} 29 \right) = \\ &= 20 - 16,97 = 3,03\end{aligned}$$

pois 16,97 é o valor necessário para compor os valores seguintes do portfólio.

5 Conclusão

O problema do estabelecimento do preço de arbitragem de opções americanas, que usualmente é tratado com argumentos financeiros ou via uma abordagem não trivial, usando o conceito de martingales, pode também ser abordado de maneira elementar, por meio da teoria de funções convexas. Mais especificamente, partindo-se do fato de que o valor de arbitragem de uma opção americana, quando exercida em um tempo futuro qualquer, é uma função convexa do preço de exercício, é possível, de uma maneira extremamente simples, chegar-se às mesmas conclusões obtidas via martingales ou teoria econômica, ou seja, que opções americanas de compra se comportam como opções européias e que o mesmo não acontece com opções americanas de venda.

Apêndice A

Demonstrações para as propriedades da esperança condicional:

Propriedade 1: $Y = E[X | \mathcal{G}]$ é \mathcal{G} -mensurável, ou seja, $\{w | Y(w) \leq k\} \in \mathcal{G}$ para todo $k \in \mathbb{R}$.

Demonstração: Fazendo $b_i = \frac{E[X; B_i]}{P[B_i]}$, segue que, para $w \in B_s$

$$Y(w) = E[X | \mathcal{G}](w) = \sum_i \frac{E[X; B_i]}{P[B_i]} 1_{B_i}(w) = \sum_i b_i 1_{B_i}(w) = b_s.$$

Portanto, o conjunto $\{w | Y(w) \leq k\}$ é a união dos B_i 's tais que $b_i \leq k$.

Como a união de B_i 's pertence a \mathcal{G} segue que Y é \mathcal{G} -mensurável.

Propriedade 2: Sejam $C \in \mathcal{G}$ e $Y = E[X | \mathcal{G}]$. Então

$$E[Y; C] = E[X; C].$$

Demonstração: Tomando b_i como definido na demonstração 1 anterior e considerando que $Y(w)$ é constante em cada B_i , segue que

$$E[X; B_i] = b_i P[B_i] = \sum_{w \in B_i} Y(w) \cdot P[w] = E[Y; B_i].$$

Como $C \in \mathcal{G}$ é a união de B_i 's, $E[Y; C] = E[X; C]$

Propriedade 3: Sejam $Y = E[X | \mathcal{G}]$ e Z uma variável aleatória \mathcal{G} -mensurável tal que $E[Z; C] = E[X; C]$ para todo $C \in \mathcal{G}$.

Então $Z = Y$.

Demonstração: Como Z é \mathcal{G} -mensurável então $E[Z | \mathcal{G}]$ é constante

z_i em cada B_i ,

isto é, $\forall w \in B_i$

$$E[Z | \mathcal{G}] = z_i$$

e portanto

$$z_i = \frac{E[Z; B_i]}{P[B_i]} = \frac{E[X; B_i]}{P[B_i]} = b_i \quad \Rightarrow$$

$$Z = E[X | \mathcal{G}] = Y$$

Decorre dessa propriedade que a variável aleatória

$E[X | \mathcal{G}]$ é única, ou seja, se Y é \mathcal{G} -mensurável e

$$E[Y; C] = E[X; C] \quad \forall C \in \mathcal{G} \quad \text{então} \quad Y = E[X | \mathcal{G}]$$

Propriedade 4: Se X é \mathcal{G} -mensurável então $E[X | \mathcal{G}] = X$.

Demonstração: Como X é \mathcal{G} -mensurável, é candidata a ser a $E[X | \mathcal{G}]$, pela propriedade 3. Como, obviamente, $E[X; C] = E[X; C] \quad \forall C \in \mathcal{G}$ segue que $E[X | \mathcal{G}] = X$.

Propriedade 5: Se $X_1 \geq X_2$ então $E[X_1 | \mathcal{G}] \geq E[X_2 | \mathcal{G}]$.

Propriedade 6: $E[(a.X_1 + b.X_2) | \mathcal{G}] = a.E[X_1 | \mathcal{G}] + b.E[X_2 | \mathcal{G}]$.

As demonstrações das propriedades 5 e 6 são triviais e decorrem imediatamente da definição de $E(X | \mathcal{G})$.

Propriedade 7: $E[E[X | \mathcal{G}]] = E[X]$.

Demonstração: Seja $Y = E[X | \mathcal{G}] \Rightarrow E[X; C] = E[Y; C] \forall C \in \mathcal{G}$,
pela propriedade 2. Tomando $C = \Omega$,

$$E[Y; \Omega] = E[X; \Omega] \Rightarrow E[Y] = E[X]$$

Propriedade 8: Se X é independente de \mathcal{G} então $E[X | \mathcal{G}] = E[X]$.

Demonstração: Decorre da própria definição de independência, ou seja, o conhecimento de G não altera em nada o preditor de X .

Propriedade 9: Se Z é \mathcal{G} -mensurável então $E[XZ | \mathcal{G}] = ZE[X | \mathcal{G}]$.

Demonstração: Como $E[X | \mathcal{G}]$ é uma variável aleatória \mathcal{G} -mensurável e o produto de variáveis aleatórias \mathcal{G} -mensuráveis é \mathcal{G} -mensurável, segue que $ZE[X | \mathcal{G}]$ é candidata a ser a $E[XZ | \mathcal{G}]$. Falta mostrar que, $\forall C \in \mathcal{G}$, $E[ZE[X | \mathcal{G}]; C] = E[XZ; C]$. É suficiente mostrar que $\forall B_i \in \mathcal{G}$, $E[ZE[X | \mathcal{G}]; B_i] = E[XZ; B_i]$. Seja z_i o valor constante de Z em cada B_i . Então

$$\begin{aligned} E[ZE[X | \mathcal{G}]; B_i] &= E[z_i E[X | \mathcal{G}]; B_i] = z_i E[E[X | \mathcal{G}]; B_i] = \\ &= z_i E[X; B_i] = E[XZ; B_i] \end{aligned}$$

Propriedade 10: Se $\mathcal{H} \subset \mathcal{G} \subset \Sigma$ então

$$E[E[X | \mathcal{H}] | \mathcal{G}] = E[X | \mathcal{H}] = E[E[X | \mathcal{G}] | \mathcal{H}].$$

Demonstração: Como $E[X | \mathcal{H}]$ é \mathcal{H} -mensurável e $\mathcal{H} \subset \mathcal{G}$, então

$E[X | \mathcal{H}]$ é \mathcal{G} -mensurável e a primeira igualdade decorre da propriedade

6. Seja $W = E[E[X | \mathcal{G}] | \mathcal{H}]$. Segue que W é \mathcal{H} -mensurável e

$$\forall C \in \mathcal{H} \subset \mathcal{G} \quad E[W; C] = E[E[X | \mathcal{G}]; C] = E[X; C]$$

Propriedade 11: Se X é uma variável aleatória, o melhor preditor de X dentre todas as variáveis aleatórias \mathcal{G} -mensuráveis é $Y = E[X | \mathcal{G}]$.

Demonstração: Seja Z uma variável aleatória \mathcal{G} -mensurável qualquer.

O erro quadrático na predição de X por Z , dado que se conhece \mathcal{G} , é dado por

$$\begin{aligned} E[(X - Z)^2 | \mathcal{G}] &= E[X^2 | \mathcal{G}] - 2E[XZ | \mathcal{G}] + E[Z^2 | \mathcal{G}] \\ &= E[X^2 | \mathcal{G}] - 2ZE[X | \mathcal{G}] + Z^2 \\ &= E[X^2 | \mathcal{G}] - 2ZY + Z^2 \\ &= E[X^2 | \mathcal{G}] - Y^2 + (Y - Z)^2 \\ &= E[X^2 | \mathcal{G}] - 2YE[X | \mathcal{G}] + Y^2 + (Y - Z)^2 \end{aligned}$$

$$E[(X - Z)^2 | \mathcal{G}] = E[(X - Y)^2 | \mathcal{G}] + (Y - Z)^2$$

Tomando a esperança de ambos os lados da igualdade:

$$E[E[(X - Z)^2 | \mathcal{G}]] = E[E[(X - Y)^2 | \mathcal{G}]] + E[(Y - Z)^2]$$

Usando a propriedade 7:

$$E[(X - Z)^2] = E[(X - Y)^2] + E[(Y - Z)^2]$$

Como $E[(Y - Z)^2] \geq 0$ segue que o erro quadrático que se comete ao se utilizar Z como preditor de X é maior que o que se comete ao se utilizar Y , e será igual se e somente se $Y=Z$. Portanto Y é o melhor preditor de X .

Apêndice B

Este apêndice contém as rotinas, escritas em linguagem R, utilizadas para cálculo dos exemplos mostrados no trabalho.

Salvo indicação em contrário, a ação subjacente tem valor inicial $S_0=100$, os multiplicadores do modelo binomial são $u=1.2$ e $d=0.9$, o tempo de maturação das opções é $T=5$ e a taxa de remuneração fixa é $r = 5\%$.

B.1 - Árvore binomial dos valores da ação subjacente

```
#           $S_0 = s[1,1]$ 
#           $S_1(T) = s[2,1] = s[1,1]u^0d^1$ 
#           $S_1(H) = s[2,2] = s[1,1]u^1d^0$ 
#           $S_2(TT) = s[3,1] = s[1,1]u^0d^2$ 
#           $S_2(TH) = S_2(HT) = s[3,2] = s[1,1]u^1d^1$ 
#           $S_2(HH) = s[3,3] = s[1,1]u^2d^0$ 
#          generalizando    $s[i,j] = s[1,1]u^{j-1}d^{(i-1)-(j-1)}$ 

T=5
I=T+1
u=1.2
d=0.9
S0=100
r = 0.05
R = 1+r
pe = (R-d)/(u-d)
qe = (u-R)/(u-d)
s=matrix(c(NA),I,I)
```

```

s[1,1]=S0
for (i in 2:I) {
  for (j in 1:i) {
    s[i,j] = s[1,1]*(u**(j-1))*(d**((i-1)-(j-1)))
  }
}
s1 = floor(100*s+0.5)/100
> s1

```

	[,1]	[,2]	[,3]	[,4]	[,5]	[,6]
[1,]	100.00	NA	NA	NA	NA	NA
[2,]	90.00	120.00	NA	NA	NA	NA
[3,]	81.00	108.00	144.00	NA	NA	NA
[4,]	72.90	97.20	129.60	172.80	NA	NA
[5,]	65.61	87.48	116.64	155.52	207.36	NA
[6,]	59.05	78.73	104.98	139.97	186.62	248.83

B.2 - Opção europeia de compra

B.2.1 - Com preço de exercício $K=100$

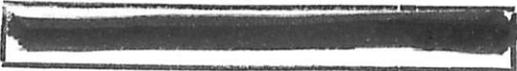
$K = 100$

$vec=matrix(c(NA),I,I)$ # valor da opção europeia de compra

```

for (j in 1:I) {
  vec[I,j]=max(0,(s[I,j]-K))
}
for (i in (I-1):1) {
  for (j in 1:i) {
    vec[i,j] = (pe*vec[i+1,j+1]+qe*vec[i+1,j])/R
  }
}
vec1 = floor(100*vec+0.5)/100
> vec1

```



	[,1]	[,2]	[,3]	[,4]	[,5]	[,6]	
[1,]	25.25		NA	NA	NA	NA	NA
[2,]	14.21	38.82		NA	NA	NA	NA
[3,]	5.93	23.91	57.62		NA	NA	NA
[4,]	1.13	11.32	38.90	82.10	NA	NA	
[5,]	0.00	2.37	21.40	60.28	112.12	NA	
[6,]	0.00	0.00	4.98	39.97	86.62	148.83	

Valores de $\Delta_k = \Delta(w_1 \dots w_k) = \frac{V(w_1 \dots w_k H) - V(w_1 \dots w_k T)}{S(w_1 \dots w_k H) - S(w_1 \dots w_k T)}$

```
deltaec=matrix(c(NA),I-1,I-1)
```

```
for (i in (I-1):1) {
```

```
  for (j in 1:i) {
```

```
    deltaec[i,j]=(vec[i+1,j+1]- vec[i+1,j])/( s[i+1,j+1]- s[i+1,j])
```

```
  }
```

```
}
```

```
deltaec1= floor(100*deltaec+0.5)/100
```

```
> deltaec1
```

	[,1]	[,2]	[,3]	[,4]	[,5]
[1,]	0.82	NA	NA	NA	NA
[2,]	0.67	0.94	NA	NA	NA
[3,]	0.42	0.85	1	NA	NA
[4,]	0.11	0.65	1	1	NA
[5,]	0.00	0.19	1	1	1

Valores do portfólio de hedge $X_0 = V_0 = \Delta_0 S_0 + (X_0 - \Delta_0 S_0)$

$X_k = \Delta_{k-1} S_k + (1+r)(X_{k-1} - \Delta_{k-1} S_{k-1}) = xec[k+1, j]$

```
xec = matrix(c(NA),I,I)
```

```
xec[1,1]=vec[1,1]
```

```
for (i in 2:I) {
```

```
  xec[i,1] = deltaec[i-1,1]*s[i,1]+R*(xec[i-1,1]-deltaec[i-1,1]*s[i-1,1])
```

```

for (j in 2:i) {
  xec[i,j] = deltaec[i-1,j-1] *s[i,j] +R*(xec[i-1,j-1] -deltaec[i-1,j-1] *s[i-
1,j-1])
}
}
xec1= floor(100*xec+0.5)/100
> xec1

```

	[,1]	[,2]	[,3]	[,4]	[,5]	[,6]	
[1,]	25.25		NA	NA	NA	NA	NA
[2,]	14.21	38.82		NA	NA	NA	NA
[3,]	5.93	23.91	57.62		NA	NA	NA
[4,]	1.13	11.32	38.90	82.10		NA	NA
[5,]	0.00	2.37	21.40	60.28	112.12	NA	
[6,]	0.00	0.00	4.98	39.97	86.62	148.83	

B.2.2 - Com preço de exercício $K=95$

Tendo sido executada a rotina B.1, basta repetir B.2.1 com o cuidado de, na primeira linha, fazer $K=95$. Os resultados obtidos são:

```

> vec1

```

	[,1]	[,2]	[,3]	[,4]	[,5]	[,6]	
[1,]	28.44		NA	NA	NA	NA	NA
[2,]	17.04	42.68		NA	NA	NA	NA
[3,]	8.09	27.69	61.94		NA	NA	NA
[4,]	2.26	14.72	43.43	86.63	NA	NA	
[5,]	0.00	4.75	26.16	65.04	116.88		NA
[6,]	0.00	0.00	9.98	44.97	91.62	153.83	

```

> deltaec1

```

	[,1]	[,2]	[,3]	[,4]	[,5]
[1,]	0.85	NA	NA	NA	NA
[2,]	0.73	0.95	NA	NA	NA
[3,]	0.51	0.89	1	NA	NA
[4,]	0.22	0.73	1	1	NA
[5,]	0.00	0.38	1	1	1

```

> xec1

```

	[,1]	[,2]	[,3]	[,4]	[,5]	[,6]
--	------	------	------	------	------	------

[1,]	28.44		NA	NA	NA	NA	NA
[2,]	17.04	42.68		NA	NA	NA	NA
[3,]	8.09	27.69	61.94		NA	NA	NA
[4,]	2.26	14.72	43.43	86.63		NA	NA
[5,]	0.00	4.75	26.16	65.04	116.88	NA	
[6,]	0.00	0.00	9.98	44.97	91.62	153.83	

B.2.3 - Com preço de exercício $K=110$

Fazendo $K=110$ na primeira linha de C.2.1 e tendo sido executada previamente a rotina C.1, os resultados obtidos são:

> vec1

	[,1]	[,2]	[,3]	[,4]	[,5]	[,6]	
[1,]	20.12		NA	NA	NA	NA	NA
[2,]	10.10	32.14		NA	NA	NA	NA
[3,]	3.24	17.98	49.52		NA	NA	NA
[4,]	0.00	6.80	30.97	73.03		NA	NA
[5,]	0.00	0.00	14.27	50.76	102.60	NA	
[6,]	0.00	0.00	0.00	29.97	76.62	138.83	

> deltaec1

	[,1]	[,2]	[,3]	[,4]	[,5]
[1,]	0.73	NA	NA	NA	NA
[2,]	0.55	0.88	NA	NA	NA
[3,]	0.28	0.75	0.97	NA	NA
[4,]	0.00	0.49	0.94	1	NA
[5,]	0.00	0.00	0.86	1	1

> xec1

	[,1]	[,2]	[,3]	[,4]	[,5]	[,6]	
[1,]	20.12		NA	NA	NA	NA	NA
[2,]	10.10	32.14		NA	NA	NA	NA
[3,]	3.24	17.98	49.52		NA	NA	NA
[4,]	0.00	6.80	30.97	73.03		NA	NA
[5,]	0.00	0.00	14.27	50.76	102.60		NA
[6,]	0.00	0.00	0.00	29.97	76.62	138.83	

B.3 - Opção europeia de venda

B.3.1 - Com preço de exercício $K=100$

K = 100

vev=matrix(c(NA),I,I) # valor da opção europeia de compra

for (j in 1:I) {

 vev[I,j]=max(0,(K-s[I,j]))

}

for (i in (I-1):1) {

 for (j in 1:i) {

 vev[i,j] = (pe*vev[i+1,j+1]+qe*vev[i+1,j])/R

 }

}

vev1 = floor(100*vev+0.5)/100

> vev1

	[,1]	[,2]	[,3]	[,4]	[,5]	[,6]	
[1,]	3.61	NA	NA	NA	NA	NA	
[2,]	6.48	1.09	NA	NA	NA	NA	
[3,]	11.31	2.30	0	NA	NA	NA	
[4,]	18.93	4.82	0	0	NA	NA	
[5,]	29.63	10.13		0	0	0	NA
[6,]	40.95	21.27		0	0	0	0

Valores de $\Delta_k = \Delta(w_1 \dots w_k) = \frac{V(w_1 \dots w_k H) - V(w_1 \dots w_k T)}{S(w_1 \dots w_k H) - S(w_1 \dots w_k T)}$

deltaev=matrix(c(NA),I-1,I-1)

for (i in (I-1):1) {

 for (j in 1:i) {

 deltaev[i,j]=(vev[i+1,j+1]- vev[i+1,j])/(s[i+1,j+1]- s[i+1,j])

 }

}

deltaev1= floor(100*deltaev+0.5)/100

> deltaev1

	[,1]	[,2]	[,3]	[,4]	[,5]
[1,]	-0.18	NA	NA	NA	NA
[2,]	-0.33	-0.06	NA	NA	NA
[3,]	-0.58	-0.15	0	NA	NA
[4,]	-0.89	-0.35	0	0	NA
[5,]	-1.00	-0.81	0	0	0

Valores do portfólio de hedging $X_0 = V_0 = \Delta_0 S_0 + (X_0 - \Delta_0 S_0)$

$X_k = \Delta_{k-1} S_k + (1+r)(X_{k-1} - \Delta_{k-1} S_{k-1}) = xec[k+1, j]$

xev = matrix(c(NA),I,I)

xev[1,1]=vev[1,1]

for (i in 2:I) {

 xev[i,1] = deltaev[i-1,1]*s[i,1]+R*(xev[i-1,1]-deltaev[i-1,1]*s[i-1,1])

 for (j in 2:i) {

 xev[i,j] = deltaev[i-1,j-1] *s[i,j] +R*(xev[i-1,j-1] -deltaev[i-1,j-1] *s[i-

1,j-1])

 }

 }

xev1= floor(100*xev+0.5)/100

> xev1

	[,1]	[,2]	[,3]	[,4]	[,5]	[,6]	
[1,]	3.61	NA	NA	NA	NA	NA	
[2,]	6.48	1.09	NA	NA	NA	NA	
[3,]	11.31	2.30	0	NA	NA	NA	
[4,]	18.93	4.82	0	0	NA	NA	
[5,]	29.63	10.13		0	0	0	NA
[6,]	40.95	21.27		0	0	0	0

B.4 - Gráfico de opção americana de compra

B.4.1 Gráfico para opção de compra

$S_0 = 100$

```

u = 1.20
d = 0.9
r = 1.05
npp = 5
p = (r-d)/(u-d)
LS = ((u**npp)*S0)
LI = ((d**npp)*S0)-10
K= c((10*LI):(LS*10))/10
C=c(NA)
Cp=c(NA)
y = c(1:length(K))
y[1:length(K)] = 0
y[length(K)] = (u**npp)*S0/(r**npp)-S0-20

```

```

plot(K,y, type = "n",ylab = "Valor De arbitragem", xlab = "Preço de exercício
K",
main = list("Figura 4.3.2.1 - Opção americana de compra", cex=1.2,col="black",
font=1))

```

```

for (np in npp:1) {
C[1:length(K)]=0
for (j in 0:np) {
Cp[1:length(K)]=0
for (i in 1:length(K)) {
Cp[i] = Cp[i] + dbinom(j, np, p)*max(0,((u**j)*(d**(np-j))*S0-K[i]))
Cp[i] = Cp[i]/(r**np)
}
}
}

```

```
# lines(K,Cp)
C = C + Cp
}
lines(K,C, col="blue")
}
V=c(NA)
```

```
for (i in 1:length(K)) {
V[i] = max(0,S0-K[i])
}
lines(K,V, col="red")
```

B.5 - Exercício antecipado de opção americana de compra

```
#      Necesita execução prévia de B.1 e B.2 com o valor apropriado
#      de K.
```

```
eaoc = matrix (NA,I,I) # exercício antecipado de opção americana de compra
for (i in 1:I) {
for (j in 1:i) {
eaoc[i,j]=max((s[i,j]-K),0)
}
}
}
```

```
eaoc1= floor(100* eaoc+0.5)/100
```

```
> eaoc1
```

	[,1]	[,2]	[,3]	[,4]	[,5]	[,6]	
[1,]	0	NA	NA	NA	NA	NA	
[2,]	0	20	NA	NA	NA	NA	
[3,]	0	8	44.00		NA	NA	NA
[4,]	0	0	29.60	72.80		NA	NA

```
[5,] 0 0 16.64 55.52 107.36 NA
[6,] 0 0 4.98 39.97 86.62 148.83
```

```
K = 95
```

```
vec=matrix(c(NA),I,I) # valor da opção europeia de compra
```

```
for (j in 1:I) {
```

```
    vec[I,j]=max(0,(s[I,j]-K))
```

```
}
```

```
for (i in (I-1):1) {
```

```
for (j in 1:i) {
```

```
    vec[i,j] = (pe*vec[i+1,j+1]+qe*vec[i+1,j])/R
```

```
}
```

```
}
```

```
eaoac = matrix (NA,I,I)# exercício antecipado de opção americana de compra
```

```
for (i in 1:I) {
```

```
for (j in 1:i) {
```

```
    eaoac[i,j]=max((s[i,j]-K),0)
```

```
}
```

```
}
```

```
difvaeaoac=vec-eaoac
```

```
difvaeaoac1= floor(100* difvaeaoac+0.5)/100
```

```
> difvaeaoac1
```

	[,1]	[,2]	[,3]	[,4]	[,5]	[,6]	NA
[1,]	23.44		NA	NA	NA	NA	NA
[2,]	17.04	17.68		NA	NA	NA	NA
[3,]	8.09	14.69	12.94	NA	NA	NA	
[4,]	2.26	12.52	8.83	8.83	NA	NA	
[5,]	0.00	4.75	4.52	4.52	4.52	NA	
[6,]	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	

```

K = 110
vec=matrix(c(NA),I,I) # valor da opção europeia de compra
for (j in 1:I) {
  vec[I,j]=max(0,(s[I,j]-K))
}
for (i in (I-1):1) {
  for (j in 1:i) {
    vec[i,j] = (pe*vec[i+1,j+1]+qe*vec[i+1,j])/R
  }
}
eaoac = matrix (NA,I,I) # exercício antecipado de opção americana de compra
for (i in 1:I) {
  for (j in 1:i) {
    eaoac[i,j]=max((s[i,j]-K),0)
  }
}
difvaeaoac=vec-eaoac
difvaeaoac1= floor(100* difvaeaoac+0.5)/100
> difvaeaoac1

```

	[,1]	[,2]	[,3]	[,4]	[,5]	[,6]	
[1,]	20.12		NA	NA	NA	NA	NA
[2,]	10.10	22.14		NA	NA	NA	NA
[3,]	3.24	17.98	15.52		NA	NA	NA
[4,]	0.00	6.80	11.37	10.23	NA	NA	
[5,]	0.00	0.00	7.63	5.24	5.24	NA	
[6,]	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	

B.6 - Gráfico de opção americana de venda

S0 = 100

u = 1.20

```

d = 0.9
r = 1.05
npp = 5
p = (r-d)/(u-d)
LS = ((u**npp)*S0)
LI = ((d**npp)*S0)-10
K= c((10*LI):(LS*10))/10
y = c(1:length(K))
y[1:length(K)] = 0
y[length(K)] = (u**npp)*S0/(r**npp)-S0-55
plot(K,y, type="n",ylab = "Valor de arbitragem", xlab = "Preço de exercício K")

```

```

for (np in npp:1) {
C[1:length(K)]=0
for (j in 0:np) {
Cp[1:length(K)]=0
for (i in 1:length(K)) {

Cp[i] = Cp[i] + dbinom(j, np, p)*max(0,K[i]-((u**j)*(d**(np-j))*S0))
Cp[i] = Cp[i]/(r**np)
}
# lines(K,Cp)
C = C + Cp
}
lines(K,C, col="blue")
}
np=0
C[1:length(K)]=0

```

```

for (j in 0:np) {
Cp[1:length(K)]=0
for (i in 1:length(K)) {

Cp[i] = Cp[i] + dbinom(j, np, p)*max(0,K[i]-((u**j)*(d**(np-j))*S0))
Cp[i] = Cp[i]/(r**np)
}
C = C + Cp
}
lines(K,C, col="red")

```

B.7 - Preço e hedge opção americana de venda

B.7.1- Árvore binomial dos valores da ação subjacente (idêntica a C.1)

T=5

I=T+1

u=1.2

d=0.9

S0=100

r = 0.05

R = 1+r

pe = (R-d)/(u-d)

qe = (u-R)/(u-d)

s=matrix(c(NA),I,I)

s[1,1]=S0

for (i in 2:I) {

for (j in 1:i) {

s[i,j] = s[1,1]*(u**(j-1))*(d**((i-1)-(j-1)))

}

```

}
s1 = floor(100*s+0.5)/100
> s1
      [,1] [,2] [,3] [,4] [,5] [,6]
[1,] 100.00 NA   NA   NA   NA   NA
[2,]  90.00 120.00 NA   NA   NA   NA
[3,]  81.00 108.00 144.00 NA   NA   NA
[4,]  72.90  97.20 129.60 172.80 NA   NA
[5,]  65.61  87.48 116.64 155.52 207.36 NA
[6,]  59.05  78.73 104.98 139.97 186.62 248.83

```

B.7.2- Árvore binomial dos valores de exercício da opção americana de venda

K=110

veoav = matrix(NA,I,I) # valores de exercício de opção americana de venda

```

for(i in 1:I) {
for(j in 1:i) {
veoav [i,j]=max((K-s[i,j]),0)
}
}

```

> vaoav1

```

      [,1] [,2] [,3] [,4] [,5] [,6]
[1,] 10.00 NA   NA   NA   NA   NA
[2,] 20.00 0.00 NA   NA   NA   NA
[3,] 29.00 2.00 0.00 NA   NA   NA
[4,] 37.10 12.80 0.00 0   NA   NA
[5,] 44.39 22.52 0.00 0   0   NA
[6,] 50.95 31.27 5.02 0   0   0

```

B.7.3- Árvore binomial dos valores arbitrais da opção americana de venda

```
vaoav = matrix (NA,I,I) # valores arbitrários de opção americana de  
venda
```

```
vaoav[I,]=veoav[I,]
```

```
p = (R-d)/(u-d)
```

```
q = 1-p
```

```
for (i in T:1) {
```

```
  for (j in 1:i) {
```

```
    vaoav[i,j]=max(veoav[i,j],(p*vaoav [(i+1),(j+1)]+ q* vaoav [(i+1),j])/R)
```

```
  }
```

```
}
```

```
vaoav1= floor(100*vaoav+0.5)/100
```

```
> vaoav1
```

	[,1]	[,2]	[,3]	[,4]	[,5]	[,6]
[1,]	11.15	NA	NA	NA	NA	NA
[2,]	20.00	3.42	NA	NA	NA	NA
[3,]	29.00	6.64	0.54	NA	NA	NA
[4,]	37.10	12.80	1.14	0	NA	NA
[5,]	44.39	22.52	2.39	0	0	NA
[6,]	50.95	31.27	5.02	0	0	0

6 REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- BASS, R. F. The basics of financial mathematics. Disponível em: <www.math.uconn.edu/~bass/finlmath.pdf>. Acesso em: 10 jul. 2004.
- BLACK, F.; SHOLES, M. The pricing of options and corporate liabilities. *Journal of Political Economics*, Amsterdam, v. 81, p. 637-659, 1973.
- COX, J. C.; ROOS, S. A.; RUBINSTEIN, M. Option pricing: a simplified approach. *Journal of Financial Economics*, Lausanne, v. 7, p. 229-263, 1979.
- DAVIS, M. Mathematics of financial markets. Disponível em: <www.ma.ic.ac.uk/~mdavis/docs/math2001.pdf>. Acesso em: 10 jul. 2004.
- FERGUSON, T. S. Optimal stopping and applications. <<http://www.math.ucla.edu/~tom/Stopping/Contents.html>>. Acesso em: 10 jul. 2004.
- MERTON, R. C. Theory of rational option pricing. *Bell Journal of Economics and Management Science*, New York, v. 4, n. 1, p. 141-183, 1973.
- SHREVE, S. E. *Stochastic calculus and finance*. New York: Springer, 2004. v.1, 187 p.
- WILLIAMS, D. *Probability with martingales*. 6. ed. Cambridge: Cambridge University Press, 2002. 272 p.
- WILLIAMS, R. J. *Introduction to the mathematics of finance*. Mathematics Department, University of California at San Diego, 2005.