



JOYCE DE ALMEIDA ALVES

**MODELAGEM VOLUMÉTRICA EM
POVOAMENTOS DE EUCALIPTO**

LAVRAS – MG

2018

JOYCE DE ALMEIDA ALVES

**MODELAGEM VOLUMÉTRICA EM POVOAMENTOS DE
EUCALIPTO**

Tese apresentada à Universidade Federal de Lavras, como parte das exigências do Programa de Pós-Graduação em Engenharia Florestal, área de concentração em Manejo Florestal, para a obtenção do título de Doutor.

Ph.D. Natalino Calegario

Orientador

LAVRAS – MG

2018

**Ficha catalográfica elaborada pelo Sistema de Geração de Ficha Catalográfica da Biblioteca
Universitária da UFLA, com dados informados pelo(a) próprio(a) autor(a).**

Alves, Joyce de Almeida.

Modelagem volumétrica em povoamentos de eucalipto /
Joyce de Almeida Alves. – 2017.
132 p. : il.

Orientador: Natalino Calegario.

Tese (doutorado) - Universidade Federal de Lavras, 2017.
Bibliografia.

1. Modelo de Clutter. 2. Afilamento. 3. Expoente-variável. I.
Calegario, Natalino. II. Título.

JOYCE DE ALMEIDA ALVES

**MODELAGEM VOLUMÉTRICA EM POVOAMENTOS DE
EUCALIPTO**

VOLUMETRIC MODELING IN EUCALYPT STANDS

Tese apresentada à Universidade Federal de Lavras, como parte das exigências do Programa de Pós-graduação em Engenharia Florestal, área de concentração em Manejo Florestal, para a obtenção do título de Doutor.

APROVADA em 15 de setembro de 2017.

Prof. Dr. Fausto Weimar Acerbi Júnior UFLA

Prof. Dr. Sebastião Carlos da Silva Rosado UFLA

Prof. Dr. Paulo Fernando Trugilho UFLA

Prof. Dr. Ernani Lopes Possato UFU

Ph.D. Natalino Calegario
Orientador

LAVRAS - MG

2018

Aos amigos que encontrei.

DEDICO.

AGRADECIMENTOS

A Deus, por guiar meus caminhos e por me manter forte nos momentos difíceis.

À minha família, meu bem mais precioso. Agradeço-lhe pela paciência, por todo amor, pelos conselhos e orações. Ao meu amor, pelo companheirismo incondicional, paciência e amor.

À Universidade Federal de Lavras (UFLA) e ao Programa de Pós-Graduação em Engenharia Florestal, pela oportunidade concedida.

Ao Departamento de Ciências Florestais, que desde 2006 se tornou minha segunda casa. Aos funcionários do DCF, em especial, à Chica e ao Juliano, pela ajuda e palavras de carinho.

À Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (CAPES), pela concessão da bolsa de estudos.

Ao meu orientador, Professor Natalino Calegario, pelos ensinamentos, por me incentivar a seguir em frente e por confiar em mim.

Aos Professores Fausto, Paulo, Rosado e ao amigo Ernani pelas contribuições e ideias para aperfeiçoamento deste trabalho.

Aos meus queridos amigos Isaac, Elliezer e Gabriela, pelo apoio, pela ajuda e amizade, sem os quais eu não teria conseguido. Aos demais amigos de orientação, Tati, Pedro, Poliana, pela convivência e amizade.

Às minhas queridas amigas, Mi e Ge, presentes que Deus me deu. Obrigada por todo apoio e orações.

À minha amiga, Mari, que me acompanhou e me apoiou até os últimos momentos. Cada palavra, cada sentimento e experiência compartilhada foram essenciais para finalizar esta etapa.

À minha amiga Marcela, que sempre esteve presente em momentos cruciais. Obrigada pelo apoio incondicional.

Aos meus queridos amigos Helde, Tati, Line, Gege, Elias, por confiarem em mim e me incentivarem sempre.

Aos amigos da Diretoria de Relações Internacionais, em especial, à Noelly, Gustavo, Paulinho, Isabela e Sarah, pela compreensão e apoio na fase final da tese. Ao Professor Chalfun, meu chefe, pelo incentivo e compreensão.

A todos que direta ou indiretamente contribuíram para a realização deste trabalho.

RESUMO GERAL

O volume e o afilamento do fuste das árvores, associados à qualidade da madeira, são as variáveis mais relevantes para determinação do valor e uso do produto. A avaliação e o desenvolvimento de modelos são essenciais para a predição adequada destas variáveis. Este trabalho foi desenvolvido com o intuito de modelar o volume de povoamentos de *Eucalyptus* spp. em nível de árvore, utilizando as funções de expoente-variável e em nível de povoamento, utilizando modelos de crescimento e produção florestal. No primeiro artigo, duas alternativas foram avaliadas, para estimar o crescimento e a produção em povoamentos de *Eucalyptus*, a partir de modificações no modelo original de Clutter e na estrutura dos dados. A alternativa 1 consistiu em testar transformações diferentes das propostas no modelo original de Clutter, para o sítio e a área basal e ajustar o modelo modificado completo (interações duplas e tripla). Nesta alternativa, todas as unidades amostrais foram utilizadas e a característica longitudinal da base de dados não foi considerada. As equações, para área basal e volume resultantes da alternativa 1, foram transformadas em sistema e ajustadas para os dados das unidades amostrais com duas ou mais medições (alternativa 2). Estas alternativas foram comparadas com o sistema originalmente proposto por Clutter. O sistema de Clutter foi a melhor alternativa. O sistema proposto na alternativa 2 apresentou estatísticas semelhantes às do sistema de Clutter. A equação de área basal da alternativa 1 apresentou baixa precisão, porém a equação do volume apresentou precisão semelhante ao sistema de Clutter. Os erros na predição do volume e da área basal para dados de validação foram maiores na alternativa 1. No segundo artigo, avaliou-se a qualidade dos ajustes de equações de expoente-variável de Kozak, para estimar os diâmetros, ao longo do fuste e volume total (sem casca e com casca) de árvores de *Eucalyptus* spp. Uma nova proposta, para estimar a altura relativa do ponto de inflexão – p por métodos geométricos, foi apresentada com o intuito de evitar a subjetividade na determinação de p . As funções de expoente-variável foram ajustadas, considerando diferentes estratégias na determinação de p (como parâmetro, conforme definido por Kozak e valor médio estimado por métodos geométricos) e uma nova equação de expoente-variável foi desenvolvida. As equações ajustadas apresentaram boa precisão e boa habilidade para predizer diâmetros e volume. A estratégia utilizada na determinação de p não teve influência na precisão das equações. A nova equação proposta apresentou comportamento semelhante às já desenvolvidas por Kozak, porém tem a vantagem de possuir um expoente mais simples.

Palavras-chave: Modelo de Clutter. Afilamento. Expoente-variável. Ponto de inflexão. *Eucalyptus* spp.

GENERAL ABSTRACT

The volume and tapering of tree stems, associated to wood quality, are the most relevant variables to determine the value and use of the product. The evaluation and development of models are essential for the adequate prediction of these variables. This work was developed with the intent of modeling the volume of *Eucalyptus* spp. at the tree level, using the variable-exponent functions, and at the stand level, using the growth and forest yield models. In the first article, two alternatives were evaluated to estimate the growth and yield of *Eucalyptus* stands based on modifications of the original Clutter's model and in the data structure. Alternative 1 consisted of testing distinct transformations of the proposals in the original Clutter model for the site and basal area, and adjust the complete modified model (double and triple interactions). For this alternative, all sample plots were used, and the longitudinal trait of the database was not considered. The equations for basal area and volume resulting from alternative 1 were transformed into system and adjusted for the data of the sample plots with two or more measurements (alternative 2). These alternatives were compared to the system originally proposed by Clutter. The Clutter system was the best alternative. The system proposed in alternative 2 presented statistics similar to those of the Clutter system. The basal area equation of alternative 1 presented low precision. However, the volume equation presented precision similar to that of the Clutter system. The prediction errors for volume and basal area for the validation data were higher in alternative 1. In the second article, the quality of the Kozak variable-exponent equation adjustments were evaluated in order to estimate the diameters along the stem and total volume (outside and inside bark) of *Eucalyptus* spp. trees. A new proposal to estimate the relative height of the inflection point – p by means of geometric methods was presented to avoid subjectivity during the determination of p . The variable-exponent functions were adjusted, considering different strategies for the determination of p (as parameter, according to that defined by Kozak and mean value estimated by geometric methods), and a new exponent variable-equation was developed. The adjusted equations presented good precision and good ability for predicting diameters and volume. The strategy used for determining p had no influence over the precision of the equations. The new proposed equation presented behavior similar to those already developed by Kozak, however, with the advantage of presenting a simpler exponent.

Keywords: Clutter model. Taper. Variable-exponent. Inflection point. *Eucalyptus* spp.

LISTA DE FIGURAS

SEGUNDA PARTE – ARTIGOS

ARTIGO 1

Figura 1 - Gráfico de resíduos padronizados x volume estimado (m^3ha^{-1}) para a Alternativa 1	50
Figura 2 - Gráfico de resíduos padronizados x Área basal estimada (m^2ha^{-1}) para a Alternativa 1.	51
Figura 3 - Área basal observada x Área basal predita para os dados de validação.	52
Figura 4 - Volume observado x Volume predito para os dados de validação.	52
Figura 5 - Curvas de produção em volume por classe de índice de sítio (I-melhor e VI-pior) – Alternativa 1.....	53
Figura 6 - Curvas de incremento médio anual (IMA) e incremento corrente anual (ICA) por classe de índice de sítio (I-melhor e VI-pior).....	54
Figura 7 - Gráfico de resíduos padronizados para o modelo volumétrico da Alternativa 2.....	57
Figura 8 - Gráfico de resíduos padronizados para o modelo de área basal da Alternativa 2.....	57
Figura 9 - Área basal observada x Área basal predita para os dados de validação.	58
Figura 10 - Volume observado x Volume predito para os dados de validação.	59
Figura 11 - Curvas de produção em volume por classe de índice de sítio (I-melhor e VI-pior) – Alternativa 2.....	59

Figura 12 - Curvas de incremento médio anual (IMA) e incremento corrente anual (ICA) por classe de índice de sítio (I-melhor e VI-pior) (Continua)	61
Figura 13 - Gráfico de resíduos padronizados para o modelo volumétrico da Alternativa 3.....	64
Figura 14 - Gráfico de resíduos padronizados para o modelo de área basal da Alternativa 3.....	64
Figura 15 - Área basal observada x Área basal predita para os dados de validação.....	64
Figura 16 - Volume observado x Volume predito para os dados de validação.....	65
Figura 17 - Curvas de produção em volume por classe de índice de sítio (I-melhor e VI-pior) – Alternativa (Clutter).....	66
Figura 18 - Curvas de incremento médio anual (IMA) e incremento corrente anual (ICA) por classe de índice de sítio (I-melhor e VI-pior) (Continua)	67

ARTIGO 2

Figura 1 - Percentual total de árvores com p (altura relativa do ponto de inflexão) não estimado. EDE = <i>Extremum Distance Estimator</i> ; ESE = <i>Extremum Surface Estimator</i> ; BEDE = <i>Bisection Extremum Distance Estimator</i> ; BESE = <i>Bisection Extremum Surface Estimator</i>	91
Figura 2 - Árvore com ponto de inflexão estimado (ponto cinza) por todos os métodos (DAP= 19,8 cm e H= 24,4 m). Cor sólida = perfil com casca. Transparente = perfil sem casca.	92

Figura 3 - Ausência de dados coletados em árvores muito pequenas (DAP= 5,1 cm e H= 8,1 m) (a) Ponto de inflexão não estimado pelos métodos EDE e BEDE. (b) Ponto de inflexão (ponto cinza) estimado pelos métodos ESE e BESE. Cor sólida = perfil com casca. Transparente = perfil sem casca.	94
Figura 4 - Perfil sem casca com forma parabolóide. Os pontos de cor preta representam os dados de cubagem. Ponto cinza = ponto de inflexão estimado pelo método ESE. Cor sólida = perfil com casca. Transparente = perfil sem casca.	95
Figura 5 - Árvore com ponto de inflexão estimado (ponto cinza) apenas para o perfil com casca pelo método BESE. Cor sólida = perfil com casca. Transparente = perfil sem casca.	96
Figura 6 - Relação da altura relativa do ponto de inflexão (p) com o DAP e a H da árvore, para perfil sem casca.	98
Figura 7 - Relação da altura relativa do ponto de inflexão (p) com o DAP e a H da árvore, para perfil sem casca.	98
Figura 8 - Relação da altura relativa do ponto de inflexão (p) com o DAP e a H da árvore, para perfil com casca.	99
Figura 9 - Relação da altura relativa do ponto de inflexão (p) com o DAP e a H da árvore, para perfil com casca.	100
Figura 10 - Relação da altura do ponto de inflexão (h_I) com o DAP e a H da árvore, para perfil com (a) e sem (b) casca.	101
Figura 11 - Gráficos de resíduos padronizados para a equação de 1988. p estimado como parâmetro da equação.	106
Figura 12 - Gráficos de resíduos padronizados para a equação de 1988. p = valor médio estimado pelo método geométrico que possibilitou o menor erro padrão residual.	106

Figura 13 - Gráficos de resíduos padronizados para a equação de 2001. p = conforme definido por Kozak.	107
Figura 14 - Gráficos de resíduos padronizados para a equação de 2001. p estimado como parâmetro da equação.	109
Figura 15 - Gráficos de resíduos padronizados para a equação de 2002. p = conforme definido por Kozak.	109
Figura 16 - Gráficos de resíduos padronizados para a equação de 2002. p estimado como parâmetro da equação.	110
Figura 17 - Volume observado (smalian) versus predito (integração) para equação de 1988.	118
Figura 18 - Volume observado (smalian) versus predito (integração) para equação de 2001.	118
Figura 19 - Volume observado (smalian) versus predito (integração) para equação de 2002.	119
Figura 20 - Gráficos de resíduos padronizados para a equação de modificada.	122
Figura 21 - Volume observado (smalian) versus predito (integração) para equação modificada. (a) volume sem casca (b) volume com casca.	123

ANEXO A

Figura 1 - Representação dos métodos EDE = <i>Extremum Distance Estimator</i> e ESE = <i>Extremum Surface Estimator</i> . p = ponto de inflexão.	131
---	-----

LISTA DE TABELAS

PRIMEIRA PARTE

Tabela 1 - Diferenças entre as funções de afilamento de Kozak (1988) e de Newnham (1988).	25
Tabela 2 - Equações derivadas da equação de Kozak (1988).	28

SEGUNDA PARTE - ARTIGOS

ARTIGO 1

Tabela 1 - Estatísticas descritivas das variáveis do povoamento: Área basal - G ($m^2 ha^{-1}$), Volume V - ($m^3 ha^{-1}$), Idade - I (anos) e Sítio - S (m).	42
Tabela 2 - Parâmetros estimados para as equações da alternativa 1.	49
Tabela 3 - Parâmetros estimados para as equações da alternativa 2.	56
Tabela 4 - Parâmetros estimados para as equações da alternativa 2.	63

ARTIGO 2

Tabela 1 - Número de árvores cubadas por classe de diâmetro.	83
Tabela 2 - Parâmetros estimados para as equações de expoente-variável.	104
Tabela 3 - Erro médio por classe de altura relativa ($Z_i=h_i/H$) para os dados de validação.	113
Tabela 4 - Erro médio absoluto por classe de altura relativa ($Z_i=h_i/H$) para os dados de validação.	114
Tabela 5 - Erro médio percentual por classe de altura relativa ($Z_i=h_i/H$) para os dados de validação.	115
Tabela 6 - Raiz do erro médio quadrático por classe de altura relativa ($Z_i=h_i/H$) para os dados de validação.	116
Tabela 7 - Parâmetros estimados para as equações de expoente-variável.	121

SUMÁRIO

	PRIMEIRA PARTE	17
1	INTRODUÇÃO GERAL	17
2	REFERENCIAL TEÓRICO	19
2.1	Crescimento e produção florestal	19
2.1.1	Modelo de Sullivan e Clutter (1972)	20
2.2	Funções de afilamento	22
2.2.1	Equações de expoente-variável ou forma-variável	23
2.2.2	Altura relativa no ponto de inflexão - p	28
	REFERÊNCIAS	31
	SEGUNDA PARTE - ARTIGOS	35
	ARTIGO 1 – MODELOS DE CRESCIMENTO E PRODUÇÃO EM NÍVEL DE POVOAMENTO PARA PLANTIOS DE <i>Eucalyptus</i> sp.	35
1	INTRODUÇÃO	39
2	MATERIAL E MÉTODOS	41
2.1	Dados	41
2.2	Ajuste dos modelos de crescimento e produção	42
2.3	Avaliação dos modelos e validação	47
3	RESULTADOS E DISCUSSÃO	49
3.1	Avaliação e aplicação da Alternativa 1	49
3.2	Avaliação e aplicação da Alternativa 2	56
3.3	Avaliação e aplicação da Alternativa 3: Sistema de equações de Clutter	63
3.4	Comparação entre alternativas	69
4	CONCLUSÃO	71
	REFERÊNCIAS	73
	ARTIGO 2 – AVALIAÇÃO DE FUNÇÕES DE AFILAMENTO DE EXPOENTE-VARIÁVEL PARA ÁRVORES DE <i>Eucalyptus</i> <i>spp.</i>	75
1	INTRODUÇÃO	79
2	MATERIAL E MÉTODOS	83
2.1	Base de dados	83
2.2	Ajuste da função de afilamento de expoente variável	84
2.3	Determinação das coordenadas do ponto de inflexão	85
2.4	Equação de expoente-variável modificada	86
2.5	Estimativa da altura relativa do ponto de inflexão para árvores inventariadas	87
2.6	Análise dos resultados	88
3	RESULTADOS E DISCUSSÃO	91

3.1	Estimativa do valor de p por meio de métodos geométricos	91
3.2	Avaliação das equações de expoente-variável.....	103
3.3	Avaliação da equação de expoente-variável modificada	121
4	CONCLUSÃO	125
	REFERÊNCIAS.....	127
	ANEXO A – MÉTODOS GEOMÉTRICOS PARA DETERMINAÇÃO DO PONTO DE INFLEXÃO.....	131

PRIMEIRA PARTE

1 INTRODUÇÃO GERAL

A modelagem do crescimento e produção em florestas plantadas é realizada com o intuito de fornecer informações adequadas que subsidiem os profissionais da área na tomada de decisões em relação ao planejamento florestal e às intervenções nos plantios. O uso de modelos permite a representação simplificada dos atributos das espécies, em diferentes condições e das mudanças destes atributos, ao longo dos anos de desenvolvimento da floresta. Portanto a confiabilidade das informações está diretamente relacionada à consistência e acurácia na coleta dos dados e à escolha adequada dos modelos.

O volume e o afilamento do fuste das árvores, associados à qualidade da madeira, são as variáveis mais relevantes para determinação do valor e uso do produto (celulose, papel, painéis de madeira, pisos laminados, carvão vegetal, madeira serrada). A modelagem do volume, geralmente, acontece em dois níveis: em nível de árvore, representada pelas equações de volume ou afilamento e em nível de povoamento, representada pelos modelos de crescimento e produção florestal.

Nesse sentido, as equações de afilamento desempenham um papel fundamental, pois permitem predizer o diâmetro para qualquer altura do fuste, a altura e o volume comercial para qualquer diâmetro mínimo, o volume total, o número de toras por produto e o volume de toras por produto. Por fornecerem essas informações, têm sido objeto de estudo de muitos pesquisadores florestais, que buscaram desenvolver, ao longo dos anos, diversos tipos de equações com o objetivo de estimar com acurácia os diâmetros, volumes e alturas (KOZAK, 1988; KOZAK; MUNRO; SMITH, 1969; MAX; BURKHART, 1976; ORMEROD, 1973; PARRESOL; HOTVEDT; CAO, 1987; PIRES;

CALEGARIO, 2007; SCHOEPFER, 1966; YANG; HUANG; MENG, 2009). Dentre os diversos tipos, as equações de expoente-variável de Kozak (1988, 2004) destacam-se em algumas pesquisas por apresentarem desempenho superior comparado a outros (ANDRADE, 2014; BERHE; ARNOLDSSON, 2008; LI; WEISKITTEL, 2010; NEWNHAM, 1992).

Os volumes por hectare, para cada unidade amostral, são calculados a partir das funções de afilamento ajustadas. A associação desta variável com a idade (I), a qualidade do sítio, representada pelo índice de sítio (S) e a densidade, representada pela área basal por unidade de área (G), compõem a base para a modelagem do crescimento e produção em nível de povoamento. Nesse contexto, um dos modelos mais aplicados é o de Clutter (1963).

Verificando a importância da estimativa do volume por árvore e por unidade de área e considerando que os plantios de eucalipto ocupam 5,7 milhões de hectares da área de árvores plantadas do Brasil (INDÚSTRIA BRASILEIRA DE ÁRVORES - IBÁ, 2017) objetivou-se neste trabalho:

- a) avaliar duas alternativas para estimar o crescimento e a produção em povoamentos de eucalipto, a partir de modificações (transformações das variáveis e interações), no modelo original de Clutter e na estrutura dos dados e compará-las com o sistema de Clutter;
- b) avaliar a qualidade do ajuste das equações de expoente-variável de Kozak (KOZAK, 1988, 2004), para estimar os diâmetros, ao longo do fuste e volume total (com e sem casca) de árvores de eucalipto, considerando diferentes estratégias na determinação da altura relativa do ponto de inflexão – p (como parâmetro, conforme definido por Kozak e valor médio estimado por métodos geométricos). Além disso, apresentar uma proposta para estimar o valor de p por métodos geométricos e desenvolver uma nova equação de expoente-variável.

2 REFERENCIAL TEÓRICO

2.1 Crescimento e produção florestal

O crescimento é definido como o incremento em dimensão durante um período determinado (ex: crescimento em volume em $\text{m}^3\text{ha}^{-1}\text{ano}^{-1}$) (VANCLAY, 1994). Pode ser expresso, por meio do incremento médio anual (IMA), incremento corrente anual (ICA), incremento periódico (IP) e incremento periódico médio (IPM). Os modelos de crescimento representam a mudança do tamanho do organismo ou população com a idade (ZEIDE, 1993).

A produção pode ser considerada como a soma dos incrementos anuais, ou seja, refere-se às dimensões finais ao final de certo período (volume, m^3ha^{-1}) (VANCLAY, 1994). Quando o tamanho de um organismo é representado, graficamente com a idade, a curva definida apresenta uma forma sigmoide que retrata o crescimento cumulativo do organismo (HUSH; MILLER; BEERS, 1982).

A fase do desenvolvimento do povoamento, a qualidade do sítio e o grau de ocupação do sítio são fatores que estão intimamente correlacionados com o crescimento e a produção de povoamentos florestais. Em povoamentos equiâneos, estes fatores são expressos, quantitativamente, por meio da idade, do índice de sítio e da densidade (área basal por unidade de área ou número de plantas por unidade de área), respectivamente (BURKHART; TOMÉ, 2012).

Schumacher (1939) desenvolveu o modelo (1) base para a evolução das teorias de modelagem do crescimento e produção florestal. Seu modelo pode ser representado de maneira generalizada por:

$$\ln(V_i) = \beta_0 + \beta_1 I_i^{-1} + \beta_2 f(S_i) + \beta_3 h(G_i) + \varepsilon_i \quad (1)$$

Em que: $\ln(V)$ = logaritmo neperiano do volume por unidade de área; I = idade do povoamento; $f(S)$ = uma função do índice de sítio e $h(G)$ = uma função da densidade do povoamento, ε = erro aleatório.

Buckman (1962) e Clutter (1963) foram pioneiros no desenvolvimento de um sistema que considera a relação matemática existente entre crescimento e produção nas análises. Os trabalhos desses autores deram origem ao conceito de compatibilidade. Os modelos são compatíveis, quando o modelo de produção pode ser obtido, por meio da integração do modelo de crescimento (CLUTTER, 1963).

O modelo de Clutter (1963) é um dos mais difundidos e utilizados na área florestal. O sistema desenvolvido é composto pela equação de produção em volume, crescimento em área basal, crescimento em volume, projeção em área basal e projeção em volume.

Sullivan e Clutter (1972) reconheceram a dependência existente entre os parâmetros das equações do sistema de Clutter (1963) e garantiram a consistência numérica das equações, por meio do desenvolvimento de um modelo linear único para projeção do volume, que é função da idade inicial, da idade de projeção, do índice de sítio e da área basal inicial.

Quando a idade de projeção é igual à idade inicial, o modelo é simplificado na equação convencional de produção e, por isso, foi denominado como "modelo simultâneo de crescimento e produção".

2.1.1 Modelo de Sullivan e Clutter (1972)

Os modelos de produção (2), (3) e (4), para a medida inicial e para a medida subsequente, podem ser representados por (SULLIVAN; CLUTTER, 1972):

$$E(y_1) = \beta_0 + \beta_1 S + \beta_2 I_1^{-1} + \beta_3 \ln(G_1) \quad (2)$$

$$E(y_2) = \beta_0 + \beta_1 S + \beta_2 I_2^{-1} + \beta_3 \ln(G_2) \quad (3)$$

$$E(\ln G_2) = \left(\frac{I_1}{I_2}\right) \ln G_1 + \alpha_1 \left(1 - \frac{I_1}{I_2}\right) + \alpha_2 \left(1 - \frac{I_1}{I_2}\right) S \quad (4)$$

Em que: y_i = logaritmo neperiano do volume por unidade de área para a i -ésima medição; S = índice de sítio; I_i = idade do povoamento para a i -ésima medição; E = indica o valor esperado.

Substituindo o $\ln G_2$ da Equação 3 pela forma funcional do valor esperado, representado pela Equação 4 e simplificando a expressão resultante obtém-se (5):

$$E(y_2) = \beta_0 + \beta_1 S + \beta_2 I_2^{-1} + \beta_3 \left(\frac{I_1}{I_2}\right) \ln G_1 + \beta_3 \alpha_1 \left(1 - \frac{I_1}{I_2}\right) + \beta_3 \alpha_2 \left(1 - \frac{I_1}{I_2}\right) S \quad (5)$$

Considerando $\beta_4 = \beta_3 \alpha_1$ e $\beta_5 = \beta_3 \alpha_2$, pode-se reescrever a Equação 5 (6):

$$E(y_2) = \beta_0 + \beta_1 S + \beta_2 I_2^{-1} + \beta_3 \left(\frac{I_1}{I_2}\right) \ln G_1 + \beta_4 \left(1 - \frac{I_1}{I_2}\right) + \beta_5 \left(1 - \frac{I_1}{I_2}\right) S \quad (6)$$

Este é um modelo utilizado para projetar o volume, em função da idade inicial, idade de projeção, índice de sítio e área basal inicial. Quando $I_1 = I_2$, o modelo é reduzido para a Equação 2.

Estimando-se os parâmetros de 6 e, considerando que $\beta_4 = \beta_3 \alpha_1$ e $\beta_5 = \beta_3 \alpha_2$, pode-se obter as estimativas de α_1 e α_2 :

$$\hat{\alpha}_1 = \frac{\hat{\beta}_4}{\hat{\beta}_3} \quad (7)$$

$$\hat{\alpha}_2 = \frac{\hat{\beta}_5}{\hat{\beta}_3} \quad (8)$$

Segundo Sullivan e Clutter (1972), estes não são os estimadores mais eficientes, porém esta abordagem garante a consistência numérica do sistema. Este sistema de equações possui como propriedade a invariância, ou seja, a área basal (ou volume) projetada da I_1 para I_2 e depois para I_3 resulta no mesmo valor daquela projetada da I_1 para I_3 .

2.2 Funções de afilamento

Uma equação de volume total do fuste é fácil de aplicar e, portanto é preferida, quando a classificação dos produtos comercializáveis por tamanhos não é necessária (CORRAL-RIVAS et al., 2007). Entretanto, numa situação contrária, é imprescindível ter um modelo que descreva com precisão o perfil do fuste das árvores plantadas, permitindo estimar o diâmetro a qualquer altura, ao longo do fuste e a altura para qualquer diâmetro especificado, além de quantificar o número de toras com diâmetro e comprimentos pré-definidos ou os múltiplos produtos da madeira (MIGUEL et al., 2011).

Afilamento ou *taper* é definido como o decréscimo em diâmetro com o aumento em altura, ao longo do fuste da árvore (CLUTTER et al., 1983). A princípio, os estudos eram fundamentados em teorias sobre a forma do fuste, que, segundo Gray (1956), refere-se à forma geométrica da árvore (paraboloide, neiloide e cônica). As teorias sobre a forma do fuste foram substituídas por uma abordagem empírica, que, por meio das funções de afilamento, tentam descrever

a taxa de mudança do diâmetro do fuste com o aumento em altura (FONWEBAN et al., 2011).

As principais vantagens das equações de afilamento, em relação às de volume, são: obter estimativas do diâmetro a qualquer ponto ao longo do fuste; obter estimativas da altura comercial para qualquer diâmetro e estimativas do volume de seções individuais de qualquer comprimento a qualquer altura do solo (KOZAK, 2004).

Por fornecerem essa diversidade de informações, as funções de afilamento têm sido objeto de estudo há muito tempo e várias funções foram desenvolvidas. As equações apresentadas por Kozak, Munro e Smith (1969) e Ormerod (1973) são simples, de fácil ajuste e possuem uma única função para descrever todo o perfil da árvore. Diferentemente, as equações de regressão polinomiais segmentadas são formadas por duas ou mais funções polinomiais unidas por pontos de ligação e são mais complexas (MAX; BURKHART, 1976; PARRESOL; HOTVEDT; CAO, 1987). Outro tipo de função de afilamento desenvolvida foi a de forma ou expoente-variável (KOZAK, 1988; NEWNHAM, 1988), a qual é representada por uma função contínua que descreve o afilamento do fuste, por meio da mudança do expoente, para compensar as suas formas neiloide, parabolóide e cônica.

Segundo Kozak e Smith (1993), critérios práticos, como facilidade de ajuste e ampla aplicabilidade, e critérios estatísticos, como erro padrão da estimativa e viés de todas as variáveis de interesse, devem ser considerados na seleção de uma função de afilamento.

2.2.1 Equações de expoente-variável ou forma-variável

As funções de afilamento do tipo forma-variável (NEWBERRY; BURKHART, 1986; NEWNHAM, 1988) e expoente-variável (KOZAK, 1988,

2004) têm como base uma função de potência simples (PEREZ; BURKHART; STIFF, 1990) que descreve o perfil de um sólido de revolução (9) (NEWNHAM, 1992):

$$Y^k = gX, \quad (9)$$

Em que Y é o diâmetro do sólido na altura X ; k é um valor que varia com a forma do sólido e g é uma constante que depende das unidades de Y e X .

Newnham (1988) assumiu que k variava continuamente, ao longo do fuste e substituiu o valor fixo dentro de cada seção por uma função que representasse a mudança da forma ao longo do fuste. Esta mesma abordagem foi utilizada por Kozak (1988), conforme pode ser observado na Equação (10):

$$Y = gX^c, \quad (10)$$

Em que $c=1/k$; Y , g e X , conforme definido na Equação 1.

As funções de afilamento de Kozak (1988) e Newnham (1988), apesar de possuírem a mesma equação base, diferenciam-se em alguns pontos (TABELA 1).

Tabela 1 - Diferenças entre as funções de afilamento de Kozak (1988) e de Newnham (1988).

Newnham (1988)	Kozak (1988)
Diâmetro base	
DAP	D_I
Variável dependente (Y)	
$Y = d_N/DAP$	$Y = d_K/D_I$
Variável independente (X)	
$X = (H-h)/(H-1,3)$	$X = (1-Z^{1/2})/(1-p^{1/2});$ $Z = h/H$ e $p = h_I/H$.

Fonte: Kozak (1988) e Newnham (1988).

DAP= diâmetro com casca na altura do peito (1,3 m); D_I = diâmetro sem casca na altura h_I (ponto de inflexão); d_K =diâmetro sem casca na altura h ; d_N =diâmetro com casca na altura h ; H =altura total da árvore; h =altura a partir do solo; Z = altura relativa; p = altura relativa do ponto de inflexão; h_I =altura do ponto de inflexão.

Newnham (1988) utilizou o diâmetro à altura do peito (DAP) como diâmetro base, tornando a equação fácil de ser ajustada e aplicada, uma vez que os DAP's das árvores cubadas e das árvores das parcelas do inventário florestal são sempre medidos. Diferentemente, Kozak (1988) utilizou o diâmetro no ponto de inflexão, que é definido como 'o ponto em que a forma da árvore muda de neiloide para paraboloides' (DEMAERSHALK; KOZAK, 1977).

O diâmetro no ponto de inflexão foi primeiramente utilizado por Demaershalk e Kozak (1977). Segundo os autores, esse diâmetro é preferível, pois não é afetado pela dilatação comumente observada na base do fuste de algumas árvores, está localizado na parte do tronco de menor mudança e a altura relativa no ponto de inflexão é, aproximadamente constante, independente da classe de tamanho. A desvantagem é que o diâmetro no ponto de inflexão deve ser predito a partir do DAP (DEMAERSHALK; KOZAK, 1977; KOZAK, 1988) ou do DAP e H (KOZAK, 2004).

Kozak (1988) definiu uma equação adequada, para descrever o expoente c e substituiu DI por uma equação que estima DI , em função do DAP (diâmetro com casca na altura do peito). A função final apresentou a forma (11):

$$\hat{d}_i = \hat{\alpha}_0 DAP^{\hat{\alpha}_1} \hat{\alpha}_2^{DAP} X^{\hat{\beta}_1 Z^2 + \hat{\beta}_2 \ln(Z+0,001) + \hat{\beta}_3 \sqrt{Z} + \hat{\beta}_4 e^Z + \hat{\beta}_5 DAP/H}, \quad (11)$$

$$X = \frac{1 - \sqrt{\frac{h_i}{H}}}{1 - \sqrt{p}}.$$

Em que:

d_i = diâmetro sem casca na altura h_i ;

h_i = altura a partir do solo; $0 \leq h_i \leq H$;

DAP = diâmetro com casca na altura do peito (cm);

H = altura total da árvore;

$p = h_i/H$

h_i = altura do ponto de inflexão a partir do solo.

$Z = h_i/H$ (altura relativa);

α_i = parâmetros a serem estimados ($i=0,1$ e 2);

β_i = parâmetros a serem estimados ($i=1,2...5$).

A Equação 11 possui como propriedades: (a) $d_i=0$ quando $h_i/H=1$ (topo da árvore); (b) $d_i=D_i$ (estimado) quando $h_i/H=p$; (c) a função muda de direção quando $h_i/H = p$. Além disso, pode ser ajustada na sua forma original ou na forma linearizada (12).

$$\ln(\hat{d}_i) = \ln(\hat{\alpha}_0) + \hat{\alpha}_1 \ln(DAP) + \ln(\hat{\alpha}_2) DAP + \hat{\beta}_1 \ln(X) Z^2 + \hat{\beta}_2 \ln(X) \ln(Z+0,001) + \hat{\beta}_3 \ln(X) \sqrt{Z} + \hat{\beta}_4 \ln(X) e^Z + \hat{\beta}_5 \ln(X) \left(\frac{DAP}{H} \right). \quad (12)$$

Segundo Kozak (1988), a Equação 11 possui deficiências práticas, pois não pode ser integrada analiticamente, para calcular o volume e a altura comercial, para um determinado diâmetro, não pode ser calculada diretamente. Kozak e Smith (1993) citam ainda como desvantagem o fato de que o ponto de inflexão deve ser estimado para cada espécie.

Muhairwe, Lemay e Kozak (1994) incorporaram as variáveis classe de copa, classe de sítio e idade à altura do peito, na equação de Kozak (1988), mas nenhuma delas resultou em melhorias significativas que justificassem o custo adicional de medição dessas variáveis. Avaliação semelhante foi realizada por Kozak (1998), que testou a inclusão de diâmetros na equação e verificou que os diâmetros tomados entre 40 e 50% da altura, acima da altura do peito, são recomendados, desde que suas medições sejam economicamente viáveis.

Outras quatro equações foram derivadas da equação de Kozak (1988) (TABELA 2). Segundo Kozak (1997), a equação de 1994, assim como a de 1988, apresentam problemas de multicolinearidade por terem muitos termos polinomiais e outras transformações da mesma variável regressora. Outro problema apontado pelo autor é decorrente das múltiplas observações, em cada árvore, que são autocorrelacionadas e que violam a pressuposição de independência. Entretanto, conforme analisado por Kozak (1997), esses dois problemas não afetam seriamente a habilidade preditiva desses modelos. Porém, é recomendado utilizar equações com níveis baixos de multicolinearidade.

As duas novas equações, apresentadas por Kozak (2004), que foram nomeadas como equação 2001 e 2002, têm a vantagem de possuírem nível menor de multicolinearidade em relação às outras duas. Por meio da comparação dessas equações com as desenvolvidas em 1994 e em 1988, Kozak (2004) verificou que a equação de 2002 foi mais estável e consistente para estimar diâmetro sem casca, volume total ou seccional e altura comercial. Porém a

equação 2001 foi melhor, para estimar a altura comercial, além de possuir forma mais simples.

Tabela 2 - Equações derivadas da equação de Kozak (1988).

Equação	Nome
$\hat{d}_i = \hat{\alpha}_0 \text{DAP}^{\hat{\alpha}_1} \hat{\alpha}_2^{\text{DAP}} X_i^{\hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 Z_i^{1/4} + \hat{\beta}_2 Z_i^{1/3} + \hat{\beta}_3 Z_i^{1/2} + \hat{\beta}_4 \arcsin(Q_i) + \hat{\beta}_5 [1/(DAP/H + Z_i)] + \hat{\beta}_6 H}$ $Q_i = \left[1 - \left(\frac{h_i}{H} \right)^{1/2} \right] \quad p = 0,01$	Equação 1994 Kozak (1997)
$\hat{d}_i = \hat{\alpha}_0 \text{DAP}^{\hat{\alpha}_1} H^{\hat{\alpha}_2} X_i^{\hat{\beta}_1 Z_i^{1/10} + \hat{\beta}_2 Z_i^4 + \hat{\beta}_3 \arcsin(Q_i) + \hat{\beta}_4 [1/e^{\text{DAP}/H}] + \hat{\beta}_5 \text{DAP}^{X_i}}$ $Q_i = \left[1 - \left(\frac{h_i}{H} \right)^{1/2} \right] \quad p = 1,3/H$	Equação 1995 Kozak (1997)
$\hat{d}_i = \hat{\alpha}_0 \text{DAP}^{\hat{\alpha}_1} X_i^{\hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 (1/e^{\text{DAP}/H}) + \hat{\beta}_2 \text{DAP}^{X_i} + \hat{\beta}_3 X_i^{\text{DAP}/H}}$ $X_i = \left[1 - (h_i/H)^{1/4} \right] / \left(1 - p^{1/4} \right)$ $p = 0,01$	Equação 2001 Kozak (2004)
$\hat{d}_i = \hat{\alpha}_0 \text{DAP}^{\hat{\alpha}_1} H^{\hat{\alpha}_2} X_i^{\hat{\beta}_1 Z_i^4 + \hat{\beta}_2 (1/e^{\text{DAP}/H}) + \hat{\beta}_3 X_i^{0,1} + \hat{\beta}_4 (1/\text{DAP}) + \hat{\beta}_5 H^{Q_i} + \hat{\beta}_6 X_i}$ $Q_i = \left[1 - (h_i/H)^{1/3} \right]$ $X_i = \left[1 - (h_i/H)^{1/3} \right] / \left(1 - p^{1/3} \right)$ $p = 1,3/H$	Equação 2002 Kozak (2004)

Fonte: Da autora (2018).

2.2.2 Altura relativa no ponto de inflexão - p

O ponto de inflexão é o ponto em que a forma da árvore muda de neiloide para parabolóide (DEMAERSHALK; KOZAK, 1977). Segundo Demaershalk e Kozak (1977), o valor de p (altura relativa no ponto de inflexão), para as espécies comerciais da Colúmbia Britânica, varia entre 20% e 25% da

altura total, a partir do solo e é relativamente constante, para uma mesma espécie, independentemente do tamanho da árvore.

Kozak (1988) sugeriu que p poderia ser expresso de forma mais adequada como função do DAP ou da H ou combinação das duas variáveis, entretanto alguns trabalhos mostraram que a variação de p , numa faixa de valores entre 0 e 0,35, tem efeito desprezível (LEMAY et al. 1993 apud KOZAK, 1997) ou pequeno (PEREZ; BURKHART; STIFF, 1990) na habilidade preditiva da equação. O valor de p pode ser generalizado como a altura relativa de restrição, ou seja, altura relativa que garante que $X=1$ quando $Z=p$.

As demais equações propostas por Kozak (2004) são modificações da equação original de 1988. Na equação de 2001, o valor de p é fixado em 0,01. Este valor para p foi previamente utilizado por Kozak na equação de 1994 (KOZAK, 1997), seguindo recomendações de LeMay et al. (1993 apud KOZAK, 1997). Na equação de 2002, Kozak (2004) utilizou uma altura constante, a partir do chão, assumida em 1,3 metros. Portanto p foi considerado $1,3/H$ e o diâmetro base da equação transformou-se no diâmetro sem casca na altura do peito (DAP).

Trabalhos recentes com aplicações das equações de expoente-variável têm considerado p como parâmetro a ser estimado (ANDRADE, 2014; BERHE; ARNOLDSSON, 2008; FONWEBAN et al. 2011; HUANG et al., 2000; YANG; HUANG; MENG, 2009). A adoção deste procedimento evita a subjetividade na determinação de p (HUANG et al., 2000), porém problemas de convergência podem ser enfrentados, principalmente, no estágio de modelagem mista (FONWEBAN et al., 2011).

REFERÊNCIAS

- ANDRADE, V. C. de L. Modelos de *taper* do tipo expoente-forma para descrever o perfil do fuste de árvores. **Pesquisa Florestal Brasileira**, Colombo, v. 34, n. 80, p. 271-283, out./dez. 2014.
- BERHE, L.; ARNOLDSSON, G. Tree taper models for *Cupressus lusitanica* plantations in Ethiopia. **Southern Forests**, Oxford, v. 70, n. 3, p. 193-203, 2008.
- BUCKMAN, R. E. **Growth and yield of red pine in Minnesota**. Washington: U.S. Department of Agriculture, 1962. 50 p. (Technical Bulletin, 1272).
- BURKHART, H. E.; TOMÉ, M. **Modeling forest trees and stands**. Dordrecht: Springer Netherlands, 2012. 458 p.
- CLUTTER, J. L. Compatible growth and yield models for Loblolly Pine. **Forest Science**, Bethesda, v. 9, n. 3, p. 354-371, Sept. 1963.
- CLUTTER, J. L. et al. **Timber management: a quantitative approach**. Nova York: John Wiley & Sons, 1983. 333 p.
- CORRAL-RIVAS, J. J. et al. A merchantable volume system for major pine species in El Salto, Durango (Mexico). **Forest Ecology and Management**, Amsterdam, v. 238, n. 1/3, p. 118-129, Jan. 2007.
- DEMAERSHALK, J. P.; KOZAK, A. The whole-bole system: a conditioned dual-equation system for precise prediction of tree profiles. **Canadian Journal of Forest Research**, Ottawa, v. 7, n. 3, p. 488-497, Sept. 1977.
- FONWEBAN, J. et al. Taper functions for Scots pine (*Pinus sylvestris* L.) and Sitka spruce (*Picea sitchensis* (Bong.) Carr.) in Northern Britain. **Forestry: an international journal of forest research**, Oxford, v. 84, n. 1, p. 49-60, Jan. 2011.

GARBER, S. M.; MAGUIRE, D. A. Modeling stem taper of three central Oregon species using nonlinear mixed effects models and autoregressive error structures. **Forest Ecology and Management**, Amsterdam, v. 179, n. 1, p. 507- 522, July 2003.

GRAY, H. R. **The form and taper of forest-tree stems**. Oxford: Imperial Forestry Institute University of Oxford, 1956. 79 p.

HUANG, S. et al. Kozak's variable-exponent taper equation regionalized for white spruce in Alberta. **Western Journal of Applied Forestry**, Essex, v. 15, n. 2, p. 75-85, Apr. 2000.

HUSH, B.; MILLER, C.; BEERS, T. **Forest mensuration**. 3. ed. New York: John Wiley, 1982. 402 p.

INDÚSTRIA BRASILEIRA DE ÁRVORES - IBÁ. **Relatório Ibá 2017**. Brasília: Ibá, 2017. 97 p.

KOZAK, A. A variable-exponent taper equation. **Canadian Journal of Forest Research**, Ottawa, v. 18, n. 11, p. 1363-1368, Nov. 1988.

_____. Effects of multicollinearity and autocorrelation on the variable-exponent taper functions. **Canadian Journal of Forest Research**, Ottawa, v. 27, n. 5, p. 619-629, May 1997.

_____. Effects of upper stem measurements on predictive ability of a variable-exponent taper equation. **Canadian Journal of Forest Research**, Ottawa, v. 28, n. 7, p. 1078-1083, July 1998.

_____. My last words on taper equations. **The Forestry Chronicle**, Mattawa, v. 80, n. 4, p. 507-515, Aug. 2004.

KOZAK, A.; MUNRO, D. P.; SMITH, J. H. G. Taper functions and their application in forest inventory. **The Forestry Chronicle**, Mattawa, v. 45, n. 4, p. 278-283, Aug. 1969.

KOZAK, A.; SMITH, J. H. G. Standards for evaluating taper estimating systems. **The Forestry Chronicle**, Mattawa, v. 69, n. 4, p. 438-444, Aug. 1993.

LI, R.; WEISKITTEL, A. R. Comparison of models form for estimating stem taper and volume in primary conifer species of the North American Acadian Region. **Annals of Forest Science**, Les Ulis, v. 67, n. 3, p. 302, Jan. 2010.

MAX, T. A.; BURKHART, H. E. Segmented polynomial regression applied to taper equations. **Forest Science**, Bethesda, v. 22, n. 3, p. 283-289, Sept. 1976.

MIGUEL, E. P. et al. Modelos polinomiais para representar o perfil e o volume do fuste de *Eucalyptus urophylla* na região norte do estado de Goiás. **Floresta**, Curitiba, v. 41, n. 2, p. 355-368, abr./jun. 2011.

MUHAIWE, C. K.; LEMAY, V. M.; KOZAK, A. Effects of adding tree, stand, and site variables to Kozak's variable- exponent taper equation. **Canadian Journal of Forest Research**, Ottawa, v. 24, n. 2, p. 252- 259, Feb. 1994.

NEWBERRY, J. D.; BURKHART, H. E. Variable-form stem profile models for loblolly pine. **Canadian Journal of Forest Research**, Ottawa, v. 16, n. 1, p. 109-114, Feb. 1986.

NEWNHAM, R. M. **A variable-form taper equation**. Ontario: Minister of Supply and Services Canadá, 1988. 33 p.

_____. Variable-form taper functions for four Alberta tree species. **Canadian Journal of Forest Research**, Ottawa, v. 22, n. 2, p. 210-223, Feb. 1992.

ORMEROD, D. W. A simple bole model. **The Forestry Chronicle**, Mattawa, v. 49, n. 3, p. 136-138, June 1973.

PARRESOL, B. R.; HOTVEDT, J. E.; CAO, Q. V. A volume and taper prediction system for bald cypress. **Canadian Journal of Forest Research**, Ottawa, v. 17, n. 3, p. 250-259, 1987.

PEREZ, D. N.; BURKHART, H. E.; STIFF, C. T. A variable-form Taper Function for *Pinus oocarpa* Schiede in Central Honduras. **Forest Science**, Bethesda, v. 36, n. 1, p. 186-191. Mar. 1990.

PIRES, L. M.; CALEGARIO, N. Ajuste de modelos estocásticos lineares e não lineares para descrição do perfil longitudinal de árvores. **Revista Árvore**, Viçosa, v. 31, n. 5, p. 845-852, set./out. 2007.

SCHÖEPFER, W. **Automatisierung der Massen, Sorten und Wertberechnung stenender Waldbestände Schriftenreihe Bad.** Stuttgart: Wurt-Forstl, 1966. Não paginado.

SCHUMACHER, F. X. A new growth curve and its application to timber-yield studies. **Journal of Forestry**, Bethesda, v. 37, n. 4, p. 819-820, 1939.

SULLIVAN, A. D.; CLUTTER, J. L. A simultaneous growth and yield model for loblolly pine. **Forest Science**, Bethesda, v. 18, n. 1, p. 76-86, Mar. 1972.

VANCLAY, J. K. **Modelling forest growth and yield: applications to mixed tropical forests.** Wallingford: CAB International, 1994. 312 p.

YANG, Y.; HUANG, S.; MENG, S. X. Development of a tree-specific stem profile model for white spruce: a nonlinear mixed model approach with a generalized covariance structure. **Forestry: an international journal of forest research**, Oxford, v. 82, n. 5, p. 541-555, Sept. 2009.

ZEIDE, B. Analysis of Growth Equations. **Forest Science**, Bethesda, v. 39, n. 3, p. 594-616, 1993.

SEGUNDA PARTE - ARTIGOS

**ARTIGO 1 – MODELOS DE CRESCIMENTO E PRODUÇÃO EM
NÍVEL DE POVOAMENTO PARA PLANTIOS DE *Eucalyptus* sp.**

**WHOLE-STANDS GROWTH AND YIELD MODELS FOR *Eucalyptus* sp.
PLANTATIONS**

Artigo redigido conforme a norma para publicação periódica científica NBR
6022 (ABNT, 2003).

RESUMO

As decisões no manejo e planejamento florestal dependem do desenvolvimento de modelos consistentes de crescimento e produção florestal. Objetivou-se neste trabalho avaliar duas alternativas para estimar o crescimento e a produção em povoamentos do híbrido *Eucalyptus urophylla* x *Eucalyptus grandis* (Clone H13). Foram utilizados dados de inventário florestal contínuo, com unidades amostrais medidas de 1 a 4 vezes. A primeira alternativa (Alternativa 1) consistiu em testar transformações diferentes das propostas no modelo original de Clutter para o sítio e a área basal e ajustar o modelo modificado completo (interações duplas e tripla). Nesta alternativa, todas as unidades amostrais foram utilizadas no ajuste. A área basal e o volume foram preditos, para os dados de validação, utilizando-se as equações ajustadas, sem considerar a forma de projeção. As equações, para área basal e volume resultantes da Alternativa 1, foram transformadas em sistema e ajustadas para os dados das unidades amostrais com duas ou mais medições (Alternativa 2). As duas alternativas foram comparadas com o sistema original de Clutter (Alternativa 3). A única interação dupla significativa no modelo modificado foi entre o inverso da idade e inverso da área basal. O sistema de Clutter foi a melhor alternativa. O sistema proposto na alternativa 2 apresentou estatísticas semelhantes às do sistema de Clutter. A equação de área basal da alternativa 1 apresentou baixa precisão, porém a equação do volume apresentou precisão semelhante ao modelo de Clutter. Os erros na predição do volume e da área basal, para dados de validação, foram maiores na alternativa 1.

Palavras-chave: Modelo de Clutter. Interações. Regressão linear múltipla. Sistemas de equações.

ABSTRACT

Decisions in forest management and planning depend on the development of consistent growth and yield models. Two alternatives to estimate the growth and yield of eucalyptus (*Eucalyptus urophylla* x *Eucalyptus grandis*) stands were evaluated. Continuous forest inventory data were used, with plots measured 1 to 4 times. The first alternative (Alternative 1) was to test different transformations of the proposals in the original Clutter model for the site and basal area and to fit the complete modified model (double and triple interactions). In this alternative, all plots were used. The basal area and volume were predicted for the validation data using the fitted equations, without considering the form of projection. The equations for basal area and volume resulting from Alternative 1 were transformed into a system and fitted for the remeasured plots (Alternative 2). The two alternatives were compared with the original Clutter system (Alternative 3). The only significant double interaction in the modified model was between inverse age and inverse basal area. The Clutter system was the best alternative. The system proposed in alternative 2 presented similar statistics to those of the Clutter system. The basal area equation of alternative 1 presented low precision, but the volume equation presented similar precision to the Clutter model. The errors in the prediction of volume and basal area for validation data were higher in alternative 1.

Keywords: Clutter's model. Interaction. Multiple linear regression. Systems of equations.

1 INTRODUÇÃO

Os manejadores florestais estão interessados em quantificar a produção volumétrica, presente e futura, por se tratar de uma informação que auxilia na tomada de decisões relacionadas ao manejo e ao planejamento florestal.

A quantificação do crescimento e da produção em florestas plantadas é obtida, por meio do desenvolvimento de modelos, que possuem como base quatro variáveis principais: o volume (V), a idade (I), a qualidade do sítio, representada pelo índice de sítio (S) e a densidade, por exemplo, a área basal por unidade de área (G).

Um dos modelos mais difundidos na área florestal é o modelo de Clutter (1963). Mesmo após anos de desenvolvimento, continua sendo aplicado em pesquisas brasileiras e sempre é utilizado como referência para o desenvolvimento de outros sistemas de crescimento e produção. Isto pode ser atribuído ao bom desempenho apresentado em termos de precisão e consistência biológica, para representar o crescimento e a produção de espécies plantadas, como as do gênero *Eucalyptus* (AZEVEDO et al., 2016; MIRANDA et al., 2015) e *Pinus* (NASCIMENTO et al., 2015).

Segundo Clutter et al. (1983), muitas variações na forma das equações são possíveis, porém uma modificação em uma única equação, geralmente, implica mudanças em outras partes do sistema. O sistema de Clutter é composto por um conjunto de equações lineares múltiplas com transformações nas variáveis. Conforme afirmado por Salles et al. (2012), deve ser ajustado na sua forma completa e a definição final será dada a partir da significância e do sinal das estimativas dos seus parâmetros. Modificações no modelo de Clutter, a partir de outros tipos de transformações nas variáveis e incorporação das interações, devem ser testadas com o intuito de verificar se ocorrem melhorias nas estimativas do crescimento e produção.

Os dados utilizados no ajuste do sistema de Clutter são provenientes de unidades amostrais permanentes. Muitos pesquisadores eliminam da base de dados as observações das unidades com apenas uma medição. Conforme destacado por Alcântara (2012), estas unidades podem representar 40% ou mais do total de dados e são, geralmente, as mais importantes por representarem os "pacotes tecnológicos" mais recentes. Outras estratégias de ajuste que incorporem os dados de unidades com apenas uma medição ou de unidades temporárias devem ser testadas. Neste caso, ajustes precisos indicariam uma redução com custos de instalação de unidades permanentes no inventário florestal.

Diante do exposto, objetivou-se neste trabalho avaliar duas alternativas para estimar o crescimento e a produção, em povoamentos do híbrido *Eucalyptus urophylla* x *Eucalyptus grandis*, a partir de modificações (transformações das variáveis e interações) no modelo original de Clutter e na estrutura dos dados. As alternativas foram comparadas com o sistema de Clutter.

2 MATERIAL E MÉTODOS

2.1 Dados

O conjunto de dados, utilizado neste estudo, é proveniente de plantios comerciais de eucalipto, localizados na região Norte do estado de São Paulo, Brasil.

Foram utilizados dados de inventário florestal contínuo, em plantios do Clone H13, híbrido de *Eucalyptus urophylla* x *Eucalyptus grandis*, com 1.473 unidades amostrais com apenas uma medição e 1.204 unidades amostrais com duas ou mais medições (2 a 4 vezes). Os dados são irregularmente espaçados e desbalanceados.

A base de dados foi preparada, eliminando-se dados inconsistentes, por exemplo, volume e área basal na idade 2 (futuro) menores que na idade 1 (presente). Para ajuste dos sistemas (Alternativas 2 e 3), eliminaram-se as unidades com apenas uma medição.

Os dados foram divididos aleatoriamente, na proporção de 70%, para ajuste do modelo e 30% para validação. As estatísticas descritivas das variáveis Área basal – G ($\text{m}^2 \text{ha}^{-1}$), Volume – V ($\text{m}^3 \text{ha}^{-1}$), Índice de Sítio – S (m) e Idade – I (anos) encontram-se na Tabela 1.

Tabela 1 - Estatísticas descritivas das variáveis do povoamento: Área basal - G ($\text{m}^2 \text{ha}^{-1}$), Volume V – ($\text{m}^3 \text{ha}^{-1}$), Idade - I (anos) e Sítio - S (m).

Variáveis	Mínimo	Média	Máximo	Desvio padrão	Coefficiente de variação (%)
<i>Ajuste (1 ou mais medições)</i>					
G ($\text{m}^2 \text{ha}^{-1}$)	3,2	15,9	46,1	6,5	40,7
V ($\text{m}^3 \text{ha}^{-1}$)	11,3	155,5	680,9	94,5	60,8
I (anos)	2,0	4,0	8,5	1,5	38,1
S (m)	9,5	24,8	39,5	5,2	20,9
<i>Ajuste (2 ou mais medições)</i>					
G ($\text{m}^2 \text{ha}^{-1}$)	3,2	16,6	46,1	6,6	40,0
V ($\text{m}^3 \text{ha}^{-1}$)	11,3	167,7	680,9	96,5	57,5
I (anos)	2,0	4,1	8,5	1,5	35,4
S (m)	9,5	24,5	39,5	5,0	20,3
<i>Validação</i>					
G ($\text{m}^2 \text{ha}^{-1}$)	1,9	15,0	42,6	6,6	44,1
V ($\text{m}^3 \text{ha}^{-1}$)	6,1	144,6	610,7	97,0	67,1
I (anos)	1,6	3,8	8,5	1,6	42,6
S (m)	9,5	24,7	39,5	5,2	21,3

Fonte: Da autora (2018).

2.2 Ajuste dos modelos de crescimento e produção

Foram testadas três alternativas para a modelagem do crescimento e produção.

Alternativa 1

Nesta alternativa, a característica longitudinal da base de dados não foi considerada, ou seja, todas as unidades amostrais com uma ou mais medições foram utilizadas, para ajustar o modelo, que não possui a forma de projeção (I_1 , I_2 , G_1 , G_2) (Equações 1 e 2).

$$\ln G = \alpha_0 + \alpha_1 I^{-1} + \alpha_2 S^{-1} + \alpha_3 S^{-1} I^{-1} + \varepsilon \quad (1)$$

$$\begin{aligned} \ln V = & \beta_0 + \beta_1 I^{-1} + \beta_2 S^{-1} + \beta_3 \ln(G)^{-1} + \beta_4 I^{-1} S^{-1} + \\ & \beta_5 I^{-1} \ln(G)^{-1} + \beta_6 S^{-1} \ln(G)^{-1} + \beta_7 I^{-1} S^{-1} \ln(G)^{-1} + \varepsilon \end{aligned} \quad (2)$$

Em que: $\ln V$ = logaritmo neperiano do volume por unidade de área ($\text{m}^3 \text{ha}^{-1}$); S = índice de sítio (m); $\ln G$ = logaritmo neperiano da área basal por unidade de área ($\text{m}^2 \text{ha}^{-1}$); I = idade do povoamento (anos).

As relações inversas do S e $\ln G$ foram utilizadas, para garantir que todas as variáveis tivessem relação decrescente com o logaritmo do volume e, assim, contribuir com a significância das interações.

A predição presente e futura do crescimento e produção, para as unidades amostrais da base de dados de validação, foi realizada da seguinte maneira: para uma dada unidade amostral com I_2 e Índice de sítio conhecidos, realizou-se a predição da área basal pela equação 1 e a predição do seu volume pela equação 2, ou seja, a área basal na idade presente não foi utilizada para estimar a área basal na idade futura. O resultado foi comparado com os valores observados de área basal e volume.

Nesta alternativa, todos os dados disponíveis são aproveitados. Se a precisão obtida com esta alternativa for igual aos ajustes que consideram a característica longitudinal da base de dados, pode-se concluir que parcelas temporárias, que possuem custo de instalação menor, podem ser utilizadas para a modelagem do crescimento e produção.

Os gráficos de produção em volume, incremento corrente anual (ICA - $\text{m}^3 \text{ha}^{-1} \text{ano}^{-1}$) e incremento médio anual (IMA - $\text{m}^3 \text{ha}^{-1} \text{ano}^{-1}$) foram construídos para cada classe de índice de sítio. O ICA foi calculado pela diferença entre o volume ocorrido no ano atual e o volume ocorrido no ano

anterior. O IMA foi calculado pela divisão do volume produzido no tempo t pela idade da floresta no tempo t . O ICA e o IMA foram calculados considerando intervalos anuais (3 a 10 anos). A idade, na qual o valor de IMA calculado foi máximo, foi considerada a idade técnica de corte (ITC).

Alternativa 2

Nesta alternativa, a característica longitudinal da base de dados foi considerada, ou seja, área basal na idade 1 foi utilizada, para estimar a área basal na idade 2 e foram utilizadas as unidades com 2 ou mais medições. O sistema foi desenvolvido, a partir das equações finais obtidas com a alternativa 1, após ajuste e análise de significância das interações.

Considerando a equação de área basal (3):

$$\ln G = \alpha_0 + \alpha_1 I^{-1} + \alpha_2 S^{-1} + \varepsilon \quad (3)$$

Derivando a equação 3 em relação à idade, tem-se (4) e (5):

$$\frac{\partial G}{\partial I} \frac{1}{G} = -\alpha_1 I^{-2} \quad (4)$$

$$\frac{\partial G}{\partial I} \frac{1}{G} I = -(\alpha_1 I^{-1}) \quad (5)$$

Da equação 3 tem-se que (6):

$$\alpha_1 I^{-1} = \ln(G) - \alpha_0 - \alpha_2 S^{-1} \quad (6)$$

Substituindo (6) em (5) tem-se (7):

$$\frac{\partial G}{\partial I} \frac{1}{G} = -I^{-1} (\ln(G) - \alpha_0 - \alpha_2 S^{-1}) \quad (7)$$

A equação 8 representa o incremento corrente anual em área basal:

$$ICA_G = GI^{-1} (\alpha_0 + \alpha_2 S^{-1} - \ln(G)) \quad (8)$$

$$G^{-1} (\alpha_0 + \alpha_2 S^{-1} - \ln(G))^{-1} \partial G = I^{-1} \partial I \quad (9)$$

Integrando (9) do lado direito, em relação à idade e do lado esquerdo, em relação à área basal e substituindo os limites de integração (I_1 , I_2 , G_1 e G_2) (10):

$$\int_{G_1}^{G_2} G^{-1} (\alpha_0 + \alpha_2 S^{-1} - \ln(G))^{-1} \partial G = \int_{I_1}^{I_2} I^{-1} \partial I \quad (10)$$

Isolando $\ln G_2$, após a integração, obtém-se a equação de projeção em área basal. Nesta alternativa, testou-se o sistema:

$$\ln G_2 = \ln G_1 \left(\frac{I_1}{I_2} \right) + \alpha_1 \left(1 - \frac{I_1}{I_2} \right) + \alpha_2 S^{-1} \left(1 - \frac{I_1}{I_2} \right) + \varepsilon \quad (11)$$

$$\ln V_2 = \beta_0 + \beta_1 I_2^{-1} + \beta_2 S^{-1} + \beta_3 \ln(G_2)^{-1} + \beta_4 I_2^{-1} \ln(G_2)^{-1} + \varepsilon \quad (12)$$

Em que: $\ln V_i$ = logaritmo neperiano do volume por unidade de área ($m^3 ha^{-1}$) na idade I_i ; S = índice de sítio (m); $\ln G_i$ = logaritmo neperiano da área basal

por unidade de área ($\text{m}^2 \text{ha}^{-1}$) na idade I_i ; I_i = idade do povoamento (anos); $i= 1$ indica a idade presente; $i = 2$ indica a idade de projeção.

O sistema foi ajustado, utilizando o método de mínimos quadrados em dois estágios, por meio do pacote *systemfit* (HENNINGSEN; HAMANN, 2007) do *software* R (R CORE TEAM, 2014). Os gráficos de produção em volume, incremento corrente anual (ICA) e incremento médio anual (IMA) foram construídos para cada classe de índice de sítio. O ICA, IMA e ITC foram calculados, conforme definido na alternativa 1.

Alternativa 3 – Sistema de Clutter

O sistema de equações proposto por Clutter (1963), equações 13 e 14, também foi ajustado, utilizando o método de mínimos quadrados em dois estágios, por meio do pacote *systemfit* (HENNINGSEN; HAMANN, 2007) do *software* R (R CORE TEAM, 2014).

$$\ln G_2 = \left(\frac{I_1}{I_2} \right) \ln G_1 + \alpha_1 \left(1 - \frac{I_1}{I_2} \right) + \alpha_2 \left(1 - \frac{I_1}{I_2} \right) S + \varepsilon \quad (13)$$

$$\ln V_2 = \beta_0 + \beta_1 I_2^{-1} + \beta_2 S + \beta_3 \ln G_2 + \varepsilon \quad (14)$$

Em que: $\ln V_i$ = logaritmo neperiano do volume por unidade de área ($\text{m}^3 \text{ha}^{-1}$) na idade I_i ; S = índice de sítio (m); $\ln G_i$ = área basal por unidade de área ($\text{m}^2 \text{ha}^{-1}$) na idade I_i ; I_i = idade do povoamento (anos); $i= 1$ indica a idade presente; $i = 2$ indica a idade de projeção.

Os gráficos de produção em volume, incremento corrente anual (ICA) e incremento médio anual (IMA) foram construídos para cada classe de índice de sítio. O ICA, IMA e ITC foram calculados, conforme definido na alternativa 1.

2.3 Avaliação dos modelos e validação

A qualidade dos ajustes e comparação entre modelos foi realizada, por meio do coeficiente de determinação ajustado (R_{aj}^2), erro padrão residual (S_{yx}), erro padrão residual percentual ($S_{yx}\%$) e análise gráfica de resíduos.

O erro padrão residual expressa, em termos médios, o quanto os valores observados variam em relação aos estimados. A unidade é a mesma da variável dependente e quanto mais próximo de zero melhor é a equação.

$$S_{yx} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (y - \hat{y})^2}{n - p}} \quad (15)$$

$$S_{yx\%} = \frac{S_{yx}}{y} \times 100 \quad (16)$$

Em que: S_{yx} = erro padrão residual na unidade da variável resposta; $S_{yx\%}$ = erro padrão residual percentual; y = valor observado; \hat{y} = valor estimado pela equação; n = número de observações; p = número de parâmetros.

Os modelos também foram avaliados em relação à coerência dos sinais dos parâmetros. Por exemplo, para o modelo de $\ln V$, espera-se um sinal negativo para o parâmetro associado ao inverso da idade ($1/I$).

A avaliação entre valor observado e predito pelas equações, para os dados de validação, foi realizada por meio de análise gráfica. Quanto mais próximos os pontos da reta de 45° melhor será a predição.

3 RESULTADOS E DISCUSSÃO

3.1 Avaliação e aplicação da Alternativa 1

As variáveis com parâmetros não significativos foram eliminadas do modelo volumétrico completo, ou seja, daquele que contém todas as interações. Segundo Salles et al. (2012), aplicar a forma completa do modelo de Clutter é uma metodologia mais flexível, uma vez que o sistema final será adaptado, para cada área de estudo, dependendo da análise da significância das interações e sinais dos parâmetros. A interação tripla ($I^{-1} S^{-1} \ln G^{-1}$) e as duplas ($I^{-1} S^{-1}$ e $S^{-1} \ln G^{-1}$) não foram significativas (TABELA 2).

Tabela 2 - Parâmetros estimados para as equações da alternativa 1.

Alternativa 1					
Modelo para Volume			Modelo para Área Basal		
Parâmetro	Variável	Valor	Parâmetro	Variável	Valor
β_0	intercepto	10,06	α_0	intercepto	3,87
β_1	I^{-1}	-7,28	α_1	I^{-1}	-3,15
β_2	S^{-1}	-2,22	α_2	S^{-1}	-6,40
β_3	$\ln G^{-1}$	-12,36	α_3	$I^{-1} S^{-1}$	n.s.
β_4	$I^{-1} S^{-1}$	n. s.	-	-	-
β_5	$I^{-1} \ln G^{-1}$	14,77	-	-	-
β_6	$S^{-1} \ln G^{-1}$	n. s.	-	-	-
β_7	$I^{-1} S^{-1} \ln G^{-1}$	n. s.	-	-	-
S_{yx} ($m^3 ha^{-1}$)		21,14	S_{yx} ($m^2 ha^{-1}$)		3,99
$S_{yx}\%$		13,59	$S_{yx}\%$		25,06
R_{aj}^2		0,95	R_{aj}^2		0,66

Fonte: Da autora (2018).

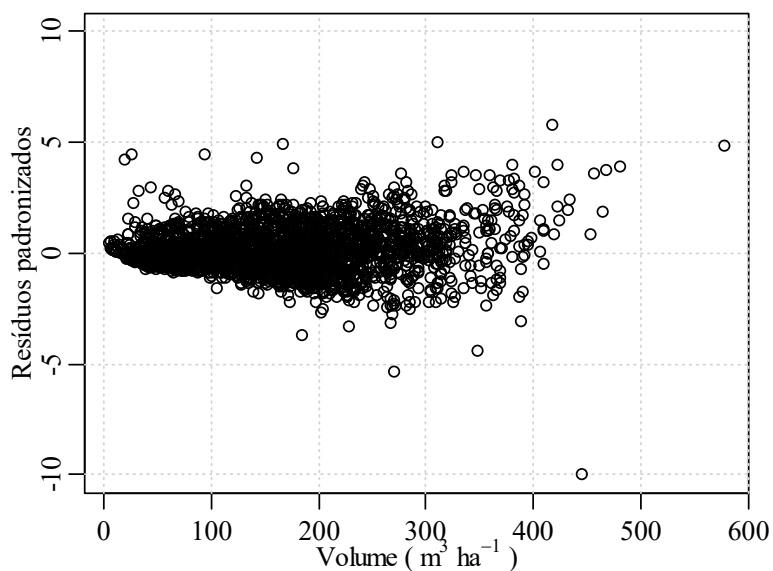
n. s. – parâmetro não significativo a 5%.

O índice de sítio representa a altura média das árvores dominantes e codominantes numa idade de referência. Provavelmente, a interação não significativa do inverso do sítio com inverso da idade deve-se ao fato de que o sítio, para uma determinada unidade amostral, não varia com a idade.

Houve interação significativa entre I^{-1} e $\ln G^{-1}$, ou seja, o efeito da idade no volume depende do valor de área basal e vice-versa. Por exemplo, para um valor fixo de idade e sítio, o efeito da área basal no volume será dado por: $-12,36+14,77 I^{-1}$. Isso significa que o efeito da área basal muda, de acordo com a idade, ou seja, não há um efeito "único". Os sinais dos parâmetros foram negativos para o inverso da idade, o inverso do sítio e o inverso do logaritmo da área basal, portanto coerentes.

O ajuste apresentou um R_{aj}^2 de 0,95 e erro padrão residual de 13,59 %. A distribuição dos resíduos foi aleatória e, em torno de 0, sem tendência de subestimativa ou superestimativa para a maior parte dos valores de volume. Observou-se uma tendência de subestimativa para volumes maiores que 400 m^3ha^{-1} e o aumento da variância, característica comum em dados de crescimento (FIGURA 1).

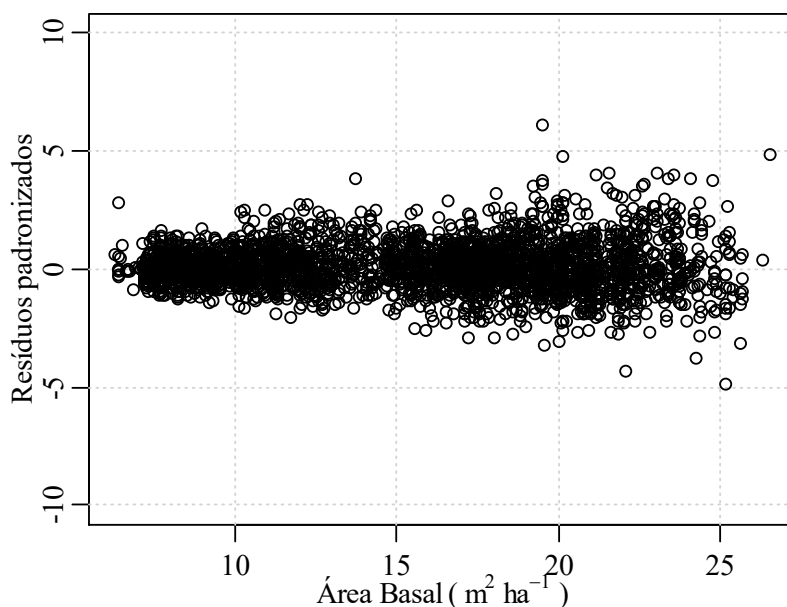
Figura 1 - Gráfico de resíduos padronizados x volume estimado (m^3ha^{-1}) para a Alternativa 1



Fonte: Da autora (2018).

A interação $I^{-1} S^{-1}$ também foi não significativa no modelo de área basal. O coeficiente de determinação ajustado foi de 0,66 e erro padrão residual percentual de 25,06%. Este valor representa a proporção da variabilidade da área basal explicada pelo modelo. Apesar do valor baixo para R_{aj}^2 e alto para o $S_{yx}\%$, os resíduos foram bem distribuídos, sem nenhuma tendência de superestimativa ou subestimativa, mas com aumento da variância.

Figura 2 - Gráfico de resíduos padronizados x Área basal estimada ($m^2 ha^{-1}$) para a Alternativa 1.

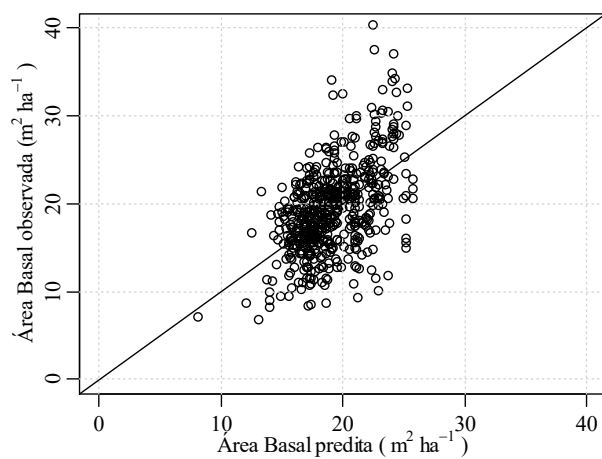


Fonte: Da autora (2018).

Em relação à predição da área basal e do volume, para os dados de validação, observou-se grande variabilidade em torno da reta de 45° e tendência de subestimativa, para valores maiores e superestimativa, para valores menores, para as duas variáveis (FIGURAS 3 e 4). Isto provavelmente deve-se ao fato de que nesta alternativa nenhuma área basal inicial foi considerada para projetar a

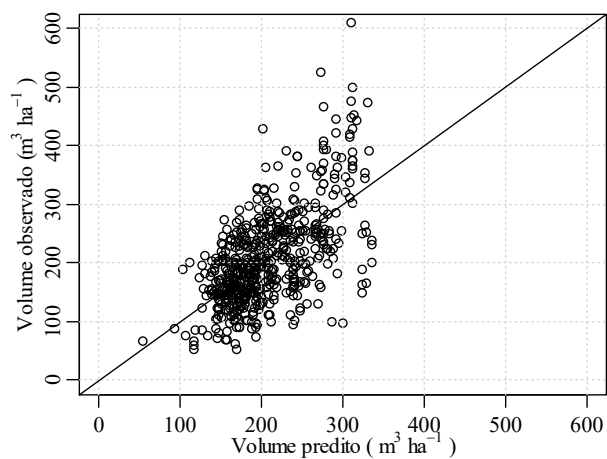
área basal e volume na idade 2. Na validação, esta alternativa mostrou-se inadequada.

Figura 3 - Área basal observada x Área basal predita para os dados de validação.



Fonte: Da autora (2018).

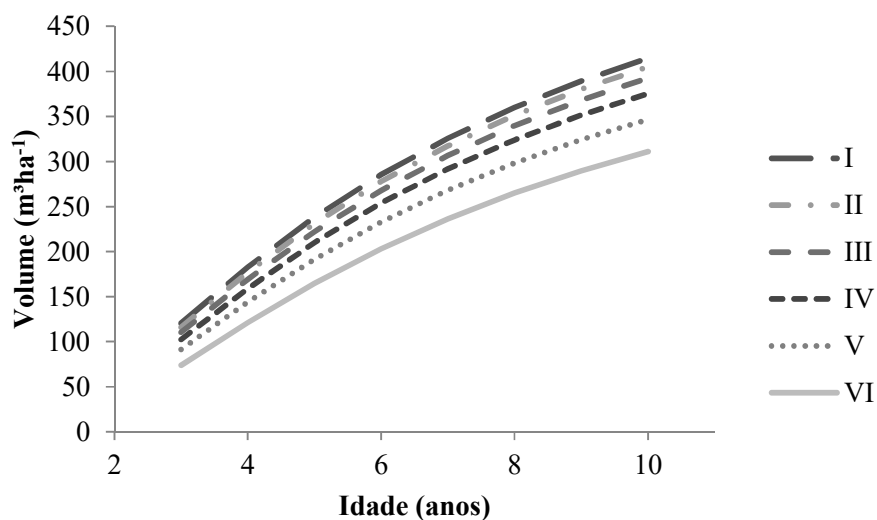
Figura 4 - Volume observado x Volume predito para os dados de validação.



Fonte: Da autora (2018).

Na Figura 5, estão representadas as curvas de produção geradas pelas equações da alternativa 1. Observou-se que as curvas de produção apresentaram consistência biológica, com volumes aumentando com o aumento da idade e do sítio. Porém notou-se que as curvas, para as classes de sítio melhores, foram muito próximas umas das outras, possivelmente, influenciada pela interação significativa presente na equação de volume.

Figura 5 - Curvas de produção em volume por classe de índice de sítio (I-melhor e VI-pior) – Alternativa 1



Fonte: Da autora (2018).

O valor máximo de incremento médio anual indica a idade técnica de corte. A idade técnica de corte foi de 6 anos para a alternativa 1, independente da classe de sítio considerada (FIGURA 6). Espera-se que a idade técnica de corte (ITC) ocorra antes em sítios melhores, porém este padrão não foi observado nesta alternativa.

Figura 6 - Curvas de incremento médio anual (IMA) e incremento corrente anual (ICA) por classe de índice de sítio (I-melhor e VI-pior)

(continua)

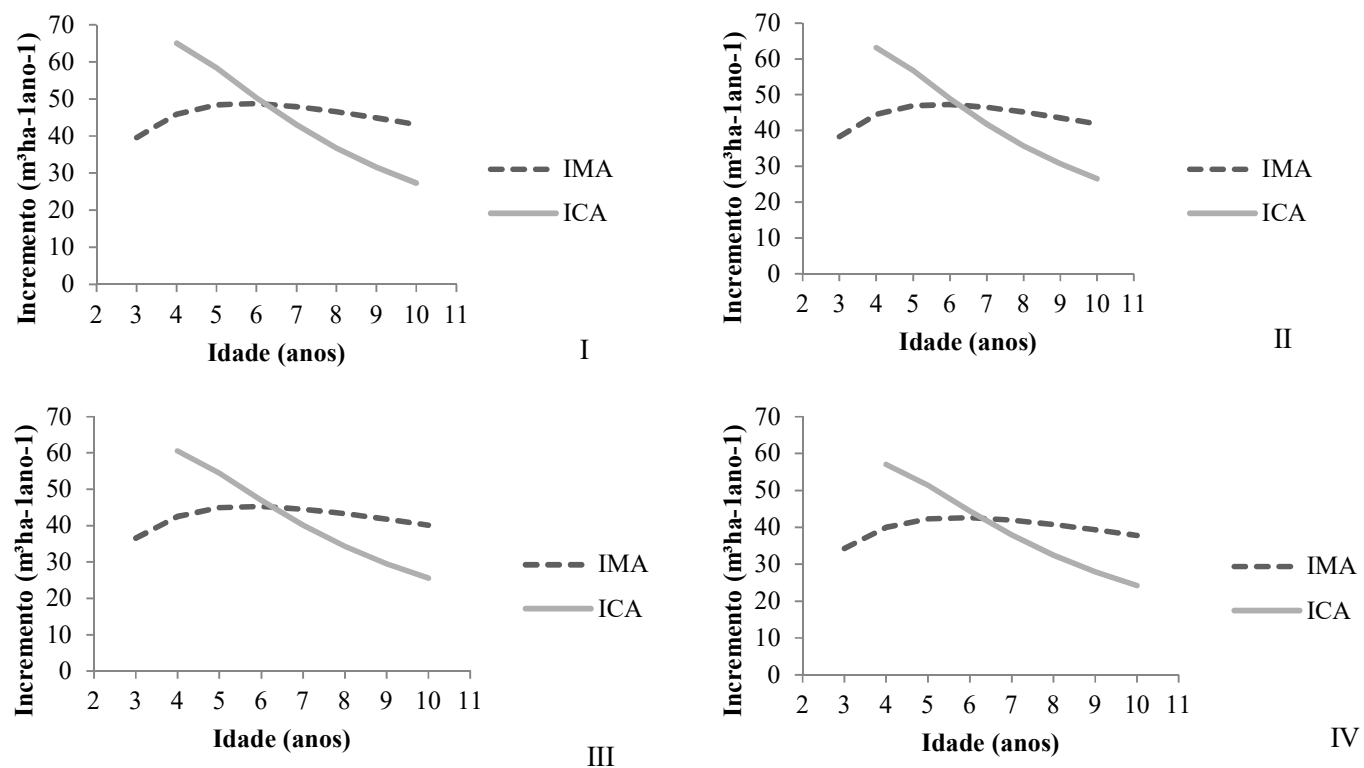
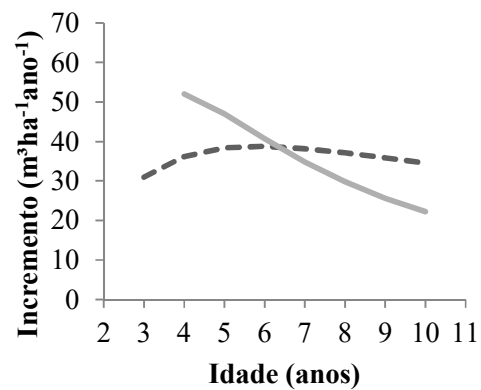
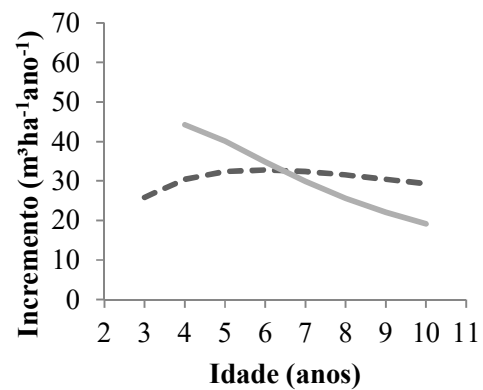


Figura 6 - Curvas de incremento médio anual (IMA) e incremento corrente anual (ICA) por classe de índice de sítio (I-melhor e VI-pior) (Conclusão)



V



VI

Fonte: Da autora (2018).

3.2 Avaliação e aplicação da Alternativa 2

Todos os parâmetros das equações do sistema foram significativos a 5% de probabilidade. O coeficiente de determinação ajustado de 0,91 e 0,99, para as equações de volume e área basal, respectivamente, indicam que o modelo explica grande parte da variação das variáveis de interesse (TABELA 3).

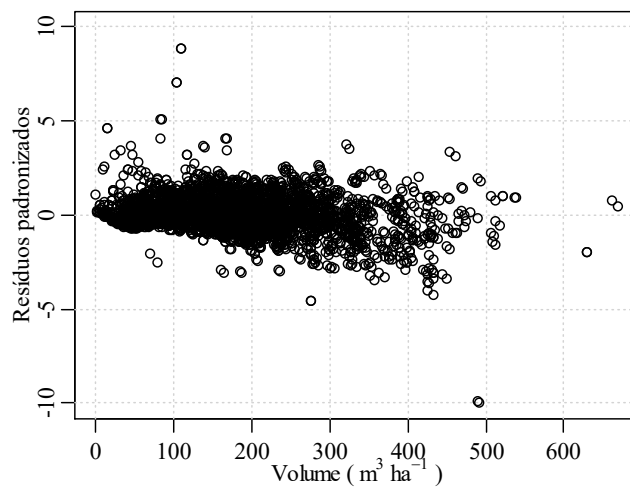
Tabela 3 - Parâmetros estimados para as equações da alternativa 2.

Alternativa 2					
Modelo para Volume			Modelo para Área Basal		
Parâmetro	Variável	Valor	Parâmetro	Variável	Valor
β_0	intercepto	10,84	α_1	$1-(I_1/I_2)$	3,72
β_1	I_2^{-1}	-9,77	α_2	$(1-(I_1/I_2))S^{-1}$	-2,70
β_2	S^{-1}	-3,18	-	-	-
β_3	$\ln G_2^{-1}$	-14,26	-	-	-
β_4	$I_2^{-1}\ln G_2^{-1}$	20,87	-	-	-
S_{yx} ($m^3 ha^{-1}$)		25,91	S_{yx} ($m^2 ha^{-1}$)		1,52
$S_{yx}\%$		14,53	$S_{yx}\%$		8,82
R_{aj}^2		0,91	R_{aj}^2		0,99

Fonte: Da autora (2018).

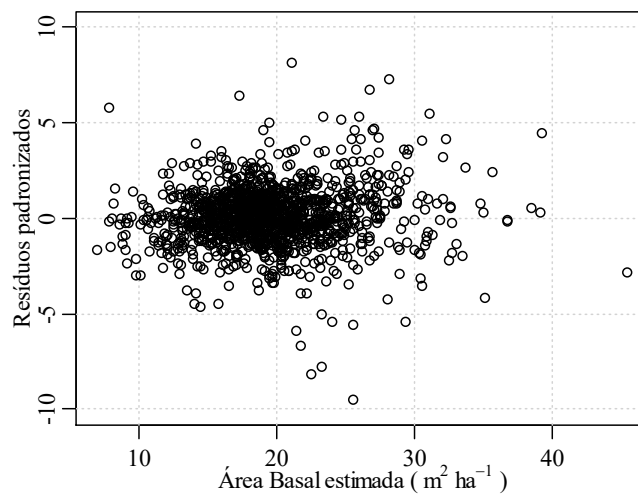
Nenhuma tendência de superestimava e subestimativa foram observadas na distribuição dos resíduos, para a equação de volume e área basal, porém verificou-se a presença de alguns possíveis *outliers* e o aumento da variância em ambas as distribuições (FIGURAS 7 e 8).

Figura 7 - Gráfico de resíduos padronizados para o modelo volumétrico da Alternativa 2



Fonte: Da autora (2018).

Figura 8 - Gráfico de resíduos padronizados para o modelo de área basal da Alternativa 2.

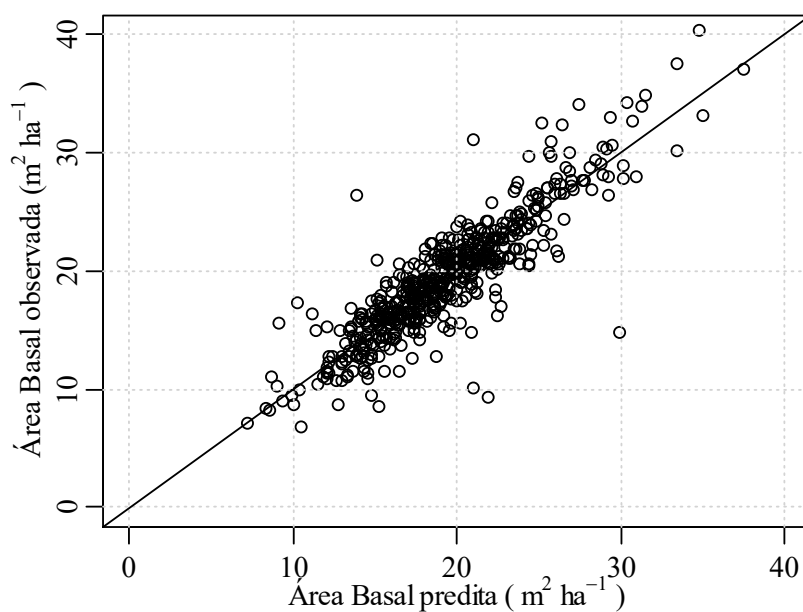


Fonte: Da autora (2018).

As projeções geradas pelo sistema, para os dados de validação, foram próximas dos valores observados e nenhuma tendenciosidade foi observada (FIGURAS 9 e 10). Portanto o sistema de equações gerado conseguiu representar de maneira satisfatória o crescimento e produção do clone H13.

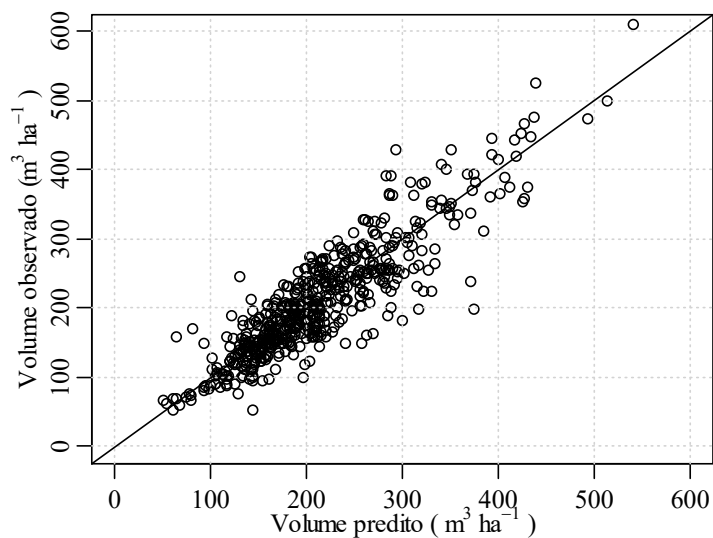
As curvas de produção em volume para cada classe de sítio também foram biologicamente consistentes. As curvas de produção, para os melhores sítios, também foram próximas entre si, porém esta proximidade foi menos acentuada do que a apresentada na alternativa anterior (FIGURA 11).

Figura 9 - Área basal observada x Área basal predita para os dados de validação.



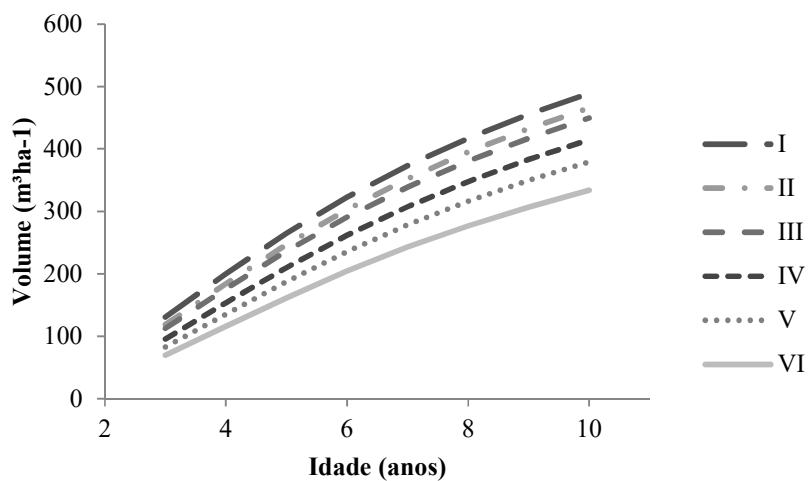
Fonte: Da autora (2018).

Figura 10 - Volume observado x Volume predito para os dados de validação.



Fonte: Da autora (2018).

Figura 11 - Curvas de produção em volume por classe de índice de sítio (I-melhor e VI-pior) – Alternativa 2.



Fonte: Da autora (2018).

Da mesma maneira que na alternativa 1, a ITC foi de 6 anos para as três primeiras classes (I, II, III), porém, para as demais (IV, V e VI), a ITC foi de 7 anos (FIGURA 12).

Figura 12 - Curvas de incremento médio anual (IMA) e incremento corrente anual (ICA) por classe de índice de sítio (I-melhor e VI-pior) (Continua)

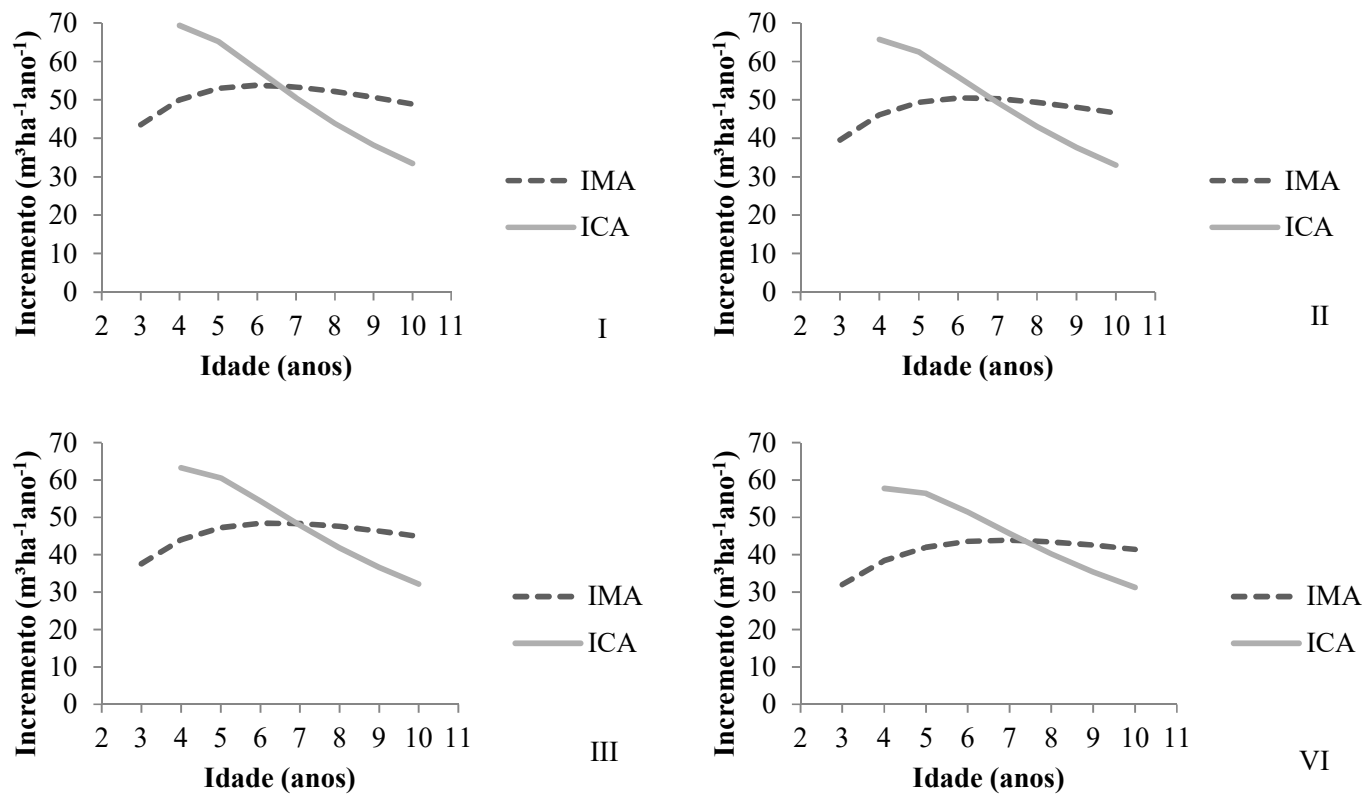
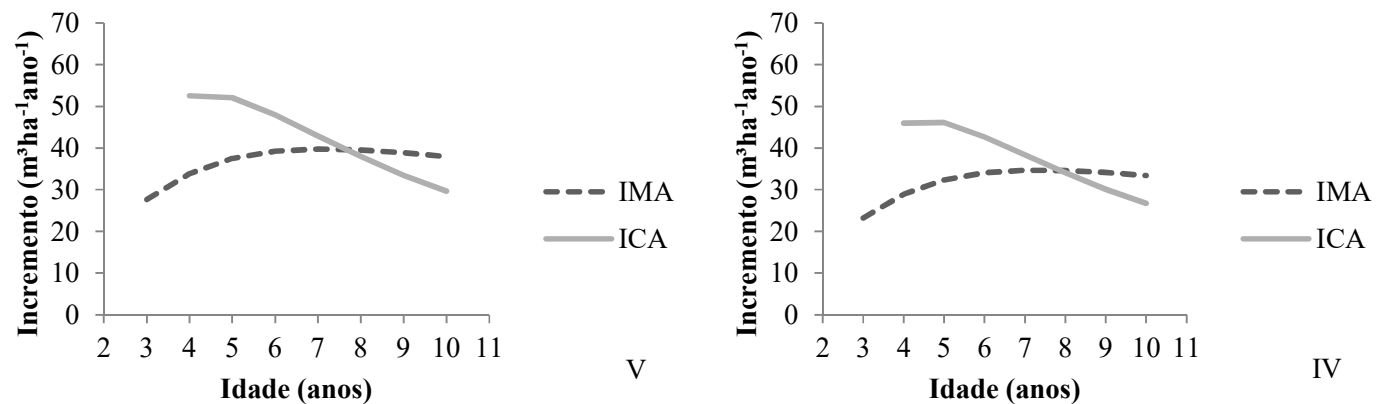


Figura 12 - Curvas de incremento médio anual (IMA) e incremento corrente anual (ICA) por classe de índice de sítio (I-melhor e VI-pior) (Conclusão)

29



Fonte: Da autora (2018).

3.3 Avaliação e aplicação da Alternativa 3: Sistema de equações de Clutter

Os parâmetros das equações do sistema foram significativos a 5% de probabilidade, com todos os sinais coerentes (TABELA 4). A análise da coerência dos sinais dos parâmetros é uma etapa importante na análise do modelo. Segundo Dias et al. (2005), a ocorrência de valor negativo, para o parâmetro associado ao índice de sítio $((1-(I_1/I_2))S)$, na equação de área basal, gera inconsistências do ponto de vista biológico. Este problema com o parâmetro α_2 é recorrente e alguns autores têm optado por retirar esta variável da equação ou substituí-la por outra variável, como, por exemplo, $(1-(I_1/I_2))\ln G_1$ e $(1-(I_1/I_2))\ln G_1^2$ (MIRANDA et al., 2015).

Os coeficientes de determinação ajustados foram de 0,95 e 0,99 para as equações de volume e área basal, respectivamente.

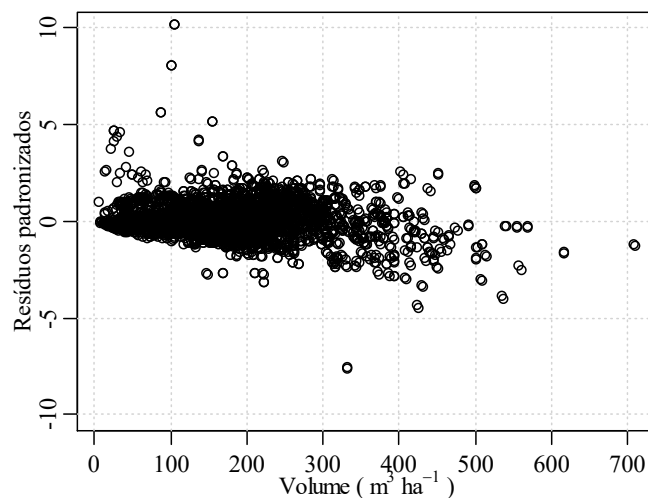
Tabela 4 - Parâmetros estimados para as equações da alternativa 2.

Alternativa 3 – Modelo de Clutter					
Modelo para Volume			Modelo para Área Basal		
Parâmetro	Variável	Valor	Parâmetro	Variável	Valor
β_0	intercepto	1,4244	α_1	$1-(I_1/I_2)$	3,4721
β_1	I_2^{-1}	-0,8371	α_2	$(1-(I_1/I_2))S$	0,0054
β_2	S	0,0027	-	-	-
β_3	lnG	1,3467	-	-	-
S_{yx} ($m^3 ha^{-1}$)		22,85	S_{yx} ($m^2 ha^{-1}$)		1,52
$S_{yx}\%$		12,87	$S_{yx}\%$		8,82
R_{aj}^2		0,95	R_{aj}^2		0,99

Fonte: Da autora (2018).

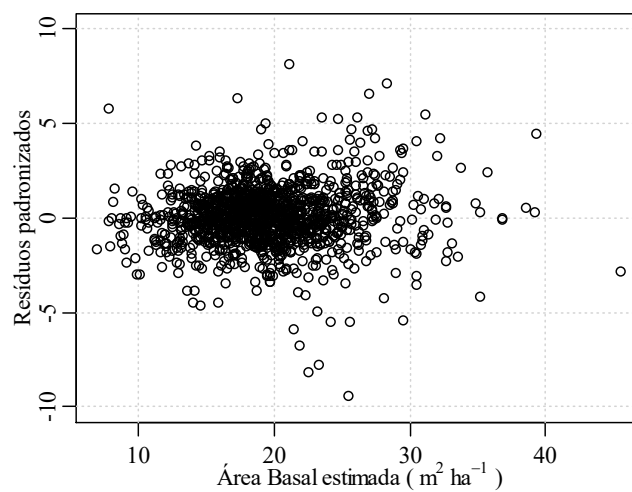
Observou-se pela análise gráfica dos resíduos que a equação de volume tende a superestimar para volumes maiores que $500 m^3 ha^{-1}$ (FIGURA 13). Os resíduos para a equação de área basal não apresentaram nenhuma tendência (FIGURA 14). O sistema apresentou boa habilidade de projeção, para os dados de validação, conforme pode ser observado nas Figuras 15 e 16.

Figura 13 - Gráfico de resíduos padronizados para o modelo volumétrico da Alternativa 3.



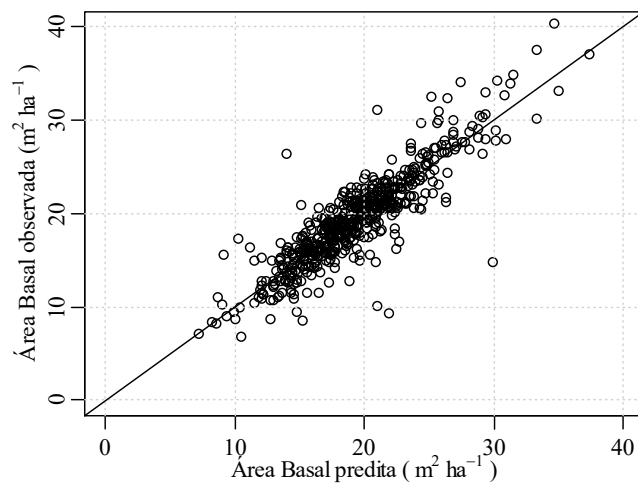
Fonte: Da autora (2018).

Figura 14 - Gráfico de resíduos padronizados para o modelo de área basal da Alternativa 3.



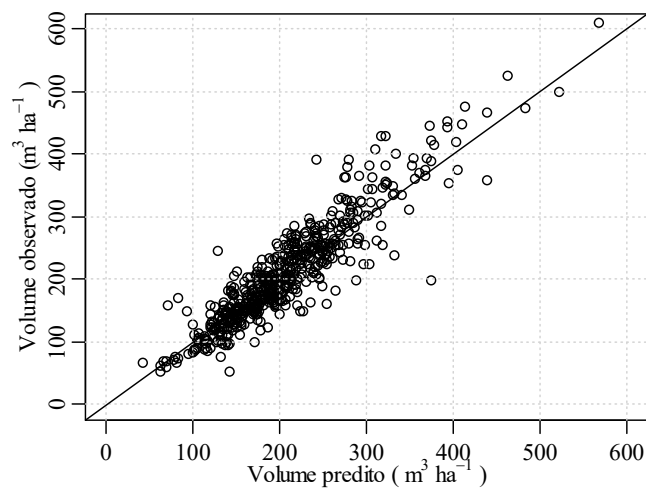
Fonte: Da autora (2018).

Figura 15 - Área basal observada x Área basal predita para os dados de validação.



Fonte: Da autora (2018).

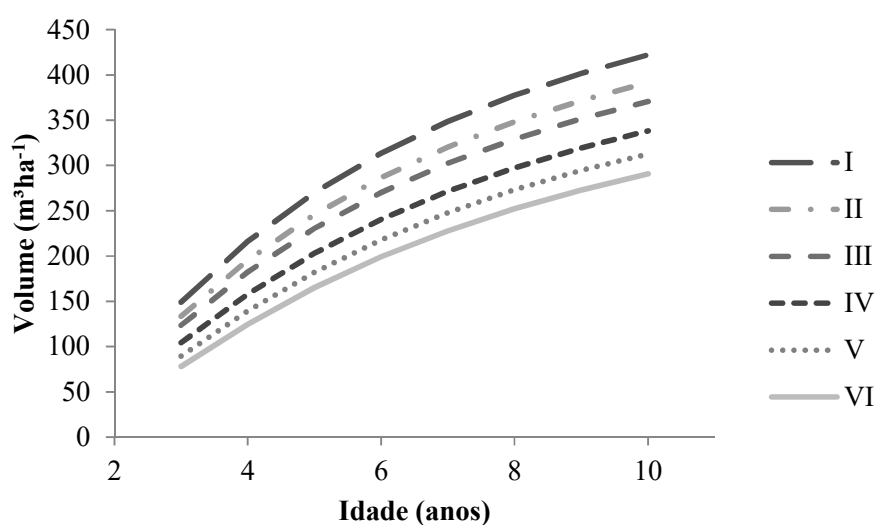
Figura 16 - Volume observado x Volume predito para os dados de validação.



Fonte: Da autora (2018).

As curvas de produção por classe de sítio para o modelo de Clutter também foram consistentes biologicamente. Esta alternativa permitiu maior diferenciação entre as curvas de produção.

Figura 17 - Curvas de produção em volume por classe de índice de sítio (I-melhor e VI-pior) – Alternativa (Clutter).



Fonte: Da autora (2018).

O valor máximo de incremento médio anual ocorreu aos 5 anos para todas as classes, exceto para a classe menos produtiva (VI), na qual o IMA máximo foi aos 6 anos (FIGURA 18).

Figura 18 - Curvas de incremento médio anual (IMA) e incremento corrente anual (ICA) por classe de índice de sítio (I-melhor e VI-pior) (Continua)

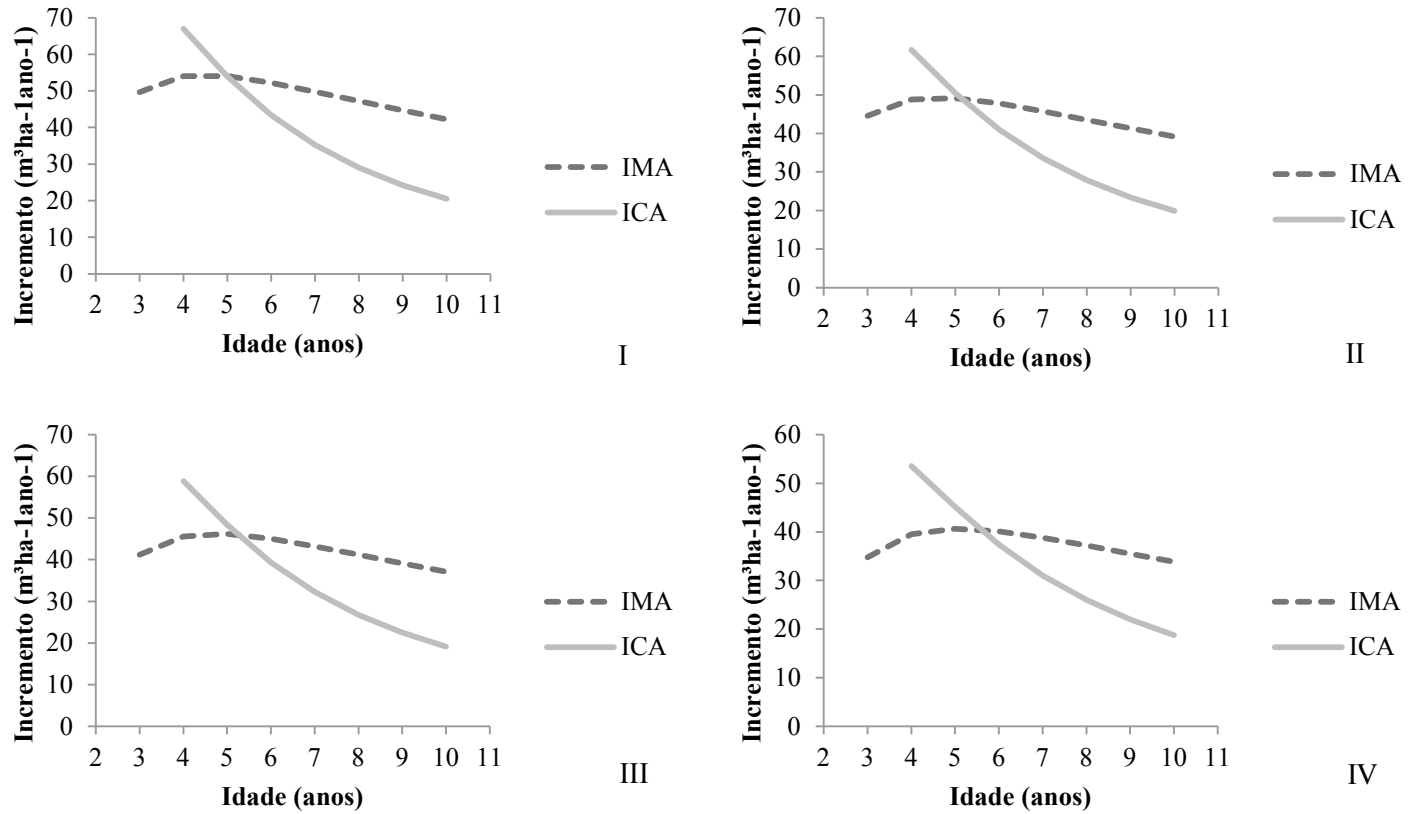
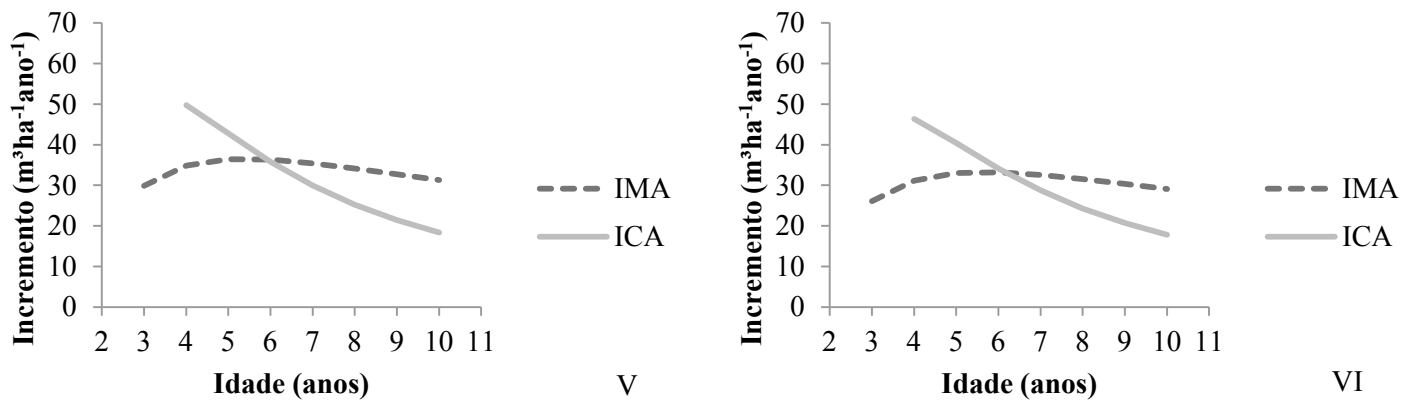


Figura 18 - Curvas de incremento médio anual (IMA) e incremento corrente anual (ICA) por classe de índice de sítio (I-melhor e VI-pior) (Conclusão)



Fonte: Da autora (2018).

3.4 Comparação entre alternativas

A equação de área basal da alternativa 1 apresentou a menor precisão, enquanto as alternativas 2 e 3 foram praticamente idênticas, sendo a única diferença o tipo de transformação utilizada para a variável S.

Na alternativa 1, a área basal para a idade 2 é predita como função apenas da I_2^{-1} e do S^{-1} . A projeção da área basal, como função de uma área basal inicial (G_1), I_1 , I_2 e S, não é utilizada nesta alternativa. Este procedimento resultou em erros maiores. A área basal inicial possui alta correlação com a área basal futura e a utilização desta informação resulta em melhores projeções da G e do V, conforme comprovado na validação das alternativas 2 e 3.

A menor e a maior precisão, para a equação de volume, foram obtidas, respectivamente, nas alternativas 2 e 3 (Sistema de Clutter). Porém, conforme verificado por Salles et al. (2012), é recomendado que as interações sejam testadas para evitar que o modelo reduzido seja aplicado e gere resultados não satisfatórios. Sugere-se que o modelo completo seja testado com os dados de unidades amostrais com duas ou mais medições. Neste trabalho, apesar do sistema ter sido ajustado com estes dados, utilizou-se a base do modelo resultante da alternativa 1. Desse modo, a significância das interações foi analisada com os dados que incluem as unidades com uma medição.

As diferenças apresentadas entre as equações das alternativas resultaram em diferentes ITC's para cada classe de sítio. O modelo de Clutter foi o que apresentou menores ITC's para a maioria das classes de sítio. Considerando esta alternativa (Alternativa 3) como o sistema mais adequado, para determinar o IMA máximo, os manejadores estariam tomando decisões tardias de intervenção, se utilizassem os demais sistemas (Alternativas 1 e 2). A alternativa 1 apresentou ITC constante independente da qualidade do sítio (6 anos). A alternativa 2 apresentou ITC constante, nas classes I, II e III (6 anos) e depois

70

constante nas classes IV, V e IV (7 anos). A alternativa 3 apresentou ITC constante nas classes de I a V (5 anos).

4 CONCLUSÃO

Duas alternativas foram testadas, para estimar o crescimento e a produção em povoamentos de *Eucalyptus* (Clone H13), a partir de modificações (transformações das variáveis e interações), no modelo original de Clutter e na estrutura dos dados. A única interação significativa foi entre as variáveis transformadas I^{-1} e $\ln G^{-1}$. Portanto as análises devem ser iniciadas com o modelo completo.

Os modelos devem ser desenvolvidos na forma de projeção, ou seja, utilizando-se G_1 , G_2 , I_1 , I_2 e S , visto que a alternativa 1 resultou em maiores erros na projeção para dos dados de validação.

O sistema originalmente proposto por Clutter apresentou maior precisão, entretanto todos os sistemas foram biologicamente consistentes. Cabe ressaltar que as alternativas apresentaram algumas diferenças no resultado da ITC por classe de sítio. A alternativa 1 apresentou ITC constante independente da qualidade do sítio (6 anos). A alternativa 2 apresentou ITC constante nas classes I, II e II (6 anos) e depois constante nas classes IV, V e IV (7 anos). A alternativa 3 apresentou ITC constante nas classes de I a V (5 anos).

REFERÊNCIAS

- ALCANTARA, A. E. M. **Alternativas de modelagem para projeção do crescimento de eucalipto em nível de povoamento**. 2012. 52 p. Dissertação (Mestrado em Ciência Florestal) – Universidade Federal de Viçosa, Viçosa, 2012.
- AZEVEDO, G. B. de et al. Modelagem da produção em nível de povoamento e por distribuição diamétrica em plantios de eucalipto. **Scientia Forestalis**, Piracicaba, v. 44, n. 110, p. 383-392, jun. 2016.
- CLUTTER, J. L. Compatible growth and yield models for Loblolly Pine. **Forest Science**, Bethesda, v. 9, n. 3, p. 354-370, Sept. 1963.
- CLUTTER, J. L. et al. **Timber management: a quantitative approach**. Nova York: John Wiley & Sons, 1983. 333 p.
- DIAS, A. N. et al. Emprego de um modelo de crescimento e produção em povoamentos desbastados de eucalipto. **Revista Árvore**, Viçosa, v. 29, n. 5, p. 731-739, set./out. 2005.
- HENNINGSSEN, A.; HAMANN, J. D. Systemfit: a package for estimating systems of simultaneous equations in R. **Journal of Statistical Software**, Los Angeles, v. 23, n. 4, p. 1-40, Dec. 2007.
- MIRANDA, R. O. V. et al. Modelagem do crescimento e produção em classes de precipitação pluviométrica para *Eucalyptus* sp. **Floresta**, Curitiba, v. 45, n. 1, p. 117-128, jan./mar. 2015.
- NASCIMENTO, F. A. F. do et al. Sistema de crescimento e produção para povoamentos de *Pinus taeda* na região norte de Santa Catarina. **Cerne**, Lavras, v. 21, n. 2, p. 235-242, abr./jun. 2015.
- R CORE TEAM. **R: a language and environment for statistical computing**. Vienna: R Foundation for Statistical Computing, 2014. 2630 p.
- SALLES, T. T. et al. Modelo de Clutter na modelagem de crescimento e produção de eucalipto em sistemas de integração lavoura-pecuária-floresta. **Pesquisa Agropecuária Brasileira**, Brasília, v. 47, n. 2, p. 253-260, fev. 2012.

SULLIVAN, A. D.; CLUTTER, J. L. A simultaneous growth and yield model for loblolly pine. **Forest Science**, Bethesda, v. 18, n. 1, p. 76-86, Mar. 1972.

**ARTIGO 2 – AVALIAÇÃO DE FUNÇÕES DE AFILAMENTO DE
EXPOENTE-VARIÁVEL PARA ÁRVORES DE *Eucalyptus* spp.**

**EVALUATION OF VARIABLE-EXPONENT TAPER FUNCTIONS FOR
Eucalyptus spp. TREES**

Artigo redigido conforme a norma para publicação periódica científica NBR
6022 (ABNT, 2003).

RESUMO

Objetivou-se neste trabalho ajustar e avaliar as funções de afilamento do tipo expoente-variável, para estimar os diâmetros ao longo do fuste e volume total (com e sem casca) de árvores de *Eucalyptus* spp., considerando diferentes estratégias na determinação da altura relativa do ponto de inflexão – p . Uma nova proposta, para estimar o valor de p , foi apresentada e uma nova equação de expoente-variável foi desenvolvida. Os métodos geométricos EDE (*Extremum Distance Estimator*), ESE (*Extremum Surface Estimator*), BEDE (*Bisection - EDE*) e BESE (*Bisection - ESE*) podem ser utilizados como uma alternativa para a determinação da altura relativa no ponto de inflexão (p) por árvore. As equações ajustadas apresentaram boa precisão (S_{yx} % de 6,35% a 7,20%) e boa habilidade, para predizer diâmetros ao longo do fuste e volume, para o perfil com e sem casca. A estratégia utilizada na determinação de p não teve influência na precisão das equações. A altura relativa do ponto de inflexão varia de árvore para árvore e os resultados indicam que esta variação sofre pouca ou nenhuma influência do DAP e H das árvores. A nova equação proposta apresentou comportamento semelhante às já desenvolvidas por Kozak, porém tem a vantagem de possuir um expoente mais simples.

Palavras-chave: Ponto de inflexão. Equações de afilamento de Kozak. Diâmetros com casca e sem casca. Volume.

ABSTRACT

The variable-exponent taper functions were fitted for *Eucalyptus* spp. data, using different approaches to estimating inflection point (p). The precision and the prediction abilities of the taper functions were evaluated for diameter along the stem and total volume (inside bark and outside bark). A new approach was presented for estimate the p value and a modified version of Kozak's model was developed. The geometrical methods EDE (*Extremum Distance Estimator*), ESE (*Extremum Surface Estimator*), BEDE (*Bisection - EDE*) e BESE (*Bisection - ESE*) can be applied as an alternative to estimate p . The fitted equations performed well, with good precisions (S_{yx} % de 6.35% a 7.20%) and good ability to predict diameter along the stem and total volume (outside and inside bark). It was found that the different approaches tested to determine p did not affect the precision of the equations. It was observed that the relative height at the inflection point (p) varies from tree to tree and the results indicated that DBH and H have a little or no effect in this variation. The modified variable exponent was similar to Kozak's equations, however it has as advantage a more simple exponent.

Keywords: Inflection point. Kozak's taper equation. Diameter inside and outside bark. Volume.

1 INTRODUÇÃO

O afilamento do fuste das árvores é definido como o decréscimo do diâmetro no sentido base-topo. Esta característica torna-se ferramenta importante ao manejador florestal por permitir a estimativa dos sortimentos presentes no povoamento.

As múltiplas informações obtidas, a partir de uma função de afilamento ajustada, como o diâmetro a qualquer altura, o volume total, a altura comercial e o volume de seções individuais (KOZAK, 2004), associada ao desafio de desenvolver uma função capaz de descrever adequadamente o perfil das árvores, mantêm a relevância deste tema na área de biometria florestal.

Muitas equações foram desenvolvidas, ao longo dos anos, com o objetivo de descrever o perfil das árvores. Geralmente, são classificadas como simples (KOZAK; MUNRO; SMITH, 1969; ORMEROD, 1973), segmentadas (MAX; BURKHART, 1976; PARRESOL; HOTVEDT; CAO, 1987), polinomiais (HRADETZKY, 1976; SCHOEPFER, 1966), sigmoidais (BIGING, 1984; GARAY, 1979; PIRES; CALEGARIO, 2007) e de forma-variável ou expoente-variável (KOZAK, 1988; NEWNHAM, 1988).

As funções de expoente-variável de Kozak (1988, 2004) são funções contínuas que descrevem o afilamento do fuste, por meio da mudança do expoente, para compensar as suas formas neiloide, parabolóide e cônica. Foram desenvolvidas, a partir de uma função de potência simples (PEREZ; BURKHART; STIFF, 1990), que descreve o perfil de um sólido de revolução (NEWNHAM, 1992).

Pode-se afirmar que as equações de expoente-variável representam a evolução daquelas propostas por Gray (1956) e Ormerod (1973). Gray (1956)

assumiu que o fuste¹ principal da árvore possui uma forma parabolóide quadrática dada pela equação $d^2 = \alpha(H-h)^{1/2}$. A forma do fuste é representada pelo expoente e o parâmetro α representa o afilamento da árvore.

No modelo de Ormerod (1973), o expoente é representado por um parâmetro, que permite que outras formas de perfil sejam assumidas e αDAP representa o afilamento. Neste caso, α pode ser interpretado como a variação no afilamento das árvores não explicada pelo DAP (diâmetro à altura do peito) (NEWBERRY; BURKHART, 1986). A principal mudança nas equações de expoente-variável é a substituição do parâmetro no expoente por uma função que permite a variação da forma ao longo do fuste.

Outro ponto de destaque, nas funções de afilamento de Kozak, é a utilização da altura relativa no ponto de inflexão ($p = h_i/H$) na base da função. O valor de p é definido como o ponto em que a forma da árvore muda de neiloide para parabolóide (DEMAERSHALK; KOZAK, 1977). Segundo Kozak (1988), este ponto é relativamente constante, para determinada espécie, independentemente do tamanho da árvore.

Muitos pesquisadores adotam a prática de fixar um valor para p , quando decidem não estimá-lo a partir dos dados (BERHE; ARNOLDSSON, 2008). Este procedimento é sustentado pelas pesquisas de LeMay et al. (1993 apud KOZAK, 1997) e Perez, Burkhart e Stiff (1990) que afirmam, respectivamente, que valores de p entre 0 – 0,3 ou 0,15 – 0,35 têm efeito desprezível ou pequeno na habilidade preditiva do modelo. Entretanto, conforme observado por Berhe e Arnoldsson (2008), parece existir um valor de p ótimo entre 0,1 e 0,3. Berhe e Arnoldsson (2008) utilizaram a modelagem não linear mista para investigar a variação de p . Os resultados indicaram que a altura relativa no ponto de inflexão

¹ Fuste principal é a parte abaixo da copa e acima do ponto influenciado pela dilatação da base (NEWBERRY; BURKHART, 1986). ² d = diâmetro na altura h e H = altura total da árvore.

varia de árvore para árvore e possui a tendência de depender do DAP (diâmetro à altura do peito) e da H (altura total).

Apesar de muitas pesquisas relatarem que as equações do tipo expoente-variável apresentam desempenho superior a outros tipos de funções de afilamento (ANDRADE, 2014; BERHE; ARNOLDSSON, 2008; LI; WEISKITTEL, 2010; NEWNHAM, 1992), são raramente contempladas em pesquisas brasileiras com espécies de rápido crescimento, destacando-se o estudo de Andrade (2014).

Diante do exposto, pode-se afirmar que a subjetividade na determinação de p e a influência de seu valor na habilidade preditiva da função são assuntos que também devem ser investigados, visto que ainda não há um consenso na literatura sobre estas questões. Além disso, deve-se avaliar se os modelos de Kozak apresentam bom desempenho, na modelagem de dados heterogêneos de afilamento de *Eucalyptus* spp, que representam a realidade de muitas empresas brasileiras.

Objetivou-se, neste trabalho, avaliar a qualidade do ajuste das equações de expoente-variável de Kozak (KOZAK, 1988, 2004), para estimar os diâmetros, ao longo do fuste e volume total (com e sem casca) de árvores de *Eucalyptus* spp., considerando diferentes estratégias na determinação da altura relativa do ponto de inflexão – p (como parâmetro, conforme definido por Kozak e valor médio estimado por métodos geométricos). Uma proposta, para estimar o valor de p por métodos geométricos, foi apresentada e uma nova equação de expoente-variável foi desenvolvida.

2 MATERIAL E MÉTODOS

2.1 Base de dados

Os dados utilizados neste estudo são provenientes de povoamentos de *Eucalyptus* spp. localizados nos municípios de Ouvidor - GO, Catalão - GO e Três Ranchos - GO.

Os povoamentos continham idades entre 2,6 e 8,6 anos, diferentes espaçamentos de plantio, materiais genéticos (mudas clonais e por semente) e regimes de manejo (alto fuste e talhadia). A definição do número de árvores cubadas rigorosamente foi realizada a partir da distribuição diamétrica das parcelas inventariadas.

A cubagem consistiu na derrubada e mensuração de 360 árvores distribuídas em 22 projetos. A base de dados foi dividida em 70% para ajuste das equações e 30% para validação (TABELA 1).

Tabela 1 - Número de árvores cubadas por classe de diâmetro.

Classe de diâmetro	Ajuste	Validação	Total
[4-8[48	21	69
[8-12[48	20	68
[12-16[48	20	68
[16-20[43	19	62
[20-24[27	11	38
[24-28[21	9	30
[28-32[13	5	18
[32-36[5	2	7
Total	252	108	360

Fonte: Da autora (2018).

As árvores selecionadas foram abatidas e mensuradas as alturas totais. Em seguida, foram coletados os diâmetros com casca correspondentes às alturas do fuste iguais a 0,1; 0,5; 1,0; 1,3; 2,0 metros, mantendo o intervalo de 2,0 metros até a altura comercial, altura na qual o diâmetro foi igual a 4,0 cm. Nestas posições, também foram medidas as espessuras da casca.

2.2 Ajuste da função de afilamento de expoente variável

As funções de 1988 (1), 2001 (2) e 2002 (3), propostas por Kozak (1988, 2004), foram ajustadas para os dados deste estudo.

$$\begin{aligned}\hat{d}_{isc} &= \hat{\alpha}_0 \text{DAP}^{\hat{\alpha}_1} \hat{\alpha}_2^{\text{DAP}} X_i^{\hat{\beta}_1 Z^2 + \hat{\beta}_2 \ln(Z+0,001) + \hat{\beta}_3 \sqrt{Z} + \hat{\beta}_4 \exp(Z) + \hat{\beta}_5 (\text{DAP}/H)} \\ X_i &= \left[1 - (h_i/H)^{1/2} \right] / \left(1 - p^{1/2} \right) \\ p &= h_i/H\end{aligned}\quad (1)$$

$$\begin{aligned}\hat{d}_{isc} &= \hat{\alpha}_0 \text{DAP}^{\hat{\alpha}_1} X_i^{\hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 (1/e^{\text{DAP}/H}) + \hat{\beta}_2 \text{DAP}^{X_i} + \hat{\beta}_3 X_i^{\text{DAP}/H}} \\ X_i &= \left[1 - (h_i/H)^{1/4} \right] / \left(1 - p^{1/4} \right) \\ p &= 0,01\end{aligned}\quad (2)$$

$$\begin{aligned}\hat{d}_{isc} &= \hat{\alpha}_0 \text{DAP}^{\hat{\alpha}_1} H^{\hat{\alpha}_2} X_i^{\hat{\beta}_1 Z_i^4 + \hat{\beta}_2 (1/e^{\text{DAP}/H}) + \hat{\beta}_3 X_i^{0,1} + \hat{\beta}_4 (1/\text{DAP}) + \hat{\beta}_5 H^{Q_i} + \hat{\beta}_6 X_i} \\ Q_i &= \left[1 - (h_i/H)^{1/3} \right] \\ X_i &= \left[1 - (h_i/H)^{1/3} \right] / \left(1 - p^{1/3} \right) \\ p &= 1,3/H\end{aligned}\quad (3)$$

Em que: d_{isc} = diâmetro sem casca na altura h_i ; h_i = altura a partir do solo; $0 \leq h_i \leq H$; DAP = diâmetro com casca na altura do peito (cm); H = altura total da árvore; h_i = altura do ponto de inflexão a partir do solo. $Z = h_i/H$ (altura relativa); α_i = parâmetros a serem estimados ($i=0,1$ e 2); β_i = parâmetros a serem estimados ($i=1,2...5$).

Estes modelos também foram ajustados para estimar o diâmetro com casca ao longo do fuste (d_{icc}). Neste caso, o multiplicador de X_i é uma equação que estima o diâmetro com casca (D_{icc}) na altura de referência p . Na equação de 1988, o multiplicador é o diâmetro com casca na altura relativa do ponto de inflexão ($p=h_i/H$). Na equação de 2001, é o diâmetro com casca na altura relativa 0,01 ($p=0,01$) e, na equação de 2002, será o próprio diâmetro à altura do peito com casca (DAP_{cc}), eliminando-se, assim, a necessidade de utilizar uma equação para estimá-lo, uma vez que o DAP_{cc} é uma variável observada.

As equações foram ajustadas considerando p , conforme definido por Kozak e considerando p como parâmetro.

2.3 Determinação das coordenadas do ponto de inflexão

Na equação 1, Kozak (1988) definiu p como a altura relativa no ponto de inflexão ($p=h_i/H$). O valor de p é o ponto em que a forma da árvore muda de neiloide para parabolóide (DEMAERSHALK; KOZAK, 1977). Este ponto foi determinado para cada árvore, utilizando-se os métodos geométricos propostos por Christopoulos (2014), que identificam a inflexão de qualquer curva côncavo-convexa, sem utilizar regressão ou método visual (ANEXO A).

Foram testados os quatro métodos propostos por Christopoulos (2014): EDE (*Extremum Distance Estimator*), ESE (*Extremum Surface Estimator*), BEDE (*Bisection - EDE*) e BESE (*Bisection - ESE*), para o perfil com e sem

casca. As análises foram realizadas no software R (R CORE TEAM, 2014), por meio das funções *ede*, *ese*, *bede*, *bese* do pacote *Inflection* (CHRISTOPOULOS, 2017).

Os métodos permitem encontrar dois pontos apropriados entre os quais o ponto de inflexão verdadeiro está e, então, tomar como seu estimador o ponto médio (CHRISTOPOULOS, 2016). As funções do pacote *Inflection* retornam a abcissa do ponto de inflexão (x_{infl}) e a ordenada (y_{infl}) pode ser determinada de duas maneiras:

- a) se x_{infl} é um dos valores observados, então, y_{infl} será seu par correspondente observado;
- b) se x_{infl} não é um dos valores observados, então, y_{infl} será estimado por interpolação linear, utilizando-se os pares observados (x , y) anteriores e posteriores a x_{infl} .

A equação 1 foi ajustada para diâmetro com e sem casca considerando o valor médio de p estimado por cada método (EDE, ESE, BEDE e BESE). Para as posteriores análises, utilizou-se o valor de p que resultou no menor erro padrão residual para o ajuste.

2.4 Equação de expoente-variável modificada

A equação base da função de afilamento de Kozak é dada por (4):

$$\begin{aligned} Y &= X^c, \\ Y &= d/D_{lsc}, \quad X = (1 - Z^m) / (1 - p^m), \\ Z &= h/H \quad e \quad p = h_1/H. \end{aligned} \tag{4}$$

Em que: D_{isc} = diâmetro sem casca na altura h_i (ponto de inflexão); d =diâmetro sem casca na altura h ; H =altura total da árvore; h =altura a partir do solo; Z = altura relativa; p = altura relativa do ponto de inflexão; h_i =altura do ponto de inflexão; m = constante.

Segundo Kozak (2004), as equações de expoente-variável podem ser facilmente modificadas e aperfeiçoadas, para as condições locais e diferentes espécies pela alteração de um ou mais termos que compõem a equação: expoente, base do expoente ou multiplicador da base.

A seguinte equação foi proposta (5) e ajustada para diâmetro com e sem casca:

$$\hat{d}_i = \hat{\alpha}_0 DAP^{\hat{\alpha}_1} H^{\hat{\alpha}_2} X_i^{\hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 Z_i + \hat{\beta}_2 DAP/H + \hat{\beta}_3 p}$$

$$X_i = \left[1 - (h_i/H)^{1/6} \right] / \left(1 - p^{1/6} \right) \quad (5)$$

$$p = \frac{h_i}{H}$$

Em que: d_i = diâmetro com ou sem casca na altura h_i ; h_i = altura a partir do solo; $0 \leq h_i \leq H$; DAP = diâmetro com casca na altura do peito (cm); H = altura total da árvore; h_i = altura do ponto de inflexão a partir do solo. $Z = h_i/H$ (altura relativa); α_i = parâmetros a serem estimados ($i=0,1$ e 2); β_i = parâmetros a serem estimados ($i=1,2,\dots,5$).

2.5 Estimativa da altura relativa do ponto de inflexão para árvores inventariadas

A aplicação da função de afilamento de expoente-variável depende da estimativa das coordenadas do ponto de inflexão das árvores presentes nas

parcelas de inventário. D_1 é estimado pelo multiplicador de X_i (base) nas equações de Kozak. A altura do ponto de inflexão, para a equação proposta (5), foi estimada pela equação linear simples (6).

$$h_1 = \beta_0 + \beta_1 H + \varepsilon \quad (6)$$

Em que: h_1 = altura do ponto de inflexão; H = altura total da árvore; ε = erro aleatório; β 's = parâmetros a serem estimados.

A função de h_1 foi ajustada, utilizando-se a estimativa de h_1 pelo método EDE, por maior correlação obtida entre h_1 e H com este método.

2.6 Análise dos resultados

As funções ajustadas foram avaliadas pelo erro padrão residual - S_{yx} (7), erro padrão residual percentual - $S_{yx\%}$ (8) e gráfico de resíduos.

$$S_{yx} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (y - \hat{y})^2}{n - p}} \quad (7)$$

$$S_{yx\%} = \frac{S_{yx}}{y} \times 100 \quad (8)$$

Em que: S_{yx} = erro padrão residual na unidade da variável resposta; $S_{yx\%}$ = erro padrão residual percentual; y = valor observado; \hat{y} = valor estimado pela equação; n = número de observações; p = número de parâmetros.

O erro padrão residual expressa em termos médios o quanto os valores observados variam em relação aos estimados. A unidade é a mesma da variável dependente e quanto mais próximo de zero melhor é a equação.

Considerando que as funções ajustadas serão utilizadas para prever o perfil das árvores das unidades amostrais do inventário florestal, avaliou-se, também, sua habilidade preditiva, aplicando-se os critérios por classe de altura relativa ($Z=h/H$) aos dados de validação (9), (10), (11) e (12):

- *Bias* ou erro médio (\bar{e})

$$\bar{e} = \frac{\sum_{i=1}^n (y_i - \hat{y}_i)}{n} \quad (9)$$

- Erro médio absoluto $|e|$

$$|e| = \frac{\sum_{i=1}^n |y_i - \hat{y}_i|}{n} \quad (10)$$

- Erro médio percentual ($\bar{e}\%$)

$$\bar{e}\% = (\bar{e}/\bar{y}) \times 100 \quad (11)$$

- Raiz do erro quadrático médio (RMSE)

$$\text{RMSE} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (y - \hat{y})^2}{n}} \quad (12)$$

Em que: y = valor observado para determinada variável de interesse, neste trabalho, diâmetro com casca (d_{icc}) e sem casca (d_{isc}); \hat{y} = valor predito para a variável de interesse; n = número de observações; \bar{y} = média dos valores observados para a variável de interesse.

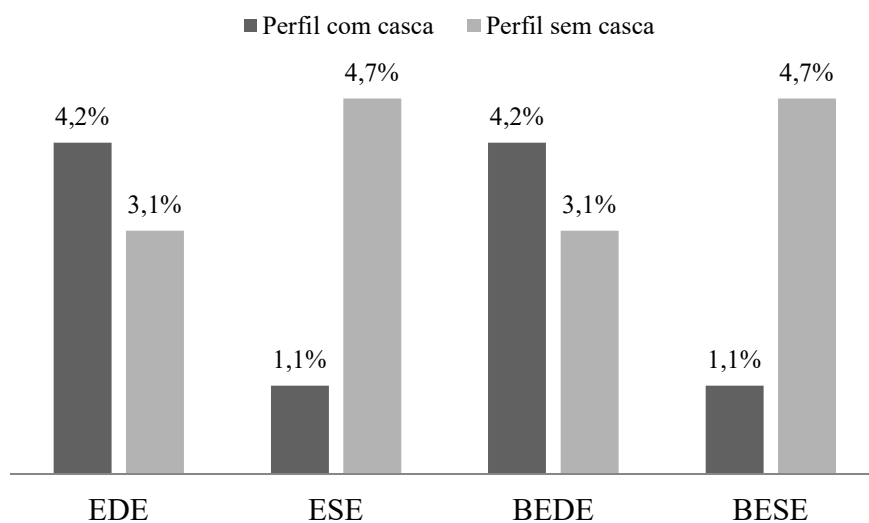
As equações de expoente-variável apenas podem ser integradas numericamente, portanto os volumes foram calculados, utilizando-se a função *integrate* do R (R CORE TEAM, 2014). Os volumes preditos, para os dados de validação, foram comparados graficamente com os volumes obtidos pela fórmula de Smalian.

3 RESULTADOS E DISCUSSÃO

3.1 Estimativa do valor de p por meio de métodos geométricos

Os métodos EDE, ESE, BEDE e BESE foram eficazes na determinação do ponto de inflexão em perfis de árvores de eucalipto. O percentual de árvores com p não estimado foi baixo para todos os métodos. O menor percentual foi observado, para os métodos ESE e BESE, em perfis com casca e o maior percentual para os métodos ESE e BESE, em perfis sem casca (FIGURA 1).

Figura 1 - Percentual total de árvores com p (altura relativa do ponto de inflexão) não estimado. EDE = *Extremum Distance Estimator*; ESE = *Extremum Surface Estimator*; BEDE = *Bisection Extremum Distance Estimator*; BESE = *Bisection Extremum Surface Estimator*.

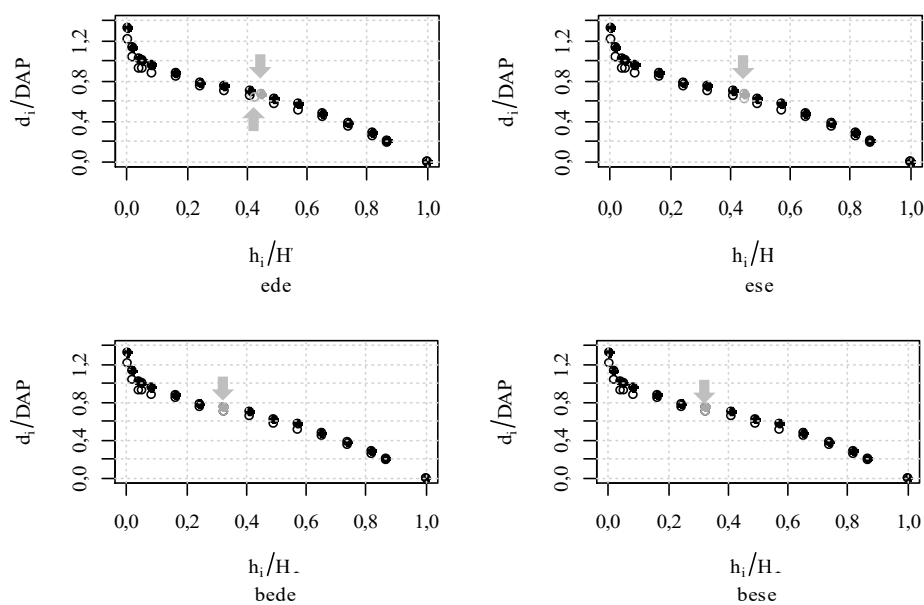


Fonte: Da autora (2018).

A aplicação desta metodologia evita a subjetividade na escolha de p (altura relativa do ponto de inflexão) para os ajustes das funções de afilamento de expoente-variável. Alguns autores têm optado por considerar p como parâmetro, a fim de evitar esta subjetividade (ANDRADE, 2014; BERHE; ARNOLDSSON, 2008; HUANG et al., 2000; YANG; HUANG; MENG, 2009), entretanto, conforme apontado por Fonweban et al. (2011), problemas de convergência podem ser enfrentados, principalmente, quando se opta pela modelagem de efeitos mistos.

O ponto de inflexão foi estimado por todos os métodos, para ambos os perfis, para 91% das árvores. É importante ressaltar que os valores estimados podem ou não diferir, dependendo do método adotado e do perfil considerado (FIGURA 2).

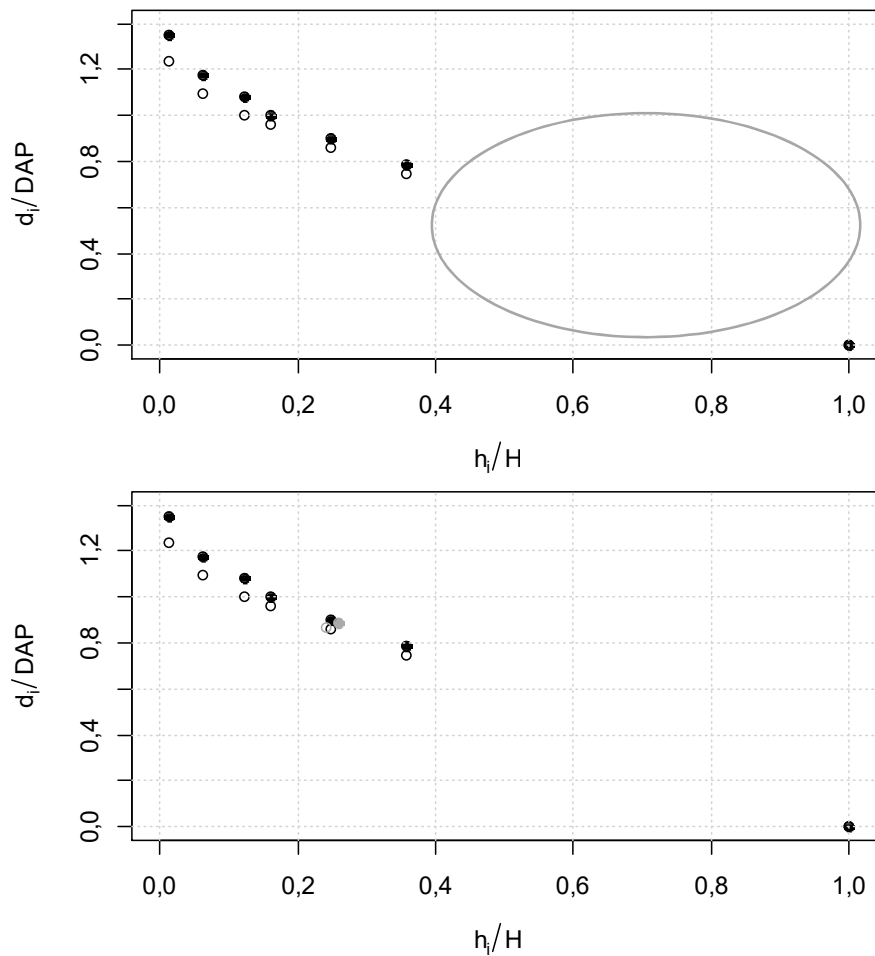
Figura 2 - Árvore com ponto de inflexão estimado (ponto cinza) por todos os métodos (DAP= 19,8 cm e H= 24,4 m). Cor sólida = perfil com casca. Transparente = perfil sem casca.



Fonte: Da autora (2018).

As árvores que não tiveram seu ponto de inflexão estimado possuem DAP's variando entre 4,5 cm a 15,6 cm, valores entre o DAP mínimo e médio dos dados. Observou-se que a ausência de dados coletados, na parte superior do fuste de árvores muito pequenas, não permitiu a estimativa do ponto de inflexão pelos métodos EDE e BEDE. Isto ocorreu, pois o diâmetro mínimo de cubagem (4 cm) em árvores muito pequenas está localizado em proporções abaixo de 50% da altura total (FIGURA 3).

Figura 3 - Ausência de dados coletados em árvores muito pequenas (DAP= 5,1 cm e H= 8,1 m) (a) Ponto de inflexão não estimado pelos métodos EDE e BEDE. (b) Ponto de inflexão (ponto cinza) estimado pelos métodos ESE e BESE. Cor sólida = perfil com casca. Transparente = perfil sem casca.



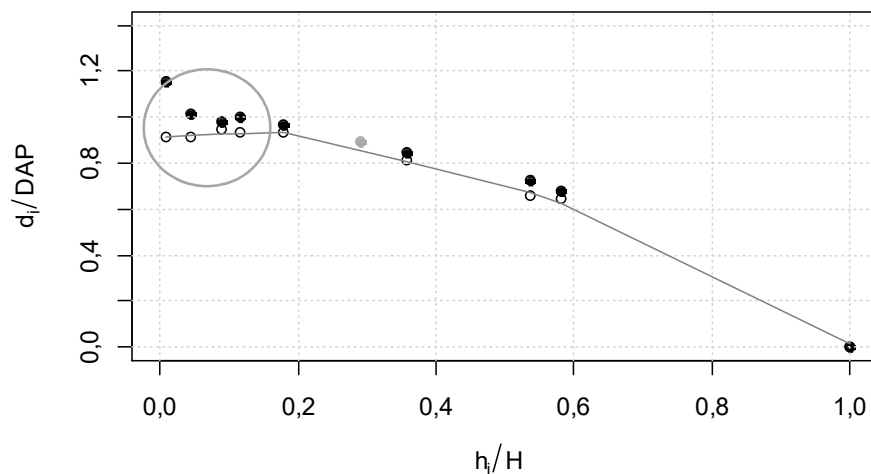
Fonte: Da autora (2018).

A forma parabolóide presente em alguns perfis sem casca (FIGURA 4) e/ou a forma indefinida na base (FIGURA 5), possivelmente causada pela

imprecisão na medição da espessura da casca, são algumas das situações nas quais o ponto de inflexão não foi estimado pelos métodos ESE e BESE.

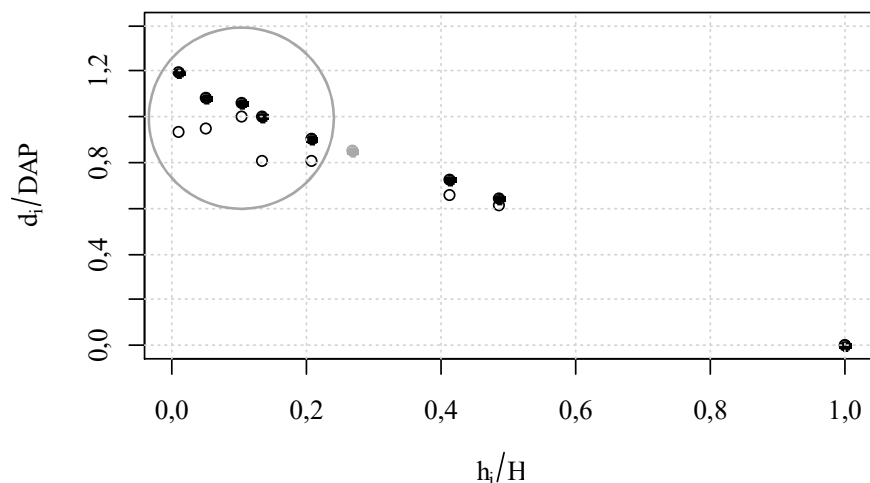
Observou-se que a presença de cascas mais espessas, nas partes inferiores do fuste, conferem ao perfil com casca uma forma sigmoide mais acentuada, com ponto de inflexão bem definido, contribuindo com o processo de estimação de p (FIGURA 4).

Figura 4 - Perfil sem casca com forma parabolóide. Os pontos de cor preta representam os dados de cubagem. Ponto cinza = ponto de inflexão estimado pelo método ESE. Cor sólida = perfil com casca. Transparente = perfil sem casca.



Fonte: Da autora (2018).

Figura 5 - Árvore com ponto de inflexão estimado (ponto cinza) apenas para o perfil com casca pelo método BESE. Cor sólida = perfil com casca. Transparente = perfil sem casca.



Fonte: Da autora (2018).

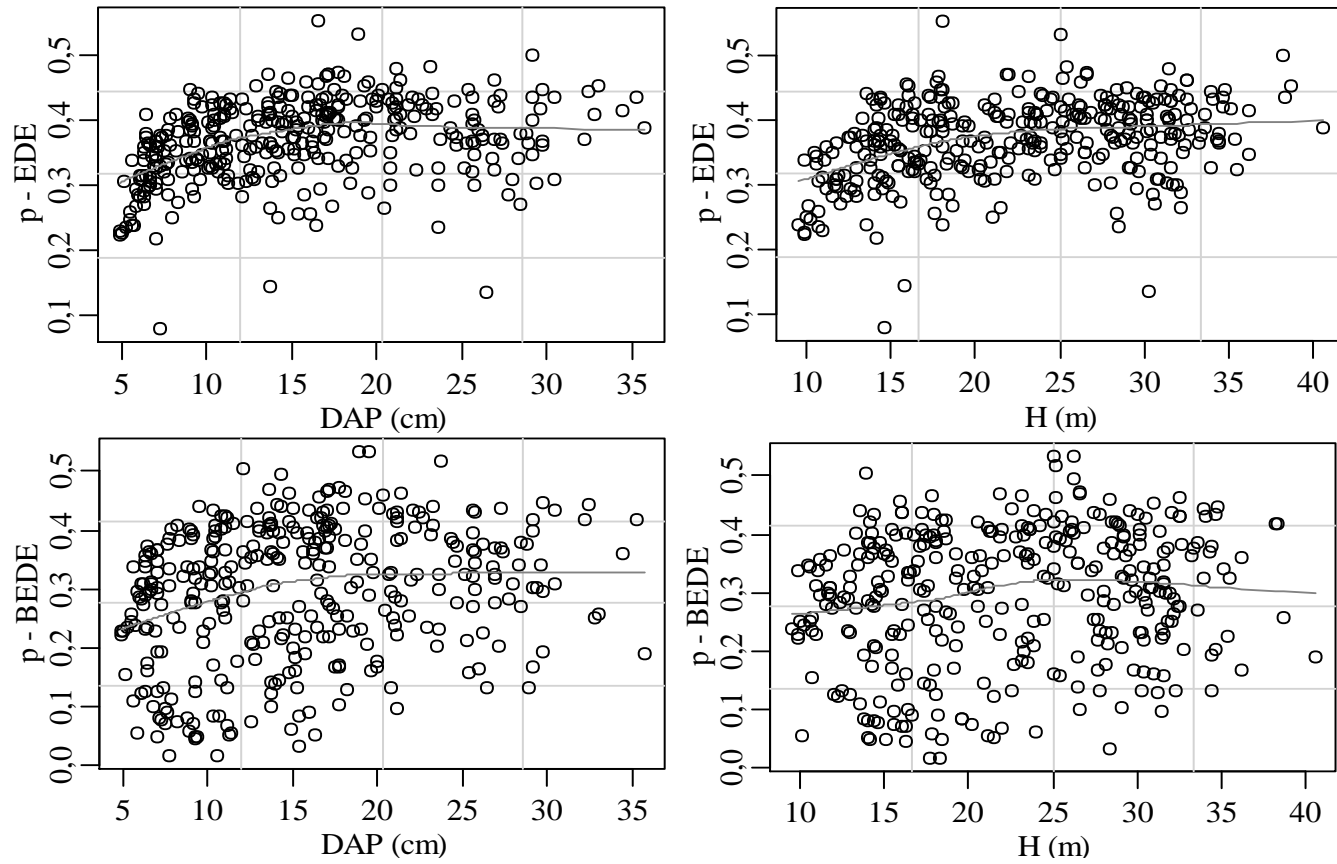
Os valores de p variam de árvore para árvore, porém esta variação do valor de p , estimado pelos métodos ESE, BEDE e BESE, não é explicada pelo DAP e H das árvores (FIGURAS 6, 7, 8 e 9). Ou seja, em média, o valor de p não aumenta e nem diminuiu com variação do DAP e da H.

Os valores de p estimados pelo método EDE (FIGURAS 6 e 8) apresentaram menor variabilidade. A altura relativa do ponto de inflexão (p) tende a aumentar com o aumento do DAP e da H até, aproximadamente, 12 cm e 17 m, respectivamente, tornando-se constante após estes pontos, principalmente, para perfis com casca.

Segundo Demaershalk e Kozak (1977), p é aproximadamente constante, para determinada espécie, independente do tamanho da árvore. É importante ressaltar que p é uma proporção entre a altura do ponto de inflexão e a altura total da árvore (h_i/H). Foi observado que a altura no ponto de inflexão (h_i)

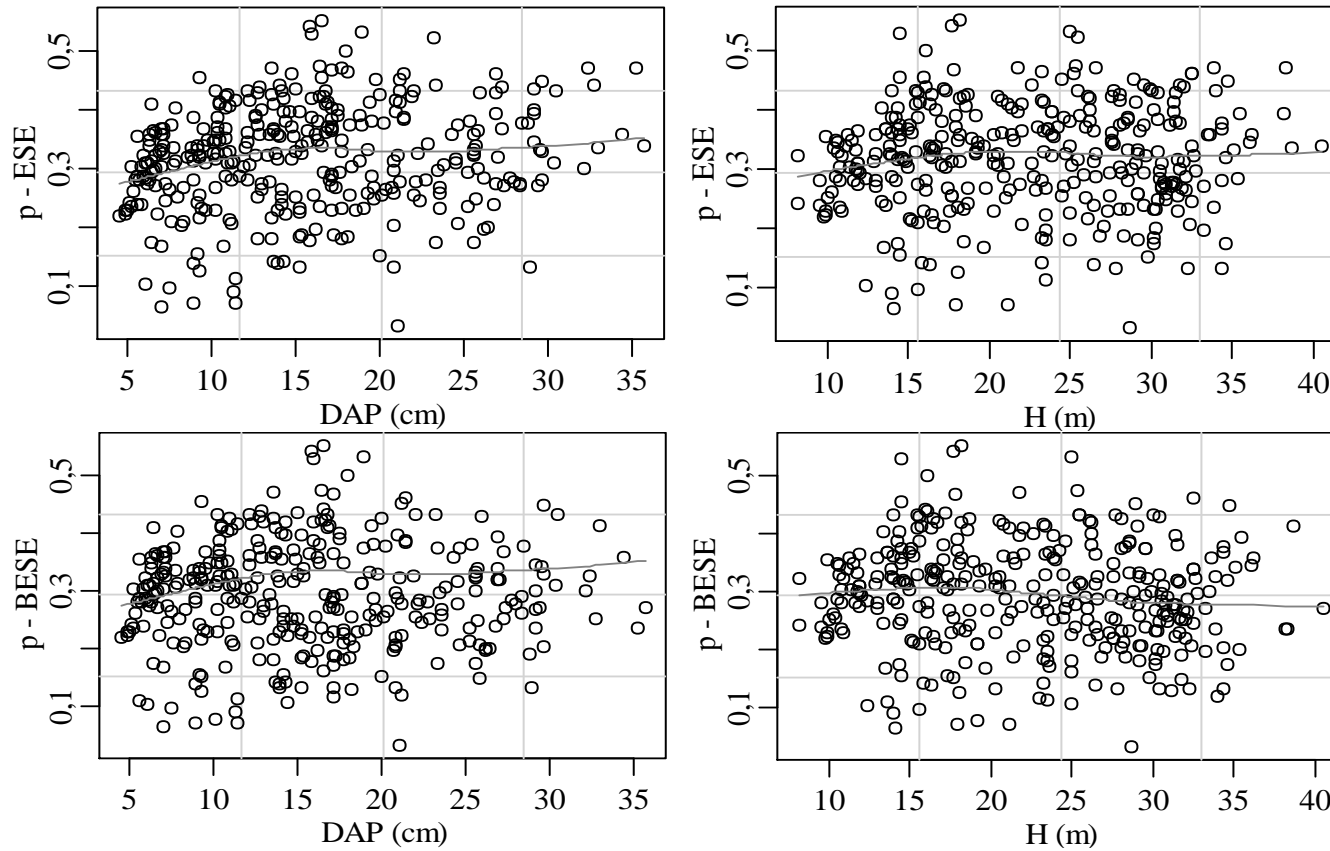
depende da H e do DAP da árvore, e a correlação entre estas variáveis foi maior para h_1 estimado pelo método EDE (FIGURA 10).

Figura 6 - Relação da altura relativa do ponto de inflexão (p) com o DAP e a H da árvore, para perfil sem casca.



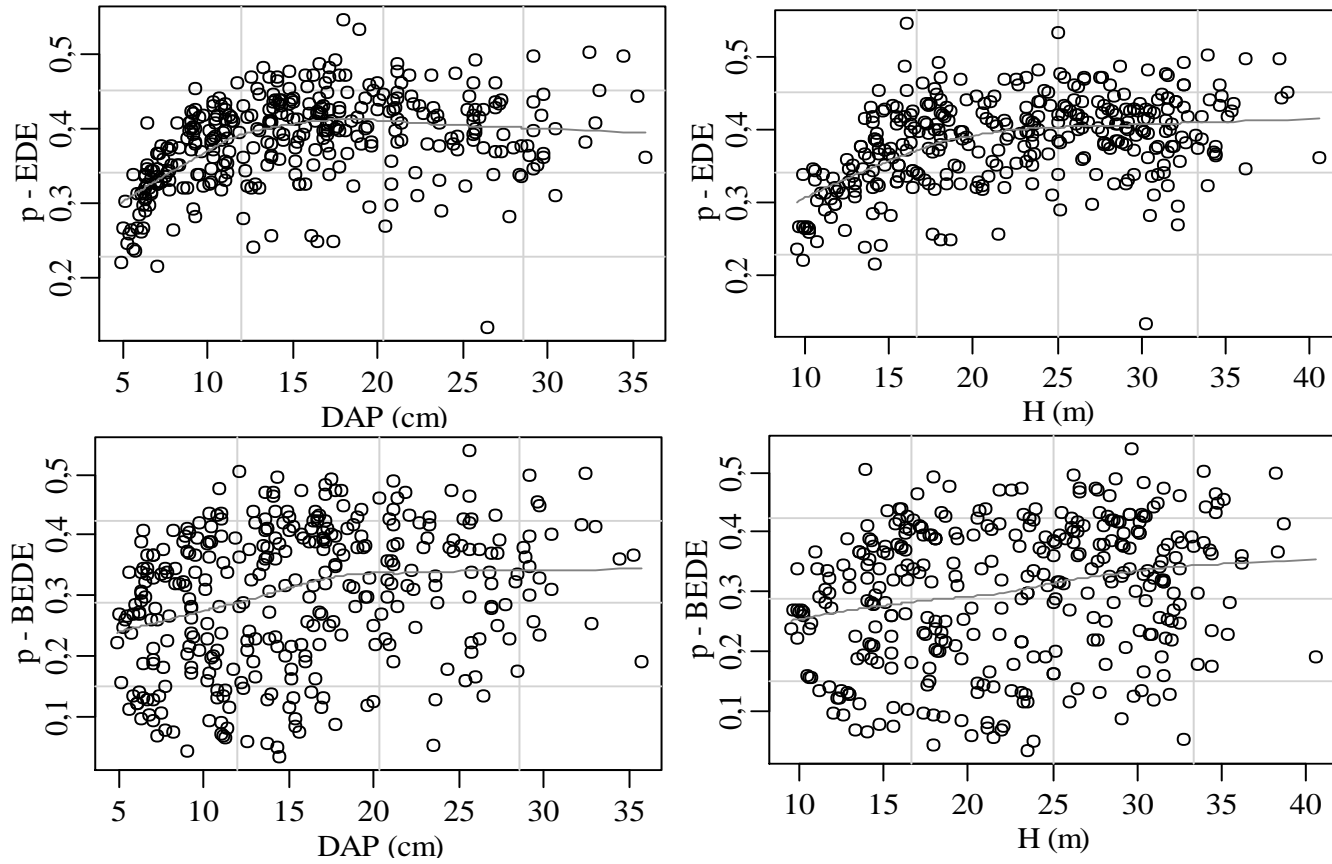
Fonte: Da autora (2018).

Figura 7 - Relação da altura relativa do ponto de inflexão (p) com o DAP e a H da árvore, para perfil sem casca.



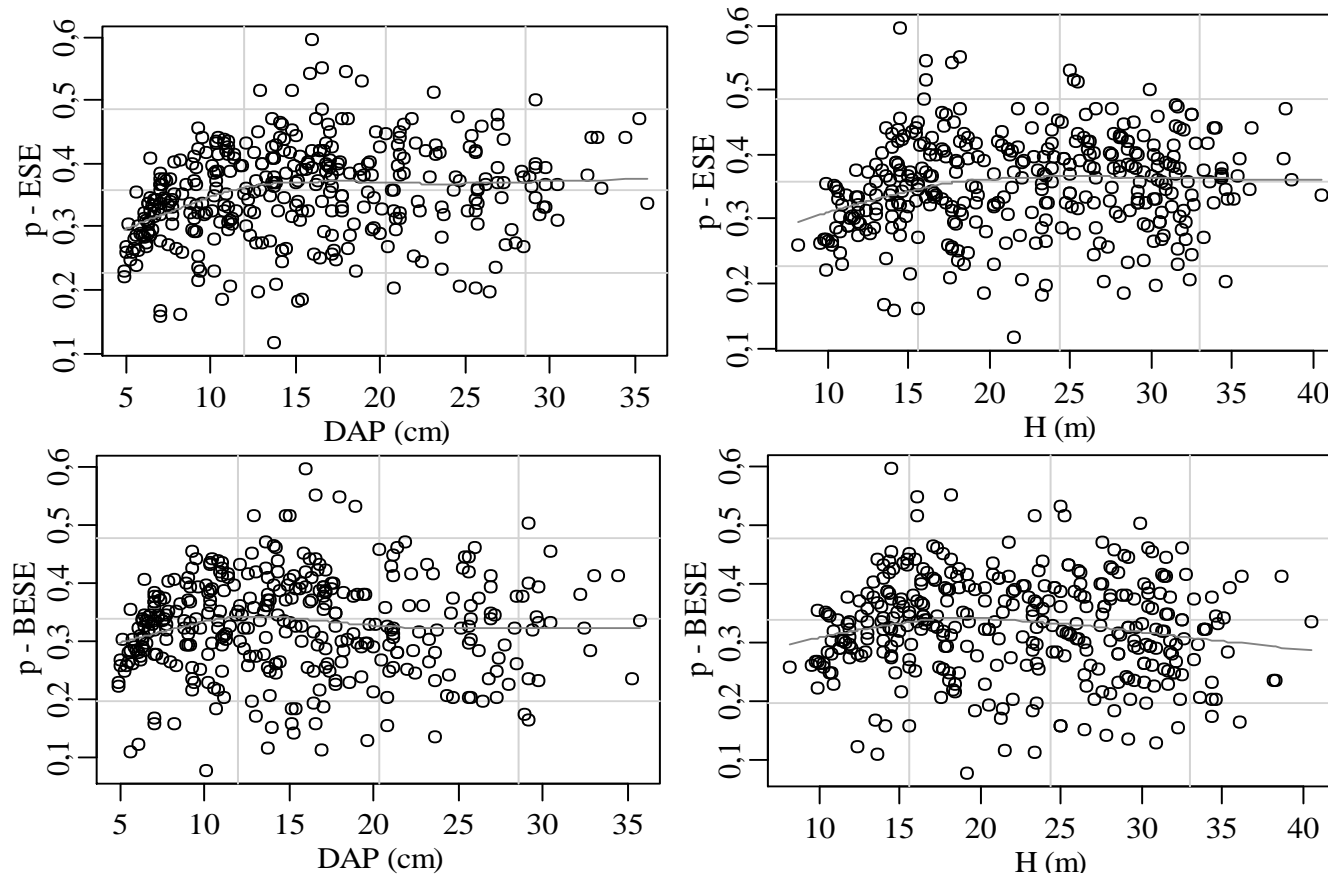
Fonte: Da autora (2018).

Figura 8 - Relação da altura relativa do ponto de inflexão (p) com o DAP e a H da árvore, para perfil com casca.



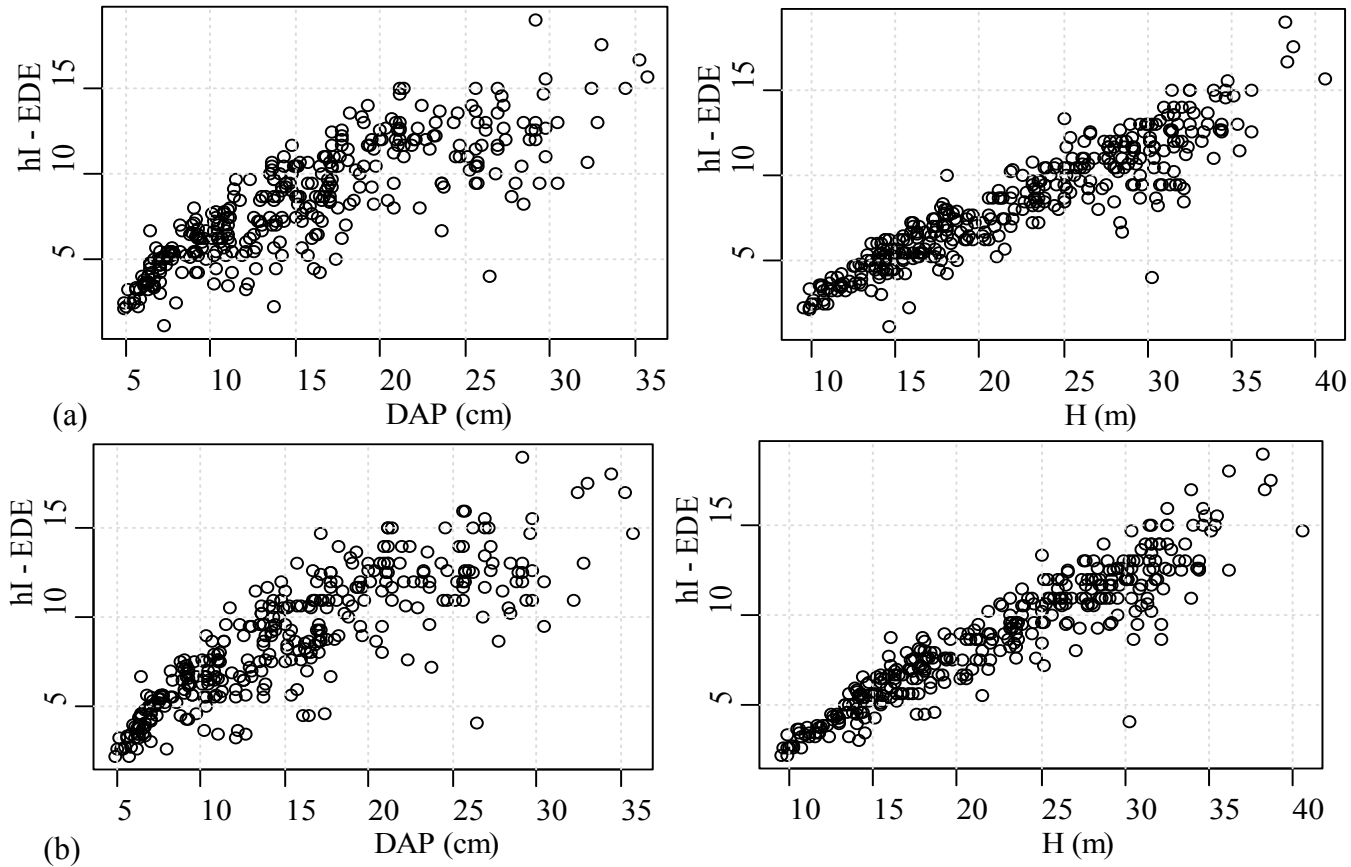
Fonte: Da autora (2018).

Figura 9 - Relação da altura relativa do ponto de inflexão (p) com o DAP e a H da árvore, para perfil com casca.



Fonte: Da autora (2018).

Figura 10 - Relação da altura do ponto de inflexão (h_i) com o DAP e a H da árvore, para perfil com (a) e sem (b) casca.



Fonte: Da autora (2018).

3.2 Avaliação das equações de expoente-variável

Os valores de erro padrão residual (S_{yx} e $S_{yx\%}$) das equações ajustadas (1988, 2001 e 2002) foram semelhantes, independentes da variável resposta (diâmetro sem casca d_{isc} e com casca d_{icc}) e definição de p utilizada (altura relativa do ponto de inflexão). A equação de 2001 apresentou menor precisão, em todos os casos, entretanto é a equação com maior parcimônia, visto que apresenta menor número de parâmetros (TABELA 2).

As equações de Kozak possuem termos que são transformações de uma mesma variável, uma das principais fontes de multicolinearidade. A multicolinearidade pode não afetar, seriamente, a habilidade preditiva de alguns modelos de expoente-variável, porém, sempre que possível, deve-se optar por equações que possuem este problema reduzido (KOZAK, 1997). As equações de 2001 e 2002 possuem esta principal vantagem em relação à de 1988 (KOZAK, 2004).

O parâmetro β_4 não foi significativo, na equação de 1988, para a variável resposta diâmetro com casca (d_{icc}), portanto retirou-se o $exp(Z)$ do expoente.

O parâmetro α_2 , associado à altura H , não foi significativo na equação de 2002, para diâmetro sem casca (d_{isc}) como variável independente e p conforme definido por Kozak ($1,3/H$). A equação de 2002 – d_{icc} e p parâmetro – não atingiu a convergência. Para contornar este problema, foi necessário incluir um parâmetro β_0 no expoente. Neste ajuste, o parâmetro do expoente, associado à variável H^{Qi} (β_5), não foi significativo. Kozak (2004) ajustou o modelo de 2002 para diferentes grupos de espécies e observou que 8 dos 38 ajustes apresentaram pelo menos 1 parâmetro não significativo. O parâmetro α_2 não foi significativo, em 6 ajustes e β_5 , em um dos ajustes, mostrando que as variáveis associadas tendem a não contribuir na explicação da variação do diâmetro ao longo do fuste.

Tabela 2 - Parâmetros estimados para as equações de expoente-variável

(Continua)

Equação de 1988				
Parâmetro	d_{isc} e p_k	d_{isc} e \hat{p}	¹ d_{icc} e p_k	² d_{icc} e \hat{p}
α_0	0,9948595	1,1127694	1,0685322	1,1095303
α_1	0,8974114	0,8950293	0,8907652	0,8901600
α_2	1,0021314	1,0035128	1,0018498	1,0022218
β_1	0,3370064	0,5828762	0,2478362	0,2748074
β_2	-0,0775437	-0,1255601	-0,0653976	-0,0689693
β_3	0,5457891	0,7605191	0,2604951	0,2187303
β_4	-0,1385210	-0,3319805	-	-
β_5	0,219300	0,2571944	0,2141330	0,2229901
p	0,30	0,1216770	0,30	0,2442721
S_{yx} (cm)	0,771	0,762	0,769	⁴ 0,769
$S_{yx}\%$	6,77%	6,69%	6,35%	6,35%
n_{par}	8	9	7	8
Equação de 2001				
Parâmetro	d_{isc} e p_k	d_{isc} e \hat{p}	d_{icc} e p_k	d_{icc} e \hat{p}
α_0	1,0095	0,9397	1,1714	1,0947
α_1	1,0008	1,0488	0,9786	1,0348
β_0	0,4025	0,3733	0,3974	0,3714
β_1	0,2003	0,2287	0,2024	0,2228
β_2	0,0239	0,0495	0,0216	0,0528
β_3	-0,5909	-0,6638	-0,4914	-0,5612
p	0,01	0,0031	0,01	0,0023
S_{yx} (cm)	0,819	0,815	0,852	0,845
$S_{yx}\%$	7,20%	7,16%	7,04%	6,98%
n_{par}	6	7	6	7

^{1,2}Equação sem o parâmetro β_4 (não significativo). S_{yx} e $S_{yx}\%$ = erro padrão residual e erro padrão residual percentual. n_{par} = n° de parâmetros da equação. p_k = p conforme definido por Kozak, na equação de 1988 foi considerada a média dos valores de p estimado pelo método BEDE/BESE para d_{isc} e BESE para d_{icc} . \hat{p} = p estimado como parâmetro. d_{isc} = diâmetro sem casca. d_{icc} = diâmetro com casca.

Tabela 2 - Parâmetros estimados para as equações de expoente-variável (Conclusão).

Parâmetro	Equação de 2002			
	³ d _{isc} e p _k	d _{isc} e \hat{p}	⁴ d _{icc} e p _k	⁵ d _{icc} e \hat{p}
α_0	0,9497	1,1284	-	0,8247
α_1	0,9985	0,9690	-	0,8872
α_2	-	-0,0435	-	0,0850
β_0	-	-	-	5,7941
β_1	0,4077	0,4000	0,4348	-0,8366
β_2	-0,8113	-0,8309	-0,7331	-0,7365
β_3	0,7586	0,7854	0,6923	-5,4551
β_4	1,9230	1,9409	1,7394	1,4918
β_5	0,0212	0,0194	0,0201	-
β_6	-0,2958	-0,2886	-0,1771	0,3322
p	1,3/H	0,104715	1,3/H	0,3367
S _{yx} (cm)	0,764	0,759	0,770	0,748
S _{yx} %	6,71%	6,67%	6,77%	6,18%
n _{par}	8	10	6	10

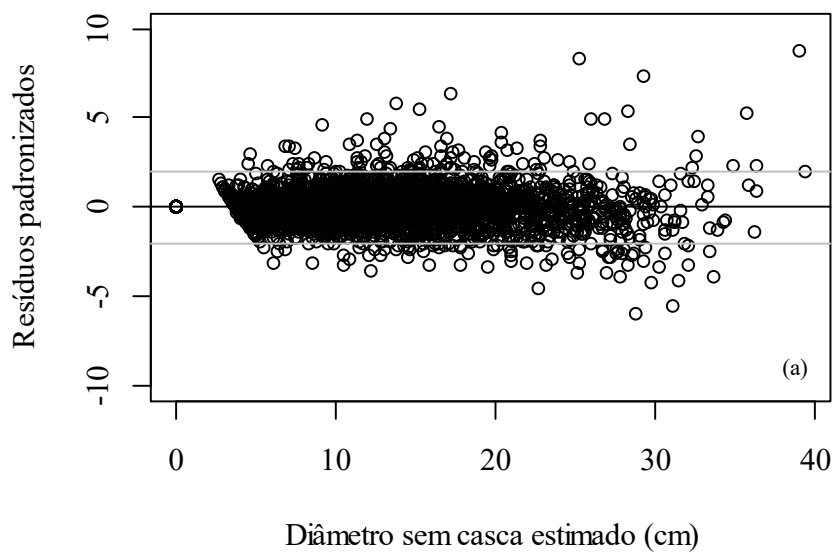
Fonte: Da autora (2018).

³Equação sem α_2 (parâmetro não significativo). ⁴ O multiplicador da equação é o próprio DAP com casca observado. ⁵ Equação com intercepto β_0 adicionado no expoente para atingir a convergência e sem o parâmetro β_5 (não significativo). S_{yx} e S_{yx}% = erro padrão residual e erro padrão residual percentual. n_{par} = n° de parâmetros da equação. p_k= p conforme definido por Kozak. \hat{p} = p estimado como parâmetro. d_{isc} = diâmetro sem casca. d_{icc} = diâmetro com casca.

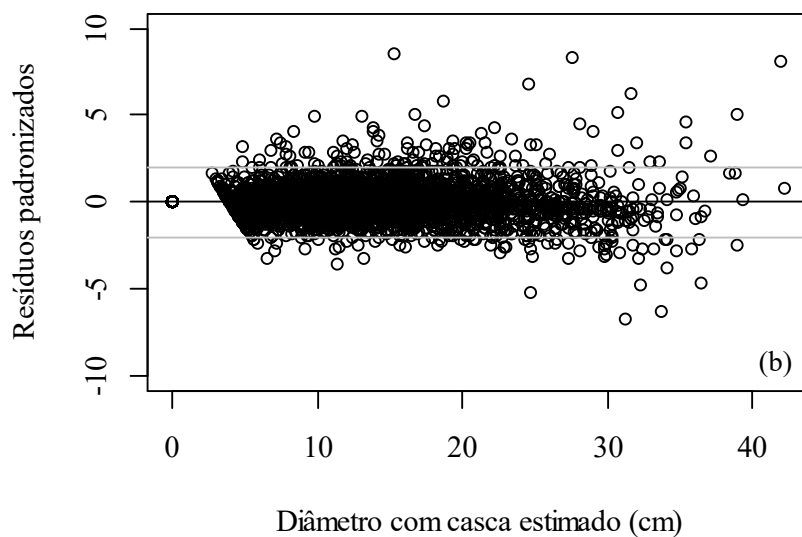
Houve redução no S_{yx} (cm e %) nos ajustes quando p foi considerado como parâmetro. Com esta estratégia de ajuste, evita-se a subjetividade na definição de p . Porém deve-se ter cautela ao considerá-la, pois, além da redução da parcimônia, o ajuste pode não atingir a convergência, principalmente, na modelagem mista, conforme verificado por Fonweban et al. (2011).

Em relação à análise gráfica de resíduos (FIGURAS 11, 12, 13, 14, 15 e 16), observou-se uma maior dispersão para os diâmetros maiores, além de leve tendência de subestimativa dos diâmetros com e sem casca.

Figura 11 - Gráficos de resíduos padronizados para a equação de 1988. \hat{p} estimado como parâmetro da equação.



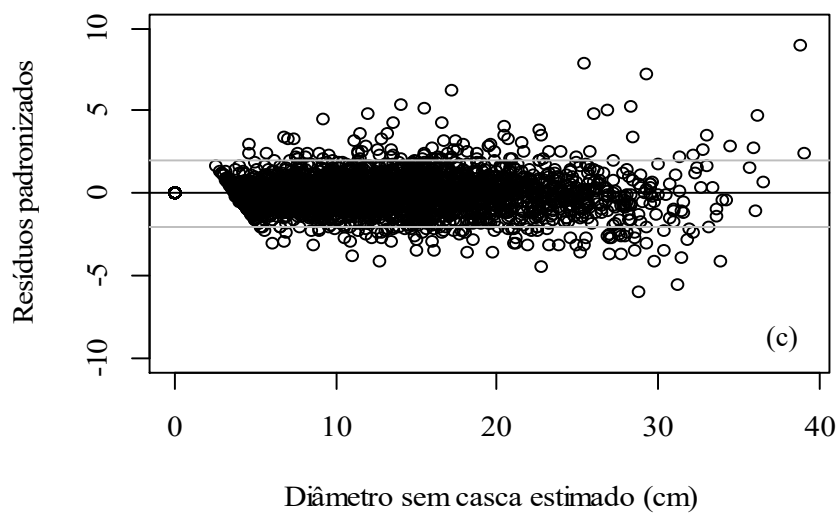
(a) Equação de 1988, $\hat{p} = 0,12$



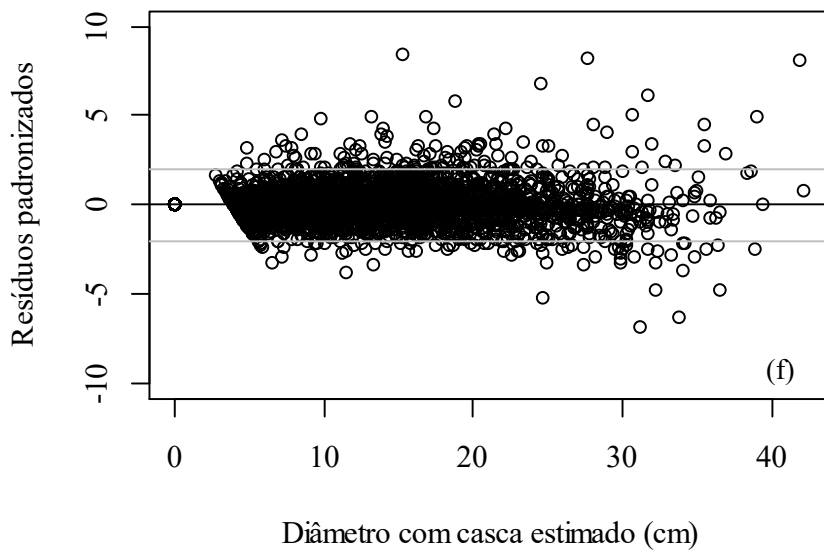
(b) Equação de 1988, $\hat{p} = 0,24$

Fonte: Da autora (2018).

Figura 12 - Gráficos de resíduos padronizados para a equação de 1988. p = valor médio estimado pelo método geométrico que possibilitou o menor erro padrão residual.



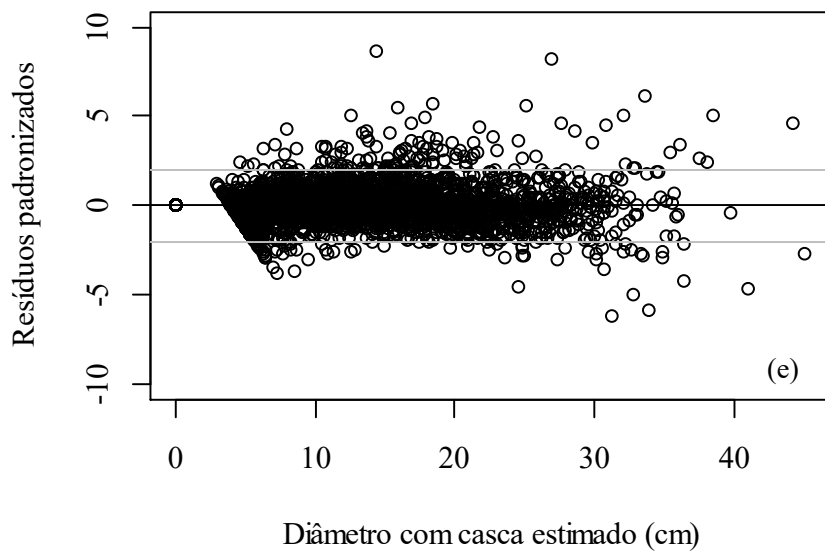
(c) Equação de 1988, $\bar{p}_{bede/bese} = 0,30$



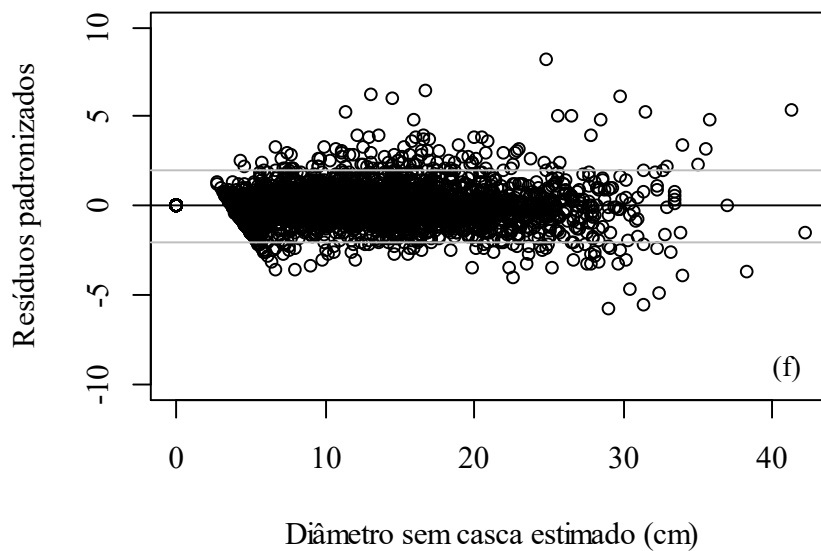
(d) Equação de 1988, $\bar{p}_{bese} = 0,30$

Fonte: Da autora (2018).

Figura 13 - Gráficos de resíduos padronizados para a equação de 2001. $p =$ conforme definido por Kozak.



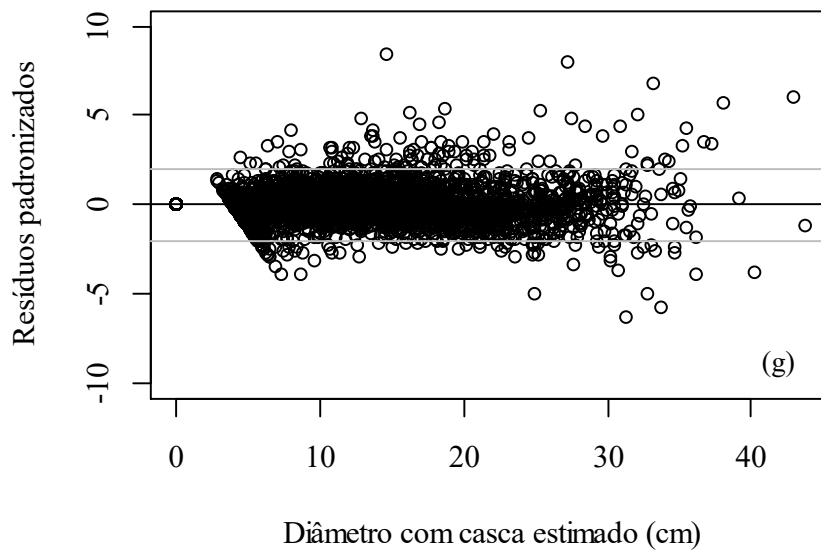
(e) Equação de 2001, $p_{\text{Kozak}}=0,01$



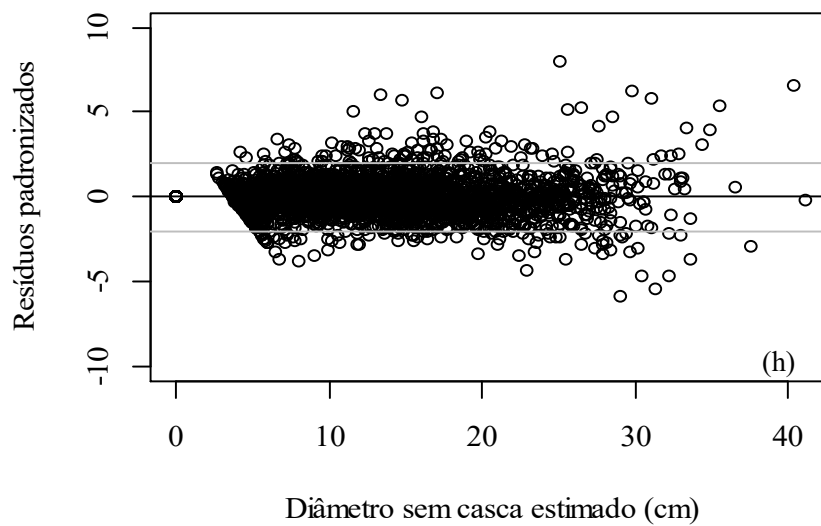
(f) Equação de 2001, $p_{\text{Kozak}}=0,01$

Fonte: Da autora (2018).

Figura 14 - Gráficos de resíduos padronizados para a equação de 2001. p estimado como parâmetro da equação.



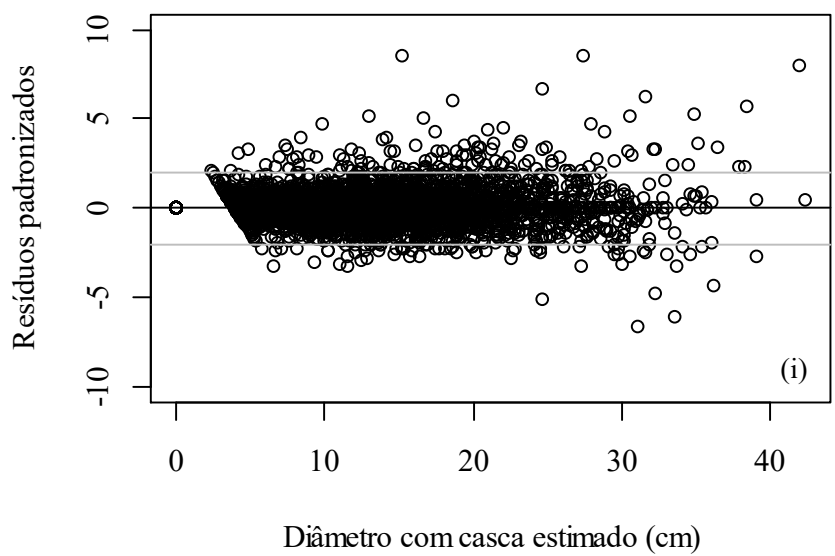
(g) Equação 2001, $\hat{p} = 0,002256$



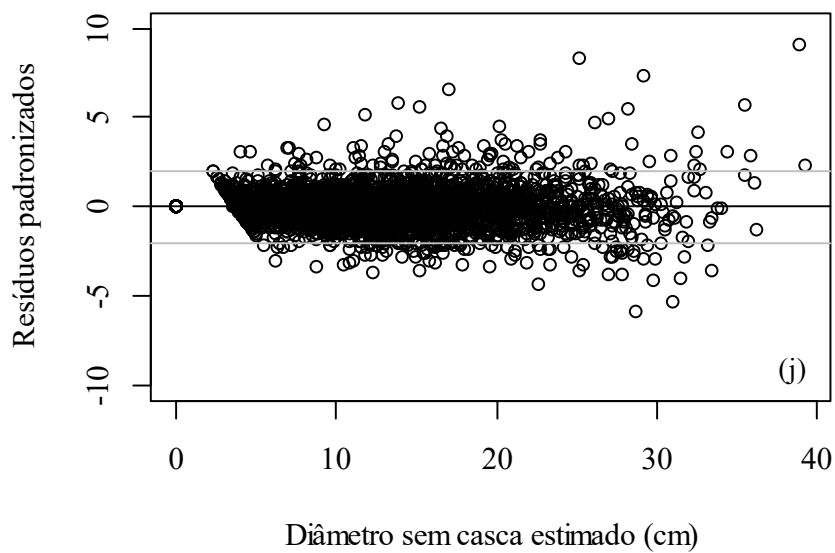
(h) Equação 2001, $\hat{p} = 0,0031177$

Fonte: Da autora (2018).

Figura 15 - Gráficos de resíduos padronizados para a equação de 2002. $p =$ conforme definido por Kozak.



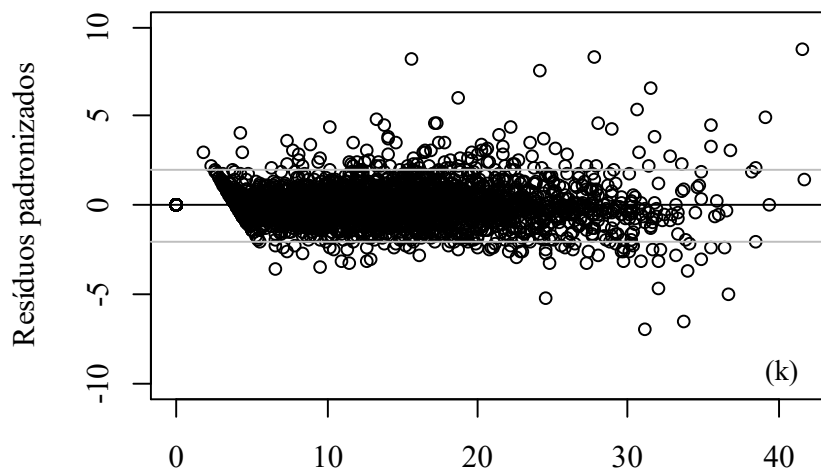
(i) Equação de 2002, $p=1,3/H$



(j) Equação de 2002, $p=1,3/H$

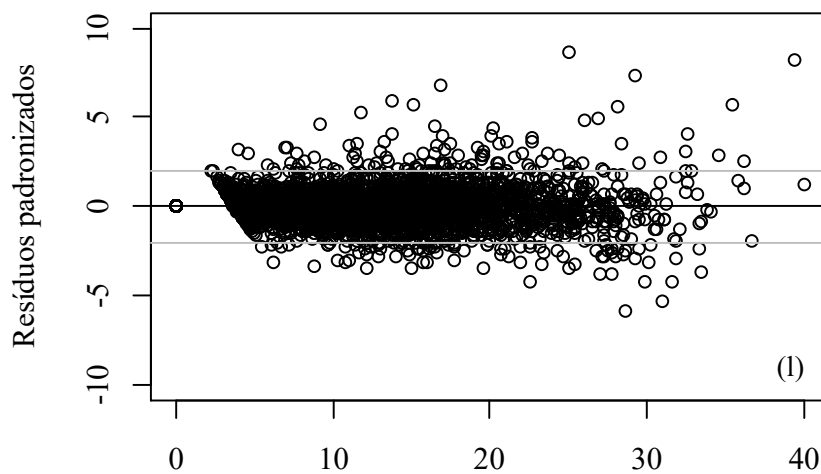
Fonte: Da autora (2018).

Figura 16 - Gráficos de resíduos padronizados para a equação de 2002. $p =$ estimado como parâmetro da equação.



Diâmetro com casca estimado (cm)

(k) Equação de 2002, $\hat{p}=0,33673$



Diâmetro sem casca estimado (cm)

(l) Equação 2002, $\hat{p}=0,104715$

Fonte: Da autora (2018).

As estatísticas calculadas por classe de altura relativa (Z), utilizando-se os dados de validação, são importantes na avaliação da habilidade preditiva das equações nas diferentes partes do fuste – base, meio e topo.

Os valores de erro médio (\bar{e}) global e por posição foram baixos. Para os ajustes das equações de 2001, observou-se a tendência de viés positivo na estimativa de diâmetros na parte central do fuste. Na base e no topo, os vieses foram negativos e maiores. Para as demais equações, houve a tendência de viés negativo da parte central até o topo do fuste (TABELA 3).

Para as demais estatísticas, os valores foram semelhantes entre as equações ajustadas (TABELA s 4, 5 e 6). Entretanto a equação de 2001 foi ligeiramente inferior e apresentou erros médios percentuais ($\bar{e}\%$) elevados para a última seção (TABELA 5).

Tabela 3 - Erro médio por classe de altura relativa ($Z_i=h_i/H$) para os dados de validação.

Equação		Classes de Z_i										
		Todas	$\leq 0,1$	$]0,1-0,2]$	$]0,2-0,3]$	$]0,3-0,4]$	$]0,4-0,5[$	$]0,5-0,6]$	$]0,6-0,7]$	$]0,7-0,8]$	$]0,7-0,9]$	$]0,9-1,0]$
d_{isc} e \hat{p}	1988	-0,05	0,05	0,09	0,00	-0,04	-0,18	-0,21	-0,15	-0,16	-0,16	-0,06
	2001	-0,04	0,03	-0,14	-0,15	0,02	0,05	0,09	0,09	-0,09	-0,38	-0,18
	2002	-0,04	-0,02	0,08	0,09	0,11	-0,07	-0,15	-0,20	-0,18	-0,08	-0,04
d_{isc} e p_k	1988	-0,04	0,05	0,09	0,01	0,00	-0,16	-0,19	-0,13	-0,15	-0,14	-0,05
	2001	-0,05	0,04	-0,17	-0,15	0,02	0,05	0,07	0,07	-0,13	-0,43	-0,19
	2002	-0,03	-0,02	0,12	0,13	0,12	-0,08	-0,18	-0,22	-0,19	-0,06	-0,04
d_{icc} e p_k	1988	-0,05	0,05	0,05	0,03	-0,02	-0,18	-0,24	-0,18	-0,19	-0,12	-0,06
	2001	-0,06	0,03	-0,26	-0,16	0,03	0,08	0,10	0,10	-0,13	-0,44	-0,22
	2002	0,03	0,12	0,22	0,25	0,19	-0,07	-0,22	-0,27	-0,23	-0,01	-0,03
d_{isc} e \hat{p}	1988	-0,05	0,05	0,05	0,02	-0,01	-0,18	-0,23	-0,17	-0,19	-0,12	-0,06
	2001	-0,05	0,01	-0,22	-0,17	0,03	0,08	0,12	0,13	-0,08	-0,38	-0,21
	2002	-0,05	0,01	0,04	-0,01	-0,02	-0,10	-0,08	-0,08	-0,24	-0,23	0,02
n	1572	476	143	113	125	120	120	120	112	106	137	

Fonte: Da autora (2018).

d_{isc} = diâmetro sem casca; d_{icc} = diâmetro com casca; \hat{p} = altura relativa no ponto de inflexão como parâmetro; p_k = altura relativa no ponto de inflexão conforme definido por Kozak e n = número de observações.

Tabela 4 - Erro médio absoluto por classe de altura relativa ($Z_i=h_i/H$) para os dados de validação.

Equação		Erro médio absoluto										
		Todas	Classes de Z_i									
		$\leq 0,1$	$]0,1-0,2]$	$]0,2-0,3]$	$]0,3-0,4]$	$]0,4-0,5[$	$]0,5-0,6[$	$]0,6-0,7[$	$]0,7-0,8[$	$]0,7-0,9[$	$]0,9-1,0[$	
d_{icc} e \hat{p}	1988	0,48	0,50	0,43	0,52	0,50	0,59	0,48	0,58	0,51	0,58	0,16
	2001	0,50	0,56	0,41	0,51	0,50	0,53	0,45	0,53	0,50	0,67	0,24
	2002	0,48	0,50	0,42	0,52	0,53	0,57	0,49	0,54	0,51	0,55	0,15
d_{isc} e p_k	1988	0,49	0,50	0,45	0,54	0,51	0,60	0,50	0,60	0,53	0,60	0,16
	2001	0,51	0,56	0,41	0,51	0,51	0,55	0,45	0,56	0,51	0,68	0,24
	2002	0,48	0,50	0,43	0,53	0,53	0,57	0,49	0,54	0,51	0,55	0,15
d_{icc} e p_k	1988	0,49	0,49	0,40	0,51	0,46	0,60	0,53	0,60	0,58	0,62	0,17
	2001	0,52	0,61	0,40	0,48	0,43	0,54	0,47	0,58	0,57	0,74	0,28
	2002	0,48	0,47	0,41	0,52	0,47	0,56	0,55	0,56	0,57	0,59	0,16
d_{icc} e \hat{p}	1988	0,49	0,49	0,40	0,51	0,46	0,60	0,53	0,60	0,59	0,62	0,17
	2001	0,52	0,61	0,40	0,48	0,43	0,53	0,47	0,56	0,56	0,72	0,27
	2002	0,47	0,50	0,41	0,48	0,44	0,54	0,48	0,52	0,56	0,61	0,18
	n	1572	476	143	113	125	120	120	120	112	106	137

Fonte: Da autora (2018).

d_{isc} = diâmetro sem casca; d_{icc} = diâmetro com casca; \hat{p} = altura relativa no ponto de inflexão como parâmetro; p_k = altura relativa no ponto de inflexão conforme definido por Kozak e n = número de observações.

Tabela 5 - Erro médio percentual por classe de altura relativa ($Z_i=h_i/H$) para os dados de validação.

Equação		Erro médio percentual (%)										
		Todas	Classes de Z_i									
		$\leq 0,1$	$]0,1-0,2]$	$]0,2-0,3]$	$]0,3-0,4]$	$]0,4-0,5[$	$]0,5-0,6[$	$]0,6-0,7[$	$]0,7-0,8[$	$]0,7-0,9[$	$]0,9-1,0[$	
d_{isc} e \hat{p}	1988	-0,45	0,29	0,63	-0,02	-0,28	-1,58	-2,18	-1,68	-2,34	-3,12	-7,24
	2001	-0,40	0,17	-1,04	-1,07	0,14	0,45	0,88	1,01	-1,33	-7,40	-20,87
	2002	-0,32	-0,10	0,60	0,62	0,85	-0,65	-1,57	-2,24	-2,60	-1,52	-4,95
d_{isc} e p_k	1988	-0,34	0,31	0,69	0,04	-0,01	-1,37	-1,99	-1,52	-2,21	-2,78	-5,95
	2001	-0,45	0,28	-1,21	-1,05	0,17	0,45	0,69	0,77	-1,90	-8,27	-21,79
	2002	-0,29	-0,13	0,85	0,92	0,98	-0,72	-1,85	-2,47	-2,68	-1,10	-4,16
d_{icc} e p_k	1988	-0,44	0,28	0,35	0,17	-0,12	-1,50	-2,38	-1,95	-2,65	-2,14	-6,20
	2001	-0,48	0,20	-1,78	-1,09	0,25	0,69	0,96	1,13	-1,75	-8,00	-24,10
	2002	0,24	0,72	1,51	1,69	1,42	-0,62	-2,11	-2,92	-3,10	-0,13	-2,97
d_{icc} e \hat{p}	1988	-0,42	0,32	0,31	0,11	-0,10	-1,45	-2,28	-1,83	-2,56	-2,14	-6,20
	2001	-0,41	0,08	-1,55	-1,10	0,23	0,68	1,17	1,40	-1,09	-6,95	-22,84
	2002	-0,39	0,05	0,26	-0,05	-0,12	0,86	-0,75	-0,81	-3,34	-4,10	1,91
n	1572	476	143	113	125	120	120	120	112	106	137	

Fonte: Da autora (2018).

d_{sc} = diâmetro sem casca; d_{cc} = diâmetro com casca; \hat{p} = altura relativa no ponto de inflexão como parâmetro; p_k = altura relativa no ponto de inflexão conforme definido por Kozak e n = número de observações.

Tabela 6 - Raiz do erro médio quadrático por classe de altura relativa ($Z_i=h_i/H$) para os dados de validação.

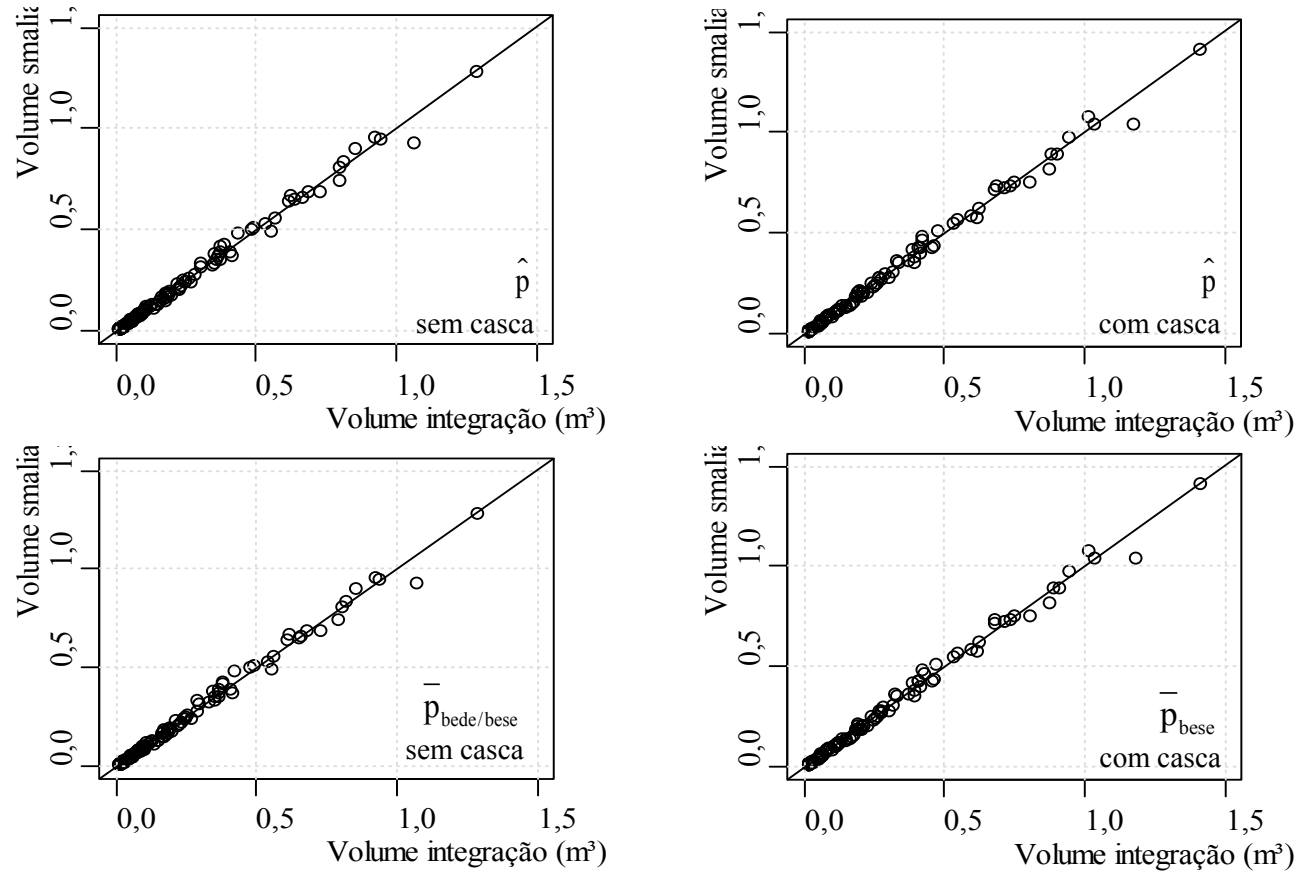
Equação		Classes de Z_i										
		Todas	$\leq 0,1$	$]0,1-0,2]$	$]0,2-0,3]$	$]0,3-0,4]$	$]0,4-0,5]$	$]0,5-0,6]$	$]0,6-0,7]$	$]0,7-0,8]$	$]0,7-0,9]$	$]0,9-1,0]$
d_{isc} e \hat{p}	1988	0,68	0,72	0,57	0,67	0,63	0,81	0,64	0,74	0,69	0,72	0,46
	2001	0,72	0,80	0,58	0,67	0,63	0,77	0,59	0,71	0,69	0,90	0,65
	2002	0,68	0,74	0,56	0,66	0,64	0,77	0,65	0,73	0,68	0,69	0,54
d_{isc} e p_k	1988	0,69	0,72	0,59	0,69	0,65	0,82	0,66	0,75	0,73	0,75	0,46
	2001	0,73	0,81	0,57	0,67	0,64	0,79	0,60	0,73	0,70	0,91	0,65
	2002	0,68	0,73	0,56	0,67	0,64	0,77	0,66	0,74	0,69	0,69	0,45
d_{icc} e p_k	1988	0,72	0,81	0,55	0,66	0,58	0,82	0,68	0,77	0,77	0,78	0,49
	2001	0,79	0,93	0,57	0,64	0,57	0,80	0,64	0,75	0,77	0,97	0,73
	2002	0,72	0,82	0,57	0,67	0,60	0,78	0,71	0,77	0,77	0,74	0,48
d_{icc} e \hat{p}	1988	0,72	0,81	0,55	0,66	0,58	0,82	0,68	0,77	0,77	0,78	0,49
	2001	0,77	0,91	0,56	0,64	0,56	0,77	0,63	0,72	0,77	0,96	0,73
	2002	0,71	0,82	0,55	0,64	0,56	0,76	0,63	0,71	0,75	0,78	0,51
	n	1572	476	143	113	125	120	120	120	112	106	137

Fonte: Da autora (2018).

d_{isc} = diâmetro sem casca; d_{icc} = diâmetro com casca; \hat{p} = altura relativa no ponto de inflexão como parâmetro; p_k = altura relativa no ponto de inflexão conforme definido por Kozak e e n = número de observações.

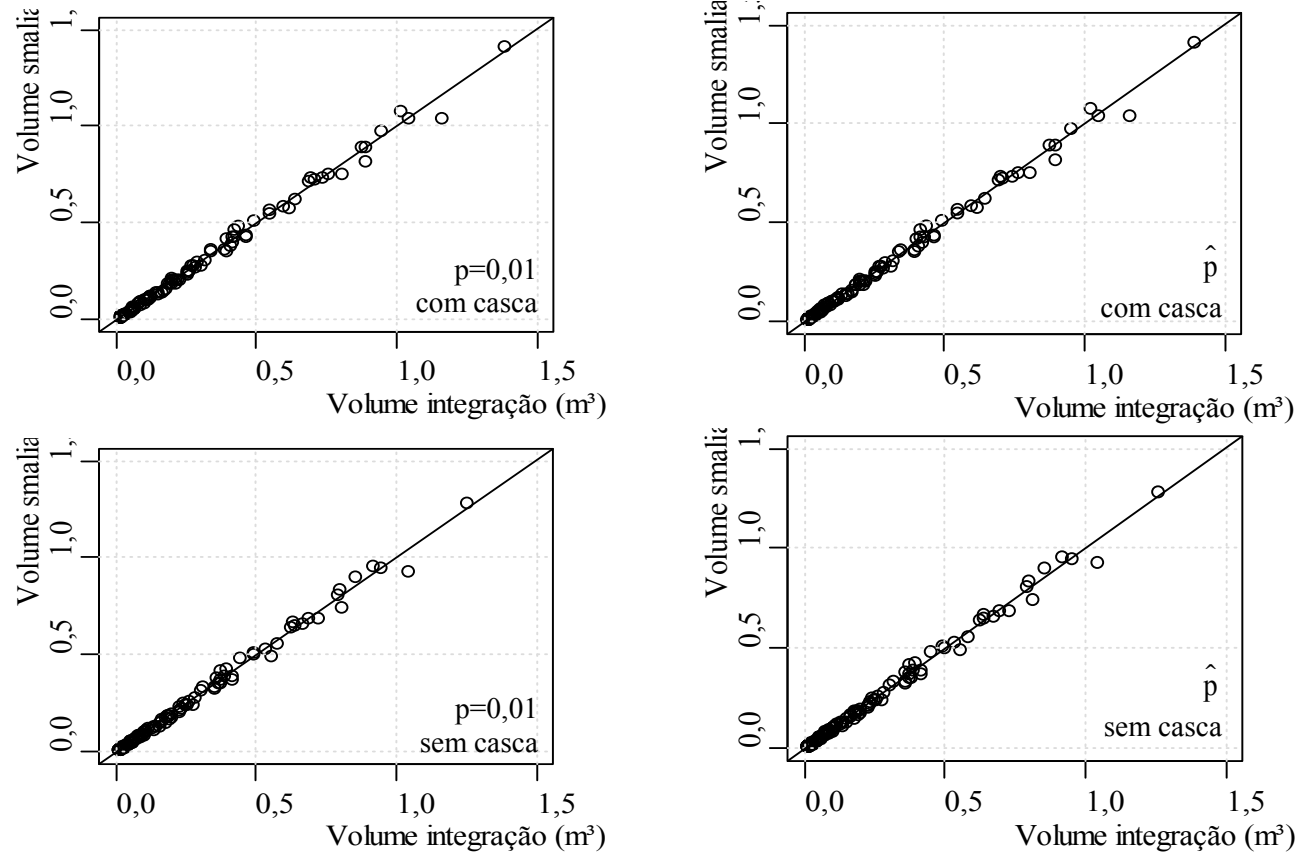
Os volumes preditos pelas equações ajustadas foram próximos aos volumes observados (Smalian), sem tendência de superestimativa ou subestimativa (FIGURAS 17, 18 e 19). Pode-se afirmar, pela semelhança entre os gráficos, que a predição do volume não foi influenciada pelas diferentes metodologias adotadas na determinação de p .

Figura 17 - Volume observado (smalian) versus predito (integração) para equação de 1988.



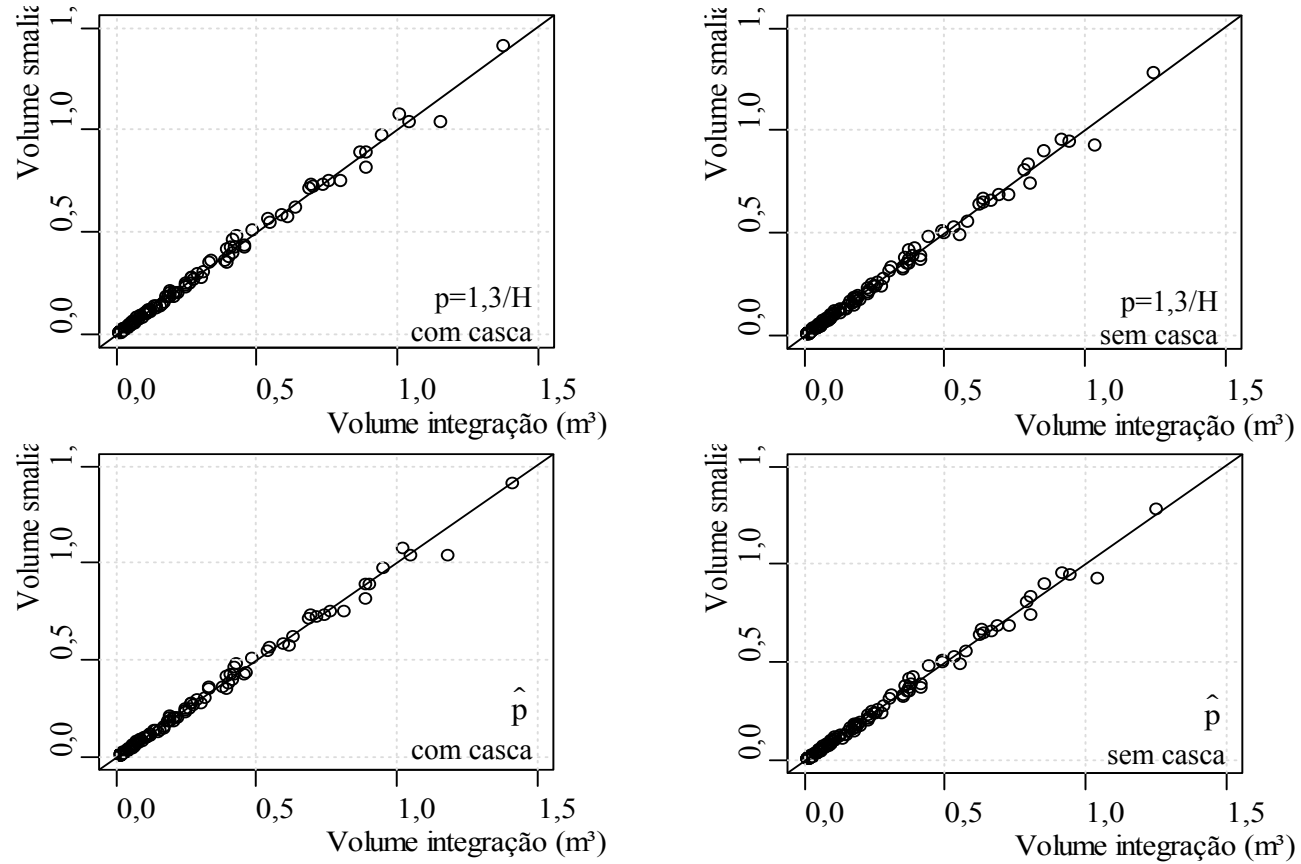
Fonte: Da autora (2018).

Figura 18 - Volume observado (smalian) versus predito (integração) para equação de 2001.



Fonte: Da autora (2018).

Figura 19 - Volume observado (smalian) versus predito (integração) para equação de 2002.



Fonte: Da autora (2018).

3.3 Avaliação da equação de expoente-variável modificada

O coeficiente de determinação ajustado (R_{aj}^2) das equações lineares simples ajustadas, para estimar h_1 , foram de 84,98 % e 87,29%, para perfil sem e com casca, respectivamente:

(i) Perfil sem casca

$$\hat{h}_1 = -1,099416 + 0,424189H$$

(ii) Perfil com casca

$$\hat{h}_1 = -1,179444 + 0,445626H$$

Por meio dessas equações, estimou-se h_1 por árvore cubada e calculou-se $p = h_1/H$, que é uma das variáveis independentes, presente na base e no expoente da equação proposta.

Todos os parâmetros da equação de expoente-variável modificada foram significativos. A precisão (S_{yx} e $S_{yx\%}$) das equações modificadas foi semelhante à precisão das equações originais de Kokak (TABELA 7).

Tabela 7 - Parâmetros estimados para as equações de expoente-variável.

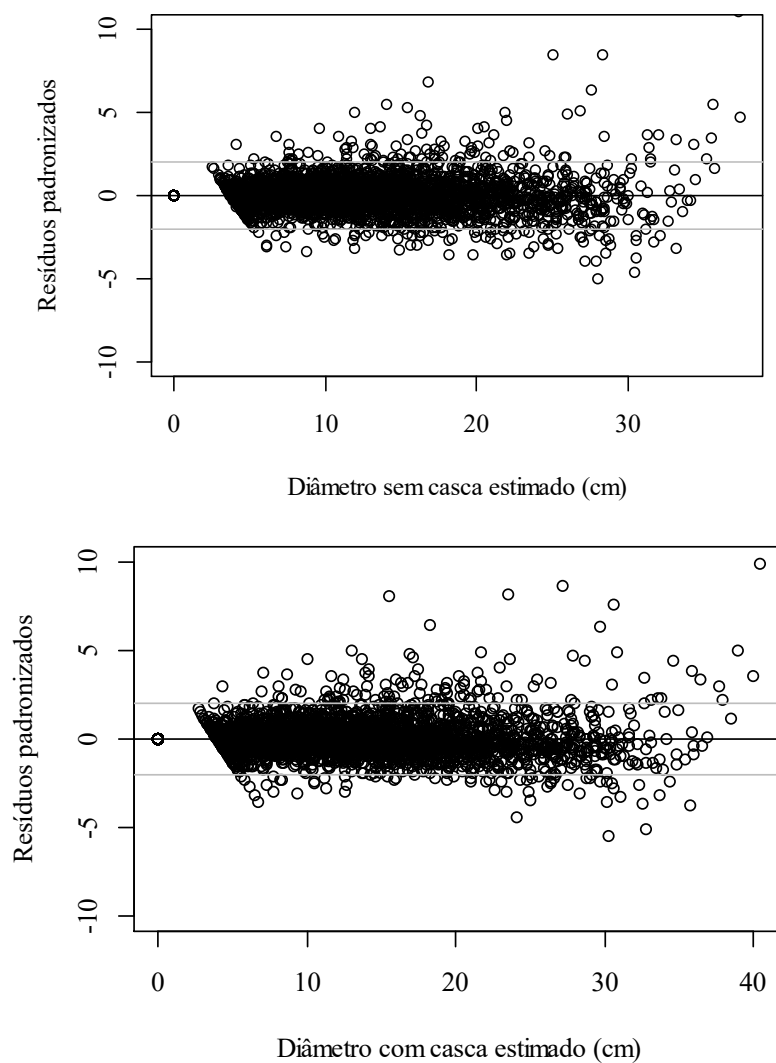
Parâmetro	Equação modificada	
	d_{isc}	d_{icc}
α_0	0,7725	0,8562
α_1	0,8339	0,8517
α_2	0,1246	0,0849
β_0	0,5761	0,7327
β_1	0,3281	0,2815
β_2	0,2349	0,2116
β_3	-1,2285	-1,4421
S_{yx} (cm)	0,766	0,776
$S_{yx\%}$	6,73	6,41
n_{par}	7	7

Fonte: Da autora (2018).

S_{yx} e $S_{yx\%}$ = erro padrão residual e erro padrão residual percentual. n_{par} = n° de parâmetros da equação. d_{isc} = diâmetro sem casca. d_{icc} = diâmetro com casca.

Os resíduos foram bem distribuídos, com pequena tendência de subestimativa e maior variabilidade, para diâmetros maiores, principalmente, para diâmetro com casca.

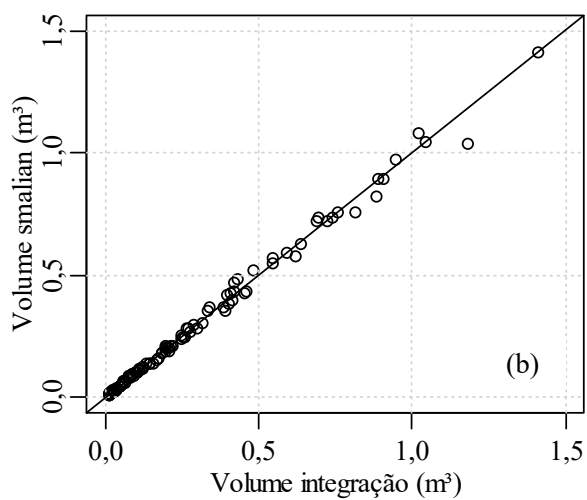
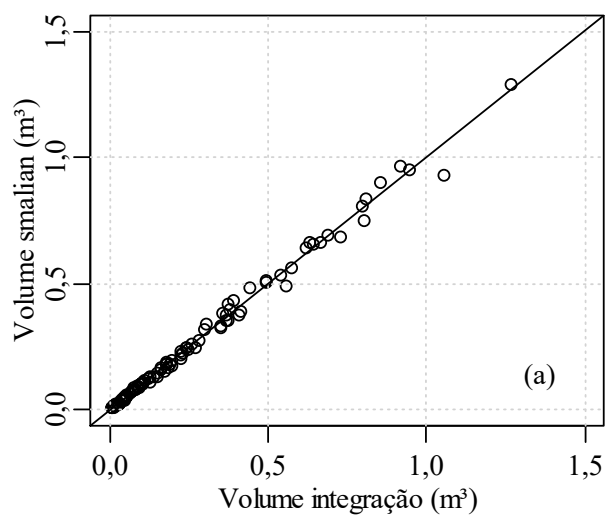
Figura 20 - Gráficos de resíduos padronizados para a equação de modificada.



Fonte: Da autora (2018).

As equações modificadas também possuem boa habilidade para prever volumes sem casca e com casca (FIGURA 21).

Figura 21 - Volume observado (smalian) versus predito (integração) para equação modificada. (a) volume sem casca (b) volume com casca.



Fonte: Da autora (2018).

As equações de expoente-variável podem ser facilmente modificadas, alterando-se os seus termos: multiplicador, base ou expoente (KOZAK, 2004). Expoentes mais simples, como os da equação modificada e de 2001, podem ser adotados sem redução expressiva na precisão.

Durante o desenvolvimento da equação modificada, observou-se que quanto menor o valor de m (1/2, 1/3, 1/4, 1/6), constante presente na base da equação, maior a precisão. Entretanto os ganhos em precisão são pequenos e reduzem a cada redução de m .

Dentre as variáveis escolhidas para o expoente, Z é a que melhor explica a variação do expoente c e qualquer transformação de Z também possui alta correlação com c . Na proposta de modificação, optou-se por evitar as transformações de Z no expoente, por ser uma das principais causas de multicolinearidade.

A variável DAP/H possui forte correlação positiva com a proporção de copa viva (MUHAIRWE, 1994) e a sua inclusão no expoente é uma tentativa de explicar a variação, na forma geral do fuste, causada pelas variações no comprimento da copa (NEWNHAM, 1992) que contribui para aumentar a precisão destas equações (MUHAIRWE, 1999). A razão DAP/H explica a maioria das variações que outras variáveis adicionais poderiam explicar, é altamente correlacionada com os atributos da árvore e do povoamento, e isso é, possivelmente, uma das principais razões pelas quais as equações de Kozak não podem ser melhoradas significativamente com a adição de covariáveis (HUANG et al., 2000; MUHAIRWE; LEMAY; KOZAK, 1994). Fonweban et al. (2011) observaram aumento na precisão das funções de expoente-variável entre 43% e 63% com o uso da modelagem de efeitos mistos. Portanto os esforços, em modificar a base, expoente ou multiplicador da equação de expoente-variável, podem ser redirecionados, para a mudança no tipo de modelagem, quando o objetivo é o aumento da precisão.

4 CONCLUSÃO

Os métodos geométricos EDE (*Extremum Distance Estimator*), ESE (*Extremum Surface Estimator*), BEDE (*Bisection - EDE*) e BESE (*Bisection - ESE*) (CHRISTOPOULOS, 2014) podem ser utilizados como alternativa para a determinação da altura relativa no ponto de inflexão (p) por árvore de eucalipto cubada.

Os valores de p variaram de árvore para árvore, porém as estimativas pelos métodos ESE, BEDE e BESE indicam que esta variação não tem correlação com DAP e H da árvore. Entretanto a variação do valor de p estimado pelo método EDE em árvores pequenas tende a aumentar com o aumento do DAP e da H.

As funções de expoente-variável propostas por Kozak (1988, 2004) foram ajustadas para representar o afilamento do fuste de árvores de eucalipto. Todas as equações apresentaram boa precisão para estimar os diâmetros, ao longo do fuste e volume total exceto o toco, para perfil com e sem casca. O tipo de estratégia adotada para a estimação de p teve pouca influência na precisão das equações. Portanto, para a base de dados utilizada neste estudo, pode-se optar pelo método mais simples para cada tipo de equação.

A equação de expoente-variável modificada também possui boa precisão para estimar diâmetros e volumes (com casca e sem casca). O expoente é simples por não possuir termos que são transformações de Z . A precisão foi semelhante à precisão das equações de Kozak de 1988 e 2002.

Em termos de precisão, as modificações na base, expoente e multiplicador não parecem ter grande influência. Sugere-se a utilização da modelagem não linear mista como estratégia, para aumentar a precisão (FONWEBAN et al., 2011) e incorporar a variação de p existente entre árvores de uma mesma espécie (BERHE; ARNOLDSSON, 2008).

REFERÊNCIAS

ANDRADE, V. C. de L. Modelos de *taper* do tipo expoente-forma para descrever o perfil do fuste de árvores. **Pesquisa Florestal Brasileira**, Colombo, v. 34, n. 80, p. 271-283, out./dez. 2014.

BERHE, L.; ARNOLDSSON, G. Tree taper models for *Cupressus lusitanica* plantations in Ethiopia. **Southern Forests**, Oxford, v. 70, n. 3, p. 193-203, 2008.

BIGING, G. S. Taper equations for second mixed-conifers of Northern California. **Forest Science**, Bethesda, v. 30, n. 4, p.1103-1117, Dec. 1984.

CHRISTOPOULOS, D. T. **Developing methods for identifying the inflection point of a convex/concave curve**. Athens: National and Kapodistrian University of Athens, 2014. 29 p. Disponível em: <<https://arxiv.org/pdf/1206.5478v2.pdf>>. Acesso em: 12 mar. 2017.

_____. Inflection: finds the inflection point of a curve. Version 1.3. **CRAN**, [S.l.], May 2017. Disponível em: <<http://CRAN.R-project.org/package=inflection>>. Acesso em: 12 mar. 2017.

_____. On the Efficient Identification of an Inflection Point. **International Journal of Mathematics and Scientific Computing**, Philadelphia, v. 6, n. 1, p. 13-20, 2016.

DEMAERSHALK, J. P.; KOZAK, A. The whole-bole system: a conditioned dual-equation system for precise prediction of tree profiles. **Canadian Journal of Forest Research**, Ottawa, v. 7, n. 3, p. 488-497, Sept. 1977.

FONWEBAN, J. et al. Taper functions for Scots pine (*Pinus sylvestris* L.) and Sitka spruce (*Picea sitchensis* (Bong.) Carr.) in Northern Britain. **Forestry: an international journal of forest research**, Oxford, v. 84, n. 1, p. 49-60, Jan. 2011.

GARAY, L. **Tropical forest utilization system: VIII**. A taper model for entire stem profile including buttressing. Seattle: College of Forest Resources, 1979. 64 p. (Contribution, 36).

GRAY, H. R. **The form and taper of forest-tree stems**. Oxford: Imperial Forestry Institute University of Oxford, 1956. 79 p.

HRADETZKY, J. **Analyse und interpretation statistischer abränger keiten. (Biometrische Beiträge zu aktuellen forschungs projekten)**. Baden: Württemberg Mitteilungen der FVA, 1976. 146 p. (Abt. Biometric und Informatik, 21).

HUANG, S. et al. Kozak's variable-exponent taper equation regionalized for white spruce in Alberta. **Western Journal of Applied Forestry**, Essex, v. 15, n. 2, p. 75-85, Apr. 2000.

KOZAK, A. A variable-exponent taper equation. **Canadian Journal of Forest Research**, Ottawa, v. 18, n. 11, p. 1363-1368, Nov. 1988.

_____. Effects of multicollinearity and autocorrelation on the variable-exponent taper functions. **Canadian Journal of Forest Research**, Ottawa, v. 27, n. 5, p. 619-629, May 1997.

_____. My last words on taper equations. **The Forestry Chronicle**, Mattawa, v. 80, n. 4, p. 507-515, Aug. 2004.

KOZAK, A.; MUNRO, D. P.; SMITH, J. H. G. Taper functions and their application in forest inventory. **The Forest Chronicle**, Mattawa, v. 45, n. 4, p. 278-283, Aug. 1969.

LI, R.; WEISKITTEL, A. R. Comparison of models form for estimating stem taper and volume in primary conifer species of the North American Acadian Region. **Annals of Forest Science**, Les Ulis, v. 67, n. 3, p. 302, Jan. 2010.

MAX, T. A.; BURKHART, H. E. Segmented polynomial regression applied to taper equations. **Forest Science**, Bethesda, v. 22, n. 3, p. 283-289, Sept. 1976.

MUHAIWE, C. K. Taper equations for *Eucalyptus pilularis* and *Eucalyptus grandis* for the north coast in New South Wales, Australia. **Forest Ecology and Management**, Amsterdam, v. 133, n. 2/3, p. 251-269, Jan. 1999.

_____. Tree form and taper variation over time for interior lodgepole pine. **Canadian Journal Forest Research**, Ottawa, v. 24, n. 9, p. 1904-1913, Sept. 1994.

MUHAIWE, C. K.; LEMAY, V. M.; KOZAK, A. Effects of adding tree, stand, and site variables to Kozak's variable- exponent taper equation. **Canadian Journal of Forest Research**, Ottawa, v. 24, n. 2, p. 252-259, Feb. 1994.

NEWBERRY, J. D.; BURKHART, H. E. Variable-form stem profile models for loblolly pine. **Canadian Journal of Forest Research**, Ottawa, v. 16, n. 1, p. 109-114, Feb. 1986.

NEWNHAM, R. M. **A variable-form taper equation**. Ontario: Minister of Supply and Services Canadá, 1988. 33 p.

_____. Variable-form taper functions for four Alberta tree species. **Canadian Journal of Forest Research**, Ottawa, v. 22, n. 2, p. 210-223, Feb. 1992.

ORMEROD, D. W. A simple bole model. **The Forestry Chronicle**, Mattawa, v. 49, n. 3, p. 136-138, June 1973.

PARRESOL, B. R.; HOTVEDT, J. E.; CAO, Q. V. A volume and taper prediction system for bald cypress. **Canadian Journal of Forest Research**, Ottawa, v. 17, n. 3, p. 250-259, Mar. 1987.

PEREZ, D. N.; BURKHART, H. E.; STIFF, C. T. A variable-form Taper Function for *Pinus oocarpa* Schiede in Central Honduras. **Forest Science**, Bethesda, v. 36, n. 1, p. 186-191. Mar. 1990.

PIRES, L. M.; CALEGARIO, N. Ajuste de modelos estocásticos lineares e não lineares para descrição do perfil longitudinal de árvores. **Revista Árvore**, Viçosa, v. 31, n. 5, p. 845-852, set./out. 2007.

R CORE TEAM. **R: a language and environment for statistical computing**. Vienna: R Foundation for Statistical Computing, 2014. 2630 p.

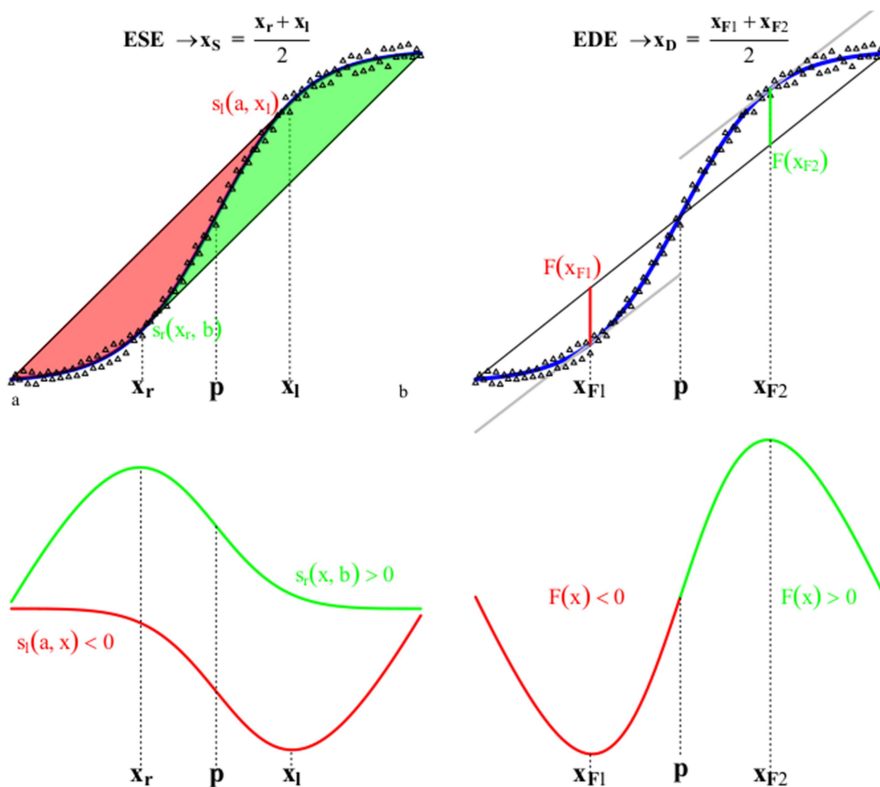
SCHÖEPFER, W. **Automatisierung der Massen, Sorten und Wertberechnung stenender Waldbestände Schriftenreihe Bad**. Stuttgart: Wurt-Forstl, 1966. Não paginado.

YANG, Y.; HUANG, S.; MENG, S. X. Development of a tree-specific stem profile model for white spruce: a nonlinear mixed model approach with a generalized covariance structure. **Forestry: an international journal of forest research**, Oxford, v. 82, n. 5, p. 541-555, Sept. 2009.

ANEXO A – MÉTODOS GEOMÉTRICOS PARA DETERMINAÇÃO DO PONTO DE INFLEXÃO

Os estimadores ESE (x_s) e EDE (x_D) são definidos pelas fórmulas apresentadas na Figura 1. O estimador ESE é a média de x_r e x_l , que são as abscissas em que a corda direita e a corda esquerda, respectivamente, tangenciam o gráfico. O estimador EDE é a média dos valores x_{F1} e x_{F2} ,

Figura 1 - Representação dos métodos EDE = *Extremum Distance Estimator* e ESE = *Extremum Surface Estimator*. p = ponto de inflexão.



Fonte: Christopoulos (2016). https://www.researchgate.net/publication/30455_7351_On_the_Efficient_Identification_of_an_Inflection_Point

Os métodos BEDE (*Bisection - EDE*) e BESE (*Bisection - EDE*) são as versões iterativas de ESE e EDE, respectivamente. Mais detalhes sobre os métodos são encontrados em:

CHRISTOPOULOS, D. T. Developing methods for identifying the inflection point of a convex/concave curve. arXiv:1206.5478v2 [math.NA], <https://arxiv.org/pdf/1206.5478v2.pdf>, 2014.