



**ELIANARA MARTINS DE ALMEIDA**

**MÉTODOS DE PROCESSOS PONTUAIS PARA ANÁLISE DE  
INTERAÇÃO ENTRE ÁRVORES DE ESPÉCIES NATIVAS DA  
AMAZÔNIA**

**LAVRAS – MG**

**2018**

**ELIANARA MARTINS DE ALMEIDA**

**MÉTODOS DE PROCESSOS PONTUAIS PARA ANÁLISE DE INTERAÇÃO ENTRE  
ÁRVORES DE ESPÉCIES NATIVAS DA AMAZÔNIA**

Dissertação apresentada à Universidade Federal de Lavras, como parte das exigências do Programa de Pós-Graduação em Estatística e Experimentação Agropecuária, área de concentração em Estatística e Experimentação Agropecuária, para a obtenção do título de Mestre.

Dr. João Domingos Scalon  
Orientador

**LAVRAS – MG  
2018**

**Ficha catalográfica elaborada pelo Sistema de Geração de Ficha Catalográfica da Biblioteca  
Universitária da UFLA, com dados informados pelo(a) próprio(a) autor(a).**

Almeida, Elianara Martins de

Métodos de processos pontuais para análise de interação  
entre árvores de espécies nativas da Amazônia / Elianara  
Martins de Almeida. – Lavras : UFLA, 2018.

65 p. : il.

Dissertação (mestrado acadêmico)–Universidade Federal  
de Lavras, 2018.

Orientador: Dr. João Domingos Scalon.

Bibliografia.

1. Configurações pontuais. 2. Manejo florestal. 3. Testes  
de hipóteses. I. Scalon, João Domingos. . II. Título.

**ELIANARA MARTINS DE ALMEIDA**

**MÉTODOS DE PROCESSOS PONTUAIS PARA ANÁLISE DE INTERAÇÃO ENTRE  
ÁRVORES DE ESPÉCIES NATIVAS DA AMAZÔNIA  
METHODS OF POINT PROCESSES FOR ANALYSIS OF INTERACTION AMONG  
TREES OF NATIVE SPECIES OF THE AMAZON**

Dissertação apresentada à Universidade Federal de Lavras, como parte das exigências do Programa de Pós-Graduação em Estatística e Experimentação Agropecuária, área de concentração em Estatística e Experimentação Agropecuária, para a obtenção do título de Mestre.

APROVADA em 02 de fevereiro de 2018.

Dr. Anderson Castro Soares de Oliveira UFMT  
Dr. José Márcio de Mello UFLA  
Dr. Renato Ribeiro de Lima UFLA

Dr. João Domingos Scalon  
Orientador

**LAVRAS – MG  
2018**

*Aos meus pais.  
Dedico.*

## **AGRADECIMENTOS**

A DEUS, por me guiar durante esses dois anos de mestrado.

Aos meus pais Cosme e Eliane, por todo amor e incentivo.

Aos meus irmãos Marcus Vinícius e Mylena, pelo carinho e pela compreensão.

Ao meu namorado José Nilton, pelo apoio e amor incomensurável.

Ao meu orientador professor Dr. João Domingos Scalon, pelo apoio, pela confiança e pela paciência.

Aos professores do departamento de estatística da UFMT, Anderson e Marcelino, pela amizade e ajuda em momentos decisivos.

Ao professor Dr. Cor Jesus Fernandes Fontes, por conceder a sala de videoconferência do Hospital Universitário Julio Müller para a minha defesa.

À Isolina, pela acolhida e pelo companherismo.

Ao Isaac, por conceder os dados e ajudar na confecção dos mapas.

Aos colegas de mestrado, pela amizade.

À Universidade Federal de Lavras e ao Departamento de Estatística, pela oportunidade.

Ao Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico - CNPq, pela concessão da bolsa de mestrado.

E a todos e a todas que contribuíram direta e indiretamente no meu trabalho.

**MUITO OBRIGADA!**

*O saber a gente aprende com os mestres e os livros.  
A sabedoria, se aprende é com a vida e com os humildes.  
(Cora Coralina)*

## RESUMO

Compreender os padrões espaciais de árvores nativas, com tantas espécies que podem coexistir em comunidades arbóreas, é um desafio relevante para Biólogos e Engenheiros Florestais. Métodos de processos pontuais podem ser utilizados para analisar como as espécies de árvores se distribuem espacialmente. A função  $K$  de Ripley é uma das técnicas mais utilizadas na análise de processos pontuais, pois permite detectar interações espaciais em diferentes escalas. Entretanto, a função  $K$  caracteriza apenas a propriedade de segunda ordem do processo estocástico que gerou a configuração pontual. Além disso, existem outras funções para caracterizar as propriedades de segunda ordem, como a função  $J$ , que é pouco utilizada na área florestal. Sabe-se que o uso das funções  $K$  e  $J$ , sem uma análise prévia dos efeitos de primeira ordem, pode acarretar resultados completamente incoerentes. As análises de primeira e segunda ordem podem ser realizadas tanto em configurações univariadas (árvores de uma única espécie) como em configurações marcadas bivariadas (árvores de duas espécies diferentes). Uma vez caracterizada as propriedades de primeira e segunda ordem, pode-se ajustar modelos estocásticos espaciais para uma completa caracterização da configuração pontual. Nesse sentido, o objetivo deste trabalho foi utilizar métodos de estatística espacial para caracterizar as distribuições espaciais das espécies arbóreas cumaru-ferro, garapeira e sumaúma de uma floresta nativa da Amazônia, situada Fazenda Canary, localizada no município de Bujari, Acre. Os resultados mostraram que todas as espécies apresentaram configurações com presença de agrupamentos de árvores. Modelos estocásticos de Poisson para configurações com agrupamentos foram ajustados com sucesso para as espécies garapeira e sumaúma, o que possibilitou uma completa caracterização da distribuição espacial das árvores dessas espécies na região de estudo. As análises pontuais bivariadas mostraram que árvores de espécies diferentes tendem a se repelirem umas das outras. Finalmente, os resultados mostraram que com o uso apropriado de métodos de processos pontuais é possível caracterizar as complexas relações espaciais que existem entre espécies de árvores de florestas nativas.

**Palavras-chave:** Configurações pontuais. Manejo florestal. Testes de hipóteses. Método de Monte Carlo. Processos estocásticos.



## ABSTRACT

Understanding the spatial patterns of native trees, with so many species that can coexist in tree communities is a relevant challenge for Biologists and Forest Engineers. Point process methods are the standard tools to analyze the spatial distribution of tree species. The Ripley's K function is one of the most popular techniques in the analysis of spatial point processes since it allows detecting spatial interactions at different scales. Nevertheless, the K-function characterizes only the second-order property of the stochastic process that generated the point pattern. In addition, other functions can be applied to characterize the second-order properties, such as the J-function, which has been less popular in the forestry. The use of the K and J functions, without prior analysis of the first-order effects, can lead into incoherent results. First and second-order analyzes can be performed in both unmarked (single species trees) and marked (trees of different species) configurations. Once the first and second-order properties are characterized, spatial stochastic models can be fitted for a complete characterization of the spatial point pattern. In the same way, the aim of the present work is to use spatial point process methods to characterize the spatial distributions of cumaru-ferro, garapeira and sumaúma species of the Brazilian Amazonian native forest, located in Canary Farm, Bujari, Acre. The results showed that all species present cluster patterns of trees. Poisson cluster stochastic models were successfully fitted for the garapeira and sumaúma species, which allowed a complete characterization of the spatial distribution of the trees of these species in the study region. Bivariate point pattern analyzes have shown that trees of different species tend to repel each other. Finally, the results showed that with the appropriate use of spatial point process methods is possible to characterize the complex spatial interactions that exist among species of native forest trees.

**Keywords:** Point pattern. Forest management. Hypothesis Testing. Monte Carlo Method. Stochastic processes.

## LISTA DE FIGURAS

Figura 2.1 – Ilustração de um processo estacionário e isotrópico. . . . .	18
Figura 2.2 – Padrões espaciais: (a) aleatório, (b) regular e (c) agregado. . . . .	19
Figura 2.3 – Processo heterogêneo. . . . .	20
Figura 2.4 – Ilustração da função $K$ . . . . .	26
Figura 2.5 – Exemplos de envelopes de simulações Monte Carlo das funções $K$ e $L$ univariadas para os padrões: na coluna (a) aleatório, (b) regular e (c) agregado. As linhas cinzas contínuas indicam limites inferior e superior, a linha preta contínua indica a função estimada e a linha vermelha tracejada indica a função teórica. . . . .	29
Figura 2.6 – Exemplos de envelopes de simulações Monte Carlo da função $J$ univariada para os padrões: (a) aleatório, (b) regular e (c) agregado. As linhas cinzas contínuas indicam limites inferior e superior, a linha preta contínua indica a função estimada e a linha vermelha tracejada indica a função teórica. . . . .	29
Figura 2.7 – Formação de um processo de Poisson com agrupamentos de Matérn. À esquerda: os pontos parentais são gerados de acordo com um processo homogêneo de Poisson com intensidade $\kappa$ . Ao centro: para cada “pai”, um número aleatório de pontos “filhos” são gerados de acordo com uma distribuição de Poisson com média $\mu$ e são alocados de forma independente e uniforme em um círculo de raio $R$ em torno do “pai”. À direita: os pontos “filhos” constituem o processo de agrupamento de Matérn. . . . .	32
Figura 2.8 – Formação de um processo de Poisson com agrupamentos de Thomas. À esquerda: pontos “pais”. Ao centro: densidade total da descendência (soma das densidades gaussianas centradas em cada ponto “pai”). À direita: os pontos “filhos” constituem o processo de agrupamento de Thomas. . . . .	33
Figura 3.1 – Fazenda Canary situada no município de Bujari, Acre. . . . .	42
Figura 3.2 – Cumaru-ferro ( <i>Dipteryx odorata</i> ). . . . .	43
Figura 3.3 – Garapeira ( <i>Apuleia leiocarpa</i> ). . . . .	44
Figura 3.4 – Sumaúma ( <i>Ceiba pentandra</i> ). . . . .	45
Figura 4.1 – Histogramas de frequências do diâmetro (cm) à altura do peito para as espécies: (a) cumaru-ferro, (b) garapeira e (c) sumaúma. . . . .	47

Figura 4.2 – Distribuição espacial das árvores das espécies cumaru-ferro, garapeira e sumaúma na fazenda Canary. . . . .	48
Figura 4.3 – Distribuição espacial das estimativas de intensidades por meio do alisamento de kernel para: (a) cumaru-ferro, (b) garapeira e (c) sumaúma. . . .	49
Figura 4.4 – Envelopes de simulações Monte Carlo das funções univariadas $L$ e $J$ para: (a) cumaru-ferro (b) garapeira (c) sumaúma (d) cumaru-ferro (e) garapeira e (f) sumaúma. As linhas cinzas contínuas indicam limites inferior e superior, a linha preta contínua indica a função estimada e a linha vermelha tracejada indica a função teórica. . . . .	50
Figura 4.5 – Envelopes de simulações Monte Carlo das funções bivariadas $L$ e $J$ para: (a) cumaru-ferro e garapeira (b) cumaru-ferro e sumaúma (c) garapeira e sumaúma (d) cumaru-ferro e garapeira (e) cumaru-ferro e sumaúma (f) garapeira e sumaúma. As linhas cinzas contínuas indicam limites inferior e superior, a linha preta contínua indica a função estimada e a linha vermelha tracejada indica a função teórica. . . . .	52
Figura 4.6 – Envelopes de simulações Monte Carlo da função $J$ para os modelos ajustados para espécie garapeira: (a) Modelo Matérn e (b) Modelo Thomas. As linhas cinzas contínuas indicam limites inferior e superior, a linha preta contínua indica a função estimada e a linha vermelha tracejada indica a função teórica. . . . .	53
Figura 4.7 – Envelopes de simulações Monte Carlo da função $J$ para os modelos ajustados para espécie sumaúma: (a) Modelo Matérn e (b) Modelo Thomas. As linhas cinzas contínuas indicam limites inferior e superior, a linha preta contínua indica a função estimada e a linha vermelha tracejada indica a função teórica. . . . .	53

## SUMÁRIO

<b>1</b>	<b>INTRODUÇÃO</b>	11
<b>2</b>	<b>REFERENCIAL TEÓRICO</b>	13
<b>2.1</b>	<b>Distribuição espacial relacionada ao manejo florestal</b>	13
<b>2.2</b>	<b>Estatística Espacial</b>	14
<b>2.3</b>	<b>Processos pontuais</b>	15
<b>2.4</b>	<b>Processos pontuais não marcados</b>	16
<b>2.4.1</b>	<b>Efeitos de primeira e segunda ordem</b>	16
<b>2.4.2</b>	<b>A hipótese nula de Completa Aleatoriedade Espacial- CAE</b>	18
<b>2.5</b>	<b>Análises de processos pontuais não marcados</b>	20
<b>2.5.1</b>	<b>Estimador de intensidade</b>	20
<b>2.5.2</b>	<b>Função <math>J</math></b>	22
<b>2.5.3</b>	<b>Função <math>K</math></b>	24
<b>2.5.4</b>	<b>Análise contra a hipótese de Completa Aleatoriedade Espacial - CAE</b>	27
<b>2.5.5</b>	<b>Ajuste de modelos</b>	30
<b>2.5.6</b>	<b>Processos de Poisson com agrupamentos</b>	30
<b>2.5.7</b>	<b>Validação do modelo</b>	34
<b>2.6</b>	<b>Processos pontuais marcados bivariados</b>	34
<b>2.6.1</b>	<b>Efeitos de primeira e segunda ordem</b>	34
<b>2.6.2</b>	<b>Hipóteses nulas de independência e rotulagem aleatória</b>	35
<b>2.7</b>	<b>Análises de processos pontuais marcados bivariados</b>	36
<b>2.7.1</b>	<b>Estimador de intensidade</b>	36
<b>2.7.2</b>	<b>Função <math>J</math> bivariada</b>	36
<b>2.7.3</b>	<b>Função <math>K</math> bivariada</b>	37
<b>2.7.4</b>	<b>Análise contra as hipóteses de independência e rotulagem aleatória</b>	38
<b>2.8</b>	<b>Aplicação de processos pontuais em estudos florestais</b>	39
<b>3</b>	<b>MATERIAL E MÉTODOS</b>	41
<b>3.1</b>	<b>Dados</b>	41
<b>3.2</b>	<b>Espécies</b>	41
<b>3.2.1</b>	<b>Cumarú-ferro</b>	42
<b>3.2.2</b>	<b>Garapeira</b>	43
<b>3.2.3</b>	<b>Sumaúma</b>	44

<b>3.3</b>	<b>Análise estatística</b>	<b>45</b>
<b>4</b>	<b>RESULTADOS E DISCUSSÃO</b>	<b>47</b>
<b>5</b>	<b>CONCLUSÕES</b>	<b>55</b>
	<b>REFERÊNCIAS</b>	<b>56</b>
	<b>ANEXO- Códigos do R</b>	<b>61</b>

## 1 INTRODUÇÃO

As florestas tropicais se destacam por possuírem uma diversidade de espécies arbóreas muito maior do que em outras florestas (CHESSON, 2000). De acordo com Wright (2002), a diversidade de espécies é limitada pela concorrência, sendo que os concorrentes superiores crescem abundantemente ou ainda, outras espécies são excluídas. Assim, um desafio relevante em Ecologia Florestal é compreender os padrões espaciais das árvores, tendo em vista o grande número de espécies que podem coexistir em comunidades arbóreas, e, principalmente, com a finalidade de desenvolver estratégias para a preservação das florestas.

Há uma enorme preocupação com a conservação das florestas tropicais, pois elas estão desaparecendo em todo mundo assustadoramente. Grande parte desse desaparecimento se deve à agricultura itinerante, à formação de pastagens e à atividade madeireira, tida como principal causa do desmatamento sem controle ocorrido nos trópicos (SILVA, 1996).

Nesse cenário, investigar a distribuição espacial de espécies arbóreas em florestas tropicais nativas é importante para auxiliar no planejamento do manejo sustentável e aproveitamento racional dos recursos florestais (NASCIMENTO; CARVALHO; LEÃO, 2002). Segundo Souza et al. (2006), a maioria das florestas tropicais nativas da Amazônia tem sido explorada de forma insustentável, sem aplicação dos critérios de sustentabilidade do manejo florestal, o que caracteriza perda da cobertura florestal e da diversidade de espécies, antes mesmo que se tenha o conhecimento mais aprofundado de algumas dimensões dessa riqueza natural.

Métodos de processos pontuais que consideram na análise a própria localização do evento de interesse, têm sido utilizados em alguns estudos de espécies arbóreas (FLUGGE; OLHEDE; MURRELL, 2014; ROCKWELL et al., 2017), principalmente quando tem-se o interesse em explorar a relação da localização do evento com algum atributo, o qual é denominado processos pontuais marcados. Entre os métodos para analisar a dependência entre as árvores, a função  $K$  de Ripley (1976) é uma das funções mais utilizadas, pois permite detectar padrões espaciais em diferentes escalas espaciais. A função  $J$ , introduzida por Van Lieshout e Baddeley (1996), pode ser utilizada não somente para quantificar interações entre eventos pontuais, mas também para determinar o alcance das interações existentes entre os eventos (VAN LIESHOUT; BADDELEY, 1999; VAN LIESHOUT, 2011; CRONIE; VAN LIESHOUT, 2014). Entretanto, apesar de sua flexibilidade, a função  $J$  não tem sido explorada para quantificar interações espaciais entre as árvores madeiras comerciais, nem para determinar o alcance das interações existentes entre essas espécies. O ajuste de modelos estatísticos para configurações pontuais,

baseados nas funções  $K$  e  $J$ , também não tem sido explorado na análise da distribuição espacial de espécies arbóreas. Dentro desse contexto, os objetivos deste trabalho são utilizar as funções  $K$  e  $J$  não marcadas para analisar o padrão espacial univariado de espécies nativas comerciais e as funções  $K$  e  $J$  bivariadas marcadas para analisar as interações entre duas ou mais espécies comerciais (para esse trabalho foi utilizado diâmetro mínimo de corte maior ou igual a 30 cm) em uma grande área da floresta Amazônica com o intuito de fornecer subsídios para o planejamento do manejo florestal sustentado.

## 2 REFERENCIAL TEÓRICO

### 2.1 Distribuição espacial relacionada ao manejo florestal

De acordo com o decreto que regulamentou a exploração das florestas da Bacia Amazônica (Decreto n° 1.282, de 19.10.94), o termo manejo florestal sustentável é definido como “*administração de floresta para obtenção de benefícios econômicos e sociais, respeitando-se os mecanismos de sustentação do ecossistema*”. Conforme a definição acima, com vistas à sustentabilidade, o manejo deve ser econômico, ecológico e socialmente correto (SILVA, 1996).

O planejamento de um manejo adequado requer maiores investimentos, porém resulta em benefícios econômicos. Como por exemplo, a redução dos desperdícios de madeiras, maior crescimento das árvores e redução dos danos das árvores, conseqüentemente o retorno supera os custos.

Nesse contexto, técnicas baseadas na distribuição espacial de árvores comerciais são ferramentas essenciais para compreender mecanismos ecológicos, pois fornece subsídios para estratégias de manejo sustentável (HIGUCHI et al., 2011). Informações da distribuição espacial de cada espécie simplificam programas de aproveitamento, e contribuem para o manejo, silvicultura, dendrologia e ecologia (NASCIMENTO; CARVALHO; LEÃO, 2002).

O arranjo espacial de uma ou mais espécies demonstra como os indivíduos se encontram estabelecidos horizontalmente na comunidade arbórea. Dispondo desse conhecimento, auxilia o manejador a balizar e inserir critérios para selecionar as espécies que serão removidas na população (SCOLFORO, 1998; SEVERIANO, 2015).

Geralmente, as espécies arbóreas apresentam padrões espaciais aleatório, agregado e uniforme. Mais detalhes desses padrões espaciais serão explicados nas próximas seções. Esses padrões são associados a vários processos ecológicos que podem ser bióticos, como dispersão de sementes, interações diretas planta-planta, como competição ou facilitação e fatores abióticos, como nutrientes, relevo, disponibilidade de água e luz (CONDIT et al., 2000).

Segundo Nathan e Muller-Landau (2000), um dos principais processos que determinam a estrutura espacial de uma espécie é a dispersão de sementes. Os padrões de dispersão variam entre as espécies de plantas, populações e indivíduos, de acordo com a distância dos pais e diferentes tempos. Ademais, de acordo com a curva de dispersão de sementes, as mudas serão mais ou menos agregadas e alcançarão ou não manchas favoráveis (HOWE; SMALLWOOD, 1982; GREEN, 1983; AUGSPURGER, 1984; BAROT et al., 1999).



Segundo Brooker (2006), existem evidências relevantes de que as interações planta-planta são componentes importantes do mecanismo pelo qual os condutores de mudanças ambientais afetam as espécies e comunidades de plantas. Essas interações podem ser positivas ou negativas.

A facilitação planta-planta é uma interação positiva e ocorre quando há um efeito benéfico de uma espécie em plantas vizinhas e, em relação à germinação, à sobrevivência e ao crescimento (CALLAWAY, 2007).

A competição é uma interação negativa quando há inibição de uma espécie em relação às outras plantas e, tem atraído mais a atenção dos ecólogos pelo fato de ser frequentemente observável na natureza. Conforme Pinto-Coelho (2000), a competição pode ser dividida em intraespecífica – quando ocorre entre os membros de uma mesma espécie ou mais – e interespecífica – quando ocorre entre organismos pertencentes a espécies diferentes. A natureza do recurso limitante em uma competição pode variar muito. Para as plantas pode ser a luz, o espaço e os nutrientes (frequentemente o fósforo ou o nitrogênio). Mas, pode haver competição por polinizadores ou agentes dispersores (PINTO-COELHO, 2000).

## **2.2 Estatística Espacial**

A Estatística Espacial distingui-se de outros métodos estatísticos por associar cada observação a uma localização no espaço. Bailey e Gatrell (1995) afirmam que a Estatística Espacial pode ser definida como um conjunto de técnicas que busca descrever os padrões existentes em dados que são espacialmente localizados e se considera explicitamente a localização do evento na análise.

Os dados espaciais apresentam diferentes estruturas e, segundo Cressie (1993), podem ser divididos das seguintes maneiras:

- **Dados de área:** são dados em que a ocorrência exata dos eventos é desconhecida, porém são dispostos de forma agregada a uma determinada unidade de área (polígonos). São exemplos os dados obtidos por municípios, setores censitários, bairros, etc.
- **Dados contínuos:** são dados obtidos a partir de fenômenos que estão distribuídos continuamente sobre uma região. São exemplos para esse tipo de dados: a concentração de um elemento químico no solo, precipitação, temperatura, etc.

- Dados de processos pontuais: são dados em que a localização da ocorrência do evento representa a informação de interesse. São alguns exemplos: a localização de ocorrência de crimes, localização de espécies arbóreas. Algumas vezes, os eventos estão associados a uma característica denominada marca.

As inferências de processos espaciais são realizadas por meio de processos estocásticos, os quais podem ser definidos como uma coleção ou família de variáveis aleatórias definida no mesmo espaço de probabilidade e indexadas por um conjunto de índices. Um processo espacial é um caso especial de um processo estocástico cuja indexação é a posição do evento. Mais formalmente, segundo Schabenberger e Gotway (2005), um processo estocástico espacial é uma coleção de variáveis aleatórias que são indexadas por algum conjunto  $D \subset \mathbb{R}^d$  contendo coordenadas espaciais  $\mathbf{s} = [s_1, s_2, \dots, s_d]'$ . Usualmente, para um processo no plano  $d = 2$ , as coordenadas de longitude e latitude são definidas como  $\mathbf{s} = [x, y]'$ . Se a dimensão  $d$  do conjunto de índices do processo estocástico for maior que um, o processo estocástico é muitas vezes referido como um campo aleatório. A notação usual para um processo estocástico espacial é dada por

$$\{Z(\mathbf{s}) : \mathbf{s} \in D \subset \mathbb{R}^d\},$$

em que  $Z(\mathbf{s})$  representa os eventos nas localizações  $\mathbf{s}$ .

A estatística espacial, apresenta uma ampla diversidade metodológica e, conforme a divisão dos dados espaciais em relação a sua natureza, para cada ramificação há técnicas específicas para realização da inferência estatística. O intuito deste trabalho é empregar métodos de processos pontuais para as análises estatísticas e seus conceitos mais relevantes para proceder o estudo de processos pontuais, os quais serão abordados na próxima seção.

### 2.3 Processos pontuais

Um processo pontual espacial é um mecanismo - processo - estocástico que gera um conjunto de eventos contáveis  $(x_i, y_j)$  no plano (DIGGLE, 2013). Assim, os dados de processos pontuais são pontos localizados no espaço e são identificados por coordenadas do fenômeno em estudo. Em geral, o objetivo da análise é determinar se a ocorrência dos pontos na área em estudo apresenta algum padrão espacial, como por exemplo, agrupamentos. Entre as muitas áreas de aplicação, incluem Astronomia, Sociologia, Ecologia, Silvicultura, etc.

Segundo Diggle (2013) e Schabenberger e Gotway (2005), os dados de um processo pontual podem ser obtidos por amostragem, ou seja, quando apenas um subconjunto dos eventos gerados pelo processo estocástico é observado e considerado na análise. No entanto, se todos os eventos gerados pelo processo estocástico forem observados e considerados na análise, os dados do processo pontual são denominados de dados mapeados ou mapa de pontos. Neste trabalho, serão considerados apenas mapa de pontos.

Em geral, os processos pontuais são divididos em duas categorias: padrão de pontos não marcados e padrão de pontos marcados em que as marcas podem ser qualitativas ou quantitativas. Nas análises deste estudo serão aplicados métodos para processos pontuais não marcados e marcados com marcas qualitativas bivariadas.

## 2.4 Processos pontuais não marcados

Um proceso pontual não marcado considera apenas um tipo de evento, como por exemplo, as localizações de árvores de uma única espécie. Para dados dessa natureza, os métodos exploratórios espaciais concentram-se em caracterizar o processo estocástico que gera os padrões espaciais observados.

### 2.4.1 Efeitos de primeira e segunda ordem

Importantes aspectos no comportamento de um processo estocástico espacial podem ser caracterizados em termos de efeitos de primeira ordem e segunda ordem. Os efeitos de primeira ordem, também conhecidos como globais ou de larga escala, descrevem como o valor esperado – média – varia dentro do espaço. O objetivo da análise está em estimar a intensidade do processo, ou seja, o número médio de eventos por unidade-área.

Os efeitos primeira ordem do processo pontual espacial podem ser definidos pela função intensidade dada por

$$\lambda(s) = \lim_{|ds| \rightarrow 0} \left\{ \frac{\mathbb{E}[N(ds)]}{ds} \right\},$$

em que  $ds$  define uma pequena região em torno da localização  $s$ ,  $|ds|$  é a sua área e  $N(ds)$  é o número de eventos localizados dentro de  $ds$ .

Os efeitos de segunda ordem, considerados como locais ou de pequena escala, representam a relação entre valores dos eventos do processo em diferentes regiões do espaço.

Formalmente, os efeitos de segunda ordem podem ser definidos, conforme Diggle (2013), pela função intensidade de segunda ordem dada por

$$\lambda_2(s_i, s_j) = \lim_{|ds_i|, |ds_j| \rightarrow 0} \frac{E[N(ds_i)N(ds_j)]}{|ds_i||ds_j|},$$

em que  $N(ds_i)$  e  $N(ds_j)$  representam o número de eventos dentro de pequenos círculos centrados nas localizações  $s_i$  e  $s_j$  com áreas iguais a  $|ds_i|$  e  $|ds_j|$ , respectivamente.

Uma medida fortemente relacionada a essa propriedade é a intensidade condicional  $\lambda_c(s_i, s_j) = \frac{\lambda_2(s_i, s_j)}{\lambda(s_j)}$ , a qual corresponde a intensidade no ponto  $s_i$  condicional a informação de que existe um evento em  $s_j$ . Outra medida é a função de correlação de pares, a qual é baseada no produto de densidade de segunda ordem e pode ser expressa por

$$g(s_i, s_j) = \frac{\lambda_2(s_i, s_j)}{\lambda(s_i)\lambda(s_j)}. \quad (2.1)$$

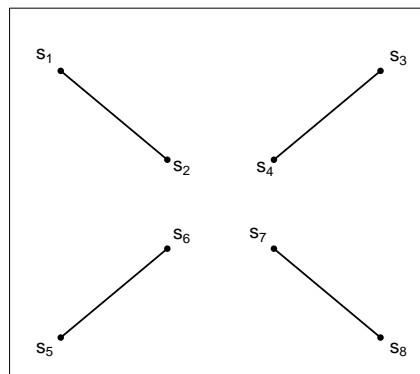
Dois conceitos que são importantes para a análise estatística de um processo pontual e que estão intimamente relacionados aos efeitos de primeira e segunda ordem são os conceitos de estacionariedade e isotropia. Um processo é dito estacionário ou homogêneo, se os efeitos de primeira e segunda ordem são invariantes sob a translação, ou seja, a intensidade de primeira ordem não varia no espaço, ou seja,  $\lambda(s) = \lambda$  e a intensidade de segunda ordem depende apenas da distância relativa entre os pontos, ou seja,  $\lambda_2(s_i, s_j) = \lambda_2(s_i - s_j)$ . Segundo Cressie (1993), um processo que é tanto estacionário como isotrópico é chamado de "movimento invariante", dado que a covariância varia apenas com a distância entre dois pontos e, portanto, os efeitos direcionais são ausentes. Assim, tem-se que

$$\lambda_2(s_i, s_j) = \lambda_2(t),$$

em que  $t = \|s_i - s_j\|$  é a distância euclidiana entre dois pontos, e como consequência da independência de um processo de Completa Aleatoriedade Espacial (CAE),  $\lambda_2(t) = \lambda^2$ .

Considere o padrão amostral exemplificado na Figura 2.1 em um cenário que o processo é estacionário e isotrópico. Neste caso, os pontos foram distanciados de forma equivalente ( $s_1s_2, s_3s_4, s_5s_6$  e  $s_7s_8$ ), em que diferem apenas no sentido de translação e rotação. Dessa forma, se o processo é estacionário  $\lambda_2(s_1, s_2) = \lambda_2(s_7, s_8)$  e  $\lambda_2(s_3, s_4) = \lambda_2(s_5, s_6)$ . Porém, se o processo é isotrópico todos os pares possuem a mesma relação, independente da rotação.

Figura 2.1 – Ilustração de um processo estacionário e isotrópico.



Fonte: Do autor (2018).

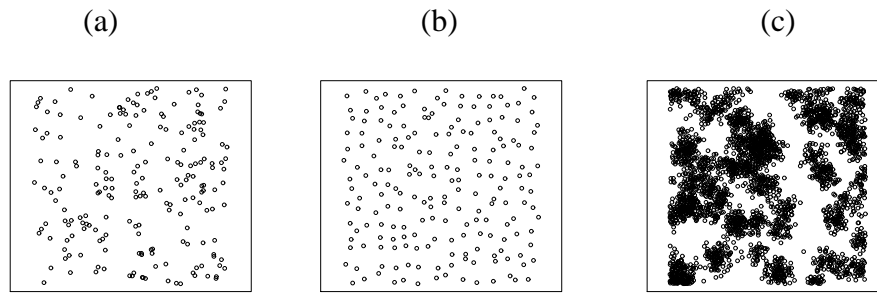
#### 2.4.2 A hipótese nula de Completa Aleatoriedade Espacial- CAE

O mais simples modelo de padrão pontual teórico denomina-se Completa Aleatoriedade Espacial (CAE) e tem como característica não apresentar efeitos de primeira e segunda ordem, ou seja, a configuração apresenta intensidade de primeira ordem constante e não apresenta dependência entre os eventos. Em outras palavras, processos espaciais pontuais que exibem uma CAE são caracterizados pela ausência de estrutura nos dados. O termo CAE é usado como sinônimo de um processo homogêneo de Poisson com parâmetro (intensidade)  $\lambda$  (CRESSIE, 1993). Assim, esse modelo é utilizado na maioria das análises como a hipótese nula em testes cujas hipóteses alternativas estabelecem algum tipo de estrutura espacial (regularidade e agrupamentos). Esses três casos típicos de padrões espaciais (aleatoriedade, regularidade e agrupamentos) podem ser visualizados na Figura 2.2.

Segundo Diggle (2013), um processo de CAE é definido pelos seguintes pressupostos:

- Para algum  $\lambda > 0$ , e qualquer região planar finita  $A$ ,  $N(A)$  segue uma distribuição Poisson com média  $\lambda|A|$ ;
- Dado  $N(A) = n$ , os  $n$  eventos em  $A$  formam uma amostra aleatória independente da distribuição uniforme em  $A$ ;
- Para quaisquer duas regiões disjuntas  $A$  e  $B$ , as variáveis aleatórias  $N(A)$  e  $N(B)$  são independentes.

Figura 2.2 – Padrões espaciais: (a) aleatório, (b) regular e (c) agregado.



Fonte: Do autor (2018).

Para um processo de Poisson homogêneo, a função de correlação de pares dado em (2.1), se reduz a

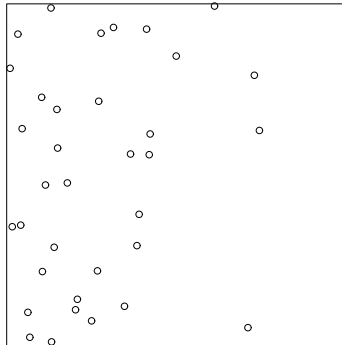
$$\begin{aligned} g(s_i, s_j) &= \frac{\lambda_2(t)}{\lambda^2} \\ &= \frac{\lambda^2}{\lambda^2} \\ &= 1. \end{aligned}$$

Na prática, é difícil detectar se um processo é estacionário. Por exemplo, em uma floresta, a variação da fertilidade do solo pode afetar na dinâmica das árvores, o que ocasiona um comportamento de tendência. Nesse caso, o processo é denominado heterogêneo, em que a intensidade de primeira ordem não é constante no espaço. O termo heterogêneo é utilizado como sinônimo de não estacionariedade. Uma ilustração de um processo heterogêneo pode ser observada na Figura 2.3.

Segundo Diggle (2013), processos pontuais não estacionários são caracterizados por uma função de intensidade espacialmente variável, o que determina a classe de processos de Poisson não homogêneos, para os quais

- $N(A)$  tem distribuição Poisson com média  $\int_A \lambda(x) dx$ ;
- Dado que  $N(A) = n$ , os  $n$  eventos formam uma amostra aleatória independente em  $A$  com função de densidade de probabilidade proporcional a  $\lambda(x)$ .

Figura 2.3 – Processo heterogêneo.



Fonte: Do autor (2018).

## 2.5 Análises de processos pontuais não marcados

### 2.5.1 Estimador de intensidade

Nas análises de dados pontuais é relevante explorar o efeito de primeira ordem de um processo estacionário e não estacionário. Nesse contexto, deve-se estimar a intensidade. Para um processo de Poisson homogêneo, o estimador de intensidade, também conhecido como global, é o número observado de eventos por unidades de área que pode ser expresso por

$$\hat{\lambda} = \frac{n}{|A|}.$$

Um método não paramétrico usual para estimar a intensidade em várias localidades é o alisamento de kernel que cria uma relação entre as estimativas de densidade e intensidade. Segundo Câmara e Carvalho (2003, p. 5), "esta função realiza uma contagem de todos os pontos dentro de uma região de influência, ponderando-os pela distância de cada um à localização de interesse."

Nesse cenário, considere  $s$  uma localização qualquer em uma área  $A$  e  $s_1, \dots, s_n$  são as localizações dos  $n$  eventos observados nesta área. Um estimador de intensidade  $\lambda(s)$  na posição  $s$ , com correção do efeito de borda, proposto por Diggle (1985), pode ser expresso por

$$\hat{\lambda}(s) = \frac{1}{p_h(s)} \sum_{i=1}^n \frac{1}{h^2} k\left(\frac{s-s_i}{h}\right),$$

em que  $h$  é denotado como raio de influência ou largura de banda,  $p_h(s) = \int_A h^{-2} k\left(\frac{s-s_i}{h}\right) du$  é um fator de correção do efeito de bordas e  $k(\cdot)$  é uma função de densidade de probabilidade. Segundo Schabenberger e Gotway (2005), as funções de densidade mais aplicadas são:

- a Gaussiana

$$k(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{(-t^2/2)},$$

- a kernel quadrática

$$k(t) = \begin{cases} \frac{3}{4} (1 - t^2), & \text{se } |t| \leq 1; \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

- ou a kernel de variância mínima

$$k(t) = \begin{cases} \frac{3}{8} (3 - 5t^2), & \text{se } |t| \leq 1; \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Segundo Schabenberger e Gotway (2005), a escolha de  $k(\cdot)$  tem menos importância que a escolha da largura da banda. Se  $h$  é pequena, as estimativas quase não serão viesadas, entretanto, apresentarão grande variabilidade. Com o aumento da largura da janela  $h$ , a estimativa é suavizada, ou seja, varia menos. Porém, a estimativa torna-se mais tendenciosa. Para definir um valor “adequado” para  $h$  existem várias possibilidades, como por exemplo, erro quadrático médio obtido por validação cruzada, conforme podem ser vistos em Diggle (2013) e Schabenberger e Gotway (2005).

Em processos pontuais, é importante estabelecer uma ferramenta que caracterize as propriedades de segunda ordem, ou seja, analisa a dependência espacial entre os eventos em estudo. Usualmente, as propriedades de segunda ordem são estudadas por meio das funções  $F$ ,  $G$ ,  $J$ ,  $K$ ,  $L$  e correlação por pares. No entanto, o intuito deste trabalho é utilizar técnicas baseadas nas funções  $K$ ,  $L$  e  $J$  para a realização dessas análises.



### 2.5.2 Função $J$

A função  $J$ , proposta por Van Lieshout e Baddeley (1996), é uma combinação das funções  $F$  (espaço vazio) e função  $G$  (vizinho mais próximo). Antes de apresentar mais detalhes da função  $J$ , serão abordadas as definições das funções  $F$  e  $G$ .

A função  $F$  foi introduzida por Ripley (1977) e é definida como a distribuição acumulada da distância entre um ponto arbitrário e o evento mais próximo.

Formalmente, fixado uma distância  $x$ , a função  $F$  retorna a probabilidade da distância de um ponto escolhido ao acaso para o evento mais próximo ser inferior ou igual a  $x$ . Para um processo estacionário, um estimador para função  $F$  é definido por

$$\hat{F}(x) = \hat{\lambda}^{-1} \sum_{i=1}^m I_x(x_i), \quad (2.2)$$

para todo  $x > 0$ , em que  $\hat{\lambda} = \frac{n}{|A|}$ ,  $m$  é o número de pontos arbitrários em uma área  $A$ ,  $x_i$  representa a distância do  $i$ -ésimo evento para o evento mais próximo em  $A$  e a função indicadora é  $I_x(x_i) = 1$  se  $x_i \leq x$  e 0, caso contrário.

No entanto, o estimador apresentado na equação (2.2) é viesado, em razão do efeito de borda. Em outras palavras, os pontos posicionados ao centro de  $A$  tem mais chances de ter um evento mais próximo do que os pontos localizados na borda.

Assim, um estimador que corrige o efeito de bordas, proposto por Ripley (1977), é dado por:

$$\hat{F}(x) = \frac{\sum_i^n I_x(x_i, b_i)}{\sum_i^n I_x(b_i)},$$

em que  $b_i$  é a distância de um evento até o ponto mais próximo na borda do mapa e  $I_x(x_i, b_i) = 1$  se  $x_i \leq x$  e  $b_i \geq b$  e 0, caso contrário.

Sob a hipótese de CAE, a função  $F$  é dada por

$$F(x) = 1 - e^{-\lambda\pi x^2}. \quad (2.3)$$

A função  $G$ , também conhecida como vizinho mais próximo, foi proposta por Ripley (1977) e trata-se de uma função de distribuição acumulada da distância entre um evento e o vizinho mais próximo.

Em rigor, fixado uma distância  $d$ , a função  $G$  retorna a probabilidade da distância de um evento ao seu vizinho mais próximo ser inferior ou igual a  $d$ . Para um processo estacionário, um estimador para a função  $G$  é dado por

$$\hat{G}(d) = \frac{\sum_{i=1}^n I_d(d_i)}{n}, \quad (2.4)$$

em que  $n$  é o número de pontos arbitrários em uma área  $A$ ,  $d_i$  representa a distância do  $i$ -ésimo evento para o evento mais próximo em  $A$  e a função indicadora é  $I_d(d_i) = 1$  se  $d_i \leq d$  e 0, caso contrário.

Como a equação (2.4) é viesada, um estimador que corrige o efeito de borda é expresso por

$$\hat{G}(d) = \frac{\sum_i^n I_d(d_i, b_i)}{\sum_i^n I_d(b_i)},$$

para todo  $d > 0$ , em que  $b_i$  é a distância de um evento até o evento mais próximo na borda do mapa e  $I_d(d_i, b_i) = 1$  se  $d_i \leq d$  e  $b_i \geq b$  e 0, caso contrário.

Segundo Venables e Ripley (2000), sob a hipótese de CAE, a função  $G$  é equivalente à função  $F$ , sendo necessário apenas trocar  $x$  por  $d$  na equação (2.3).

Pode-se observar que se existe interações entre os eventos, estas podem ser apenas em pequenas escalas. Por exemplo, as árvores competem por luz, água ou nutrientes dentro de uma área limitada. Segundo Diggle (2013), por meio da função  $G$  é possível concentrar-se em distâncias pequenas entre os eventos, quando não é especificado uma distância limiar precisa.

A função  $J$  é o quociente das funções  $G$  e  $F$ , a qual é definida por

$$J(r) = \frac{1 - G(r)}{1 - F(r)},$$

para toda distância  $r > 0$  tal que  $F(r) < 1$ .

Segundo Van Lieshout e Baddeley (1996), uma interpretação para a função  $J$  é que ela compara o ambiente de um ponto típico aleatório do processo com o ambiente de um ponto arbitrário fixo.  $J(r)$  é a proporção de probabilidades, sob estas duas situações, do evento que não há pontos dentro de uma distância  $r$  do ponto dado.

A partir de uma ampla classe de processos pontuais, para distâncias  $r$  maiores que o intervalo espacial,  $J(r)$  é constante. Dessa forma, a função  $J$  pode ser utilizada para descrever

a interação espacial, mas também para o alcance da interação espacial. Ademais, pode ser útil para avaliar diversos modelos de processos pontuais.

Sob a CAE  $J(r) \equiv 1$ , pois  $F \equiv G$ . Segundo Baddeley et al. (2000), uma explicação intuitiva é que o viés resultante aos efeitos de borda é, aproximadamente, igual para as estimativas de  $1 - F(r)$  e  $1 - G(r)$ , de modo que essas distorções se cancelem aproximadamente no estimador de  $J$ . Assim, a estimativa não corrigida de  $J$  pode ser utilizada para inspeção visual direta dos desvios sob a CAE, algo que não é possível com as estimativas não corrigidas de  $F$ ,  $G$  ou  $K$ .

Um estimador para a função  $J$  é obtido pela expressão

$$\hat{J}(r) = \frac{1 - \hat{G}(r)}{1 - \hat{F}(r)},$$

em que  $\hat{G}(r)$  e  $\hat{F}(r)$  são estimadores das funções  $G$  e  $F$ .

### 2.5.3 Função $K$

A função  $K$  de Ripley (1976, 1977), também conhecida como “função de segunda ordem reduzida” está inteiramente ligada à dependência-ou interação- entre os diferentes eventos do processo pontual.

Segundo Cressie (1993), a função  $K$  tem como vantagem o fato de detectar o padrão espacial pontual em diferentes escalas de distâncias simultaneamente. Além disso, a função  $K$  possibilita analisar o grau de dependência entre dois ou mais processos.

A função  $K$  univariada é definida por Ripley (1976, 1977) como sendo

$$K(t) = \lambda^{-1} E[N(t)],$$

em que  $N(t)$  é o número de eventos encontrados dentro de uma distância  $t$  e  $\lambda$  é a intensidade de primeira ordem do processo pontual.

Segundo Diggle (2013), com intuito de estabelecer uma relação entre  $K(t)$  e  $\lambda_2(t)$ , assume-se que o processo seja ordenado. De forma mais clara, não deve ocorrer múltiplos eventos sobrepostos, ou seja,  $P\{N(ds) > 1\}$  é uma ordem de grandeza menor que  $|ds|$ . Isso significa que  $E[N(ds)] \sim P\{N(ds) = 1\}$  no sentido que a relação dessas duas quantidades tende para 1 quando  $|ds_i| \rightarrow 0$ . E, de forma análoga,  $E[N(ds_i)N(ds_j)] \sim P\{N(ds_i) = N(ds_j) = 1\}$ . Observando essas condições, o número esperado de eventos dentro da distância  $t$  de um evento

arbitrário pode ser obtido integrando a função intensidade condicional sobre um disco com centro na origem e raio  $t$ . Assim,

$$K(t) = \lambda^{-1} \int_0^{2\pi} \int_0^t \lambda_c(s|o) s ds d\theta.$$

Considerando que,  $\lambda_c(s|o) = \lambda_2(s)/\lambda$ , conseqüentemente,

$$K(t) = 2\pi\lambda^{-2} \int_0^t \lambda_2(s) s ds. \quad (2.5)$$

Conforme definido anteriormente, a função  $K(t)$  representa o número esperado de pontos dentro de uma distância  $t$  de um ponto arbitrário. Assim, para um processo de CAE,  $\lambda_2(s) = \lambda^2$  e, portanto, a equação (2.5) se reduz a

$$\begin{aligned} K(t) &= 2\pi\lambda^{-2} \int_0^t \lambda_2(s) s ds \\ &= 2\pi\lambda^{-2} \lambda^2 \frac{t^2}{2} \\ &= \pi t^2. \end{aligned}$$

Segundo Diggle (2013), considerando que  $E(t) = E[N(t)]$ , segue que a interpretação é a mesma, ou seja, o número esperado de eventos dentro de uma distância  $t$  de um evento arbitrário. Assim, um estimador para  $E(t)$  pode ser expresso por

$$\tilde{E}(t) = n^{-1} \sum_{i=1}^n \sum_{j \neq i}^n I(t_{ij} \leq t), \quad (2.6)$$

em que  $I(\cdot)$  representa a função indicadora e  $t_{ij} = \|s_i - s_j\|$ .

Uma desvantagem para o uso da equação (2.6) é o fato de ser negativamente tendencioso para  $E(t)$ , devido ao efeito de borda. Segundo Wiegand e Moloney (2014), alguns círculos a uma distância  $t$  de um evento arbitrário não ficam totalmente dentro da área de estudo  $A$ , como pode ser observado na Figura 2.4. Desta forma, os pontos fora dessa área  $A$  não são computados. Como esses pontos serão perdidos pelo estimador da equação (2.6), este é considerado viesado. Além disso, o viés aumentará ao passo que a distância  $t$  se expande. Há varias técnicas para corrigir o efeito de borda. Neste trabalho, será empregado o método proposto por Ripley (1976). Assim, um estimador não viesado para  $E(t)$  é dado por

$$\tilde{E}(t) = n^{-1} \sum_{i=1}^n \sum_{j \neq i}^n w(s_i, s_j)^{-1} I(t_{ij} \leq t),$$

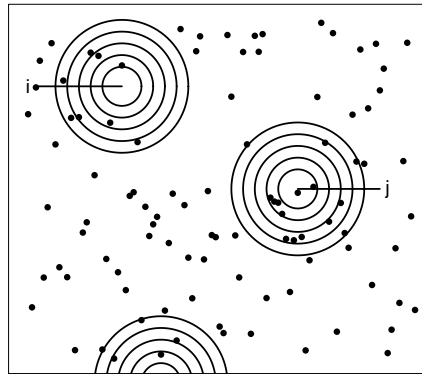
em que  $w(s_i, s_j)$  são pesos dados a cada par de observações e são interpretados como a proporção do círculo com centro  $s_i$  e com raio  $t_{ij} = \|s_i - s_j\|$  que está dentro da área  $A$ . A função indicadora  $I(t_{ij})$  é igual a 1 se  $t_{ij}$  é menor que a distância  $t$  e 0, caso contrário.

Portanto, um estimador não tendencioso- corrigido para efeito isotrópico de bordas- para a função  $K$ , proposto por Ripley (1976), é dado por

$$\hat{K}(t) = \frac{|A|}{n^2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \left( \frac{I(t_{ij})}{w_{ij}} \right).$$

Deve-se observar que  $K(t)$  é uma função acumulada, pois são traçados círculos com origem iguais em um evento arbitrário até a uma distância máxima  $t$ , em que são computados todos os eventos dentro desses círculos. Uma ilustração da estimação da função  $K$  pode ser observada na Figura 2.4. Para detectar um padrão são considerados outros pontos arbitrários e esse procedimento é simulado várias vezes.

Figura 2.4 – Ilustração da função  $K$ .



Fonte: Adaptado de Bailey e Gatrell (1995).

Em vez de utilizar a função  $K$ , pode-se utilizar uma transformação da função  $\hat{K}(t)$ , denominada de função  $L$ . A função  $\hat{L}(t)$  centrada em zero é dada por:

$$\hat{L}(t) = \sqrt{\frac{\hat{K}(t)}{\pi}} - t, \text{ para } t > 0.$$

Sob a hipótese de CAE, é fácil observar que  $\hat{L}(t) = 0$ . Segundo Illian et al. (2008), a função  $L$  é mais vantajosa, pois quando se testa a CAE, o gráfico resultante da função  $L$  é comparado a uma linha reta horizontal com intercepto em zero, enquanto que o da função  $K$  é comparado a uma curva parabólica. Ademais, a variância da função  $K$  aumenta com  $t$  para grandes distâncias e, portanto, o comportamento da função  $K$  pode fornecer uma interpretação equivocada (SCHABENBERGER; GOTWAY, 2005). Assim, a aplicação da raiz quadrada estabiliza a variância.

#### 2.5.4 Análise contra a hipótese de Completa Aleatoriedade Espacial - CAE

Para a análise da interação entre os eventos de uma configuração pontual observada, usualmente, compara-se  $\hat{K}(t)$  com a função teórica  $K$  sob a suposição de hipótese nula de Completa Aleatoriedade Espacial (CAE), ou seja,  $K(t) = \pi t^2$ , para um conjunto de distâncias  $t$ . Para avaliar se a diferença entre essas duas funções é estatisticamente significativa, pode-se utilizar tanto testes de hipóteses formais quanto procedimentos gráficos conhecidos como envelopes de confiança. Em ambos os casos utiliza-se simulações Monte Carlo.

Conforme descrito em Scalon e Silva (2006), para conduzir um teste de hipótese formal contra a hipótese nula de CAE, é necessário definir uma medida de discrepância entre a função estimada  $\hat{K}(t)$  e a teórica nula  $K(t)$ . Essa medida pode ser obtida tanto pela distância de Cramer-Von Mises quanto pela distância de Kolmogorov, que podem ser definidas, respectivamente, por:

$$u_i = \int_0^{t_0} (\hat{K}_i(t) - K(t))^2 dt \quad (2.7)$$

$$u_i = \max_{0 \leq t \leq t_0} |\hat{K}_i(t) - K(t)|, \text{ para } u_i : i = 2, \dots, s, \quad (2.8)$$

em que a distância  $t_0$  é escolhida em relação ao tamanho da área finita.

Entretanto, as equações (2.7) e (2.8) não têm distribuições amostrais conhecidas. Assim, Diggle (1983) propõe o uso da seguinte abordagem de Monte Carlo para realizar o teste de hipótese:

1. Calcula-se o valor de  $u_1$  para os dados observados.
2. Simular padrões de pontos espaciais independentes  $S$  sob hipótese nula de CAE com a mesma intensidade que o padrão observado.

3. Calcula-se  $u_i$  para cada padrão aleatório espacial simulado ( $i = 2, \dots, S$ ).
4. Comparar o valor de  $u_1$  com os valores ( $i = 2, \dots, S$ ) para os padrões simulados. Se  $u_1$  estiver localizado entre os maiores de  $u_2, u_3, \dots, u_S$ , indicará afastamento da hipótese de CAE.

Suponha  $u_1 = u_{(j)}$ , para alguns  $j \in \{1, \dots, s\}$ , então rejeita-se a hipótese de aleatoriedade espacial se valor-p =  $\left( \frac{(s+1-j)}{s} \right) \leq \alpha$ , em que  $\alpha$  é o nível de significância.

Os testes descritos anteriormente não determinam qual direção (regularidade ou agrupamentos) deve ser tomada quando rejeita-se a hipótese nula de CAE. Os métodos Monte Carlo para a construção de envelopes de simulação fornecem uma maneira conveniente de solucionar este problema. Assim, são estabelecidas as seguintes etapas:

- i) Calcula-se o valor de  $\hat{K}_1(t)$  para o processo pontual observado;
- ii) Calcula-se  $\hat{K}_i(t) : i = 2, 3, \dots, s$  para cada  $s - 1$  simulações independentes e identicamente distribuídas na região  $A$  sob a hipótese de CAE;
- iii) São construídos os envelopes de simulações superior e inferior, em que são considerados os valores máximos e mínimos de  $\hat{K}_i(t)$ , definidos como:

$$U(t) = \max\{\hat{K}_i(t)\}, i = 1, \dots, s.$$

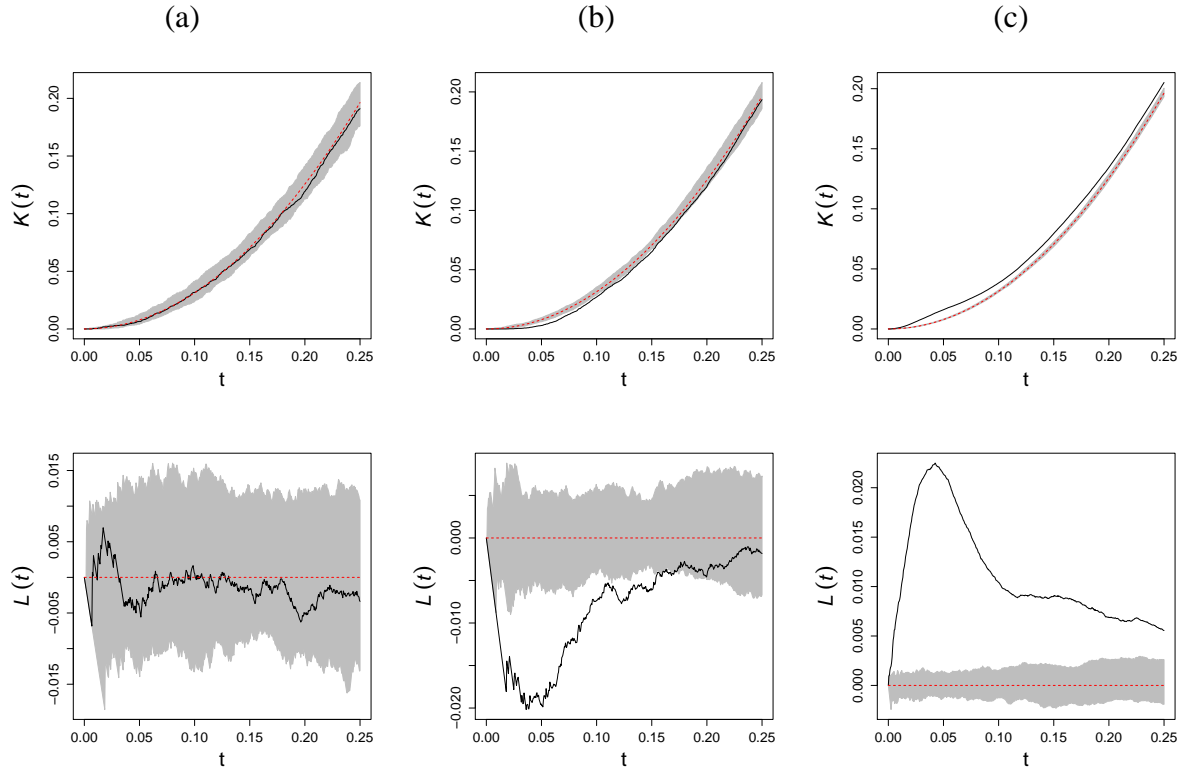
$$L(t) = \min\{\hat{K}_i(t)\}, i = 1, \dots, s.$$

- iv) Constrói-se um gráfico, em que os valores de  $\hat{K}_i(t)$ ,  $U(t)$  e  $L(t)$  são colocados no eixo das coordenadas e as distâncias  $t$  no eixo das abscissas.

Na interpretação gráfica, para qualquer distância  $t$ , se a linha de  $\hat{K}_i(t)$  estiver acima do envelope, há evidências do padrão de agrupamento. Caso  $\hat{K}_i(t)$  estiver abaixo do envelope, há evidências do padrão de regularidade. A interpretação é semelhante para a função  $L$ . Exemplos de envelopes de simulações para as funções  $K$  e  $L$  podem ser observados na Figura 2.5.

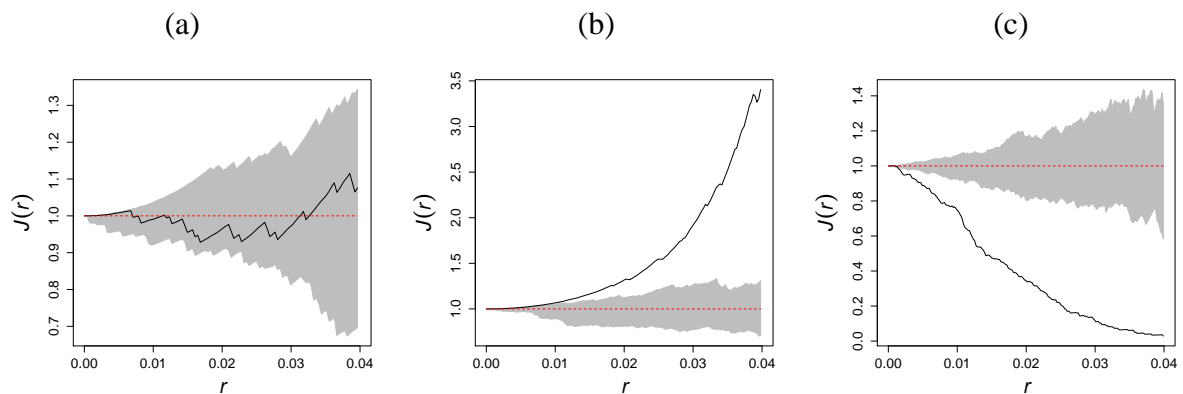
A análise da função  $J$  é oposta, pois para qualquer distância  $r$ , se a linha de  $\hat{J}_i(r)$  estiver acima do envelope, há evidências de um padrão de regularidade. Caso contrário, há evidências do padrão de agrupamento. A Figura 2.6 apresenta exemplos de envelopes de simulações para a função  $J$ .

Figura 2.5 – Exemplos de envelopes de simulações Monte Carlo das funções  $K$  e  $L$  univariadas para os padrões: na coluna (a) aleatório, (b) regular e (c) agregado. As linhas cinzas contínuas indicam limites inferior e superior, a linha preta contínua indica a função estimada e a linha vermelha tracejada indica a função teórica.



Fonte: Do autor (2018).

Figura 2.6 – Exemplos de envelopes de simulações Monte Carlo da função  $J$  univariada para os padrões: (a) aleatório, (b) regular e (c) agregado. As linhas cinzas contínuas indicam limites inferior e superior, a linha preta contínua indica a função estimada e a linha vermelha tracejada indica a função teórica.



Fonte: Do autor (2018).



### 2.5.5 Ajuste de modelos

O modelo mais simples de um padrão de pontos é o modelo de Poisson homogêneo, que considera a ausência de interação entre os pontos de um processo. No entanto, quando essa suposição é violada (agrupamento ou regularidade), outros modelos podem ser ajustados. Os modelos ajustados em configurações pontuais são ferramentas importantes que auxiliam na caracterização do processo estocástico pontual (ILLIAN et al., 2008).

Existem vários modelos para configurações pontuais, dependendo da interação existente entre os eventos pontuais. Quando há uma tendência para a formação de agrupamentos podem ser ajustados, por exemplo, os modelos de Cox ou de Poisson com agrupamentos. Uma configuração com tendência para regularidade pode ser modelada por processos de Gibbs. Neste trabalho será apresentado apenas um modelo para configurações com tendência para agrupamentos.

### 2.5.6 Processos de Poisson com agrupamentos

Os processos de Poisson com agrupamentos (ou clusters) foram introduzidos por Neyman e Scott (1958) para incorporar, de forma explícita, as interações entre eventos em configurações com agrupamentos. Um processo de Poisson com agrupamentos, em geral, envolve a presença de eventos “pais” e eventos “descendentes” (ou “filhos”), incorporando as seguintes propriedades:

- (P1) Os pontos “pais” (número de agrupamentos) formam um processo de Poisson homogêneo com intensidade constante.
- (P2) Os agrupamentos são independentes um do outro.
- (P3) Diferentes agrupamentos, deslocados da mesma localização do evento “pai”, têm a mesma distribuição.
- (P4) As localizações dos eventos “filhos” de um determinado “pai” são independentes e distribuídas identicamente (dada a localização principal).
- (P5) Para cada evento “pai”, o número de eventos “filhos” é uma variável aleatória de Poisson.
- (P6) A densidade de probabilidade dos eventos “filhos” de um determinado evento “pai” depende apenas da distância dos pontos “filhos” para o “pai”, ou seja, os agrupamentos são isotrópicos.

Definidas as propriedades (P1)-(P6), conforme Diggle (2013), um processo de Poisson com agrupamentos pode ser gerado pelos seguintes procedimentos:

1. Os eventos “pais” formam um processo de Poisson com intensidade  $\kappa$ .
2. Cada ponto “pai” produz um número aleatório  $S$  de pontos “filhos”, de acordo com uma distribuição de Poisson com descendência  $\mu$  por “pai”.
3. As posições dos pontos “filhos”, em relação aos pontos “pais”, são distribuídas independentemente e identicamente distribuída de acordo com uma densidade de probabilidade  $h(\cdot)$ .

Os processos pontuais com agrupamentos cluster têm intensidade  $\lambda = \kappa\mu$ , em que  $\mu = E[S]$ .

Os procedimentos 1-3 podem ser expressos em termos de segunda ordem por

$$h_2(x) = \int h(x)h(x-y)dx,$$

em que  $h_2(\cdot)$  é uma função de densidade de probabilidade da diferença vetorial entre as posições de dois pontos do mesmo agrupamento e  $H_2(\cdot)$  a função de distribuição acumulada. Ao considerar um evento arbitrário dentro de um cluster de tamanho  $S$ , o número esperado de outros eventos do mesmo cluster a uma distância  $t$  é  $(S-1)H_2(t)$ . A distribuição de probabilidade do tamanho do cluster ao qual um evento arbitrário pertence é obtida por amostragem de tendência de comprimento da distribuição de tamanho cluster  $p$ , assim  $p^*(s) = sp(s)/\mu: s = 1, \dots$ . A média sobre a distribuição  $p^*(\cdot)$  resulta no número esperado de eventos de diferentes clusters dentro de uma distância  $t$  de um evento arbitrário como  $E[S(S-1)]H_2(t)/\mu$ . A propriedade 1 implica que todos esses eventos estão localizados independentemente do evento original e, portanto, seu número esperado é apenas  $\lambda \pi t^2$ . Somando as contribuições de eventos do mesmo cluster e de eventos de clusters diferentes temos que

$$K(t) = \pi t^2 + \frac{E[S(S-1)]H_2(t)}{\lambda \mu}. \quad (2.9)$$

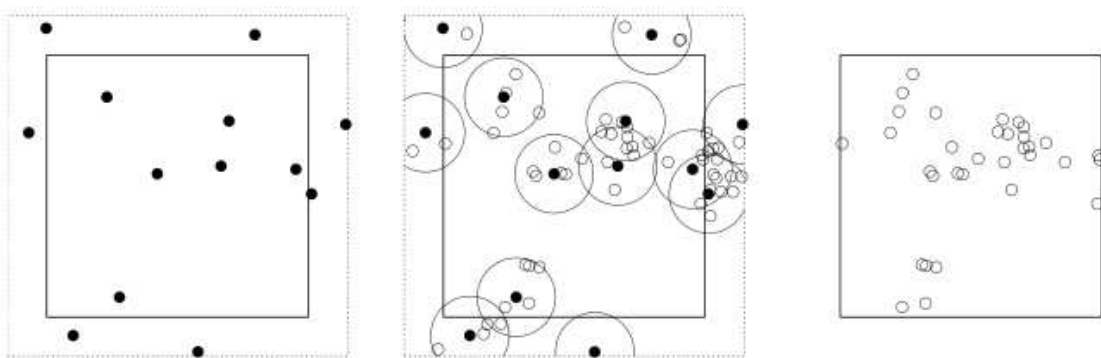
Assim, dividindo a equação 2.9 por  $\lambda = \kappa\mu$  obtém-se

$$K(t) = \pi t^2 + \frac{1}{\kappa} \frac{E[S(S-1)]H_2(t)}{\mu^2}.$$

As principais variantes de processos com agrupamento de Neyman e Scott são os processos de Matérn e Thomas. Em um processo de Poisson com agrupamentos de Matérn, o conjunto de pontos “filhos” são distribuídos uniformemente e de forma independente de cada ponto “pai” em um disco com raio  $R$ . Para exemplificar, imagine em uma floresta em que as árvores jovens de determinada espécie são alocadas em clusters em torno da planta “mãe”, resultante de um processo de dispersão. Cada cluster possui em média  $\mu$  árvores dispersas em um disco de raio  $R$ , de forma que o grupo de árvores é um processo de Poisson com intensidade  $\mu/\pi R^2$  dentro do disco e 0, caso contrário. É importante ressaltar que a dimensão espacial de cada agrupamento é regulada pelo raio  $R$ . A Figura 2.7, demonstra a formação de um processo de Poisson com agrupamentos de Matérn.

Para um processo de Poisson com agrupamento de Thomas, as localizações dos pontos “filhos” de um determinado cluster segue uma função de densidade de probabilidade gaussiana isotrópica  $N(0, \sigma^2 I)$  com desvio padrão  $\sigma$ . A ideia é semelhante à do alisamento de kernel. No entanto, no sentido da distribuição aleatória dos pontos “filhos” em relação ao ponto “pai”, que possui vetores de deslocamento com densidade gaussiana isotrópica. A ilustração da formação de um processo de Poisson com agrupamentos de Thomas pode ser observada na Figura 2.8. A escala  $\sigma$  determina o tamanho de cada agrupamento.

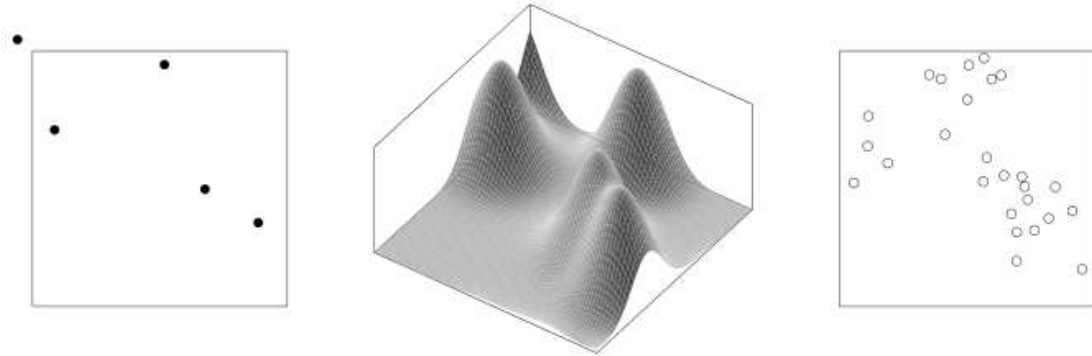
Figura 2.7 – Formação de um processo de Poisson com agrupamentos de Matérn. À esquerda: os pontos parentais são gerados de acordo com um processo homogêneo de Poisson com intensidade  $\kappa$ . Ao centro: para cada “pai”, um número aleatório de pontos “filhos” são gerados de acordo com uma distribuição de Poisson com média  $\mu$  e são alocados de forma independente e uniforme em um círculo de raio  $R$  em torno do “pai”. À direita: os pontos “filhos” constituem o processo de agrupamento de Matérn.



Fonte: Baddeley, Rubak e Turner (2015).

Para um processo de Poisson estacionário com agrupamentos de Matérn com parâmetros  $\theta = (\mu, \kappa, R)$  e se  $ES[S - 1] = \mu^2$ , a função  $K$  é dada por

Figura 2.8 – Formação de um processo de Poisson com agrupamentos de Thomas. À esquerda: pontos “pais”. Ao centro: densidade total da descendência (soma das densidades gaussianas centradas em cada ponto “pai”). À direita: os pontos “filhos” constituem o processo de agrupamento de Thomas.



Fonte: Baddeley, Rubak e Turner (2015).

$$K_{\psi}(t) = \pi t^2 + \frac{1}{\kappa} \begin{cases} 2 + \frac{1}{\pi}[(8z^2 - 4) \arccos z - 2 - 2 \arcsin z \\ + 4z\sqrt{(1 - z^2)^3} - 6z\sqrt{1 - z^2}], & t \leq 2R; \\ 1, & t > 2R, \end{cases}$$

em que  $\psi = (\kappa, R)$  e  $z = \frac{t}{2R}$ .

E a função  $K$  para um processo estacionário com agrupamentos de Thomas pode ser expressa por

$$K_{\psi}(t) = \pi t^2 + \frac{1}{\kappa} \left\{ 1 - \exp\left(-\frac{t^2}{4\sigma^2}\right) \right\},$$

em que  $\psi = (\kappa, \sigma)$ .

Definidos o primeiro e segundo momento (intensidade e função  $K$ ) para os processos de Poisson com agrupamentos, estes podem ser utilizados para estimar os parâmetros do modelo em relação ao padrão observado. Nesse contexto, procura-se o melhor ajuste entre os momentos dos dados observados e o modelo proposto. Um dos métodos mais populares para realizar esse procedimento é por meio do método do contraste mínimo (STOYAN; STOYAN, 1994; ILLIAN et al., 2008; BADDELEY; RUBAK; TURNER, 2015). A ideia é encontrar um vetor de parâmetros  $\psi$  que minimize o contraste entre  $K_{\psi}(t)$  e a função empírica  $\hat{K}(t)$ , que pode ser dado por

$$D_{\psi}(t) = \int_a^b (\hat{K}(t)^{\alpha} - K_{\psi}(t)^{\alpha})^2 dt,$$

em que  $0 \leq a < b < \infty$  e  $\alpha > 0$  são constantes de ajuste.

### 2.5.7 Validação do modelo

Após encontrar os parâmetros estimados com os dados é necessário verificar a qualidade do ajuste. Em processos de Poisson com agrupamentos, esse procedimento pode ser realizado por meio de testes formais ou gráficos baseados em simulações Monte Carlo. A hipótese nula para esses testes é  $H_0$ : *O modelo proposto se ajusta ao dados*. Os testes baseiam-se na comparação entre a função de resumo empírica estimada e a função de resumo do modelo ajustado para um determinado número de simulações.

É utilizado teste de envelope similar ao procedimento contra a hipótese de CAE mencionado no tópico 2.5.4. No entanto, aqui é simulado o modelo apropriado no lugar da CAE, de forma que o modelo estimado terá um bom ajuste se estiver dentro do envelope de simulação. Pode-se também utilizar os testes formais baseados nas estatísticas de Komogorov e Cramer-von Mises (ILLIAN et al., 2008; BADDELEY; RUBAK; TURNER, 2015).

## 2.6 Processos pontuais marcados bivariados

Diferentemente do processo pontual não marcado, em que são considerados todos os eventos sem classificá-los, em um processo pontual marcado bivariado são atribuídos informações aos eventos, denominadas marcas. Nesse cenário, o interesse está no mecanismo de interação entre os dois tipos de marcas em estudo. No processo pontual não marcado, as inferências são feitas sob a hipótese nula de completa aleatoriedade espacial. Entretanto, na análise marcada bivariada, o estudo é conduzido para entender a relação entre os dois processos estocásticos com intuito de verificar se existe atração ou repulsão entre os dois tipos de marcas.

### 2.6.1 Efeitos de primeira e segunda ordem

Os métodos de análise de um processo pontual marcado bivariado são análogos ao não marcados. Segundo Cressie (1993), esses processos também podem ser caracterizados por efeitos de primeira e segunda ordem.

A intensidade de primeira ordem é definida por

$$\lambda_i(s) = \lim_{|ds| \rightarrow 0} \left\{ \frac{E[N_i(ds)]}{ds} \right\}, \text{ para } i = 1, 2,$$

em que  $ds$  define uma pequena região em torno da localização  $s$ ,  $|ds|$  é a sua área e  $N(ds)$  é o número de eventos localizados dentro de  $ds$ .

O efeito de segunda ordem (cruzada) é definido por

$$\lambda_{12}(s_i, s_j) = \lim_{|ds_i|, |ds_j| \rightarrow 0} \left( \frac{E[N_1(ds_i)N_2(ds_j)]}{|ds_i||ds_j|} \right),$$

em que  $N_1(ds_i)$  e  $N_2(ds_j)$  representam o número de eventos dentro de pequenos círculos centrados nas localizações  $s_i$  e  $s_j$  com áreas iguais a  $|ds_i|$  e  $|ds_j|$ , respectivamente.

### 2.6.2 Hipóteses nulas de independência e rotulagem aleatória

Em contraste ao caso não marcado, que define a hipótese nula ( $H_0$ ) como Completa Aleatoriedade Espacial, no caso marcado bivariado a definição de  $H_0$  se torna mais difícil, pois se trata de dois tipos de eventos. Além disso, também depende do contexto do estudo. Para a hipótese nula espera-se a ausência de interação entre os dois tipos de eventos. Há duas maneiras para construção do modelo sob a hipótese nula: independência e a rotulagem aleatória.

No modelo de independência considera-se que os tipos e a localização dos eventos são estabelecidos simultaneamente e a hipótese nula a ser assumida é que os dois padrões foram gerados por dois processos estocásticos pontuais independentes. Para exemplificar, suponha que em uma pesquisa deseja-se saber a relação de duas espécies de plantas. Nesse caso, os tipos (espécies) e a localização dos eventos foram determinados simultaneamente.

No modelo de rotulagem aleatória sugere que os locais dos eventos são provenientes de um processo univariado de Completa Aleatoriedade Espacial e um segundo mecanismo determina os tipos de eventos (SCHABENBERGER; GOTWAY, 2005; WIEGAND; MOLONEY, 2014). Para ficar mais claro, imagine que foram coletadas as localizações de árvores em uma floresta e determinado se as árvores estão afetadas ou não por uma praga (tipo de evento).

As hipóteses de independência e rotulagem aleatória são equivalentes se os dois tipos de eventos são processos homogêneos de Poisson.

## 2.7 Análises de processos pontuais marcados bivariados

### 2.7.1 Estimador de intensidade

Em processos pontuais marcados bivariados, para um processo estacionário e não estacionário é necessário estimar a intensidade para cada tipo de evento. Para um processo estacionário, a intensidade do evento tipo 1 pode ser estimada por  $\hat{\lambda}_1 = n_1/|A|$  e para o evento 2 por  $\hat{\lambda}_2 = n_2/|A|$ . A estimação da intensidade local é realizada pelo método não-paramétrico análogo ao processo não marcado definido na seção 2.5.1.

### 2.7.2 Função $J$ bivariada

A função  $J$  foi estendida para um processo pontual marcado bivariado por Van Lieshout e Baddeley (1999) e pode ser estimada por

$$\hat{J}_{12}(r) = \frac{1 - \hat{G}_{12}(r)}{1 - \hat{F}_2(r)},$$

para todo  $r \geq 0$  e  $\hat{F}_2(r) < 1$ .  $\hat{G}_{12}(r)$  é a função do vizinho mais próximo que descreve a distribuição de distâncias dos pontos do tipo 2 aos pontos do tipo 1 e  $F_2(r)$  é a função do espaço vazio do processo 2 de pontos a uma distância  $r$ .

De acordo com Van Lieshout e Baddeley (1999), a função do espaço vazio bivariada pode ser estimada por

$$\hat{F}_2(r) = \frac{\sum_j I\{d(z_j, A^c) \geq r\} I\{d(z_j, s_2) \leq r\}}{\sum_j I\{d(z_j, A^c) \geq r\}},$$

em que  $z_j$  é um evento arbitrário,  $A$  é a área onde o processo é definido,  $s_2$  é conjunto de eventos do tipo 2,  $I\{d(z_j, A^c) \geq r\} = 1$  se  $d(z_j, A^c) \geq r$  e 0, caso contrário,  $I\{d(z_j, s_2) \leq r\} = 1$  se  $d(z_j, s_2) \leq r$  e 0, caso contrário.

A função do vizinho mais próximo bivariada pode ser estimada pela seguinte expressão

$$\hat{G}_{12}(r) = \frac{\sum_i I\{d(s_{1i}, A^c) \geq r\} I\{d(s_{1i}, s_2) \leq r\}}{\sum_i I\{d(s_{1i}, A^c) \geq r\}},$$

em que  $s_{1i}$  é o  $i$ -ésimo evento do tipo 1,  $A$  é a área onde o processo é definido,  $s_2$  é conjunto de eventos do tipo 2,  $I\{d(s_{1i}, A^c) \geq r\} = 1$  se  $d(s_{1i}, A^c) \geq r$  e 0, caso contrário,  $I\{d(s_{1i}, s_2) \leq r\} = 1$  se  $d(s_{1i}, s_2) \leq r$  e 0, caso contrário.

### 2.7.3 Função $K$ bivariada

Uma maneira de descrever os efeitos de segunda ordem para estabelecer o nível de dependência entre dois tipos de eventos para várias distâncias em uma configuração é utilizar a função  $K$  marcada bivariada. Essa função é uma extensão da função  $K$  não marcada. Formalmente, a função  $K$  bivariada pode ser definida como

$$K_{12}(t) = \lambda_2^{-1} E[N(t)],$$

em que  $N(t)$  é o número de eventos do tipo 2 encontrados dentro de uma distância  $t$  de um ponto arbitrário do evento tipo 1 e  $\lambda_2$  é a intensidade de primeira ordem do evento tipo 2.

Segundo Diggle (2013), para estimar a função  $K$  cruzada, utiliza-se o mesmo conceito aplicado na estimação da forma não marcada, entretanto computa-se as distâncias entre pares de eventos de dois tipos. Primeiramente, são definidos dois estimadores para a função  $K$  bivariada que são dados por

$$(i) \quad \tilde{K}_{12}(t) = \hat{\lambda}_2^{-1} n_1^{-1} \sum_{i=1}^{n_1} \sum_{j=1}^{n_2} w_{ij} I(t_{ij} \leq t),$$

$$(ii) \quad \tilde{K}_{21}(t) = \hat{\lambda}_1^{-1} n_2^{-1} \sum_{i=1}^{n_1} \sum_{j=1}^{n_2} w_{ij} I(t_{ij} \leq t),$$

em que  $t_{ij} = \|s_{1i} - s_{2j}\|$ , ou seja, é a distância entre o  $i$ -ésimo evento do tipo 1 e o  $j$ -ésimo evento do tipo 2,  $w_{ij}$  é a correção de bordadura e  $n_1$  e  $n_2$  são os números de eventos do tipo 1 e tipo 2, respectivamente.

Em segundo lugar, combina-se os dois estimadores como uma média ponderada, como segue

$$\begin{aligned} \hat{K}_{12}(t) &= (n_1 n_2)^{-1} |A| \left\{ n_1 \sum_{i=1}^{n_1} \sum_{j=1}^{n_2} w_{ij} I(d_{ij} \leq t) \right. \\ &\quad \left. + n_2 \sum_{i=1}^{n_1} \sum_{j=1}^{n_2} w_{ij} I(d_{ij} \leq t) \right\} / (n_1 + n_2) \\ &= (n_1 n_2)^{-1} |A| \sum_{i=1}^{n_1} \sum_{j=1}^{n_2} w_{ij}^* I(d_{ij} \leq t), \end{aligned}$$

em que  $w_{ij}^* = \frac{n_1 w_{ij} + n_2 w_{ji}}{n_1 + n_2}$  é a correção de bordadura, no sentido que, a proporção da circunferência do círculo com centro do  $i$ -ésimo evento do tipo 1 e raio  $t_{ij}$  que fica dentro de  $|A|$ .



#### 2.7.4 Análise contra as hipóteses de independência e rotulagem aleatória

A construção do teste sob a hipótese de independência é condicionada à estrutura marginal de cada tipo de evento. A ideia é quebrar a configuração de dependência que existe entre os dois tipos de eventos. Uma forma de realizar esse procedimento é considerar um modelo nulo toroidal, que consiste em pegar a área de estudo, usualmente retangular, e tratá-la como um toro, ou seja, as bordas inferior e superior são unidas assim como bordas da direita e esquerda, com a forma resultante semelhante a de um pneu. O evento tipo 1 é fixado por completo, feito isso é gerado um novo processo para o evento tipo 2, o qual é traduzido aleatoriamente no toro. O processo para o evento tipo 2, preserva a estrutura marginal do processo observado, sendo estacionário e independente do evento tipo 1. No entanto, segundo Wiegand e Moloney (2014), um problema nesse método, é uma possível desestruturação de agrupamentos, quando estão próximos a borda, o que pode influenciar na geração do novo processo. Segundo Goreaud e Peliésser (2003), uma outra forma de realizar um teste de hipótese de independência é definir os processos de cada ponto para modelar a estrutura específica de cada população e usá-las nas simulações Monte Carlo. Por exemplo, quando dois padrões estão próximos de CAE é possível usar dois processos independentes de Poisson.

Sob a hipótese de independência,  $K_{12}(t) = \pi t^2$ . Se  $\hat{K}_{12}(t) > \pi t^2$  há evidências que um grande número de eventos do tipo 2 encontram-se dentro da distância  $t$  dos eventos do tipo 1, indicando que há atração entre os dois tipos de eventos a uma distância  $t$ . De modo análogo, se  $\hat{K}_{12}(t) < \pi t^2$  há evidências que a uma distância  $t$  existe repulsão entre os dois tipos de eventos.

No método da rotulagem aleatória, segundo Dixon (2002), o interesse está no mecanismo que gerou os rótulos (marcas) aos eventos de forma que os locais observados são condicionados aos eventos da configuração aleatória. Sob a hipótese de rotulagem aleatória,

$$K_{11}(t) = K_{22}(t) = K_{12}(t) = K_{21}(t) = K(t), \quad (2.10)$$

em que as funções bivariadas de  $K$  são equivalentes à função  $K$ , ou seja, os rótulos são desconsiderados, pois cada tipo de evento é um corte aleatório de todos os eventos.

De acordo com as relações em (2.10), Diggle e Chetwynd (1991) propuseram um teste baseado nas estimativas das funções  $K$  definido por

$$\hat{D}(t) = \hat{K}_{ii}(t) - \hat{K}_{jj}(t).$$

Então, sob  $H_0$ , o valor esperado de  $\hat{D}(t)$  é zero para qualquer distância  $t$ . Para valores positivos de  $D(t)$ , há evidências de agrupamento espacial de eventos tipo  $i$  além, da agregação dos eventos tipo  $j$ . Para a simulação Monte Carlo, condiciona-se todas as posições  $n_1 + n_2$  correspondentes aos padrões 1 e 2. A partir dessas posições, uma amostra  $n_1$  é simulada várias vezes de modo que são atribuídos rótulos aleatórios a essas localizações. Sob a hipótese de rotulagem aleatória, as  $n_1$  localizações amostradas representam um "corte aleatório" do conjunto de todas as localizações (SCHABENBERGER; GOTWAY, 2005; WIEGAND, MOLONEY, 2014).

Todos os procedimentos apresentados para a função  $K$ , na análise contra as hipóteses nula de independência ou rotulagem aleatória podem ser aplicados, de forma análoga, para funções  $L$  e  $J$ .

## 2.8 Aplicação de processos pontuais em estudos florestais

A abordagem de processos pontuais tem aparecido com alguma frequência na literatura em estudos florestais para detectar padrões espaciais e interações entre espécies de árvores.

Akhavan et al. (2012) utilizaram a função  $K$  de Ripley para analisar os padrões espaciais e interações para três estágios de desenvolvimento (inicial, ótimo e decadência), classificados de acordo com o diâmetro a altura do peito (madeiras pequenas, médias, grandes e extra-grandes), de uma floresta temperada nativa de Faia antiga na região do Mar Cáspio no Irã. Os resultados mostraram que para todos os estágios de desenvolvimento, o padrão observado é agregado. Além disso, por meio da função  $K$  bivariada foi possível verificar que os graus de associação diferiram entre os três estágios de desenvolvimento. Os padrões espaciais obtidos são consistentes com o paradigma da dinâmica da lacuna associados de regeneração, liberação e concorrência.

Nguyen, Uria-Diez e Wiegand (2016) utilizaram métodos de processos pontuais para detectar distribuições espaciais e padrões de associação em uma floresta tropical do Vietnã. Por meio dos resultados obtidos, há evidências que a limitação da dispersão pode regular os padrões espaciais das espécies arbóreas.

Rockwell et al. (2017) concentraram-se na configuração espacial das populações de castanha do Brasil em três florestas seletivamente registradas na Amazônia peruana. Com emprego da função  $K$  bivariada, eles concluíram que não há evidências de atração tanto para as castanhas jovens e corte de tocos, quanto para as jovens e adultas. Além disso, para as castanhas

do Brasil jovens e adultas, notaram-se significativos picos de agregação para grandes escalas, sugerindo a formação de espaços que influenciam na dinâmica da floresta.

Para verificar como a identidade das espécies arbóreas, o microhabitat e a disponibilidade de água afetam interações intra e intraespecíficas entre plantas lenhosas juvenis e adultas em florestas do Mediterrâneo continental na Espanha, Granda et al. (2012) utilizaram métodos do vizinho mais próximo e a função *J*. Encontraram um padrão espacial complexo que variou de acordo com as espécies e microhabitat.

### 3 MATERIAL E MÉTODOS

#### 3.1 Dados

O local de coleta de dados foi na Fazenda Canary, localizada no município de Bujari, Acre. A vegetação existente é constituída de floresta aberta com bambu e palmeira, bem como espécies comerciais e potenciais para a produção de madeira (ACRE, 2006). O clima é do tipo Ami (sistema Köppen), o qual apresenta anualmente, elevado índice pluviométrico, com breve período seco em que se pode obter índice pluviométrico inferior a 60 mm em pelo menos um mês do ano. A temperatura média anual é em torno de 24,5 °C, sendo que os valores máximos e mínimos médios são 32 °C e 18 °C, respectivamente. A umidade relativa do ar apresenta médias anuais entre 80% e 90% (MESQUITA, 1996).

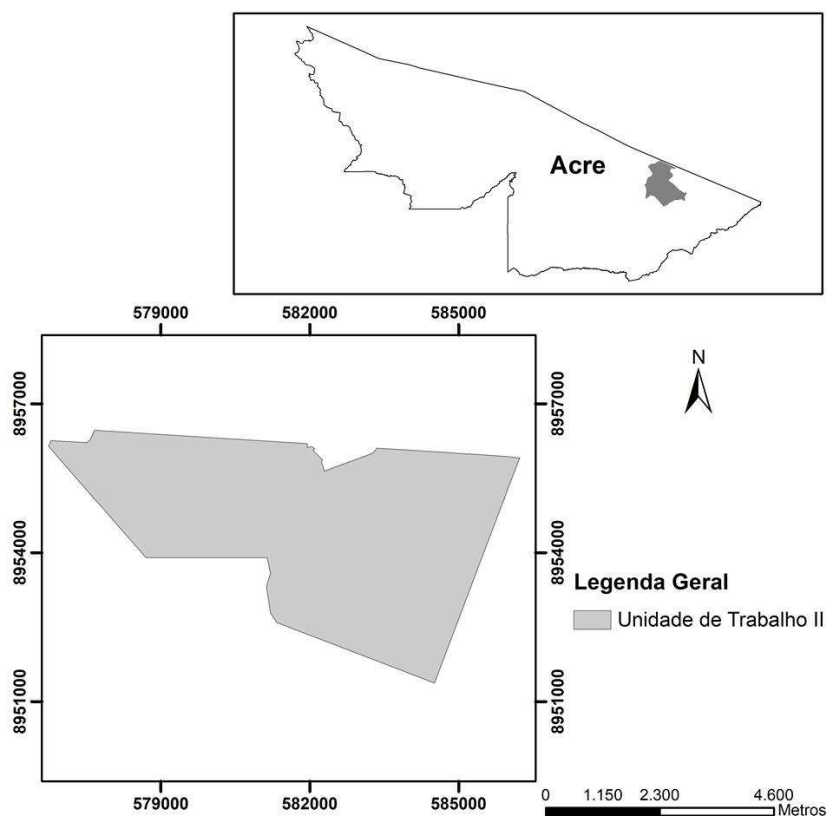
A propriedade consta com uma área total de 15.810,1408 ha, sendo a reserva legal de 8.446,8 ha e uma área efetiva de manejo florestal de 4.465,898 ha. Entretanto, no presente estudo foi utilizada uma área parcial de 2.601,97 ha. A área é composta por duas unidades de trabalho, mas foi analisado apenas a unidade de trabalho II (Figura 3.1).

O inventário florestal procedeu por meio do georreferenciamento das árvores em coordenadas UTM por meio de um aparelho GPS, onde foram mensuradas as 56 espécies de árvores comerciais a partir de um diâmetro mínimo de corte ( $DMC \geq 30$  cm), sendo marcadas com placas de alumínio contendo suas devidas numerações. Nas árvores foram mensuradas o diâmetro a 1,30 m do solo (DAP), altura comercial da árvore, identificação botânica e a determinação da qualidade do fuste. As árvores selecionadas para exploração foram estabelecidas conforme o plano de manejo florestal e a Instrução Normativa, resolução conjunta CEMACT/CFE número 003 de 12 de agosto de 2008. Posteriormente, as informações geradas foram convertidas em um banco de dados espaciais.

#### 3.2 Espécies

Neste estudo, para as análises espaciais foram utilizadas as espécies: cumaru-ferro (*Dipteryx odorata*), garapeira (*Apuleia leiocarpa*) e sumaúma (*Ceiba samauma*), as quais foram as três espécies mais exploradas legalmente no Acre no período de 2005 a agosto de 2012 (SILVA et al., 2015).

Figura 3.1 – Fazenda Canary situada no município de Bujari, Acre.



Fonte: Do autor (2018).

### 3.2.1 Cumaru-ferro

*Dipteryx odorata* (Aublet.) Willd é conhecida pelos nomes vulgares cumaru, cumaru-ferro, cumbari, cambaru-ferro, muirapagé, dentre outros mais. Faz parte da família Fabaceae pode ser encontrada encontrada em toda a região Amazônica tanto do Brasil quanto da Colômbia, do Peru, da Guiana, da Guiana Francesa, da Venezuela, da Bolívia como também encontrada em alguns países da América Central.

As árvores da espécie podem chegar a medir 40 m de altura e 1,5 m de diâmetro à altura do peito. O tronco é reto e cilíndrico e, apresenta algumas protuberâncias e sapopemas até 1 m de altura (CARVALHO, 2008). A casca é castanha-amarelada-clara com aspecto áspero e as folhas são compostas com variações de comprimento entre 15 a 20 cm. Os frutos são lenhosos e possuem formato oval.

A espessura da madeira do cumaru-ferro é entre densa a muito densa ( $0,95 \text{ g.cm}^{-3}$  a  $1,19 \text{ g.cm}^{-3}$ ) altamente resistente aos fungos e cupins. Pode ser empregada na construção civil-pontes, mourões, estacas, postes, vigas, ripas, batentes e forros; em assoalhos-tacos, tábuas,

parquetes e degraus de escadas; no mobiliário em partes decorativas de móveis de alta qualidade; qualidade -; como também em outros materiais e ferramentas - cabos de ferramentas, em peças de transporte e de embarcações. Além disso, as sementes são comestíveis e é extraído um óleo usado para produzir perfumes e cosméticos (CARVALHO, 2008). Uma árvore da espécie cumaru-ferro é mostrada na Figura 3.2.

Figura 3.2 – Cumaru-ferro (*Dipteryx odorata*).



Fonte: CARVALHO (2008).

### 3.2.2 Garapeira

*Apuleia leiocarpa* (J. Vogel) J. F. Macbr é popularmente conhecida como garapa, garapeira, amarelinho, barajuba, jataí-amarelo, dentre outros mais. Pertence a família Leguminosae-Caesalpiniaceae e ocorre da Amazônia até o Rio Grande do Sul. A Figura 3.3 apresenta uma árvore da espécie garapeira.

Essa espécie arbórea pode atingir até 40 m de altura e 1 m diâmetro à altura do peito. Constitui um tronco irregular e cilíndrico, com inclinações em locais mais ou menos abertos. A casca varia de bege-amarelado a castanho-amarelado, as folhas são compostas e com variações entre 8 a 15 cm e o seu fruto é na forma uma vagem elíptica (SALMAN et al., 2008).

A madeira é de densidade moderada ( $0,83 \text{ g.cm}^{-3}$ ), com resistência moderada aos fungos. Tem alta resistência ao cupim-de-madeira-seca. O uso da sua madeira é análoga ao do cumaru-ferro.

Figura 3.3 – Garapeira (*Apuleia leiocarpa*).

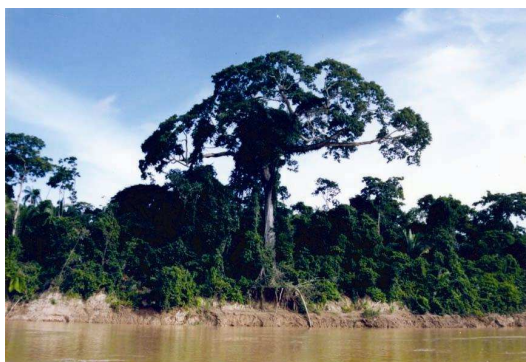
Fonte: <http://www.arvores.brasil.nom.br/new/garapa/index.htm>.

### 3.2.3 Sumaúma

*Ceiba pentandra* é comumente chamada como sumaúma ou samaúma. Pertence a família Bombacaceae e ocorre em toda a bacia Amazônica, em florestas inundadas ou pantanosas da várzea e na terra firme, nas regiões de solo argilosos e férteis, que por sua vez, apresenta menor porte (SANTOS, 2002).

A sumaúma é considerada uma espécie de grande dimensão com o poder de atingir até 50 m de altura e 3 m de diâmetro à altura do peito. Configura crescimento rápido, mas que necessita de elevada exposição à luz. O tronco é reto e cilíndrico em até cerca de 2/3 da sua altura há ausência de ramificações. Esta espécie possui casca cor verde-acinzentada e as plantas jovens são envolvidas por espinhos pontiagudos, mas na fase adulta transformam-se em cônicos (SOUZA et al., 2005). O fruto é uma cápsula na forma de obovóide ou elipsoidal com diversas sementes (SOUSA et al., 2000).

A madeira da sumaúma é considerada leve e macia com densidade  $0,29 \text{ g.cm}^{-3}$ , é utilizada na construção de caixas, brinquedos, barris de pouca duração, embarcações, pasta para celulose, painéis compensados, jangadas, palitos e indústria de fósforo. A “kapok”, uma pluma de revestimento das sementes, é largamente utilizada na confecção de bóia e salva-vidas, no enchimento de colchões e travesseiros e, também, como isolante térmico. A semente gera um óleo comestível, também empregado na iluminação, na lubrificação, na fabricação de sabão e no combate à ferrugem (SOUSA et al., 2000; SANTOS, 2002; SOUZA et al., 2005). Uma árvore da espécie sumaúma é mostrada na Figura 3.4.

Figura 3.4 – Sumaúma (*Ceiba pentandra*).

Fonte: [http://www.agencia.cnptia.embrapa.br/gestor/especies\\_arboreas\\_brasileiras/arvore/CONT000fu1ekyj602wyiv807nyi6snbh69cs.html](http://www.agencia.cnptia.embrapa.br/gestor/especies_arboreas_brasileiras/arvore/CONT000fu1ekyj602wyiv807nyi6snbh69cs.html).

### 3.3 Análise estatística

Para uma análise exploratória inicial foram computados o número de indivíduos para cada espécie de árvore. Além disso, para a marca diâmetro à altura do peito, foram calculadas a média, o desvio-padrão, os valores máximo e mínimo e construído o histograma.

Com o intuito de analisar os efeitos de primeira ordem de cada espécie na área estudada, foi usada a função de alisamento de kernel, com função densidade de probabilidade gaussiana, em que o valor adequado do raio de influência  $h$  foi encontrado por meio do erro quadrático médio, obtido por validação cruzada.

As funções  $L$  (função  $K$  transformada) e  $J$  não marcadas univariadas foram empregadas para investigar o padrão espacial de cada espécie. Para testar se os desvios são significativos em relação à CAE, foram realizadas 999 simulações Monte Carlo para a obtenção de envelopes de confiança.

Para verificar a interação espacial das combinações, duas a duas, das espécies foram utilizadas as funções  $L$  e  $J$  marcadas bivariadas. A hipótese escolhida para testar a ausência de interação entre duas espécies é a hipótese de independência conforme descrito na seções 2.6.2 e 2.7.4. Foram realizadas 999 simulações de um modelo toroidal.

Como o formato da área desse estudo é um polígono irregular, a distância máxima utilizada pela função  $K$  foi obtida por intermédio pela aproximação de  $1/4$  do menor lado de um retângulo que envolve o polígono. A distância máxima para a função  $J$  foi calculada com base no histograma das distâncias de cada ponto para o vizinho mais próximo do processo, em que foi considerado o maior valor entre as classes do histograma. Assim, a função  $L$  foi avaliada



para uma distância máxima de 1200 m, enquanto a função  $J$  foi avaliada para uma distância máxima de 150 m.

Após a análise univariada, foram ajustados modelos de Poisson para agrupamentos de Matérn e Thomas, por intermédio do emprego, da utilização da função  $K$  para estimar os parâmetros e envelopes da função  $J$ , para testar a adequação dos ajustes com 999 simulações.

As análises serão realizadas por meio do *software* R (2017), versão 3.4.1, com o uso do pacote *spatstat* (BADDELEY; TURNER, 2005).

## 4 RESULTADOS E DISCUSSÃO

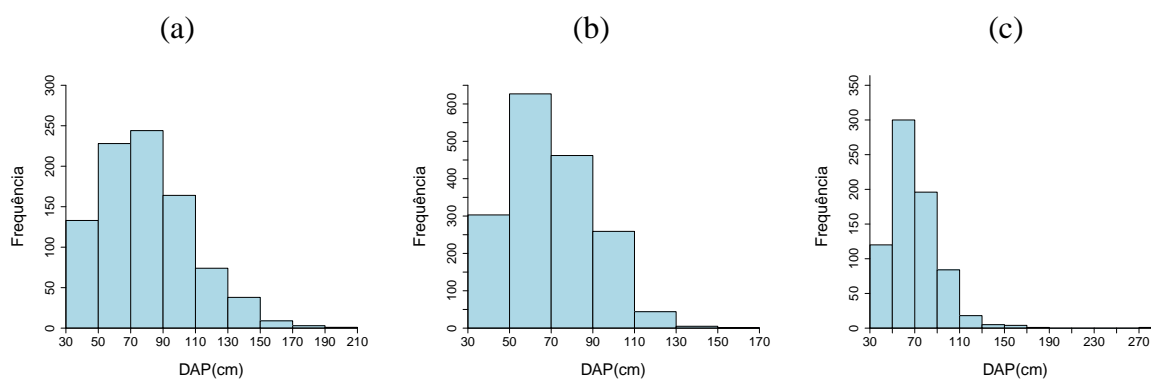
As estatísticas descritivas para o diâmetro a altura do peito (DAP), por espécie, são mostradas na Tabela 4.1. Das três espécies estudadas, a média da espécie cumaru-ferro foi superior, assim como a variabilidade. Já a sumaúma obteve o maior DAP máximo e a garapeira apresentou uma frequência de árvores superior.

Tabela 4.1 – Estatísticas descritivas do diâmetro (cm) à altura do peito por espécie.

Espécie	n	Média	Desvio padrão	Máx	Mín
Cumaru-ferro ( <i>Dipteryx odorata</i> )	894	79,53	27,64	198	30,2
Garapeira ( <i>Apuleia leiocarpa</i> )	1701	69,96	20,7	152,8	30,6
Sumaúma ( <i>Ceiba samauma</i> )	729	70,33	22,72	281,7	30,6

Na Figura 4.1 são apresentados os histogramas do DAP (cm) para as espécies cumaru-ferro, garapeira e sumaúma. Quando a distribuição diamétrica tem a forma de uma exponencial negativa, indica regeneração natural contínua das espécies. No entanto, observa-se que a distribuição do diâmetro é unimodal para as três espécies, o que pode indicar regeneração natural em ciclos (SILVA et al., 2012).

Figura 4.1 – Histogramas de frequências do diâmetro (cm) à altura do peito para as espécies: (a) cumaru-ferro, (b) garapeira e (c) sumaúma.

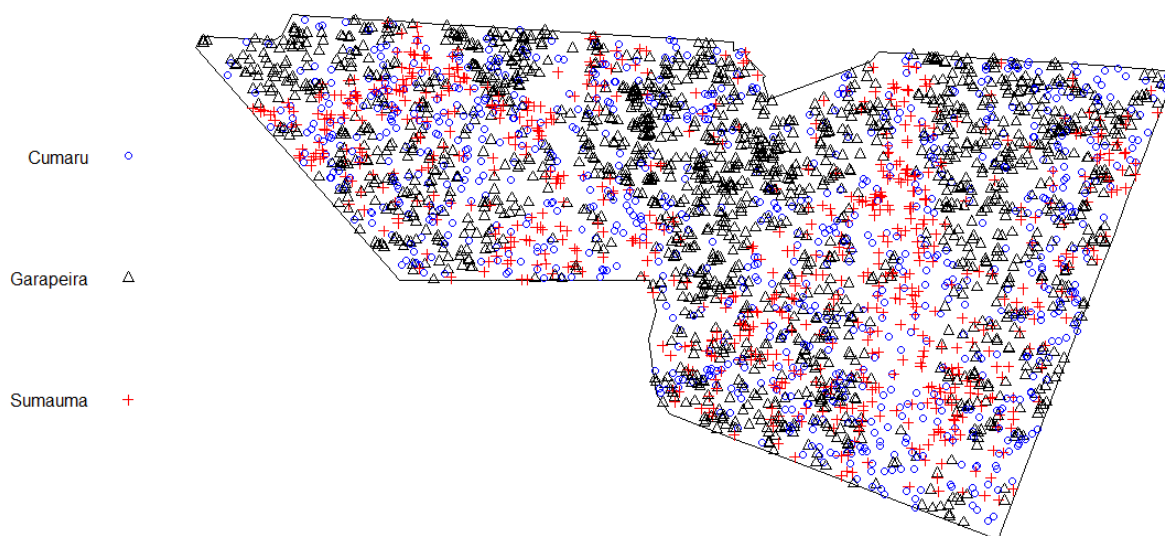


Fonte: Do autor (2018).

A Figura 4.2 apresenta a distribuição espacial das árvores das espécies cumaru-ferro, garapeira e sumaúma na área de estudo. Pode-se observar que a inspeção visual da Figura 4.2 não possibilita retirar qualquer informação quanto ao padrão da distribuição espacial das árvores, por espécie, e nem quanto à interação entre as espécies. Assim, o uso dos métodos de processos pontuais mostrou-se de fundamental importância para atingir esses objetivos.

Inicialmente, foi realizada uma análise exploratória sobre os efeitos de primeira ordem por meio do alisamento de kernel. Observa-se na Figura 4.3 que, aparentemente, as árvores

Figura 4.2 – Distribuição espacial das árvores das espécies cumaru-ferro, garapeira e sumaúma na fazenda Canary.



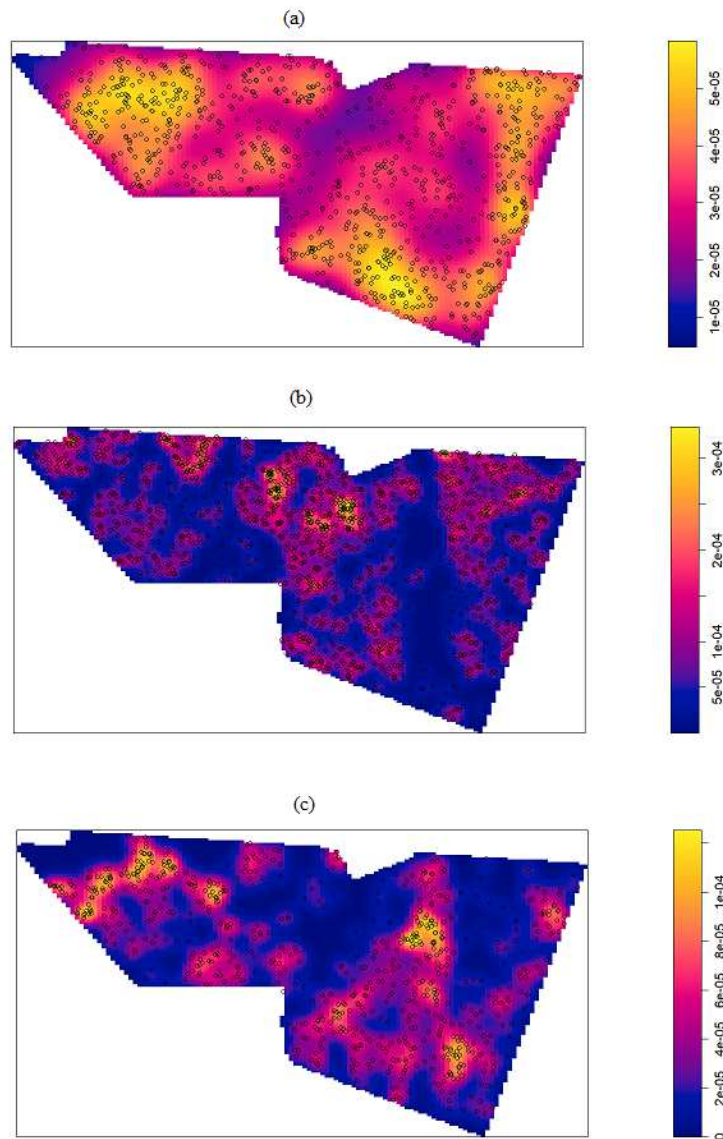
Fonte: Do autor (2018).

da espécie cumaru-ferro estão distribuídas de forma aleatória, enquanto as espécies garapeira e sumaúma apresentam áreas com cores que poderiam ser classificadas como sendo de baixas e altas intensidades de árvores. Entretanto, as legendas mostram que a diferença entre as maiores e menores intensidades são muito pequenas. Nesse sentido, toda a análise a seguir será realizada considerando que o processo estocástico é homogêneo, ou seja, estaremos considerando que não existem fatores (rios, relevo, altitude, etc.) que poderiam estar acarretando possíveis agrupamentos de árvores. A presença de agrupamentos e/ou regularidade na distribuição das árvores será devido, exclusivamente, a interação existente entre as árvores.

Como o processo desse estudo é homogêneo, na Tabela 4.2 são apresentadas as intensidades globais para as espécies cumaru-ferro, garapeira e sumaúma. A garapeira tem a maior concentração de árvores por hectare, resultante de um número superior de árvores na área de estudo.

A configuração espacial para as três espécies estudadas foi investigada por meio das funções  $L$  e  $J$  homogêneas não marcadas conforme podem ser vistas na Figura 4.4. Observa-se que pela função  $L$  todas as espécies apresentaram interação para agrupamentos. As espécies garapeira e sumaúma (Figuras 4.4 (b) e (c)) apresentam tendência para agrupamentos para todas as escalas, enquanto para a espécie cumaru-ferro a hipótese de Completamente Aleatoriedade Espacial foi rejeitada na escala entre 200 m a 900 m, indicando agrupamento nesta escala (Figura 4.4 (a)).

Figura 4.3 – Distribuição espacial das estimativas de intensidades por meio do alisamento de kernel para: (a) cumaru-ferro, (b) garapeira e (c) sumaúma.



Fonte: Do autor (2018).

Tabela 4.2 – Intensidade global para as espécies cumaru-ferro, garapeira e sumaúma.

Espécie	Intensidade
Cumaru-ferro	0,3435852 árvores/ha
Garapeira	0,6537343 árvores/ha
Sumaúma	0,2801719 árvores/ha

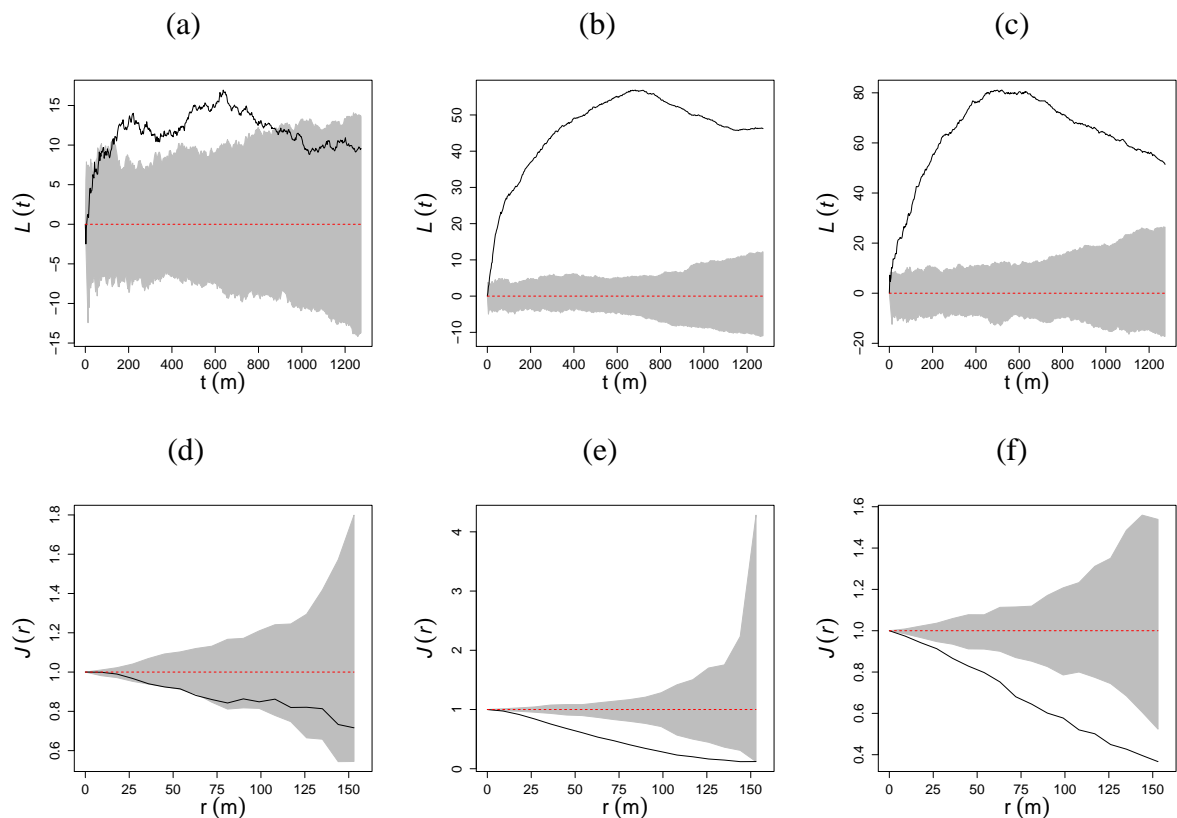
A função  $J$  levou a rejeição da hipótese de CAE em direção para uma configuração com agrupamentos para as espécies garapeira e sumaúma (Figuras 4.4 (e) e (f)). As árvores da espécie garapeira apresentam-se agrupadas na escala entre 10 m a 150 m, enquanto as árvores da espécie sumaúma indicam agrupamento em todas as escalas. A função  $J$  não apresenta

evidências estatísticas para rejeitar a hipótese da CAE para a distribuição espacial das árvores da espécie cumaru-ferro (Figura 4.4 (d)).

Em geral, a distribuição espacial das espécies arbóreas estudadas neste trabalho pelas funções  $L$  e  $J$  é agregada. Segundo Hubbell (1979) e Condit et al. (2000), configurações agregadas de árvores coespecíficas são mais frequentes em florestas tropicais. Essa dinâmica pode ser resultante de alguns fatores como as condições topográficas, a limitação da dispersão de sementes e as relações inter e intraespecíficas (BROWN et al. 2013, WANDRAG et al. 2017).

Segundo Nascimento, Carvalho e Leão (2002), analisar a dependência espacial de uma espécie possibilita a compreensão dos seus mecanismos ecológicos, que podem fornecer subsídios para o manejo e a preservação.

Figura 4.4 – Envelopes de simulações Monte Carlo das funções univariadas  $L$  e  $J$  para: (a) cumaru-ferro (b) garapeira (c) sumaúma (d) cumaru-ferro (e) garapeira e (f) sumaúma. As linhas cinzas contínuas indicam limites inferior e superior, a linha preta contínua indica a função estimada e a linha vermelha tracejada indica a função teórica.



Fonte: Do autor (2018).

A mensuração da dependência espacial entre as espécies foi realizada por meio das funções  $L$  e  $J$  homogêneas marcadas bivariadas e os resultados das combinações, duas a duas, para

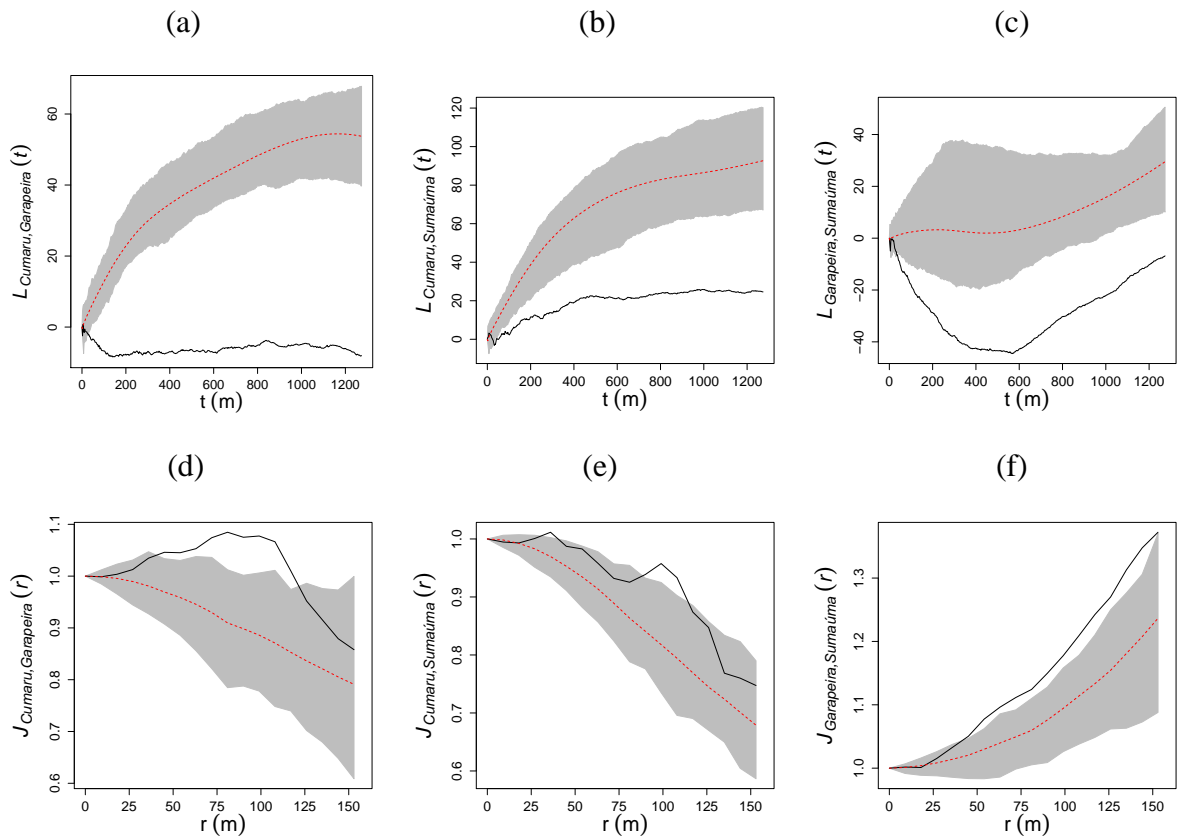
as três espécies são mostradas na Figura 4.5. As funções  $L$  e  $J$  indicam que a hipótese de independência entre as espécies deve ser rejeitada, mostrando que as espécies apresentam uma tendência para a repulsão. Enquanto a função  $L$  mostra que a hipótese nula de independência entre as espécies analisadas deve ser rejeitada para todas distâncias avaliadas, a função  $J$  mostra diferentes distâncias de rejeição da hipótese nula. Para a interação das espécies cumaru-ferro e garapeira, a rejeição da hipótese nula ocorre na escala entre 50 m e 125 m. Já a interação garapeira e sumaúma apresentou repulsão em uma escala mais ampla, acima de 50 m. A interação entre cumaru-ferro e sumaúma apresentou repulsão em torno de 100 m.

Espécies que possuem características ecológicas similares podem gerar um padrão de repulsão devido à limitação de recursos (WEBB et al., 2002; RODE et al., 2010). Isto pode estar associado à competição interespecífica por recursos abaixo e acima do solo, como luz, água e nutrientes do solo. No entanto, basear-se somente na dependência espacial para explicar tal comportamento é arriscado, pois a interação entre espécies arbóreas é complexa e pode estar relacionada a vários fatores. Portanto, não necessariamente há a influência de uma espécie em relação a outra caso haja dependência espacial entre elas (CAPRETZ, 2004).

Os resultados demonstram que a função  $J$  é mais adequada para descrever as propriedades de segunda ordem em escalas menores da configuração espacial, enquanto a função  $L$  é mais apropriada para as escalas maiores. Esses resultados corroboram os estudos descritos por Baddeley, Rubak e Turner (2015) e Van Lieshout e Baddeley (1996). Isto acontece porque a função  $J$  considera apenas as árvores vizinhas mais próximas uma das outras e mais próximas de uma localização arbitrária, enquanto a função  $L$  considera todas as árvores dentro de um círculo com um raio qualquer a partir de uma árvore arbitrária. De um modo geral, a função  $L$  tem um melhor desempenho, pois permite encontrar padrões espaciais em diferentes níveis de escala. Porém, a função  $J$  é uma boa alternativa quando deseja-se analisar padrões em escalas menores.

Os resultados das análises univariadas das espécies arbóreas por intermédio das funções  $L$  e  $J$  mostraram que as árvores das espécies garapeira e sumaúma apresentam agrupamentos na floresta. Dessa forma, pode-se pensar em um modelo estocástico que possa descrever as características desses agrupamentos nas duas espécies. Nesse sentido, ajustou-se os modelos de Poisson para agrupamentos de Matérn e Thomas para descrever a intensidade, a escala e o tamanho médio dos agrupamentos de árvores dessas duas espécies.

Figura 4.5 – Envelopes de simulações Monte Carlo das funções bivariadas  $L$  e  $J$  para: (a) cumaru-ferro e garapeira (b) cumaru-ferro e sumaúma (c) garapeira e sumaúma (d) cumaru-ferro e garapeira (e) cumaru-ferro e sumaúma (f) garapeira e sumaúma. As linhas cinzas contínuas indicam limites inferior e superior, a linha preta contínua indica a função estimada e a linha vermelha tracejada indica a função teórica.



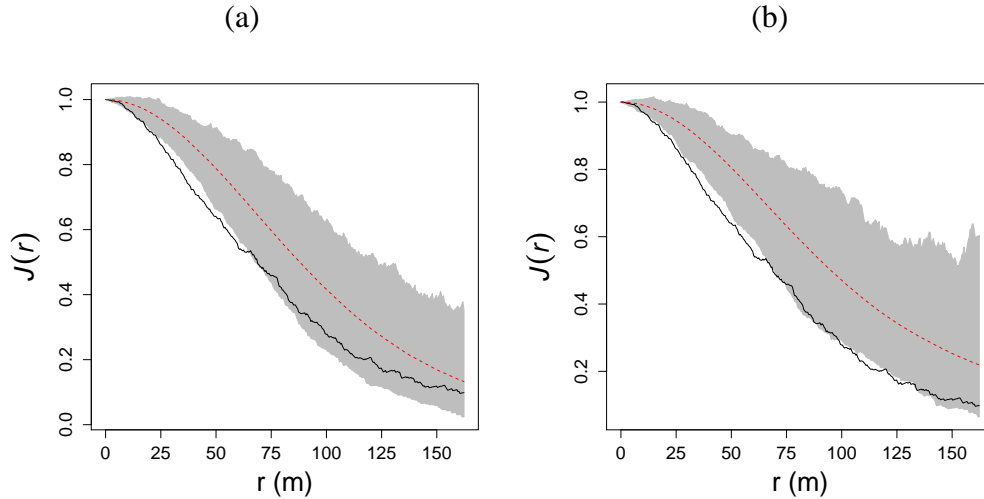
Fonte: Do autor (2018).

Observa-se na Figura 4.6 que os desvios do modelo ajustado de Matérn (curva fora dos envelopes) foram menores do que os desvios observados no modelo de Thomas. Nesse cenário, parece que o modelo ajustado mais apropriado para a espécie garapeira é o modelo de Matérn.

As estimativas dos parâmetros do modelo de Poisson com agrupamentos de Matérn obtidas para a espécie garapeira foram:  $\hat{\mu} = 18,4379$ ,  $\hat{R} = 429,5580$  m e  $\hat{\kappa} = 0,00000356$ . Como  $\hat{\kappa} \times |A|$  (em que  $A$  é área de estudo) é igual ao número de agrupamentos, o modelo indica, portanto, que existem na área de estudo, aproximadamente 91 agrupamentos com raios aproximados de 430 m, em que cada agrupamento contém, em média, 19 árvores de garapeira.

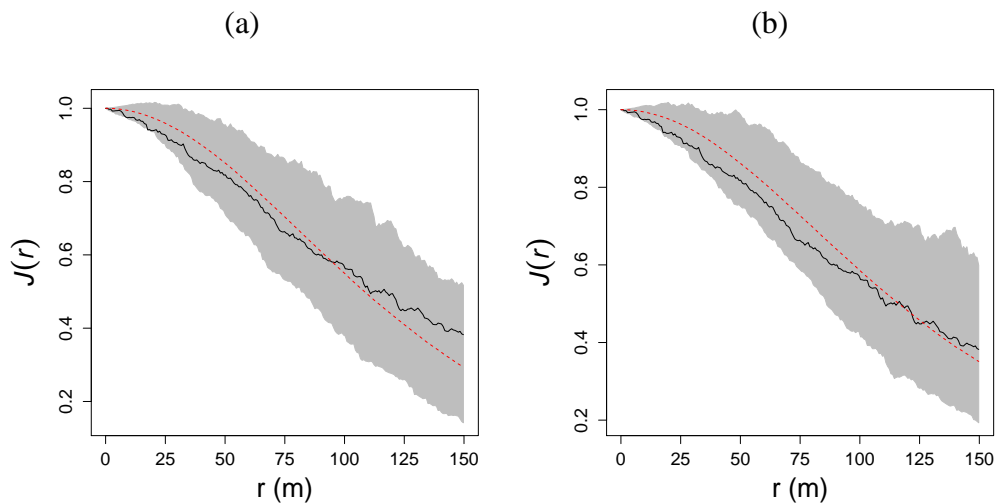
Os modelos de Poisson para agrupamentos de Matérn e Thomas foram ajustados para descrever a intensidade, a escala e o tamanho médio dos agrupamentos das árvores da espécie sumaúma. A Figura 4.7 mostra que não existem evidências estatísticas para rejeitar os dois modelos ajustados.

Figura 4.6 – Envelopes de simulações Monte Carlo da função  $J$  para os modelos ajustados para espécie garapeira: (a) Modelo Matérn e (b) Modelo Thomas. As linhas cinzas contínuas indicam limites inferior e superior, a linha preta contínua indica a função estimada e a linha vermelha tracejada indica a função teórica.



Fonte: Do autor (2018).

Figura 4.7 – Envelopes de simulações Monte Carlo da função  $J$  para os modelos ajustados para espécie sumaúma: (a) Modelo Matérn e (b) Modelo Thomas. As linhas cinzas contínuas indicam limites inferior e superior, a linha preta contínua indica a função estimada e a linha vermelha tracejada indica a função teórica.



Fonte: Do autor (2018).

Considerando o modelo Matérn, o número médio de árvores de sumaúma, por agrupamento, é de aproximadamente  $\hat{\mu} = 10,43754$  em um raio de  $\hat{R} = 390,5052$  m e com intensidade estimada dos cluters  $\hat{\kappa} = 0,00000269$  (aproximadamente 70 agrupamentos). Já para o modelo de Thomas, o número médio de árvores por cluster é aproximadamente  $\hat{\mu} = 10,65604$  em



uma escala de raio  $\hat{\sigma} = 208,8175$  m e com intensidade estimada dos agrupamentos iguais a  $\hat{\kappa} = 0,00000264$  (aproximadamente 69 agrupamentos).

Como mostrado na seção 2.5.6,  $\hat{\kappa} \times \hat{\mu}$  é aproximadamente igual a intensidade global  $\lambda$  ou, de forma equivalente, *número de agrupamentos*  $\times \hat{\mu}$  é aproximadamente igual ao número de árvores por espécie. Assim, os números aproximados de árvores estimadas, por espécie, por modelo foram: Garapeira/Matérn (1677 árvores), Sumaúma/Matérn (731 árvores) e Sumaúma/Thomas (735 árvores), ou seja, todos os modelos se aproximaram do número de árvores da região. No entanto, a dinâmica das florestas são complexas. Assim, modelos de Poisson para agrupamentos Matérn e Thomas que incorporam uma escala de agrupamento, não podem resolver totalmente a complexidade dos conjuntos de dados do mundo real (STOYAN; STOYAN 1996; PLOTKIN et al., 2002; WIEGAND et al., 2007).

As árvores da espécie garapeira formam agrupamentos em escala e número médio de árvores por clusters maiores que a espécie sumaúma. Entretanto, deve-se considerar que a garapeira possui mais que o dobro de árvores do que a sumaúma. Ademais, outro fator que pode influenciar é processo de dispersão de sementes de cada espécie (NATHAN; MULLER-LANDAU, 2000). É importante destacar que, não necessariamente, todos os agrupamentos das espécies sumaúma e garapeira têm o número exato de árvores estimados pelos modelos, pois como já informado, é apenas estimado um valor médio.

Os ajustes dos modelos de Poisson para agrupamentos de Matérn e Thomas possibilitam extrair muito mais informações das configurações pontuais do que as usuais estatísticas de primeira e segunda ordem. Poderiam ser ajustados outros modelos para configurações com agrupamentos (por exemplo: Cox) e também modelos para explicar a repulsão entre duas espécies de árvores (por exemplo: Gibbs bivariados). Apesar do potencial dos modelos de processos pontuais, os mesmos têm sido raramente empregados nas análises de configurações pontuais, especialmente, em ecologia e estudos florestais (WIEGAND; MOLONEY, 2014). Este fato abre boas perspectivas para a aplicação e o desenvolvimento de modelos estocásticos que quantifiquem estruturas complexas de interação de padrões de pontos marcados e não marcados.

## 5 CONCLUSÕES

Os resultados obtidos neste trabalho mostram a importância de analisar tanto as propriedades de primeira ordem como as propriedades de segunda ordem na análise de configurações pontuais. Além disso, o trabalho mostrou que é recomendável utilizar, pelo menos, dois descritores para avaliar diferentes aspectos das propriedades de segunda ordem do processo estocástico espacial. Neste trabalho, as funções  $L$  e  $J$  (univariada e bivariada) foram utilizadas com sucesso, para caracterizar as interações existentes entre três espécies (garapeira, sumaúma e cumaru-ferro) nativas da Floresta Amazônica. Este trabalho também mostrou que o ajuste de modelos estocásticos espaciais para processos pontuais possibilita uma análise muito mais profunda dos padrões das configurações pontuais. Os ajustes dos modelos de Poisson para agrupamentos de Thomas e Matérn, apesar de serem muito simples e as inferências serem baseadas exclusivamente na função  $L$ , apresentaram uma boa performance para caracterizar os agrupamentos da distribuição espacial das árvores das espécies garapeira e sumaúma. Espera-se que esses resultados possam ser úteis para caracterizar as complexas relações espaciais que existem entre espécies de árvores de florestas nativas e, assim, contribuir não somente para a conservação dessas espécies, mas também para um manejo adequado com vistas a exploração comercial dessas espécies.

## REFERÊNCIAS

ACRE (Governo do Estado do Acre). Programa Estadual de Zoneamento Ecologico-Economico do Estado do Acre. **Zoneamento Ecológico-Econômico do Acre Fase II**: documento Sintese - Escala 1:250.000, Rio Branco: SEMA, 2006.

AGÊNCIA EMBRAPA DE INFORMAÇÃO TECNOLÓGICA. **Espécies arbóreas brasileiras**. Disponível em:

<[http://www.agencia.cnptia.embrapa.br/gestor/especies\\_arboreas\\_brasileiras/arvore/CONT000fu1ekyj602wyiv807nyi6snbh69cs.html](http://www.agencia.cnptia.embrapa.br/gestor/especies_arboreas_brasileiras/arvore/CONT000fu1ekyj602wyiv807nyi6snbh69cs.html)> Acesso em: 2 de jan. 2018.

AMARAL, P. et al. **Floresta para sempre: um manual para a produção de madeira na Amazônia**. Belém:Imazon, p. 137 . 1998.

AKHAVAN, R. et al. Spatial patterns in different forest development stages of an intact old-growth Oriental beech forest in the Caspian region of Iran. **European journal of forest research**, v. 131, p. 1355-1366, 2012.

ÁRVORES DO BRASIL: INFORMAÇÕES SOBRE ÁRVORES NATIVAS BRASILEIRAS. **Garapa: Apuleia leiocarpa**. Disponível em: <<http://www.arvores.brasil.nom.br/new/garapa/index.htm>>. Acesso em: 2 jan. 2018.

AUGSPURGER, C. K. Seedling survival of tropical tree species: interactions of dispersal distance, light-gaps, and pathogens. **Ecology**, v. 65, p. 1705-1712. 1984.

BADDELEY, A. et al. Estimating the J function without edge correction. **Statistica Neerlandica**, v. 543, p. 315-328, 2000.

BADDELEY, A.; TURNER, R. spatstat: An R Package for Analyzing Spatial Point Patterns. **Journal of Statistical Software**, S.I. v. 12, Issue 6, p. 1-42, jan. 2005.

BADDELEY, A.; RUBAK, E.; TURNER, R. **Spatial Point Patterns: Methodology and Applications with R**. Chapman & Hall and CRC Press, London. 2015.

BAILEY, T.; GATRELL, A. **Iterative spatial data analysis**. New York: J. Wiley, p. 93. 1995.

BAROT, S. et al. Demography of a savanna palm tree: predictions from comprehensive spatial pattern analyses. **Ecology**, Oxford, v. 80, p. 1987-2005, 1999.

BROOKER, R. W. Plant-plant interactions and environmental change. **New Phytologist**, v. 171, p. 271–284, 2006.

BROWN, C. et al. Multispecies coexistence of trees in tropical forests:spatial signals of topographic niche differentiation increase with environmental heterogeneity. **Proceedings of Royal Society B**, v.280, n. 1764, p. 1-8. 2013.

CALLAWAY, R.M. Positive Interactions and Interdependence in Plant Communities.**Springer Netherlands**, Dordrecht. 2007.

CÂMARA,G.; CARVALHO, M. S. Análise espacial de eventos. In: FUKS, S.; CARVALHO,M. S.; CÂMARA,G.; MONTEIRO, A. M. V.**Análise Espacial de Dados Geográficos**. São José dos Campos, INPE, 2003 - on-line (3a. edição, revista e ampliada). Disponível em:<<http://www.dpi.inpe.br/gilberto/livro/analise/>>. Acesso em: 16 maio 2016.

CAPRETZ, R. L. **Análise dos padrões espaciais de árvores em quatro formações florestais do Estado de São Paulo, através de análises de segunda ordem, como a Função K de Ripley**. 2004. 93 p. Dissertação (Mestrado em Ecologia)- Escola Superior de Agricultura Luiz de Queiroz, Piracicaba, 2004.

CARVALHO, P. E. R. Espécies arbóreas brasileiras. Brasília: Embrapa Informação Tecnológica; Colombo: **Embrapa Florestas**, v.3. 2008.

CHESSON, P. General theory of competitive coexistence in spatially varying environments. **Theoretical Population Biology**. v. 58, p. 211-37, 2000.

CONDIT, R. et al. Spatial patterns in the distribution of tropical tree species. **Science**. v. 288, p. 1414-1418, 2000.

CRESSIE, N. **Statistics for Spatial Data**. New York: J. Wiley, p. 900, 1993.

CRONIE, O.; VAN LIESHOUT, M.N.M. Summary statistics for inhomogeneous marked point processes. **Annals of the Institute of Statistical Mathematics**, p. 1-24, 2014.

DIGGLE, P. J. A kernel method for smoothing point process data. **Applied Statistics**, v. 34, p. 138-147, 1985.

DIGGLE, P.J.; CHETWYND, A.G. A kernel method for smoothing point process data. Second-order analysis of spatial clustering for inhomogeneous populations. **Biometrics**, v. 47, p. 1155-1163, 1991.

DIGGLE, P. J. **Statistical analysis of spatial point patterns**. London: Academic Press, 1983.

DIGGLE, P. J. **Statistical Analysis of Spatial and Spatio-Temporal Point Patterns**. 3. ed. Boca Raton: C. Hall/CRC Monographs on Statistics and Applied Probability, p. 297, 2013.

DIXON, P.M. Ripley's K Function. **Encyclopedia of Environmetrics**. Chichester: J. Wiley, v. 3, p. 1796-1803, 2002.

FLUGGE, A. J.; OLHEDE, S. C.; MURRELL, D. J. A method to detect subcommunities from multivariate spatial associations. **Methods Ecol Evol**, v. 5, p. 1214-1224. 2014.

GOREAUD, F; PÉLISSER, R. Avoiding misinterpretation of biotic interactions with the intertype  $K_12$ -function:population independence vs.random labelling hypotheses. **Journal of Vegetation Science** v. 14, p. 681-692, 2003.

GRANDA, E. et al. Juvenile-adult tree associations in a continental Mediterranean ecosystem: no evidence for sustained and general facilitation at increased aridity. **Journal of Vegetation Science**. v. 23, p. 164-175, 2012.

GREEN, D. S. The efficacy of dispersal in relation to safe site density. **Oecologia**, v. 56, p. 356-358, 1983.

- HIGUCHI, P. et al. Associações espaciais entre indivíduos de diferentes espécies de *Miconia spp.* Ruiz & Pav. (Melastomataceae). **Revista Árvore**, v.35, n.3, 2011.
- HOWE, H. F.; SMALLWOOD, J. Ecology of seed dispersal. **Annual Reviews of Ecology and Systematics**, v. 13, p. 201-228. Huston, M. 1982.
- HUBBELL, S.P. Tree dispersion, abundance, and diversity in a tropical dry forest. **Science**, v. 203, p. 1299-1309, 1979.
- ILLIAN, J. et al. **Statistical Analysis and Modelling of Spatial Point Patterns**. Chichester: Wiley. 2008.
- MESQUITA, C. C. de. **O clima do Estado do Acre**. Rio Branco: IMAC, p. 53, 1996.
- NASCIMENTO, N. A. do; CARVALHO, J. O. P. de; LEÃO, N. V. M. Distribuição espacial de espécies arbóreas relacionada ao manejo de florestas naturais. **Revista de Ciências Agrárias**, Belém, v. 37, p. 1-20, 2002.
- NATHAN, R.; MULLER-LANDAU, H. Spatial patterns of seed dispersal, their determinants and consequences for recruitment. **Trends in ecology & evolution**. v. 15, p. 278-285. 2000.
- NEYMAN, J.; SCOTT, E. L. Statistical approach to problems of cosmology (with discussion). **Journal of the Royal Statistical Society**, v. 20, p. 1-43. 1958.
- NGUYEN, H.H.; URIA-DIEZ, J.; WIEGAND, K. Spatial distribution and association patterns in a tropical evergreen broad-leaved forest of north-central Vietnam. **Jornal of Vegetation Science**, v. 27, p. 318-327, 2016.
- PINTO-COELHO, R.M. **Fundamentos em Ecologia**. Porto Alegre: Artmed, p. 252, 2000.
- PLOTKIN, J. B. et al. Species-area curves, spatial aggregation, and habitat specialization in tropical forests. **Journal of Theoretical Biology**. v. 207, p. 81-99. 2002.
- R Core Team 2017. **R: A language and environment for statistical computing**. R Foundation for Statistical Computing, Vienna, Austria. URL <http://www.R-project.org/>.
- RIPLEY, B. D. The second-order analysis of stationary point processes. **Journal of Applied Probability**, 1976.
- RIPLEY, B. D. Modelling spatial patterns. **Journal of the Royal Statistical Society**. Series B (Methodological), JSTOR, p. 172-212, 1977.
- ROCKWELL, C. A. et al. Spatial distribution of *Bertholletia excelsa* in selectively logged forests of the Peruvian Amazon. **Journal of Tropical Ecology**, v. 33, p. 114-127, 2017.
- RODE, R. et al. Análise do padrão espacial de espécies e de grupos florísticos estabelecidos em um povoamento de *Araucaria Angustifolia* em uma floresta ombrófila mista no Centro-Sul do Paraná. **Floresta**, v. 40, n. 2, p. 255-268, 2010.
- SALMAN, A. K. D. et al. **Espécies arbóreas nativas da amazônia ocidental brasileira com potencial para arborização de pastagens**. Rondônia: Embrapa, 23 p. 2008.
- SANTOS, S. H. M. **Recomendações técnicas - Sumaúma (Ceiba pentandra (L.) Gaertn.) - Família Bombacaceae**. Belém: Embrapa Amazônia Oriental, 2002.

- SCALON, J.D.; SILVA, F.M. Power of tests for spatial randomness in patterns with small number of events. **Revista de Ciência e Tecnologia**, Rio de Janeiro, v. 12, n. 2, p. 7-14, 2006.
- SCHABENBERGER, O.; GOTWAY, C.A. **Statistical methods for spatial data analysis**. Boca Raton: Chapman & Hall/CRC, p. 488. 2005.
- SCOLFORO, J.R.S. **Manejo florestal**. Lavras:UFLA/FAEPE, 1998.
- SEVERIANO, C. E. **Potencial do manejo de Pararpiptadenia rígida (Benth) Brenan em sistema de alto fuste jardinado**. 2015. p. 90. Dissertação (Mestrado em Engenharia Florestal)- Universidade Federal de Santa Maria, Santa Maria. 2015.
- SILVA, A. C. et al. Relações florísticas e fitossociologia de uma Floresta Ombrófila Mista Montana secundária em Lages, Santa Catarina. **Ciê. Florestal**, v. 22, p. 193-206, 2012.
- SILVA, F. A. P. R. C. et al. Quantificação e avaliação das principais espécies florestais licenciadas no estado do Acre de 2005 a 2012. **Floresta Ambiente**, v. 22, n. 4, 2015.
- SILVA, J. N. M. **Manejo florestal**. Empresa Brasileira de Pesquisa Agropecuária, Centro de Pesquisa Agroflorestal da Amazônia Oriental. 2.ed. Brasília: Embrapa-SPI, 1996.
- SOUSA, M.P.S. et al. Influência da temperatura na germinação de sementes de sumaúma (*Ceiba pentandra* (Linn.) Gaertn.-Bombacaceae). **Revista Brasileira de Sementes**, v. 22, n. 1, p. 110-119, 2000.
- SOUZA, C.R. et al. **Sumaúma (Ceiba pentandra (L.) Gaerth)**. Manaus: Embrapa Amazônia Ocidental, 2005.
- SOUZA, D. R. de. et al. Análise estrutural em floresta ombrófila densa de terra firme não explorada, Amazônia oriental. **R. Árvore**, Viçosa-MG, v.30, n.1, p. 75-87, 2006.
- STOYAN, D.; STOYAN, H. **Fractals, Random Shapes and Point Fields**. Chichester: J. Wiley. 1994.
- STOYAN, D.; STOYAN, H. Estimating pair correlation functions of planar cluster processes. **Biometrical Journal**, v. 38, p. 259-71. 1996.
- VAN LIESHOUT, M.N.M. A J-function for inhomogeneous point processes. **Statistica Neerlandica**, v. 65, p. 183-201. 2011.
- VAN LIESHOUT, M.N.M.; BADDELEY A.J. A nonparametric measure of spatial interaction in point patterns. **Statistica Neerlandica**, v.50, p. 344-361, 1996.
- VAN LIESHOUT, M.N.M.; BADDELEY A.J. Indices of Dependence between Types in Multivariate Point Patterns. **Journal of Statistics**, v. 26, p. 511-532, 1999.
- VENABLES, W.N.; RIPLEY, B.D. **Modern applied statistics with S**. New York: Springer, 461p, 2000.
- WANDRAG E.M. et al. Seed dispersal increases local species richness and reduces spatial turnover of tropical tree seedlings. United States of America: **Proc Natl Acad Sci**, v. 114. p. 10689-10694, 2017.

WEBB, C. O. et al. Phylogenies and community ecology. *Annu. Rev. Ecol. Syst.* v. 33, p. 475-505. 2002.

WIEGAND, T.; MOLONEY K.A. **Handbook of Spatial Point-Pattern Analysis in Ecology**. Boca Raton: CRC Press. p. 538, 2014.

WIEGAND, T. et al. Analysing the spatial structure of a Sri Lankan tree species with multiple scales of clustering. *Ecology*, v. 88, p. 3088-3102. 2007.

WRIGHT, S. J. Plant diversity in tropical forests: a review of mechanisms of species coexistence. *Oecologia*, Berlin, v. 130, p. 1-14. 2002.

## ANEXO - Códigos do R

```
##### Abrindo os dados #####
setwd("C:/Users/Elianara/Dropbox/Mestrado/Dissertação/BASE_ACRE")
dados=read.csv("inventario_ut22.csv",h=T,sep=";",dec=",")

##### Carregando os pacotes #####
require(maptools)
require(rgdal)
require(spatstat)

##### Filtrando os dados #####
sub1=subset(dados,dados[13]=="Cumaru")
sub2=subset(dados,dados[13]=="Garapeira")
sub3=subset(dados,dados[13]=="Sumauma")

##### Estatística Descritiva dos dados#####

###Cumaru#####
n=length(sub1$DAP)
media=mean(sub1$DAP)
dp=sd(sub1$DAP)
max=(sub1$DAP)
min=(sub1$DAP)

###Garapeira#####
n=length(sub2$DAP)
media=mean(sub2$DAP)
dp=sd(sub2$DAP)
max=(sub2$DAP)
min=(sub2$DAP)

###Sumauma#####
n=length(sub3$DAP)
media=mean(sub3$DAP)
dp=sd(sub3$DAP)
max=(sub3$DAP)
min=(sub3$DAP)

##### Carregando o shape #####
S=readShapePoly("ut2.shp")
SP=as(S,"SpatialPolygons")
jan=as(SP,"owin")
plot(jan)

##### Carregando o shape e os pontos #####
```



```

pontos1=ppp(sub1$EASTING,sub1$NORTHING,window=jan)
pontos2=ppp(sub2$EASTING,sub2$NORTHING,window=jan)
pontos3=ppp(sub3$EASTING,sub3$NORTHING,window=jan)

##### Alisamento por kernel #####
k1=density(pontos1, sigma=bw.diggle,kernel="gaussian",diggle=T)
k2=density(pontos2, sigma=bw.diggle,kernel="gaussian",diggle=T)
k3=density(pontos3, sigma=bw.diggle,kernel="gaussian",diggle=T)

par(mar=c(6,6,3,1))
plot(k1,main="",cex.lab=2,cex.axis=1.3)
points(pontos1)
par(mar=c(6,6,3,1))
plot(k2,main="",cex.lab=2,cex.axis=1.3)
points(pontos2)
par(mar=c(6,6,3,1))
plot(k3,main="",cex.lab=2,cex.axis=1.3)
points(pontos3)

##### Calculando a Intensidade homogênea #####
npts1 <- npoints(pontos1)
lambda <- npts1/area(jan)

npts2 <- npoints(pontos2)
lambda <- npts2/area(jan)

npts3 <- npoints(pontos3)
lambda <- npts3/area(jan)

##### L-FUNCTION #####
par(mar=c(6,5.5,3,1))
plot(envelope(pontos1,Lest,nsim=999,correction="Ripley"),
     .-r~r,main="",ylab=expression(L~(t)-t),
     xlab=expression(t~(m)),legend=F,cex.lab=2,cex.axis=1.3)

par(mar=c(6,5.5,3,1))
plot(envelope(pontos2,Lest,nsim=999,correction="Ripley"),
     .-r~r,main="",ylab=expression(L~(t)-t),
     xlab=expression(t~(m)),legend=F,cex.lab=2,cex.axis=1.3)

par(mar=c(6,5.5,3,1))
plot(envelope(pontos3,Lest,nsim=999,correction="Ripley"),
     .-r~r,main="",ylab=expression(L~(t)-t),
     xlab=expression(t~(m)),legend=F,cex.lab=2,cex.axis=1.3)

##### J-FUNCTION #####
par(mar=c(6,5.5,3,1))

```

```

plot (envelope (pontos1, Jest, nsim=9, r=seq(0, 157, 9)),
main="", ylab=expression(J~(r)-r), xlab=expression(r~(m)),
legend=F, cex.lab=2, cex.axis=1.3, xlim=c(0, 157))

par (mar=c(6, 5.5, 3, 1))
plot (envelope (pontos2, Jest, nsim=9, r=seq(0, 157, 9)),
main="", ylab=expression(J~(r)-r), xlab=expression(r~(m)),
legend=F, cex.lab=2, cex.axis=1.3, xlim=c(0, 157))

par (mar=c(6, 5.5, 3, 1))
plot (envelope (pontos3, Jest, nsim=9, r=seq(0, 157, 9)),
main="", ylab=expression(J~(r)-r), xlab=expression(r~(m)),
legend=F, cex.lab=2, cex.axis=1.3, xlim=c(0, 157))

##### L-FUNCTION CROSS #####
pontos=ppp(dados$EASTING, dados$NORTHING, marks=dados$ESPECIE, window=jan)
pontos

par (mar=c(6, 5.5, 3, 1))
plot (envelope (pontos, i="Cumaru", j="Garapeira", Lcross, nsim=999,
correction="Ripley", simulate=expression(rshift (pontos, radius=300,
edge="erode"))), .-r ~ r, main="", ylab=expression(L["Cumaru, Garapeira"]
~(t)-t), xlab=expression(t~(m)), legend=F, cex.lab=2, cex.axis=1.3)

par (mar=c(6, 5.5, 3, 1))
plot (envelope (pontos, i="Cumaru", j="Sumauma", Lcross, nsim=999,
correction="Ripley", simulate=expression(rshift (pontos, radius=300,
edge="erode"))), .-r ~ r, main="", ylab=expression(L["Cumaru, Sumauma"]
~(t)-t), xlab=expression(t~(m)), legend=F, cex.lab=2, cex.axis=1.3)

par (mar=c(6, 5.5, 3, 1))
plot (envelope (pontos, i="Garapeira", j="Sumauma", Lcross, nsim=999,
correction="Ripley", simulate=expression(rshift (pontos, radius=300,
edge="erode"))), .-r ~ r, main="", ylab=expression(L["Garapeira, Sumauma"]
~(t)-t), xlab=expression(t~(m)), legend=F, cex.lab=2, cex.axis=1.3)

##### J-FUNCTION CROSS#####

pontos=ppp(dados$EASTING, dados$NORTHING, marks=dados$ESPECIE, window=jan)
pontos

par (mar=c(6, 5.5, 3, 1))
plot (envelope (pontos, Jcross, i="Cumaru", j="Garapeira", nsim=999,
r=seq(0, 157, 9), simulate=expression(rshift (pontos, radius=150,
edge="erode"))), ylab=expression(J["Cumaru, Garapeira"]~(r)-r),
xlab=expression(r~(m)), legend=F, cex.lab=2, cex.axis=1.3,
main="", xlim=c(0, 157))

```

```

par(mar=c(6,5.5,3,1))
plot(envelope(pontos, Jcross, i="Cumaru", j="Sumauma", nsim=999,
r=seq(0,157,9), simulate=expression(rshift(pontos, radius=150,
edge="erode"))), ylab=expression(J["Cumaru, Sumauma"]~(r)-r),
xlab=expression(r~(m)), legend=F, cex.lab=2, cex.axis=1.3,
main="", xlim=c(0,157))

par(mar=c(6,5.5,3,1))
plot(envelope(pontos, Jcross, i="Garapeira", j="Sumauma", nsim=999,
r=seq(0,157,9), simulate=expression(rshift(pontos, radius=150,
edge="erode"))), ylab=expression(J["Garapeira, Sumauma"]~(r)-r),
xlab=expression(r~(m)), legend=F, cex.lab=2, cex.axis=1.3,
main="", xlim=c(0,157))

##### Ajustando modelos #####

### Matern #####
fitM2 <- kppm(pontos2~1, "MatClust")
fitM2

fitM3 <- kppm(pontos3~1, "MatClust")
fitM3

### Thomas #####
fitT2 <- kppm(pontos2~1, "Thomas")
fitT2

fitT3 <- kppm(pontos3~1, "Thomas")
fitT3

##### Qualidade dos modelos #####

### Matern #####

##Envelope
envM2 <- envelope(fitM2, Jest, nsim=999)
par(mar=c(6,5.5,3,1))
plot(envM2, main="", cex.lab=2, cex.axis=1.3, legend=F)

envM3 <- envelope(fitM3, Jest, nsim=999)
par(mar=c(6,5.5,3,1))
plot(envM3, main="", cex.lab=2, cex.axis=1.3, legend=F)

### Thomas #####

```

```
##Envelope
envT2 <- envelope(fitT2, Jest, nsim=999)
par(mar=c(6,5.5,3,1))
plot(envT2,main="",cex.lab=2,cex.axis=1.3,legend=F)

envT3 <- envelope(fitT3, Jest, nsim=999)
par(mar=c(6,5.5,3,1))
plot(envT3,main="",cex.lab=2,cex.axis=1.3,legend=F)
```