



LUCIANE INÊS REIS

**AMPLITUDES TRIANGULARES QUADRIDIMENSIONAIS
ANÔMALAS**

LAVRAS – MG

2018

LUCIANE INÊS REIS

AMPLITUDES TRIANGULARES QUADRIDIMENSIONAIS ANÔMALAS

Dissertação apresentada à Universidade Federal de Lavras, como parte das exigências do Programa de Pós-Graduação em Física, área de concentração em Física de Partículas e Campos, para a obtenção do título de Mestre.

Prof. DSc. Orimar Battistel

Orientador

Prof. DSc. Gilson Dallabona

Coorientador

LAVRAS – MG

2018

**Ficha catalográfica elaborada pelo Sistema de Geração de Ficha Catalográfica da Biblioteca
Universitária da UFLA, com dados informados pelo(a) próprio(a) autor(a).**

Reis, Luciane Inês
Amplitudes Triangulares Quadridimensionais Anômalas /
Luciane Inês Reis. – Lavras : UFLA, 2018.
140 p. : il.

Dissertação (mestrado)–Universidade Federal de Lavras,
2018.

Orientador: Prof. DSc. Orimar Battistel.
Bibliografia.

1. Ambiguidades. 2. Amplitudes Perturbativas. 3. Cálculo
Perturbativo Preditivo. 4. Consistência. 5. Anomalias.
Regularizações. I. Battistel, Orimar Antônio. II. Título

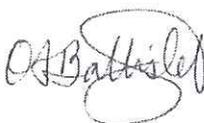
LUCIANE INÊS REIS

AMPLITUDES TRIANGULARES QUADRIDIMENSIONAIS ANÔMALAS

Dissertação apresentada à Universidade Federal de Lavras, como parte das exigências do Programa de Pós-Graduação em Física, área de concentração em Física de Partículas e Campos, para a obtenção do título de Mestre.

APROVADA em 04 de maio de 2018.

Prof. DSc. Orimar A. Battistel UFSM
Prof. DSc. Gilson Dallabona UFLA
Prof. DSc. Helvécio G. Fagnoli UFLA
Prof. DSc. Moises P. Rojas UFLA



Prof. DSc. Orimar Battistel
Orientador



Prof. DSc. Gilson Dallabona
Co-Orientador

**LAVRAS – MG
2018**

AGRADECIMENTOS

Gostaria de agradecer primeiramente a Universidade Federal de Lavras pelo ambiente criativo e amigável que proporciona. Ao seu corpo docente e discente, direção e as pessoas que convivi nesse espaço e que, de alguma forma, me forneceram uma experiência de produção compartilhada. Agradeço imensamente aos ex-presidentes Luiz Inácio Lula da Silva e Dilma Rousseff por acreditarem em um Brasil com justiça social e com oportunidades para todos, dessa forma vocês me permitiram descobrir e vislumbrar novos horizontes.

Agradeço especialmente ao meu orientador Orimar Antônio Battistel pelo apoio, paciência, incentivo, ensinamentos e pelo empenho dedicado a elaboração deste trabalho. Agradeço imensamente por todo conhecimento transmitido durante minha formação acadêmica, por sua amizade e pela dedicação ao longo de todos esses anos. Minha gratidão eterna.

Agradeço ao meu companheiro Maurício Ilha de Oliveira, pelo apoio, amor, carinho, pelos momentos compartilhados e pelas orientações e incentivos durante meu percurso acadêmico. Mas, agradeço principalmente, por você me ensinar que a jornada também precisa ser admirada.

Agradeço à minha família. À minha mãe, Lurdes Reis pelo carinho, apoio e por nunca permitir que me faltasse nada. Aos meus irmãos, Maikel Junior Reis e Fabiano Dahmer de Oliveira pelo apoio, amizade e companheirismo ao longo de minha jornada acadêmica. Ao meu sogro Antônio Carlos, pelas conversas, momentos de descontração e pelo constante apoio.

Agradeço, em geral, a todos os meus amigos que, de alguma forma, contribuíram para minhas conquistas.

Agradeço à Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (CAPES) pelo financiamento.

RESUMO

Um estudo detalhado das amplitudes triangulares anômalas AVV , VAV , VVA e AAA é apresentado. A investigação é efetuada com a utilização de uma estratégia alternativa aos métodos tradicionais de regularização, para o tratamento das amplitudes (linearmente) divergentes. O referido método permite que as formas explícitas das amplitudes envolvidas sejam obtidas sem que estas sejam modificadas nos passos intermediários. As rotulações para os momentos das linhas internas são tomadas como arbitrárias e com isso a presença de termos possivelmente ambíguos é claramente identificada e preservada, diferentemente do que ocorre em procedimentos tradicionais. Nenhuma integral divergente é, de fato, calculada. Somente integrais finitas são efetuadas. Isto permite que conclusões claras e transparentes possam ser retiradas em cenários onde regularizações usuais apresentam dificuldades para tal. As amplitudes ditas anômalas são calculadas e suas propriedades de simetria, identidades de Ward e limites de baixa energia, verificados. Percebemos então que as identidades de Ward podem ser violadas por dois tipos de termos provenientes das partes divergentes: os denominados termos anômalos e os ambíguos. Os termos anômalos violam também a linearidade da operação de integração (relações entre funções de Green) e os ambíguos estão atrelados a termos de superfície, como esperado. Nós verificamos então que as possíveis interpretações disponíveis para a especificação dos valores para as quantidades remanescentes, oriundas das partes divergentes das amplitudes, não permitem a descrição adequada das amplitudes. A opção matematicamente honesta fornece as identidades de Ward preservadas, apenas após escolhas convenientes dos rótulos para os momentos das linhas internas, que eliminem os termos ambíguos. Tal prescrição viola a predição para o limite de baixa energia. A adoção de uma prescrição para a preservação do limite de baixa energia, permitindo a sobrevivência dos termos anômalos, produz os resultados desejados para a amplitude AVV mas não produz resultados consistentes quando aplicada de modo igual a todas as amplitudes. Concluimos então que, com os elementos usuais do cálculo perturbativo, amplitudes construídas a partir das regras de Feynman, não há nenhuma possibilidade de obtermos amplitudes físicas com as propriedades desejadas; livres de ambiguidades, preservando as Identidades de Ward e exibindo os corretos limites de baixa energia e, neste contexto, as amplitudes ditas anômalas não se caracterizam como exceções.

Palavras-chave: Ambiguidades. Amplitudes Perturbativas. Cálculo Perturbativo Preditivo. Consistência. Anomalias. Regularizações.

ABSTRACT

A detailed study of the anomalous triangles amplitudes AVV , VAV , VVA and AAA is presented. The investigation is implemented using a strategy alternative to the traditional methods of regularization, for the treatment of (linearly) divergent amplitudes. The referred method allows the explicit forms of the amplitudes involved to be obtained without these being modified in the intermediate steps. The labeling for the moments of the inner lines is taken as arbitrary and with that the presence of possibly ambiguous terms is clearly identified and preserved, unlike what occurs in traditional procedures. No divergent integral is, in fact, calculated. Only finite integrals are performed. This allows clear and transparent conclusions to be taken in scenarios where regular regularizations present difficulties in doing so. The so-called anomalous amplitudes are calculated and their symmetry properties (Ward identities and low energy limits) are verified. We then realize that Ward's identities can be violated by two types of terms derived from the divergent parts: the so-called anomalous and the ambiguous terms. The anomalous terms also violates the linearity of the integration operation (relations among Green's functions) and the ambiguous terms are tied to surface terms, as expected. We then find that the possible interpretations available for specifying the values for the remaining quantities from the divergent parts of the amplitudes do not allow adequate description of the amplitudes. The mathematically honest option provides preserved Ward identities, only after convenient choices of label for the moments of inner lines, which eliminate ambiguous terms. Such a prescription violates the prediction for the low energy limit. The adoption of a prescription for the preservation of the low energy limit, allowing the retainment of the anomalous terms, produces the desired results for the AVV amplitude but does not produce consistent results when applied equally to all amplitudes. We conclude that, with the usual elements of the perturbative calculus (amplitudes constructed from the Feynman rules), there is no possibility of obtaining physical amplitudes having the desired properties; free of ambiguities, preserving the Ward Identities and exhibiting the correct low energy limit and, in this context, the so-called anomalous amplitudes can be characterized as exceptions.

Keywords: Ambiguities. Perturbative Amplitudes. Predictive Perturbative Calculation. Consistency. Anomalies. Regularizations.

LISTA DE FIGURAS

Figura 2.1 – Diagrama de Feynman para as funções de Green de um ponto.	20
Figura 2.2 – Diagrama de Feynman para as funções de Green de dois pontos	21
Figura 2.3 – Diagrama de Feynman para as funções de Green de três pontos	22
Figura 2.4 – Representação diagramática da relação entre funções de Green para amplitude VV	25
Figura 2.5 – Representação diagramática da relação entre funções de Green para amplitude AA	25
Figura 3.1 – Representação diagramática da amplitude AV	35
Figura 3.2 – Representação diagramática da amplitude SS	39
Figura 3.3 – Representação diagramática da amplitude PP	39
Figura 3.4 – Representação diagramática da amplitude PSP	40
Figura 3.5 – Representação diagramática da amplitude PPS	41
Figura 3.6 – Representação diagramática da amplitude PSV	41
Figura 3.7 – Representação diagramática da amplitude VPS	42
Figura 3.8 – Representação diagramática da amplitude PVS	42
Figura 3.9 – Representação diagramática da amplitude PVV	42
Figura 3.10 – Representação diagramática da amplitude VPV	42
Figura 3.11 – Representação diagramática da amplitude VVP	43
Figura 3.12 – Representação diagramática da amplitude PAA	43
Figura 3.13 – Representação diagramática da amplitude APA	43
Figura 3.14 – Representação diagramática da amplitude AAP	44
Figura 4.1 – Representação diagramática da relação entre funções de Green para amplitude VPP	47
Figura 4.2 – Representação diagramática da relação entre funções de Green para amplitude VSS	47
Figura 4.3 – Representação diagramática da relação entre funções de Green para amplitude ASP	48
Figura 4.4 – Representação diagramática da relação entre funções de Green para amplitude APS	48
Figura 4.5 – Representação diagramática das identidades de Ward para as amplitudes a) VPP e b) VSS	49

Figura 4.6 – Representação diagramática da amplitude VPP.	51
Figura 4.7 – Representação diagramática da amplitude VSS.	52
Figura 4.8 – Representação diagramática da amplitude ASP.	53
Figura 4.9 – Representação diagramática da amplitude APS.	54
Figura 5.1 – Representação diagramática da relação entre funções de Green para contração do momento r com a amplitude AVV	70
Figura 5.2 – Representação diagramática da relação entre funções de Green para contração do momento q com a amplitude AVV	70
Figura 5.3 – Representação diagramática da relação entre funções de Green para contração do momento p com a amplitude AVV	70
Figura 5.4 – Representação diagramática da relação entre funções de Green para contração do momento r com a amplitude VAV	71
Figura 5.5 – Representação diagramática da relação entre funções de Green para contração do momento q com a amplitude VAV	71
Figura 5.6 – Representação diagramática da relação entre funções de Green para contração do momento p com a amplitude VAV	71
Figura 5.7 – Representação diagramática da relação entre funções de Green para contração do momento r com a amplitude VVA	71
Figura 5.8 – Representação diagramática da relação entre funções de Green para contração do momento q com a amplitude VVA	72
Figura 5.9 – Representação diagramática da relação entre funções de Green para contração do momento p com a amplitude VVA	72
Figura 5.10 – Representação diagramática da relação entre funções de Green para contração do momento r com a amplitude AAA	72
Figura 5.11 – Representação diagramática da relação entre funções de Green da contração do momento q com a amplitude AAA	73
Figura 5.12 – Representação diagramática da relação entre funções de Green para contração do momento p com a amplitude AAA	73

SUMÁRIO

1	Introdução	9
2	O modelo, regras de Feynman, amplitudes e propriedades de simetria	17
2.1	Regras de Feynman	18
2.2	Amplitudes	19
2.3	Relações entre funções de Green	24
2.4	Identities de Ward	26
2.5	Limites de baixa energia	28
3	Estratégia para o tratamento das divergências	30
4	Amplitudes triangulares vetoriais	45
4.1	Relações entre funções de Green	45
4.2	Identities de Ward	48
4.3	Limites de baixa energia	49
4.4	Cálculo das amplitudes triangulares vetoriais	51
4.5	Verificação da relações entre funções de Green	54
4.6	Verificação das identities de Ward	59
4.7	Regularização Dimensional	62
4.8	Regularização de Pauli-Villars	63
4.9	Verificação dos limites de baixa energia	66
5	Amplitudes pseudo tensoriais de terceira ordem	69
5.1	Relações entre funções de Green	69
5.2	Identities de Ward	73
5.3	Limites de baixa energia	74
5.4	Limites de baixa energia para as amplitudes AVV, VAV e VVA	76
5.5	Limites de baixa energia para a amplitude AAA	78
6	Cálculo das amplitudes pseudo tensoriais de terceira ordem	81
6.1	Cálculo das amplitudes AVV, VAV, VVA e AAA.	81
6.2	Propriedades do tensor $F_{\lambda\mu\nu}$	88
6.3	Contração das amplitudes triangulares com os momentos externos	90
7	Verificação das relações de simetria, relações entre funções de Green e limites de baixa energias para as amplitudes anômalas	94
7.1	Amplitude AVV	94

7.2	Amplitude VAV	97
7.3	Amplitude VVA	99
7.4	Amplitude AAA	101
7.5	Verificação das identidades de Ward para as amplitudes triangulares anômalas	103
7.6	Verificação dos limites de baixa energia para as amplitudes triangulares anômalas	105
8	Análise dos resultados e conclusões	109
8.1	O objeto $\Delta_\alpha^\alpha(\lambda^2)$ e os termos anômalos	109
8.2	O objeto $\Delta_\beta^\alpha(\lambda^2)$ e as ambiguidades	110
8.3	Amplitudes e suas propriedades	111
	APÊNDICES	119
A	Álgebra de Dirac	120
B	Cálculo das Integrais	123
B.1	Cálculo da Integral I_3:	123
B.2	Cálculo I_2:	124
C	Redução das funções ξ_{01}^{-1} e ξ_1^0	127
D	Cálculo do tensor $F_{\lambda\mu\nu}$	137

1 INTRODUÇÃO

O principal objetivo da Física, como uma ciência exata, é obter as leis que governam os fenômenos naturais. Para encontrá-las é necessário o estudo sistemático das fenomenologias pertinentes, identificando simetrias, vínculos e relações entre grandezas físicas que se revelem consistentes com os resultados experimentais. A materialização desse objetivo se dá através da descoberta de relações matemáticas bem determinadas entre grandezas físicas que descrevem uma certa fenomenologia de forma consistente, as leis propriamente ditas.

No final do século XIX, já se havia obtido avanços na descrição de uma ampla classe de fenômenos, através de leis, com a Teoria da Mecânica Clássica (MC) e a Teoria Eletromagnética (TE), desenvolvidas, dentre outros, por Newton e Maxwell, respectivamente. Apesar do inegável sucesso destas teorias elas exibiram incompatibilidades entre si quando se exigiu que todas as leis físicas possuam formas matemáticas idênticas para observadores em diferentes sistemas de referência (NETO, 2010). A necessidade de explicar novos fenômenos na escala atômica e quando a velocidade envolvida é comparável à da luz, deixou ainda mais claro que a MC possuía limitações (GOLDSTEIN; POOLE; SAFKO, 2002).

Os fenômenos relativos à escala atômica culminaram com o surgimento da Mecânica Quântica, desenvolvida, através de diferentes formulações, porém equivalentes, por Schrödinger e Heisenberg. Na prescrição de Schrödinger, a dinâmica de uma partícula é descrita por uma função de onda $\Psi(\vec{r}, t)$, que é função da posição e do tempo. Esta é solução da equação:

$$\left\{ \frac{-\hbar}{2m} \nabla^2 + V(\vec{r}, t) \right\} \Psi(\vec{r}, t) = i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \Psi(\vec{r}, t), \quad (1.1)$$

onde \hbar é a constante de Planck e m é a massa da partícula sujeita à energia potencial $V(\vec{r}, t)$ (GRIFFITHS, 2008) (SAKURAI, 1987). Esta equação é construída a partir do princípio da conservação da energia mecânica, obtido a partir da segunda lei de Newton para forças conservativas, onde temos :

$$E = \frac{p^2}{2m} + V(\vec{r}, t), \quad (1.2)$$

sobre a qual se aplica a prescrição de Schrödinger :

$$\vec{p} = -i\hbar \vec{\nabla} \quad (1.3)$$

e

$$E = i\hbar \frac{\partial}{\partial t}. \quad (1.4)$$

Para que as soluções da equação de onda sejam fisicamente aceitáveis, a função de onda deve ser de quadrado integrável, isto é, deve ser possível:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |\Psi(\vec{r}, t)|^2 d\vec{r} = 1. \quad (1.5)$$

Assim, o integrando deve ser uma distribuição (SAKURAI, 1987) (GOMES, 2002). Tal quantidade é interpretada como uma densidade de probabilidade sendo que esta é a forma pela qual as relações entre causa e efeito são estabelecidas neste formalismo. Assim, a MQ somente pode prever resultados na forma de probabilidades, diferentemente das teorias clássicas as quais o fazem de modo determinístico (SAKURAI, 1987).

A imposição de que as leis físicas devem ter a mesma forma matemática em todos os referenciais inerciais estabeleceu um ponto de ruptura. Frente a esta exigência, tornou-se necessário alterar ou a Teoria Eletromagnética ou a Mecânica Clássica, sem comprometer os sucessos obtidos por ambas, a fim de que a ideia filosófica da universalidade das leis pudesse ser realizada (STAUDT, 2005). A solução deste dilema foi dada por Einstein, com a formulação da Teoria da Relatividade Restrita (TRR), onde as transformações entre sistemas de referência adotadas como universais foram adotadas como sendo as transformações de Lorentz. Estas preservam naturalmente as leis do eletromagnetismo e exigem adequações nas leis da Mecânica Clássica assim como na Mecânica Quântica (LEMOS, 2007).

A ideia de que as leis da Física deveriam exibir covariância de Lorentz teve papel fundamental no desenvolvimento da Mecânica Quântica Relativística (MQR). Isto porque a Mecânica Quântica de Schrödinger, apesar do sucesso obtido na descrição das propriedades dos átomos e moléculas, é uma teoria intrinsecamente não relativística (SAKURAI, 1987). Assim, a MQR originou-se da necessidade de criar formalismos para a descrição da fenomenologia das partículas fundamentais que fossem consistentes com as ideias bem sucedidas da MQ e da TRR. Dessa maneira, numa análise inicial, deveria ser construída uma equação análoga àquela da MQ, com interpretação semelhante mas de modo a ser esta invariante frente a transformações de Lorentz. Seguindo este raciocínio, Klein e Gordon propuseram uma equação análoga à equação de Schrödinger e que satisfaz a invariância de Lorentz, usando a equação para a energia total relativística

de uma partícula: (MANDL, 1961)

$$E^2 = p^2 c^2 + m^2 c^4, \quad (1.6)$$

ao invés daquela para a energia mecânica newtoniana, seguindo a mesma prescrição de (1.3) e (1.4):

$$E^2 \Rightarrow \left(i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \right)^2 \quad (1.7)$$

$$p^2 \Rightarrow \left(-i\hbar \vec{\nabla} \right)^2, \quad (1.8)$$

obtendo:

$$\left(\vec{\nabla}^2 - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} + \frac{m^2 c^2}{\hbar^2} \right) \Psi(\vec{r}, t) = 0. \quad (1.9)$$

Introduzindo o operador D'Alembertiano;

$$\square^2 \equiv \vec{\nabla}^2 - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2}, \quad (1.10)$$

obtemos a equação de onda relativística:

$$\left[\square^2 + \frac{m^2 c^2}{\hbar^2} \right] \Psi = 0. \quad (1.11)$$

Esta equação, devido à presença de derivadas temporais de segunda ordem, não permite a interpretação probabilística, uma vez que a quantidade $|\Psi(\vec{r}, t)|^2$ não é positiva definida. Na tentativa de contornar as dificuldades encontradas na interpretação das soluções da equação de Klein e Gordon, Dirac propôs uma equação de onda relativística com derivadas espaço-temporais de primeira ordem:

$$(i\gamma^\mu \partial_\mu - m) \Psi(\vec{r}, t) = 0, \quad (1.12)$$

onde γ^μ são matrizes obedecendo a uma álgebra não comutativa. Esta se mostrou bem sucedida na descrição de partículas de spin $\frac{1}{2}$, como elétrons (NETO, 2010).

Percebeu-se rapidamente que a descrição quântica e relativística possuía diferenças significativas em relação ao caso não relativístico. Partículas relativísticas não podem ser descritas

por uma equação universal. Ao invés disto, uma equação deve ser desenvolvida para cada spin. E estas equações não podem descrever partículas em interação mas apenas propriedades de partículas livres. As quantidades análogas às equações de onda devem ser reinterpretadas como campos e permitem a correspondência consistente com a fenomenologia somente após a implementação de um processo de quantização, análogo ao da prescrição de Heisenberg, sobre coordenadas e momentos, porém sobre os próprios campos e seus momentos canonicamente conjugados (SAKURAI, 1987).

Neste cenário surge a Teoria Quântica de Campos (TQC) com o propósito de descrever a interação entre partículas relativísticas. Nesta abordagem, cada partícula está associada a um campo e as interações com outras ocorrem devido à presença dos campos. As equações de movimento não determinam funções de onda mas campos relativísticos que devem ser quantizados. Assim, quando uma partícula interage com outra troca energia e momento em quantas que possuem também o status de partículas e estão associadas também a campos. De acordo com as “cargas” que uma partícula carrega, ela pode interagir com outras partículas que também possuem tal “carga” através da troca de outras partículas. As propriedades das partículas trocadas representam (ou determinam) as propriedades das interações (GAMBIM, 2004).

A descrição conceitual da teoria eletromagnética como uma teoria de campo quantizada, a Eletrodinâmica Quântica (EDQ), obteve sucesso realmente notável na descrição dos fenômenos de natureza eletromagnética nos domínios relativístico e quântico. Suas previsões tem um alto grau de concordância entre predição e experimento, dando à teoria quântica de campos a credibilidade necessária para que esta seja utilizada como um modelo para a construção de outras semelhantes destinadas a descrever as demais interações fundamentais. Assim surgiram a Cromodinâmica Quântica, referente à força forte, e a Teoria Eletrofraca, a unificação da teoria eletromagnética com a teoria para as interações fracas. Estas três interações fundamentais citadas constituem um único modelo de Teoria Quântica de Campos que representa a visão atual da física para as partículas e interações fundamentais: o Modelo Padrão. A única interação para a qual não se pode desenvolver uma TQC de forma análoga às demais é a gravitacional (NETO, 2010).

Para construirmos uma TQC, devemos primeiramente construir uma lagrangiana, ou seja, um funcional dos campos associados às partículas e de suas primeiras derivadas espaço-temporais, para as quais estamos interessados em descrever a dinâmica de interações. O funcional é construído de modo a incorporar as simetrias consideradas relevantes. Após isso, impõe-

se o princípio variacional de Hamilton para obtermos as equações de movimento dos campos envolvidos. As soluções das equações de movimento fornecem a descrição da fenomenologia envolvendo as partículas interagentes. Esta descrição é vista como representando as consequências das simetrias implementadas na construção da lagrangiana e caracteriza o poder de predição da teoria (WEINBERG, 1995) (STAUDT, 2005).

O problema encontrado nesta etapa é que estas equações de movimento, em geral, apresentam-se na forma de equações diferenciais não lineares e acopladas cuja solução exata é raramente possível. Para contornar este problema, utilizam-se métodos perturbativos que, a priori, parecem ser o único meio viável diante da dificuldade de solução das equações de movimento obtidas para os campos. O uso de métodos perturbativos não representa, em princípio, limitações significativas para as implicações fenomenológicas de uma teoria. As contribuições são postas em ordem de importância em uma série. O fator complicador é que estas contribuições podem gerar quantidades divergentes, associadas à presença de integrais de Feynman indefinidas. A ocorrência de divergências em soluções perturbativas de Teorias Quânticas de Campos obriga a construção de uma interpretação adequada para as amplitudes a fim de que possam ser relacionadas às quantidades físicas correspondentes. O mecanismo usual é adotar algum tipo de regularização de modo que os cálculos necessários possam ser realizados. Regularizar implica, invariavelmente, em modificar as formas matemáticas vindas das regras de Feynman utilizadas para construir as amplitudes. Em princípio, um processo de limite, ao qual nos referimos como limite de conexão, pode ser feito com o objetivo de retirar os efeitos da modificação adotada (WEINBERG, 1995). As duas operações, integração e tomada do limite, entretanto, não comutam quando há divergências. Deste modo os resultados podem depender da prescrição de regularização utilizada e até mesmo dos passos intermediários efetuados. Assim, levando em conta que as quantidades divergentes contaminam as séries perturbativas, torna-se essencial separar a parte divergente da parte convergente e, então, através da renormalização, retirar os efeitos dos infinitos nas amplitudes físicas (BATTISTEL; DALLABONA, 2002a).

Nos métodos usuais de regularização, os resultados obtidos podem envolver dependência do resultado final com as escolhas envolvidas em passos intermediários, ou seja, ambiguidades. Neste caso, faz-se necessário um processo de escolha conveniente das quantidades ambíguas presentes nas amplitudes perturbativas obtidas, de forma a se obter um resultado consistente com o resultado experimental, ou seja, faz-se necessário o conhecimento prévio do

resultado experimental da teoria para que o resultado teórico possa ser ajustado de forma adequada, o que compromete o poder de predição da teoria (BATTISTEL; DALLABONA, 2002a).

Devido à presença de indefinições ou divergências, e das ambiguidades, podem ser geradas amplitudes, correspondentes a processos físicos, dependentes da prescrição utilizada e das escolhas arbitrárias feitas nos passos intermediários dos cálculos, tais como a dependência com a rotulação dos momentos das linhas internas nas contribuições envolvendo *loops*. Por estas razões, na presente investigação, utilizaremos uma estratégia alternativa aos métodos tradicionais. No contexto da referida estratégia, proposta e desenvolvida por Orimar A. Battistel (BATTISTEL, 1999), as amplitudes não são comprometidas com as modificações representadas pelas regularizações. As integrais de Feynman não são modificadas nos passos intermediários e apenas propriedades muito gerais são adotadas tal como a validade da propriedade de linearidade para o processo de integração. As partes finita e divergente são completamente separadas. A parte finita, que apresenta toda a dependência dos momentos internos, é calculada naturalmente. A parte divergente é organizada em objetos matemáticos padronizados que conterão apenas um parâmetro arbitrário (λ) com dimensão de massa.

A ferramenta alternativa permite investigações detalhadas e claras em amplitudes perturbativas contendo divergências, não possuindo nenhum tipo de limitação. Pode, portanto, permitir esclarecimentos importantes no caso de amplitudes anômalas onde divergências e ambiguidades aparecem de forma associada em tratamentos utilizando procedimentos convencionais. A investigação associada ao presente trabalho trata precisamente de um problema neste contexto: as amplitudes triangulares quadridimensionais anômalas comumente referidas como *AVV* (e permutações) e *AAA*. Estas amplitudes desempenham um papel crucial na construção da renormalizabilidade do Modelo Padrão através do mecanismo de cancelamento de anomalias. Neste contexto, elas são tratadas como exceções sendo aceitável que suas formas matemáticas violem propriedades de simetria para elas atribuídas por implicações diretas das simetrias implementadas na construção da lagrangiana correspondente. Tais simetrias são exigidas para todas as demais amplitudes do modelo. As razões para isto estão fundamentadas na impossibilidade de serem obtidas formas matemáticas consistentes com todas as propriedades de simetria para elas atribuídas: três identidades de Ward e um limite de baixa energia. Devido a inevitabilidade de alguma violação, justifica-se escolher a forma mais conveniente para as amplitudes, ou a propriedade de simetria que será admitida violada. Por razões fenomenológicas associadas à amplitude *AVV* (o decaimento eletromagnético do pión neutro), não se pode aceitar a viola-

ção de limites de baixa energia; então, aceita-se a violação de alguma identidade de Ward, e a escolhida é a violação daquela relacionada à corrente axial (WEINBERG, 1995).

A rota de construção das ideias passa evidentemente por procedimentos matemáticos capazes de, primeiro, estabelecer a inevitabilidade de alguma violação nas referidas amplitudes e, segundo, permitir, através de operações bem determinadas, aplicáveis às outras amplitudes do modelo de modo universal, determinar as formas exigidas pelo mecanismo de cancelamento de anomalias. O fator complicador deste processo reside no caráter linearmente divergente das estruturas matemáticas associadas às referidas amplitudes, no contexto das soluções perturbativas envolvendo contribuições de *loops*, o que produz um resultado ambíguo como consequência de qualquer procedimento matematicamente honesto, pois integrais de Feynman com tal grau de divergência não são invariantes frente a *shifts* no momento de integração. Isso implica que os resultados obtidos para as amplitudes conterão contribuições dependentes de escolhas arbitrárias de modo inevitável. A utilização de métodos de regularização no processo de cálculo acrescenta ingredientes que tornam menos transparente a interpretação dos resultados uma vez que, invariavelmente, tais métodos modificam as amplitudes que calculam. Sendo assim é natural que se questione quais aspectos da descrição das amplitudes anômalas estão comprometidos com a regularização utilizada. A resposta para este questionamento pode somente ser fornecida como consequência de um estudo detalhado das amplitudes anômalas sem a utilização de regularização. Tendo isto em mente, no presente trabalho, efetuamos um estudo detalhado das amplitudes anômalas utilizando para tal um procedimento que permite o cálculo de amplitudes perturbativas sem que estas sejam modificadas em passos intermediários. As formas mais gerais possíveis para as amplitudes são adotadas de modo a preservar todos os aspectos envolvidos. Assim, a consistência e a universalidade dos procedimentos podem ser consideradas de modo claro e transparente (BATTISTEL; DALLABONA; REIS, 2018).

Primeiramente efetuamos um estudo detalhado das amplitudes triangulares VPP , VSS , ASP e APS , com um índice de Lorentz, que aparecem naturalmente como subestruturas das amplitudes anômalas. Tais amplitudes são, efetivamente, linearmente divergentes e, portanto, intrinsecamente ambíguas, possuem identidades de Ward e limites de baixa energia. A universalidade exigida dos procedimentos nos obriga a transportar os resultados obtidos na descrição destas amplitudes simples para a descrição das amplitudes anômalas. Observamos assim, entre outros aspectos, que o conteúdo potencialmente ambíguo das amplitudes anômalas reside precisamente nas amplitudes triangulares de um índice de Lorentz. Tais termos são potencial-

mente violadores das suas identidades de Ward o que torna difícil a tarefa de compatibilizar a descrição das amplitudes anômalas simultaneamente às de suas subestruturas.

Com o intuito de facilitar a compreensão dos principais aspectos envolvidos na investigação pertinente ao presente trabalho, este foi organizado do seguinte modo: No capítulo 2 é apresentada uma introdução geral sobre o modelo estudado e exemplos práticos e simples de duas amplitudes de dois pontos, bem como uma exemplificação detalhada das relações entre funções de Green, identidades de Ward e limites de baixa energia para estas amplitudes. No capítulo 3, descreveremos o modelo que será utilizado neste trabalho e, novamente, daremos exemplos de aplicações do método através do cálculo das amplitudes relevantes para este trabalho. No capítulo 4, estudaremos as amplitudes de um índice de Lorentz e verificaremos suas relações de simetria, bem como relações entre funções de Green e limites de baixa energia. Também apresentaremos dois métodos de regularização comumente utilizados na literatura e, mapearemos os resultados obtidos em termos destas regularizações. No capítulo 5, começaremos a tratar das amplitudes triangulares anômalas. Primeiramente apresentaremos as relações de simetria que estas amplitudes devem satisfazer e, em seguida, faremos uma análise detalhada das propriedades destas amplitudes e irei então, no capítulo 6, calculá-las. No capítulo 7, verificaremos explicitamente as relações entre funções de Green, identidades de Ward e limites de baixa energia. O capítulo 8 será destinado às conclusões finais deste trabalho.

2 O MODELO, REGRAS DE FEYNMAN, AMPLITUDES E PROPRIEDADES DE SIMETRIA

A fim de descrever a dinâmica de partículas interagentes, no contexto de TQC, especifica-se os campos associados às partículas bem como as simetrias consideradas relevantes para as interações. A partir das simetrias assumidas, podemos obter um funcional dos campos e de suas primeiras derivadas espaço-temporais, ou seja, a lagrangiana. Cada um destes campos contribuirá com termos que determinam a dinâmica dos campos livres (SAKURAI, 1987). Então, para escrever a densidade lagrangiana, podemos separá-la em duas partes, uma associada a parte livre dos campos (\mathcal{L}_F) e a outra associada à parte de interação (\mathcal{L}_I). De forma genérica,

$$\mathcal{L}(\phi_i, \partial_\mu \phi_i) = \mathcal{L}_F(\phi_i, \partial_\mu \phi_i) + \mathcal{L}_I(\phi_i, \partial_\mu \phi_i). \quad (2.1)$$

onde ϕ_i são os campos associados às partículas e $\partial_\mu \phi_i$ corresponde à primeira derivada espaço-temporal. A partir disso, definimos a ação como:

$$S \equiv \int d^4x \mathcal{L}(\phi_i, \partial_\mu \phi_i). \quad (2.2)$$

Todos os termos que são escalares de Lorentz e do grupo de simetria implementado são, em princípio, relevantes. Para obtermos as equações de movimento, impomos a condição de mínima ação do cálculo variacional,

$$\delta S = 0, \quad (2.3)$$

que nos fornecerá as equações de Euler-Lagrange,

$$\frac{\partial}{\partial x_\mu} \left(\frac{\delta \mathcal{L}}{\delta (\partial_\mu \phi_i)} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi_i} = 0. \quad (2.4)$$

Assim, obteremos uma equação para cada campo da teoria. Entretanto, como a parte originária das interações é construída como combinações dos campos, obteremos um conjunto de equações acopladas e, possivelmente, não lineares. Este fato dificulta a obtenção de soluções exatas. Assim, para contornar este problema fazemos uso de métodos perturbativos.

Na investigação pertinente ao presente trabalho, os processos relevantes são *AVV* e *AAA* que envolvem campos externos bosônicos axiais e vetoriais. Entretanto, estas amplitudes estão diretamente relacionadas a outras amplitudes triangulares através de relações de simetria, que

envolvem campos externos escalares e pseudo-escalares. A fim de descrever estes processos, deve-se então construir uma teoria contendo estes campos. O acoplamento de tais campos externos diretamente, permitindo um diagrama árvore para o processo, não é possível num cenário de renormalizabilidade. Assim a única possibilidade passa a ser uma teoria onde os bósons mencionados acoplam-se com campos de $spin \frac{1}{2}$ e não diretamente entre si, a fim de preservar a renormalizabilidade (por contagem de potências) (EBANI, 2015). Os termos de interação serão construídos, em mais baixa ordem, acoplando-se os campos bosônicos com as densidades fermiônicas correspondentes, sem envolver a derivada dos campos:

$$\mathcal{L}_I = iG_S (\bar{\Psi}\Psi) \phi + iG_P (\bar{\Psi}\gamma_5\Psi) \pi - G_V (\bar{\Psi}\gamma_\mu\Psi) V^\mu - G_A (\bar{\Psi}\gamma_5\gamma_\mu\Psi) A^\mu, \quad (2.5)$$

onde, γ_μ e γ_5 são matrizes de Dirac, ϕ é um campo escalar, π é um campo pseudo-escalar, V^μ é um campo vetorial, A^μ é um campo axial e Ψ é um férmion massivo de $spin \frac{1}{2}$. Os campos vetoriais e axiais são admitidos massivos se suas massas são geradas através de um mecanismo de quebra espontânea de simetria. Por sua vez G_S , G_P , G_V e G_A são constantes de acoplamento e, portanto, são *inputs* da teoria (a serem determinadas experimentalmente). Para fins específicos deste trabalho, estas constantes não desempenharão nenhum papel relevante. Por isso, em nome da simplicidade, podem ser adotadas como sendo todas iguais à unidade.

Na teoria acima, os processos nos quais estamos interessados ocorrerão através de amplitudes intermediárias que, em ordem mais baixa perturbativamente, serão *loops* fermiônicos. Os propagadores das linhas internas serão determinados pela solução da parte livre da lagrangiana que corresponde ao campo fermiônico de $spin \frac{1}{2}$. Esta será dada por

$$\mathcal{L}_F = \bar{\psi} (i\gamma^\mu \partial_\mu - m) \psi, \quad (2.6)$$

onde m a massa correspondente (DAS, 2008).

2.1 Regras de Feynman

Com a teoria elaborada, torna-se, em princípio, possível a descrição da dinâmica dos campos interagentes. Entretanto, como visto acima, nos depararemos com um conjunto de equações diferenciais acopladas, o que é de difícil solução. Por esta razão, nós utilizamos de métodos perturbativos para obtermos as soluções. A construção de tais soluções pode ser sistematizada através das regras de Feynman, que, se seguidas, permitem a construção das am-

plitudes físicas correspondentes à expansão perturbativa. As contribuições serão construídas em termos dos vértices e os propagadores. Assim, qualquer processo físico pode ser calculado, em uma ordem previamente estabelecida, pela aplicação destas regras (WITT B.; SMITH, 1986).

Um processo físico é definido por suas linhas externas, que caracterizam os estados inicial e final. As amplitudes representam como estes estados podem ser conectados por diagramas de Feynman. Cada diagrama possível corresponderá a uma expressão determinada pelas regras de Feynman. As regras de Feynman necessárias a este trabalho são as seguintes:

I) O propagador do férmion que está associado aos campos Ψ e $\bar{\Psi}$, carrega um momento k e uma massa m . A expressão correspondente é dada por:

$$iS_F(k) = \frac{i}{\not{k} - m}, \quad (2.7)$$

onde $\not{k} = k^\mu \gamma_\mu$. Este é representado diagramaticamente por uma linha contínua que liga dois vértices onde ocorrem as interações. No centro da linha temos uma seta que quando aponta para direita representa uma partícula e quando aponta para a esquerda quando representa uma antipartícula.

II) Uma interação é representada por um vértice, onde deve ocorrer a conservação da energia e momento. Um vértice representa a conexão de dois propagadores fermiônicos e um bosônico. Para cada vértice atribui-se um fator adequado, dependendo dos campos conectados. Na lagrangiana que adotamos, estes fatores serão:

$$\Gamma_i = (1, \gamma_5, \gamma_\mu, \gamma_\mu \gamma_5), \quad (2.8)$$

correspondentes aos vértices contendo um par férmion anti-férmion acoplado aos campos: escalar, pseudo escalar, vetorial e axial, respectivamente.

III) Em diagramas contendo *loops*, devemos integrar sobre todos os valores do momento não restrito pela conservação de energia e momento dos vértices conectando os momentos internos aos externos,

$$\int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4}. \quad (2.9)$$

2.2 Amplitudes

Para a investigação pertinente ao presente trabalho, é conveniente a definição das amplitudes de um ponto:

$$T^{\Gamma_1} = \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} t^{\Gamma_1}, \quad (2.10)$$

com

$$t^{\Gamma_i} = Tr \{ \Gamma_i S_F(k + k_1; m) \}, \quad (2.11)$$

que pode ser escrita como

$$t^{\Gamma_1} = \frac{(k + k_1)^\alpha Tr \{ \Gamma_1 \gamma_\alpha \} + m Tr \{ \Gamma_1 \}}{D_1} \quad (2.12)$$

onde introduzimos $D_i = (k + k_i)^2 - m_i^2$ (BATTISTEL; DALLABONA, 2012). Estas amplitudes podem ser representadas diagramaticamente pela figura 2.1.

Figura 2.1 – Diagrama de Feynman para as funções de Green de um ponto.



As funções de dois pontos definimos de modo análogo;

$$T^{\Gamma_1 \Gamma_2} = \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} t^{\Gamma_1 \Gamma_2}, \quad (2.13)$$

com

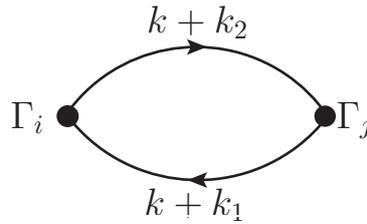
$$T^{\Gamma_1 \Gamma_2} = Tr \{ \Gamma_1 S_F(k + k_1; m) \Gamma_2 S_F(k + k_2; m) \}, \quad (2.14)$$

onde os Γ_i são os vértices e os S_F são os propagadores, expressão esta que pode ser colocada, com o uso da álgebra de Dirac, na seguinte forma:

$$\begin{aligned}
t^{\Gamma_1\Gamma_2} &= \frac{(k+k_1)^\alpha(k+k_2)^\beta}{D_{12}} Tr\{\Gamma_1\gamma_\alpha\Gamma_2\gamma_\beta\} \\
&+ m \frac{(k+k_2)^\beta}{D_{12}} Tr\{\Gamma_1\Gamma_2\gamma_\beta\} \\
&+ m \frac{(k+k_1)^\alpha}{D_{12}} Tr\{\Gamma_1\gamma_\alpha\Gamma_2\} \\
&+ \frac{m^2}{D_{12}} Tr\{\Gamma_1\Gamma_2\},
\end{aligned} \tag{2.15}$$

onde definimos $D_{ij} = D_i D_j$ (BATTISTEL; DALLABONA, 2012). Estas amplitudes podem ser representadas diagramaticamente na figura 2.2.

Figura 2.2 – Diagrama de Feynman para as funções de Green de dois pontos



Por sua vez, as amplitudes de três pontos são definidas como:

$$T^{\Gamma_1\Gamma_2\Gamma_3} = \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} t^{\Gamma_1\Gamma_2\Gamma_3}, \tag{2.16}$$

onde

$$t^{\Gamma_1\Gamma_2\Gamma_3} = Tr\{\Gamma_1 S_F(k+k_1; m) \Gamma_2 S_F(k+k_2; m) \Gamma_3 S_F(k+k_3; m)\}. \tag{2.17}$$

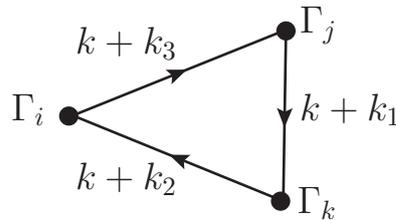
Podemos ainda escrever esta expressão na forma:

$$\begin{aligned}
t^{\Gamma_1\Gamma_2\Gamma_3} = & \frac{(k+k_1)^\alpha(k+k_2)^\beta(k+k_3)^\eta}{D_{123}} Tr \{ \Gamma_1\gamma_\alpha\Gamma_2\gamma_\beta\Gamma_3\gamma_\eta \} \\
& + m \frac{(k+k_2)^\beta(k+k_3)^\eta}{D_{123}} Tr \{ \Gamma_1\Gamma_2\gamma_\beta\Gamma_3\gamma_\eta \} \\
& + m \frac{(k+k_1)^\alpha(k+k_3)^\eta}{D_{123}} Tr \{ \Gamma_1\gamma_\alpha\Gamma_2\Gamma_3\gamma_\eta \} \\
& + m \frac{(k+k_1)^\alpha(k+k_2)^\beta}{D_{123}} Tr \{ \Gamma_1\gamma_\alpha\Gamma_2\gamma_\beta\Gamma_3 \} \\
& + m^2 \frac{(k+k_3)^\eta}{D_{123}} Tr \{ \Gamma_1\Gamma_2\Gamma_3\gamma_\eta \} \\
& + m^2 \frac{(k+k_2)^\beta}{D_{123}} Tr \{ \Gamma_1\Gamma_2\gamma_\beta\Gamma_3 \} \\
& + m^2 \frac{(k+k_1)^\alpha}{D_{123}} Tr \{ \Gamma_1\gamma_\alpha\Gamma_2\Gamma_3 \} \\
& + \frac{m^3}{D_{123}} Tr \{ \Gamma_1\Gamma_2\Gamma_3 \}.
\end{aligned} \tag{2.18}$$

Na expressão acima $D_{ijk} = D_i D_j D_k$ (BATTISTEL; DALLABONA, 2012).

As amplitudes triangulares estão representadas diagramaticamente na figura 2.3.

Figura 2.3 – Diagrama de Feynman para as funções de Green de três pontos



Na construção das amplitudes, o traço deve ser tomado devido ao caráter matricial da quantidade entre chaves e a integração tomada em diagramas com *loops* devido ao fato de o momento k não ser restrito pela conservação de energia e momento nos vértices. Podemos ver isto assumindo para o estado inicial o momento r e para os estados finais os momentos q e p . A conservação de energia e momentum estabelece que $r = q + p$. Isto estabelece as restrições para as diferenças dos momentos arbitrários utilizados para rotular as linhas internas

$$\begin{aligned}
p &= k_1 - k_2 \\
q &= k_3 - k_1 \\
r &= k_3 - k_2.
\end{aligned} \tag{2.19}$$

ou seja, as diferenças entre os momentos das linhas internas corresponderão aos momentos externos e, portanto, serão quantidades físicas. A soma destas quantidades,

$$\begin{aligned} P &= k_2 + k_1, \\ Q &= k_3 + k_1, \\ R &= k_2 + k_3, \end{aligned} \tag{2.20}$$

representarão quantidades arbitrárias e indefinidas. Fica claro então que a integração sobre o momento do *loop* k deve-se ao fato de que qualquer valor de k satisfaz as relações de conservação de energia e momento nos vértices.

Assim, para construirmos as amplitudes desejadas basta tomarmos os adequados operadores de vértices (BATTISTEL; DALLABONA, 2012). Podemos ilustrar este procedimento através duas amplitudes simples de dois pontos, por exemplo, a amplitude VV . Os operadores de vértice são $\Gamma_i = \gamma_\mu$ e $\Gamma_j = \gamma_\nu$. Assim:

$$t_{\mu\nu}^{VV} = Tr \{ \gamma_\mu S_F(k + k_1; m) \gamma_\nu S_F(k + k_2; m) \}. \tag{2.21}$$

Portanto, a amplitude correspondente fica:

$$T_{\mu\nu}^{VV} = \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} t_{\mu\nu}^{VV}. \tag{2.22}$$

Por sua vez, para a amplitude AA teremos $\Gamma_i = \gamma_\mu \gamma_5$ e $\Gamma_j = \gamma_\nu \gamma_5$ e, portanto;

$$t_{\mu\nu}^{AA} = Tr \{ \gamma_\mu \gamma_5 S_F(k + k_1; m) \gamma_\nu \gamma_5 S_F(k + k_2; m) \}. \tag{2.23}$$

Com isso:

$$T_{\mu\nu}^{AA} = \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} t_{\mu\nu}^{AA}. \tag{2.24}$$

Neste ponto é importante notar que, através de uma contagem de potências nos momentos do *loop*, podemos perceber um caráter divergente destas funções. Para as funções de dois pontos podemos perceber uma divergência(D) quadrática $D = 2$. Portanto, estas funções são quantidades matemáticas indefinidas tornando-se necessário a adoção de uma prescrição para contornar este problema, o que discutiremos no próximo capítulo.

2.3 Relações entre funções de Green

Tendo em vistas que as amplitudes do cálculo perturbativo podem ser quantidades indefinidas, o que exige a adoção de uma prescrição para manuseá-las, estaremos sempre preocupados com a consistência das operações realizadas no contexto da técnica adotada. Uma das ferramentas mais úteis para verificar a consistência de operações envolvendo amplitudes divergentes é o que denominamos relações entre funções de Green. Estas são identidades que relacionam amplitudes do cálculo perturbativo. Elas podem ser estabelecidas sempre que houver um índice de Lorentz presente em uma amplitude (BATTISTEL, 1999) (BATTISTEL; MOTA; NEMES, 1998). Para estabelecê-las nós utilizamos apenas de propriedades gerais como a linearidade e ciclicidade da operação de traço (na presença de férmions) e, principalmente, da linearidade da operação de integração.

Com o intuito de ilustrar, consideremos a amplitude VV definida acima (EBANI, 2015). Contraímos a expressão correspondente a amplitude, para um único valor do momento do *loop*, e reescrevemos o resultado convenientemente;

$$\begin{aligned} (k_3 - k_1)^\mu t_{\mu\nu}^{VV} &= \gamma_\nu \frac{1}{[(\not{k} + \not{k}_1) - m]} (k_3 - k_1)^\mu \gamma_\mu \frac{1}{[(\not{k} + \not{k}_3) - m]} \\ &= \gamma_\nu \frac{1}{[(\not{k} + \not{k}_1) - m]} [(\not{k}_3 + \not{k} - m) - (\not{k}_1 + \not{k} - m)] \frac{1}{[(\not{k} + \not{k}_3) - m]}, \end{aligned} \quad (2.25)$$

o que nos permite escrever

$$(k_3 - k_1)^\mu t_{\mu\nu}^{VV} = \gamma_\nu \frac{1}{[(\not{k} + \not{k}_1) - m]} - \gamma_\nu \frac{1}{[(\not{k} + \not{k}_2) - m]}. \quad (2.26)$$

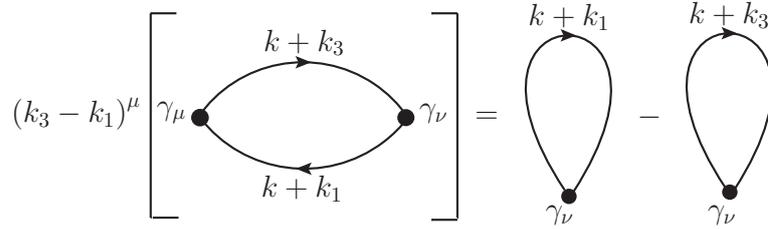
Tomando o traço em ambos os lados e integrando no momento do *loop* teremos uma relação entre amplitudes do cálculo perturbativo;

$$(k_3 - k_1)^\mu T_{\mu\nu}^{VV} = T_\nu^V(k_1, m) - T_\nu^V(k_3, m). \quad (2.27)$$

Esta relação esta diagramaticamente representada na figura 2.4.

Quando o índice de Lorentz está associado ao vértice axial, procedemos de modo ligeiramente diferente. Como tal na amplitude AA , primeiro fazemos:

Figura 2.4 – Representação diagramática da relação entre funções de Green para amplitude VV .



$$\begin{aligned}
 (k_3 - k_1)^\mu t_{\mu\nu}^{AA} &= \gamma_\nu \gamma_5 \frac{1}{[(\not{k} + \not{k}_1) - m]} (k_3 - k_1)^\mu \gamma_\mu \gamma_5 \frac{1}{[(\not{k} + \not{k}_3) - m]} \\
 &= \gamma_\nu \gamma_5 \frac{1}{[(\not{k} + \not{k}_1) - m]} [-\gamma_5 (\not{k} + \not{k}_3 - m) - (\not{k} + \not{k}_1 - m) \gamma_5 - 2m\gamma_5] \frac{1}{[(\not{k} + \not{k}_3) - m]}
 \end{aligned} \tag{2.28}$$

expressão que pode ser escrita como:

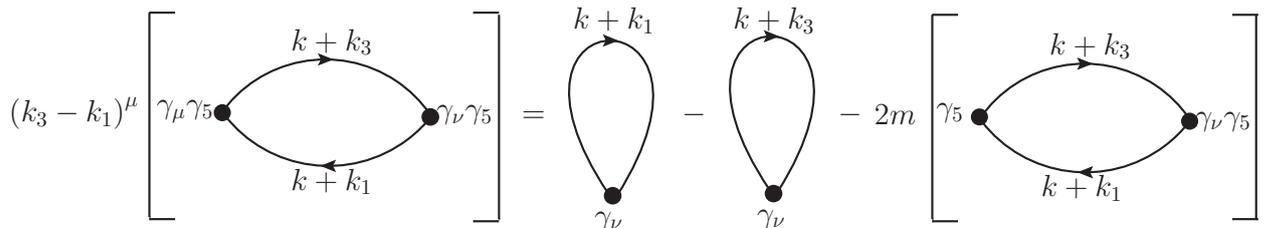
$$\begin{aligned}
 (k_3 - k_1)^\mu t_{\mu\nu}^{AA} &= \left\{ \gamma_\nu \frac{1}{[(\not{k} + \not{k}_1) - m]} \right\} - \left\{ \gamma_\nu \frac{1}{[(\not{k} + \not{k}_3) - m]} \right\} \\
 &\quad - 2m\gamma_5 \frac{1}{[(\not{k} + \not{k}_3) - m]} \gamma_\nu \gamma_5 \frac{1}{[(\not{k} + \not{k}_1) - m]}.
 \end{aligned} \tag{2.29}$$

Tomando o traço em ambos os lados (e utilizando suas propriedades de ciclicidade e linearidade) assim como integrando no momento do *loop*, identificaremos a relação:

$$(k_3 - k_1)^\mu T_{\mu\nu}^{AA} = T_\nu^V(k_1, m) - T_\nu^V(k_3, m) - 2mT_\nu^{PA}(k_3, k_1, m), \tag{2.30}$$

representada diagramaticamente na figura 2.5.

Figura 2.5 – Representação diagramática da relação entre funções de Green para amplitude AA .



As relações entre funções de Green desempenham o papel de vínculos de consistência, de modo que, ao calcularmos todas as estruturas envolvidas separadamente, devemos obter as relações identificadas acima satisfeitas automaticamente, qualquer que seja a interpretação para

as quantidades divergentes eventualmente presentes. A violação das identidades acima implicaria inevitavelmente na violação de uma propriedade fundamental: a linearidade da operação de integração.

Utilizaremos deste tipo de instrumento nas investigações envolvendo as amplitudes triangulares que consideraremos nos capítulos seguintes.

2.4 Identidades de Ward

As amplitudes do cálculo perturbativo (ou exato) possuem propriedades que são em última instância, consequências das simetrias implementadas na construção da lagrangiana. Invariâncias da lagrangiana estão relacionadas a leis de conservação, o que pode ser visto de modo transparente através do Teorema de Noether (LEMOS, 2007). De um modo geral, as simetrias implementadas na construção da Lagrangiana de uma teoria implicam em propriedades específicas para as correntes presentes.

Na presente investigação, é possível identificar propriedades gerais de simetria devido à estrutura da lagrangiana adotada. Os campos bosônicos estão acoplados com densidades fermiônicas identificadas pelas estruturas:

$$j_i(x) = \bar{\psi}(x)\Gamma_i\psi(x), \quad (2.31)$$

onde o operador de vértice Γ_i caracteriza as densidades: escalar $S(x)$, pseudo-escalar $P(x)$, vetorial $V_\mu(x)$ e axial $A_\mu(x)$, para os operadores $\Gamma_i = 1, \gamma_5, \gamma_\mu, \gamma_\mu\gamma_5$, respectivamente, ou seja: (WITT B.; SMITH, 1986)

$$V_\mu(x) = \bar{\Psi}(x)\gamma_\mu\Psi(x) \quad (2.32)$$

$$A_\mu(x) = \bar{\Psi}(x)\gamma_\mu\gamma_5\Psi(x) \quad (2.33)$$

$$P(x) = \bar{\Psi}(x)\gamma_5\Psi(x) \quad (2.34)$$

$$S(x) = \bar{\Psi}(x)\Psi(x). \quad (2.35)$$

Assim, tomando a divergência das correntes e utilizando a equação de Dirac, podemos obter propriedades de simetria: as Identidades de Ward. As correntes devem satisfazer:

$$\partial_\mu V^\mu(x) = 0 \quad (2.36)$$

$$\partial_\mu A^\mu(x) = -2mP(x), \quad (2.37)$$

ou seja, na presença de uma única espécie de férmion a corrente vetorial deve ser conservada e o divergente da corrente axial deve ser proporcional à corrente pseudo-escalar.

As relações acima determinam propriedades cruciais para as amplitudes da teoria correspondente. Elas estabelecem que, para toda amplitude contendo um ou mais índices de Lorentz, a contração obtida com o momento externo do vértice estará relacionada a expressão da amplitude onde o operador de vértice contendo o índice de Lorentz é trocado pelo pseudo-escalar, se o índice de Lorentz estiver relacionado ao índice axial. Ou seja, quando calculamos uma amplitude carregando um índice axial, resultado da presença de um operador $\gamma_\mu \gamma_5$ num dos vértices, a contração deste índice tensorial com o momento externo correspondente ao referido vértice, deve gerar uma relação bem determinada com a amplitude topologicamente idêntica àquela contraída, exceto pelo operador do vértice contraído ser trocado pelo operador γ_5 .

Assim, cada uma destas amplitudes deverá satisfazer uma identidade de Ward associada a cada índice de Lorentz que carrega. A amplitude VV deve satisfazer duas identidades referentes aos índices vetoriais e, a amplitude AA deve satisfazer as identidades referentes aos índices axiais, portanto:

$$q^\mu T_{\mu\nu}^{VV} = 0 \quad (2.38)$$

$$q^\nu T_{\mu\nu}^{VV} = 0 \quad (2.39)$$

$$q^\mu T_{\mu\nu}^{AA} = -2mT_\nu^{PA} \quad (2.40)$$

$$q^\nu T_{\mu\nu}^{AA} = -2mT_\mu^{AP}. \quad (2.41)$$

Estas relações de simetria devem ser satisfeitas para que a teoria possa ser renormalizável, ou seja, tenha poder de predição. Se alguma identidade de Ward é inevitavelmente violada, a teoria apresentará anomalias e então só conseguiremos obter uma teoria renormali-

zável se existir um mecanismo de cancelamento dessas anomalias por adição de outros campos ao modelo.

Obter as identidades de Ward automaticamente satisfeitas após o cálculo explícito das amplitudes perturbativas é um grande desafio para qualquer prescrição. Um fator intrinsecamente complicador está associado ao grau de divergência das amplitudes. Se o grau for superior ao logarítmico, as integrais de Feynman não serão invariantes frente a *shifts* na variável de integração. Isto implica que diferentes escolhas para os rótulos dos momentos das linhas internas podem levar a diferentes resultados para as amplitudes. Assim, o cálculo perturbativo é intrinsecamente não preditivo pois produzirá termos ambíguos nas amplitudes. Estes termos são potencialmente violadores das identidades de Ward pois a hipótese de termos não físicos não é assumida na dedução destas propriedades de simetria. Nós discutiremos este aspecto ao considerarmos as amplitudes triangulares que fazem parte da investigação associada ao presente trabalho.

2.5 Limites de baixa energia

As amplitudes correspondentes aos processos físicos de uma teoria são tensores de Lorentz. Como tal possuem propriedades gerais ditadas pelo caráter tensorial específico. Nós podemos utilizar este fato para obter vínculos de consistência adicionais àqueles considerados acima para as amplitudes perturbativas. São limites cinemáticos a serem satisfeitos pelas amplitudes como consequência de suas decomposições tensoriais gerais; os limites de baixa energia.

Para estabelecermos tais limites devemos considerar a forma mais geral dos tensores correspondentes às amplitudes (BATTISTEL; DALLABONA, 2002b). A fim de exemplificar, consideremos a amplitude AA . Trata-se de um tensor de dois índices de Lorentz par, devido à presença de um número par de vértices axiais. O tensor será, inevitavelmente, construído pelos quadrivetores presentes na amplitude que são os momentos internos k_1 e k_3 . Se dispuséssemos de um método para a solução exata das amplitudes deveríamos escrever a forma mais geral deste tensor como:

$$T_{\mu\nu}^{AA} = g_{\mu\nu}F_1(q^2) + q_\mu q_\nu F_2(q^2), \quad (2.42)$$

onde as F_i 's são funções escalares e $q = k_3 - k_1$ representa o momento externo. No presente trabalho adotaremos uma atitude mais geral e adequada ao cálculo perturbativo. Como a amplitude AA será obtida a partir de regras de Feynman, com grau de divergência superior ao

logarítmico, a amplitude resultante não será construída apenas pela combinação dos momentos internos que resultam no momento externo mas também será construída com o vetor $Q = k_3 + k_1$ uma vez que neste caso as integrais de Feynman não são invariantes frente a *shifts* na variável de integração. Assim, ao efetuarmos o *shift* $k' = k + k_1$ será necessário compensar este *shift* com os termos de superfície correspondentes. Assim, assumiremos que, de modo inevitável, a amplitude terá a estrutura tensorial

$$T_{\mu\nu}^{AA} = Q_\mu Q_\nu G_1 + Q_\mu q_\nu G_2 + Q_\nu q_\mu G_3 + g_{\mu\nu} F_1(q^2) + q_\mu q_\nu F_2(q^2). \quad (2.43)$$

Evidentemente os G'_i terão a estrutura de termos de superfície. Os limites de baixa energia são obtidos pela contração da forma geral acima com o momento externo. Como tal

$$q^\mu T_{\mu\nu}^{AA} = Q_\nu (q \cdot Q) G_1 + q_\nu (q \cdot Q) G_2 + Q_\nu q^2 G_3 + q_\nu F_1(q^2) + q_\nu q^2 F_2(q^2). \quad (2.44)$$

Uma segunda contração resulta em:

$$q^\nu q^\mu T_{\mu\nu}^{AA} = (q \cdot Q)^2 G_1 + (q \cdot Q) q^2 G_2 + (q \cdot Q) q^2 G_3 + q^2 F_1(q^2) + (q^2)^2 F_2(q^2). \quad (2.45)$$

Deste modo tomando este resultado em $q^2 = 0$ teremos:

$$q^\nu q^\mu T_{\mu\nu}^{AA} \Big|_{q^2=0} = (q \cdot Q)^2 G_1, \quad (2.46)$$

ou seja, neste limite cinemático, a parte dependente apenas do momento externo deve se anular. Neste limite, o resultado será determinado por um termo de superfície e será, portanto, ambíguo. Na ausência destes termos, como consequência de uma prescrição específica adotada, este limite implica que um resultado nulo deve ser obtido e, como as duas contrações foram feitas sobre índices axiais, o resultado deve ser proporcional à amplitude de dois pontos *PP*, como consequência da identidade de Ward. Assim, na ausência de termos ambíguos devido ao fato de a amplitude *AA* se anular neste limite, um vínculo é estabelecido para a amplitude a *PP*. Nós faremos uso deste ingrediente nas discussões futuras a respeito das amplitudes triangulares que consideraremos.

3 ESTRATÉGIA PARA O TRATAMENTO DAS DIVERGÊNCIAS

Como vimos no capítulo anterior, as expressões obtidas para as amplitudes, construídas a partir das regras de Feynman, contendo *loops*, podem ser quantidades divergentes. É necessário, portanto, alguma prescrição para contornar esta dificuldade. O procedimento usual é adotar algum tipo de regularização.

Os métodos tradicionais de regularização, invariavelmente, assumem consequências específicas para os resultados, pois modificam as integrais de Feynman segundo alguma prescrição particular. Em princípio, sempre há algum tipo de limite a ser feito ao final, sobre o resultado modificado das integrais, que permitiria remover a modificação. Entretanto, as operações de integração e a tomada do referido limite não comutam, precisamente quando as integrais modificadas são divergentes. Os resultados estão, portanto, contaminados com alguma dependência com o método específico utilizado e, frequentemente, com a sequência específica de passos intermediários utilizada. Estes aspectos são potencialmente cruciais quando relações de simetria ou limites de baixa energia são verificados, uma vez que estes estabelecem resultados precisos para as amplitudes. Como tal, quando uma corrente deve ser obtida conservada, qualquer resultado que não seja o idênticamente nulo, para a contração da amplitude calculada com o momento externo associado ao vértice onde o índice vetorial está localizado, implicará em uma violação de simetria. Em princípio, não é possível saber se o fator envolvido na violação está associado ao procedimento utilizado para calcular a amplitude ou é a manifestação de alguma implicação física contida sutilmente na teoria que gerou a referida amplitude.

A fim de contornar estes problemas, no final dos anos 90 uma nova estratégia foi desenvolvida, com o propósito de eliminar o uso de regularizações em cálculos perturbativos de TQC's (BATTISTEL, 1999).

Esta nova estratégia consiste em reescrever os propagadores de maneira que consigamos isolar todos os parâmetros físicos em estruturas matemáticas convergentes. A parte divergente é organizada em estruturas matemáticas padronizadas de maneira que o cálculo explícito destas quantidades não é, de fato, efetuado.

É possível separar completamente a parte divergente dentro dos propagadores se gerarmos uma série decrescente nas potências do momento do *loop*.

Isso pode ser esquematicamente representado da seguinte maneira. Seja uma integral de Feynman com um certo grau de divergência:

$$\begin{aligned} \int \frac{d^2\omega_k}{(2\pi)^{2\omega}} f(k) &\rightarrow \int \frac{d^2\omega_k}{(2\pi)^{2\omega}} [f_1(k) + f_2(k) + \dots + f_n(k)] \left\{ \lim_{\Lambda_i^2 \rightarrow \infty} G(\Lambda_i^2, k^2) \right\} \\ &= \int_{\Lambda} \frac{d^2\omega_k}{(2\pi)^{2\omega}} [f_1(k) + f_2(k) + \dots + f_n(k)]. \end{aligned} \quad (3.1)$$

Se o grau de divergência diminui à medida que n aumenta, o último termo poderá ser sempre convergente. Portanto, após separarmos a parte convergente dos propagadores podemos tomar o limite de conexão ($\lim_{\Lambda^2 \rightarrow \infty} G_{\Lambda}(k, \Lambda^2) = 1$) nestes termos, já que a integral e a tomada do limite comutam. Desse modo, obtemos:

$$\begin{aligned} &\int_{\Lambda} \frac{d^2\omega_k}{(2\pi)^{2\omega}} [f_1(k) + f_2(k) + \dots + f_n(k)] \\ &= \int_{\Lambda} \frac{d^2\omega_k}{(2\pi)^{2\omega}} f_1(k) + \int_{\Lambda} \frac{d^2\omega_k}{(2\pi)^{2\omega}} f_2(k) + \dots + \int_{\Lambda} \frac{d^2\omega_k}{(2\pi)^{2\omega}} f_n(k). \end{aligned} \quad (3.2)$$

onde, utilizamos apenas a validade da linearidade da integração.

Uma identidade que serve para estes propósitos é a seguinte:

$$\begin{aligned} \frac{1}{[(k+k_i)^2 - m_i^2]} &= \sum_{j=0}^N \frac{(-1)^j (k_i^2 + 2k_i \cdot k + \lambda^2 - m_i^2)^j}{(k^2 - \lambda^2)^{j+1}} \\ &\quad + \frac{(-1)^{N+1} (k_i^2 + 2k_i \cdot k + \lambda^2 - m_i^2)^{N+1}}{(k^2 - \lambda^2)^{N+1} [(k+k_i)^2 - m_i^2]}, \end{aligned} \quad (3.3)$$

onde, à medida que N aumenta a contagem de potência em k diminui. Aqui, k_i é um momento arbitrário de uma linha interna, m_i é a massa carregada pelo correspondente campo e λ é um parâmetro arbitrário com dimensão de massa.

A quantidade N , na expressão acima, é tomada como igual ou superior ao maior grau de divergência envolvido. Dessa forma, as partes com caráter divergente e convergente aparecerão naturalmente separadas. Com isso poderemos resolver as integrais convergentes sem nenhuma restrição impondo-se o limite de conexão.

As quantidades divergentes não serão mais manipuladas e conterão apenas um parâmetro arbitrário λ . O resultado final deve ser independente deste valor. Essas quantidades divergentes assumem as formas gerais:

$$\int \frac{d^{2\omega}k}{(2\pi)^{2\omega}} \frac{1}{(k^2 - \lambda^2)^\alpha}, \quad (3.4)$$

$$\int \frac{d^{2\omega}k}{(2\pi)^{2\omega}} \frac{k_{\mu_1} k_{\mu_2}}{(k^2 - \lambda^2)^{\alpha+1}}, \quad (3.5)$$

$$\int \frac{d^{2\omega}k}{(2\pi)^{2\omega}} \frac{k_{\mu_1} k_{\mu_2} k_{\mu_3} k_{\mu_4}}{(k^2 - \lambda^2)^{\alpha+2}}, \quad (3.6)$$

$$\int \frac{d^{2\omega}k}{(2\pi)^{2\omega}} \frac{k_{\mu_1} k_{\mu_2} k_{\mu_3} k_{\mu_4} \dots k_{\mu_{n-1}} k_{\mu_n}}{(k^2 - \lambda^2)^{\alpha+\frac{n}{2}}}. \quad (3.7)$$

Podemos organizar estas estruturas divergentes de modo conveniente definindo um conjunto de objetos pela combinação das estruturas acima. Na investigação pertinente ao presente trabalho o conjunto de objetos:

$$\begin{aligned} \square_{\alpha\beta\mu\nu}(\lambda^2) &= \int_{\Lambda} \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{24k_{\mu}k_{\nu}k_{\alpha}k_{\beta}}{(k^2 - \lambda^2)^4} - g_{\alpha\beta} \int_{\Lambda} \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{4k_{\mu}k_{\nu}}{(k^2 - \lambda^2)^3} + \\ &- g_{\alpha\nu} \int_{\Lambda} \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{4k_{\beta}k_{\mu}}{(k^2 - \lambda^2)^3} - g_{\alpha\mu} \int_{\Lambda} \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{4k_{\beta}k_{\nu}}{(k^2 - \lambda^2)^3} \end{aligned} \quad (3.8)$$

$$\Delta_{\mu\nu}(\lambda^2) = \int_{\Lambda} \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{4k_{\mu}k_{\nu}}{(k^2 - \lambda^2)^3} - \int_{\Lambda} \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{g_{\mu\nu}}{(k^2 - \lambda^2)^2} \quad (3.9)$$

$$\nabla_{\mu\nu}(\lambda^2) = \int_{\Lambda} \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{2k_{\mu}k_{\nu}}{(k^2 - \lambda^2)^2} - \int_{\Lambda} \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{g_{\mu\nu}}{(k^2 - \lambda^2)} \quad (3.10)$$

$$I_{\log}(\lambda^2) = \int_{\Lambda} \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{1}{(k^2 - \lambda^2)^2} \quad (3.11)$$

$$I_{quad}(\lambda^2) = \int_{\Lambda} \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{1}{(k^2 - \lambda^2)}, \quad (3.12)$$

é suficiente, pois a divergência envolvida é, no máximo, quadrática.

Os termos finitos vindos das integrais de Feynman, por sua vez, podem ser colocados em funções específicas definidas em representações integrais, de acordo com o número de propagadores internos (BATTISTEL; DALLABONA, 2012).

De acordo com a estratégia descrita acima, a integral com apenas um propagador:

$$I_1(k_1) = \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{1}{[(k+k_1)^2 - m^2]}, \quad (3.13)$$

pode ser escrita da seguinte forma:

$$I_1(k_1) = I_{quad}(m^2) + (m^2 - \lambda^2) I_{\log}(\lambda^2) + \frac{i}{(4\pi)^2} \left[m^2 - \lambda^2 - m^2 \ln\left(\frac{m^2}{\lambda^2}\right) \right] + k_{3\mu} k_{3\nu} \Delta^{\mu\nu}(\lambda^2) \quad (3.14)$$

As integrais que possuem dois propagadores, necessárias para os propósitos do presente trabalho:

$$[(I_2); (I_2)_\mu] = \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{[1; k_\mu]}{[(k+k_1)^2 - m^2][(k+k_2)^2 - m^2]}, \quad (3.15)$$

serão escritas nas formas:

$$(I_2) = I_{\log}(\lambda^2) - \frac{i}{(4\pi)^2} \xi_0^0(q^2; m^2, \lambda^2) \quad (3.16)$$

e

$$(I_2)_\mu = -\frac{1}{2} [Q^\alpha \Delta_{\mu\alpha}(\lambda^2) + Q_\mu I_{\log}(\lambda^2)] + \frac{i}{(4\pi)^2} \frac{Q_\mu}{2} \xi_0^0(q^2; m^2, \lambda^2). \quad (3.17)$$

Nas expressões acima introduzimos a definição:

$$\xi_n^0(q^2; m^2; \lambda^2) = \int_0^1 dz (z^n) \ln \left[\frac{q^2(1-z)z - m^2}{-\lambda^2} \right], \quad (3.18)$$

com $n = 0, 1, 2, 3, \dots$ e utilizamos a relação

$$\xi_1^0(q^2; m^2; \lambda^2) = \frac{1}{2} \xi_0^0(q^2; m^2; \lambda^2). \quad (3.19)$$

Por sua vez, as integrais que possuem três propagadores:

$$[(I_3); (I_3)_\mu; (I_3)_{\mu\nu}] = \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{[1; k_\mu; k_\mu k_\nu]}{[(k+k_1)^2 - m_1^2][(k+k_2)^2 - m_2^2][(k+k_3)^2 - m_3^2]}, \quad (3.20)$$

serão escritas nas formas:

$$I_3 = \frac{i}{(4\pi)^2} \xi_{00}^{-1}(p, q, m^2), \quad (3.21)$$

$$(I_3)_\mu = - \left(\frac{i}{(4\pi)} \right) [k_{1\mu} \xi_{00}^{-1}(p, q, m^2) + q_\mu \xi_{10}^{-1}(p, q, m^2) + p_\mu \xi_{01}^{-1}(p, q, m^2)] \quad (3.22)$$

e

$$\begin{aligned} (I_3)_{\mu\nu} = & \frac{1}{4} [\Delta_{\mu\nu}(\lambda^2) + g_{\mu\nu} I_{\log}(\lambda^2)] + \left(\frac{i}{(4\pi)} \right) \left\{ -\frac{1}{2} g_{\mu\nu} \xi_{00}^0(p, q, m^2) + \right. \\ & + q_\mu q_\nu \xi_{20}^{-1}(p, q, m^2) + p_\mu p_\nu \xi_{02}^{-1}(p, q, m^2) + \\ & + p_\mu q_\nu \xi_{11}^{-1}(p, q, m^2) + q_\mu p_\nu \xi_{11}^{-1}(p, q, m^2) + \\ & + k_{1\mu} (q_\nu \xi_{10}^{-1}(p, q, m^2) + p_\nu \xi_{01}^{-1}(p, q, m^2)) + \\ & \left. + k_{1\nu} (q_\mu \xi_{10}^{-1}(p, q, m^2) + p_\mu \xi_{01}^{-1}(p, q, m^2)) + k_{1\nu} k_{1\mu} \xi_{00}^{-1}(p, q, m^2) \right\}. \quad (3.23) \end{aligned}$$

Aqui introduzimos as definições (BATTISTEL; DALLABONA, 2012):

$$\xi_{mn}^{-1}(p, q; m) = \int_0^1 dz \int_0^{1-z} dy \frac{y^m z^n}{Q(q, z; p, y)} \quad (3.24)$$

e

$$\xi_{mn}^0(p, q; m; \lambda^2) = \int_0^1 dz \int_0^{1-z} (y^m z^n) dy \ln \left[\frac{Q(q, z; p, y)}{-\lambda^2} \right], \quad (3.25)$$

onde

$$Q(q, z; p, y) = q^2(1-z)z + p^2(1-y)y - 2p \cdot q(zy) - m^2. \quad (3.26)$$

Estas funções possuem um conjunto de propriedades úteis nas investigações envolvendo as amplitudes triangulares anômalas, na verificação das identidades de Ward:

$$p^2 \xi_{02}^{-1} + (p \cdot q) \xi_{11}^{-1} = \frac{1}{2} \xi_1^0(p, q; \lambda^2) - \frac{1}{2} \xi_0^0(p, q; \lambda^2) + \frac{1}{2} p^2 \xi_{01}^{-1} + \frac{1}{2} \xi_{00}^0, \quad (3.27)$$

$$q^2 \xi_{20}^{-1} + (p \cdot q) \xi_{11}^{-1} = \frac{1}{2} \xi_1^0(p, q; \lambda^2) - \frac{1}{2} \xi_0^0(p, q; \lambda^2) + \frac{1}{2} q^2 \xi_{10}^{-1} + \frac{1}{2} \xi_{00}^0, \quad (3.28)$$

$$p^2 \xi_{01}^{-1} + (p \cdot q) \xi_{10}^{-1} = -\frac{1}{2} \xi_0^0(p, q; \lambda^2) + \frac{1}{2} \xi_0^0(q; \lambda^2) + \frac{1}{2} p^2 \xi_{00}^{-1} \quad (3.29)$$

e

$$q^2 \xi_{10}^{-1} + (p \cdot q) \xi_{01}^{-1} = -\frac{1}{2} \xi_0^0(p, q; \lambda^2) + \frac{1}{2} \xi_0^0(p; \lambda^2) + \frac{1}{2} q^2 \xi_{00}^{-1}. \quad (3.30)$$

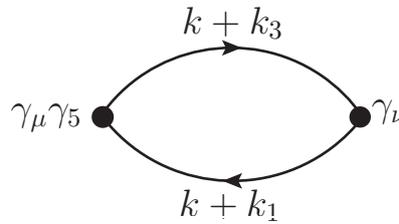
É importante ressaltar que, no contexto da estratégia adotada, não é necessária a presença da regularização mesmo de forma implícita para validar as operações realizadas. Basta admitir a validade da linearidade na operação de integração para as integrais de Feynman envolvidas no

cálculo perturbativo e utilizarmos a identidade mencionada acima para reescrever os integrandos como somas, antes da adoção do sinal de integração. Ainda, este procedimento permite um ponto de vista universal para o cálculo de amplitudes perturbativas, de forma que, torna-se possível mapear os resultados finais obtidos em resultados de outras técnicas, bem como nenhuma expansão, limite ou *shifts* são feitos em passos intermediários, o que nos permite obter a amplitude mais geral possível.

O referido método já foi aplicado em vários contextos em TQC's, demonstrando ser aplicável em várias situações, podendo ser utilizado de maneira equivalente em qualquer dimensão espaço-temporal (pares e ímpares), veja: (BATTISTEL; FONSECA; DALLABONA, 2012) (FONSECA; DALLABONA; BATTISTEL, 2014) (BATTISTEL, 2002) (BATTISTEL; DALLABONA, 2002b).

Com o intuito de exemplificar a aplicação da estratégia acima descrita, consideremos o cálculo de uma amplitude simples com certa riqueza de detalhes. A amplitude escolhida para estes propósitos desempenhará um papel importante nas discussões envolvendo as amplitudes anômalas. Trata-se da função de dois pontos axial-vetor (AV), representada diagramaticamente na figura 3.1.

Figura 3.1 – Representação diagramática da amplitude AV.



Para obter uma forma explícita, efetuando as operações indicadas, inicialmente utilizamos a definição geral (2.14) para escrever a expressão, para um único valor do momento do *loop*, na forma:

$$t_{\mu\nu}^{AV} = Tr \left[\gamma_\mu \gamma_5 \frac{1}{[(\not{k} + \not{k}_1) - m]} \gamma_\nu \frac{1}{[(\not{k} + \not{k}_3) - m]} \right]. \quad (3.31)$$

Após o cálculo dos traços das matrizes de Dirac, obtemos:

$$\frac{t_{\mu\nu}^{AV}}{4} = -\varepsilon_{\mu\nu\beta\theta} q^\theta \left\{ \frac{k^\beta}{D_3 D_1} \right\} - \varepsilon_{\mu\nu\beta\theta} \frac{q^\theta Q^\beta}{2} \left\{ \frac{1}{D_3 D_1} \right\}. \quad (3.32)$$

Acima temos

$$\left[\frac{(1; k_\beta)}{D_3 D_1} \right] = \frac{(1; k_\beta)}{\left[(k + k_3)^2 - m^2 \right] \left[(k + k_1)^2 - m^2 \right]}, \quad (3.33)$$

que conduzirá a integrais logaritmicamente divergente e linearmente divergente, respectivamente, quando integrarmos sobre os momentos do *loop*. Seguindo a prescrição que adotamos, neste ponto, adotamos uma representação adequada aos propagadores envolvidos, tomando $N = 1$ na expressão (3.3) ;

$$\left[\frac{1}{D_1 D_3} \right] = \left\{ \frac{1}{(k^2 - \lambda^2)} - \frac{(2k \cdot k_1 + k_1^2 + \lambda^2 - m^2)}{(k^2 - \lambda^2) \left[(k + k_1)^2 - m^2 \right]} \right\} \left\{ \frac{1}{(k^2 - \lambda^2)} - \frac{(2k \cdot k_3 + k_3^2 + \lambda^2 - m^2)}{(k^2 - \lambda^2) \left[(k + k_3)^2 - m^2 \right]} \right\}, \quad (3.34)$$

que fica:

$$\begin{aligned} \left[\frac{1}{D_1 D_3} \right] &= \frac{1}{(k^2 - \lambda^2)^2} \\ &\quad - \frac{(2k \cdot k_1 + k_1^2 + \lambda^2 - m^2)}{(k^2 - \lambda^2)^2 \left[(k + k_1)^2 - m^2 \right]} \\ &\quad - \frac{(2k \cdot k_3 + k_3^2 + \lambda^2 - m^2)}{(k^2 - \lambda^2)^2 \left[(k + k_3)^2 - m^2 \right]} \\ &\quad + \frac{(2k \cdot k_1 + k_1^2 + \lambda^2 - m^2) (2k \cdot k_3 + k_3^2 + \lambda^2 - m^2)}{(k^2 - \lambda^2)^2 \left[(k + k_1)^2 - m^2 \right] \left[(k + k_3)^2 - m^2 \right]}. \end{aligned} \quad (3.35)$$

Notemos que somente o primeiro termo terá contagem de potências divergente.

A outra integral de Feynman envolvida no cálculo da amplitude AV exigirá $N = 2$ na identidade (3.3) para a representação adequada do propagador que fornecerá então:

$$\begin{aligned} \left[\frac{k_\mu}{D_1 D_3} \right] &= \left\{ \frac{1}{(k^2 - \lambda^2)} - \frac{(2k \cdot k_1 + k_1^2 + \lambda^2 - m^2)}{(k^2 - \lambda^2)^2} + \frac{(2k \cdot k_1 + k_1^2 + \lambda^2 - m^2)^2}{(k^2 - \lambda^2)^2 \left[(k + k_1)^2 - m^2 \right]} \right\} \\ &\quad * \left\{ \frac{1}{(k^2 - \lambda^2)} - \frac{(2k \cdot k_3 + k_3^2 + \lambda^2 - m^2)}{(k^2 - \lambda^2)^2} + \frac{(2k \cdot k_3 + k_3^2 + \lambda^2 - m^2)^2}{(k^2 - \lambda^2)^2 \left[(k + k_3)^2 - m^2 \right]} \right\}, \end{aligned} \quad (3.36)$$

que fornecerá:

$$\begin{aligned}
\left[\frac{k_\mu}{D_1 D_3} \right] &= \frac{k_\mu}{(k^2 - \lambda^2)^2} - \frac{(k_3 + k_1)^\alpha}{2} \frac{4k_\alpha k_\mu}{(k^2 - \lambda^2)^3} \\
&\quad - \frac{(k_1^2 + \lambda^2 - m^2) k_\mu}{(k^2 - \lambda^2)^3} - \frac{(k_3^2 + \lambda^2 - m^2) k_\mu}{(k^2 - \lambda^2)^3} \\
&\quad + \frac{(2k \cdot k_1 + k_1^2 + \lambda^2 - m^2) (2k \cdot k_3 + k_3^2 + \lambda^2 - m^2) k_\mu}{(k^2 - \lambda^2)^4} \\
&\quad + \frac{(2k \cdot k_1 + k_1^2 + \lambda^2 - m^2)^2 k_\mu}{(k^2 - \lambda^2)^3 [(k + k_1)^2 - m^2]} \\
&\quad + \frac{(2k \cdot k_3 + k_3^2 + \lambda^2 - m^2)^2 k_\mu}{(k^2 - \lambda^2)^3 [(k + k_3)^2 - m^2]} \\
&\quad - \frac{(2k \cdot k_1 + k_1^2 + \lambda^2 - m^2) (2k \cdot k_3 + k_3^2 + \lambda^2 - m^2)^2 k_\mu}{(k^2 - \lambda^2)^4 [(k + k_3)^2 - m^2]} \\
&\quad - \frac{(2k \cdot k_3 + k_3^2 + \lambda^2 - m^2) (2k \cdot k_1 + k_1^2 + \lambda^2 - m^2)^2 k_\mu}{(k^2 - \lambda^2)^4 [(k + k_1)^2 - m^2]} \\
&\quad + \frac{(2k \cdot k_3 + k_3^2 + \lambda^2 - m^2)^2 (2k \cdot k_1 + k_1^2 + \lambda^2 - m^2)^2 k_\mu}{(k^2 - \lambda^2)^4 [(k + k_1)^2 - m^2] [(k + k_3)^2 - m^2]}. \tag{3.37}
\end{aligned}$$

Nesta expressão podemos notar que apenas os dois primeiros termos levarão a integrais divergentes, quando a soma sobre todos os momentos do *loop* for tomada.

Reunindo os dois termos na expressão para a amplitude AV , podemos escrever:

$$\begin{aligned}
& \frac{t_{\mu\nu}^{AV}}{4} + \varepsilon_{\mu\nu\beta\alpha} q^\alpha \left\{ \frac{k^\beta}{(k^2 - \lambda^2)^2} \right\} + \varepsilon_{\mu\nu\beta\alpha} \frac{q^\alpha Q_\eta}{2} \left\{ \frac{g_{\eta\beta}}{(k^2 - \lambda^2)^2} - \frac{4k^\eta k^\beta}{(k^2 - \lambda^2)^3} \right\} \\
= & \varepsilon_{\mu\nu\beta\alpha} q^\alpha \left\{ (k_1^2 + \lambda^2 - m^2) \frac{k^\beta}{(k^2 - \lambda^2)^3} + (k_3^2 + \lambda^2 - m^2) \frac{k^\beta}{(k^2 - \lambda^2)^3} \right\} \\
& - \varepsilon_{\mu\nu\beta\alpha} q^\alpha \left\{ \frac{(2k \cdot k_1 + k_1^2 + \lambda^2 - m^2)^2 k^\beta}{(k^2 - \lambda^2)^3 [(k + k_1)^2 - m^2]} \right\} \\
& + \varepsilon_{\mu\nu\beta\alpha} q^\alpha \left\{ \frac{(2k \cdot k_1 + k_1^2 + \lambda^2 - m^2) (2k \cdot k_3 + k_3^2 + \lambda^2 - m^2)^2 k^\beta}{(k^2 - \lambda^2)^4 [(k + k_3)^2 - m^2]} \right\} \\
& + \varepsilon_{\mu\nu\beta\alpha} q^\alpha \left\{ \frac{(2k \cdot k_3 + k_3^2 + \lambda^2 - m^2) (2k \cdot k_1 + k_1^2 + \lambda^2 - m^2)^2 k^\beta}{(k^2 - \lambda^2)^4 [(k + k_1)^2 - m^2]} \right\} \\
& - \varepsilon_{\mu\nu\beta\alpha} q^\alpha \left\{ \frac{(2k \cdot k_3 + k_3^2 + \lambda^2 - m^2)^2 (2k \cdot k_1 + k_1^2 + \lambda^2 - m^2)^2 k^\beta}{(k^2 - \lambda^2)^4 [(k + k_1)^2 - m^2] [(k + k_3)^2 - m^2]} \right\} \\
& + \varepsilon_{\mu\nu\beta\alpha} \frac{q^\alpha Q^\beta}{2} \left\{ \frac{(2k \cdot k_1 + k_1^2 + \lambda^2 - m^2)}{(k^2 - \lambda^2)^2 [(k + k_1)^2 - m^2]} \right\} \\
& + \varepsilon_{\mu\nu\beta\alpha} \frac{q^\alpha Q^\beta}{2} \left\{ \frac{(2k \cdot k_3 + k_3^2 + \lambda^2 - m^2)}{(k^2 - \lambda^2)^2 [(k + k_3)^2 - m^2]} \right\} \\
& - \varepsilon_{\mu\nu\beta\alpha} \frac{q^\alpha Q^\beta}{2} \left\{ \frac{(2k \cdot k_1 + k_1^2 + \lambda^2 - m^2) (2k \cdot k_3 + k_3^2 + \lambda^2 - m^2)}{(k^2 - \lambda^2)^2 [(k + k_1)^2 - m^2] [(k + k_3)^2 - m^2]} \right\}. \tag{3.38}
\end{aligned}$$

Esta expressão é apenas consequência da identidade (3.3).

Na expressão acima colocamos os termos com contagem de potência indicando divergência, quando integrarmos no momento do *loop*, no lado esquerdo da equação. O primeiro deles se anulará devido ao caráter ímpar ao passo que o segundo tornar-se-á o objeto (3.9). O fato relevante é que o lado direito é convergente e pode ser integrado sem qualquer receio. A integração revelará um resultado identicamente nulo. Assim teremos:

$$\int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \left\{ \frac{t_{\mu\nu}^{AV}}{4} - \frac{1}{2} \varepsilon_{\mu\nu\beta\theta} q^\theta Q_\alpha \left[\frac{4k^\theta k^\alpha}{(k^2 - \lambda^2)^3} - \frac{g^{\alpha\beta}}{(k^2 - \lambda^2)^2} \right] \right\} = 0, \tag{3.39}$$

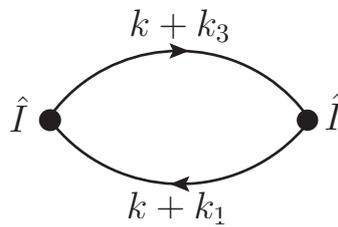
que implica na relação formal:

$$T_{\mu\nu}^{AV} = 2\varepsilon_{\mu\nu\theta\beta} q^\beta Q_\alpha \Delta^{\theta\alpha}(\lambda^2). \tag{3.40}$$

O resultado é obtido sem que qualquer operação envolvendo integrais divergentes seja efetuada. Apenas a linearidade da operação de integração é assumida válida. Obviamente, as operações realizadas são compatíveis com qualquer prescrição de regularização. Um mapa perfeito pode ser obtido, com qualquer prescrição, bastando para tal expressar o objeto $\Delta_{\theta\alpha}(\lambda^2)$. Voltaremos a isso nos capítulos posteriores.

Seguindo os mesmos procedimentos anteriores, podemos expressar a amplitude escalar-escalar (SS), representada diagramaticamente na figura 3.2, na forma:

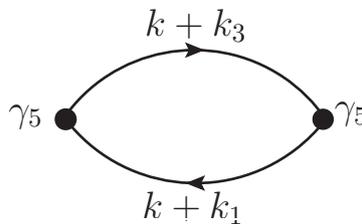
Figura 3.2 – Representação diagramática da amplitude SS.



$$\begin{aligned}
 [T^{SS}] &= (q^\mu q^\nu + Q^\mu Q^\nu) \Delta^{\mu\nu}(\lambda^2) + \\
 &+ 4 \left\{ I_{quad}(m^2) - (\lambda^2 - m^2) I_{\log}(\lambda^2) + \frac{i}{(4\pi)^2} \left(m^2 - \lambda^2 - m^2 \ln \left(\frac{m^2}{\lambda^2} \right) \right) \right\} + \\
 &+ 2(4m^2 - q^2) \left\{ I_{\log}(\lambda^2) - \frac{i}{(4\pi)^2} \xi_0^0(q^2; m^2; \lambda^2) \right\}. \quad (3.41)
 \end{aligned}$$

Por sua vez a amplitude pseudoescalar-pseudoescalar (PP), representada diagramaticamente na figura 3.3, fica:

Figura 3.3 – Representação diagramática da amplitude PP.

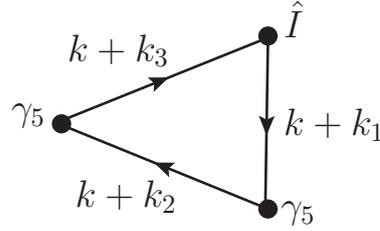


$$\begin{aligned}
T^{PP} = & -[Q^\mu Q^\nu + q^\mu q^\nu] \Delta_{\mu\nu}(\lambda^2) + \\
& -4 \left\{ I_{quad}(m^2) - (\lambda^2 - m^2) I_{\log}(\lambda^2) + \frac{i}{(4\pi)^2} \left(m^2 - \lambda^2 - m^2 \ln \left(\frac{m^2}{\lambda^2} \right) \right) \right\} \\
& + 2q^2 \left\{ I_{\log}(\lambda^2) - \frac{i}{(4\pi)^2} \xi_0^0(m^2, q_2^2; \lambda^2) \right\}. \tag{3.42}
\end{aligned}$$

Isso completa o cálculo das amplitudes de dois pontos necessárias para a discussão que faremos a respeito das amplitudes triangulares anômalas.

O cálculo das amplitudes de três pontos segue o mesmo procedimento. A fim de exemplificar, consideremos uma amplitude simples que aparecerá como subestrutura de outras mais complexas, a amplitude pseudoescalar-escalar-pseudoescalar (*PSP*), representada diagramaticamente na figura 3.4.

Figura 3.4 – Representação diagramática da amplitude PSP.



Primeiramente, de acordo com a definição (2.17), teremos:

$$t^{PSP} = Tr \left[\gamma_5 \frac{1}{[(k+k_3) - m]} 1 \frac{1}{[(k+k_1) - m]} \gamma_5 \frac{1}{[(k+k_2) - m]} \right]. \tag{3.43}$$

Após o cálculo dos traços obteremos:

$$t^{PSP} = \frac{4}{D_3 D_1 D_2} \left[-(k+k_3) \cdot (k+k_2)m - (k+k_1) \cdot (k+k_2)m + (k+k_3) \cdot (k+k_1)m + m^3 \right], \tag{3.44}$$

que nos levará a:

$$\int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \left\{ \frac{t^{PSP}}{4} + \frac{m}{(k^2 - \lambda^2)^2} \right\} = \frac{im}{(4\pi)^2} \left[\xi_0^0(q, m^2; \lambda^2) + (p^2 - p \cdot q) \xi_{00}^{-1} \right]. \tag{3.45}$$

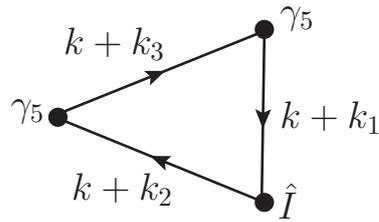
Portanto, podemos escrever:

$$T^{PSP} = -4m I_{\log}(\lambda^2) + \frac{4im}{(4\pi)^2} \left[\xi_0^0(q, m^2; \lambda^2) + (p^2 - p \cdot q) \xi_{00}^{-1} \right]. \tag{3.46}$$

A amplitude pseudoescalar-pseudoescalar-escalar (*PPS*), representada diagramaticamente pela figura 3.5, ficará:

$$T^{PPS} = m \left[-4I_{\log}(\lambda^2) + 4 \frac{i}{(4\pi)^2} \xi_0^0(p, m^2; \lambda^2) + 2 \frac{i}{(4\pi)^2} (2q^2 - 2(p \cdot q)) \xi_{00}^{-1} \right]. \quad (3.47)$$

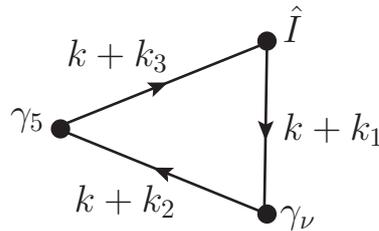
Figura 3.5 – Representação diagramática da amplitude PPS.



A aplicação do procedimento adotado, nos revelará ainda os resultados para as amplitudes (finitas), que estão representadas diagramaticamente pelas figuras 3.6, 3.7, 3.8, 3.9, 3.10, 3.11, 3.12, 3.13 e 3.14, respectivamente:

$$T_v^{PSV} = 0, \quad (3.48)$$

Figura 3.6 – Representação diagramática da amplitude PSV.



$$T_\lambda^{VPS} = 0, \quad (3.49)$$

$$T_\mu^{PVS} = 0, \quad (3.50)$$

Figura 3.7 – Representação diagramática da amplitude VPS.

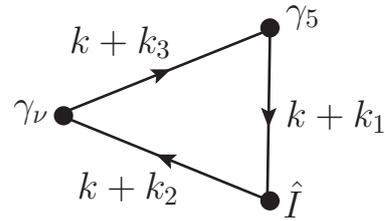
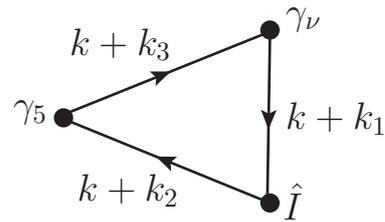
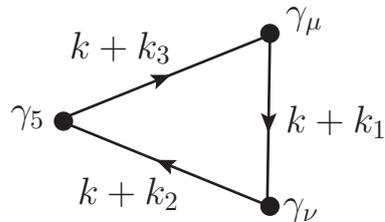


Figura 3.8 – Representação diagramática da amplitude PVS.



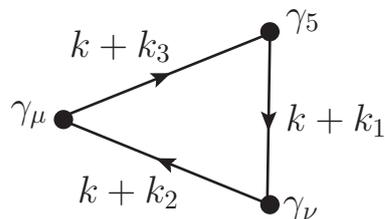
$$\left[-(4\pi)^2 i \right] T_{\mu\nu}^{PVV} = (4m) p^\eta q^\theta \xi_{00}^{-1} \varepsilon_{\mu\nu\theta\eta}, \quad (3.51)$$

Figura 3.9 – Representação diagramática da amplitude PVV.



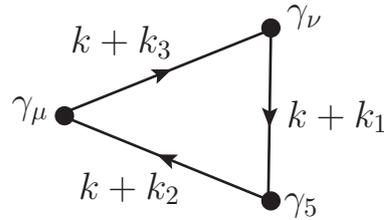
$$\left[-(4\pi)^2 i \right] T_{\mu\nu}^{VPV} = 4m \varepsilon_{\mu\nu\theta\eta} \left[\xi_{00}^{-1} \right] \left[p^\eta q^\theta \right], \quad (3.52)$$

Figura 3.10 – Representação diagramática da amplitude VPV.



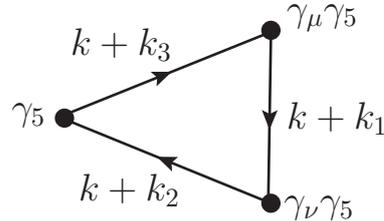
$$\left[-(4\pi)^2 i \right] T_{\mu\nu}^{VVP} = -4m\varepsilon_{\mu\nu\theta\eta} [\xi_{00}^{-1}] [p^\eta q^\theta], \quad (3.53)$$

Figura 3.11 – Representação diagramática da amplitude VVP.



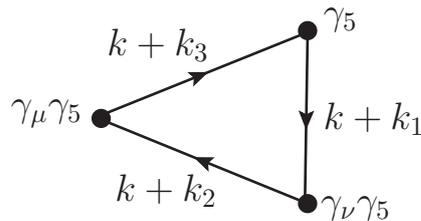
$$\left[(4\pi)^2 i \right] T_{\mu\nu}^{PAA} = 8m\varepsilon_{\mu\nu\alpha\beta} p^\alpha q^\beta \left[\xi_{01}^{-1} + \xi_{10}^{-1} - \frac{1}{2}\xi_{00}^{-1} \right], \quad (3.54)$$

Figura 3.12 – Representação diagramática da amplitude PAA.



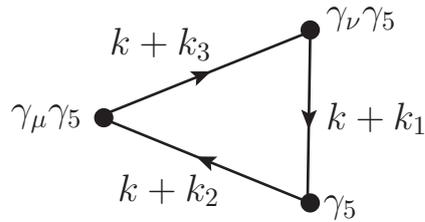
$$T_{\mu\nu}^{APA} = - \left(\frac{i}{(4\pi)} \right) 8mp^\beta q^\alpha \varepsilon_{\mu\nu\alpha\beta} \left[\xi_{01}^{-1} - \frac{1}{2}\xi_{00}^{-1} \right], \quad (3.55)$$

Figura 3.13 – Representação diagramática da amplitude APA.



$$T_{\mu\nu}^{AAP} = \left(\frac{i}{4\pi} \right) 8m\varepsilon_{\mu\nu\alpha\beta} [p^\beta q^\alpha] \left[\xi_{10}^{-1} - \frac{1}{2}\xi_{00}^{-1} \right]. \quad (3.56)$$

Figura 3.14 – Representação diagramática da amplitude AAP.



As expressões acima serão úteis no cálculo das amplitudes anômalas bem como na verificação das relações de simetria correspondentes.

É importante notar que as expressões finais obtidas para as amplitudes calculadas são as mais gerais possíveis. O conteúdo de divergência foi mantido intacto e as escolhas para os momentos das linhas internas foram mantidas arbitrárias. Nenhuma operação foi feita com integrais divergentes e, a rigor, apenas a validade da linearidade na integração foi assumida válida.

Agora estamos aptos a calcular as amplitudes que fazem parte da investigação associada ao presente trabalho. No próximo capítulo, consideraremos as amplitudes de um índice de Lorentz que aparecem como subestruturas daquelas de três índices (anômalas).

4 AMPLITUDES TRIANGULARES VETORIAIS

O objetivo do presente trabalho é efetuar uma investigação detalhada das amplitudes triangulares anômalas (AVV , VAV , VVA e AAA) que são pseudotensores de terceira ordem. É, entretanto, conveniente e útil, antes de desenvolver tais amplitudes, considerar amplitudes triangulares mais simples que apresentam estruturas divergentes semelhantes (ou idênticas) e que estão diretamente relacionadas àquelas anômalas. Trata-se das amplitudes vetoriais VPP , VSS , ASP e APS . Elas possuem divergências lineares e, portanto, apresentam termos potencialmente ambíguos. Como possuem índices de Lorentz, têm associadas a si relações entre funções de Green, Identidades de Ward e limites de baixa energia. Nos fornecem assim uma oportunidade de considerar estes aspectos cruciais na discussão das amplitudes anômalas em um contexto mais simples. Além disso, tais amplitudes aparecerão como subestruturas dos pseudotensores de terceira ordem, o que torna os desenvolvimentos feitos no presente capítulo resultados úteis para o desenvolvimento das amplitudes anômalas.

4.1 Relações entre funções de Green

Como dito anteriormente, as relações entre funções de Green são identidades relacionando amplitudes do cálculo perturbativo que podem ser estabelecidas sempre que um índice de Lorentz estiver presente. Portanto, podemos construir relações entre funções de Green para as amplitudes VPP , VSS , ASP e APS . Para tal propósito, consideramos inicialmente as definições:

$$t_{\alpha}^{VPP} = Tr \left\{ \gamma_{\alpha} \frac{1}{[(\not{k} + \not{k}_3) - m]} \gamma_5 \frac{1}{[(\not{k} + \not{k}_1) - m]} \gamma_5 \frac{1}{[(\not{k} + \not{k}_2) - m]} \right\}, \quad (4.1)$$

$$t_{\alpha}^{VSS} = Tr \left\{ \gamma_{\alpha} \frac{1}{[(\not{k} + \not{k}_3) - m]} \frac{1}{[(\not{k} + \not{k}_1) - m]} \frac{1}{[(\not{k} + \not{k}_2) - m]} \right\}, \quad (4.2)$$

$$t_{\alpha}^{APS} = Tr \left\{ \gamma_{\alpha} \gamma_5 \frac{1}{[(\not{k} + \not{k}_3) - m]} \gamma_5 \frac{1}{[(\not{k} + \not{k}_1) - m]} \frac{1}{[(\not{k} + \not{k}_2) - m]} \right\}, \quad (4.3)$$

e

$$t_{\alpha}^{ASP} = Tr \left\{ \gamma_{\alpha} \gamma_5 \frac{1}{[(\not{k} + \not{k}_3) - m]} \frac{1}{[(\not{k} + \not{k}_1) - m]} \gamma_5 \frac{1}{[(\not{k} + \not{k}_2) - m]} \right\}. \quad (4.4)$$

Em seguida tomamos a contração dessas expressões com os momentos externos associados com o respectivo índice de Lorentz e utilizamos convenientemente a álgebra das matrizes de Dirac, como fizemos no capítulo 1.

Com o intuito de exemplificar, consideraremos com mais detalhes a amplitude VPP . Para construir a identidade pretendida, primeiro contraímos com o momento externo associado ao vértice onde se encontra o operador vetorial, a estrutura interior à operação de traço:

$$\begin{aligned} & (k_3 - k_2)^\alpha \left\{ \gamma_\alpha \frac{1}{[(\not{k} + \not{k}_3) - m]} \gamma_5 \frac{1}{[(\not{k} + \not{k}_1) - m]} \gamma_5 \frac{1}{[(\not{k} + \not{k}_2) - m]} \right\} \\ = & \left[\frac{1}{[(\not{k} + \not{k}_2) - m]} (k_3 - k_2)^\alpha \gamma_\alpha \frac{1}{[(\not{k} + \not{k}_3) - m]} \gamma_5 \frac{1}{[(\not{k} + \not{k}_1) - m]} \gamma_5 \right], \end{aligned} \quad (4.5)$$

o que escrevemos o lado direito como:

$$\left[\frac{1}{[(\not{k} + \not{k}_2) - m]} [(\not{k} + \not{k}_3 - m) - (\not{k} + \not{k}_2 - m)] \frac{1}{[(\not{k} + \not{k}_3) - m]} \gamma_5 \frac{1}{[(\not{k} + \not{k}_1) - m]} \gamma_5 \right], \quad (4.6)$$

que significa:

$$\begin{aligned} & (k_3 - k_2)^\alpha \left\{ \gamma_\alpha \frac{1}{[(\not{k} + \not{k}_3) - m]} \gamma_5 \frac{1}{[(\not{k} + \not{k}_1) - m]} \gamma_5 \frac{1}{[(\not{k} + \not{k}_2) - m]} \right\} \\ = & \left[\gamma_5 \frac{1}{[(\not{k} + \not{k}_1) - m]} \gamma_5 \frac{1}{[(\not{k} + \not{k}_2) - m]} - \gamma_5 \frac{1}{[(\not{k} + \not{k}_3) - m]} \gamma_5 \frac{1}{[(\not{k} + \not{k}_1) - m]} \right]. \end{aligned} \quad (4.7)$$

Tomando o traço de Dirac em ambos os lados e utilizando as propriedades de linearidade e ciclicidade, identificamos:

$$(k_3 - k_2)^\alpha t_\alpha^{VPP} = t^{PP}(k_1, k_2; m) - t^{PP}(k_3, k_1; m), \quad (4.8)$$

onde, na expressão acima, reconhecemos a função de dois pontos PP .

É importante notar que esta relação foi obtida entre os núcleos das amplitudes, ou seja, entre quantidades que são os integrandos das amplitudes de um *loop*. Quando integramos ambos os lados no momento do *loop* k obtemos uma genuína relação entre amplitudes do cálculo perturbativo. Ou seja, se a relação acima é válida então valerá:

$$(k_3 - k_2)^\alpha T_\alpha^{VPP} = T^{PP}(k_1, k_2; m) - T^{PP}(k_3, k_1; m), \quad (4.9)$$

bastando para tal que a operação de integração seja linear. Esta expressão, está diagramaticamente representada da figura 4.1.

Figura 4.1 – Representação diagramática da relação entre funções de Green para amplitude VPP .

$$(k_3 - k_2)^\alpha \left[\begin{array}{c} \gamma_\alpha \bullet \\ \nearrow^{k+k_3} \bullet \gamma_5 \\ \searrow_{k+k_2} \bullet \gamma_5 \\ \downarrow_{k+k_1} \bullet \end{array} \right] = \gamma_5 \bullet \begin{array}{c} \nearrow^{k+k_1} \\ \searrow_{k+k_2} \end{array} \bullet \gamma_5 - \gamma_5 \bullet \begin{array}{c} \nearrow^{k+k_3} \\ \searrow_{k+k_1} \end{array} \bullet \gamma_5$$

De modo semelhante teremos:

$$(k_3 - k_2)^\alpha T_\alpha^{VSS} = T^{SS}(k_1, k_2, m) - T^{SS}(k_3, k_1, m), \quad (4.10)$$

representada diagramaticamente na figura 4.2.

Figura 4.2 – Representação diagramática da relação entre funções de Green para amplitude VSS .

$$(k_3 - k_2)^\alpha \left[\begin{array}{c} \gamma_\alpha \bullet \\ \nearrow^{k+k_3} \bullet \hat{I} \\ \searrow_{k+k_2} \bullet \hat{I} \\ \downarrow_{k+k_1} \bullet \end{array} \right] = \hat{I} \bullet \begin{array}{c} \nearrow^{k+k_1} \\ \searrow_{k+k_2} \end{array} \bullet \hat{I} - \hat{I} \bullet \begin{array}{c} \nearrow^{k+k_3} \\ \searrow_{k+k_1} \end{array} \bullet \hat{I}$$

Similarmente, a contração de $r = k_3 - k_2$ com a amplitude ASP , revelará uma identidade relacionando amplitudes do cálculo perturbativo. Como antes, desenvolveremos com algum detalhe, para exemplificar. Inicialmente consideramos a identidade:

$$\begin{aligned} & (k_3 - k_2)^\alpha \left[\frac{1}{[(k+k_2)-m]} \gamma_\alpha \gamma_5 \frac{1}{[(k+k_3)-m]} \frac{1}{[(k+k_1)-m]} \gamma_5 \right] \\ &= - \left\{ \gamma_5 \frac{1}{[(k+k_1)-m]} \gamma_5 \frac{1}{[(k+k_2)-m]} \right\} \\ & \quad - \left\{ \frac{1}{[(k+k_3)-m]} \frac{1}{[(k+k_1)-m]} \right\} + \\ & \quad - 2m \left\{ \gamma_5 \frac{1}{[(k+k_3)-m]} \frac{1}{[(k+k_1)-m]} \gamma_5 \frac{1}{[(k+k_2)-m]} \right\}. \end{aligned} \quad (4.11)$$

Assim, tomando o traço de Dirac em ambos os lados, identificamos:

$$(k_3 - k_2)^\alpha t_\alpha^{ASP} = -t^{PP}(k_1, k_2; m) - t^{SS}(k_3, k_1; m) - 2mt^{PSP}, \quad (4.12)$$

onde reconhecemos também a função de três pontos PSP . Ao integrarmos no momento do $loop$ obteremos a identidade pretendida;

$$(k_3 - k_2)^\alpha T_\alpha^{ASP} = -T^{PP}(k_1, k_2; m) - T^{SS}(k_3, k_1; m) - 2mT^{PSP}. \quad (4.13)$$

representada diagramaticamente na figura 4.3.

Figura 4.3 – Representação diagramática da relação entre funções de Green para amplitude ASP .

$$(k_3 - k_2)^\alpha \left[\begin{array}{c} \text{Triangle diagram with vertices } k+k_3, k+k_2, k+k_1 \text{ and internal lines } \hat{\Gamma}, \gamma_5 \end{array} \right] = -\gamma_5 \left[\begin{array}{c} \text{Bubble diagram with vertices } k+k_1, k+k_2 \end{array} \right] - \hat{\Gamma} \left[\begin{array}{c} \text{Bubble diagram with vertices } k+k_3, k+k_1 \end{array} \right] - 2m \left[\begin{array}{c} \text{Triangle diagram with vertices } \gamma_5, \hat{\Gamma}, \gamma_5 \end{array} \right]$$

De modo similar, podemos estabelecer a identidade:

$$(k_3 - k_2)^\alpha T_\alpha^{APS} = -T^{SS}(k_1, k_2; m) - T^{PP}(k_3, k_1; m) - 2m \left[T^{PPS} \right], \quad (4.14)$$

representada diagramaticamente na figura 4.4.

Figura 4.4 – Representação diagramática da relação entre funções de Green para amplitude APS .

$$(k_3 - k_2)^\alpha \left[\begin{array}{c} \text{Triangle diagram with vertices } k+k_3, k+k_2, k+k_1 \text{ and internal lines } \gamma_5, \hat{\Gamma} \end{array} \right] = -\hat{\Gamma} \left[\begin{array}{c} \text{Bubble diagram with vertices } k+k_1, k+k_2 \end{array} \right] - \gamma_5 \left[\begin{array}{c} \text{Bubble diagram with vertices } k+k_3, k+k_1 \end{array} \right] - 2m \left[\begin{array}{c} \text{Triangle diagram with vertices } \gamma_5, \hat{\Gamma}, \gamma_5 \end{array} \right]$$

Estas identidades implicam que, ao calcularmos todas as estruturas envolvidas separadamente, devemos obter as relações identificadas acima satisfeitas automaticamente. Do contrário, a violação das identidades acima, implicaria na violação da linearidade na operação de integração.

4.2 Identidades de Ward

Cada uma destas amplitudes VPP , VSS , ASP e APS deverá satisfazer uma identidade de Ward associada ao índice de Lorentz que carrega. As amplitudes VPP e VSS devem satisfazer a identidade referente ao índice vetorial, o que significa que, para o processo tendo como estado inicial um vetor e final dois pseudo-escalares, devemos ter;

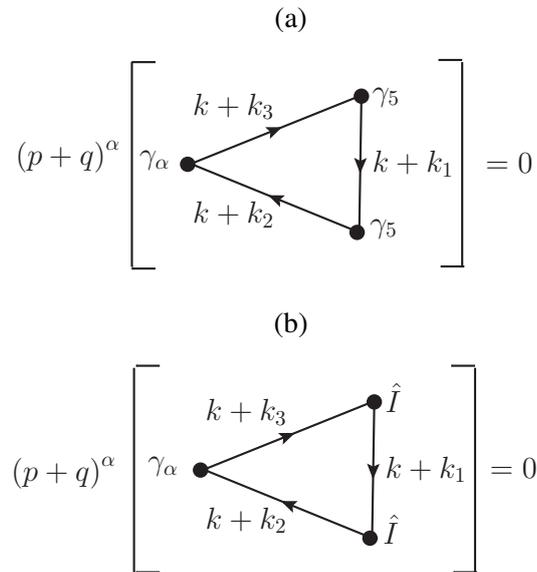
$$(p + q)^\alpha T_\alpha^{V \rightarrow PP} = 0 \quad (4.15)$$

e, para o processo tendo como estado inicial um vetor e final dois escalares;

$$(p + q)^\alpha T_\alpha^{V \rightarrow SS} = 0. \quad (4.16)$$

A notação utilizada, com a seta, indica que a soma dos canais direto e cruzado devem ser adicionados para que o processo seja construído. Estas identidades estão representadas diagramaticamente na figura 4.5.

Figura 4.5 – Representação diagramática das identidades de Ward para as amplitudes a) VPP e b) VSS .



As identidades de Ward devem ser obtidas satisfeitas automaticamente, caso contrário as relações de simetria da teoria seriam violadas, comprometendo a renormalizabilidade. A dificuldade em satisfazê-las está associada ao fato de divergências lineares estarem envolvidas, o que torna os resultados ambíguos, como veremos em breve.

4.3 Limites de baixa energia

Para estabelecermos limites de baixa energia para as amplitudes triangulares acima consideradas, em princípio, devemos considerar a forma mais geral destas, levando em conta apenas seu caráter tensorial e que o referido tensor deve ser construído com dois vetores independentes: os momentos externos. Assim, a forma geral deveria ser:

$$T_\alpha = q_\alpha F_1(p, q) + p_\alpha F_2(p, q), \quad (4.17)$$

com os invariantes F_i 's sendo específicos para os diferentes processos. Entretanto, as amplitudes correspondentes serão determinadas a partir do cálculo perturbativo (regras de Feynman) e, como sabemos, em casos de divergências superiores ao grau logarítmico, podemos ter dependência explícita com a escolha feita para os momentos das linhas internas. Efetuando o *shift* $k' = k + k_1$ percebemos que a estrutura geral do tensor deve ser esperada como sendo uma combinação dos três momentos internos em soma e diferença, num total de seis vetores, reduzidos a cinco pela relação de conservação de energia e momentum. Portanto, a forma geral da amplitude vetorial deve ter a forma:

$$T_\alpha = [Q_\alpha G_1 + P_\alpha G_2 + R_\alpha G_3] + q_\alpha F_1(p, q) + p_\alpha F_2(p, q), \quad (4.18)$$

onde os F_i 's são funções escalares e os G_i 's deverão exibir estrutura de termos de superfície. Aqui os momentos externos p e q assim como os momentos P , Q e R seguem as definições adotadas no capítulo 2.

Podemos nos questionar a respeito da contração deste tensor com os momentos externos correspondentes. Contraindo a estrutura tensorial geral com o momento r , teremos:

$$\begin{aligned} (p+q)^\alpha T_\alpha &= [Q \cdot (p+q) G_1 + P \cdot (p+q) G_2 + R \cdot (p+q) G_3] \\ &+ (q^2 + q \cdot p) F_1(p, q) + (p^2 + q \cdot p) F_2(p, q). \end{aligned} \quad (4.19)$$

Ou seja, para todas as amplitudes para as quais este tensor geral deve descrever, com o índice de Lorentz associado ao vértice do estado inicial, devemos obter:

$$(p+q)^\alpha T_\alpha \Big|_{p^2=p \cdot q=q^2=0} = (p+q)_\alpha [Q_\alpha G_1 + P_\alpha G_2 + R_\alpha G_3]_{p^2=p \cdot q=q^2=0}, \quad (4.20)$$

que significa que nesta situação cinemática, o comportamento da amplitude a ser descrita, será completamente especificado por sua parte ambígua. De modo equivalente, podemos dizer que a parte dependente apenas de momentos externos deve se anular neste limite. Limites semelhantes podem ser identificados para as amplitudes que são tensores de terceira ordem e desempenham um papel importante na interpretação daquelas quantidades, o que será feito posteriormente.

No que se segue calcularemos todas as amplitudes envolvidas, utilizando o método adotado, para então verificar as propriedades esperadas para elas. As conclusões retiradas para as amplitudes contendo um índice de Lorentz serão transportadas para as amplitudes de três ín-

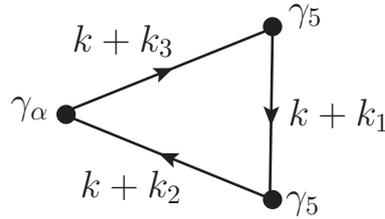
dices, das quais elas são subestruturas. As consequências disto farão parte das conclusões da nossa investigação.

4.4 Cálculo das amplitudes triangulares vetoriais

Agora, vamos prosseguir obtendo os resultados explícitos das amplitudes *VPP*, *VSS*, *ASP* e *APS*, para, logo em seguida, verificarmos suas propriedades de simetria.

Consideramos primeiramente o cálculo da amplitude vetor-pseudoescalar-pseudoescalar (*VPP*), representada diagramaticamente pela figura 4.6, expressão (2.17) acima.

Figura 4.6 – Representação diagramática da amplitude *VPP*.



Primeiramente escrevemos

$$t_\alpha^{VPP} = Tr \left[\gamma_\alpha \frac{1}{[(k+k_3)-m]} \gamma_5 \frac{1}{[(k+k_1)-m]} \gamma_5 \frac{1}{[(k+k_2)-m]} \right], \quad (4.21)$$

que, depois de efetuar os traços de Dirac, fica:

$$\begin{aligned} \frac{t_\alpha^{VPP}}{4} &= \frac{1}{D_3 D_1 D_2} \left\{ -(k+k_3)_\alpha (k+k_1) \cdot (k+k_2) \right. \\ &\quad + (k+k_3) \cdot (k+k_2) (k+k_1)_\alpha \\ &\quad - (k+k_3) \cdot (k+k_1) (k+k_2)_\alpha \\ &\quad \left. + m^2 [(k+k_2)_\alpha - (k+k_1)_\alpha + (k+k_3)_\alpha] \right\}. \end{aligned} \quad (4.22)$$

A contagem de potências indica que o grau de divergência será linear após a implementação da última regra de Feynman. Isto significa que o menor valor de N na identidade (3.3) deve ser $N = 1$, na adoção da representação adequada para os propagadores. Então, ao integrarmos no momento do *loop*, escrevemos a amplitude como uma soma de integrais de Feynman. As finitas são efetuadas e o resultado escrito em termos das funções adequadas, e as divergentes organizadas em termos dos objetos definidos na capítulo 3. Assim, com o resultado da integrais

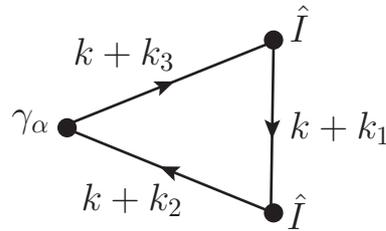
(3.16), (3.17), (3.21) e (3.22), obteremos o seguinte resultado:

$$\begin{aligned}
T_{\alpha}^{VPP} = & 2R^{\zeta} \Delta_{\alpha\zeta} (\lambda^2) + \\
& -2q_{\alpha} \left[I_{\log} (\lambda^2) - \frac{i}{(4\pi)^2} (\xi_0^0 (q; \lambda^2) + 2(p \cdot q) \xi_{10}^{-1} + p^2 \xi_{00}^{-1}) \right] + \\
& +2p_{\alpha} \left[I_{\log} (\lambda^2) - \frac{i}{(4\pi)^2} (\xi_0^0 (p; \lambda^2) + 2(p \cdot q) \xi_{01}^{-1} + q^2 \xi_{00}^{-1}) \right]. \quad (4.23)
\end{aligned}$$

De modo semelhante a amplitude vetor-escalar-escalar (VSS), representada diagramaticamente pela figura 4.7, fica, após o cálculo dos traços de Dirac:

$$\begin{aligned}
\frac{t_{\alpha}^{VSS}}{4} = & \frac{1}{D_3 D_1 D_2} \{ (k + k_3)_{\alpha} (k + k_1) \cdot (k + k_2) + \\
& - (k + k_1)_{\alpha} (k + k_3) \cdot (k + k_2) \\
& + (k + k_3) \cdot (k + k_1) (k + k_2)_{\alpha} \\
& + m^2 [(k + k_2)_{\alpha} + (k + k_1)_{\alpha} + (k + k_3)_{\alpha}] \}. \quad (4.24)
\end{aligned}$$

Figura 4.7 – Representação diagramática da amplitude VSS.



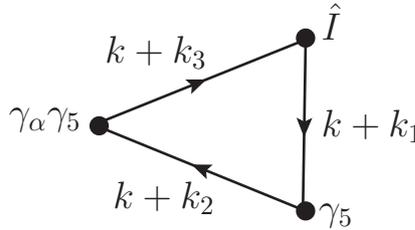
O mesmo procedimento seguido acima nos fornecerá:

$$\begin{aligned}
T_{\alpha}^{VSS} = & -2R^{\zeta} \Delta_{\alpha\zeta} (\lambda^2) + \\
& +2q_{\alpha} \left[I_{\log} (\lambda^2) - \frac{i}{(4\pi)^2} (\xi_0^0 (q; \lambda^2) + (2(p \cdot q) + 8m^2) \xi_{10}^{-1} + (p^2 - 4m^2) \xi_{00}^{-1}) \right] + \\
& -2p_{\alpha} \left[I_{\log} (\lambda^2) - \frac{i}{(4\pi)^2} (\xi_0^0 (p; \lambda^2) + (2(p \cdot q) + 8m^2) \xi_{01}^{-1} + (q^2 - 4m^2) \xi_{00}^{-1}) \right]. \quad (4.25)
\end{aligned}$$

Por sua vez, a amplitude axial-escalar-pseudoescalar (*ASP*), representada diagramaticamente pela figura 4.8, após o cálculo dos traços de Dirac, fica:

$$\begin{aligned} \frac{t_\alpha^{ASP}}{4} = & \frac{1}{D_3 D_1 D_2} \{ (k_\alpha + k_{3\alpha})(k + k_1) \cdot (k + k_2) \\ & - (k_\alpha + k_{1\alpha})(k + k_3) \cdot (k + k_2) \\ & + (k_\alpha + k_{2\alpha})(k + k_3) \cdot (k + k_1) \\ & + m^2 [(k + k_2)_\alpha - (k + k_1)_\alpha - (k + k_3)_\alpha] \}. \end{aligned} \quad (4.26)$$

Figura 4.8 – Representação diagramática da amplitude ASP.



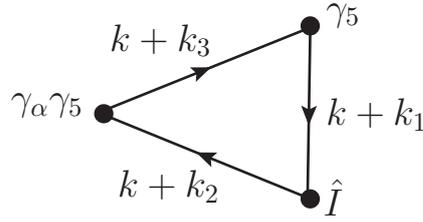
Assim:

$$\begin{aligned} T_\alpha^{ASP} = & -2R^\zeta \Delta_{\alpha\zeta}(\lambda^2) + \\ & + 2q_\alpha \left[I_{\log}(\lambda^2) - \frac{i}{(4\pi)^2} (\xi_0^0(q; \lambda^2) + 2(p \cdot q) \xi_{10}^{-1} + p^2 \xi_{00}^{-1}) \right] + \\ & - 2p_\alpha \left[I_{\log}(\lambda^2) - \frac{i}{(4\pi)^2} (\xi_0^0(p; \lambda^2) + 2(p \cdot q) \xi_{01}^{-1} + (q^2 - 4m^2) \xi_{00}^{-1}) \right] \end{aligned} \quad (4.27)$$

Por fim, a amplitude axial-pseudoescalar-escalar (*APS*), representada diagramaticamente pela figura 4.9, ficará inicialmente:

$$\begin{aligned} \frac{t_\alpha^{APS}}{4} = & \frac{1}{D_3 D_1 D_2} \{ -(k + k_3)_\alpha (k + k_1) \cdot (k + k_2) \\ & - (k + k_2)_\alpha (k + k_3) \cdot (k + k_1) \\ & + (k + k_1)_\alpha (k + k_3) \cdot (k + k_2) \\ & + m^2 [(k + k_2)_\alpha + (k + k_1)_\alpha - (k + k_3)_\alpha] \}. \end{aligned} \quad (4.28)$$

Figura 4.9 – Representação diagramática da amplitude APS.



Então:

$$\begin{aligned}
 [T_\alpha^{APS}] &= 2R^\zeta \Delta_{\alpha\zeta}(\lambda^2) + \\
 &-2q_\alpha \left[I_{\log}(\lambda^2) - \frac{i}{(4\pi)^2} (\xi_0^0(q; \lambda^2) + 2(p \cdot q) \xi_{10}^{-1} + (p^2 - 4m^2) \xi_{00}^{-1}) \right] + \\
 &+2p_\alpha \left[I_{\log}(\lambda^2) - \frac{i}{(4\pi)^2} (\xi_0^0(p; \lambda^2) + 2(p \cdot q) \xi_{01}^{-1} + q^2 \xi_{00}^{-1}) \right]. \quad (4.29)
 \end{aligned}$$

É interessante notar que as quatro amplitudes vetoriais acima explicitadas são combinações das mesmas estruturas matemáticas. O tratamento consistente exige a universalidade como ingrediente.

De posse destes resultados, podemos verificar as relações de simetria, relações entre funções de Green e limites de baixa energia os quais estabelecemos anteriormente para estas amplitudes.

4.5 Verificação da relações entre funções de Green

Começaremos verificando explicitamente se a contração com o momento externo r das formas obtidas para as funções VPP , VSS , ASP e APS preservam as relações entre funções de Green estabelecidas.

Primeiramente, consideremos a relação para a amplitude VPP . Tomando a expressão obtida para VPP , equação (4.23), e contraindo com o momento externo r , teremos:

$$\begin{aligned}
(p+q)^\alpha [T_\alpha^{VPP}] &= R^\zeta (p+q)^\alpha \Delta_{\alpha\zeta}(\lambda^2) + R^\zeta (p+q)^\alpha \Delta_{\alpha\zeta}(\lambda^2) \\
&\quad - 2q^2 I_{\log}(\lambda^2) + 2p^2 I_{\log}(\lambda^2) \\
&\quad + \frac{i}{(4\pi)^2} 2(p \cdot q) [\xi_0^0(q; \lambda^2) + 2(p \cdot q) \xi_{10}^{-1} + p^2 \xi_{00}^{-1} + \\
&\quad \quad \quad - \xi_0^0(p; \lambda^2) - 2(p \cdot q) \xi_{01}^{-1} - q^2 \xi_{00}^{-1}] \\
&\quad + \frac{i}{(4\pi)^2} 2q^2 [\xi_0^0(q; \lambda^2) + 2(p \cdot q) \xi_{10}^{-1} + p^2 \xi_{00}^{-1}] \\
&\quad - \frac{i}{(4\pi)^2} 2p^2 [\xi_0^0(p; \lambda^2) + 2(p \cdot q) \xi_{01}^{-1} + q^2 \xi_{00}^{-1}]. \tag{4.30}
\end{aligned}$$

Uma reorganização conveniente é proporcionada pela utilização das identidades (3.27) e (3.28), pois proporciona o cancelamento das estruturas ξ_{nm}^{-1} , fornecendo:

$$\begin{aligned}
(p+q)^\alpha [T_\alpha^{VPP}] &= R^\zeta (p+q)^\alpha \Delta_{\alpha\zeta}(\lambda^2) + R^\zeta (p+q)^\alpha \Delta_{\alpha\zeta}(\lambda^2) \\
&\quad + 2p^2 \left[I_{\log}(\lambda^2) - \frac{i}{(4\pi)^2} \xi_0^0(p; m^2; \lambda^2) \right] \\
&\quad - 2q^2 \left[I_{\log}(\lambda^2) - \frac{i}{(4\pi)^2} \xi_0^0(q; m^2; \lambda^2) \right]. \tag{4.31}
\end{aligned}$$

A fim de identificar as estruturas esperadas, é conveniente reorganizar os termos;

$$\begin{aligned}
(p+q)^\alpha [T_\alpha^{VPP}] &= [q^\alpha q^\zeta + Q_\alpha Q^\zeta] \Delta_{\alpha\zeta}(\lambda^2) + \\
&\quad + 4 \left\{ I_{quad}(m^2) - (\lambda^2 - m^2) I_{\log}(\lambda^2) + \frac{i}{(4\pi)^2} \left(m^2 - \lambda^2 - m^2 \ln \left(\frac{\lambda^2}{m^2} \right) \right) + \right. \\
&\quad \left. - \frac{q^2}{2} \left[I_{\log}(\lambda^2) - \frac{i}{(4\pi)^2} \xi_0^0(q; m^2; \lambda) \right] \right\} \\
&\quad - [p^\alpha p^\zeta + P_\alpha P^\zeta] \Delta_{\alpha\zeta}(\lambda^2) + \\
&\quad - 4 \left\{ I_{quad}(m^2) - (\lambda^2 - m^2) I_{\log}(\lambda^2) + \frac{i}{(4\pi)^2} \left(m^2 - \lambda^2 - m^2 \ln \left(\frac{\lambda^2}{m^2} \right) \right) \right. \\
&\quad \left. + \frac{p^2}{2} \left[I_{\log}(\lambda^2) - \frac{i}{(4\pi)^2} \xi_0^0(p; m^2; \lambda^2) \right] \right\}. \tag{4.32}
\end{aligned}$$

Agora podemos perceber claramente que a expressão obtida pela contração com o momento externo r corresponde à diferença entre duas funções PP's, conforme exigido pela identi-

dade (4.9). Deste modo, as operações realizadas são consistentes com a linearidade da operação de integração.

Com um procedimento similar, podemos verificar a relação entre função de Green para a amplitude VSS. Para isso, a contração da expressão (4.25) com o momento externo $p + q$ fornece:

$$\begin{aligned}
(p+q)^\alpha \left[T_\alpha^{VSS} \right] &= -(p+q)^\alpha R^\zeta \Delta_{\alpha\zeta}(\lambda^2) - (p+q)^\alpha R^\zeta \Delta_{\alpha\zeta}(\lambda^2) + \\
&+ q^2 I_{\log}(\lambda^2) - 2p^2 I_{\log}(\lambda^2) + \\
&+ \frac{i}{(4\pi)^2} 2(p \cdot q) \left[-\xi_0^0(q; \lambda^2) - (2p \cdot q + 8m^2) \xi_{10}^{-1} - (p^2 - 4m^2) \xi_{00}^{-1} + \right. \\
&\quad \left. + \xi_0^0(p; \lambda^2) (2p \cdot q + 8m^2) \xi_{01}^{-1} + (q^2 - 4m^2) \xi_{00}^{-1} \right] + \\
&- \frac{i}{(4\pi)^2} 2q^2 \left[\xi_0^0(q; \lambda^2) + (2p \cdot q + 8m^2) \xi_{10}^{-1} + (p^2 - 4m^2) \xi_{00}^{-1} \right] + \\
&+ \frac{i}{(4\pi)^2} 2p^2 \left[\xi_0^0(p; \lambda^2) + (2p \cdot q + 8m^2) \xi_{01}^{-1} + (q^2 - 4m^2) \xi_{00}^{-1} \right]. \quad (4.33)
\end{aligned}$$

Novamente, a utilização das identidades (3.27) e (3.28) permite eliminar as funções ξ_{nm}^{-1} . Teremos assim:

$$\begin{aligned}
(p+q)^\alpha \left[T_\alpha^{VSS} \right] &= -q^\alpha q^\zeta \Delta_{\alpha\zeta}(\lambda^2) - Q_\alpha Q^\zeta \Delta_{\alpha\zeta}(\lambda^2) \\
&+ 2q^2 \left[I_{\log}(\lambda^2) - \frac{i}{(4\pi)^2} (q - 4m^2) \xi_0^0(q; \lambda^2) \right] \\
&+ p^\alpha p^\zeta \Delta_{\alpha\zeta}(\lambda^2) + P_\alpha P^\zeta \Delta_{\alpha\zeta}(\lambda^2) + \\
&- 2p^2 \left[I_{\log}(\lambda^2) - \frac{i}{(4\pi)^2} (p^2 - 4m^2) \xi_0^0(p; \lambda^2) \right], \quad (4.34)
\end{aligned}$$

que, após uma conveniente reorganização, ficará;

$$\begin{aligned}
(p+q)^\alpha \left[T_\alpha^{VSS} \right] &= - \left(q^\alpha q^\zeta + Q_\alpha Q^\zeta \right) \Delta_{\alpha\zeta} (\lambda^2) \\
&- 4 \left\{ I_{quad} (m^2) - (\lambda^2 - m^2) I_{\log} (\lambda^2) + \frac{i}{(4\pi)^2} \left(m^2 - \lambda^2 - m^2 \ln \left(\frac{\lambda^2}{m^2} \right) \right) \right. \\
&+ \left. \frac{(4m^2 - q^2)}{2} \left[I_{\log} (\lambda^2) - \frac{i}{(4\pi)^2} \xi_0^0 (q^2; m^2; \lambda^2) \right] \right\} + \\
&+ \left(p^\alpha p^\zeta \Delta_{\alpha\zeta} (\lambda^2) + P_\alpha P^\zeta \right) \Delta_{\alpha\zeta} (\lambda^2) + \\
&+ 4 \left\{ I_{quad} (m^2) - (\lambda^2 - m^2) I_{\log} (\lambda^2) + \frac{i}{(4\pi)^2} \left(m^2 - \lambda^2 - m^2 \ln \left(\frac{\lambda^2}{m^2} \right) \right) \right. \\
&+ \left. \frac{(4m^2 - q^2)}{2} \left[I_{\log} (\lambda^2) - \frac{i}{(4\pi)^2} \xi_0^0 (q^2; m^2; \lambda^2) \right] \right\}. \tag{4.35}
\end{aligned}$$

É fácil então identificar o lado direito com a diferença de duas funções de dois pontos SS, como deveria ser, de acordo com a identidade (4.10).

Para verificarmos a relação entre função de Green para a amplitude ASP, expressão (4.27), seguimos o mesmo procedimento. A contração da expressão com o momento r fornecerá inicialmente:

$$\begin{aligned}
(p+q)^\alpha \left[T_\alpha^{ASP} \right] &= -2(p+q)^\alpha R^\zeta \Delta_{\alpha\zeta} (\lambda^2) \\
&+ 2(q \cdot p + q^2) I_{\log} (\lambda^2) - 2(q \cdot p + p^2)^\alpha I_{\log} (\lambda^2) \\
&+ \frac{i}{(4\pi)^2} 2(q \cdot p) \left[-\xi_0^0 (q; \lambda^2) - 2(p \cdot q) \xi_{10}^{-1} - p^2 \xi_{00}^{-1} + \xi_0^0 (p; \lambda^2) + \right. \\
&\quad \left. + 2(p \cdot q) \xi_{01}^{-1} + (q^2 - 4m^2) \xi_{00}^{-1} \right] \\
&- \frac{i}{(4\pi)^2} 2q^2 \left[\xi_0^0 (q; \lambda^2) + 2(p \cdot q) \xi_{10}^{-1} + p^2 \xi_{00}^{-1} \right] + \\
&+ \frac{i}{(4\pi)^2} 2p^2 \left[\xi_0^0 (p; \lambda^2) + 2(p \cdot q) \xi_{01}^{-1} + (q^2 - 4m^2) \xi_{00}^{-1} \right]. \tag{4.36}
\end{aligned}$$

A utilização das identidades (3.27) e (3.28) permite uma reorganização da expressão:

$$\begin{aligned}
(p+q)^\alpha \left[T_\alpha^{ASP} \right] &= -q^\alpha q^\zeta \Delta_{\alpha\zeta}(\lambda^2) + p^\alpha p^\zeta \Delta_{\alpha\zeta}(\lambda^2) \\
&\quad - (p^\alpha + q^\alpha) P^\zeta \Delta_{\alpha\zeta}(\lambda^2) - (p^\alpha + q^\alpha) Q^\zeta \Delta_{\alpha\zeta}(\lambda^2) + \\
&\quad + 2(q \cdot p + q^2) I_{\log}(\lambda^2) - 2(q \cdot p + p^2) I_{\log}(\lambda^2) + \\
&\quad + \frac{2i}{(4\pi)^2} \left[-q^2 \xi_0^0(q; \lambda^2) + p^2 \xi_0^0(p; \lambda^2) - 4m^2 (p^2 - p \cdot q) \xi_{00}^{-1} \right]. \quad (4.37)
\end{aligned}$$

A expressão acima pode ser reescrita convenientemente na forma;

$$\begin{aligned}
(p+q)^\alpha \left[T_\alpha^{ASP} \right] &= - \left(q^\alpha q^\zeta + Q_\alpha Q^\zeta \right) \Delta_{\alpha\zeta}(\lambda^2) + \\
&\quad - 4 \left\{ I_{quad}(m^2) - (\lambda^2 - m^2) I_{\log}(\lambda^2) + \frac{i}{(4\pi)^2} \left(m^2 - \lambda^2 - m^2 \ln \left(\frac{m^2}{\lambda^2} \right) \right) \right. \\
&\quad \left. - \frac{(4m^2 - q^2)}{2} \left[I_{\log}(\lambda^2) - \frac{i}{(4\pi)^2} \xi_0^0(q, m^2; \lambda^2) \right] \right\} \\
&\quad + \left(p^\alpha p^\zeta + P_\alpha P^\zeta \right) \Delta_{\alpha\zeta}(\lambda^2) + \\
&\quad + 4 \left\{ I_{quad}(m^2) - (\lambda^2 - m^2) I_{\log}(\lambda^2) + \frac{i}{(4\pi)^2} \left(m^2 - \lambda^2 - m^2 \ln \left(\frac{m^2}{\lambda^2} \right) \right) \right\} \\
&\quad + 8m^2 \left\{ \left[I_{\log}(\lambda^2) - \frac{i}{(4\pi)^2} \xi_0^0(q, m^2; \lambda^2) \right] - \frac{i}{(4\pi)^2} [p^2 \xi_{00}^{-1} - (p \cdot q) \xi_{00}^{-1}] \right\} \\
&\quad - 2p^2 \left[I_{\log}(\lambda^2) - \frac{i}{(4\pi)^2} \xi_0^0(p; \lambda^2) \right]. \quad (4.38)
\end{aligned}$$

Assim, podemos identificar a identidade (4.13).

Finalmente, verifiquemos a relação entre função de Green para a amplitude *APS*, equação (4.29). A contração com o momento externo *r* fica inicialmente

$$\begin{aligned}
(p+q)^\alpha \left[T_\alpha^{APS} \right] &= 2(p+q)^\alpha R^\zeta \Delta_{\alpha\zeta}(\lambda^2) \\
&\quad - 2(p \cdot q + q^2) I_{\log}(\lambda^2) + 2(p \cdot q + p^2) I_{\log}(\lambda^2) + \\
&\quad + \frac{i}{(4\pi)^2} 2(p \cdot q) \left[\xi_0^0(q; \lambda^2) + 2(p \cdot q) \xi_{10}^{-1} + (p^2 - 4m^2) \xi_{00}^{-1} + \right. \\
&\quad \quad \left. - \xi_0^0(p; \lambda^2) - 2(p \cdot q) \xi_{01}^{-1} - q^2 \xi_{00}^{-1} \right] + \\
&\quad + \frac{i}{(4\pi)^2} 2q^2 \left[\xi_0^0(q; \lambda^2) + 2(p \cdot q) \xi_{10}^{-1} + (p^2 - 4m^2) \xi_{00}^{-1} \right] + \\
&\quad - \frac{i}{(4\pi)^2} 2p^2 \left[\xi_0^0(p; \lambda^2) + 2(p \cdot q) \xi_{01}^{-1} + q^2 \xi_{00}^{-1} \right]. \quad (4.39)
\end{aligned}$$

Depois de utilizarmos as identidades (3.27) e (3.28) obteremos:

$$\begin{aligned}
(p+q)^\alpha \left[T_\alpha^{APS} \right] &= 2(p+q)^\alpha R^\zeta \Delta_{\alpha\zeta} (\lambda^2) \\
&+ \frac{2i}{(4\pi)^2} \left[-4(p \cdot q) m^2 \xi_{00}^{-1} + q^2 \xi_0^0 (q; \lambda^2) - 4q^2 m^2 \xi_{00}^{-1} - p^2 \xi_0^0 (p; \lambda^2) \right] \\
&- 2(p \cdot q + q^2) I_{\log} (\lambda^2) + 2(p \cdot q + p^2) I_{\log} (\lambda^2). \tag{4.40}
\end{aligned}$$

Após uma reorganização, obteremos:

$$\begin{aligned}
(p+q)^\alpha \left[T_\alpha^{APS} \right] &= \left(q^\alpha q^\zeta + Q_\alpha Q^\zeta \right) \Delta_{\alpha\zeta} (\lambda^2) + \\
&+ 4 \left\{ I_{quad} (m^2) - (\lambda^2 - m^2) I_{\log} (\lambda^2) + \frac{i}{(4\pi)^2} \left(m^2 - \lambda^2 - m^2 \ln \left(\frac{m^2}{\lambda^2} \right) \right) \right. \\
&- \left. \frac{q^2}{2} \left[I_{\log} (\lambda^2) - \frac{i}{(4\pi)^2} \xi_0^0 (q; \lambda^2) \right] \right\} \\
&- \left(p^\alpha p^\zeta + P_\alpha P^\zeta \right) \Delta_{\alpha\zeta} (\lambda^2) + \\
&- 4 \left\{ I_{quad} (m^2) - (\lambda^2 - m^2) I_{\log} (\lambda^2) + \frac{i}{(4\pi)^2} \left(m^2 - \lambda^2 - m^2 \ln \left(\frac{m^2}{\lambda^2} \right) \right) \right. \\
&- \left. \frac{(4m^2 - p^2)}{2} \left(I_{\log} (\lambda^2) - \frac{i}{(4\pi)^2} \xi_0^0 (p, m^2; \lambda^2) \right) \right\} \tag{4.41} \\
&+ 8m^2 \left\{ I_{\log} (\lambda^2) - \frac{i}{(4\pi)^2} \xi_0^0 (p, m^2; \lambda^2) - \frac{i}{(4\pi)^2} \left[(q^2 \xi_{00}^{-1} + (p \cdot q) \xi_{00}^{-1}) \right] \right\}.
\end{aligned}$$

Então é possível reconhecer as estruturas presentes na identidade (4.14), e o resultado desejado é obtido.

Portanto, todas as relações entre funções de Green foram obtidas satisfeitas independentemente do significado atribuído para as quantidades indefinidas presentes nas amplitudes envolvidas.

4.6 Verificação das identidades de Ward

Uma vez que obtivemos consistente as relações entre funções de Green para as amplitudes VPP , VSS , ASP e APS , podemos seguir adiante com a verificação das outras relações de simetria, já que a linearidade na operação de integração foi mantida. Caso a manutenção destas identidades tivesse sido comprometida seria necessário rever os procedimentos anteriores, pois nenhuma consequência física poderia ser levada a sério.

Então, o próximo passo é verificar as Identidades de Ward. Para as amplitudes VPP e VSS , o que se espera é que a contração com o momento $(p+q)$ produza, para o processo físico, um resultado identicamente nulo.

Partimos das expressões obtidas após a contração com o momento externo;

$$\begin{aligned} (p+q)^\alpha [T_\alpha^{VPP}] &= 2(p+q)^\alpha (k_3+k_2)^\zeta \Delta_{\alpha\zeta}(\lambda^2) + \\ &\quad -2q^2 \left[I_{\log}(\lambda^2) - \frac{i}{(4\pi)^2} \xi_0^0(q; m^2; \lambda) \right] + \\ &\quad +2p^2 \left[I_{\log}(\lambda^2) - \frac{i}{(4\pi)^2} \xi_0^0(p; m^2; \lambda^2) \right] \end{aligned} \quad (4.42)$$

e

$$\begin{aligned} (p+q)^\alpha [T_\alpha^{VSS}] &= -2(p+q)^\alpha (k_3+k_2)^\zeta \Delta_{\alpha\zeta}(\lambda^2) + \\ &\quad -2(4m^2-q^2) \left[I_{\log}(\lambda^2) - \frac{i}{(4\pi)^2} \xi_0^0(q; m^2; \lambda) \right] + \\ &\quad +2(4m^2-p^2) \left[I_{\log}(\lambda^2) - \frac{i}{(4\pi)^2} \xi_0^0(p; m^2; \lambda^2) \right]. \end{aligned} \quad (4.43)$$

Notemos que o resultado obtido é potencialmente ambíguo já que ele depende de combinações dos momentos internos que não correspondem a momentos externos. Isto não pode ser considerado surpreendente ou inesperado pois as amplitudes são linearmente divergentes e por isso não são invariantes por um *shift* no momento de integração. Na prática isso implica que uma escolha para os momentos das linhas internas poderá ser levada a outra, por uma transformação na variável de integração, mas a amplitude correspondente a uma das escolhas diferirá da outra pela compensação ao *shift* efetuado, que será um termo de superfície. Assim, os resultados:

$$T_\alpha^{VPP} \Big|_{ambguo} = 2(k_3+k_2)^\zeta \Delta_{\alpha\zeta}(\lambda^2) \quad (4.44)$$

$$T_\alpha^{VSS} \Big|_{ambguo} = -2(k_3+k_2)^\zeta \Delta_{\alpha\zeta}(\lambda^2), \quad (4.45)$$

representam precisamente o caráter linearmente divergente dessas amplitudes.

As estruturas dos termos correspondentes, como esperado, são termos de superfície. Isto pode ser visto, imediatamente, se reescrevemos o objeto $\Delta_{\alpha\zeta}(\lambda^2)$ numa forma conveniente:

$$\Delta_{\mu\nu}(\lambda^2) = \int_{\Lambda} \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{\partial}{\partial k_{\mu}} \left(-\frac{k_{\nu}}{(k^2 - \lambda^2)^2} \right). \quad (4.46)$$

Fica claro neste ponto as razões para a definição dos objetos básicos divergentes no contexto da estratégia que adotamos.

Neste ponto é relativamente fácil perceber que os termos ambíguos serão potencialmente violadores das identidades de Ward. Para verificar isto devemos somar os canais direto e cruzado para compor o processo físico correspondente. Consideremos, para estes propósitos, as escolhas para os rótulos das linhas internas especificadas no capítulo 2, e seguidas até aqui em todos os cálculos, como correspondendo ao canal direto e as escolhas

$$\begin{aligned} q &= l_1 - l_2 \\ p &= l_3 - l_1 \\ r &= l_3 - l_2. \end{aligned} \quad (4.47)$$

correspondendo ao canal cruzado. Deste modo teríamos;

$$\begin{aligned} (p+q)^{\alpha} [T_{\alpha}^{V \rightarrow PP}] &= 2(p+q)^{\alpha} (k_3 + k_2)^{\zeta} \Delta_{\alpha\zeta}(\lambda^2) + \\ &+ 2(p+q)^{\alpha} (l_3 + l_2)^{\zeta} \Delta_{\alpha\zeta}(\lambda^2) \end{aligned} \quad (4.48)$$

e

$$\begin{aligned} (p+q)^{\alpha} [T_{\alpha}^{V \rightarrow SS}] &= -2(p+q)^{\alpha} (k_3 + k_2)^{\zeta} \Delta_{\alpha\zeta}(\lambda^2) + \\ &- 2(p+q)^{\alpha} (l_3 + l_2)^{\zeta} \Delta_{\alpha\zeta}(\lambda^2), \end{aligned} \quad (4.49)$$

mostrando o papel dos termos ambíguos como potencialmente violadores das identidades de Ward. Estamos, neste ponto, diante de um dilema do cálculo perturbativo. Quando as divergências envolvidas superam o grau logarítmico, qualquer cálculo honesto matematicamente revelará a presença de termos ambíguos. Como as identidades de Ward são estabelecidas sobre a hipótese de que as amplitudes físicas são funções apenas de momentos físicos (invariância translacional) a existência de termos ambíguos implicará na violação das referidas identidades.

A atitude usualmente adotada é a de fazer alguma intervenção no resultado com a finalidade de eliminar os termos incômodos, porém corretos do ponto de vista matemático. Isto se dá de duas maneiras: forçando o termo de superfície a se anular ou assumindo o valor (honesto) diferente de zero para o termo de superfície e escolhendo convenientemente então o seu coeficiente ambíguo. A escolha conveniente do coeficiente ambíguo é feita assumindo os momentos internos arbitrários como combinações lineares dos momentos externos, como por exemplo,

$$\begin{aligned} k_1 &= ap + bq \\ k_2 &= bq + (a - 1)p \\ k_3 &= ap + (b + 1)q \end{aligned} \quad (4.50)$$

fixando os coeficientes da combinação linear de modo conveniente.

Qualquer das alternativas implica em modificar o resultado obtido como consequência de operações matemáticas corretas tornando a forma final desconectada das expressões estabelecidas pelas regras de Feynman. O argumento usual é que não há alternativas senão estas.

Assim para que possamos ter as identidades de Ward satisfeitas devemos adotar uma prescrição para tratar os termos ambíguos. Quando utilizamos regularizações, o valor dos objetos divergentes, automaticamente, ficam especificados nas operações realizadas. Para ver isso consideremos nas sub-seções a seguir duas dessas prescrições usuais e suas implicações para o valor da quantidade $\Delta_{\alpha\zeta}(\lambda^2)$.

Para isso devemos impor o resultado das condições impostas por algum tipo de regularização nos termos ambíguos. Consideraremos a regularização dimensional (RD) e a regularização de Pauli-Villars (PV).

4.7 Regularização Dimensional

A regularização dimensional consiste em fazer uma modificação na dimensão do espaço-tempo de maneira que consigamos evitar integrais divergentes (HOOFT; VELTMAN, 1972). A dimensão é assumida como uma variável contínua e complexa. Para isso, supomos que a solução da integral nos momentos:

$$I(2\omega, \alpha, q) = \int \frac{d^{2\omega}k}{(2\pi)^{2\omega}} \frac{1}{[k^2 + 2Q \cdot K - H^2]^\alpha} = \left(\frac{i}{(4\pi)^\omega} \right) \frac{\Gamma(\alpha - \omega)}{\Gamma(\alpha)(-Q^2 - H^2)^{\alpha - \omega}} \quad (4.51)$$

seja válida, também, para o caso divergente. Assim, quando $\alpha \leq \omega$ a integral acima será divergente e, admitiremos que esta integral é uma função analítica da variável ω , que é complexa e contínua. Desse modo podemos substituir, no lado direito da equação acima, a função gamma de Euler por sua continuação analítica, a função Gamma de Weierstrass. Desse modo, podemos derivar a relação acima em relação a Q e, em seguida, tomar o limite com Q tendendo a zero, de modo a gerar relações entre as integrais, mesmo que as indefinições matemáticas ainda estejam presentes (WITT B.; SMITH, 1986). Assim, podemos estabelecer:

$$\int \frac{d^{2\omega}k}{(2\pi)^4} \frac{1}{(k^2 - \lambda^2)^\alpha} = \left(\frac{i}{(4\pi)^\omega} \right) \frac{\Gamma(\alpha - \omega)}{\Gamma(\alpha)(-\lambda^2)^{\alpha-\omega}} \quad (4.52)$$

$$\int \frac{d^{2\omega}k}{(2\pi)^4} \frac{k_\mu k_\nu}{(k^2 - \lambda^2)^{\alpha+1}} = \frac{1}{2} \left(\frac{i}{(4\pi)^\omega} \right) \frac{g_{\mu\nu} \Gamma(\alpha - \omega)}{\Gamma(\alpha + 1)(-\lambda^2)^{\alpha-\omega}}. \quad (4.53)$$

Escolhendo valores adequados de α nas relações acima, podemos identificar a seguinte relação:

$$\int \frac{d^{2\omega}k}{(2\pi)^4} \frac{4k_\mu k_\nu}{(k^2 - \lambda^2)^3} = \int \frac{d^{2\omega}k}{(2\pi)^4} \frac{g_{\mu\nu}}{(k^2 - \lambda^2)^2}. \quad (4.54)$$

ou seja: $\Delta_{\mu\nu}(\lambda^2)$ é obtida igual a zero. Desse modo, os resultados produzidos por esta regularização são livres de ambiguidades e preservam as simetrias. Termos ambíguos são automaticamente eliminados pois é autorizado efetuar *shifts* impunemente (CHENG; LI, 1988). As integrais divergentes, mesmo aquelas com grau superior ao logarítmico são tratadas como se fossem finitas. A honestidade da prescrição, por isso, é bastante duvidosa, ainda que forneça, pelo menos nos casos considerados, resultados convenientes. Aquilo que aprendemos no cálculo básico a respeito da mudança de origem em uma integral divergente deve ser ignorado.

4.8 Regularização de Pauli-Villars

A regularização de Pauli-Villars (PV) é um método, disponível na literatura, para lidarmos com integrais divergentes (PAULI; VILLARS, 1949). Este método consiste em uma modificação do integrando. Esta é feita sobre um dos propagadores, da seguinte maneira:

$$\frac{1}{k^2 - \lambda^2} \longrightarrow \frac{1}{k^2 - \lambda^2} + \sum_{i=1}^n \frac{a_i}{k^2 - \Lambda^2} \quad (4.55)$$

onde Λ^2 são os parâmetros da regularização e satisfazem a propriedade $\Lambda^2 \gg \lambda^2$. O aumento no número de potências k do denominador é obtido com uma escolha adequada de a_i , de modo que a integral se torne convergente.

Por exemplo, para regularizar integrais que apresentam divergência de grau linear, é suficiente que escolhamos apenas um coeficiente não nulo. Se escolhermos $a_1 = (-1)$, obtemos então:

$$\frac{1}{k^2 - \lambda^2} \longrightarrow \frac{1}{k^2 - \lambda^2} G(\lambda^2, \Lambda^2), \quad (4.56)$$

onde definimos:

$$G(\lambda^2, \Lambda^2) = \frac{\lambda^2 - \Lambda^2}{k^2 - \Lambda^2}. \quad (4.57)$$

Assim, se exigirmos que o limite de conexão seja satisfeito, $\Lambda^2 \longrightarrow \infty$, obteremos $G(\lambda^2, \Lambda^2) = 1$. Para integrais que possuem maior grau de divergência, precisamos de mais termos não nulos na soma que modifica o propagador (WITT B.; SMITH, 1986). Dentro desta regularização podemos calcular o objeto divergente $\Delta_{\mu\nu}(\lambda^2)$;

$$\Delta_{\mu\nu}(\lambda^2) = \int_{\Lambda} \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{4k_{\mu}k_{\nu}}{(k^2 - \lambda^2)^3} G(\lambda^2, \Lambda^2) - \int_{\Lambda} \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{g_{\mu\nu}}{(k^2 - \lambda^2)^2} G(\lambda^2, \Lambda^2), \quad (4.58)$$

com

$$G(\lambda^2, \Lambda^2) = \frac{\lambda^2 - \Lambda^2}{k^2 - \Lambda^2}. \quad (4.59)$$

Utilizando a propriedade:

$$\int_{\Lambda} \frac{d^4k}{(2\pi)^4} k_{\mu}k_{\nu} f(k^2) = \int_{\Lambda} \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{g_{\mu\nu}}{4} f(k^2), \quad (4.60)$$

podemos notar, facilmente, que:

$$\begin{aligned} \Delta_{\mu\nu}(\lambda^2) &= \int_{\Lambda} \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{g_{\mu\nu} (k^2 + \lambda^2 - \lambda^2)}{(k^2 - \lambda^2)^3} G(\lambda^2, \Lambda^2) + \\ &\quad - \int_{\Lambda} \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{g_{\mu\nu}}{(k^2 - \lambda^2)^2} G(\lambda^2, \Lambda^2) \\ &= g_{\mu\nu} \int_{\Lambda} \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{\lambda^2}{(k^2 - \lambda^2)^3} G(\lambda^2, \Lambda^2). \end{aligned} \quad (4.61)$$

Então, como o integrando é finito:

$$\Delta_{\mu\nu}(\lambda^2) = g_{\mu\nu} \left\{ \left(\frac{i}{(4\pi)^2} \right) \left(\frac{-1}{2} \right) \right\}. \quad (4.62)$$

Ou seja, obtivemos $\Delta_{\mu\nu}(\lambda^2) \neq 0$. O resultado é matematicamente honesto. Entretanto, faz com que não seja possível eliminar as ambiguidades e os termos que violam simetrias, deixando como única possibilidade efetuar escolhas para os momentos das linhas internas de modo a zerarmos os coeficientes dos termos de superfície. A última operação parece destruir a honestidade anterior pois o resultado obtido não mais poderá ser conectado por operações matemáticas à expressão original, vinda das regras de Feynman. Em outras palavras, a forma final de uma amplitude após este tipo de intervenção não será uma diferente representação daquela estabelecida pelas regras de Feynman mas uma expressão diferente.

Resumindo as argumentações acima: para termos as identidades de Ward das amplitudes vetoriais consideradas neste capítulo temos duas opções:

a) $\Delta_{\mu\nu}(\lambda^2) = 0$.

Neste caso teremos

$$(p+q)^\alpha [T_\alpha^{V \rightarrow PP}] = 0 \quad (4.63)$$

e

$$(p+q)^\alpha [T_\alpha^{V \rightarrow SS}] = 0. \quad (4.64)$$

b) $\Delta_{\mu\nu}(\lambda^2) \neq 0$.

Neste caso devemos escolher:

$$\begin{aligned} k_1 &= \frac{q-p}{2} \\ k_2 &= -\frac{p+q}{2} \\ k_3 &= \frac{p+q}{2}, \end{aligned} \quad (4.65)$$

assim como para o canal cruzado:

$$\begin{aligned} l_1 &= \frac{p-q}{2} \\ l_2 &= -\frac{p+q}{2} \\ l_3 &= \frac{p+q}{2}. \end{aligned} \quad (4.66)$$

É fácil verificar que as escolhas satisfazem às relações de conservação nos vértices e produzem $k_2 + k_3 = l_2 + l_3 = 0$.

Qualquer uma das alternativas exige uma intervenção na forma obtida através de operações matemáticas corretas. O desejável seria obter estes resultados automaticamente. Não é razoável aceitarmos que uma simetria só será preservada se fizermos escolhas específicas para escolhas que devem ser arbitrárias, pois isso implica em aceitarmos que uma teoria precisa ser utilizada de uma maneira esperta para conseguirmos um resultado desejado, além de isso não garantir que o resultado desejado pode ser sempre encontrado adotando-se esta atitude.

Mas, se aceitarmos essas condições sem nos perguntarmos como esses resultados podem ser obtidos, poderemos verificar a consistência desses procedimentos? Ou seja, se aceitarmos as escolhas feitas para estas amplitudes e as transportarmos para as amplitudes triangulares anômalas, poderemos conciliar esses resultados de forma a obtermos uma teoria com poder de predição? Verificaremos isto nos capítulos seguintes.

4.9 Verificação dos limites de baixa energia

Consideremos agora os limites de baixa energia para as amplitudes vetoriais, estabelecidos na seção 4.3. Então, considerando as expressões (4.32), (4.35), (4.38) e (4.42) acima, para as formas contraídas das amplitudes, começando pela amplitude VPP , teremos:

$$\begin{aligned} (p+q)^\alpha T_\alpha^{VPP} \Big|_{p^2=q^2=(p,q)=0} = \\ 2(p+q)^\alpha (k_3+k_2)^\zeta \Delta_{\alpha\zeta}(\lambda^2) \Big|_{p^2=q^2=(p,q)=0}. \end{aligned} \quad (4.67)$$

Notemos que isto pode ser visto facilmente da relação entre funções de Green, devidamente verificada:

$$\begin{aligned} (k_3-k_2)^\alpha T_\alpha^{VPP} \Big|_{p^2=q^2=(p,q)=0} = \\ T^{PP}(k_1, k_2, m) \Big|_{p^2=q^2=(p,q)=0} - T^{PP}(k_3, k_1, m) \Big|_{p^2=q^2=(p,q)=0}. \end{aligned} \quad (4.68)$$

De modo similar, para a amplitude VSS o resultado obtido é:

$$\begin{aligned} (p+q)^\alpha T_\alpha^{VSS} \Big|_{p^2=q^2=(p,q)=0} = \\ -2(p+q)^\alpha (k_3+k_2)^\zeta \Delta_{\alpha\zeta}(\lambda^2) \Big|_{p^2=q^2=(p,q)=0}, \end{aligned} \quad (4.69)$$

que é consistente com:

$$(k_3 - k_2)^\alpha T_\alpha^{VSS} \Big|_{p^2=q^2=(p.q)=0} = T^{SS}(k_1, k_2, m) \Big|_{p^2=q^2=(p.q)=0} - T^{SS}(k_3, k_1, m) \Big|_{p^2=q^2=(p.q)=0}. \quad (4.70)$$

Para a amplitude *ASP* teremos:

$$(k_3 - k_2)^\alpha T_\alpha^{ASP} \Big|_{p^2=q^2=(p.q)=0} = \left[-2(p+q)^\alpha (k_3 + k_2)^\zeta \Delta_{\alpha\zeta}(\lambda^2) \right]_{p^2=q^2=(p.q)=0}, \quad (4.71)$$

que é consistente com:

$$(k_3 - k_2)^\alpha T_\alpha^{ASP} \Big|_{p^2=q^2=(p.q)=0} = -T^{PP}(k_1, k_2, m) \Big|_{p^2=q^2=(p.q)=0} + T^{SS}(k_3, k_1, m) \Big|_{p^2=q^2=(p.q)=0} - 2m T^{PSP} \Big|_{p^2=q^2=(p.q)=0}. \quad (4.72)$$

Finalmente, para a amplitude *APS*, teremos:

$$(k_3 - k_2)^\alpha T_\alpha^{APS} \Big|_{p^2=q^2=(p.q)=0} = \left[-2(p+q)^\alpha (k_3 + k_2)^\zeta \Delta_{\alpha\zeta}(\lambda^2) \right]_{p^2=q^2=(p.q)=0}, \quad (4.73)$$

que pode ser visto também na forma:

$$(k_3 - k_2)^\alpha T_\alpha^{APS} \Big|_{p^2=q^2=(p.q)=0} = -T^{SS}(k_1, k_2, m) \Big|_{p^2=q^2=(p.q)=0} - T^{PP}(k_3, k_1, m) \Big|_{p^2=q^2=(p.q)=0} - 2m \left[T^{PPS} \right] \Big|_{p^2=q^2=(p.q)=0}. \quad (4.74)$$

Assim, nenhuma das amplitudes triangulares vetoriais consideradas se anulará neste limite, como seria esperado para amplitudes preditivas. O limite é estabelecido pelo termo ambíguo que também viola a identidade de Ward. Nestes casos simples a eliminação dos termos ambíguos, quer por anulação dos termos de superfície ou por escolha conveniente dos momentos das linhas internas, leva automaticamente ao valor nulo para os referidos limites.

Agora, iremos investigar se as escolhas feitas para estas amplitudes simples quando transportadas para as amplitudes anômalas podem ser conciliadas, já que as amplitudes pseudo

tensoriais de três índices possuem como subestruturas aquelas de um índice que consideramos neste capítulo, como veremos a seguir.

5 AMPLITUDES PSEUDO TENSORIAIS DE TERCEIRA ORDEM

Finalmente, passamos a considerar as amplitudes triangulares ditas anômalas; AVV , VAV , VVA e AAA . Faremos uma investigação seguindo os mesmos passos tomados no capítulo anterior onde consideramos amplitudes triangulares mais simples, todas vetoriais.

Deste modo começaremos por considerar aspectos gerais destas amplitudes como: relações entre funções de Green, identidades de Ward e limites de baixa energia. Em seguida calcularemos explicitamente as amplitudes e verificaremos se os resultados obtidos satisfazem às expectativas estabelecidas para elas.

5.1 Relações entre funções de Green

Antes de calcularmos explicitamente as amplitudes anômalas iremos verificar o que devemos esperar das propriedades de simetria destas amplitudes. Começaremos pelas relações entre funções de Green que, como dissemos, são relações entre amplitudes do cálculo perturbativo. Para tal, devemos contrair a expressão correspondente à amplitude com os momentos externos r , p e q .

Para construirmos as relações entre funções de Green para as amplitudes AVV , VAV , VVA e AAA , consideramos inicialmente as seguintes definições:

$$t_{\lambda\mu\nu}^{AVV} = Tr \left\{ \gamma_\lambda \gamma_5 \frac{1}{[(\not{k} + \not{k}_3) - m]} \gamma_\mu \frac{1}{[(\not{k} + \not{k}_1) - m]} \gamma_\nu \frac{1}{[(\not{k} + \not{k}_2) - m]} \right\}, \quad (5.1)$$

$$t_{\lambda\mu\nu}^{VAV} = Tr \left\{ \gamma_\lambda \frac{1}{[(\not{k} + \not{k}_3) - m]} \gamma_\mu \gamma_5 \frac{1}{[(\not{k} + \not{k}_1) - m]} \gamma_\nu \frac{1}{[(\not{k} + \not{k}_2) - m]} \right\}, \quad (5.2)$$

$$t_{\lambda\mu\nu}^{VVA} = Tr \left\{ \gamma_\lambda \frac{1}{[(\not{k} + \not{k}_3) - m]} \gamma_\mu \frac{1}{[(\not{k} + \not{k}_1) - m]} \gamma_\nu \gamma_5 \frac{1}{[(\not{k} + \not{k}_2) - m]} \right\}, \quad (5.3)$$

$$t_{\lambda\mu\nu}^{AAA} = Tr \left\{ \gamma_\lambda \gamma_5 \frac{1}{[(\not{k} + \not{k}_3) - m]} \gamma_\mu \gamma_5 \frac{1}{[(\not{k} + \not{k}_1) - m]} \gamma_\nu \gamma_5 \frac{1}{[(\not{k} + \not{k}_2) - m]} \right\}. \quad (5.4)$$

Agora, devemos tomar a contração destas expressões com os momentos externos r , p e q e utilizar a álgebra das matrizes Dirac de maneira conveniente, como fizemos no capítulo anterior. Tendo em vista que as operações são essencialmente as mesmas, apenas listaremos as identidades. Teremos assim, para a amplitude AVV as seguintes identidades, representadas diagramaticamente pelas figuras 5.1, 5.2 e 5.3, respectivamente:

$$(k_2 - k_3)^\lambda t_{\lambda\mu\nu}^{AVV} = t_{\mu\nu}^{AV}(k_1, k_2; m) - t_{\nu\mu}^{AV}(k_3, k_1; m) - 2mt_{\mu\nu}^{PVV}, \quad (5.5)$$

Figura 5.1 – Representação diagramática da relação entre funções de Green para contração do momento r com a amplitude AVV .

$$\begin{aligned}
 & (k_3 - k_2)^\lambda \left[\begin{array}{c} \text{Diagrama triangular com vértices } \gamma_\lambda \gamma_5 \text{ (esquerda), } \gamma_\mu \text{ (topo), } \gamma_\nu \text{ (fundo).} \\ \text{Momentos: } k+k_3 \text{ (topo-esquerda), } k+k_2 \text{ (fundo-esquerda), } k+k_1 \text{ (vertical direita).} \end{array} \right] \\
 &= \begin{array}{c} \text{Diagrama de loop com vértices } \gamma_\mu \text{ (topo), } \gamma_\nu \text{ (fundo).} \\ \text{Momentos: } k+k_1 \text{ (superior), } k+k_2 \text{ (inferior).} \end{array} - \begin{array}{c} \text{Diagrama de loop com vértices } \gamma_\nu \text{ (topo), } \gamma_\mu \text{ (fundo).} \\ \text{Momentos: } k+k_3 \text{ (superior), } k+k_1 \text{ (inferior).} \end{array} - 2m \left[\begin{array}{c} \text{Diagrama triangular com vértices } \gamma_5 \text{ (esquerda), } \gamma_\mu \text{ (topo), } \gamma_\nu \text{ (fundo).} \\ \text{Momentos: } k+k_3 \text{ (topo-esquerda), } k+k_2 \text{ (fundo-esquerda), } k+k_1 \text{ (vertical direita).} \end{array} \right] \\
 & (k_3 - k_1)^\mu t_{\lambda\mu\nu}^{AVV} = t_{\lambda\nu}^{AV}(k_1, k_2; m) - t_{\lambda\nu}^{AV}(k_3, k_2; m) \quad (5.6)
 \end{aligned}$$

e

Figura 5.2 – Representação diagramática da relação entre funções de Green para contração do momento q com a amplitude AVV .

$$\begin{aligned}
 & (k_3 - k_1)^\mu \left[\begin{array}{c} \text{Diagrama triangular com vértices } \gamma_\lambda \gamma_5 \text{ (esquerda), } \gamma_\mu \text{ (topo), } \gamma_\nu \text{ (fundo).} \\ \text{Momentos: } k+k_3 \text{ (topo-esquerda), } k+k_2 \text{ (fundo-esquerda), } k+k_1 \text{ (vertical direita).} \end{array} \right] \\
 &= \begin{array}{c} \text{Diagrama de loop com vértices } \gamma_\lambda \gamma_5 \text{ (topo), } \gamma_\nu \text{ (fundo).} \\ \text{Momentos: } k+k_1 \text{ (superior), } k+k_2 \text{ (inferior).} \end{array} - \begin{array}{c} \text{Diagrama de loop com vértices } \gamma_\lambda \gamma_5 \text{ (topo), } \gamma_\mu \text{ (fundo).} \\ \text{Momentos: } k+k_3 \text{ (superior), } k+k_2 \text{ (inferior).} \end{array} \\
 & (k_1 - k_2)^\nu t_{\lambda\mu\nu}^{AVV} = t_{\lambda\mu}^{AV}(k_3, k_2; m) - t_{\lambda\mu}^{AV}(k_3, k_1; m). \quad (5.7)
 \end{aligned}$$

Figura 5.3 – Representação diagramática da relação entre funções de Green para contração do momento p com a amplitude AVV .

$$\begin{aligned}
 & (k_1 - k_2)^\nu \left[\begin{array}{c} \text{Diagrama triangular com vértices } \gamma_\lambda \gamma_5 \text{ (esquerda), } \gamma_\mu \text{ (topo), } \gamma_\nu \text{ (fundo).} \\ \text{Momentos: } k+k_3 \text{ (topo-esquerda), } k+k_2 \text{ (fundo-esquerda), } k+k_1 \text{ (vertical direita).} \end{array} \right] \\
 &= \begin{array}{c} \text{Diagrama de loop com vértices } \gamma_\lambda \gamma_5 \text{ (topo), } \gamma_\mu \text{ (fundo).} \\ \text{Momentos: } k+k_3 \text{ (superior), } k+k_2 \text{ (inferior).} \end{array} - \begin{array}{c} \text{Diagrama de loop com vértices } \gamma_\lambda \gamma_5 \text{ (topo), } \gamma_\mu \text{ (fundo).} \\ \text{Momentos: } k+k_3 \text{ (superior), } k+k_1 \text{ (inferior).} \end{array}
 \end{aligned}$$

Por sua vez para a amplitude VAV , teremos as seguintes identidades, representadas diagramaticamente pelas figuras 5.4, 5.5 e 5.6, respectivamente:

$$(k_3 - k_2)^\lambda t_{\lambda\mu\nu}^{VAV} = t_{\mu\nu}^{AV}(k_1, k_2; m) - t_{\nu\mu}^{VA}(k_3, k_1; m), \quad (5.8)$$

$$(k_3 - k_1)^\mu t_{\lambda\mu\nu}^{VAV} = t_{\lambda\nu}^{AV}(k_1, k_2; m) + t_{\lambda\nu}^{VA}(k_3, k_2; m) + 2mt_{\lambda\nu}^{VPV} \quad (5.9)$$

e

Figura 5.4 – Representação diagramática da relação entre funções de Green para contração do momento r com a amplitude VAV .

$$(k_3 - k_2)^\lambda \left[\begin{array}{c} \text{Diagrama triangular com vértices } \gamma_\lambda, \gamma_\mu\gamma_5, \gamma_\nu \text{ e momentos } k+k_3, k+k_1, k+k_2 \end{array} \right] = \text{Diagrama de loop com } \gamma_\mu\gamma_5 \text{ e } \gamma_\nu \text{ e momentos } k+k_1, k+k_2 - \text{Diagrama de loop com } \gamma_\nu \text{ e } \gamma_\mu\gamma_5 \text{ e momentos } k+k_3, k+k_1$$

Figura 5.5 – Representação diagramática da relação entre funções de Green para contração do momento q com a amplitude VAV .

$$(k_3 - k_1)^\mu \left[\begin{array}{c} \text{Diagrama triangular com vértices } \gamma_\lambda, \gamma_\mu\gamma_5, \gamma_\nu \text{ e momentos } k+k_3, k+k_1, k+k_2 \end{array} \right] = \text{Diagrama de loop com } \gamma_\lambda\gamma_5 \text{ e } \gamma_\nu \text{ e momentos } k+k_1, k+k_2 + \text{Diagrama de loop com } \gamma_\lambda \text{ e } \gamma_\nu\gamma_5 \text{ e momentos } k+k_3, k+k_2 + 2m \left[\begin{array}{c} \text{Diagrama triangular com vértices } \gamma_\lambda, \gamma_5, \gamma_\nu \text{ e momentos } k+k_3, k+k_1, k+k_2 \end{array} \right]$$

$$(k_1 - k_2)^\nu t_{\lambda\mu\nu}^{VAV} = t_{\lambda\mu}^{VA}(k_3, k_2; m) - t_{\lambda\mu}^{VA}(k_3, k_1; m). \quad (5.10)$$

Figura 5.6 – Representação diagramática da relação entre funções de Green para contração do momento p com a amplitude VAV .

$$(k_1 - k_2)^\nu \left[\begin{array}{c} \text{Diagrama triangular com vértices } \gamma_\lambda, \gamma_\mu\gamma_5, \gamma_\nu \text{ e momentos } k+k_3, k+k_1, k+k_2 \end{array} \right] = \text{Diagrama de loop com } \gamma_\lambda \text{ e } \gamma_\mu\gamma_5 \text{ e momentos } k+k_3, k+k_2 - \text{Diagrama de loop com } \gamma_\lambda \text{ e } \gamma_\mu\gamma_5 \text{ e momentos } k+k_3, k+k_1$$

Para a amplitude VVA , teremos as seguintes identidades, representadas diagramaticamente pelas figuras 5.7, 5.8 e 5.9, respectivamente:

$$(k_3 - k_2)^\lambda t_{\lambda\mu\nu}^{VVA} = t_{\mu\nu}^{VA}(k_1, k_2; m) - t_{\nu\mu}^{AV}(k_3, k_1; m), \quad (5.11)$$

Figura 5.7 – Representação diagramática da relação entre funções de Green para contração do momento r com a amplitude VVA .

$$(k_3 - k_2)^\lambda \left[\begin{array}{c} \text{Diagrama triangular com vértices } \gamma_\lambda, \gamma_\mu, \gamma_\nu\gamma_5 \text{ e momentos } k+k_3, k+k_1, k+k_2 \end{array} \right] = \text{Diagrama de loop com } \gamma_\mu \text{ e } \gamma_\nu\gamma_5 \text{ e momentos } k+k_1, k+k_2 - \text{Diagrama de loop com } \gamma_\nu\gamma_5 \text{ e } \gamma_\mu \text{ e momentos } k+k_3, k+k_1$$

$$(k_3 - k_1)^\mu t_{\lambda\mu\nu}^{VVA} = t_{\lambda\nu}^{VA}(k_1, k_2; m) - t_{\lambda\nu}^{VA}(k_3, k_2; m) \quad (5.12)$$

e

Figura 5.8 – Representação diagramática da relação entre funções de Green para contração do momento q com a amplitude VVA.

$$(k_3 - k_1)^\mu \left[\begin{array}{c} \text{Diagram 1: Triangle with vertices } \gamma_\lambda, \gamma_\mu, \gamma_\nu \gamma_5. \text{ External momenta } k+k_3, k+k_1, k+k_2. \end{array} \right] = \begin{array}{c} \text{Diagram 2: Bubble with vertices } \gamma_\lambda, \gamma_\nu \gamma_5. \text{ External momenta } k+k_1, k+k_2. \end{array} - \begin{array}{c} \text{Diagram 3: Bubble with vertices } \gamma_\lambda, \gamma_\nu \gamma_5. \text{ External momenta } k+k_3, k+k_2. \end{array}$$

$$(k_1 - k_2)^\nu t_{\lambda\mu\nu}^{VVA} = t_{\lambda\mu}^{VA}(k_3, k_2; m) - t_{\lambda\mu}^{AV}(k_3, k_1; m) + 2mt_{\lambda\mu}^{VVP}. \quad (5.13)$$

Figura 5.9 – Representação diagramática da relação entre funções de Green para contração do momento p com a amplitude VVA.

$$(k_1 - k_2)^\nu \left[\begin{array}{c} \text{Diagram 1: Triangle with vertices } \gamma_\lambda, \gamma_\mu, \gamma_\nu \gamma_5. \text{ External momenta } k+k_3, k+k_1, k+k_2. \end{array} \right] = \begin{array}{c} \text{Diagram 2: Bubble with vertices } \gamma_\lambda, \gamma_\mu \gamma_5. \text{ External momenta } k+k_3, k+k_2. \end{array} - \begin{array}{c} \text{Diagram 3: Bubble with vertices } \gamma_\lambda \gamma_5, \gamma_\mu. \text{ External momenta } k+k_3, k+k_1. \end{array} + 2m \left[\begin{array}{c} \text{Diagram 4: Triangle with vertices } \gamma_\lambda, \gamma_\mu, \gamma_5. \text{ External momenta } k+k_3, k+k_1, k+k_2. \end{array} \right]$$

E, finalmente, as identidades relativas à amplitude AAA, são as seguintes, representadas diagramaticamente pelas figuras 5.10, 5.11 e 5.12, respectivamente:

$$(k_3 - k_2)^\lambda t_{\lambda\mu\nu}^{AAA} = t_{\mu\nu}^{VA}(k_1, k_2; m) - t_{\nu\mu}^{VA}(k_3, k_1; m) - 2mt_{\mu\nu}^{PAA}, \quad (5.14)$$

Figura 5.10 – Representação diagramática da relação entre funções de Green para contração do momento r com a amplitude AAA.

$$(k_3 - k_2)^\lambda \left[\begin{array}{c} \text{Diagram 1: Triangle with vertices } \gamma_\lambda \gamma_5, \gamma_\mu \gamma_5, \gamma_\nu \gamma_5. \text{ External momenta } k+k_3, k+k_1, k+k_2. \end{array} \right] = \begin{array}{c} \text{Diagram 2: Bubble with vertices } \gamma_\mu, \gamma_\nu \gamma_5. \text{ External momenta } k+k_1, k+k_2. \end{array} - \begin{array}{c} \text{Diagram 3: Bubble with vertices } \gamma_\nu, \gamma_\mu \gamma_5. \text{ External momenta } k+k_3, k+k_1. \end{array} - 2m \left[\begin{array}{c} \text{Diagram 4: Triangle with vertices } \gamma_5, \gamma_\mu \gamma_5, \gamma_\nu \gamma_5. \text{ External momenta } k+k_3, k+k_1, k+k_2. \end{array} \right]$$

$$(k_3 - k_1)^\mu t_{\lambda\mu\nu}^{AAA} = t_{\lambda\nu}^{VA}(k_1, k_2; m) - t_{\lambda\nu}^{AV}(k_3, k_2; m) + 2mt_{\lambda\nu}^{APA} \quad (5.15)$$

e

$$(k_1 - k_2)^\nu t_{\lambda\mu\nu}^{AAA} = t_{\lambda\mu}^{AV}(k_3, k_2; m) - t_{\lambda\mu}^{VA}(k_3, k_1; m) + 2mt_{\lambda\mu}^{AAP}. \quad (5.16)$$

Figura 5.11 – Representação diagramática da relação entre funções de Green da contração do momento q com a amplitude AAA.

$$(k_3 - k_1)^\mu \left[\begin{array}{c} \text{Diagrama 1} \\ \text{Diagrama 2} \\ \text{Diagrama 3} \end{array} \right] = \gamma_\lambda \left[\begin{array}{c} \text{Diagrama 4} \\ \text{Diagrama 5} \end{array} \right] + 2m \left[\begin{array}{c} \text{Diagrama 6} \\ \text{Diagrama 7} \\ \text{Diagrama 8} \end{array} \right]$$

Figura 5.12 – Representação diagramática da relação entre funções de Green para contração do momento p com a amplitude AAA.

$$(k_1 - k_2)^\nu \left[\begin{array}{c} \text{Diagrama 1} \\ \text{Diagrama 2} \\ \text{Diagrama 3} \end{array} \right] = \gamma_\lambda \gamma_5 \left[\begin{array}{c} \text{Diagrama 4} \\ \text{Diagrama 5} \end{array} \right] + 2m \left[\begin{array}{c} \text{Diagrama 6} \\ \text{Diagrama 7} \\ \text{Diagrama 8} \end{array} \right]$$

Percebemos então que apenas uma função de dois pontos está envolvida: a função AV . Quanto às funções de três pontos: PVV , VPV , VVP , PAA , APA e AAP , elas são todas finitas. Todas foram listadas no capítulo 3.

Depois de calcularmos as amplitudes anômalas poderemos verificar se estas identidades são satisfeitas pelas formas obtidas.

5.2 Identidades de Ward

Já vimos anteriormente que as identidades de Ward estabelecem que, para toda amplitude contendo índices de Lorentz, a contração obtida com o momento externo do vértice estará relacionada à amplitude com mesma topologia, porém, com o operador de vértice contendo o índice de Lorentz trocado pelo pseudo-escalar, se o índice de Lorentz estiver relacionado ao índice axial e, será nulo, se o índice de Lorentz estiver relacionado ao índice vetorial.

Primeiramente para a amplitude AVV devemos obter as seguintes identidades:

$$q^\mu T_{\lambda\mu\nu}^{A \rightarrow VV} = 0, \quad (5.17)$$

$$p^\nu T_{\lambda\mu\nu}^{A \rightarrow VV} = 0, \quad (5.18)$$

$$(p+q)^\lambda T_{\lambda\mu\nu}^{A \rightarrow VV} = -2m T_{\mu\nu}^{P \rightarrow VV}. \quad (5.19)$$

Para a amplitude VAV , por sua vez, teremos as seguintes identidades:

$$q^\mu T_{\lambda\mu\nu}^{V\rightarrow AV} = -2mT_{\lambda\nu}^{V\rightarrow PV}, \quad (5.20)$$

$$p^\nu T_{\lambda\mu\nu}^{V\rightarrow AV} = 0, \quad (5.21)$$

$$(p+q)^\lambda T_{\lambda\mu\nu}^{V\rightarrow AV} = 0. \quad (5.22)$$

De modo similar, para a amplitude VVA teremos as identidades:

$$q^\mu T_{\lambda\mu\nu}^{V\rightarrow VA} = 0, \quad (5.23)$$

$$p^\nu T_{\lambda\mu\nu}^{V\rightarrow VA} = -2mT_{\lambda\mu}^{V\rightarrow VP}, \quad (5.24)$$

$$(p+q)^\lambda T_{\lambda\mu\nu}^{V\rightarrow VA} = 0. \quad (5.25)$$

Finalmente, a amplitude AAA deverá satisfazer as seguintes identidades:

$$q^\mu T_{\lambda\mu\nu}^{A\rightarrow AA} = -2mT_{\lambda\nu}^{A\rightarrow PA}, \quad (5.26)$$

$$p^\nu T_{\lambda\mu\nu}^{A\rightarrow AA} = -2mT_{\lambda\mu}^{A\rightarrow AP}, \quad (5.27)$$

$$(p+q)^\lambda T_{\lambda\mu\nu}^{A\rightarrow AA} = -2mT_{\mu\nu}^{P\rightarrow AA}. \quad (5.28)$$

Estas relações de simetria devem ser satisfeitas para que a teoria tenha chance de ser renormalizável. Entretanto, matematicamente devemos esperar que, sendo as amplitudes linearmente divergentes, elas apresentem ambiguidades e essas ambiguidades poderão comprometer as relações de simetria, como vimos no capítulo anterior.

5.3 Limites de baixa energia

Para estabelecermos limites de baixa energia para as amplitudes triangulares consideradas acima, devemos tomar a forma mais geral do tensor correspondente e levar em conta que este deve ser construído a partir dos momentos internos k_1 , k_2 e k_3 . Tendo em vista que as amplitudes serão construídas no contexto das soluções perturbativas (regras de Feynman) se o tensor corresponder a uma amplitude com grau de divergência superior ao logarítmico, então, ao efetuarmos um shift $k' = k + k_1$, deveremos compensar tal operação com os termos de superfície correspondentes. Portanto, a forma tensorial mais geral possível de um pseudo tensor de

terceira ordem deve corresponder a:

$$\begin{aligned}
T_{\lambda\mu\nu} = & \varepsilon_{\lambda\mu\nu\alpha} [Q^\alpha G_1 + P^\alpha G_2 + R^\alpha G_3] + \\
& + \varepsilon_{\lambda\mu\nu\alpha} [q^\alpha F_1(p, q) + p^\alpha F_2(p, q)] + \\
& + \varepsilon_{\mu\nu\alpha\beta} p_\lambda [p^\alpha q^\beta F_3(p, q)] + \\
& + \varepsilon_{\mu\nu\alpha\beta} q_\lambda [p^\alpha q^\beta F_4(p, q)] + \\
& + \varepsilon_{\lambda\mu\alpha\beta} p_\nu [p^\alpha q^\beta F_5(p, q)] + \\
& + \varepsilon_{\lambda\mu\alpha\beta} q_\nu [p^\alpha q^\beta F_6(p, q)] + \\
& + \varepsilon_{\lambda\nu\alpha\beta} p_\mu [p^\alpha q^\beta F_7(p, q)] + \\
& + \varepsilon_{\lambda\nu\alpha\beta} q_\mu [p^\alpha q^\beta F_8(p, q)], \tag{5.29}
\end{aligned}$$

onde os F_i 's são funções escalares e os G_i 's terão estrutura de termos de superfície.

A fim de identificar limites de baixa energia, consideramos a contração desta estrutura com os momentos externos.

Primeiramente, contraindo a estrutura tensorial geral com o momento r , teremos:

$$\begin{aligned}
r^\lambda T_{\lambda\mu\nu} = & (p+q)^\lambda T_{\lambda\mu\nu}(p, q) = \\
= & -\varepsilon_{\mu\nu\alpha\beta} [(p+q)^\beta Q^\alpha G_1 + (p+q)^\beta P^\alpha G_2 + (p+q)^\beta R^\alpha G_3] + \\
& + \varepsilon_{\mu\nu\alpha\beta} p^\alpha q^\beta [F_1(p, q) - F_2(p, q) + (p^2 + q \cdot p) F_3(p, q) + \\
& + (p \cdot q + q^2) F_4(p, q)]. \tag{5.30}
\end{aligned}$$

Por sua vez, a contração com o momento p fornece:

$$\begin{aligned}
p^\nu T_{\lambda\mu\nu} = & \varepsilon_{\lambda\mu\nu\alpha} [p^\nu Q^\alpha G_1 + p^\nu P^\alpha G_2 + p^\nu R^\alpha G_3] + \\
& + \varepsilon_{\lambda\mu\alpha\beta} p^\alpha q^\beta [F_1(p, q) + p^2 F_5(p, q) + (p \cdot q) F_6(p, q)]. \tag{5.31}
\end{aligned}$$

A contração com o momento q nos levará à expressão:

$$\begin{aligned}
q^\mu T_{\lambda\mu\nu} = & \varepsilon_{\lambda\mu\nu\alpha} [q^\mu Q^\alpha G_1 + q^\mu P^\alpha G_2 + q^\mu R^\alpha G_3] + \\
& + \varepsilon_{\lambda\nu\alpha\beta} q^\beta p^\alpha [F_2(p, q) + (q \cdot p) F_7(p, q) + q^2 F_8(p, q)]. \tag{5.32}
\end{aligned}$$

Com o intuito de estabelecer implicações destas propriedades lembremos que as contrações devem estabelecer relações entre funções de Green. Portanto as contrações acima podem ser vistas como sendo as próprias relações entre funções de Green. Vamos então particularizar as expressões acima para cada uma das amplitudes que estamos considerando na presente investigação.

5.4 Limites de baixa energia para as amplitudes AVV, VAV e VVA

Neste caso identificamos as contrações acima como sendo:

$$\begin{aligned}
 p^\nu T_{\lambda\mu\nu}^{AVV} &= -\varepsilon_{\lambda\mu\alpha\beta} \left[p^\beta Q^\alpha G_1 + p^\beta P^\alpha G_2 + p^\beta R^\alpha G_3 \right] + \\
 &\quad + \varepsilon_{\lambda\mu\alpha\beta} p^\alpha q^\beta \left[F_1(p, q) + p^2 F_5(p, q) + (p \cdot q) F_6(p, q) \right] \\
 &= T_{\lambda\mu}^{AV}(k_3, k_2; m) - T_{\lambda\mu}^{AV}(k_3, k_1; m)
 \end{aligned} \tag{5.33}$$

$$\begin{aligned}
 q^\mu T_{\lambda\mu\nu} &= \varepsilon_{\lambda\nu\alpha\beta} \left[q^\beta Q^\alpha G_1 + q^\beta P^\alpha G_2 + q^\beta R^\alpha G_3 \right] + \\
 &\quad + \varepsilon_{\lambda\nu\alpha\beta} q^\beta p^\alpha \left[F_2(p, q) + (q \cdot p) F_7(p, q) + q^2 F_8(p, q) \right] \\
 &= T_{\lambda\nu}^{AV}(k_1, k_2; m) - T_{\lambda\nu}^{AV}(k_3, k_2; m)
 \end{aligned} \tag{5.34}$$

e

$$\begin{aligned}
 r^\lambda T_{\lambda\mu\nu}^{AVV} &= -\varepsilon_{\mu\nu\alpha\beta} \left[(p+q)^\beta Q^\alpha G_1 + (p+q)^\beta P^\alpha G_2 + (p+q)^\beta R^\alpha G_3 \right] + \\
 &\quad + \varepsilon_{\mu\nu\alpha\beta} p^\alpha q^\beta \left[F_1(p, q) - F_2(p, q) + (p^2 + q \cdot p) F_3(p, q) + (p \cdot q + q^2) F_4(p, q) \right] \\
 &= T_{\mu\nu}^{AV}(k_1, k_2; m) - T_{\nu\mu}^{AV}(k_3, k_1; m) - 2m T_{\mu\nu}^{PVV}.
 \end{aligned} \tag{5.35}$$

Tendo em vista que a estrutura geral da amplitude AV é da forma;

$$T_{\mu\nu}^{AV} = 2\varepsilon_{\mu\nu\theta\beta} q^\beta Q_\alpha \Delta^{\theta\alpha}(\lambda^2), \tag{5.36}$$

identificamos claramente os termos de superfície da expressão com as amplitudes AV da relação entre funções de Green. Além disso a função PVV é finita e não pode possuir termos de superfí-

cie. Deste modo podemos identificar nas expressões para as contrações acima, respectivamente:

$$\begin{aligned} -\varepsilon_{\lambda\mu\alpha\beta} \left[p^\beta Q^\alpha G_1 + p^\beta P^\alpha G_2 + p^\beta R^\alpha G_3 \right] &= T_{\lambda\mu}^{AV}(k_3, k_2; m) - T_{\lambda\mu}^{AV}(k_3, k_1; m) \\ +\varepsilon_{\lambda\mu\alpha\beta} p^\alpha q^\beta \left[F_1(p, q) + p^2 F_5(p, q) + (p \cdot q) F_6(p, q) \right] &= 0, \end{aligned} \quad (5.37)$$

$$\begin{aligned} \varepsilon_{\lambda\nu\alpha\beta} \left[q^\beta Q^\alpha G_1 + q^\beta P^\alpha G_2 + q^\beta R^\alpha G_3 \right] &= T_{\lambda\nu}^{AV}(k_1, k_2; m) - T_{\lambda\nu}^{AV}(k_3, k_2; m) \\ +\varepsilon_{\lambda\nu\alpha\beta} q^\beta p^\alpha \left[F_2(p, q) + (q \cdot p) F_7(p, q) + q^2 F_8(p, q) \right] &= 0 \end{aligned} \quad (5.38)$$

e

$$\begin{aligned} -\varepsilon_{\mu\nu\alpha\beta} \left[(p+q)^\beta Q^\alpha G_1 + (p+q)^\beta P^\alpha G_2 + (p+q)^\beta R^\alpha G_3 \right] &= T_{\mu\nu}^{AV}(k_1, k_2; m) - T_{\mu\nu}^{AV}(k_3, k_1; m) \\ \varepsilon_{\mu\nu\alpha\beta} p^\alpha q^\beta \left[F_1(p, q) - F_2(p, q) + (p^2 + q \cdot p) F_3(p, q) + (p \cdot q + q^2) F_4(p, q) \right] &= -2mT_{\mu\nu}^{PVV}. \end{aligned} \quad (5.39)$$

Com isso podemos inferir da primeira contração que:

$$-F_1 = p^2 F_5 + (p \cdot q) F_6. \quad (5.40)$$

Por sua vez da segunda contração devemos ter:

$$-F_2 = (q \cdot p) F_7 + q^2 F_8. \quad (5.41)$$

A utilização destas condições na terceira contração, levará a:

$$\varepsilon_{\mu\nu\alpha\beta} p^\alpha q^\beta \left[-p^2 F_5 - (p \cdot q) F_6 + (q \cdot p) F_7 + q^2 F_8 + (p^2 + q \cdot p) F_3 + (p \cdot q + q^2) F_4 \right] = -2mT_{\mu\nu}^{PVV}. \quad (5.42)$$

Isto nos permite estabelecer três predições sobre as componentes do tensor em limites cinemáticos específicos:

$$F_1|_{p^2=p, q=0} = 0, \quad (5.43)$$

$$F_2|_{q^2=p, q=0} = 0 \quad (5.44)$$

e, assumindo a forma geral,

$$T_{\mu\nu}^{PVV} = \varepsilon_{\mu\nu\alpha\beta} p^\alpha q^\beta \Gamma^{PVV}(p, q), \quad (5.45)$$

onde $\Gamma^{PVV}(p, q)$ é uma função escalar dos momentos externos,

$$\Gamma^{PVV}(p, q) \Big|_{p^2=q^2=p, q=0} = 0. \quad (5.46)$$

Uma clara implicação sobre o comportamento da amplitude PVV é estabelecido para uma situação cinemática específica. Notemos que não impomos a validade das identidades de Ward para obter esta implicação nem ignoramos o fato de a amplitude (linearmente divergente) possuir possivelmente contribuições ambíguas. A possível presença de termos ambíguos não permite estabelecermos que $r_\lambda T_{\lambda\mu\nu}^{AVV} \Big|_{p^2=q^2=p, q=0} = 0$, pois este limite é determinado precisamente pelos termos ambíguos.

Não há necessidade de repetir para as permutações VAV e VVA , pois é simples perceber que as implicações serão:

$$\Gamma^{VAV}(p, q) \Big|_{p^2=q^2=p, q=0} = 0 \quad (5.47)$$

e

$$\Gamma^{VVP}(p, q) \Big|_{p^2=q^2=p, q=0} = 0. \quad (5.48)$$

5.5 Limites de baixa energia para a amplitude AAA

Neste caso temos inicialmente as identificações, para as três contrações:

$$\begin{aligned} & -\varepsilon_{\lambda\mu\alpha\beta} \left[p^\beta Q^\alpha G_1 + p^\beta P^\alpha G_2 + p^\beta R^\alpha G_3 \right] + \varepsilon_{\lambda\mu\alpha\beta} p^\alpha q^\beta \left[F_1(p, q) + p^2 F_5(p, q) + (p \cdot q) F_6(p, q) \right] \\ = & T_{\lambda\mu}^{AV}(k_3, k_2; m) - T_{\lambda\mu}^{VA}(k_3, k_1; m) + 2m T_{\lambda\mu}^{AAP}, \end{aligned} \quad (5.49)$$

$$\begin{aligned} & \varepsilon_{\lambda\nu\alpha\beta} \left[q^\beta Q^\alpha G_1 + q^\beta P^\alpha G_2 + q^\beta R^\alpha G_3 \right] + \varepsilon_{\lambda\nu\alpha\beta} q^\beta p^\alpha \left[F_2(p, q) + (q \cdot p) F_7(p, q) + q^2 F_8(p, q) \right] \\ = & T_{\lambda\nu}^{VA}(k_1, k_2, m) - T_{\lambda\nu}^{AV}(k_3, k_2, m) + 2m T_{\lambda\nu}^{APA} \end{aligned} \quad (5.50)$$

e

$$\begin{aligned}
& -\varepsilon_{\mu\nu\alpha\beta} \left[(p+q)^\beta Q^\alpha G_1 + (p+q)^\beta P^\alpha G_2 + (p+q)^\beta R^\alpha G_3 \right] + \\
& + \varepsilon_{\mu\nu\alpha\beta} p^\alpha q^\beta \left[F_1(p,q) - F_2(p,q) + (p^2 + q \cdot p) F_3(p,q) + (p \cdot q + q^2) F_4(p,q) \right] \\
= & T_{\mu\nu}^{VA}(k_1, k_2, m) - T_{\nu\mu}^{VA}(k_3, k_1, m) - 2mT_{\mu\nu}^{PAA}. \tag{5.51}
\end{aligned}$$

Os mesmos argumentos utilizados anteriormente, caráter finito de *PAA*, *APA* e *AAP*, assim como caráter ambíguo de *AV*, nos permitem identificar as relações:

$$\begin{aligned}
-\varepsilon_{\lambda\mu\alpha\beta} \left[p^\beta Q^\alpha G_1 + p^\beta P^\alpha G_2 + p^\beta R^\alpha G_3 \right] &= T_{\lambda\mu}^{AV}(k_3, k_2; m) - T_{\lambda\mu}^{VA}(k_3, k_1; m) \\
\varepsilon_{\lambda\mu\alpha\beta} p^\alpha q^\beta \left[F_1(p,q) + p^2 F_5(p,q) + (p \cdot q) F_6(p,q) \right] &= 2mT_{\lambda\mu}^{AAP}, \tag{5.52}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\varepsilon_{\lambda\nu\alpha\beta} \left[q^\beta Q^\alpha G_1 + q^\beta P^\alpha G_2 + q^\beta R^\alpha G_3 \right] &= T_{\lambda\nu}^{VA}(k_1, k_2; m) - T_{\lambda\nu}^{AV}(k_3, k_2; m) \\
\varepsilon_{\lambda\nu\alpha\beta} q^\beta p^\alpha \left[F_2(p,q) + (q \cdot p) F_7(p,q) + q^2 F_8(p,q) \right] &= 2mT_{\lambda\nu}^{APA} \tag{5.53}
\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
-\varepsilon_{\mu\nu\alpha\beta} \left[(p+q)^\beta Q^\alpha G_1 + (p+q)^\beta P^\alpha G_2 + (p+q)^\beta R^\alpha G_3 \right] &= T_{\mu\nu}^{VA}(k_1, k_2, m) - T_{\nu\mu}^{VA}(k_3, k_1; m) \\
\varepsilon_{\mu\nu\alpha\beta} p^\alpha q^\beta \left[F_1(p,q) - F_2(p,q) + (p^2 + q \cdot p) F_3(p,q) + (p \cdot q + q^2) F_4(p,q) \right] &= -2mT_{\mu\nu}^{PAA}. \tag{5.54}
\end{aligned}$$

Assumindo as formas gerais:

$$T_{\lambda\mu}^{AAP} = \varepsilon_{\lambda\mu\alpha\beta} p^\alpha q^\beta \Gamma^{AAP}(p, q), \tag{5.55}$$

$$T_{\lambda\nu}^{APA} = \varepsilon_{\lambda\nu\alpha\beta} q^\beta p^\alpha \Gamma^{APA}(p, q) \tag{5.56}$$

e

$$T_{\mu\nu}^{PAA} = \varepsilon_{\mu\nu\alpha\beta} p^\alpha q^\beta \Gamma^{PAA}(p, q). \tag{5.57}$$

Inferimos que:

$$F_1 = -p^2 F_5 - (p \cdot q) F_6 + 2m \Gamma^{AAP}, \quad (5.58)$$

$$F_2 = -(q \cdot p) F_7 - q^2 F_8 + 2m \Gamma^{APA} \quad (5.59)$$

e

$$\begin{aligned} & [-p^2 F_5 - (p \cdot q) F_6 + 2m \Gamma^{AAP} + (q \cdot p) F_7 + q^2 F_8 - 2m \Gamma^{APA} + (p^2 + q \cdot p) F_3(p, q) + (p \cdot q + q^2) F_4] \\ & = -2m \Gamma^{PAA}. \end{aligned} \quad (5.60)$$

Portanto, teremos as implicações:

$$F_1 \Big|_{p^2=(p \cdot q)=0} = 2m \Gamma^{AAP} \Big|_{p^2=p \cdot q=0}, \quad (5.61)$$

$$F_2 \Big|_{q^2=(p \cdot q)=0} = 2m \Gamma^{APA} \Big|_{q^2=p \cdot q=0} \quad (5.62)$$

e

$$\Gamma^{APA} \Big|_{p^2=q^2=p \cdot q=0} - \Gamma^{AAP} \Big|_{p^2=q^2=p \cdot q=0} = \Gamma^{PAA} \Big|_{p^2=q^2=p \cdot q=0} \quad (5.63)$$

Com isso completamos o estabelecimento das expectativas que temos para as amplitudes. Nossa próxima tarefa é calcular as amplitudes, ou seja, obter uma forma matemática onde as operações implicadas pelas regras de Feynman tenham sido efetuadas. Depois disso, teremos que verificar se estas formas obtidas satisfazem o conjunto de expectativas estabelecidas.

6 CÁLCULO DAS AMPLITUDES PSEUDO TENSORIAS DE TERCEIRA ORDEM

Neste capítulo nos dedicamos ao cálculo propriamente dito das amplitudes triangulares anômalas e das contrações das expressões obtidas com os momentos externos. Deixaremos a análise dos resultados para o capítulo seguinte.

6.1 Cálculo das amplitudes AVV , VAV , VVA e AAA .

Consideremos, primeiramente, a amplitude AVV . Partimos da definição:

$$t_{\lambda\mu\nu}^{AVV} = Tr \left[\gamma_{\lambda} \gamma_5 \frac{1}{[(\not{k} + \not{k}_3) - m]} \gamma_{\mu} \frac{1}{[(\not{k} + \not{k}_1) - m]} \gamma_{\nu} \frac{1}{[(\not{k} + \not{k}_2) - m]} \right]. \quad (6.1)$$

Efetuando os traços de Dirac, teremos:

$$\begin{aligned} t_{\lambda\mu\nu}^{AVV} = & \frac{(-4)}{D_{123}} \left\{ [g_{\lambda\beta} \varepsilon_{\mu\theta\nu\eta} - g_{\lambda\mu} \varepsilon_{\beta\theta\nu\eta} + g_{\lambda\theta} \varepsilon_{\beta\mu\nu\eta} - g_{\lambda\nu} \varepsilon_{\beta\mu\theta\eta} + g_{\lambda\eta} \varepsilon_{\beta\mu\theta\nu} \right. \\ & + g_{\beta\mu} \varepsilon_{\lambda\theta\nu\eta} - g_{\beta\theta} \varepsilon_{\lambda\mu\nu\eta} + g_{\beta\nu} \varepsilon_{\lambda\mu\theta\eta} - g_{\beta\eta} \varepsilon_{\lambda\mu\theta\nu} + g_{\mu\theta} \varepsilon_{\lambda\beta\nu\eta} - g_{\mu\nu} \varepsilon_{\lambda\beta\theta\eta} \\ & + g_{\mu\eta} \varepsilon_{\lambda\beta\theta\nu} + g_{\theta\nu} \varepsilon_{\lambda\beta\mu\eta} - g_{\theta\eta} \varepsilon_{\lambda\beta\mu\nu} + g_{\nu\eta} \varepsilon_{\lambda\beta\mu\theta}] (k+k_3)^{\beta} (k+k_1)^{\theta} (k+k_2)^{\eta} + \\ & \left. - 4\varepsilon_{\lambda\mu\nu\eta} (k+k_2)^{\eta} m^2 - 4\varepsilon_{\lambda\beta\mu\nu} (k+k_3)^{\beta} m^2 - 4\varepsilon_{\lambda\mu\theta\nu} (k+k_1)^{\theta} m^2 \right\}. \quad (6.2) \end{aligned}$$

E após uma reorganização, podemos obter a seguinte estrutura matemática:

$$\begin{aligned} t_{\lambda\mu\nu}^{AVV} = & \frac{(-4)}{D_{123}} \left\{ [g_{\lambda\beta} \varepsilon_{\mu\theta\nu\eta} + g_{\lambda\theta} \varepsilon_{\beta\mu\nu\eta} + g_{\lambda\eta} \varepsilon_{\beta\mu\theta\nu} + g_{\beta\mu} \varepsilon_{\lambda\theta\nu\eta} + g_{\beta\nu} \varepsilon_{\lambda\mu\theta\eta} \right. \\ & + g_{\mu\theta} \varepsilon_{\lambda\beta\nu\eta} + g_{\mu\eta} \varepsilon_{\lambda\beta\theta\nu} + g_{\theta\nu} \varepsilon_{\lambda\beta\mu\eta} + g_{\nu\eta} \varepsilon_{\lambda\beta\mu\theta}] (k+k_3)^{\beta} (k+k_1)^{\theta} (k+k_2)^{\eta} + \\ & - [g_{\lambda\mu} \varepsilon_{\beta\theta\nu\eta}] (k+k_3)^{\beta} (k+k_1)^{\theta} (k+k_2)^{\eta} + \\ & - [g_{\lambda\nu} \varepsilon_{\beta\mu\theta\eta}] (k+k_3)^{\beta} (k+k_1)^{\theta} (k+k_2)^{\eta} + \\ & - [g_{\mu\nu} \varepsilon_{\lambda\beta\theta\eta}] (k+k_3)^{\beta} (k+k_1)^{\theta} (k+k_2)^{\eta} + \\ & + [-g_{\theta\eta} \varepsilon_{\lambda\mu\nu\beta} + g_{\beta\eta} \varepsilon_{\lambda\mu\nu\theta} - g_{\beta\theta} \varepsilon_{\lambda\mu\nu\eta}] (k+k_3)^{\beta} (k+k_1)^{\theta} (k+k_2)^{\eta} \\ & \left. + \varepsilon_{\lambda\mu\nu\eta} (k+k_2)^{\eta} m^2 + \varepsilon_{\lambda\beta\mu\nu} (k+k_3)^{\beta} m^2 + \varepsilon_{\lambda\mu\theta\nu} (k+k_1)^{\theta} m^2 \right\}. \quad (6.3) \end{aligned}$$

Levando em conta que

$$t_{\nu}^{PSV} = \frac{4}{D_{123}} \left[\varepsilon_{\beta\theta\nu\eta} (k+k_3)^{\beta} (k+k_1)^{\theta} (k+k_2)^{\eta} \right], \quad (6.4)$$

$$t_{\mu}^{PVS} = \frac{4}{D_{123}} \left[\varepsilon_{\beta\mu\theta\eta} (k+k_3)^{\beta} (k+k_1)^{\theta} (k+k_2)^{\eta} \right], \quad (6.5)$$

$$t_{\lambda}^{VPS} = \frac{4}{D_{123}} \left[\varepsilon_{\lambda\beta\theta\eta} (k+k_3)^{\beta} (k+k_1)^{\theta} (k+k_2)^{\eta} \right] \quad (6.6)$$

e

$$t_{\alpha}^{VPP} = \frac{4}{D_{123}} \left[-g_{\alpha\beta} g_{\theta\eta} + g_{\alpha\theta} g_{\beta\eta} - g_{\alpha\eta} g_{\beta\theta} \right] (k+k_3)^{\beta} (k+k_1)^{\theta} (k+k_2)^{\eta} \\ + g_{\alpha\eta} m^2 (k+k_2)^{\eta} - g_{\alpha\theta} m^2 (k+k_1)^{\theta} + g_{\alpha\beta} m^2 (k+k_3)^{\beta}. \quad (6.7)$$

Podemos escrever a expressão na forma:

$$t_{\lambda\mu\nu}^{AVV} = -\frac{4}{D_{123}} \left\{ -\varepsilon_{\mu\nu\theta\eta} (k+k_3)_{\lambda} (k+k_1)^{\theta} (k+k_2)^{\eta} \right. \\ + \varepsilon_{\mu\nu\beta\eta} (k+k_3)^{\beta} (k+k_1)_{\lambda} (k+k_2)^{\eta} \\ - \varepsilon_{\mu\nu\beta\theta} (k+k_3)^{\beta} (k+k_1)^{\theta} (k+k_2)_{\lambda} \\ - \varepsilon_{\lambda\nu\theta\eta} (k+k_3)_{\mu} (k+k_1)^{\theta} (k+k_2)^{\eta} \\ - \varepsilon_{\lambda\nu\beta\eta} (k+k_3)^{\beta} (k+k_1)_{\mu} (k+k_2)^{\eta} \\ + \varepsilon_{\lambda\nu\beta\theta} (k+k_3)^{\beta} (k+k_1)^{\theta} (k+k_2)_{\mu} \\ + \varepsilon_{\lambda\mu\theta\eta} (k+k_3)_{\nu} (k+k_1)^{\theta} (k+k_2)^{\eta} \\ - \varepsilon_{\lambda\mu\beta\eta} (k+k_3)^{\beta} (k+k_1)_{\nu} (k+k_2)^{\eta} \\ \left. - \varepsilon_{\lambda\mu\beta\theta} (k+k_3)^{\beta} (k+k_1)^{\theta} (k+k_2)_{\nu} \right\} + \\ + g_{\lambda\mu} T_{\nu}^{PSV} + g_{\lambda\nu} T_{\mu}^{PVS} + g_{\mu\nu} T_{\lambda}^{VPS} - \varepsilon_{\lambda\mu\nu\alpha} T_{\alpha}^{VPP}. \quad (6.8)$$

Definindo:

$$\begin{aligned}
f_{\lambda\mu\nu} = & (4) \left\{ \varepsilon_{\mu\nu\alpha\beta} (k+k_3)_\lambda (k+k_1)^\alpha (k+k_2)^\beta \right. \\
& - \varepsilon_{\mu\nu\alpha\beta} (k+k_3)^\alpha (k+k_1)_\lambda (k+k_2)^\beta \\
& + \varepsilon_{\mu\nu\alpha\beta} (k+k_3)^\alpha (k+k_1)^\beta (k+k_2)_\lambda \\
& + \varepsilon_{\lambda\nu\alpha\beta} (k+k_3)_\mu (k+k_1)^\alpha (k+k_2)^\beta \\
& + \varepsilon_{\lambda\nu\alpha\beta} (k+k_3)^\alpha (k+k_1)_\mu (k+k_2)^\beta \\
& - \varepsilon_{\lambda\nu\alpha\beta} (k+k_3)^\alpha (k+k_1)^\beta (k+k_2)_\mu \\
& + \varepsilon_{\lambda\mu\alpha\beta} (k+k_3)^\alpha (k+k_1)_\nu (k+k_2)^\beta \\
& - \varepsilon_{\lambda\mu\alpha\beta} (k+k_3)_\nu (k+k_1)^\alpha (k+k_2)^\beta \\
& \left. + \varepsilon_{\lambda\mu\alpha\beta} (k+k_3)^\alpha (k+k_1)^\beta (k+k_2)_\nu \right\} \frac{1}{D_{123}}, \tag{6.9}
\end{aligned}$$

obteremos:

$$t_{\lambda\mu\nu}^{AVV} = f_{\lambda\mu\nu} + g_{\lambda\mu} \{t_{\nu}^{PSV}\} + g_{\lambda\nu} \{t_{\mu}^{PVS}\} + g_{\mu\nu} \{t_{\lambda}^{VPS}\} - \varepsilon_{\lambda\mu\nu\alpha} \{t_{\alpha}^{VPP}\}. \tag{6.10}$$

Dessa forma podemos identificar, a partir dos traços, subestruturas que correspondem a outras amplitudes.

De forma similar, podemos estabelecer as seguintes expressões:

$$t_{\lambda\mu\nu}^{VAV} = f_{\lambda\mu\nu} + g_{\lambda\mu} \{t_{\nu}^{PSV}\} + g_{\lambda\nu} \{t_{\mu}^{PVS}\} + g_{\mu\nu} \{t_{\lambda}^{VPS}\} + \varepsilon_{\lambda\mu\nu\alpha} \{t_{\alpha}^{ASP}\}, \tag{6.11}$$

$$t_{\lambda\mu\nu}^{VVA} = f_{\lambda\mu\nu} + g_{\lambda\mu} \{t_{\nu}^{PSV}\} + g_{\lambda\nu} \{t_{\mu}^{PVS}\} + g_{\mu\nu} \{t_{\lambda}^{VPS}\} - \varepsilon_{\lambda\mu\nu\alpha} \{t_{\alpha}^{APS}\} \tag{6.12}$$

e

$$t_{\lambda\mu\nu}^{AAA} = f_{\lambda\mu\nu} + g_{\lambda\mu} \{t_{\nu}^{PSV}\} + g_{\lambda\nu} \{t_{\mu}^{PVS}\} + g_{\mu\nu} \{t_{\lambda}^{VPS}\} + \varepsilon_{\lambda\mu\nu\alpha} \{t_{\alpha}^{VSS}\}. \tag{6.13}$$

Note ainda que, no capítulo 3 verificamos que $T_{\nu}^{PSV} = T_{\mu}^{PVS} = T_{\lambda}^{VPS} = 0$ e, portanto, a integração, a última regra de Feynman a ser implementada, eliminará todos os termos proporcionais ao tensor métrico, relacionando diretamente as amplitudes anômalas com as amplitudes de um índice de Lorentz consideradas no capítulo 4, pois, após a integração obteremos:

$$T_{\lambda\mu\nu}^{AVV} = F_{\lambda\mu\nu} - \varepsilon_{\lambda\mu\nu\alpha} \{T_{\alpha}^{VPP}\}, \tag{6.14}$$

$$T_{\lambda\mu\nu}^{VAV} = F_{\lambda\mu\nu} + \varepsilon_{\lambda\mu\nu\alpha} \left\{ T_{\alpha}^{ASP} \right\}, \quad (6.15)$$

$$T_{\lambda\mu\nu}^{VVA} = F_{\lambda\mu\nu} - \varepsilon_{\lambda\mu\nu\alpha} \left\{ T_{\alpha}^{APS} \right\} \quad (6.16)$$

e

$$T_{\lambda\mu\nu}^{AAA} = F_{\lambda\mu\nu} + \varepsilon_{\lambda\mu\nu\alpha} \left\{ T_{\alpha}^{VSS} \right\}. \quad (6.17)$$

Fica claro agora a atitude adotada de estudar separadamente as amplitudes T_{α}^{VPP} , T_{α}^{ASP} , T_{α}^{APS} e T_{α}^{VSS} no capítulo 4. Ao verificarmos que as formas gerais dos tensores de três índices possuem como subestruturas aquelas de um índice, devemos assumir que as escolhas feitas para satisfação das relações de simetria das amplitudes de um índice devem ser transportadas para as amplitudes de três índices. É uma questão de consistência que a mesma estrutura matemática seja tratada de forma idêntica.

Assim, o único ingrediente faltando para concluirmos os cálculos das amplitudes anômalas é a integração do tensor $f_{\lambda\mu\nu}$.

Utilizando a estratégia que adotamos no presente trabalho, podemos escrever a expressão correspondente na forma:

$$\begin{aligned} \frac{F_{\lambda\mu\nu}}{4} = & -\frac{1}{2}\varepsilon_{\lambda\nu\alpha\beta}p^{\beta}\Delta_{\mu}^{\alpha}(\lambda^2) - \frac{1}{2}q^{\beta}\varepsilon_{\lambda\mu\alpha\beta}\Delta_{\nu}^{\alpha}(\lambda^2) + \\ & -\frac{1}{2}\varepsilon_{\lambda\mu\nu\beta}(q^{\beta}-p^{\beta})I_{\log}(\lambda^2) + \\ & -2\varepsilon_{\lambda\mu\alpha\beta}q^{\beta}[p^{\alpha}p_{\nu}\xi_{02}^{-1} - p^{\alpha}q_{\nu}\xi_{11}^{-1}] + 2\varepsilon_{\lambda\mu\alpha\beta}q^{\beta}p^{\alpha}p_{\nu}\xi_{01}^{-1} + 2\varepsilon_{\lambda\nu\alpha\beta}p^{\beta}q^{\alpha}q_{\mu}\xi_{10}^{-1} \} \\ & + \left(\frac{i}{(4\pi)^2} \right) \left\{ \varepsilon_{\lambda\mu\nu\alpha}(q^{\alpha}-p^{\alpha})\xi_{00}^0 - 2\varepsilon_{\lambda\nu\beta\alpha}p^{\alpha} \left[q^{\beta}q_{\mu}\xi_{20}^{-1} - q^{\beta}p_{\mu}\xi_{11}^{-1} \right] \right\}. \quad (6.18) \end{aligned}$$

Detalhes das operações envolvidas podem ser encontrados no apêndice D.

É importante enfatizar o papel do tensor $F_{\lambda\mu\nu}$ para as amplitudes $T_{\lambda\mu\nu}^{AVV}$, $T_{\lambda\mu\nu}^{VAV}$, $T_{\lambda\mu\nu}^{VVA}$ e $T_{\lambda\mu\nu}^{AAA}$. Note que, esse termo é livre de quantidades potencialmente ambíguas. Dessa forma, as amplitudes anômalas passam a estar diretamente relacionadas às amplitudes triangulares vetoriais que consideramos no capítulo 4. As ambiguidades necessariamente estarão presentes nas amplitudes T_{α}^{VPP} , T_{α}^{ASP} , T_{α}^{APS} e T_{α}^{VSS} . Assim, se as amplitudes anômalas forem consideradas ambíguas por alguma interpretação, as amplitudes mais simples também deverão ser.

Agora que estabelecemos as identidades entre as amplitudes $T_{\lambda\mu\nu}^{AVV}$, $T_{\lambda\mu\nu}^{VAV}$, $T_{\lambda\mu\nu}^{VVA}$ e $T_{\lambda\mu\nu}^{AAA}$ e suas subestruturas, o cálculo explícito das amplitudes anômalas ficou enormemente facilitado, pois basta somar o tensor comum com a respectiva subamplitude. Dessa forma, o cálculo da

amplitude anômala AVV , nos fornece:

$$\begin{aligned}
T_{\lambda\mu\nu}^{AVV} = & -2\varepsilon_{\lambda\nu\alpha\beta}p^\beta\Delta_\mu^\alpha(\lambda^2) - 2q^\beta\varepsilon_{\lambda\mu\alpha\beta}\Delta_\nu^\alpha(\lambda^2) + \\
& -2\varepsilon_{\lambda\mu\nu\beta}(q^\beta - p^\beta)I_{\log}(\lambda^2) + \\
& + \frac{4i}{(4\pi)^2} \left\{ \varepsilon_{\lambda\mu\nu\alpha}(q^\alpha - p^\alpha)\xi_{00}^0 - 2\varepsilon_{\lambda\nu\beta\alpha}p^\alpha \left[q^\beta q_\mu \xi_{20}^{-1} - q^\beta p_\mu \xi_{11}^{-1} \right] \right. \\
& - 2\varepsilon_{\lambda\mu\alpha\beta}q^\beta \left[p^\alpha p_\nu \xi_{02}^{-1} - p^\alpha q_\nu \xi_{11}^{-1} \right] + 2\varepsilon_{\lambda\mu\alpha\beta}q^\beta p^\alpha p_\nu \xi_{01}^{-1} + 2\varepsilon_{\lambda\nu\alpha\beta}p^\beta q^\alpha q_\mu \xi_{10}^{-1} \left. \right\} \\
& + 2\varepsilon_{\lambda\mu\nu\alpha}(k_3 + k_2)^\zeta \Delta_\zeta^\alpha(\lambda^2) + \\
& - 2\varepsilon_{\lambda\mu\nu\alpha}q^\alpha \left\{ I_{\log}(\lambda^2) - \frac{i}{(4\pi)^2} (\xi_0^0(q; \lambda^2) + 2(p \cdot q) \xi_{10}^{-1} + p^2 \xi_{00}^{-1}) \right\} \\
& + 2\varepsilon_{\lambda\mu\nu\alpha}p^\alpha \left\{ I_{\log}(\lambda^2) - \frac{i}{(4\pi)^2} (\xi_0^0(p; \lambda^2) + 2(p \cdot q) \xi_{01}^{-1} + q^2 \xi_{00}^{-1}) \right\}, \quad (6.19)
\end{aligned}$$

ou ainda na forma:

$$\begin{aligned}
T_{\lambda\mu\nu}^{AVV} = & -2\varepsilon_{\lambda\nu\alpha\beta}p^\beta\Delta_\mu^\alpha(\lambda^2) - 2q^\beta\varepsilon_{\lambda\mu\alpha\beta}\Delta_\nu^\alpha(\lambda^2) + \\
& + 2\varepsilon_{\lambda\mu\nu\alpha}(k_3 + k_2)^\zeta \Delta_\zeta^\alpha(\lambda^2) + \\
& - 2\varepsilon_{\lambda\mu\nu\beta}(q^\beta - p^\beta)I_{\log}(\lambda^2) - 2\varepsilon_{\lambda\mu\nu\alpha}q^\alpha I_{\log}(\lambda^2) + 2\varepsilon_{\lambda\mu\nu\alpha}p^\alpha I_{\log}(\lambda^2) + \\
& + \left(\frac{4i}{(4\pi)^2} \right) [\varepsilon_{\lambda\mu\nu\alpha}(q^\alpha - p^\alpha)\xi_{00}^0] + \\
& + 4 \left(\frac{i}{(4\pi)^2} \right) \left[-2\varepsilon_{\lambda\nu\beta\alpha}p^\alpha q^\beta q_\mu \xi_{20}^{-1} + 2\varepsilon_{\lambda\nu\beta\alpha}p^\alpha q^\beta p_\mu \xi_{11}^{-1} + 2\varepsilon_{\lambda\nu\beta\alpha}p^\alpha q^\beta q_\mu \xi_{10}^{-1} \right] + \\
& + 4 \left(\frac{i}{(4\pi)^2} \right) \left[-2\varepsilon_{\lambda\mu\alpha\beta}q^\beta p^\alpha p_\nu \xi_{02}^{-1} + 2\varepsilon_{\lambda\mu\alpha\beta}q^\beta p^\alpha q_\nu \xi_{11}^{-1} + 2\varepsilon_{\lambda\mu\alpha\beta}q^\beta p^\alpha p_\nu \xi_{01}^{-1} \right] + \\
& + 2\varepsilon_{\lambda\mu\nu\alpha} \frac{i}{(4\pi)^2} (q^\alpha \xi_0^0(q; \lambda^2) + 2q^\alpha (p \cdot q) \xi_{10}^{-1} + q^\alpha p^2 \xi_{00}^{-1}) \\
& - 2\varepsilon_{\lambda\mu\nu\alpha} \frac{i}{(4\pi)^2} (p^\alpha \xi_0^0(p; \lambda^2) + 2p^\alpha (p \cdot q) \xi_{01}^{-1} + p^\alpha q^2 \xi_{00}^{-1}). \quad (6.20)
\end{aligned}$$

De modo semelhante teremos:

$$\begin{aligned}
T_{\lambda\mu\nu}^{VAV} = & -2\varepsilon_{\lambda\nu\alpha\beta} p^\beta \Delta_\mu^\alpha(\lambda^2) - 2q^\beta \varepsilon_{\lambda\mu\alpha\beta} \Delta_\nu^\alpha(\lambda^2) - 2\varepsilon_{\lambda\mu\nu\alpha} (k_3 + k_2)^\zeta \Delta_\zeta^\alpha(\lambda^2) + \\
& -2\varepsilon_{\lambda\mu\nu\beta} (q^\beta - p^\beta) I_{\log}(\lambda^2) + 2\varepsilon_{\lambda\mu\nu\alpha} q^\alpha I_{\log}(\lambda^2) - 2\varepsilon_{\lambda\mu\nu\alpha} p^\alpha I_{\log}(\lambda^2) + \\
& + \frac{4i}{(4\pi)^2} [\varepsilon_{\lambda\mu\nu\alpha} (q^\alpha - p^\alpha) \xi_{00}^0] + \\
& + \frac{4i}{(4\pi)^2} [-2\varepsilon_{\lambda\nu\beta\alpha} p^\alpha q^\beta q_\mu \xi_{20}^{-1} + 2\varepsilon_{\lambda\nu\beta\alpha} p^\alpha q^\beta p_\mu \xi_{11}^{-1} + 2\varepsilon_{\lambda\nu\beta\alpha} p^\alpha q^\beta q_\mu \xi_{10}^{-1}] + \\
& + \frac{4i}{(4\pi)^2} [-2\varepsilon_{\lambda\mu\alpha\beta} q^\beta p^\alpha p_\nu \xi_{02}^{-1} + 2\varepsilon_{\lambda\mu\alpha\beta} q^\beta p^\alpha q_\nu \xi_{11}^{-1} + 2\varepsilon_{\lambda\mu\alpha\beta} q^\beta p^\alpha p_\nu \xi_{01}^{-1}] + \\
& -2\varepsilon_{\lambda\mu\nu\alpha} q^\alpha \frac{i}{(4\pi)^2} (\xi_0^0(q; \lambda^2) + 2(p \cdot q) \xi_{10}^{-1} + p^2 \xi_{00}^{-1}) + \\
& + 2\varepsilon_{\lambda\mu\nu\alpha} p^\alpha \frac{i}{(4\pi)^2} (\xi_0^0(p; \lambda^2) + 2(p \cdot q) \xi_{01}^{-1} + (q^2 - 4m^2) \xi_{00}^{-1}) \quad (6.21)
\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
T_{\lambda\mu\nu}^{VVA} = & -2\varepsilon_{\lambda\nu\alpha\beta} p^\beta \Delta_\mu^\alpha(\lambda^2) - 2q^\beta \varepsilon_{\lambda\mu\alpha\beta} \Delta_\nu^\alpha(\lambda^2) + 2\varepsilon_{\lambda\mu\nu\alpha} (k_3 + k_2)^\zeta \Delta_\zeta^\alpha(\lambda^2) + \\
& -2\varepsilon_{\lambda\mu\nu\beta} (q^\beta - p^\beta) I_{\log}(\lambda^2) - 2\varepsilon_{\lambda\mu\nu\alpha} q^\alpha I_{\log}(\lambda^2) + 2\varepsilon_{\lambda\mu\nu\alpha} p^\alpha I_{\log}(\lambda^2) + \\
& + \frac{4i}{(4\pi)^2} [\varepsilon_{\lambda\mu\nu\alpha} (q^\alpha - p^\alpha) \xi_{00}^0] + \\
& + \frac{4i}{(4\pi)^2} [-2\varepsilon_{\lambda\nu\beta\alpha} p^\alpha q^\beta q_\mu \xi_{20}^{-1} + 2\varepsilon_{\lambda\nu\beta\alpha} p^\alpha q^\beta p_\mu \xi_{11}^{-1} + 2\varepsilon_{\lambda\nu\beta\alpha} p^\alpha q^\beta q_\mu \xi_{10}^{-1}] + \\
& + \frac{4i}{(4\pi)^2} [-2\varepsilon_{\lambda\mu\alpha\beta} q^\beta p^\alpha p_\nu \xi_{02}^{-1} + 2\varepsilon_{\lambda\mu\alpha\beta} q^\beta p^\alpha q_\nu \xi_{11}^{-1} + 2\varepsilon_{\lambda\mu\alpha\beta} q^\beta p^\alpha p_\nu \xi_{01}^{-1}] + \\
& + 2\varepsilon_{\lambda\mu\nu\alpha} q^\alpha \frac{i}{(4\pi)^2} (\xi_0^0(q; \lambda^2) + 2(p \cdot q) \xi_{10}^{-1} + (p^2 - 4m^2) \xi_{00}^{-1}) + \\
& -2\varepsilon_{\lambda\mu\nu\alpha} p^\alpha \frac{i}{(4\pi)^2} (\xi_0^0(p; \lambda^2) + 2(p \cdot q) \xi_{01}^{-1} + q^2 \xi_{00}^{-1}). \quad (6.22)
\end{aligned}$$

Finalmente:

$$\begin{aligned}
T_{\lambda\mu\nu}^{AAA} = & -2\varepsilon_{\lambda\nu\alpha\beta} p^\beta \Delta_\mu^\alpha(\lambda^2) - 2q^\beta \varepsilon_{\lambda\mu\alpha\beta} \Delta_\nu^\alpha(\lambda^2) + \\
& -2\varepsilon_{\lambda\mu\nu\beta} (q^\beta - p^\beta) I_{\log}(\lambda^2) + \\
& -2\varepsilon_{\lambda\mu\alpha\beta} q^\beta [p^\alpha p_\nu \xi_{02}^{-1} - p^\alpha q_\nu \xi_{11}^{-1}] + 2\varepsilon_{\lambda\mu\alpha\beta} q^\beta p^\alpha p_\nu \xi_{01}^{-1} + 2\varepsilon_{\lambda\nu\alpha\beta} p^\beta q^\alpha q_\mu \xi_{10}^{-1} \} \\
& -2\varepsilon_{\lambda\mu\nu\alpha} (k_3 + k_2)^\zeta \Delta_\xi^\alpha(\lambda^2) + \\
& + 2\varepsilon_{\lambda\mu\nu\alpha} q^\alpha \left[I_{\log}(\lambda^2) - \frac{i}{(4\pi)^2} (\xi_0^0(q; \lambda^2) + (2(p \cdot q) + 8m^2) \xi_{10}^{-1} + (p^2 - 4m^2) \xi_{00}^{-1}) \right] + \\
& - 2\varepsilon_{\lambda\mu\nu\alpha} p^\alpha \left[I_{\log}(\lambda^2) - \frac{i}{(4\pi)^2} (\xi_0^0(p; \lambda^2) + (2(p \cdot q) + 8m^2) \xi_{01}^{-1} + (q^2 - 4m^2) \xi_{00}^{-1}) \right] + \\
& + 4 \left(\frac{i}{(4\pi)^2} \right) \{ \varepsilon_{\lambda\mu\nu\alpha} (q^\alpha - p^\alpha) \xi_{00}^0 - 2\varepsilon_{\lambda\nu\beta\alpha} p^\alpha [q^\beta q_\mu \xi_{20}^{-1} - q^\beta p_\mu \xi_{11}^{-1}] \}. \quad (6.23)
\end{aligned}$$

Ainda, após algumas manipulações, obteremos o seguinte resultado:

$$\begin{aligned}
T_{\lambda\mu\nu}^{AAA} = & -2\varepsilon_{\lambda\nu\alpha\beta} p^\beta \Delta_\mu^\alpha(\lambda^2) - 2q^\beta \varepsilon_{\lambda\mu\alpha\beta} \Delta_\nu^\alpha(\lambda^2) - 2\varepsilon_{\lambda\mu\nu\alpha} (k_3 + k_2)^\zeta \Delta_\xi^\alpha(\lambda^2) + \\
& -2\varepsilon_{\lambda\mu\nu\beta} (q^\beta - p^\beta) I_{\log}(\lambda^2) + 2\varepsilon_{\lambda\mu\nu\alpha} q^\alpha I_{\log}(\lambda^2) - 2\varepsilon_{\lambda\mu\nu\alpha} p^\alpha I_{\log}(\lambda^2) + \\
& + 4 \left(\frac{i}{(4\pi)^2} \right) [\varepsilon_{\lambda\mu\nu\alpha} (q^\alpha - p^\alpha) \xi_{00}^0] + \\
& + 4 \left(\frac{i}{(4\pi)^2} \right) [-2\varepsilon_{\lambda\nu\beta\alpha} p^\alpha q^\beta q_\mu \xi_{20}^{-1} + 2\varepsilon_{\lambda\nu\beta\alpha} p^\alpha q^\beta p_\mu \xi_{11}^{-1} + 2\varepsilon_{\lambda\nu\beta\alpha} p^\alpha q^\beta q_\mu \xi_{10}^{-1}] + \\
& + 4 \left(\frac{i}{(4\pi)^2} \right) [-2\varepsilon_{\lambda\mu\alpha\beta} q^\beta p^\alpha p_\nu \xi_{02}^{-1} + 2\varepsilon_{\lambda\mu\alpha\beta} q^\beta p^\alpha q_\nu \xi_{11}^{-1} + 2\varepsilon_{\lambda\mu\alpha\beta} q^\beta p^\alpha p_\nu \xi_{01}^{-1}] + \\
& - 2\varepsilon_{\lambda\mu\nu\alpha} q^\alpha \frac{i}{(4\pi)^2} (\xi_0^0(q; \lambda^2) + (2(p \cdot q) + 8m^2) \xi_{10}^{-1} + (p^2 - 4m^2) \xi_{00}^{-1}) + \\
& + 2\varepsilon_{\lambda\mu\nu\alpha} p^\alpha \frac{i}{(4\pi)^2} (\xi_0^0(p; \lambda^2) + (2(p \cdot q) + 8m^2) \xi_{01}^{-1} + (q^2 - 4m^2) \xi_{00}^{-1}). \quad (6.24)
\end{aligned}$$

Com isso, completamos o cálculo das amplitudes.

Agora devemos verificar se as propriedades esperadas para as formas explícitas obtidas foram preservadas.

6.2 Propriedades do tensor $F_{\lambda\mu\nu}$

Antes de verificarmos as relações de simetria da amplitudes triangulares anômalas, é conveniente estabelecermos algumas propriedades do tensor $F_{\lambda\mu\nu}$. Isto se mostrará útil para a verificação da relações entre funções de Green.

Consideraremos a contração deste tensor com os momentos externos r , q e p . Começando pelo momento externo q , temos que:

$$\begin{aligned}
q^\mu \frac{F_{\lambda\mu\nu}}{4} &= -\frac{1}{2} \varepsilon_{\lambda\nu\alpha\beta} q^\mu p^\beta \Delta_\mu^\alpha (\lambda^2) - \frac{1}{2} q^\mu q^\beta \varepsilon_{\lambda\mu\alpha\beta} \Delta_\nu^\alpha (\lambda^2) + \\
&\quad -\frac{1}{2} \varepsilon_{\lambda\mu\nu\beta} q^\mu (q^\beta - p^\beta) I_{\log} (\lambda^2) + \\
&\quad + \left(\frac{i}{(4\pi)^2} \right) \left\{ \varepsilon_{\lambda\mu\nu\alpha} q^\mu (q^\alpha - p^\alpha) \xi_{00}^0 - 2\varepsilon_{\lambda\nu\beta\alpha} q^\mu p^\alpha \left[q^\beta q_\mu \xi_{20}^{-1} - q^\beta p_\mu \xi_{11}^{-1} \right] \right. \\
&\quad - 2\varepsilon_{\lambda\mu\alpha\beta} q^\mu q^\beta \left[p^\alpha p_\nu \xi_{02}^{-1} - p^\alpha q_\nu \xi_{11}^{-1} \right] \\
&\quad \left. + 2\varepsilon_{\lambda\mu\alpha\beta} q^\mu q^\beta p^\alpha p_\nu \xi_{01}^{-1} + 2\varepsilon_{\lambda\nu\alpha\beta} q^\mu p^\beta q^\alpha q_\mu \xi_{10}^{-1} \right\}. \tag{6.25}
\end{aligned}$$

Reorganizando teremos:

$$\begin{aligned}
q^\mu \frac{F_{\lambda\mu\nu}}{4} &= -\frac{1}{2} \varepsilon_{\lambda\nu\alpha\beta} q^\mu p^\beta \Delta_\mu^\alpha (\lambda^2) + \frac{1}{2} \varepsilon_{\lambda\mu\nu\beta} q^\mu p^\beta I_{\log} (\lambda^2) + \\
&\quad - \left(\frac{i}{(4\pi)^2} \right) \varepsilon_{\lambda\nu\beta\alpha} p^\alpha q^\beta \left[2q^2 \xi_{20}^{-1} - 2(q \cdot p) \xi_{11}^{-1} - \xi_{00}^0 - 2q^2 \xi_{10}^{-1} \right]. \tag{6.26}
\end{aligned}$$

Ainda, utilizando a seguinte identidade:

$$2q^2 \xi_{20}^{-1} - 2(p \cdot q) \xi_{11}^{-1} = \xi_1^0(p, q; \lambda^2) - \xi_0^0(p, q; \lambda^2) + q^2 \xi_{10}^{-1} + \xi_{00}^0, \tag{6.27}$$

obteremos:

$$\begin{aligned}
q^\mu \frac{F_{\lambda\mu\nu}}{4} &= -\frac{1}{2} \varepsilon_{\lambda\nu\alpha\beta} q^\mu p^\beta \Delta_\mu^\alpha (\lambda^2) + \frac{1}{2} \varepsilon_{\lambda\mu\nu\beta} q^\mu p^\beta I_{\log} (\lambda^2) + \\
&\quad + \left(\frac{i}{(4\pi)^2} \right) \varepsilon_{\lambda\nu\beta\alpha} p^\alpha q^\beta \left[\frac{1}{2} \xi_1^0(p, q; \lambda^2) + q^2 \xi_{10}^{-1} \right]. \tag{6.28}
\end{aligned}$$

A contração com o momento p fornece:

$$\begin{aligned}
p^\nu \frac{F_{\lambda\mu\nu}}{4} &= -\frac{1}{2} \varepsilon_{\lambda\nu\alpha\beta} p^\nu p^\beta \Delta_\mu^\alpha(\lambda^2) - \frac{1}{2} p^\nu q^\beta \varepsilon_{\lambda\mu\alpha\beta} \Delta_\nu^\alpha(\lambda^2) + \\
&\quad -\frac{1}{2} \varepsilon_{\lambda\mu\nu\beta} p^\nu (q^\beta - p^\beta) I_{\log}(\lambda^2) + \\
&\quad + \left(\frac{i}{(4\pi)^2} \right) \left[\varepsilon_{\lambda\mu\nu\alpha} p^\nu (q^\alpha - p^\alpha) \xi_{00}^0 - 2\varepsilon_{\lambda\nu\beta\alpha} p^\nu p^\alpha \left[q^\beta q_\mu \xi_{20}^{-1} - q^\beta p_\mu \xi_{11}^{-1} \right] \right. \\
&\quad \quad \quad \left. - 2\varepsilon_{\lambda\mu\alpha\beta} p^\nu q^\beta \left[p^\alpha p_\nu \xi_{02}^{-1} - p^\alpha q_\nu \xi_{11}^{-1} \right] + 2\varepsilon_{\lambda\mu\alpha\beta} p^\nu q^\beta p^\alpha p_\nu \xi_{01}^{-1} \right. \\
&\quad \quad \quad \left. + 2\varepsilon_{\lambda\nu\alpha\beta} p^\nu p^\beta q^\alpha q_\mu \xi_{10}^{-1} \right]. \tag{6.29}
\end{aligned}$$

Novamente, reorganizando, obteremos:

$$\begin{aligned}
p^\nu \frac{F_{\lambda\mu\nu}}{4} &= -\frac{1}{2} p^\nu q^\beta \varepsilon_{\lambda\mu\alpha\beta} \Delta_\nu^\alpha(\lambda^2) - \frac{1}{2} \varepsilon_{\lambda\mu\nu\beta} p^\nu q^\beta I_{\log}(\lambda^2) + \\
&\quad - \left(\frac{i}{(4\pi)^2} \right) \left[2\varepsilon_{\lambda\mu\alpha\beta} q^\beta p^\alpha p^2 \xi_{02}^{-1} - 2\varepsilon_{\lambda\mu\alpha\beta} q^\beta p^\alpha (p \cdot q) \xi_{11}^{-1} \right. \\
&\quad \quad \quad \left. - \varepsilon_{\lambda\mu\alpha\beta} p^\alpha q^\beta \xi_{00}^0 - 2\varepsilon_{\lambda\mu\alpha\beta} q^\beta p^\alpha p^2 \xi_{01}^{-1} \right]. \tag{6.30}
\end{aligned}$$

Utilizando a seguinte identidade:

$$2p^2 \xi_{02}^{-1} - 2(p \cdot q) \xi_{11}^{-1} = \xi_1^0(p, q; \lambda^2) - \xi_0^0(p, q; \lambda^2) + p^2 \xi_{01}^{-1} + \xi_{00}^0, \tag{6.31}$$

obteremos:

$$\begin{aligned}
p^\nu \frac{F_{\lambda\mu\nu}}{4} &= -\frac{1}{2} p^\nu q^\beta \varepsilon_{\lambda\mu\alpha\beta} \Delta_\nu^\alpha(\lambda^2) - \frac{1}{2} \varepsilon_{\lambda\mu\nu\beta} p^\nu q^\beta I_{\log}(\lambda^2) + \\
&\quad + \left(\frac{i}{(4\pi)^2} \right) \varepsilon_{\lambda\mu\alpha\beta} q^\beta p^\alpha \left[\frac{1}{2} \xi_0^0(p, q; \lambda^2) + p^2 \xi_{01}^{-1} \right]. \tag{6.32}
\end{aligned}$$

A contração com o momento externo r , por sua vez, fornece:

$$\begin{aligned}
(p+q)^\lambda \frac{F_{\lambda\mu\nu}}{4} &= -\frac{1}{2}\varepsilon_{\lambda\nu\alpha\beta}(p+q)^\lambda p^\beta \Delta_\mu^\alpha(\lambda^2) - \frac{1}{2}\varepsilon_{\lambda\mu\alpha\beta}(p+q)^\lambda q^\beta \Delta_\nu^\alpha(\lambda^2) + \\
&\quad -\frac{1}{2}\varepsilon_{\lambda\mu\nu\beta}(p+q)^\lambda (q^\beta - p^\beta) I_{\log}(\lambda^2) + \\
&\quad + \left(\frac{i}{(4\pi)^2}\right) \left\{ \varepsilon_{\lambda\mu\nu\alpha}(p+q)^\lambda (q^\alpha - p^\alpha) \xi_{00}^0 \right. \\
&\quad \quad - 2\varepsilon_{\lambda\nu\beta\alpha}(p+q)^\lambda p^\alpha \left[q^\beta q_\mu \xi_{20}^{-1} - q^\beta p_\mu \xi_{11}^{-1} \right] \\
&\quad \quad - 2\varepsilon_{\lambda\mu\alpha\beta}(p+q)^\lambda q^\beta \left[p^\alpha p_\nu \xi_{02}^{-1} - p^\alpha q_\nu \xi_{11}^{-1} \right] \\
&\quad \quad \left. + \varepsilon_{\lambda\mu\alpha\beta}(p+q)^\lambda q^\beta p^\alpha p_\nu \xi_{01}^{-1} + 2\varepsilon_{\lambda\nu\alpha\beta}(p+q)^\lambda p^\beta q^\alpha q_\mu \xi_{10}^{-1} \right\}. \tag{6.33}
\end{aligned}$$

Ainda, reorganizando, obteremos:

$$\begin{aligned}
(p+q)^\lambda \frac{F_{\lambda\mu\nu}}{4} &= -\frac{1}{2}\varepsilon_{\lambda\nu\alpha\beta}q^\lambda p^\beta \Delta_\mu^\alpha(\lambda^2) - \frac{1}{2}\varepsilon_{\lambda\mu\alpha\beta}p^\lambda q^\beta \Delta_\nu^\alpha(\lambda^2) + \\
&\quad -\frac{1}{2}\varepsilon_{\lambda\mu\nu\beta}p^\lambda q^\beta I_{\log}(\lambda^2) + \frac{1}{2}\varepsilon_{\lambda\mu\nu\beta}q^\lambda p^\beta I_{\log}(\lambda^2) + \\
&\quad + \left(\frac{i}{(4\pi)^2}\right) \left[\varepsilon_{\lambda\mu\nu\alpha}p^\lambda q^\alpha \xi_{00}^0 \right] + \\
&\quad - \left(\frac{i}{(4\pi)^2}\right) \left[\varepsilon_{\lambda\mu\nu\alpha}q^\lambda p^\alpha \xi_{00}^0 \right], \tag{6.34}
\end{aligned}$$

que pode ainda ser escrito na seguinte forma:

$$\begin{aligned}
(p+q)^\lambda \frac{F_{\lambda\mu\nu}}{4} &= -\frac{1}{2}\varepsilon_{\lambda\nu\alpha\beta}q^\lambda p^\beta \Delta_\mu^\alpha(\lambda^2) - \frac{1}{2}\varepsilon_{\lambda\mu\alpha\beta}p^\lambda q^\beta \Delta_\nu^\alpha(\lambda^2) + \\
&\quad -\varepsilon_{\lambda\mu\nu\beta}p^\lambda q^\beta I_{\log}(\lambda^2) + 2 \left(\frac{i}{(4\pi)^2}\right) \left[\varepsilon_{\lambda\mu\nu\alpha}p^\lambda q^\alpha \xi_{00}^0 \right]. \tag{6.35}
\end{aligned}$$

A partir desses resultados, podemos obter a contração das amplitudes AVV , VAV , VVA e AAA com os momentos externos r , p e q , de uma maneira bem simplificada, bem como a verificação das relações de simetria e relações entre funções de Green, como veremos adiante.

6.3 Contração das amplitudes triangulares com os momentos externos

Com o resultado das propriedades da função $F_{\lambda\mu\nu}$, obtidas na seção anterior, podemos obter as propriedades das amplitudes anômalas de uma maneira bem simplificada. Começando

pela amplitude triangular AVV , sua contração com o momento externo q^μ , fornece:

$$q^\mu T_{\lambda\mu\nu}^{AVV} = q^\mu F_{\lambda\mu\nu} - q^\mu \varepsilon_{\lambda\mu\nu\alpha} \{T_\alpha^{VPP}\}. \quad (6.36)$$

Então, utilizando o resultado da amplitude VPP em (4.23), contraindo com $\varepsilon_{\lambda\mu\nu\alpha} q^\mu$ obteremos:

$$\begin{aligned} q^\mu \varepsilon_{\lambda\mu\nu\alpha} [T_\alpha^{VPP}] &= 2\varepsilon_{\lambda\mu\nu\alpha} q^\mu (k_3 + k_2)^\zeta \Delta_\zeta^\alpha(\lambda^2) + \\ &+ 2\varepsilon_{\lambda\mu\nu\alpha} q^\mu p^\alpha \left[I_{\log}(\lambda^2) - \frac{i}{(4\pi)^2} (\xi_0^0(p; \lambda^2) + 2(p \cdot q) \xi_{01}^{-1} + q^2 \xi_{00}^{-1}) \right]. \end{aligned} \quad (6.37)$$

Assim, utilizando a equação (6.28) e somando com a equação anterior, obteremos:

$$\begin{aligned} q^\mu T_{\lambda\mu\nu}^{AVV} &= -2\varepsilon_{\lambda\nu\alpha\beta} q^\mu p^\beta \Delta_\mu^\alpha(\lambda^2) - 2\varepsilon_{\lambda\mu\nu\alpha} q^\mu (k_3 + k_2)^\zeta \Delta_\zeta^\alpha(\lambda^2) + 2\varepsilon_{\lambda\mu\nu\beta} q^\mu p^\beta I_{\log}(\lambda^2) + \\ &+ 4 \left(\frac{i}{(4\pi)^2} \right) \varepsilon_{\lambda\nu\beta\alpha} p^\alpha q^\beta \left[\frac{1}{2} \xi_0^0(p, q; \lambda^2) + q^2 \xi_{10}^{-1} \right] \\ &- 2\varepsilon_{\lambda\mu\nu\alpha} q^\mu p^\alpha \left[I_{\log}(\lambda^2) - \frac{i}{(4\pi)^2} (\xi_0^0(p; \lambda^2) + 2(p \cdot q) \xi_{01}^{-1} + q^2 \xi_{00}^{-1}) \right]. \end{aligned} \quad (6.38)$$

Após uma reorganização, podemos escrever como:

$$\begin{aligned} q^\mu T_{\lambda\mu\nu}^{AVV} &= -2\varepsilon_{\lambda\nu\alpha\beta} q^\mu p^\beta \Delta_\mu^\alpha(\lambda^2) - 2\varepsilon_{\lambda\mu\nu\alpha} q^\mu (k_3 + k_2)^\zeta \Delta_\zeta^\alpha(\lambda^2) \\ &- 2\varepsilon_{\lambda\mu\nu\alpha} q^\mu p^\alpha I_{\log}(\lambda^2) + 2\varepsilon_{\lambda\mu\nu\beta} q^\mu p^\beta I_{\log}(\lambda^2) \\ &+ 2\varepsilon_{\lambda\mu\nu\alpha} q^\mu p^\alpha \frac{i}{(4\pi)^2} [\xi_0^0(p; \lambda^2) + 2(p \cdot q) \xi_{01}^{-1} - 2q^2 \xi_{10}^{-1} + q^2 \xi_{00}^{-1} - \xi_0^0(p, q; \lambda^2)]. \end{aligned} \quad (6.39)$$

Utilizando então a seguinte identidade:

$$-2q^2 \xi_{10}^{-1} + 2(p \cdot q) \xi_{01}^{-1} = \xi_0^0(p, q; \lambda^2) - \xi_0^0(p; \lambda^2) - q^2 \xi_{00}^{-1}, \quad (6.40)$$

obteremos finalmente:

$$q^\mu T_{\lambda\mu\nu}^{AVV} = -2\varepsilon_{\lambda\nu\alpha\beta} q^\mu p^\beta \Delta_\mu^\alpha(\lambda^2) - 2\varepsilon_{\lambda\mu\nu\alpha} q^\mu (k_3 + k_2)^\zeta \Delta_\zeta^\alpha(\lambda^2). \quad (6.41)$$

A contração com o momento externo p^ν fornecerá:

$$p^\nu T_{\lambda\mu\nu}^{AVV} = -2p^\nu q^\beta \varepsilon_{\lambda\mu\alpha\beta} \Delta_\nu^\alpha(\lambda^2) - 2\varepsilon_{\lambda\mu\nu\alpha} p^\nu (k_3 + k_2)^\zeta \Delta_\zeta^\alpha(\lambda^2). \quad (6.42)$$

E a contração da amplitude AVV com o momento $(p+q)^\lambda$, levará a:

$$\begin{aligned} (p+q)^\lambda T_{\lambda\mu\nu}^{AVV} &= -2\varepsilon_{\lambda\nu\alpha\beta} q^\lambda p^\beta \Delta_\mu^\alpha(\lambda^2) - 2\varepsilon_{\lambda\mu\alpha\beta} p^\lambda q^\beta \Delta_\nu^\alpha(\lambda^2) \\ &\quad - 2\varepsilon_{\lambda\mu\nu\alpha} (p+q)^\lambda (k_3 + k_2)^\zeta \Delta_\zeta^\alpha(\lambda^2) \\ &\quad - 4\varepsilon_{\lambda\mu\nu\alpha} p^\lambda q^\alpha \frac{i}{(4\pi)^2} - 8m^2 \varepsilon_{\lambda\mu\nu\alpha} p^\lambda q^\alpha \frac{i}{(4\pi)^2} \xi_{00}^{-1}. \end{aligned} \quad (6.43)$$

Os resultados para as demais amplitudes ficam:

$$\begin{aligned} q^\mu T_{\lambda\mu\nu}^{VAV} &= -2\varepsilon_{\lambda\nu\alpha\beta} q^\mu p^\beta \Delta_\mu^\alpha(\lambda^2) - 2q^\mu \varepsilon_{\lambda\mu\nu\alpha} (k_3 + k_2)^\zeta \Delta_\zeta^\alpha(\lambda^2) + \\ &\quad - 2m \left\{ \varepsilon_{\lambda\mu\nu\alpha} q^\mu p^\alpha \frac{i}{(4\pi)^2} (4m\xi_{00}^{-1}) \right\}, \end{aligned} \quad (6.44)$$

$$p^\nu T_{\lambda\mu\nu}^{VAV} = -2p^\nu q^\beta \varepsilon_{\lambda\mu\alpha\beta} \Delta_\nu^\alpha(\lambda^2) - 2\varepsilon_{\lambda\mu\nu\alpha} p^\nu (k_3 + k_2)^\zeta \Delta_\zeta^\alpha(\lambda^2), \quad (6.45)$$

$$\begin{aligned} (p+q)^\lambda T_{\lambda\mu\nu}^{VAV} &= -2\varepsilon_{\lambda\nu\alpha\beta} q^\lambda p^\beta \Delta_\mu^\alpha(\lambda^2) - 2\varepsilon_{\lambda\mu\alpha\beta} p^\lambda q^\beta \Delta_\nu^\alpha(\lambda^2) \\ &\quad - 2(p+q)^\lambda \varepsilon_{\lambda\mu\nu\alpha} (k_3 + k_2)^\zeta \Delta_\zeta^\alpha(\lambda^2) \\ &\quad - 4p^\lambda \varepsilon_{\lambda\mu\nu\alpha} q^\alpha \frac{i}{(4\pi)^2}, \end{aligned} \quad (6.46)$$

$$q^\mu T_{\lambda\mu\nu}^{VVA} = -2\varepsilon_{\lambda\nu\alpha\beta} q^\mu p^\beta \Delta_\mu^\alpha(\lambda^2) - 2\varepsilon_{\lambda\mu\nu\alpha} q^\mu (k_3 + k_2)^\zeta \Delta_\zeta^\alpha(\lambda^2), \quad (6.47)$$

$$\begin{aligned} p^\nu T_{\lambda\mu\nu}^{VVA} &= -2p^\nu q^\beta \varepsilon_{\lambda\mu\alpha\beta} \Delta_\nu^\alpha(\lambda^2) - 2\varepsilon_{\lambda\mu\nu\alpha} p^\nu (k_3 + k_2)^\zeta \Delta_\zeta^\alpha(\lambda^2) \\ &\quad + 2m \left\{ -\varepsilon_{\lambda\mu\alpha\nu} p^\nu q^\alpha \frac{i}{(4\pi)^2} (4m\xi_{00}^{-1}) \right\}, \end{aligned} \quad (6.48)$$

$$\begin{aligned} (p+q)^\lambda T_{\lambda\mu\nu}^{VVA} &= -2\varepsilon_{\lambda\nu\alpha\beta} q^\lambda p^\beta \Delta_\mu^\alpha(\lambda^2) - 2\varepsilon_{\lambda\mu\alpha\beta} p^\lambda q^\beta \Delta_\nu^\alpha(\lambda^2) \\ &\quad - 2\varepsilon_{\lambda\mu\nu\alpha} (p+q)^\lambda (k_3 + k_2)^\zeta \Delta_\zeta^\alpha(\lambda^2) \\ &\quad - 4\varepsilon_{\lambda\mu\nu\alpha} p^\lambda q^\alpha \frac{i}{(4\pi)^2}, \end{aligned} \quad (6.49)$$

$$\begin{aligned}
q^\mu T_{\lambda\mu\nu}^{AAA} &= -2\varepsilon_{\lambda\nu\alpha\beta} q^\mu p^\beta \Delta_\mu^\alpha (\lambda^2) - 2\varepsilon_{\lambda\mu\nu\alpha} q^\mu (k_3 + k_2)^\zeta \Delta_\zeta^\alpha (\lambda^2) + \\
&+ 2m \left\{ -8m\varepsilon_{\lambda\nu\mu\alpha} q^\mu p^\alpha \frac{i}{(4\pi)^2} \left(\xi_{01}^{-1} - \frac{1}{2}\xi_{00}^{-1} \right) \right\}, \quad (6.50)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
p^\nu T_{\lambda\mu\nu}^{AAA} &= -2p^\nu q^\beta \varepsilon_{\lambda\mu\alpha\beta} \Delta_\nu^\alpha (\lambda^2) - 2p^\nu \varepsilon_{\lambda\mu\nu\alpha} (k_3 + k_2)^\zeta \Delta_\zeta^\alpha (\lambda^2) + \\
&+ 2m \left\{ 8m\varepsilon_{\lambda\mu\alpha\nu} p^\nu q^\alpha \frac{i}{(4\pi)^2} \left(\xi_{10}^{-1} - \frac{1}{2}\xi_{00}^{-1} \right) \right\}, \quad (6.51)
\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
(p+q)^\lambda T_{\lambda\mu\nu}^{AAA} &= -2\varepsilon_{\lambda\nu\alpha\beta} q^\lambda p^\beta \Delta_\mu^\alpha (\lambda^2) - 2\varepsilon_{\lambda\mu\alpha\beta} p^\lambda q^\beta \Delta_\nu^\alpha (\lambda^2) \\
&- 2(p+q)^\lambda \varepsilon_{\lambda\mu\nu\alpha} (k_3 + k_2)^\zeta \Delta_\zeta^\alpha (\lambda^2) \\
&- 4\varepsilon_{\lambda\mu\nu\alpha} p^\lambda q^\alpha \frac{i}{(4\pi)^2} \\
&- 2m \left\{ 8m\varepsilon_{\mu\nu\lambda\alpha} p^\lambda q^\alpha \frac{i}{(4\pi)^2} \left(\xi_{10}^{-1} + \xi_{01}^{-1} - \frac{1}{2}\xi_{00}^{-1} \right) \right\}. \quad (6.52)
\end{aligned}$$

Com esses resultados estamos aptos a verificar se as relações de simetria e as relações entre funções de Green para as amplitudes triangulares anômalas foram preservadas.

7 VERIFICAÇÃO DAS RELAÇÕES DE SIMETRIA, RELAÇÕES ENTRE FUNÇÕES DE GREEN E LIMITES DE BAIXA ENERGIA PARA AS AMPLITUDES ANÔMALAS

Com o resultados para as amplitudes AVV , VAV , VVA e AAA , assim como as expressões para as contrações destas com os momentos externos, podemos verificar explicitamente se esses resultados satisfazem as relações de simetrias estabelecidas para elas.

7.1 Amplitude AVV

Considerando primeiramente as relações para a amplitude AVV . Verificaremos, inicialmente, se as equações (5.5), (5.6) e (5.7) foram mantidas após a aplicação da última regra de Feynman. Para isso, iremos utilizar os resultados que obtivemos no capítulo anterior para as contrações dos momentos externos com a amplitude AVV .

A contração com o momento q^μ produziu:

$$q^\mu T_{\lambda\mu\nu}^{AVV} = -2\varepsilon_{\lambda\nu\alpha\beta} q^\mu p^\beta \Delta_\mu^\alpha(\lambda^2) - 2\varepsilon_{\lambda\mu\nu\alpha} q^\mu (k_3 + k_2)^\zeta \Delta_\zeta^\alpha(\lambda^2). \quad (7.1)$$

Podemos escrever isto como:

$$q^\mu T_{\lambda\mu\nu}^{AVV} = -\varepsilon_{\lambda\mu\nu\alpha} (k_3 - k_1)^\beta (k_1 - k_2)^\mu \Delta_\beta^\alpha(\lambda^2) - 2\varepsilon_{\lambda\mu\nu\alpha} (k_3 - k_1)^\mu (k_3 + k_2)^\beta \Delta_\beta^\alpha(\lambda^2). \quad (7.2)$$

Após uma conveniente reorganização, teremos:

$$\begin{aligned} q^\mu T_{\lambda\mu\nu}^{AVV} &= \varepsilon_{\lambda\mu\nu\alpha} (k_1 + k_2)^\beta (k_1 - k_2)^\mu \Delta_\beta^\alpha(\lambda^2) \\ &\quad - 2\varepsilon_{\lambda\mu\nu\alpha} (k_3 - k_2)^\mu (k_3 + k_2)^\beta \Delta_\beta^\alpha(\lambda^2) \\ &\quad - \varepsilon_{\lambda\mu\nu\alpha} (k_3 + k_2)^\beta (k_1 - k_2)^\mu \Delta_\beta^\alpha(\lambda^2) \\ &\quad + 2\varepsilon_{\lambda\mu\nu\alpha} (k_1 - k_2)^\mu (k_3 + k_2)^\beta \Delta_\beta^\alpha(\lambda^2). \end{aligned} \quad (7.3)$$

Após a comparação com a expressão obtida para a amplitude AV , equação (3.40), percebemos que isto significa:

$$(k_3 - k_1)^\mu T_{\lambda\mu\nu}^{AVV} = T_{\lambda\nu}^{AV}(k_1, k_2; m) - T_{\lambda\nu}^{AV}(k_3, k_2; m), \quad (7.4)$$

que implica que o resultado esperado foi obtido.

Por sua vez, a contração da amplitude AVV com o momento p^ν forneceu:

$$p^\nu T_{\lambda\mu\nu}^{AVV} = -2\varepsilon_{\lambda\mu\alpha\beta} p^\nu q^\beta \Delta_\nu^\alpha(\lambda^2) - 2\varepsilon_{\lambda\mu\nu\alpha} p^\nu (k_3 + k_2)^\zeta \Delta_\zeta^\alpha(\lambda^2), \quad (7.5)$$

que pode ser colocada na forma:

$$p^\nu T_{\lambda\mu\nu}^{AVV} = \varepsilon_{\lambda\mu\nu\alpha} (k_1 - k_2)^\beta (k_3 - k_1)^\nu \Delta_\beta^\alpha(\lambda^2) - 2\varepsilon_{\lambda\mu\nu\alpha} (k_1 - k_2)^\nu (k_3 + k_2)^\beta \Delta_\beta^\alpha(\lambda^2). \quad (7.6)$$

Reorganizando convenientemente, teremos:

$$\begin{aligned} p^\nu T_{\lambda\mu\nu}^{AVV} &= \varepsilon_{\lambda\mu\nu\alpha} (k_1 + k_3)^\beta (k_3 - k_1)^\nu \Delta_\beta^\alpha(\lambda^2) \\ &\quad - 2\varepsilon_{\lambda\mu\nu\alpha} (k_3 - k_2)^\nu (k_3 + k_2)^\beta \Delta_\beta^\alpha(\lambda^2) \\ &\quad - \varepsilon_{\lambda\mu\nu\alpha} (k_3 + k_2)^\beta (k_3 - k_1)^\nu \Delta_\beta^\alpha(\lambda^2) \\ &\quad + 2\varepsilon_{\lambda\mu\nu\alpha} (-k_1 + k_3)^\nu (k_3 + k_2)^\beta \Delta_\beta^\alpha(\lambda^2). \end{aligned} \quad (7.7)$$

Assim, identificando a amplitude AV , identificamos a relação:

$$p^\nu T_{\lambda\mu\nu}^{AVV} = T_{\lambda\mu}^{AV}(k_3, k_2; m) - T_{\lambda\mu}^{AV}(k_3, k_1; m), \quad (7.8)$$

como o esperado.

Finalmente, verifiquemos a relação entre função de Green referente a contração com o momento $(q + p)^\lambda$. Obtivemos, no capítulo anterior, o resultado:

$$\begin{aligned} (p + q)^\lambda T_{\lambda\mu\nu}^{AVV} &= -2\varepsilon_{\lambda\nu\alpha\beta} q^\lambda p^\beta \Delta_\mu^\alpha(\lambda^2) - 2\varepsilon_{\lambda\mu\alpha\beta} p^\lambda q^\beta \Delta_\nu^\alpha(\lambda^2) + \\ &\quad - 2\varepsilon_{\lambda\mu\nu\alpha} (p + q)^\lambda (k_3 + k_2)^\zeta \Delta_\zeta^\alpha(\lambda^2) + \\ &\quad - 4\varepsilon_{\lambda\mu\nu\alpha} \left(p^\lambda q^\alpha \frac{i}{(4\pi)^2} \right) - 2m \left(T_{\mu\nu}^{PVV} \right). \end{aligned} \quad (7.9)$$

Após uma reorganização dos termos divergentes, teremos:

$$\begin{aligned}
(p+q)^\lambda T_{\lambda\mu\nu}^{AVV} &= 2p^\lambda q^\beta \left[-\varepsilon_{\alpha\nu\lambda\beta} \Delta_\mu^\alpha(\lambda^2) - \varepsilon_{\mu\alpha\lambda\beta} \Delta_\nu^\alpha(\lambda^2) - \varepsilon_{\mu\nu\alpha\beta} \Delta_\lambda^\alpha(\lambda^2) - \varepsilon_{\mu\nu\lambda\alpha} \Delta_\beta^\alpha(\lambda^2) \right] + \\
&\quad -2\varepsilon_{\lambda\mu\nu\alpha} p^\lambda (k_2+k_1)^\beta \Delta_\beta^\alpha(\lambda^2) - 2\varepsilon_{\lambda\mu\nu\alpha} q^\lambda (k_3+k_1)^\beta \Delta_\beta^\alpha(\lambda^2) + \\
&\quad -4\varepsilon_{\lambda\mu\nu\alpha} \left(p^\lambda q^\alpha \frac{i}{(4\pi)^2} \right) - 2m \left(T_{\mu\nu}^{PVV} \right). \tag{7.10}
\end{aligned}$$

Como ainda não é possível fazer uma identificação das funções de dois pontos AV , exigidas pela identidade, precisaremos reorganizar os índices do objeto divergente. Para este propósito utilizamos a identidade de Shouten, dada por:

$$\varepsilon_{\alpha\nu\lambda\beta} \Delta_\mu^\alpha + \varepsilon_{\mu\alpha\lambda\beta} \Delta_\nu^\alpha + \varepsilon_{\mu\nu\alpha\beta} \Delta_\lambda^\alpha + \varepsilon_{\mu\nu\lambda\alpha} \Delta_\beta^\alpha = \varepsilon_{\mu\nu\lambda\beta} \Delta_\alpha^\alpha. \tag{7.11}$$

Deste modo, teremos:

$$\begin{aligned}
(p+q)^\lambda T_{\lambda\mu\nu}^{AVV} &= -2p^\lambda q^\beta \left[\varepsilon_{\mu\nu\lambda\beta} \Delta_\alpha^\alpha(\lambda^2) \right] + \\
&\quad -2\varepsilon_{\lambda\mu\nu\alpha} p^\lambda (k_2+k_1)^\beta \Delta_\beta^\alpha(\lambda^2) - 2\varepsilon_{\lambda\mu\nu\alpha} q^\lambda (k_3+k_1)^\beta \Delta_\beta^\alpha(\lambda^2) + \\
&\quad -4\varepsilon_{\lambda\mu\nu\alpha} \left(p^\lambda q^\alpha \frac{i}{(4\pi)^2} \right) - 2m \left(T_{\mu\nu}^{PVV} \right). \tag{7.12}
\end{aligned}$$

Após uma reorganização conveniente para nossos propósitos, ficaremos com:

$$\begin{aligned}
(p+q)^\lambda T_{\lambda\mu\nu}^{AVV} &= -2\varepsilon_{\lambda\mu\nu\alpha} p^\lambda (k_2+k_1)^\beta \Delta_\beta^\alpha(\lambda^2) - 2\varepsilon_{\lambda\mu\nu\alpha} q^\lambda (k_3+k_1)^\beta \Delta_\beta^\alpha(\lambda^2) - 2m \left(T_{\mu\nu}^{PVV} \right) + \\
&\quad -4\varepsilon_{\mu\nu\lambda\beta} p^\lambda q^\beta \left[\Delta_\alpha^\alpha(\lambda^2) + \frac{1}{2} \left(\frac{i}{(4\pi)^2} \right) \right]. \tag{7.13}
\end{aligned}$$

Com isso podemos identificar as amplitudes $AV's$, de forma que obtemos:

$$\begin{aligned}
(p+q)^\lambda T_{\lambda\mu\nu}^{AVV} &= T_{\mu\nu}^{AV}(k_1, k_2; m) - T_{\nu\mu}^{AV}(k_3, k_1; m) - 2m T_{\mu\nu}^{PVV} + \\
&\quad -4\varepsilon_{\mu\nu\lambda\beta} q^\beta p^\lambda \left[\frac{1}{2} \frac{i}{(4\pi)^2} + \Delta_\alpha^\alpha \right] \tag{7.14}
\end{aligned}$$

Isto significa que a relação entre funções de Green será satisfeita se, e somente se:

$$\left[\frac{1}{2} \frac{i}{(4\pi)^2} + \Delta_\alpha^\alpha \right] = 0. \tag{7.15}$$

Discutiremos a validade desta condição posteriormente.

7.2 Amplitude VAV

Para a amplitude VAV, devemos verificar se as equações (5.8), (5.9) e (5.10) foram preservadas pelas operações realizadas.

Para tal, consideremos a contração com o momento q^μ , que produziu o seguinte resultado:

$$q^\mu T_{\lambda\mu\nu}^{VAV} = -2\varepsilon_{\lambda\nu\alpha\beta} q^\mu p^\beta \Delta_\mu^\alpha(\lambda^2) - 2q^\mu \varepsilon_{\lambda\mu\nu\alpha} (k_3 + k_2)^\zeta \Delta_\zeta^\alpha(\lambda^2) + 2m \{T_{\lambda\nu}^{VPV}\}. \quad (7.16)$$

Reescrevemos isto como:

$$\begin{aligned} q^\mu T_{\lambda\mu\nu}^{VAV} = & -2\varepsilon_{\lambda\mu\nu\alpha} (k_3 - k_1)^\beta (k_1 - k_2)^\mu \Delta_\beta^\alpha(\lambda^2) \\ & -2\varepsilon_{\lambda\mu\nu\alpha} (k_3 - k_1)^\mu (k_3 + k_2)^\beta \Delta_\beta^\alpha(\lambda^2) + 2m \{T_{\lambda\nu}^{VPV}\}. \end{aligned} \quad (7.17)$$

Escrevendo em uma forma mais conveniente;

$$\begin{aligned} q^\mu T_{\lambda\mu\nu}^{VAV} = & 2\varepsilon_{\lambda\mu\nu\alpha} (k_1 + k_2)^\beta (k_1 - k_2)^\mu \Delta_\beta^\alpha(\lambda^2) \\ & -2\varepsilon_{\lambda\mu\nu\alpha} (k_3 - k_2)^\mu (k_3 + k_2)^\beta \Delta_\beta^\alpha(\lambda^2) \\ & -2\varepsilon_{\lambda\mu\nu\alpha} (k_3 + k_2)^\beta (k_1 - k_2)^\mu \Delta_\beta^\alpha(\lambda^2) \\ & +2\varepsilon_{\lambda\mu\nu\alpha} (k_1 - k_2)^\mu (k_3 + k_2)^\beta \Delta_\beta^\alpha(\lambda^2) \\ & +2m \{T_{\lambda\nu}^{VPV}\}, \end{aligned} \quad (7.18)$$

podemos fazer a identificação das amplitudes AV e VA;

$$(k_3 - k_1)^\mu T_{\lambda\mu\nu}^{VAV} = T_{\lambda\nu}^{AV}(k_1, k_2; m) + T_{\lambda\nu}^{VA}(k_3, k_2; m) + 2m T_{\lambda\nu}^{VPV}. \quad (7.19)$$

A contração com o momento p^ν forneceu:

$$p^\nu T_{\lambda\mu\nu}^{VAV} = -2\varepsilon_{\lambda\mu\alpha\beta} p^\nu q^\beta \Delta_\nu^\alpha(\lambda^2) - 2\varepsilon_{\lambda\mu\nu\alpha} p^\nu (k_3 + k_2)^\zeta \Delta_\zeta^\alpha(\lambda^2), \quad (7.20)$$

que é igual a:

$$\begin{aligned}
p^\nu T_{\lambda\mu\nu}^{VAV} &= 2\varepsilon_{\lambda\mu\nu\alpha} (k_1 + k_3)^\beta (k_3 - k_1)^\nu \Delta_\beta^\alpha (\lambda^2) \\
&\quad - 2\varepsilon_{\lambda\mu\nu\alpha} (k_3 - k_2)^\nu (k_3 + k_2)^\beta \Delta_\beta^\alpha (\lambda^2) \\
&\quad - 2\varepsilon_{\lambda\mu\nu\alpha} (k_2 + k_3)^\beta (k_3 - k_1)^\nu \Delta_\beta^\alpha (\lambda^2) \\
&\quad + 2\varepsilon_{\lambda\mu\nu\alpha} (-k_1 + k_3)^\nu (k_3 + k_2)^\beta \Delta_\beta^\alpha (\lambda^2), \tag{7.21}
\end{aligned}$$

que, fazendo a identificação das funções de dois pontos envolvidas, nos permite escrever:

$$(k_1 - k_2)^\nu T_{\lambda\mu\nu}^{VAV} = T_{\lambda\mu}^{VA}(k_3, k_2; m) - T_{\lambda\mu}^{VA}(k_3, k_1; m), \tag{7.22}$$

como o esperado.

Para completar, a contração da amplitude VAV com o momento $(q + p)^\lambda$, dada por:

$$\begin{aligned}
(p + q)^\lambda T_{\lambda\mu\nu}^{VAV} &= -2\varepsilon_{\lambda\nu\alpha\beta} q^\lambda p^\beta \Delta_\mu^\alpha (\lambda^2) - 2\varepsilon_{\lambda\mu\alpha\beta} p^\lambda q^\beta \Delta_\nu^\alpha (\lambda^2) + \\
&\quad - 2(p + q)^\lambda \varepsilon_{\lambda\mu\nu\alpha} (k_3 + k_2)^\zeta \Delta_\zeta^\alpha (\lambda^2) + \\
&\quad - 4p^\lambda \varepsilon_{\lambda\mu\nu\alpha} q^\alpha \frac{i}{(4\pi)^2}, \tag{7.23}
\end{aligned}$$

permite que escrevamos:

$$\begin{aligned}
(p + q)^\lambda T_{\lambda\mu\nu}^{VAV} &= -2p^\lambda q^\beta \left[\varepsilon_{\alpha\nu\lambda\beta} \Delta_\mu^\alpha (\lambda^2) + \varepsilon_{\mu\alpha\lambda\beta} \Delta_\nu^\alpha (\lambda^2) + \varepsilon_{\mu\nu\alpha\beta} \Delta_\lambda^\alpha (\lambda^2) + \varepsilon_{\mu\nu\lambda\alpha} \Delta_\beta^\alpha (\lambda^2) \right] + \\
&\quad - 2\varepsilon_{\lambda\mu\nu\alpha} p^\lambda (k_2 + k_1)^\beta \Delta_\beta^\alpha (\lambda^2) - 2\varepsilon_{\lambda\mu\nu\alpha} q^\lambda (k_3 + k_1)^\beta \Delta_\beta^\alpha (\lambda^2) + \\
&\quad - 4p^\lambda \varepsilon_{\lambda\mu\nu\alpha} q^\alpha \frac{i}{(4\pi)^2}, \tag{7.24}
\end{aligned}$$

que, utilizando a identidade de Shouten (7.11), nos fornecerá:

$$\begin{aligned}
(p + q)^\lambda T_{\lambda\mu\nu}^{VAV} &= -2\varepsilon_{\lambda\mu\nu\alpha} p^\lambda (k_2 + k_1)^\beta \Delta_\beta^\alpha (\lambda^2) - 2\varepsilon_{\lambda\mu\nu\alpha} q^\lambda (k_3 + k_1)^\beta \Delta_\beta^\alpha (\lambda^2) + \\
&\quad - 2p^\lambda q^\beta \varepsilon_{\mu\nu\lambda\beta} \Delta_\alpha^\alpha - 4p^\lambda \varepsilon_{\lambda\mu\nu\alpha} q^\alpha \frac{i}{(4\pi)^2}. \tag{7.25}
\end{aligned}$$

Fazendo a identificação das amplitudes AV e VA , teremos:

$$(k_3 - k_2)^\lambda T_{\lambda\mu\nu}^{VAV} = T_{\mu\nu}^{AV}(k_1, k_2; m) - T_{\nu\mu}^{VA}(k_3, k_1; m) + \\ -4p^\lambda q^\beta \varepsilon_{\mu\nu\lambda\beta} \left[\frac{1}{2} \frac{i}{(4\pi)^2} + \Delta_\alpha^\alpha \right]. \quad (7.26)$$

Portanto, novamente, a relação entre funções de Green somente será satisfeita se a condição (7.15) for válida.

7.3 Amplitude VVA

Agora, consideraremos as relações entre funções de Green para a amplitude VVA , ou seja, iremos verificar se as equações (5.11), (5.12) e (5.13) foram preservadas.

Para tal, a contração com o momento q^μ , que produziu o resultado:

$$q^\mu T_{\lambda\mu}^{VVA} = -2\varepsilon_{\lambda\nu\alpha\beta} q^\mu p^\beta \Delta_\mu^\alpha(\lambda^2) - 2\varepsilon_{\lambda\mu\nu\alpha} q^\mu (k_3 + k_2)^\zeta \Delta_\zeta^\alpha(\lambda^2), \quad (7.27)$$

pode ser colocada na forma:

$$q^\mu T_{\lambda\mu\nu}^{VVA} = -2\varepsilon_{\lambda\mu\nu\alpha} (-k_1 - k_2)^\beta (k_1 - k_2)^\mu \Delta_\beta^\alpha(\lambda^2) \\ -2\varepsilon_{\lambda\mu\nu\alpha} (k_3 - k_2)^\mu (k_3 + k_2)^\beta \Delta_\beta^\alpha(\lambda^2) \\ -2\varepsilon_{\lambda\mu\nu\alpha} (k_3 + k_2)^\beta (k_1 - k_2)^\mu \Delta_\beta^\alpha(\lambda^2) \\ -2\varepsilon_{\lambda\mu\nu\alpha} (-k_1 + k_2)^\mu (k_3 + k_2)^\beta \Delta_\beta^\alpha(\lambda^2). \quad (7.28)$$

Isto nos permite identificar:

$$(k_3 - k_1)^\mu T_{\lambda\mu\nu}^{VVA} = T_{\lambda\nu}^{VA}(k_1, k_2; m) - T_{\lambda\nu}^{VA}(k_3, k_2; m), \quad (7.29)$$

que é a relação esperada.

Ainda, para a contração com o momento p^ν , obtivemos:

$$p^\nu T_{\lambda\mu\nu}^{VVA} = -2\varepsilon_{\lambda\mu\alpha\beta} p^\nu q^\beta \Delta_\nu^\alpha(\lambda^2) - 2\varepsilon_{\lambda\mu\nu\alpha} p^\nu (k_3 + k_2)^\zeta \Delta_\zeta^\alpha(\lambda^2) + 2m \left\{ T_{\lambda\mu}^{VVP} \right\}. \quad (7.30)$$

Após uma reorganização, podemos escrever:

$$\begin{aligned}
p^\nu T_{\lambda\mu\nu}^{VVA} &= 2\varepsilon_{\lambda\mu\nu\alpha} (k_1 + k_3)^\beta (k_3 - k_1)^\nu \Delta_\beta^\alpha (\lambda^2) \\
&\quad - 2\varepsilon_{\lambda\mu\nu\alpha} (k_3 - k_2)^\nu (k_3 + k_2)^\beta \Delta_\beta^\alpha (\lambda^2) \\
&\quad - 2\varepsilon_{\lambda\mu\nu\alpha} (k_2 + k_3)^\beta (k_3 - k_1)^\nu \Delta_\beta^\alpha (\lambda^2) \\
&\quad + 2\varepsilon_{\lambda\mu\nu\alpha} (-k_1 + k_3)^\nu (k_3 + k_2)^\beta \Delta_\beta^\alpha (\lambda^2) + 2m \left\{ T_{\lambda\mu}^{VVP} \right\}. \tag{7.31}
\end{aligned}$$

Então identificamos:

$$(k_1 - k_2)^\nu T_{\lambda\mu\nu}^{VVA} = T_{\lambda\mu}^{VA} (k_3, k_2; m) - T_{\lambda\mu}^{AV} (k_3, k_1; m) + 2m T_{\lambda\mu}^{VVP}, \tag{7.32}$$

que é a relação esperada.

Finalmente, verifiquemos se a contração do momento $(p + q)^\lambda$ com a amplitude VVA satisfaz a relação entre funções de Green correspondente. Obtivemos que:

$$\begin{aligned}
(p + q)^\lambda T_{\lambda\mu\nu}^{VVA} &= -2\varepsilon_{\lambda\nu\alpha\beta} q^\lambda p^\beta \Delta_\mu^\alpha (\lambda^2) - 2\varepsilon_{\lambda\mu\alpha\beta} p^\lambda q^\beta \Delta_\nu^\alpha (\lambda^2) \\
&\quad - 2\varepsilon_{\lambda\mu\nu\alpha} (p + q)^\lambda (k_3 + k_2)^\zeta \Delta_\zeta^\alpha (\lambda^2) + \\
&\quad - 4\varepsilon_{\lambda\mu\nu\alpha} p^\lambda q^\alpha \frac{i}{(4\pi)^2}, \tag{7.33}
\end{aligned}$$

o que podemos escrever como:

$$\begin{aligned}
(p + q)^\lambda T_{\lambda\mu\nu}^{VVA} &= -2p^\lambda q^\beta \left[\varepsilon_{\alpha\nu\lambda\beta} \Delta_\mu^\alpha (\lambda^2) + \varepsilon_{\mu\alpha\lambda\beta} \Delta_\nu^\alpha (\lambda^2) + \varepsilon_{\mu\nu\alpha\beta} \Delta_\lambda^\alpha (\lambda^2) + \varepsilon_{\mu\nu\lambda\alpha} \Delta_\beta^\alpha (\lambda^2) \right] + \\
&\quad - 2\varepsilon_{\lambda\mu\nu\alpha} p^\lambda (k_2 + k_1)^\beta \Delta_\beta^\alpha (\lambda^2) - 2\varepsilon_{\lambda\mu\nu\alpha} q^\lambda (k_3 + k_1)^\beta \Delta_\beta^\alpha (\lambda^2) + \\
&\quad - 4\varepsilon_{\lambda\mu\nu\alpha} p^\lambda q^\alpha \frac{i}{(4\pi)^2}. \tag{7.34}
\end{aligned}$$

Novamente, fazemos uso da identidade de Shouten, Eq. (7.11), para obtermos:

$$\begin{aligned}
(p + q)^\lambda T_{\lambda\mu\nu}^{VVA} &= 2\varepsilon_{\mu\nu\alpha\lambda} p^\lambda (k_2 + k_1)^\beta \Delta_\beta^\alpha (\lambda^2) - 2\varepsilon_{\nu\mu\alpha\lambda} q^\lambda (k_3 + k_1)^\beta \Delta_\beta^\alpha (\lambda^2) + \\
&\quad - 4p^\lambda q^\beta \varepsilon_{\mu\nu\lambda\beta} \left[\frac{1}{2} \frac{i}{(4\pi)^2} + \Delta_\alpha^\alpha \right]. \tag{7.35}
\end{aligned}$$

Deste modo, identificando as funções de dois pontos AV e VA , obteremos:

$$(k_3 - k_2)^\lambda T_{\lambda\mu\nu}^{VVA} = T_{\mu\nu}^{VA}(k_1, k_2; m) - T_{\nu\mu}^{AV}(k_3, k_1; m) - 4p^\lambda q^\beta \varepsilon_{\mu\nu\lambda\beta} \left[\frac{1}{2} \frac{i}{(4\pi)^2} + \Delta_\alpha^\alpha \right], \quad (7.36)$$

e, mais uma vez, a relação será preservada se a condição (7.15) for satisfeita.

7.4 Amplitude AAA

Por último, precisamos verificar as relações entre funções de Green para a amplitude AAA. Para isso, iremos considerar se as equações (5.14), (5.15) e (5.16) foram preservadas pelas operações realizadas.

A contração com o momento q^μ , escrita na forma:

$$q^\mu T_{\lambda\mu\nu}^{AAA} = -2\varepsilon_{\lambda\nu\alpha\beta} q^\mu p^\beta \Delta_\mu^\alpha(\lambda^2) - 2\varepsilon_{\lambda\mu\nu\alpha} q^\mu (k_3 + k_2)^\zeta \Delta_\zeta^\alpha(\lambda^2) + 2m \left\{ T_{\lambda\nu}^{APA} \right\}, \quad (7.37)$$

pode ser escrita também como:

$$\begin{aligned} q^\mu T_{\lambda\mu\nu}^{AAA} &= -2\varepsilon_{\lambda\mu\nu\alpha} (k_3 - k_1)^\beta (k_1 - k_2)^\mu \Delta_\beta^\alpha(\lambda^2) \\ &\quad - 2\varepsilon_{\lambda\mu\nu\alpha} (k_3 - k_1)^\mu (k_3 + k_2)^\zeta \Delta_\zeta^\alpha(\lambda^2) + 2m \left\{ T_{\lambda\nu}^{APA} \right\}, \end{aligned} \quad (7.38)$$

ou ainda:

$$\begin{aligned} q^\mu T_{\lambda\mu\nu}^{AAA} &= 2\varepsilon_{\lambda\mu\nu\alpha} (k_1 + k_2)^\beta (k_1 - k_2)^\mu \Delta_\beta^\alpha(\lambda^2) \\ &\quad - 2\varepsilon_{\lambda\mu\nu\alpha} (k_3 - k_2)^\mu (k_3 + k_2)^\zeta \Delta_\zeta^\alpha(\lambda^2) \\ &\quad - 2\varepsilon_{\lambda\mu\nu\alpha} (k_3 + k_2)^\beta (k_1 - k_2)^\mu \Delta_\beta^\alpha(\lambda^2) \\ &\quad + 2\varepsilon_{\lambda\mu\nu\alpha} (k_1 - k_2)^\mu (k_3 + k_2)^\zeta \Delta_\zeta^\alpha(\lambda^2) + 2m \left\{ T_{\lambda\nu}^{APA} \right\}. \end{aligned} \quad (7.39)$$

Reconhecendo as estruturas envolvidas, podemos identificar a relação:

$$q^\mu T_{\lambda\mu\nu}^{AAA} = T_{\lambda\nu}^{VA}(k_1, k_2; m) - T_{\lambda\nu}^{AV}(k_3, k_2; m) + 2m T_{\lambda\nu}^{APA}, \quad (7.40)$$

como o esperado.

A contração com o momento externo p^ν , forneceu:

$$p^\nu T_{\lambda\mu\nu}^{AAA} = -2p^\nu q^\beta \varepsilon_{\lambda\mu\alpha\beta} \Delta_\nu^\alpha(\lambda^2) - 2p^\nu \varepsilon_{\lambda\mu\nu\alpha} (k_3 + k_2)^\zeta \Delta_\zeta^\alpha(\lambda^2) + 2m \left\{ T_{\lambda\mu}^{AAP} \right\}. \quad (7.41)$$

Então, após uma reorganização, podemos obter:

$$\begin{aligned} p^\nu T_{\lambda\mu\nu}^{AAA} &= 2\varepsilon_{\lambda\mu\nu\alpha} (k_1 + k_3)^\beta (k_3 - k_1)^\nu \Delta_\beta^\alpha(\lambda^2) \\ &\quad - 2\varepsilon_{\lambda\mu\nu\alpha} (k_3 - k_2)^\nu (k_3 + k_2)^\beta \Delta_\beta^\alpha(\lambda^2) \\ &\quad - 2\varepsilon_{\lambda\mu\nu\alpha} (k_2 + k_3)^\beta (k_3 - k_1)^\nu \Delta_\beta^\alpha(\lambda^2) \\ &\quad + 2\varepsilon_{\lambda\mu\nu\alpha} (-k_1 + k_3)^\nu (k_3 + k_2)^\beta \Delta_\beta^\alpha(\lambda^2) + 2m \left\{ T_{\lambda\mu}^{AAP} \right\}, \end{aligned} \quad (7.42)$$

que, identificando as amplitude AV e VA , nos permite escrever:

$$p^\nu T_{\lambda\mu\nu}^{AAA} = T_{\lambda\mu}^{AV}(k_3, k_2; m) - T_{\lambda\mu}^{VA}(k_3, k_1; m) + 2m T_{\lambda\mu}^{AAP}, \quad (7.43)$$

que é a relação esperada.

E, por último, a contração do momento externo $(q + p)^\lambda$ com a amplitude AAA forneceu:

$$\begin{aligned} (p + q)^\lambda T_{\lambda\mu\nu}^{AAA} &= -2\varepsilon_{\lambda\nu\alpha\beta} q^\lambda p^\beta \Delta_\mu^\alpha(\lambda^2) - 2\varepsilon_{\lambda\mu\alpha\beta} p^\lambda q^\beta \Delta_\nu^\alpha(\lambda^2) \\ &\quad - 2(p + q)^\lambda \varepsilon_{\lambda\mu\nu\alpha} (k_3 + k_2)^\zeta \Delta_\zeta^\alpha(\lambda^2) - 2m \left\{ T_{\mu\nu}^{PAA} \right\} \\ &\quad - 4\varepsilon_{\lambda\mu\nu\alpha} p^\lambda q^\alpha \frac{i}{(4\pi)^2}. \end{aligned} \quad (7.44)$$

Então, reorganizando, teremos:

$$\begin{aligned} (p + q)^\lambda T_{\lambda\mu\nu}^{AAA} &= 2p^\lambda q^\beta \left[-\varepsilon_{\alpha\nu\lambda\beta} \Delta_\mu^\alpha(\lambda^2) - \varepsilon_{\mu\alpha\lambda\beta} \Delta_\nu^\alpha(\lambda^2) - \varepsilon_{\mu\nu\alpha\beta} \Delta_\lambda^\alpha(\lambda^2) - \varepsilon_{\mu\nu\lambda\alpha} \Delta_\beta^\alpha(\lambda^2) \right] + \\ &\quad - 2p^\lambda \varepsilon_{\lambda\mu\nu\alpha} (k_2 + k_1)^\beta \Delta_\beta^\alpha(\lambda^2) - 2q^\lambda \varepsilon_{\lambda\mu\nu\alpha} (k_3 + k_1)^\beta \Delta_\beta^\alpha(\lambda^2) + \\ &\quad - 4\varepsilon_{\lambda\mu\nu\alpha} p^\lambda q^\alpha \frac{i}{(4\pi)^2} - 2m \left\{ T_{\mu\nu}^{PAA} \right\}, \end{aligned} \quad (7.45)$$

e, utilizando a identidade de Shouten, Eq. (7.11), teremos:

$$(p+q)^\lambda T_{\lambda\mu\nu}^{AAA} = 2p^\lambda \varepsilon_{\mu\nu\alpha\lambda} (k_2+k_1)^\beta \Delta_\beta^\alpha (\lambda^2) - 2q^\lambda \varepsilon_{\nu\mu\alpha\lambda} (k_3+k_1)^\beta \Delta_\beta^\alpha (\lambda^2) - 2m \left\{ T_{\mu\nu}^{PAA} \right\} - 4p^\lambda q^\beta \varepsilon_{\mu\nu\lambda\beta} \left[\frac{1}{2} \frac{i}{(4\pi)^2} + \Delta_\alpha^\alpha \right]. \quad (7.46)$$

Portanto, identificando a amplitude VA, teremos:

$$(p+q)^\lambda T_{\lambda\mu\nu}^{AAA} = T_{\mu\nu}^{VA}(k_1, k_2; m) - T_{\nu\mu}^{VA}(k_3, k_1; m) - 2m T_{\mu\nu}^{PAA} - 4p^\lambda q^\beta \varepsilon_{\mu\nu\lambda\beta} \left[\frac{1}{2} \frac{i}{(4\pi)^2} + \Delta_\alpha^\alpha \right]. \quad (7.47)$$

Assim, a relação esperada para a amplitude AAA, referente a essa contração, será satisfeita se, e somente se, a condição (7.15) for satisfeita. Vamos, a partir deste momento, nos referir aos termos associados a esta condição como termos anômalos.

Então, verificamos que todas as relações entre funções de Green para as amplitudes triangulares ditas anômalas; AVV, VAV, VVA e AAA, são preservadas pelas operações efetuadas se a condição (7.15) o for. Caso a referida condição não puder ser satisfeita a linearidade da operação de integração terá sido comprometida em alguma das operações realizadas retirando a credibilidade do método que utilizamos para explicitar as amplitudes. Discutiremos isto em breve.

7.5 Verificação das identidades de Ward para as amplitudes triangulares anômalas

No seção precedente verificamos todas as relações entre funções de Green para as amplitudes AVV, VAV, VVA e AAA. Vamos agora considerar as identidades de Ward.

Inicialmente notemos um importante fato a respeito das amplitudes: elas possuem um termo ambíguo, como consequência da presença de integrais linearmente divergentes nas suas expressões dadas pelas regras de Feynman, que são:

$$T_{\lambda\mu\nu}^{AVV} \Big|_{ambíguo} = 2\varepsilon_{\lambda\mu\nu\alpha} (k_3 + k_2)^\zeta \Delta_\zeta^\alpha (\lambda^2) \quad (7.48)$$

$$T_{\lambda\mu\nu}^{VAV} \Big|_{ambíguo} = -2\varepsilon_{\lambda\mu\nu\alpha} (k_3 + k_2)^\zeta \Delta_\zeta^\alpha (\lambda^2) \quad (7.49)$$

$$T_{\lambda\mu\nu}^{VVA} \Big|_{ambíguo} = 2\varepsilon_{\lambda\mu\nu\alpha} (k_3 + k_2)^\zeta \Delta_\zeta^\alpha (\lambda^2) \quad (7.50)$$

$$T_{\lambda\mu\nu}^{AAA} \Big|_{ambíguo} = -2\varepsilon_{\lambda\mu\nu\alpha} (k_3 + k_2)^\zeta \Delta_\zeta^\alpha (\lambda^2). \quad (7.51)$$

Estes termos têm origem nos termos correspondentes às subamplitudes vetoriais;

$$T_{\lambda\mu\nu}^{AVV} \Big|_{ambíguo} = F_{\lambda\mu\nu} - \varepsilon_{\lambda\mu\nu\alpha} \{T_\alpha^{VPP}\} \Big|_{ambíguo} = -\varepsilon_{\lambda\mu\nu\alpha} \{T_\alpha^{VPP}\} \Big|_{ambíguo} \quad (7.52)$$

$$T_{\lambda\mu\nu}^{VAV} \Big|_{ambíguo} = F_{\lambda\mu\nu} + \varepsilon_{\lambda\mu\nu\alpha} \{T_\alpha^{ASP}\} \Big|_{ambíguo} = \varepsilon_{\lambda\mu\nu\alpha} \{T_\alpha^{ASP}\} \Big|_{ambíguo} \quad (7.53)$$

$$T_{\lambda\mu\nu}^{VVA} \Big|_{ambíguo} = F_{\lambda\mu\nu} - \varepsilon_{\lambda\mu\nu\alpha} \{T_\alpha^{APS}\} \Big|_{ambíguo} = -\varepsilon_{\lambda\mu\nu\alpha} \{T_\alpha^{APS}\} \Big|_{ambíguo} \quad (7.54)$$

e

$$T_{\lambda\mu\nu}^{AAA} \Big|_{ambíguo} = F_{\lambda\mu\nu} + \varepsilon_{\lambda\mu\nu\alpha} \{T_\alpha^{VSS}\} \Big|_{ambíguo} = \varepsilon_{\lambda\mu\nu\alpha} \{T_\alpha^{VSS}\} \Big|_{ambíguo}, \quad (7.55)$$

uma vez que

$$F_{\lambda\mu\nu} \Big|_{ambíguo} = 0. \quad (7.56)$$

Deste modo a análise das identidades de Ward fica facilitada pois somos obrigados a transportar as conclusões retiradas naquela ocasião para a presente discussão. Assim temos duas fontes possíveis para a violação das identidades de Ward: termos ambíguos diferentes de zero:

$$(k_3 + k_2)^\zeta \Delta_\zeta^\alpha (\lambda^2) \neq 0, \quad (7.57)$$

e presença de termos anômalos nas identidades se

$$\left[\frac{1}{2} \frac{i}{(4\pi)^2} + \Delta_\alpha^\alpha \right] \neq 0. \quad (7.58)$$

A primeira condição permite funções AV's não nulas e a segunda permite a violação da linearidade na operação de integração. Analisaremos esta situação em breve.

7.6 Verificação dos limites de baixa energia para as amplitudes triangulares anômalas

Agora, estamos aptos a considerar o último ingrediente para a investigação das amplitudes AVV , VAV , VVA e AAA : os limites de baixa-energia. No capítulo 5 estabelecemos expectativas a respeito do comportamento da contração das amplitudes pseudo tensoriais de terceira ordem com os momentos externos, em uma situação cinemática específica. Nosso ponto de partida será então o resultado obtido para cada contração.

Para a amplitude AVV obtivemos:

$$p_\nu T_{\lambda\mu\nu}^{AVV} = T_{\lambda\mu}^{AV}(k_3, k_2; m) - T_{\lambda\mu}^{AV}(k_3, k_1; m), \quad (7.59)$$

$$q_\mu T_{\lambda\mu\nu}^{AVV} = T_{\lambda\nu}^{AV}(k_1, k_2; m) - T_{\lambda\nu}^{AV}(k_3, k_2; m), \quad (7.60)$$

$$r_\lambda T_{\lambda\mu\nu}^{AVV} = T_{\mu\nu}^{AV}(k_1, k_2; m) - T_{\nu\mu}^{AV}(k_3, k_1; m), \\ -2mT_{\mu\nu}^{PVV} - 4\varepsilon_{\mu\nu\lambda\beta} q^\beta p^\lambda \left[\frac{1}{2} \frac{i}{(4\pi)^2} + \Delta_\alpha^\alpha \right]. \quad (7.61)$$

Estes resultados refletem claramente que os limites de baixa energia estabelecidos:

$$F_1|_{p^2=p, q=0} = 0 \quad (7.62)$$

e

$$F_2|_{q^2=p, q=0} = 0 \quad (7.63)$$

são satisfeitos. Quanto à predição

$$\Gamma^{PVV}(p, q)|_{p^2=q^2=p, q=0} = 0, \quad (7.64)$$

ela é claramente não satisfeita pois a amplitude PVV é finita e dada por

$$\left[-(4\pi)^2 i \right] T_{\mu\nu}^{PVV} = (4m) p^\eta q^\theta \xi_{00}^{\xi-1} \varepsilon_{\mu\nu\theta\eta}. \quad (7.65)$$

Tendo em vista que

$$\xi_{00}^{\xi-1}(p, q; m) = \int_0^1 dz \int_0^{1-z} dy \frac{1}{q^2(1-z)z + p^2(1-y)y - 2p \cdot q(zy) - m^2}, \quad (7.66)$$

e, portanto:

$$\xi_{00}^{-1} \Big|_{p^2=q^2=p, q=0} = \int_0^1 dz \int_0^{1-z} dy \left[\frac{1}{-m^2} \right] = -\frac{1}{2m^2}, \quad (7.67)$$

teremos:

$$\Gamma^{PVV}(p, q) \Big|_{p^2=q^2=p, q=0} \neq 0. \quad (7.68)$$

Obviamente, a presença do possível termo anômalo na contração com o momento r pode alterar o limite de baixa energia para a amplitude AVV mas a predição sobre a amplitude PVV é inevitavelmente violada e, sendo uma amplitude finita, esta violação está livre das discussões envolvendo termos ambíguos. Voltaremos a isso no próximo capítulo.

Para os limites de baixa energia envolvendo a amplitude VAV, cujas contrações exibiram:

$$(k_3 - k_1)^\mu T_{\lambda\mu\nu}^{VAV} = T_{\lambda\nu}^{AV}(k_1, k_2; m) + T_{\lambda\nu}^{VA}(k_3, k_2; m) + 2mT_{\lambda\nu}^{VPV}, \quad (7.69)$$

$$(k_1 - k_2)^\nu T_{\lambda\mu\nu}^{VAV} = T_{\lambda\mu}^{VA}(k_3, k_2; m) - T_{\lambda\mu}^{VA}(k_3, k_1; m), \quad (7.70)$$

$$(k_3 - k_2)^\lambda T_{\lambda\mu\nu}^{VAV} = T_{\mu\nu}^{AV}(k_1, k_2; m) - T_{\nu\mu}^{VA}(k_3, k_1; m) T_{\lambda\mu\nu}^{AVV} - 4p^\lambda q^\beta \varepsilon_{\mu\nu\lambda\beta} \left[\frac{1}{2} \frac{i}{(4\pi)^2} + \Delta_\alpha^\alpha \right], \quad (7.71)$$

as conclusões são semelhantes. O limite para a amplitude VPV não é obedecido, uma vez que:

$$\Gamma^{VPV}(p, q) \Big|_{p^2=q^2=p, q=0} \neq 0. \quad (7.72)$$

e o limite

$$(k_3 - k_2)^\lambda T_{\lambda\mu\nu}^{VAV} \Big|_{p^2=q^2=p, q=0} = T_{\mu\nu}^{AV}(k_1, k_2; m) - T_{\nu\mu}^{VA}(k_3, k_1; m) \Big|_{p^2=q^2=p, q=0} \quad (7.73)$$

diferirá do previsto se o termo anômalo for não nulo.

Para a amplitude VVA, para a qual obtivemos:

$$(k_3 - k_1)^\mu T_{\lambda\mu\nu}^{VVA} = T_{\lambda\nu}^{VA}(k_1, k_2; m) - T_{\lambda\nu}^{VA}(k_3, k_2; m), \quad (7.74)$$

$$(k_1 - k_2)^\nu T_{\lambda\mu\nu}^{VVA} = T_{\lambda\mu}^{VA}(k_3, k_2; m) - T_{\lambda\mu}^{AV}(k_3, k_1; m) + 2mT_{\lambda\mu}^{VVP}, \quad (7.75)$$

$$(k_3 - k_2)^\lambda T_{\lambda\mu\nu}^{VVA} = T_{\mu\nu}^{VA}(k_1, k_2; m) - T_{\nu\mu}^{AV}(k_3, k_1; m) - 4p^\lambda q^\beta \varepsilon_{\mu\nu\lambda\beta} \left[\frac{1}{2} \frac{i}{(4\pi)^2} + \Delta_\alpha^\alpha \right], \quad (7.76)$$

teremos uma situação completamente similar: violação da predição para a amplitude VVP

$$\Gamma^{VVP}(p, q) \Big|_{p^2=q^2=p, q=0} \neq 0, \quad (7.77)$$

e, possivelmente, violação da predição para a contração com o momento r ;

$$(k_3 - k_2)^\lambda T_{\lambda\mu\nu}^{VVA} \Big|_{p^2=q^2=p, q=0} = T_{\mu\nu}^{VA}(k_1, k_2; m) - T_{\nu\mu}^{AV}(k_3, k_1; m) \Big|_{p^2=q^2=p, q=0}, \quad (7.78)$$

devido à presença do termo anômalo.

Finalmente, para a amplitude AAA , para a qual obtivemos:

$$q^\mu T_{\lambda\mu\nu}^{AAA} = T_{\lambda\nu}^{VA}(k_1, k_2; m) - T_{\lambda\nu}^{AV}(k_3, k_2; m) + 2mT_{\lambda\nu}^{APA}, \quad (7.79)$$

$$p^\nu T_{\lambda\mu\nu}^{AAA} = T_{\lambda\mu}^{AV}(k_3, k_2; m) - T_{\lambda\mu}^{VA}(k_3, k_1; m) + 2mT_{\lambda\mu}^{AAP}, \quad (7.80)$$

$$(p + q)^\lambda T_{\lambda\mu\nu}^{AAA} = T_{\mu\nu}^{VA}(k_1, k_2; m) - T_{\nu\mu}^{VA}(k_3, k_1; m) - 2mT_{\mu\nu}^{PAA} - 4p^\lambda q^\beta \varepsilon_{\mu\nu\lambda\beta} \left[\frac{1}{2} \frac{i}{(4\pi)^2} + \Delta_\alpha^\alpha \right], \quad (7.81)$$

tendo em vistas que,

$$\Gamma_{\mu\nu}^{PAA} = \left(\frac{i}{(4\pi)} \right) 8m \left[\xi_{01}^{-1} + \xi_{10}^{-1} - \frac{1}{2} \xi_{00}^{-1} \right] \quad (7.82)$$

$$\Gamma_{\mu\nu}^{APA} = \left(\frac{i}{(4\pi)} \right) 8m \left[\xi_{01}^{-1} - \frac{1}{2} \xi_{00}^{-1} \right] \quad (7.83)$$

$$\Gamma_{\mu\nu}^{AAP} = \left(-\frac{i}{(4\pi)} \right) 8m \left[\xi_{10}^{-1} - \frac{1}{2} \xi_{00}^{-1} \right], \quad (7.84)$$

e, ainda, que:

$$\xi_{00}^{-1}(p, q; m) \Big|_{p^2=q^2=(p \cdot q)=0} = -\frac{1}{m^2} \int_0^1 dz \int_0^{1-z} dy = -\frac{1}{2m^2} \quad (7.85)$$

$$\xi_{01}^{-1}(p, q; m) \Big|_{p^2=q^2=(p \cdot q)=0} = -\frac{1}{m^2} \int_0^1 dz \int_0^{1-z} dy(z) = -\frac{1}{6m^2} \quad (7.86)$$

$$\xi_{10}^{-1}(p, q; m) \Big|_{p^2=q^2=(p \cdot q)=0} = \int_0^1 dz \int_0^{1-z} dy \frac{y}{-m^2} = -\frac{1}{6m^2}, \quad (7.87)$$

teremos que os limites:

$$F_1 \Big|_{p^2=(p \cdot q)=0} = 2m\Gamma^{AAP} \Big|_{p^2=p \cdot q=0} \quad (7.88)$$

$$F_2 \Big|_{q^2=(p \cdot q)=0} = 2m\Gamma^{APA} \Big|_{q^2=p \cdot q=0}, \quad (7.89)$$

são preservados, mas

$$\Gamma^{APA} \Big|_{p^2=q^2=p \cdot q=0} - \Gamma^{AAP} \Big|_{p^2=q^2=p \cdot q=0} \neq \Gamma^{PAA} \Big|_{p^2=q^2=p \cdot q=0}. \quad (7.90)$$

Por sua vez, o limite $(p+q)^\lambda T_{\lambda\mu\nu}^{AAA} \Big|_{p^2=q^2=p \cdot q=0}$, obviamente, dependerá da existência ou não do termo anômalo.

Agora estamos prontos para produzir conclusões.

8 ANÁLISE DOS RESULTADOS E CONCLUSÕES

Nos capítulos anteriores obtivemos resultados para as amplitudes pseudotensoriais de terceira ordem, conhecidas como amplitudes anômalas, bem como para as contrações das amplitudes com os momentos externos, expressões sobre as quais estabelecemos as propriedades de simetria das amplitudes. As operações realizadas sobre as formas ditadas pelas regras de Feynman, o que inclui a presença de integrais divergentes, foram feitas seguindo uma estratégia específica em que as amplitudes não são modificadas em passos intermediários e apenas a validade da propriedade de linearidade nas integrais de Feynman é assumida. Nenhuma integração é feita em estruturas divergentes. Estas são preservadas em formas padronizadas de modo conveniente. Conveniente porquê separa as formas possíveis em objetos ditos irreduzíveis e em combinações resultantes em integrandos que são derivadas totais, ou seja, termos de superfície. A presença destes termos é esperada quando o grau de divergência supera o logarítmico devido ao fato de *shifts* na variável de integração exigirem compensações que são termos de superfície. Deste modo é esperado e inevitável a presença de termos ambíguos em amplitudes perturbativas em qualquer prescrição matematicamente honesta. Por esta razão, termos ambíguos inevitáveis tornam o cálculo perturbativo, baseado em regras de Feynman, não preditivo. Estes termos são esperados serem também violadores de propriedades de simetria das amplitudes uma vez que estas são deduzidas sobre a hipótese de que as amplitudes são quantidades físicas (livres de ambiguidades). Estes fatos puderam ser claramente apreciados nos cálculos que produzimos. Ao final, em todos os resultados, apenas dois objetos matemáticos permaneceram indefinidos, pois envolvem integrais divergentes. Os termos anômalos presentes estão associados ao objeto $\Delta_\alpha^\alpha(\lambda^2)$, ao passo que as violações de identidades de Ward estão associadas ao objeto $\Delta_\beta^\alpha(\lambda^2)$. Estes dois objetos, por sua vez estão associados pois $\Delta_\alpha^\alpha(\lambda^2)$ é o traço do tensor $\Delta_\beta^\alpha(\lambda^2)$ de modo que, evidentemente, os valores de ambos estão relacionados.

8.1 O objeto $\Delta_\alpha^\alpha(\lambda^2)$ e os termos anômalos

Antes de produzir conclusões temos que considerar os valores assumidos por tais quantidades. Primeiramente consideremos o objeto $\Delta_\alpha^\alpha(\lambda^2)$, definido por:

$$\delta_\alpha^\alpha(\lambda^2) = \left[\frac{k^2}{(k^2 - \lambda^2)^3} - \frac{1}{(k^2 - \lambda^2)^2} \right], \quad (8.1)$$

que é a forma como surge o objeto $\Delta_\alpha^\alpha(\lambda^2)$, antes de somarmos sobre todos os momentos do *loop*, última regra de Feynman. Diante desta expressão, obviamente, poderíamos reescrevê-la como

$$\delta_\alpha^\alpha(\lambda^2) = \left[\frac{k^2 - (k^2 - \lambda^2)}{(k^2 - \lambda^2)^3} \right] = \lambda^2 \frac{1}{(k^2 - \lambda^2)^3}. \quad (8.2)$$

Deste modo, assumindo a linearidade como uma operação válida para a integração,

$$\Delta_\alpha^\alpha(\lambda^2) = \lambda^2 \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{1}{(k^2 - \lambda^2)^3} = \lambda^2 \left(\frac{i}{(4\pi)^2} \right) \frac{\Gamma(1)}{\Gamma(3)(-\lambda^2)} = - \left(\frac{i}{(4\pi)^2} \frac{1}{2} \right). \quad (8.3)$$

Portanto, a existência do termo anômalo, que, como vimos, depende da condição:

$$\left[\frac{1}{2} \frac{i}{(4\pi)^2} + \Delta_\alpha^\alpha \right] \neq 0 \quad (8.4)$$

é proibida uma vez que esta condição se anula identicamente. Não há qualquer cálculo honesto capaz de produzir um resultado diferente de

$$\left[\frac{i}{(4\pi)^2} + 2\Delta_\alpha^\alpha \right] = 0. \quad (8.5)$$

Com isso todas as relações entre funções de Green pertinentes às pseudo amplitudes tensoriais de terceira ordem são preservadas. A linearidade na operação de integração é mantida nas operações realizadas.

8.2 O objeto $\Delta_\beta^\alpha(\lambda^2)$ e as ambiguidades

Nas expressões para os termos ambíguos, invariavelmente, aparece o objeto $\Delta_\beta^\alpha(\lambda^2)$. Isto é esperado e se deve ao fato de estes termos serem termos de superfície. Nós primeiramente nos questionamos se este termo pode ser nulo, uma vez que isto seria muito conveniente. A resposta é simples: NÃO! Em qualquer cálculo honesto estes termos não podem ser assumidos nulos pois isto violaria um teorema simples do cálculo integral a respeito de uma mudança de variável efetuada em uma integral com divergência superior à logarítmica. Pudessem ser ignorados, não haveria necessidade do referido teorema. Além disso, consideremos a identidade de Shouten;

$$\varepsilon_{\alpha\nu\lambda\beta}\Delta_\mu^\alpha(\lambda^2) + \varepsilon_{\mu\alpha\lambda\beta}\Delta_\nu^\alpha(\lambda^2) + \varepsilon_{\mu\nu\alpha\beta}\Delta_\lambda^\alpha(\lambda^2) + \varepsilon_{\mu\nu\lambda\alpha}\Delta_\beta^\alpha(\lambda^2) = \varepsilon_{\mu\nu\lambda\beta}\Delta_\alpha^\alpha(\lambda^2), \quad (8.6)$$

que relaciona o tensor a seu traço. Não há maneiras de satisfazer esta identidade a não ser: $\Delta_\alpha^\alpha(\lambda^2) = \Delta_\mu^\mu(\lambda^2) = 0$ ou $\Delta_\alpha^\alpha(\lambda^2) \neq 0$ e $\Delta_\mu^\mu(\lambda^2) \neq 0$. Se concluirmos, sem qualquer dúvida, que $\Delta_\alpha^\alpha(\lambda^2) \neq 0$, não podemos assumir como nulo o termo de superfície $\Delta_\mu^\alpha(\lambda^2)$. Se fizermos isso a determinação das amplitudes não se dará de forma unívoca pois dependerá da ordem das operações. Neste caso o valor para o objeto $\Delta_{\mu\nu}(\lambda^2)$ pode ser facilmente obtido, utilizando a propriedade:

$$\int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} k_\mu k_\nu f(k^2) = \frac{g_{\mu\nu}}{4} \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} k^2 f(k^2). \quad (8.7)$$

Isto fornecerá:

$$\begin{aligned} \Delta_{\mu\nu}(\lambda^2) &= \frac{ig_{\mu\nu}}{(4\pi)^2} \int_\Lambda \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{4k_\mu k_\nu}{(k^2 - \lambda^2)^3} - \int_\Lambda \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{g_{\mu\nu}}{(k^2 - \lambda^2)^2} \\ &= \int_\Lambda \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{\partial}{\partial k_\mu} \left(-\frac{k_\nu}{(k^2 - \lambda^2)^2} \right) = \frac{ig_{\mu\nu}}{(4\pi)^2}. \end{aligned} \quad (8.8)$$

O resultado satisfaz à identidade de Schouten acima e, além disso, não é possível encontrar uma distribuição $G(k^2, \Lambda^2)$ tal que (BATTISTEL; DALLABONA; REIS, 2018):

$$\Delta_{\mu\nu}(\lambda^2) = \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} G(k^2, \Lambda^2) \frac{\partial}{\partial k_\mu} \left(-\frac{k_\nu}{(k^2 - \lambda^2)^2} \right) \neq \frac{ig_{\mu\nu}}{(4\pi)^2}, \quad (8.9)$$

quando $\lim_{\Lambda^2 \rightarrow \infty} G_\Lambda(k, \Lambda^2) = 1$.

Embora consistente e honesto este resultado é, de certo modo, indesejável, pois torna as amplitudes do cálculo perturbativo invariavelmente quantidades ambíguas e potencialmente com simetrias quebradas. Será necessário neste caso escolher rótulos convenientes para os momentos das linhas internas para eliminar os termos ambíguos e violadores das relações de simetria.

8.3 Amplitudes e suas propriedades

Nas amplitudes com dois propagadores internos o termo ambíguo é a combinação: $Q = k_1 + k_3$. Se escolhêssemos $k_1 = \frac{q}{2}$ e $k_3 = -\frac{q}{2}$, os termos ambíguos seriam automaticamente eliminados. Como consequência teríamos;

$$T_{\mu\nu}^{AV} = 2\varepsilon_{\mu\nu\theta\beta} q^\beta Q_\alpha \Delta^{\theta\alpha}(\lambda^2) = 0. \quad (8.10)$$

Para as amplitudes vetoriais que consideramos no capítulo 4, escolhendo

$$\begin{aligned} k_1 &= \frac{q-p}{2} \\ k_2 &= -\frac{p+q}{2} \\ k_3 &= \frac{p+q}{2}, \end{aligned} \quad (8.11)$$

teríamos todos os termos ambíguos nulos, uma vez que possuem a estrutura $k_3 + k_2$. E sendo que as amplitudes vetoriais são as fontes das ambiguidades das pseudo tensoriais de terceira ordem, elas estariam automaticamente livres de ambiguidades.

A situação seria então:

$$p_\nu T_{\lambda\mu\nu}^{AVV} = 0, \quad (8.12)$$

$$q_\mu T_{\lambda\mu\nu} = 0, \quad (8.13)$$

$$r_\lambda T_{\lambda\mu\nu}^{AVV} = -2mT_{\mu\nu}^{PVV}, \quad (8.14)$$

$$(k_3 - k_1)^\mu T_{\lambda\mu\nu}^{VAV} = 2mT_{\lambda\nu}^{VPV}, \quad (8.15)$$

$$(k_1 - k_2)^\nu T_{\lambda\mu\nu}^{VAV} = 0, \quad (8.16)$$

$$(k_3 - k_2)^\lambda T_{\lambda\mu\nu}^{VAV} = 0, \quad (8.17)$$

$$(k_3 - k_1)^\mu T_{\lambda\mu\nu}^{VVA} = 0, \quad (8.18)$$

$$(k_1 - k_2)^\nu T_{\lambda\mu\nu}^{VVA} = 2mT_{\lambda\mu}^{VVP}, \quad (8.19)$$

$$(k_3 - k_2)^\lambda T_{\lambda\mu\nu}^{VVA} = 0, \quad (8.20)$$

$$q^\mu T_{\lambda\mu\nu}^{AAA} = 2mT_{\lambda\nu}^{APA}, \quad (8.21)$$

$$p^\nu T_{\lambda\mu\nu}^{AAA} = 2mT_{\lambda\mu}^{AAP}, \quad (8.22)$$

$$(p+q)^\lambda T_{\lambda\mu\nu}^{AAA} = -2mT_{\mu\nu}^{PAA}. \quad (8.23)$$

Ou seja, nenhuma violação de identidade de Ward seria possível. Entretanto, teríamos ainda que considerar os limites de baixa energia.

Neste caso as previsões estabeleceriam:

$$r_\lambda T_{\lambda\mu\nu}^{AVV} \Big|_{p^2=q^2=p.q=0} = -2m T_{\mu\nu}^{PVV} \Big|_{p^2=q^2=p.q=0} = 0 \quad (8.24)$$

o que seria violado, uma vez que, como vimos,

$$\Gamma^{PVV}(p, q) \Big|_{p^2=q^2=p.q=0} \neq 0, \quad (8.25)$$

de modo inevitável e inquestionável.

Do mesmo modo a previsão:

$$\Gamma^{APA} \Big|_{p^2=q^2=p.q=0} - \Gamma^{AAP} \Big|_{p^2=q^2=p.q=0} = \Gamma^{PAA} \Big|_{p^2=q^2=p.q=0}, \quad (8.26)$$

também seria violada. Estamos portanto diante do fenômeno das anomalias triangulares. Não há como satisfazer simultaneamente as quatro propriedades de simetria: três identidades de Ward e um limite da baixa energia.

Na sequência de passos que utilizamos, impomos primeiro a validade da linearidade na operação de integração através da condição $\Delta_\alpha^\alpha(\lambda^2) \neq 0$, que elimina a possibilidade de termos anômalos. A seguir, por consistência, adotamos o termo de superfície $\Delta_{\theta\alpha}(\lambda^2) \neq 0$ e escolhemos os momentos das linhas internas convenientemente de modo a eliminar os termos ambíguos. O último passo é uma intervenção no resultado. Não é matemática mas conveniência. É preciso usar o formalismo de modo esperto e não do modo automático. O cálculo perturbativo não é preditivo. As amplitudes ditas anômalas têm suas identidades de Ward aparentemente satisfeitas mas há pelo menos uma situação cinemática que as amplitudes contraídas com seus momentos externos não correspondem ao valor estabelecido pelo limite de baixa energia correspondente. Seriam estas amplitudes as únicas do cálculo perturbativo para as quais este limite é violado quando as identidades de Ward são satisfeitas? Se a resposta fosse sim elas mereceriam o *status* de excessão, mas o que ocorre é, precisamente o contrário.

Neste momento nos deparamos com um dilema: o limite de baixa energia,

$$r_\lambda T_{\lambda\mu\nu}^{AVV} \Big|_{p^2=q^2=p.q=0} = 0, \quad (8.27)$$

precisa ser satisfeito por razões fenomenológicas (o decaimento eletromagnético do pión neutro). Um cálculo honesto não parece capaz de permitir este resultado. Quais as opções que teríamos para obter o resultado desejado? Obviamente, a resposta vem do lado direito da equação:

$$r_\lambda T_{\lambda\mu\nu}^{AVV} = T_{\mu\nu}^{AV}(k_1, k_2; m) - T_{\nu\mu}^{AV}(k_3, k_1; m) - 2mT_{\mu\nu}^{PVV} - 4\varepsilon_{\mu\nu\lambda\beta} q^\beta p^\lambda \left[\frac{1}{2} \frac{i}{(4\pi)^2} + \Delta_\alpha^\alpha \right]. \quad (8.28)$$

Devemos assumir $\Delta_\alpha^\alpha = \Delta_\beta^\beta = 0$. Com isso, todas as ambiguidades seriam automaticamente eliminadas e a amplitude AV seria identicamente nula. Para a amplitude AVV ficaríamos com

$$p_\nu T_{\lambda\mu\nu}^{AVV} = 0 \quad (8.29)$$

$$q_\mu T_{\lambda\mu\nu} = 0 \quad (8.30)$$

$$r_\lambda T_{\lambda\mu\nu}^{AVV} = -2mT_{\mu\nu}^{PVV} - 2\varepsilon_{\mu\nu\lambda\beta} q^\beta p^\lambda \left[\frac{2i}{(4\pi)^2} \right] \quad (8.31)$$

A terceira equação revela violação da identidade de Ward axial (e da linearidade da operação de integração). Entretanto para o limite de baixa energia teremos:

$$r_\lambda T_{\lambda\mu\nu}^{AVV} \Big|_{p^2=q^2=p \cdot q=0} = -2mT_{\mu\nu}^{PVV} - 2\varepsilon_{\mu\nu\lambda\beta} q^\beta p^\lambda \left[\frac{2i}{(4\pi)^2} \right] \Big|_{p^2=q^2=p \cdot q=0} = 0, \quad (8.32)$$

salvando a fenomenologia. Este é o resultado perfeito para a construção do mecanismo de cancelamento de anomalias: identidade de Ward para a corrente axial violada, identidades de Ward para a corrente vetorial preservadas e limite de baixa energia satisfeito. O sucesso, entretanto, é falso pois seguindo o mesmo procedimento teríamos para a amplitude VAV:

$$(k_3 - k_1)^\mu T_{\lambda\mu\nu}^{VAV} = 2mT_{\lambda\nu}^{V PV} \quad (8.33)$$

$$(k_1 - k_2)^\nu T_{\lambda\mu\nu}^{VAV} = 0 \quad (8.34)$$

$$(k_3 - k_2)^\lambda T_{\lambda\mu\nu}^{VAV} = -2p^\lambda q^\beta \varepsilon_{\mu\nu\lambda\beta} \left[\frac{2i}{(4\pi)^2} \right], \quad (8.35)$$

para a amplitude VVA:

$$(k_3 - k_1)^\mu T_{\lambda\mu\nu}^{VVA} = 0 \quad (8.36)$$

$$(k_1 - k_2)^\nu T_{\lambda\mu\nu}^{VVA} = 2mT_{\lambda\mu}^{VVP} \quad (8.37)$$

$$(k_3 - k_2)^\lambda T_{\lambda\mu\nu}^{VVA} = -2p^\lambda q^\beta \varepsilon_{\mu\nu\lambda\beta} \left[\frac{2i}{(4\pi)^2} \right] \quad (8.38)$$

e, para a amplitude AAA:

$$q^\mu T_{\lambda\mu\nu}^{AAA} = 2mT_{\lambda\nu}^{APA} \quad (8.39)$$

$$p^\nu T_{\lambda\mu\nu}^{AAA} = 2mT_{\lambda\mu}^{AAP}, \quad (8.40)$$

$$(p+q)^\lambda T_{\lambda\mu\nu}^{AAA} = -2mT_{\mu\nu}^{PAA} - 2p^\lambda q^\beta \varepsilon_{\mu\nu\lambda\beta} \left[\frac{2i}{(4\pi)^2} \right]. \quad (8.41)$$

A identidade de Ward que está sendo violada na amplitude AVV , para restabelecer o limite de baixa energia, não é a axial, mas aquela que aparece no vértice do estado inicial, onde se conecta o momento $r = p + q$. Nas amplitudes VAV e VVA uma identidade de Ward vetorial é violada e na amplitude AAA somente uma das axiais é violada. Não há consistência. É preciso saber o resultado para poder obtê-lo.

Finalmente, apenas por completeza, poderíamos considerar assumirmos a possibilidade $\Delta_\alpha^\alpha \neq 0$ e $\Delta_\beta^\alpha = 0$. Isto ocorre em alguns cálculos sem que seja percebido. O termo Δ_α^α aparece em meio a integrais finitas e é avaliado com resultado não nulo. O termo Δ_β^α é calculado pela regularização dimensional com resultado nulo. Claramente, estes dois resultados são incompatíveis mas suas consequências são, por vezes, comemoradas. Um tensor não pode ser zero e seu traço não. A identidade de Shouten proíbe esta possibilidade. A consequência imediata seria a não unicidade dos resultados, pois dependeria da sequência de passos. Por exemplo, ao calcularmos a contração:

$$\begin{aligned} (p+q)^\lambda T_{\lambda\mu\nu}^{AVV} = & -2\varepsilon_{\lambda\nu\alpha\beta} q^\lambda p^\beta \Delta_\mu^\alpha (\lambda^2) - 2\varepsilon_{\lambda\mu\alpha\beta} p^\lambda q^\beta \Delta_\nu^\alpha (\lambda^2) + \\ & -2\varepsilon_{\lambda\mu\nu\alpha} (p+q)^\lambda (k_3 + k_2)^\zeta \Delta_\zeta^\alpha (\lambda^2) + \\ & -4\varepsilon_{\lambda\mu\nu\alpha} \left(p^\lambda q^\alpha \frac{i}{(4\pi)^2} \right) - 2m \left(T_{\mu\nu}^{PVV} \right), \end{aligned} \quad (8.42)$$

poderíamos assumir $\Delta_\beta^\alpha = 0$ e obter:

$$(p+q)^\lambda T_{\lambda\mu\nu}^{AVV} = -4\varepsilon_{\lambda\mu\nu\alpha} \left(p^\lambda q^\alpha \frac{i}{(4\pi)^2} \right) - 2m \left(T_{\mu\nu}^{PVV} \right). \quad (8.43)$$

Entretanto, poderíamos utilizar a identidade:

$$\varepsilon_{\alpha\nu\lambda\beta}\Delta_\mu^\alpha + \varepsilon_{\mu\alpha\lambda\beta}\Delta_\nu^\alpha + \varepsilon_{\mu\nu\alpha\beta}\Delta_\lambda^\alpha + \varepsilon_{\mu\nu\lambda\alpha}\Delta_\beta^\alpha = \varepsilon_{\mu\nu\lambda\beta}\Delta_\alpha^\alpha, \quad (8.44)$$

e obter:

$$(p+q)^\lambda T_{\lambda\mu\nu}^{AVV} = -2\varepsilon_{\lambda\mu\nu\alpha} p^\lambda (k_2+k_1)^\beta \Delta_\beta^\alpha (\lambda^2) - 2\varepsilon_{\lambda\mu\nu\alpha} q^\lambda (k_3+k_1)^\beta \Delta_\beta^\alpha (\lambda^2) - 2m \left(T_{\mu\nu}^{PVV} \right) + \\ -4\varepsilon_{\mu\nu\lambda\beta} p^\lambda q^\beta \left[\Delta_\alpha^\alpha (\lambda^2) + \frac{1}{2} \left(\frac{i}{(4\pi)^2} \right) \right]. \quad (8.45)$$

Então assumiríamos $\Delta_\beta^\alpha = 0$ para ficar com;

$$(p+q)^\lambda T_{\lambda\mu\nu}^{AVV} = -2m \left(T_{\mu\nu}^{PVV} \right) - 4\varepsilon_{\mu\nu\lambda\beta} p^\lambda q^\beta \left[\Delta_\alpha^\alpha (\lambda^2) + \frac{1}{2} \left(\frac{i}{(4\pi)^2} \right) \right]. \quad (8.46)$$

Ao assumirmos $\Delta_\alpha^\alpha \neq 0$, teríamos ao final:

$$(p+q)^\lambda T_{\lambda\mu\nu}^{AVV} = -2m \left(T_{\mu\nu}^{PVV} \right). \quad (8.47)$$

Os resultados diferem pelos dois caminhos pelo termo anômalo. Não há como levar adiante outras consequências desta prescrição.

Assim podemos sintetizar aquilo que concluímos com esta investigação:

1) O resultado matematicamente correto e honesto é assumir que os termos de superfície são não nulos (porque de fato o são) e determinar seus valores. Como consequência as amplitudes serão potencialmente ambíguas (porque de fato o são) e as relações de simetria serão violadas. O cálculo perturbativo é intrinsecamente não preditivo. Isto está escrito nas regras de Feynman. Aceitar este fato e tentar encontrar uma interpretação consistente sem violar a matemática e sem abandonar o princípio filosófico de que teorias da física devem ser preditivas é a única atitude a seguir.

2) Escolher os momentos das linhas internas pode ser conveniente mas é aceitar que o formalismo é definitivamente não preditivo sem ter a certeza de que isto sempre poderá fornecer

o resultado desejado para as Identidades de Ward. Além disso, isso não garante os limites de baixa energia satisfeitos. Estes teoremas são consequência da invariância de Lorentz e, portanto, violá-los implica em um tipo sutil de violação da simetria de Lorentz. Este tipo de violação não ocorre apenas nas amplitudes ditas anômalas (BATTISTEL *et al.*, 2018) o que não garante o caráter de excessão que é atribuído a elas para que aceitemos um tratamento de excessão.

3) Assumir algum tipo de prescrição para tornar os termos de superfície nulos representa uma clara tentativa de fraudar a matemática quando esta não nos fornece os resultados que desejamos. Estes termos são previstos existirem quando o grau de divergência superar o logarítmico e fazê-los simplesmente desaparecer nada mais é do que uma fraude conveniente.

Não é possível uma descrição consistente das amplitudes ditas anômalas, no contexto do cálculo perturbativo, onde as amplitudes são determinadas pelas regras de Feynman sem algum elemento novo (BATTISTEL; DALLABONA; REIS, 2018).

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- BATTISTEL, O. A. *Uma Nova Estratégia para Manipulações e Cálculos envolvendo Divergências em TCQ*. Tese (Doutorado) — UFMG, 1999.
- BATTISTEL, O. A. Anomalies in ward identities for three-point functions revisited. *International Journal of Modern Physics A*, v. 17, 2002.
- BATTISTEL, O. A.; DALLABONA, G. Anomalies dismissed of ambiguities and the neutral pion decay. *Journal of Physics G: Nuclear and Particle Physics*, v. 28, n. 10, 2002.
- BATTISTEL, O. A.; DALLABONA, G. From arbitrariness to ambiguities in the evaluation of perturbative physical amplitudes and their symmetry relations. *Physical Review D*, v. 65, n. 12, 2002.
- BATTISTEL, O. A.; DALLABONA, G. A systematization for one-loop 4D Feynman integrals - different species of massive fields. *Journal of Modern Physics*, v. 3, 2012.
- BATTISTEL, O. A.; DALLABONA, G.; FONSECA, M. V. S.; EBANI, L. Can really regularized amplitudes be obtained as consistent with their expected symmetry properties? *Aceito para publicação.*, 2018.
- BATTISTEL, O. A.; DALLABONA, G.; REIS, L. I. Amplitudes triangulares quadridimensionais anômalas. *Em preparação*, 2018.
- BATTISTEL, O. A.; FONSECA, M. V. S.; DALLABONA, G. Anomalies in finite amplitudes: two-dimensional single axial-vector triangle. *Physical Review D*, v. 85, n. 8, 2012.
- BATTISTEL, O. A.; MOTA, A. L.; NEMES, M. C. Consistency conditions for 4-D regularizations. *Modern Physics Letters A*, v. 13, n. 20, 1998.
- CHENG, T.-P.; LI, L.-F. *Gauge theory of elementary particle physics*. Oup. [S.l.]: Clarendon Press ,Oxford, 1988. ISBN 0198519613.
- DAS, A. *Quantum Field Theory*. Hackensack: World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd., 2008.
- EBANI, L. Inevitáveis violações de simetria em cálculos perturbativos de tqc's em dimensão $D = 1 + 1$. Dissertação de Mestrado. 2015.
- FONSECA, M. V. S.; DALLABONA, G.; BATTISTEL, O. A. Perturbative calculations in space-time having extra dimensions: The 6D single axial box anomaly. *International Journal of Modern Physics A*, v. 29, n. 29, 2014.
- GAMBIM, E. Consistência no cálculo perturbativo: A eletrodinâmica quântica e a anomalia *avv*. Dissertação de Mestrado. 2004.
- GOLDSTEIN, H.; POOLE, C.; SAFKO, J. *Classical Mechanics*. Boston: Addison Wesley, 2002.
- GOMES, M. O. C. *Teoria Quântica de Campos*. São Paulo: EDUSP, 2002.
- GRIFFITHS, D. *Introduction to Elementary Particles*. Portland: Reed College Portland, 2008.
- HOOFT, G. t'.; VELTMAN, M. Regularization and renormalization of gauge fields. *Nuclear Physics*, North-Holland Publishing Company, v. 44, 1972.

LEMOS, N. A. *Mecânica Analítica*. São Paulo: Editora Livrariada Física, 2007.

MANDL, M. A. *Introduction to Quantum field theory*. Manchester: Manchester University Press, 1961.

NETO, J. B. *Matemática para Físicos com aplicações*. São Paulo: Editora livraria da fisica, 2010.

PAULI, W.; VILLARS, F. On the invariant regularization in relativistic quantum theory. *Reviews of modern physics*, Zurich, Switzerland, v. 21, n. 3, 1949.

SAKURAI, J. J. *Advanced Quantum Mechanics*. Massachusetts: Addison Wesley reading, 1987.

STAUDT, E. Consistência no cálculo perturbativo tridimensional em teoria quântica de campos: A eletrodinâmica quântica. Dissertação de Mestrado. 2005.

WEINBERG, S. *The Quantum Theory of Fields*. Cambridge: Press Syndicate of the University of Cambridge, 1995.

WITT B.; SMITH, J. D. *Field Theory in Particle Physics*. Amsterdam: North-Holland Physics Publishing, 1986.

A ÁLGEBRA DE DIRAC

Na formulação da mecânica quântica relativística, surgem naturalmente as matrizes de Dirac. Estas, aparecem no desenvolvimento das amplitudes físicas e, por esta razão, são de grande importância nas soluções perturbativas de TQC's. Logo, o desenvolvimento deste trabalho exige o conhecimento da álgebra obedecida por estas matrizes. Neste apêndice, faremos uma apresentação das matrizes de Dirac, assim como, resultados que serão necessários. Aqui consideraremos as matrizes de Dirac e suas propriedades para o caso $D = 3 + 1$. Inicialmente, considerando a representação para as matrizes $\gamma^\mu = (\gamma^0, \gamma^1, \gamma^2, \gamma^3)$, teremos:

$$\gamma^0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad (\text{A.1})$$

$$\gamma^1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (\text{A.2})$$

$$\gamma^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & i & 0 \\ 0 & i & 0 & 0 \\ -i & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (\text{A.3})$$

$$\gamma^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (\text{A.4})$$

As matrizes definidas acima, satisfazem a álgebra:

$$\gamma_\mu \gamma_\nu = -\gamma_\nu \gamma_\mu + 2g_{\mu\nu}I, \quad (\text{A.5})$$

onde I é a matriz identidade. Dessa forma, podemos definir estas matrizes através da seguinte relação:

$$\gamma_{2\omega+1} = \frac{1}{(2\omega)!} \varepsilon_{ab\dots c} \gamma_a \gamma_b \dots \gamma_c, \quad (\text{A.6})$$

e, como:

$$g_{\mu\nu} = \frac{i}{2} [\gamma_\nu \gamma_\mu - \gamma_\mu \gamma_\nu]. \quad (\text{A.7})$$

Podemos obter as seguintes identidades úteis:

$$\gamma_5 \gamma_5 = I \quad (\text{A.8})$$

$$\gamma_\mu \gamma_5 = -\gamma_5 \gamma_\mu. \quad (\text{A.9})$$

A contração das matrizes de Dirac com quadivetores:

$$\not{a} = a_\mu \gamma^\mu \quad (\text{A.10})$$

leva as seguintes identidades:

$$\not{a} \not{b} + \not{b} \not{a} = 2a \cdot b, \quad (\text{A.11})$$

$$\gamma^\mu \not{a} + \not{a} \gamma^\mu = 2a_\mu, \quad (\text{A.12})$$

$$\gamma^\mu \not{a} \not{b} \gamma^\mu = 4a \cdot b, \quad (\text{A.13})$$

e

$$\gamma^\mu \not{a} \gamma^\mu = 2 \not{a}. \quad (\text{A.14})$$

É interessante também considerar os traços envolvendo estas matrizes, temos:

$$\text{Tr}(\gamma_\mu) = 0, \quad (\text{A.15})$$

$$\text{Tr}(\gamma_\mu \gamma_\nu) = \delta_{\mu\nu} \text{Tr}(I) = 4\delta_{\mu\nu}, \quad (\text{A.16})$$

$$\text{Tr}(\gamma_\mu \gamma_\nu \gamma_\alpha) = 0, \quad (\text{A.17})$$

$$\text{Tr}(\gamma_\alpha \gamma_\beta \gamma_\mu \gamma_\nu) = 4\delta_{\alpha\beta} \delta_{\mu\nu} - 4\delta_{\alpha\mu} \delta_{\beta\nu} + 4\delta_{\alpha\nu} \delta_{\beta\mu}, \quad (\text{A.18})$$

$$\text{Tr}(\gamma_\alpha \gamma_\beta \gamma_\mu \gamma_\nu \gamma_\lambda) = 0, \quad (\text{A.19})$$

$$\begin{aligned}
Tr(\gamma_\alpha \gamma_\beta \gamma_\mu \gamma_\nu \gamma_\lambda \gamma_\xi) = & +4\delta_{\alpha\beta} [\delta_{\mu\nu} \delta_{\lambda\xi} - \delta_{\mu\lambda} \delta_{\nu\xi} + \delta_{\mu\xi} \delta_{\nu\lambda}] \\
& -4\delta_{\alpha\mu} [\delta_{\beta\nu} \delta_{\lambda\xi} - \delta_{\beta\lambda} \delta_{\nu\xi} + \delta_{\beta\xi} \delta_{\nu\lambda}] \\
& +4\delta_{\alpha\nu} [\delta_{\beta\mu} \delta_{\lambda\xi} - \delta_{\beta\lambda} \delta_{\mu\xi} + \delta_{\beta\xi} \delta_{\mu\lambda}] \\
& -4\delta_{\alpha\lambda} [\delta_{\beta\xi} \delta_{\mu\nu} - \delta_{\beta\nu} \delta_{\mu\xi} + \delta_{\beta\mu} \delta_{\nu\xi}] \\
& +4\delta_{\alpha\xi} [\delta_{\beta\mu} \delta_{\nu\lambda} - \delta_{\beta\nu} \delta_{\mu\lambda} + \delta_{\beta\lambda} \delta_{\mu\nu}], \tag{A.20}
\end{aligned}$$

$$Tr(\gamma_5) = 0, \tag{A.21}$$

$$Tr(\gamma_5 \gamma_\nu) = 0, \tag{A.22}$$

$$Tr(\gamma_5 \gamma_\nu \gamma_\alpha) = 0, \tag{A.23}$$

$$Tr(\gamma_5 \gamma_\beta \gamma_\mu \gamma_\nu) = 0 \tag{A.24}$$

$$Tr(\gamma_5 \gamma_\mu \gamma_\nu \gamma_\alpha \gamma_\beta) = i\varepsilon_{\mu\nu\alpha\beta}, \tag{A.25}$$

e

$$Tr(\gamma_5 \gamma_\mu \gamma_\nu \gamma_\alpha \gamma_\beta \gamma_\eta) = 0. \tag{A.26}$$

Dessa forma, podemos construir matrizes obedecendo esta álgebra indicada em qualquer dimensão previamente escolhida.

B CÁLCULO DAS INTEGRAIS

Como explicitado no texto, podemos encontrar estas integrais resolvidas em (BATTISTEL; DALLABONA, 2012). Portanto, aqui, iremos resolver duas integrais explicitamente, uma finita e outra divergente, para tal, calcularemos as integrais I_3 e I_2 .

B.1 Cálculo da Integral I_3 :

$$I_3 = \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{1}{\left[(k+k_3)^2 - m^2 \right] \left[(k+k_1)^2 - m^2 \right] \left[(k+k_2)^2 - m^2 \right]} \quad (\text{B.1})$$

Como esta integral é finita, ela pode ser calculada diretamente através das integrais de Feynman. Podemos notar que a integral acima deve assumir a seguinte forma:

$$\frac{1}{abc} = \int_0^1 dz \int_0^{1-z} dy \frac{1}{[(b-a)y + (c-a)z + a]^3}. \quad (\text{B.2})$$

Identificando a , b e c aos propagadores e definindo, $k' = k + [k_1 + (k_2 - k_1)y + (k_3 - k_1)z]$, teremos:

$$[(b-a)y + (c-a)z + a] = (k')^2 + H^2, \quad (\text{B.3})$$

onde definimos:

$$Q(p, y; q, z; m^2) = -H^2 = q^2 z(1-z) + p^2 y(1-y) - 2(p \cdot q)zy - m_1^2. \quad (\text{B.4})$$

Então, depois de substituir o resultado anterior na integral I_3 , devemos realizar a integração sobre os momentos, de forma a obtermos:

$$I_3 = \left(\frac{i}{(4\pi)^2} \right) \int_0^1 dz \int_0^{1-z} dy \frac{1}{Q(y, z)}. \quad (\text{B.5})$$

É útil definirmos a seguinte função:

$$\xi_{nm}^{-1}(m_1^2; p, m_2^2; q, m_3^2) = \int_0^1 dx_1 \int_0^{1-x_1} dx_2 \frac{x_1^n x_2^m}{Q}. \quad (\text{B.6})$$

Dessa forma, obtemos:

$$\xi_{00}^{-1}(m_1^2; p, m_2^2; q, m_3^2) = \int_0^1 dz \int_0^{1-z} dy \frac{1}{Q}. \quad (\text{B.7})$$

Assim, o resultado desta integral será:

$$I_3 = \frac{i}{(4\pi)^2} [\xi_{00}^{-1}(m_1^2; p, m_2^2; q, m_3^2)]. \quad (\text{B.8})$$

B.2 Cálculo I_2 :

$$I_2 = \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{1}{[(k+k_3)^2 - m^2][(k+k_1)^2 - m^2]} \quad (\text{B.9})$$

Note que, por contagem de potências, esta integral é divergente, dessa forma, utilizando a identidades (3.3), obtemos que:

$$I_2 = \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \left\{ \frac{1}{(k^2 - \lambda^2)^2} - \frac{(2kk_3 + k_3^2 + \lambda^2 - m^2)}{(k^2 - \lambda^2)^2 [(k+k_3)^2 - m^2]} - \frac{(2kk_1 + k_1^2 + \lambda^2 - m^2)}{(k^2 - \lambda^2) [(k+k_3)^2 - m^2][(k+k_1)^2 - m^2]} \right\}. \quad (\text{B.10})$$

Para calculá-la, vamos definir:

$$I_2 = \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{1}{(k^2 - \lambda^2)^2} - \{[I_2]_I + [I_3]_{II}\}. \quad (\text{B.11})$$

Note que, toda a divergência da integral é obtida isolada em um único termo. Após este processo, as integrais convergentes podem ser resolvidas naturalmente, começando pela integral $[I_2]_I$ teremos:

$$[I_2]_I = \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{(2kk_1 + k_1^2 + \lambda^2 - m^2)}{(k^2 - \lambda^2) [(k+k_3)^2 - m^2][(k+k_1)^2 - m^2]}. \quad (\text{B.12})$$

Assim, definindo:

$$k' = k + (k_1 y + k_3 z) \quad (\text{B.13})$$

e

$$Q(z, y) = -H^2 = k_1^2 y(1-y) + k_3^2 z(1-z) - 2k_1 k_3 yz + y(\lambda^2 - m^2) + (\lambda^2 - m^2)z - \lambda^2, \quad (\text{B.14})$$

podemos obter:

$$[2kk_1 + k_1^2 + \lambda^2 - m^2]^{pares} = \frac{\partial Q(z, y)}{\partial y}, \quad (\text{B.15})$$

então, retornando a integral e somando sobre todos os momentos, obtemos:

$$[I_2]_I = \left(\frac{i}{(4\pi)^2} \right) \int_0^1 dz [\ln Q(1-z, z) - \ln Q(0, z)]. \quad (\text{B.16})$$

Mas, note que:

$$Q(1-z, z) = q^2(1-z)z + (\lambda^2 - m^2) - \lambda^2 = Q^*(q, z, m) \quad (\text{B.17})$$

$$Q(0, z) = k_3^2 z(1-z) + (\lambda^2 - m^2)z - \lambda^2. \quad (\text{B.18})$$

Então, o resultado pode ser escrito na seguinte forma:

$$[I_2]_I = \left(\frac{i}{(4\pi)^2} \right) \int_0^1 dz [\ln Q^*(q, z, m) - \ln Q(0, z)]. \quad (\text{B.19})$$

Repetindo os mesmos procedimentos para $[I_2]_{II}$, dada por:

$$[I_2]_{II} = \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{(2kk_3 + k_3^2 + \lambda^2 - m^2)}{(k^2 - \lambda^2)^2 [(k+k_3)^2 - m^2]}, \quad (\text{B.20})$$

obteremos:

$$[-(4\pi)^2 i] [I_2]_{II} = ([\ln(-\lambda^2)]) - \int_0^1 dz \frac{\partial(1-z)}{\partial z} [\ln Q'(z)]. \quad (\text{B.21})$$

E, somando o resultado das duas integrais:

$$[-(4\pi)^2 i] ([I_2]_I + [I_2]_{II}) = \int_0^1 dz \ln \frac{Q^*(q, z, m)}{(-\lambda^2)}, \quad (\text{B.22})$$

assim, retornando a integral, teremos:

$$I_2 = \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{1}{(k^2 - \lambda^2)^2} - \{[I_2]_I + [I_2]_{II}\}, \quad (\text{B.23})$$

E, ainda, com as seguintes definições:

$$I_{\log}(\lambda^2) = \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{1}{(k^2 - \lambda^2)^2} \quad (\text{B.24})$$

$$\xi_n^0(m, p, \lambda) = \int_0^1 dx (x)^n \ln\left(\frac{Q}{-\lambda^2}\right) \quad (\text{B.25})$$

Obteremos o seguinte resultado para esta integral:

$$I_2(m^2) = I_{\log}(\lambda^2) - \frac{i}{(4\pi)^2} \xi_0^0(m^2, q_2^2; \lambda^2). \quad (\text{B.26})$$

que é o resultado desejado.

C REDUÇÃO DAS FUNÇÕES ξ_{01}^{-1} E ξ_1^0

Veremos agora, como podemos reduzir as funções finitas em estruturas matemáticas bem determinadas. Dadas por:

$$\xi_{00}^{-1}(m_1^2; p, m_2^2; q, m_3^2) = \int_0^1 dz \int_0^{1-z} dy \frac{1}{Q} \quad (\text{C.1})$$

$$\xi_{10}^{-1}(m_1^2; p, m_2^2; q, m_3^2) = \int_0^1 dz \int_0^{1-z} dy \frac{z}{Q} \quad (\text{C.2})$$

$$\xi_{01}^{-1}(m_1^2; p, m_2^2; q, m_3^2) = \int_0^1 dz \int_0^{1-z} dy \frac{y}{Q} \quad (\text{C.3})$$

$$\xi_n^0(m, p, \lambda) = \int_0^1 dx (x)^k \ln \left(\frac{Q}{-\lambda^2} \right) \quad (\text{C.4})$$

Primeiramente consideraremos a redução da função ξ_{01}^{-1} e da função ξ_1^0 . Começando pela função ξ_{01}^{-1} , temos que:

$$\xi_{01}^{-1}(q^2, p^2, m) = \int_0^1 dz \int_0^{1-z} dy \frac{y}{Q(y, z)}, \quad (\text{C.5})$$

onde definimos:

$$Q(y, z) = p^2 y(1-y) + q^2 z(1-z) - 2(p \cdot q)yz - m^2. \quad (\text{C.6})$$

A derivada da quantidade acima é dada por:

$$\frac{\partial Q(y, z)}{\partial z} = q^2(1-2z) - 2(p \cdot q)y, \quad (\text{C.7})$$

dessa forma, se isolarmos y , obteremos:

$$\frac{1}{2} - \frac{2(p \cdot q)z}{2p^2} - \frac{1}{2p^2} \frac{\partial Q(y, z)}{\partial y} = y, \quad (\text{C.8})$$

e, substituindo estes resultados na integral original, obteremos:

$$\xi_{01}^{-1}(q^2, p^2, m) = \frac{1}{2} \xi_{00}^{-1}(q^2, p^2, m) - \frac{1}{2p^2} \int_0^1 dz [\ln Q(y, z)]_0^{1-z} - \frac{(p \cdot q)}{p^2} \int_0^1 dz \int_0^{1-z} dy \frac{z}{Q(y, z)}. \quad (\text{C.9})$$

Veja que, para a terceira integral, podemos isolar z :

$$z = \frac{1}{2} - \frac{(p \cdot q)y}{q^2} - \frac{1}{2q^2} \frac{\partial Q(y, z)}{\partial z}, \quad (\text{C.10})$$

de forma a obtermos:

$$\begin{aligned} \xi_{01}^{-1}(q^2, p^2, m) &= \frac{1}{2} \xi_{00}^{-1}(q^2, p^2, m) - \frac{1}{2p^2} \int_0^1 dz [\ln Q(1-z, z) - \ln Q(0, z)] + \\ &\quad - \frac{1}{2} \frac{(p \cdot q)}{p^2} \int_0^1 dz \int_0^{1-z} dy \frac{1}{Q(y, z)} + \frac{(p \cdot q)^2}{p^2 q^2} \int_0^1 dz \int_0^{1-z} dy \frac{y}{Q(y, z)} \\ &\quad + \frac{(p \cdot q)}{2q^2 p^2} \int_0^1 dz \int_0^{1-z} dy \frac{1}{Q(y, z)} \frac{\partial Q(y, z)}{\partial z}. \end{aligned} \quad (\text{C.11})$$

Substituindo as funções definidas anteriormente, obteremos:

$$\begin{aligned} \xi_{01}^{-1}(q^2, p^2, m) &= -\frac{1}{2p^2} \left[\xi_0^0((p-q)^2, m^2) - \xi_0^0(q^2, m^2) \right] + \\ &\quad + \frac{1}{2} \xi_{00}^{-1}(q^2, p^2, m) \\ &\quad - \frac{1}{2} \frac{(p \cdot q)}{p^2} \xi_{00}^{-1}(q^2, p^2, m) \\ &\quad + \frac{(p \cdot q)^2}{p^2 q^2} \xi_{01}^{-1}(m^2; p, q) \\ &\quad + \frac{(p \cdot q)}{2q^2 p^2} \int_0^1 dz \int_0^{1-z} dy \frac{1}{Q(y, z)} \frac{\partial Q(y, z)}{\partial z}, \end{aligned} \quad (\text{C.12})$$

pois:

$$Q(y, z) = p^2 y(1-y) + q^2 z(1-z) - 2(p \cdot q)yz - m^2 \quad (\text{C.13})$$

$$Q(1-z, z) = z(1-z)(p-q)^2 - m^2 \quad (\text{C.14})$$

$$Q(0, z) = q^2 z(1-z) - m^2. \quad (\text{C.15})$$

Agora, vamos calcular a última integral separadamente, temos que:

$$I^* = \int_0^1 dz \int_0^{1-z} dy \frac{1}{Q(y, z)} \frac{\partial Q(y, z)}{\partial z}, \quad (\text{C.16})$$

reescrevendo em uma forma conveniente, obteremos:

$$I^* = \int_0^1 dz \int_0^{1-z} dy \frac{\partial}{\partial z} [\ln Q(y, z)]. \quad (\text{C.17})$$

Definindo:

$$\begin{aligned} Q(y, z) &= (-p^2)(y - \alpha)(y - \beta) \\ Q(y, z) &= -p^2yy + p^2y\beta + p^2\alpha y - p^2\alpha\beta, \end{aligned} \quad (\text{C.18})$$

onde α e β são as raízes do polinômio:

$$y^2 - y + \frac{2(p \cdot q)}{p^2}yz - \frac{[q^2z(1-z) - m^2]}{p^2} = 0. \quad (\text{C.19})$$

Então, retornando a integral teremos:

$$I^* = \int_0^1 dz \int_0^{1-z} dy \frac{\partial}{\partial z} [\ln(-p^2) + \ln(y - \alpha) + \ln(y - \beta)], \quad (\text{C.20})$$

e, realizando uma integração, obteremos:

$$I^* = \int_0^1 dz \left[\frac{\partial}{\partial z} (-\alpha) \ln(1 - z - \alpha) + \frac{\partial}{\partial z} (\alpha) \ln(-\alpha) + \frac{\partial}{\partial z} (-\beta) \ln(1 - z - \beta) + \frac{\partial}{\partial z} (\beta) \ln(-\beta) \right]. \quad (\text{C.21})$$

Agora, integrando, primeiramente no termo proporcional a α teremos:

$$I^*(\alpha) = \int_0^1 dz \left[\frac{\partial}{\partial z} (-\alpha) \ln(1 - z - \alpha) + \frac{\partial}{\partial z} (\alpha) \ln(-\alpha) \right] \quad (\text{C.22})$$

ou,

$$\begin{aligned} I^*(\alpha) &= \int_0^1 dz \frac{\partial}{\partial z} [(1 - z - \alpha) \ln(1 - z - \alpha) - (1 - z - \alpha)] \\ &\quad - \int_0^1 dz \left\{ \left[\frac{\partial}{\partial z} (1 - z) \right] \ln(1 - z - \alpha) \right\} \\ &\quad + \int_0^1 dz \frac{\partial}{\partial z} [(\alpha) \ln(-\alpha) - \alpha], \end{aligned} \quad (\text{C.23})$$

e, reescrevendo, temos:

$$\begin{aligned} I^*(\alpha(z)) &= \int_0^1 dz \frac{\partial}{\partial z} [(1 - z - \alpha(z)) \ln(1 - z - \alpha(z)) - (1 - z - \alpha(z)) + (\alpha(z)) \ln(-\alpha(z)) - \alpha(z)] \\ &\quad + \int_0^1 dz \{ \ln(1 - z - \alpha(z)) \}. \end{aligned} \quad (\text{C.24})$$

De forma equivalente, podemos realizar a integração com termos proporcionais a β , dessa forma obteremos:

$$I^*(\beta(z)) = \int_0^1 dz \frac{\partial}{\partial z} [(1-z-\beta(z)) \ln(1-z-\beta(z)) - (1-z-\beta(z)) + (\beta(z)) \ln(-\beta(z)) - \beta(z)] + \int_0^1 dz \{\ln(1-z-\beta(z))\}. \quad (\text{C.25})$$

Portanto, reunindo ambos os resultados, teremos:

$$I^* = \int_0^1 dz \frac{\partial}{\partial z} [(1-z-\alpha(z)) \ln(1-z-\alpha(z)) - (1-z-\alpha(z)) + (\alpha(z)) \ln(-\alpha(z)) - \alpha(z)] + \int_0^1 dz \frac{\partial}{\partial z} [(1-z-\beta(z)) \ln(1-z-\beta(z)) - (1-z-\beta(z)) + (\beta(z)) \ln(-\beta(z)) - \beta(z)] + \int_0^1 dz \{\ln(1-z-\alpha(z))\} + \int_0^1 dz \{\ln(1-z-\beta(z))\}, \quad (\text{C.26})$$

e, portanto, realizando a integração:

$$I^* = -\ln(1-\alpha(0)) - \ln(1-\beta(0)) + 2 + \alpha(0) \left[\ln \left(\frac{1-\alpha(0)}{-\alpha(0)} \right) \right] + \beta(0) \left[\ln \left(\frac{1-\beta(0)}{-\beta(0)} \right) \right] + \int_0^1 dz [\{\ln(1-z-\alpha(z))\} + \{\ln(1-z-\beta(z))\}]. \quad (\text{C.27})$$

Mas, sabemos que α e β são raízes do polonômio, dessa forma:

$$\alpha(0) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \sqrt{1 - \frac{4(m^2)}{p^2}} \quad (\text{C.28})$$

$$\beta(0) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \sqrt{1 - \frac{4(m^2)}{p^2}} \quad (\text{C.29})$$

e,

$$\alpha(1) = -\frac{2(p \cdot q) - p^2}{2p^2} + \frac{1}{2p^2} \sqrt{(2(p \cdot q) - p^2)^2 - 4m^2 p^2} \quad (\text{C.30})$$

$$\beta(1) = -\frac{2(p \cdot q) - p^2}{2p^2} - \frac{1}{2p^2} \sqrt{(2(p \cdot q) - p^2)^2 - 4m^2 p^2}. \quad (\text{C.31})$$

Agora, note que podemos obter as seguintes quantidades:

$$\alpha(1) + \beta(1) = -\frac{[2(p \cdot q) - p^2]}{p^2} \quad (\text{C.32})$$

$$\alpha(1) - \beta(1) = \frac{1}{p^2} \sqrt{(2(p \cdot q) - p^2)^2 - 4m^2 p^2} \quad (\text{C.33})$$

$$\alpha(1)\beta(1) = -\frac{Q(1)}{p^2} \quad (\text{C.34})$$

e:

$$\alpha(0) + \beta(0) = 1 \quad (\text{C.35})$$

$$\alpha(0) - \beta(0) = \sqrt{1 - \frac{4(m^2)}{p^2}} \quad (\text{C.36})$$

$$\alpha(0)\beta(0) = -\frac{(m^2)}{p^2}. \quad (\text{C.37})$$

A partir desses resultados, note que:

$$\beta(0) = 1 - \alpha(0) \quad (\text{C.38})$$

$$\alpha(0) = 1 - \beta(0). \quad (\text{C.39})$$

Então, utilizando estes resultados, podemos retornar a integral, para obter:

$$\begin{aligned} I^* &= -\ln\left(\frac{(m^2)}{p^2}\right) + 2 \\ &+ \sqrt{\frac{p^2 - 4(m^2)}{p^2}} \left[\ln\left(-\frac{\beta(0)}{\alpha(0)}\right) \right] \\ &+ \int_0^1 dz [\{\ln(1 - z - \alpha(z))\} + \{\ln(1 - z - \beta(z))\}], \end{aligned} \quad (\text{C.40})$$

mas, o segundo termo pode ser reescrito na seguinte identidade:

$$\sqrt{\frac{p^2 - 4(m^2)}{p^2}} \left[\ln\left(-\frac{\beta(0)}{\alpha(0)}\right) \right] + 2 = \int_0^1 dz \ln\left(\frac{p^2 z(1-z) - m^2}{-m^2}\right) = -\xi_0^0(p^2, m^2), \quad (\text{C.41})$$

e ainda:

$$\begin{aligned} \int_0^1 dz [\{\ln(1-z-\alpha(z))\} + \{\ln(1-z-\beta(z))\}] &= \ln \left[\frac{(q-p)^2 z(1-z) - m^2}{-m^2} \right] + \ln \left[\frac{(m^2)}{p^2} \right] \\ &= \xi_0^0((q-p)^2, m^2) + \ln \left[\frac{(m^2)}{p^2} \right]. \end{aligned} \quad (\text{C.42})$$

Dessa forma, obteremos então:

$$I^* = -\xi_0^0(p^2, m^2) + \xi_0^0((q-p)^2, m^2). \quad (\text{C.43})$$

Portanto, retornando à função ξ_{01}^{-1} , teremos:

$$\begin{aligned} \xi_{01}^{-1}(q^2, p^2, m) &= -\frac{1}{2p^2} \left[\xi_0^0((p-q)^2, m^2) - \xi_0^0(q^2, m^2) \right] + \\ &+ \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2} \frac{(p \cdot q)}{p^2} \right) \xi_{00}^{-1}(q^2, p^2, m) \\ &+ \frac{(p \cdot q)^2}{p^2 q^2} \xi_{01}^{-1}(m^2; p, q) \\ &+ \frac{(p \cdot q)}{2q^2 p^2} \left[-\xi_0^0(p^2, m^2) + \xi_0^0((q-p)^2, m^2) \right], \end{aligned} \quad (\text{C.44})$$

e, reorganizando:

$$\begin{aligned} \xi_{01}^{-1}(m^2; p, q) &= \left[\frac{p^2 q^2}{p^2 q^2 - (p \cdot q)^2} \right] \left\{ \left[\frac{(p \cdot q)}{2q^2 p^2} - \frac{1}{2p^2} \right] \xi_0^0((q-p)^2, m^2) \right. \\ &+ \frac{1}{2p^2} \xi_0^0(q^2, m^2) + \\ &- \frac{(p \cdot q)}{2q^2 p^2} \xi_0^0(p^2, m^2) \\ &\left. + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2} \frac{(p \cdot q)}{p^2} \right) \xi_{00}^{-1}(q^2, p^2, m) \right\}, \end{aligned} \quad (\text{C.45})$$

e, definindo:

$$C_1 = \frac{p^2 q^2}{p^2 q^2 - (p \cdot q)^2}, \quad (\text{C.46})$$

obteremos:

$$\begin{aligned} \xi_{01}^{-1}(m^2; p, q) = & \frac{C_1}{2} \left\{ \left[\frac{(p \cdot q) - q^2}{q^2 p^2} \right] \xi_0^0((p - q)^2, m^2) \right. \\ & + \frac{1}{p^2} \xi_0^0(q^2, m^2) + \\ & - \frac{(p \cdot q)}{q^2 p^2} \xi_0^0(p^2, m^2) \\ & \left. + \left(1 - \frac{(p \cdot q)}{p^2} \right) \xi_{00}^{-1}(q^2, p^2, m) \right\}. \end{aligned} \quad (C.47)$$

Que é o resultado desejado. Todas as outras reduções para as funções ξ_{nm}^{-1} podem ser obtidas de modo completamente análogo. Vamos ainda fazer a redução da função Z_1 , temos que:

$$\xi_0^1(m, p, \lambda) = \int_0^1 dx(x) \ln \left(\frac{Q(x)}{-\lambda^2} \right), \quad (C.48)$$

onde, definimos:

$$Q(m, p, x) = p^2 x(1 - x) + (m_1 - m_2)x - m_1^2. \quad (C.49)$$

Note ainda que:

$$\frac{\partial Q(x)}{\partial x} = p^2(1 - 2x) \quad (C.50)$$

portanto, isolando x , obteremos:

$$x = \frac{1}{2} - \frac{1}{2p^2} \frac{\partial Q(x)}{\partial x}. \quad (C.51)$$

Assim, substituindo na integral, teremos:

$$\xi_0^1(m, p, \lambda) = \frac{1}{2} \xi_0^0(m, p, \lambda) - \frac{1}{2p^2} \int_0^1 dx \left(\frac{\partial Q(x)}{\partial x} \right) \ln \left(\frac{Q(x)}{-\lambda^2} \right). \quad (C.52)$$

e, calculando a última integral separadamente, obteremos que:

$$\begin{aligned} \int_0^1 dx \left(\frac{\partial Q(x)}{\partial x} \right) \ln \left(\frac{Q(x)}{-\lambda^2} \right) = & \left[Q(1) \ln \left(\frac{Q(1)}{-\lambda^2} \right) \right] - \left[Q(0) \ln \left(\frac{Q(0)}{-\lambda^2} \right) \right] \\ & - \int_0^1 dx Q(x) \frac{\partial}{\partial x} \left[\ln \left(\frac{Q(x)}{-\lambda^2} \right) \right], \end{aligned} \quad (C.53)$$

mas, temos que:

$$Q(m, p, x) = p^2 x(1-x) - m^2 \quad (\text{C.54})$$

$$Q(m, p, 0) = -m^2 \quad (\text{C.55})$$

$$Q(m, p, 1) = -m^2, \quad (\text{C.56})$$

assim, obteremos:

$$\int_0^1 dx \left(\frac{\partial Q(x)}{\partial x} \right) \ln \left(\frac{Q(x)}{-\lambda^2} \right) = - \int_0^1 dx Q(x) \frac{\partial}{\partial x} \left[\ln \left(\frac{Q(x)}{-\lambda^2} \right) \right]. \quad (\text{C.57})$$

E, derivando em ambos os lado, obteremos:

$$\int_0^1 dx \left(\frac{\partial Q(x)}{\partial x} \right) \ln \left(\frac{Q(x)}{-\lambda^2} \right) = - \int_0^1 dx \frac{\partial Q(x)}{\partial x} = - [Q(x)]_0^1 = 0. \quad (\text{C.58})$$

Então, retornando a integral, obtemos que:

$$\xi_0^1(m, p, \lambda) = \frac{1}{2} \xi_0^0(m, p, \lambda). \quad (\text{C.59})$$

Que é o resultado desejado. Então, ao extendermos esses resultados para obtenção das demais funções, ξ_{10}^{-1} , ξ_{20}^{-1} , ξ_{02}^{-1} , ξ_{11}^{-1} e ξ_0^{-1} , podemos obter as identidades utilizadas neste trabalho.

Como exercício, vamos demonstrar as seguintes identidades:

$$p^2 \xi_{01}^{-1} + (p \cdot q) \xi_{10}^{-1} = -\frac{1}{2} \xi_0^0(p, q; \lambda^2) + \frac{1}{2} \xi_0^0(q; \lambda^2) + \frac{1}{2} p^2 \xi_{00}^{-1} \quad (\text{C.60})$$

$$q^2 \xi_{10}^{-1} + (p \cdot q) \xi_{01}^{-1} = -\frac{1}{2} \xi_0^0(p, q; \lambda^2) + \frac{1}{2} \xi_0^0(p; \lambda^2) + \frac{1}{2} q^2 \xi_{00}^{-1} \quad (\text{C.61})$$

Então, começando com a primeira identidade e tendo em mente o resultado da redução das funções ξ_{01}^{-1} e ξ_{10}^{-1} , obteremos que, o produto de p^2 com ξ_{01}^{-1} , fornece:

$$\begin{aligned}
p^2 \frac{2}{C_1} \xi_{01}^{-1}(m^2; p, q) &= \left[\frac{(p \cdot q) - q^2}{q^2 p^2} \right] p^2 \xi_0^0((p-q)^2, m^2) \\
&+ \frac{1}{p^2} p^2 \xi_0^0(q^2, m^2) + \\
&- \frac{(p \cdot q)}{q^2 p^2} p^2 \xi_0^0(p^2, m^2) \\
&+ \left(1 - \frac{(p \cdot q)}{p^2} \right) p^2 \xi_{00}^{-1}(q^2, p^2, m). \tag{C.62}
\end{aligned}$$

E, multiplicando ξ_{10}^{-1} por $(p \cdot q)$, obtemos:

$$\begin{aligned}
(p \cdot q) \frac{2}{C_1} \xi_{10}^{-1}(m^2; p, q) &= \left[\frac{(p \cdot q) - p^2}{q^2 p^2} \right] (p \cdot q) \xi_0^0((p-q)^2, m^2) \\
&+ \frac{1}{q^2} (p \cdot q) \xi_0^0(p^2, m^2) + \\
&- \frac{(p \cdot q)}{q^2 p^2} (p \cdot q) \xi_0^0(q^2, m^2) \\
&+ \left(1 - \frac{(p \cdot q)}{q^2} \right) (p \cdot q) \xi_{00}^{-1}(q^2, p^2, m). \tag{C.63}
\end{aligned}$$

Portanto, somando estas duas quantidades, obteremos:

$$\begin{aligned}
p^2 \frac{2}{C_1} \xi_{01}^{-1}(m^2; p, q) + (p \cdot q) \frac{2}{C_1} \xi_{10}^{-1}(m^2; p, q) &= \\
&= - \left[\frac{q^2 p^2 - (p \cdot q)^2}{q^2 p^2} \right] \xi_0^0((p-q)^2, m^2) \\
&+ \left[1 - \frac{(p \cdot q)^2}{q^2 p^2} \right] \xi_0^0(q^2, m^2) + \\
&+ p^2 \left[\frac{p^2 q^2 - (p \cdot q)^2}{p^2 q^2} \right] \xi_{00}^{-1}(q^2, p^2, m), \tag{C.64}
\end{aligned}$$

e, reorganizando, podemos obter o resultado desejado:

$$\begin{aligned}
p^2 \xi_{01}^{-1}(m^2; p, q) + (p \cdot q) \xi_{10}^{-1}(m^2; p, q) &= -\frac{1}{2} \xi_0^0((p-q)^2, m^2) \\
&+ \frac{1}{2} \xi_0^0(q^2, m^2) + \\
&+ \frac{p^2}{2} \xi_{00}^{-1}(q^2, p^2, m). \tag{C.65}
\end{aligned}$$

Ainda, realizando os mesmos procedimentos para a obtenção da segunda identidade, podemos obter:

$$\begin{aligned}
\frac{2}{C_1} q^2 \xi_{10}^{-1}(m^2; p, q) + \frac{2}{C_1} (p \cdot q) \xi_{01}^{-1}(m^2; p, q) &= \\
&= - \left[\frac{p^2 q^2 - (p \cdot q)^2}{q^2 p^2} \right] \xi_0^0((p-q)^2, m^2) \\
&\quad + \left[1 - \frac{(p \cdot q)^2}{q^2 p^2} \right] \xi_0^0(p^2, m^2) + \\
&\quad + q^2 \left[\frac{p^2 q^2 - (p \cdot q)^2}{q^2 p^2} \right] \xi_{00}^{-1}(q^2, p^2, m) \tag{C.66}
\end{aligned}$$

onde, simplesmente multiplicamos a redução de ξ_{10}^{-1} por q^2 e somamos com a multiplicação de $(p \cdot q)$ pela redução da função ξ_{01}^{-1} . Dessa forma, podemos obter:

$$\begin{aligned}
q^2 \xi_{10}^{-1}(m^2; p, q) + (p \cdot q) \xi_{01}^{-1}(m^2; p, q) &= -\frac{1}{2} \xi_0^0((p-q)^2, m^2) \\
&\quad + \frac{1}{2} \xi_0^0(p^2, m^2) + \\
&\quad + q^2 \frac{1}{2} \xi_{00}^{-1}(q^2, p^2, m), \tag{C.67}
\end{aligned}$$

como o esperado. Estas duas identidades foram muito utilizadas neste trabalho.

D CÁLCULO DO TENSOR $F_{\lambda\mu\nu}$

Sabemos que:

$$F_{\lambda\mu\nu} = \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} f_{\lambda\mu\nu} \quad (\text{D.1})$$

onde definimos:

$$\begin{aligned} f_{\lambda\mu\nu} = & 4 \left\{ \varepsilon_{\mu\nu\alpha\beta} (k+k_3)_\lambda (k+k_1)^\alpha (k+k_2)^\beta \right. \\ & - \varepsilon_{\mu\nu\alpha\beta} (k+k_3)^\alpha (k+k_1)_\lambda (k+k_2)^\beta \\ & + \varepsilon_{\mu\nu\alpha\beta} (k+k_3)^\alpha (k+k_1)^\beta (k+k_2)_\lambda \\ & + \varepsilon_{\lambda\nu\alpha\beta} (k+k_3)_\mu (k+k_1)^\alpha (k+k_2)^\beta \\ & + \varepsilon_{\lambda\nu\alpha\beta} (k+k_3)^\alpha (k+k_1)_\mu (k+k_2)^\beta \\ & - \varepsilon_{\lambda\nu\alpha\beta} (k+k_3)^\alpha (k+k_1)^\beta (k+k_2)_\mu \\ & + \varepsilon_{\lambda\mu\alpha\beta} (k+k_3)^\alpha (k+k_1)_\nu (k+k_2)^\beta \\ & - \varepsilon_{\lambda\mu\alpha\beta} (k+k_3)_\nu (k+k_1)^\alpha (k+k_2)^\beta \\ & \left. + \varepsilon_{\lambda\mu\alpha\beta} (k+k_3)^\alpha (k+k_1)^\beta (k+k_2)_\nu \right\} \frac{1}{D_{123}}. \end{aligned} \quad (\text{D.2})$$

Calcularemos esta função separadamente, da seguinte forma:

$$f_{\lambda\mu\nu} = \frac{4}{D_{123}} \{f_1 + f_2 + f_3\}, \quad (\text{D.3})$$

então, calculando primeiramente a função f_1 , teremos

$$\begin{aligned} f_1 = & \frac{4}{D_{123}} \varepsilon_{\mu\nu\alpha\beta} [k_\lambda k_\beta k_\alpha + k_\alpha k_\beta [k_{3\lambda} + k_{2\lambda} - k_{1\lambda}] + k_\lambda k_\beta [k_{1\alpha} - k_{3\alpha} + k_{3\alpha}] \\ & + k_\lambda k_\alpha [k_{2\beta} - k_{2\beta} + k_{1\beta}] + k_\beta [k_{3\lambda} k_{1\alpha} - k_{3\alpha} k_{1\lambda} + k_{3\alpha} k_{2\lambda}] \\ & + k_\alpha [k_{3\lambda} k_{2\beta} - k_{1\lambda} k_{2\beta} + k_{1\beta} k_{2\lambda}] + k_\lambda [k_{1\alpha} k_{2\beta} - k_{3\alpha} k_{2\beta} + k_{3\alpha} k_{1\beta}] \\ & + k_{3\lambda} k_{1\alpha} k_{2\beta} - k_{3\alpha} k_{1\lambda} k_{2\beta} + k_{3\alpha} k_{1\beta} k_{2\lambda}], \end{aligned} \quad (\text{D.4})$$

e, reorganizando de forma conveniente, podemos obter:

$$\begin{aligned}
f_1 = \frac{4}{D_{123}} \varepsilon_{\mu\nu\alpha\beta} & \left[[I_3]_{\lambda\beta\alpha} + [I_3]_{\beta\alpha} [k_{3\lambda} + k_{2\lambda} - k_{1\lambda}] + [I_3]_{\lambda\beta} [k_{1\alpha} - k_{3\alpha} + k_{3\alpha}] \right. \\
& + [I_3]_{\lambda\alpha} [k_{2\beta} - k_{2\beta} + k_{1\beta}] + [I_3]_{\beta} [k_{3\lambda} k_{1\alpha} - k_{3\alpha} k_{1\lambda} + k_{3\alpha} k_{2\lambda}] \\
& + [I_3]_{\alpha} [k_{3\lambda} k_{2\beta} - k_{1\lambda} k_{2\beta} + k_{1\beta} k_{2\lambda}] + [I_3]_{\lambda} [k_{1\alpha} k_{2\beta} - k_{3\alpha} k_{2\beta} + k_{3\alpha} k_{1\beta}] \\
& \left. + [I_3] [k_{3\lambda} k_{1\alpha} k_{2\beta} - k_{3\alpha} k_{1\lambda} k_{2\beta} + k_{3\alpha} k_{1\beta} k_{2\lambda}] \right]. \tag{D.5}
\end{aligned}$$

Ainda, retirando os termos simétricos, teremos:

$$\begin{aligned}
f_1 = \frac{4}{D_{123}} \varepsilon_{\mu\nu\alpha\beta} & \left[[I_3]_{\beta} [k_{3\lambda} k_{1\alpha} - k_{3\alpha} k_{1\lambda} + k_{3\alpha} k_{2\lambda}] + [I_3]_{\alpha} [k_{3\lambda} k_{2\beta} - k_{1\lambda} k_{2\beta} + k_{1\beta} k_{2\lambda}] \right. \\
& + [I_3]_{\lambda} [k_{1\alpha} k_{2\beta} - k_{3\alpha} k_{2\beta} + k_{3\alpha} k_{1\beta}] \\
& \left. + [I_3] [k_{3\lambda} k_{1\alpha} k_{2\beta} - k_{3\alpha} k_{1\lambda} k_{2\beta} + k_{3\alpha} k_{1\beta} k_{2\lambda}] \right], \tag{D.6}
\end{aligned}$$

e, com o resultado das integrais (3.21) e (3.22), obteremos:

$$\begin{aligned}
[-(4\pi)^2 i] F_1 = 4\varepsilon_{\mu\nu\alpha\beta} & \left[-q_{\beta} \xi_{10} [k_{3\lambda} k_{1\alpha} - k_{3\alpha} k_{1\lambda} + k_{3\alpha} k_{2\lambda}] - q_{\alpha} \xi_{10} [k_{3\lambda} k_{2\beta} - k_{1\lambda} k_{2\beta} + k_{1\beta} k_{2\lambda}] \right. \\
& - q_{\lambda} \xi_{10} [k_{1\alpha} k_{2\beta} - k_{3\alpha} k_{2\beta} + k_{3\alpha} k_{1\beta}] + p_{\beta} \xi_{01} [k_{3\lambda} k_{1\alpha} - k_{3\alpha} k_{1\lambda} + k_{3\alpha} k_{2\lambda}] \\
& \left. + p_{\alpha} \xi_{01} [k_{3\lambda} k_{2\beta} - k_{1\lambda} k_{2\beta} + k_{1\beta} k_{2\lambda}] + p_{\lambda} \xi_{01} [k_{1\alpha} k_{2\beta} - k_{3\alpha} k_{2\beta} + k_{3\alpha} k_{1\beta}] \right], \tag{D.7}
\end{aligned}$$

portanto, teremos:

$$\begin{aligned}
[-(4\pi)^2 i] F_1 & = 4\varepsilon_{\mu\nu\alpha\beta} \left[-k_{3\lambda} \xi_{10} [k_{3\beta} k_{1\alpha} + k_{3\alpha} k_{1\beta}] - k_{2\lambda} \xi_{01} [k_{2\alpha} k_{1\beta} + k_{1\alpha} k_{2\beta}] \right] \\
& = 0 \tag{D.8}
\end{aligned}$$

Agora, de forma equivalente para a função f_2 , teremos:

$$\begin{aligned}
f_2 = \frac{4}{D_{123}} \varepsilon_{\lambda\nu\alpha\beta} & \left[2 [I_3]_{\mu\alpha} [k_{2\beta} - k_{1\beta}] + [I_3]_{\beta} [k_{3\mu} k_{1\alpha} + k_{3\alpha} k_{1\mu} - k_{3\alpha} k_{2\mu}] \right. \\
& + [I_3]_{\alpha} [k_{3\mu} k_{2\beta} + k_{1\mu} k_{2\beta} - k_{1\beta} k_{2\mu}] \\
& + [I_3]_{\mu} [k_{1\alpha} k_{2\beta} + k_{3\alpha} k_{2\beta} - k_{3\alpha} k_{1\beta}] \\
& \left. + [I_3] [k_{3\mu} k_{1\alpha} k_{2\beta} + k_{3\alpha} k_{1\mu} k_{2\beta} - k_{3\alpha} k_{1\beta} k_{2\mu}] \right], \tag{D.9}
\end{aligned}$$

portanto, utilizando os resultados (3.21), (3.22) e (3.23), e reorganizando, obteremos o seguinte resultado para esta integral:

$$\begin{aligned}
F_2 = & -2\varepsilon_{\lambda\nu\alpha\beta} \left[p^\beta \right] \left[\Delta_\mu^\alpha (\lambda^2) + g_{\mu\alpha} I_{\log} (\lambda^2) \right] + \\
& - \left(\frac{i}{(4\pi)^2} \right) 4\varepsilon_{\lambda\nu\alpha\beta} \left(2p^\beta q^\alpha \right) \{ q_\mu [\xi_{20} - \xi_{10}] - p_\mu \xi_{11} \} \\
& + \left(\frac{i}{(4\pi)^2} \right) 4\varepsilon_{\lambda\nu\alpha\beta} g_\mu^\alpha p^\beta \eta_{00}.
\end{aligned} \tag{D.10}$$

E, por último, vamos calcular a integral f_3 , temos que:

$$\begin{aligned}
f_3 = & \frac{4}{D_{123}} \varepsilon_{\lambda\mu\alpha\beta} \left[-2[I_3]_{\alpha\nu} [k_{3\beta} - k_{1\beta}] + [I_3]_\beta [k_{3\alpha}k_{1\nu} - k_{3\nu}k_{1\alpha} + k_{3\alpha}k_{2\nu}] \right. \\
& + [I_3]_\alpha [k_{1\nu}k_{2\beta} - k_{3\nu}k_{2\beta} + k_{1\beta}k_{2\nu}] \\
& + [I_3]_\nu [k_{3\alpha}k_{1\beta} - k_{1\alpha}k_{2\beta} + k_{3\alpha}k_{2\beta}] \\
& \left. + [I_3] [k_{3\alpha}k_{1\beta}k_{2\nu} - k_{3\nu}k_{1\alpha}k_{2\beta} + k_{3\alpha}k_{1\nu}k_{2\beta}] \right],
\end{aligned} \tag{D.11}$$

de posse dos resultados (3.21), (3.22) e (3.23) podemos obter o seguinte resultado para esta integral:

$$\begin{aligned}
F_3 = & -2 \left(q^\beta \right) \varepsilon_{\lambda\mu\alpha\beta} \left[\Delta_\nu^\alpha (\lambda^2) + g_\nu^\alpha I_{\log} (\lambda^2) \right] \\
& + \left(\frac{i}{(4\pi)^2} \right) 4\varepsilon_{\lambda\mu\alpha\beta} 2q^\beta p^\alpha [p_\nu (\xi_{01} - \xi_{02}) + q_\nu \xi_{11}] + \left(\frac{i}{(4\pi)^2} \right) 4\varepsilon_{\lambda\mu\alpha\beta} q^\beta g_\nu^\alpha \eta_{00}.
\end{aligned} \tag{D.12}$$

Portanto, reunindo os três resultados, podemos obter o seguinte resultado:

$$\begin{aligned}
\frac{F_{\lambda\mu\nu}}{4} = & -\frac{1}{2} \varepsilon_{\lambda\nu\alpha\beta} p^\beta \Delta_\mu^\alpha (\lambda^2) - \frac{1}{2} q^\beta \varepsilon_{\lambda\mu\alpha\beta} \Delta_\nu^\alpha (\lambda^2) + \\
& -\frac{1}{2} \varepsilon_{\lambda\mu\nu\beta} \left(q^\beta - p^\beta \right) I_{\log} (\lambda^2) + \\
& + \left(\frac{i}{(4\pi)^2} \right) \left[\varepsilon_{\lambda\mu\nu\alpha} (q^\alpha - p^\alpha) \xi_{00}^0 - 2\varepsilon_{\lambda\nu\beta\alpha} p^\alpha \left[q^\beta q_\mu \xi_{20}^{-1} - q^\beta p_\mu \xi_{11}^{-1} \right] \right. \\
& - 2\varepsilon_{\lambda\mu\alpha\beta} q^\beta \left[p^\alpha p_\nu \xi_{02}^{-1} - p^\alpha q_\nu \xi_{11}^{-1} \right] + 2\varepsilon_{\lambda\mu\alpha\beta} q^\beta p^\alpha p_\nu \xi_{01}^{-1} \\
& \left. + 2\varepsilon_{\lambda\nu\alpha\beta} p^\beta q^\alpha q_\mu \xi_{10}^{-1} \right],
\end{aligned} \tag{D.13}$$

que, como podemos confirmar, esta função é completamente livre de ambiguidades.