UNIVERSIDADE FEDERAL DE LAVRAS

ESTRUTURAS E ESPERANÇAS DE QUADRADOS MÉDIOS PARA MODELOS NÃO ADITIVOS EM DELINEAMENTOS EXPERIMENTAIS

FRANCISCO REGILSON SOUZA

2005

FRANCISCO REGILSON SOUZA

ESTRUTURAS E ESPERANÇAS DE QUADRADOS MÉDIOS PARA MODELOS NÃO ADITIVOS EM DELINEAMENTOS EXPERIMENTAIS

Dissertação apresentada à Universidade Federal de Lavras, como parte das exigências do Programa de Pós-graduação em Agronomia, área de concentração em Estatística e Experimentação Agropecuária, para obtenção do título de "Mestre".

Orientador

Prof. Ruben Delly Veiga

LAVRAS
MINAS GERAIS – BRASIL
2005

Ficha Catalográfica Preparada pela Divisão de Processos Técnicos da Biblioteca Central da UFLA

Souza, Francisco Regilson
Estruturas e esperanças de quadrados médios para modelos não aditivos em delineamentos experimentais / Francisco Regilson Souza. -- Lavras : UFLA, 2005.
80 p. : il.

Orientador: Ruben Delly Veiga.
Dissertação (Mestrado) – UFLA.
Bibliografia.

1. Estrutura populacional. 2. Delineamento experimental. 3. Modelo não-aditivo. 4. Modelo deduzido linear. 5. Produto de Kronecker. 6. Zyskind. I. Universidade Federal de Lavras. II. Título.

CDD-519.50724

FRANCISCO REGILSON SOUZA

ESTRUTURAS E ESPERANÇAS DE QUADRADOS MÉDIOS PARA MODELOS NÃO ADITIVOS EM DELINEAMENTOS EXPERIMENTAIS

Dissertação apresentada à Universidade Federal de Lavras, como parte das exigências do Programa de Pós-graduação em Agronomia, área de concentração em Estatística e Experimentação Agropecuária, para obtenção do título de "Mestre".

APROVADA em 03 de fevereiro de 2005.

Prof. Natalino Calegário	UFLA
Prof. Joel Augusto Muniz	UFLA
Prof. Lucas Monteiro Chaves	UFLA

Prof. Ruben Delly Veiga
UFLA
(Orientador)

LAVRAS
MINAS GERAIS – BRASIL
2005

Ao meu pai, Gilvan, minha mãe
Rgina e aos meus irmãos

OFEREÇO

À minha esposa Cristina, aos
meus filhos Lucas e Lara

DEDICO

AGRADECIMENTOS

A **DEUS**, por tudo...

À Escola Agrotécnica Ferderal de Santa Inês-Bahia pela oportunidade, em especial ao diretor geral Nilton Santana dos Santos.

Aos Professores da EAF-Santa Inês/BA Giorlando, Henrique e Natan, que assumiram as minhas atividades para viabilizar o meu afastamento.

À Universidade Federal de Lavras (UFLA) e ao Departamento de Ciências Exatas (DEX) pela oportunidade.

À Coordenadoria de aperfeiçoamento de pessoal do Ensino Superior (CAPES), pela concessão da bolsa de estudos.

Aos professores e funcionários do DEX pelo convívio e transmissão de ensinamentos.

Aos professores Rubem Delly (orientador) e Joel Augusto (co-orientador) pelas orientações, sugestões e paciência na elaboração deste trabalho.

A meus pais, por tudo que fizeram pelo meu crescimento moral e intelectual.

À minha família, em especial meu tio e professor Cordeirinho, pelo incentivo.

Ao amigo José Otaviano pelo incentivo e colaboração com material de estudo.

Aos mestrandos da turma de 2004, em especial ao meu amigo Devanil.

Aos Doutorandos, em especial Denismar, José Valdemar, Marcelo Cirillo, Luís Alberto e Janser pela amizade.

Aos colegas Antônio, Deive, Érick, Gisele, Imaculada, Luciane, Mônica, Nilson, Roberta, Rômulo, Taciana, pelo incentivo, companheirismo e amizade.

Aos professores membros da banca examinadora, Augusto, Delly, Joel, Lucas e Natalino pelas sugestões e críticas apresentadas.

SUMÁRIO

RESUMO

SOUZA, Francisco Regilson. **Estruturas e esperanças de quadrados médios para modelos não-aditivos em delineamentos experimentais.** 2005. 80p. Dissertação (Mestrado em Agronomia/ Estatística e Experimentação Agropecuária)- Universidade Federal de Lavras –MG*.

Este trabalho foi desenvolvido para discutir e apresentar uma metodologia de construção de modelos lineares e obter quadrados médios de formas quadráticas em geral. Estas formas quadráticas são dirigidas aqui aos quadrados médios relacionados com a análise de variância de resultados obtidos em análise de delineamentos experimentais. A proposta da metodologia apresentada pelos autores teve início na década de 1950, foi apresentada mais recentemente e recebeu uma abordagem fundamental destacando a importância da metodologia que não depende de quaisquer pressuposições iniciais sobre o modelo em questão para a garantia da análise de variância. O presente trabalho procura discutir e relacionar os demais apresentados até então, sobretudo apresentando exemplos de aplicação ligadas aos delineamentos experimentais mais utilizados. Aqui a definição da estrutura populacional conduz à definição do modelo e à construção de componentes que podem ser transformadas nas fontes de modelos lineares em análise de variância. Por fim, o trabalho apresenta um algoritmo para construção destas análises e obtenção das respectivas esperanças de quadrados médios. A metodologia é apresentada também sob a forma de matrizes, sendo que a demonstração de ortogonalidade de componentes, bem como os demais procedimentos, são apresentados através de produtos de Kronecker entre matrizes.

---

*Comitê Orientador: Prof. Dr. Ruben Delly Veiga-UFLA (Orientador), Prof. Dr. Joel Augusto Muniz (Co-orientador) – UFLA.

ABSTRACT

SOUZA, Francisco Regilson. **Structures and medium square expectations in non-additive models in experimental designs**. 2005. 80p. Dissertation (Master in Agronomy/Statistics and Agricultural Experimentation) - Federal University of Lavras –MG*.

This work was developed to discuss and present a methodology of construction of linear models and obtain medium squares of quadratic forms in general. These quadratic forms are directed here to the medium squares related with the analysis of variance of results obtained in analysis of experimental designs. The proposal of the methodology presented by the authors started in the 1950s. It was presented more recently and was given a fundamental approach, standing out the importance of the methodology which does not depend upon any initial presuppositions on the model in issue for the warrant of analysis of variance. The present work seeks to discuss and relate the others presented up to now, above all, by presenting examples of application linked to the most utilized experimental designs. Here the definition of the population structure leads to the definition of the model and to the construction of components which may be transformed into the sources of linear models in analysis of variance. At last, the work presents an algorithm for construction of these analyses and obtaining of the respective medium square expectations. The methodology is presented also in the form of matrices, the demonstration of orthogonality of components as well as the other procedures being presented through Kronecker's products among matrices.

---

*Guidance Committee: Prof. Dr. Ruben Delly Veiga (Adviser)-UFLA, Prof. Dr. Joel Augusto Muniz (Co-adviser) - UFLA

INTRODUÇÃO GERAL

O presente trabalho tem como proposta apresentar uma metodologia para a construção de um modelo linear que dispensa quaisquer pressuposições especiais para a validade da análise de variância. Trata-se de uma abordagem geral, aplicável tanto a modelos de classificação quanto a modelos de regressão, e ainda, os modelos aleatórios, fixo e misto são tratados aqui como casos particulares do modelo geral. Estudos relacionados com este método tiveram início ainda na década de quarenta, com Cornfield (1944), e ganharam maiores dimensões quando Cochran (1947) descreveu as conseqüências na análise de variância quando as pressuposições não são satisfeitas. Novos trabalhos surgiram a partir de então, como Tukey (1949), mas foi a partir da década de cinqüenta que os pesquisadores decidiram usar modelos deduzidos lineares ao invés de assumidos lineares. Dentre outros, esta metodologia foi defendida por Kempthorne (1952, 1955), Wilk (1955), Wilk & Kempthorne (1955, 1957), Cornfield &Tukey (1956) noutra linha, porém também considerou os modelos não aditivos; Zyskind (1958) e, por último, Kempthorne & Hinkelmann (1994), constituem o principal referencial teórico dessa metodologia.

Esta abordagem ganhou uma representação matricial por Veiga (1982), aproveitando os recursos de álgebra de matrizes para demonstrar todas as propriedades inerentes, além de viabilizar, através dos recursos da computação, a sua implementação. O uso do teorema de Cochran (Graybill & Marsaglia, 1957) torna-se necessário para demonstrar todos os requisitos necessários para a validade da análise de variância.

Na construção de um modelo matemático deduzido para uma situação experimental particular, primeiro especifica-se a identidade populacional. A identidade da população expressa a resposta real ou conceitual como uma soma dos componentes da população em que cada um mantém uma correspondência biunívoca com os possíveis valores produzidos pelo experimento; neste contexto, os modelos obtidos segundo esta abordagem são fatalmente não aditivos.

A formulação do modelo deduzido linear é feita a partir da identidade populacional, com a introdução de variáveis aleatórias Bernoulli (Mood et al, 1974) e as propriedades estatísticas do procedimento de aleatorização, que serão empregadas em todas as possíveis fontes de variação do modelo e têm o papel de selecionar e impor a aditividade dos efeitos nos valores observados ao longo de todo o experimento.

CAPÍTULO 1

RESUMO

SOUZA, Francisco Regilson. **Estruturas e esperanças de quadrados médios para modelos não-aditivos em delineamentos experimentais.** 2005. 80p. Dissertação (Mestrado em Agronomia/ Estatística e Experimentação Agropecuária)- Universidade Federal de Lavras –MG*.

Este capítulo trata das questões relacionadas com a estrutura populacional. Define-se o diagrama representativo da estrutura, bem como a identidade populacional, como bases da metodologia utilizada, de grande importância para que o modelo possa ser construído sem as pressuposições necessárias e presentes em outras metodologias. Em função da identidade populacional definem-se as médias admissíveis e respectivas componentes. São tratadas também propriedades importantes inerentes à definição da identidade populacional. Todas as definições e propriedades discutidas são fundamentais para a apresentação da análise de variância, aqui ilustradas com aplicações em modelos usuais da experimentação agropecuária.

---

*Comitê Orientador: Prof. Dr. Ruben Delly Veiga-UFLA (Orientador), Prof. Dr. Joel Augusto Muniz (Co-orientador) – UFLA.

ABSTRACT

SOUZA, Francisco Regilson. **Structures and medium square expectations in non-additive models in experimental designs.** 2005. 80p. Dissertation (Master in Agronomy/ Statistics and Agricultural Experimentation) - Federal University of Lavras –MG*.

This chapter is concerned with the issues related to the population structure. The representative diagram of the structure is defined, as well as the population identity, as bases of the utilized methodology, of great importance for the model to be able to be built without the necessary and present presuppositions in other methodologies. As related to the population identity, the admissible means and respective components are defined. Properties inherent to the definition of the population identity are also dealt with. All the definitions and properties discussed are fundamental to the presentation of the analysis of variance, here illustrated with applications in usual models of agricultural experimentation.

*Guidance Committee: Prof. Dr. Ruben Delly Veiga (Adviser)-UFLA, Prof. Dr. Joel Augusto Muniz (Co-adviser) - UFLA

ESTRUTURAS POPULACIONAIS

1.1 Introdução

O objetivo desse capítulo é definir uma estrutura populacional e apresentar uma metodologia que permita escrever uma resposta conceitual y como função dos componentes de variação que a influenciam, com todos os requisitos e propriedades necessárias para uma análise de variância. O critério para essa decomposição é baseado na identificação de todas as fontes de variação do experimento, em especial as variações não controladas, e representá-las através de componentes, de modo que a partição de y produza uma identidade populacional que reflita uma correspondência biunívoca com as causas de variação do experimento.

Zyskind (1958) formalizou uma estrutura e propôs um algoritmo com propriedades bem definidas que permitem desdobrar uma resposta y como função de componentes ortogonais, aplicável a qualquer delineamento em condições balanceadas; este algoritmo constitui a nossa referência básica para o desenvolvimento desse trabalho.

1.2 População

É um conjunto de elementos de interesse para o estudo, com pelo menos uma característica comum. A população pode ser particionada em sub populações ou subclasses disjuntas de acordo com certas regras ou critérios, que são denominados fatores. Dessa forma, uma população poderia ser um conjunto de pessoas, animais e plantas, entre outros. Os fatores poderiam ser sexo, idade, origem e tratamentos, entre outros. Os fatores são simbolizados por índices na notação para resposta.

Num delineamento em blocos casualizados, os fatores são blocos, unidades experimentais e tratamentos. Num delineamento inteiramente casualizado, os fatores de classificação são unidades experimentais e tratamento, que ainda são subdivididos em subclasses, também denominados de níveis.

1.3 Estrutura

É o conjunto de subpopulações determinadas pelos fatores que se relacionam através de hierarquia, cruzamento ou confundimento.

1.4 Embutimento

Um fator B é dito ser hierárquico ao fator A se e somente se cada nível de B ocorre com um e somente um nível de A. Desse modo, se A e B têm M e N níveis respectivamente, então os N níveis de B são arranjados em M subconjuntos disjuntos $B_1, B_2, \ldots, B_M$, cada subconjunto com $n_1, n_2, \ldots, n_M$ níveis, respectivamente, tal que o i - ésimo subconjunto ocorre apenas no i – ésimo nível de A. Se B é hierárquico a A tal que $n_1 = n_2 = \ldots = n_M$, a estrutura denominada balanceada.

Como exemplo consideram-se os fatores blocos e unidades experimentais, tais que o fator bloco tem cinco níveis, B = 1, 2, 3, 4, 5, e a unidade experimental, 20 níveis, U = 1, 2, ..., 20. Os 20 níveis (unidades experimentais) vão ser arranjados em 5 subconjuntos com 4 níveis cada, em que cada subconjunto ocorre com apenas um nível de B; assim pode-se afirmar que o fator unidade experimental está hierárquico ao fator bloco.

Um fator A é dito ser hierárquico multiplamente em um conjunto de fatores S se e somente se cada nível de A ocorre em uma, e somente uma, combinação de níveis do conjunto de fatores S. Se A é hierárquico a um conjunto de fatores S, então ele é hierárquico a cada fator de S.

Se um fator é denominado hierárquico a um conjunto de fatores S, a identificação de qualquer um de seus elementos requer também a especificação do conjunto dos elementos de S, ou seja, a identificação requer a especificação do conjunto de fatores ao qual ele é hierárquico.

1.5 Cruzamento

Dois fatores, A e B, são ditos cruzados se cada nível de A ocorre em todos níveis de B. Ainda, se dois fatores forem tais que um não é hierárquico ao outro, são denominados cruzados.

Um conjunto de fatores é dito completamente cruzado se todo nível de todo fator ocorre em toda combinação de níveis dos outros fatores.

Pode-se citar como exemplo os fatores Bloco e Tratamento, em que cada tratamento (nível) ocorre em cada bloco; dessa forma, bloco e tratamento estão cruzados.

1.6 Confundimento

Se dois fatores A e B são relacionados tal que A é hierárquico a B e B é hierárquico a A, então A e B estão completamente confundidos. Se dois fatores estão completamente confundidos em qualquer grupo de respostas, então é certamente impossível separar o efeito de um certo nível de um fator do efeito do nível correspondente do outro fator. Neste caso, os dois fatores são inseparáveis e considerados apenas um fator, ou escreve-se A = B. Como exemplo, supõe-se que t tratamentos são atribuídos a t unidades experimentais de modo que em cada unidade experimental seja aplicado apenas um tratamento.

Então qualquer diferença observada entre unidades que receberam, por exemplo, o tratamento 1 e o tratamento 2, pode ser explicada pela diferença entre tratamentos ou diferença entre unidades nas quais os tratamentos 1 e 2 caíram. Nesse caso, os fatores tratamentos e unidades estão completamente confundidos.

1.7 Notação

Num delineamento em blocos casualizados, uma resposta y_{ijk} representa o valor da unidade j que recebeu o tratamento k no bloco i e apresenta uma estrutura com fatores cruzados e hierárquicos:

$$(B:P)(T) \quad \text{ou} \quad (i:j)(K)$$

com $i=1,...,B$, $j=1,...,P$ e $k=1,...,T$.

Neste exemplo, os dois pontos entre parênteses indicam que a unidade experimental P é hierárquica ao bloco B e os fatores em parênteses diferentes são denominados cruzados; logo, o tratamento T está cruzado com o bloco B e a unidade experimental P. A identificação da parcela requer, além do valor de J, a especificação de i, ou seja, o bloco em que a parcela é hierárquica.

1.8 Diagramas de estrutura

Um gráfico de uma estrutura de resposta, denominado de diagrama de estrutura, pode ser facilmente desenhado representando cada elemento da estrutura (fatores de classificação, μ, ε), em que a média de todas as respostas μ de um dado conjunto é considerada como um fator com apenas um nível, que ocorre em todas as respostas do conjunto de fatores. Logo, todo nível de todo fator deve ocorrer naquele nível de μ. Então, todos os fatores são hierárquicos a

μ. O fator ε, que representa a medida do erro, por definição, está multiplamente hierarquizado em todos os fatores, daí é hierárquico a cada fator.

Considerando como exemplo as estruturas populacionais particulares abaixo:

(i) A (um fator de classificação);

(ii) A:B (dois fatores, com o fator B hierárquico ao fator A);

(iii) (A) (B) (dois fatores de classificação cruzada);

(iv) [(A) (B)]:C (A e B cruzados e C hierárquico a AB);

(v) (A: B)(C) (o fator B hierárquico ao fator A e C cruzado com A e B).

As estruturas populacionais exemplificadas podem ser ilustradas na figura 1.1

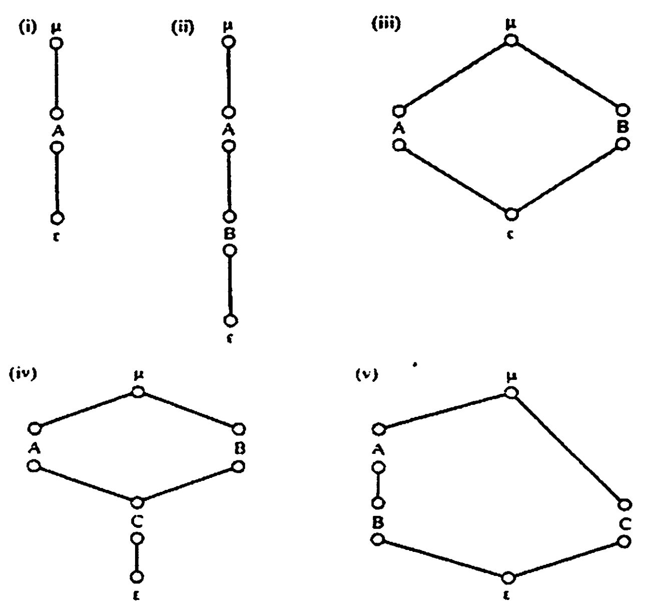

FIGURA 1.1 Representação diagramática da relação entre fatores.

Pode-se obter médias parciais populacionais sobre particulares conjuntos de índices, que serão representados pelo símbolo usual para resposta, quando são omitidos os índices sobre os quais as médias tiverem sido tomadas.

1.9 Média admissível

É aquela em que, quando um índice hierárquico aparece, então todos os índices no qual este é hierarquizado devem também aparecer. Os índices que não têm nenhum outro hierarquizado pertencem ao parêntese mais à direita.

1.9.1 Delineamento em blocos casualizados

Considera-se como exemplo a estrutura do delineamento em blocos casualizados, em que uma resposta é representada por $y_{i(jk)}$, sendo que:

j se refere à unidade experimental; $j = 1,...,J$

i se refere ao bloco; $i = 1,...,I$

k se refere ao tratamento; $k = 1,..,K$.

Para o objetivo dessa proposta, deve-se identificar todas as possíveis fontes de variação do experimento, que serão obtidas a partir das médias admissíveis.

Para a resposta $y_{i(jk)}$ as médias admissíveis são:

$$(y_{i(jk)}), (\overline{y}_{...}), (\overline{y}_{i..}), (\overline{y}_{..k}), (\overline{y}_{i(j).}), (\overline{y}_{i.k}).$$

Note que a média $\overline{y}_{.j.}$ é inadmissível, pois carece de significado físico; uma unidade experimental necessita da especificação do bloco ao qual pertence. Pela definição, um fator hierárquico nunca aparece sozinho na média. A partir de cada média parcial admissível pode-se obter combinações lineares de médias parciais, denominadas de componentes.

1.10 Componentes

São combinações lineares que serão obtidas selecionando todas as médias parciais resultantes da média parcial em questão quando nenhum, algum ou todos os índices do parêntese mais à direita são omitidos em todas as maneiras possíveis. Sempre que um número ímpar de índices é omitido, a média é precedida de um sinal negativo; sempre que um número par é omitido, a média é precedida de sinal positivo, para este fim o número zero é considerado par. A média parcial que gera o componente é denominada de termo principal do componente.

Considerando ainda o exemplo 1..9.1 de blocos casualizados, as médias admissíveis; $(y_{i(jk)}), (\overline{y}_{...}), (\overline{y}_{i..}), (\overline{y}_{..k}), (\overline{y}_{i(j).}), (\overline{y}_{i.k})$ geram os seguintes componentes:

$(\overline{y}_{...})$

$(\overline{y}_{i..} - \overline{y}_{...})$

$(\overline{y}_{..k} - \overline{y}_{...})$

$(\overline{y}_{i(j).} - \overline{y}_{i..})$

$(\overline{y}_{i.k} - \overline{y}_{i..} - \overline{y}_{..k} + \overline{y}_{...})$

$(y_{i(jk)} - \overline{y}_{i(j).} - \overline{y}_{i.k} + \overline{y}_{i..})$

1.11 Interpretação física dos componentes

1. $\overline{y}_{...}$: Média geral

2. $(\overline{y}_{i..} - \overline{y}_{...})$: Desvio da média do bloco em relação à média geral ao longo de todos os tratamentos.

3. $(\overline{y}_{ij.} - \overline{y}_{i..})$: Desvio da j-ésima parcela da média do bloco fazendo-se a média em todos os tratamentos.

4. $(\bar{y}_{..k} - \bar{y}_{...})$: Desvio do k-ésimo tratamento da média geral fazendo-se a média sobre todas as parcelas.

5. $(\bar{y}_{i.k} - \bar{y}_{i..} - \bar{y}_{..k} + \bar{y}_{...})$: Desvio do efeito do k-ésimo tratamento no bloco i do efeito geral de todos os blocos.

6. $(y_{ijk} - \bar{y}_{ij.} - \bar{y}_{i.k} + \bar{y}_{i..})$: Desvio do efeito do k-ésimo tratamento na j-ésima parcela do i-ésimo bloco do efeito médio do i-ésimo bloco.

O componente de número 5 pode ser interpretado simplesmente como o efeito da interação do k-ésimo tratamento com o i-ésimo bloco; nota-se que $(\bar{y}_{i.k} - \bar{y}_{i..} - \bar{y}_{..k} + \bar{y}_{...}) = (\bar{y}_{i.k} - \bar{y}_{i..}) - (\bar{y}_{..k} - \bar{y}_{...})$ e mede o quanto o efeito de tratamento varia de bloco para bloco. Nessa estrutura deve-se identificar todos os componentes de variação, principalmente as possíveis interações existentes.

1.12 Erro experimental

Denomina-se erro experimental os aspectos de observações repetidas feitas em condições similares para serem idênticas; as causas são classificadas como:

(1) Erros unitários ou erro de unidade devido a falhas nas unidades experimentais diferentes para produzir identicamente sob as mesmas condições de tratamento;

(2) Erros de tratamento devido à inabilidade de repetir um tratamento e as condições da sua aplicação exatamente;

(3) Erros de medidas devido a falhas em medidas repetidas na mesma situação física não corresponderem exatamente.

As causas (2) e (3) são classificadas aqui como erro técnico; o seu efeito é quantificado pelo componente $(y_{ijk} - \bar{y}_{ij.} - \bar{y}_{i.k} + \bar{y}_{i..})$ e representa a interação do k - ésimo tratamento com a j - ésima unidade experimental no bloco i, ou seja, $(y_{ijk} - \bar{y}_{ij.} - \bar{y}_{i.k} + \bar{y}_{i..}) = (y_{ijk} - \bar{y}_{ij.}) - (\bar{y}_{i.k} - \bar{y}_{i..})$. A causa (1) é denominada erro unitário, seu efeito é medido pelo componente $(\bar{y}_{ij.} - \bar{y}_{i..})$, que representa o quanto uma unidade experimental difere da sua média. Nessa classificação, o terceiro e sexto componentes representam uma partição do erro experimental; observe que, $(y_{ijk} - \bar{y}_{ij.} - \bar{y}_{i.k} + \bar{y}_{i..}) + (\bar{y}_{ij.} - \bar{y}_{i..}) = (y_{ijk} - \bar{y}_{ij.})$. No modelo linear assumido, por exemplo, admite-se que o efeito de tratamento e a unidade experimental são aditivos; nesse caso a interação tratamento x unidade experimental será negligenciada, isto é, $(y_{ijk} - \bar{y}_{ij.} - \bar{y}_{i.k} + \bar{y}_{i..}) = 0$, e o erro experimental, estimado por $(y_{i(jk)} - \bar{y}_{i.k})$, assumindo que a variação captada por este componente é aditiva ao longo de todas as unidades experimentais.

1.13 Identidade populacional

Uma resposta conceitual pode ser expressa identicamente pela soma dos componentes correspondentes. Esta relação é denominada de identidade populacional.

A identidade populacional do exemplo 1.9.1 acima é dada por:

$$y_{ijk} = \bar{y}_{...} + (\bar{y}_{i..} - \bar{y}_{...}) + (\bar{y}_{..k} - \bar{y}_{...}) + (\bar{y}_{i.k} - \bar{y}_{i..} - \bar{y}_{..k} + \bar{y}_{...}) +$$
$$+ (\bar{y}_{i(j).} - \bar{y}_{i..}) + (y_{i(jk)} - \bar{y}_{i(j).} - \bar{y}_{i.k} + \bar{y}_{i..}).$$

Nota-se que a soma de todos os componentes é igual à resposta y_{ijk}. Demonstrando-se, portanto, que a decomposição da resposta y_{ijk} segundo essa estrutura está bem definida. Vale salientar que esta decomposição constitui o princípio da técnica da análise de variância.

Nesse exemplo particular, o modelo matemático associado pode ser obtido fazendo-se na identidade populacional:

$\mu = \bar{y}_{...}$, $B_i = (\bar{y}_{i..} - \bar{y}_{...})$, $T_k = (\bar{y}_{..k} - \bar{y}_{...})$, $(BT)_{ik} = (\bar{y}_{i.k} - \bar{y}_{i..} - \bar{y}_{..k} + \bar{y}_{...})$,

$P_{i(j)} = (\overline{y}_{i(j).} - \overline{y}_{i..})$, $(TP)_{i(jk)} = (y_{i(jk)} - \overline{y}_{i(j).} - \overline{y}_{i.k} + \overline{y}_{i..})$.

Logo,

$$y_{ijk} = \mu + B_i + T_k + (BT)_{ik} + P_{i(j)} + (TP)_{i(jk)}$$

Um modelo escrito desta forma é denominado não aditivo, pois apresenta na sua constituição o efeito da interação. Nessa estrutura é importante identificar a interação e considerar o seu efeito isoladamente. Entende-se que o maior problema talvez não seja a existência da interação, mas sim o fato de não considerar o seu efeito. Esta abordagem visa mais eficiência, sem comprometer a validade da análise de variância. Observe que os dois componentes $(BT)_{ik}$ e $(TP)_{i(jk)}$ não integram o modelo linear assumido. Nesta abordagem não se admite que seus efeitos sejam aditivos nem se incorpora a interação bloco x tratamento, $(BT)_{ik}$, ao erro experimental.

1.14 Conseqüências da definição

(i) O número de médias presentes no componente é 2^p, em que p é o número de índices do parêntese mais à direita do termo principal.

Prova:

O número de médias no componente é igual ao número de subconjuntos de tamanho 0 a p que podem ser formados com os p índices. Desde que cada índice pode estar presente ou ausente em cada média, o número total de médias é igual a 2^p.

(ii) A soma dos coeficientes das médias no componente é igual a zero, exceto para o componente $y_{...}$, em que a soma é igual a um.

Prova:

Os coeficientes + 1 e - 1 são designados às médias segundo o critério do número de índices omitidos par ou ímpar, respectivamente, no componente.

Portanto, a soma destes coeficientes é dada por:

$$\binom{p}{p}-\binom{p}{p-1}+\binom{p}{p-2}+\ldots+(-1)^{p}\binom{p}{0}=$$

$$=\binom{p}{0}-\binom{p}{1}+\binom{p}{2}+\ldots+(-1)^{p}\binom{p}{p}=(1-1)^{p}=0, \quad p\neq 0.$$

1.15 Populações balanceadas

Uma estrutura populacional é balanceada se a variação de qualquer de seus índices é a mesma para todas as possíveis combinações dos valores dos outros índices. Por questões de praticidade, nesse trabalho serão abordadas apenas populações balanceadas.

1.16 Propriedades das populações balanceadas

Sejam duas propriedades imprescindíveis para o objetivo desse trabalho, que neste capítulo serão mostradas através de exemplos; no capítulo seguinte será feita uma demonstração formal com o auxílio da álgebra de matrizes.

1.16.1 Propriedade 1

Para todo tipo de componente, a soma dos valores dos componentes é zero sobre a variação de qualquer índice do parêntese mais à direita do termo principal.

No exemplo do delineamento em blocos casualizados mostrado acima, as seguintes somas são iguais a zero:

(i) $\sum_{i}(\bar{y}_{i..}-\bar{y}_{...})=\sum_{i}\bar{y}_{i..}-i\sum_{i}\frac{\bar{y}_{i..}}{i}=0$

(ii) $\sum_{k}(\bar{y}_{..k}-\bar{y}_{...})=\sum_{k}\bar{y}_{..k}-k\sum_{k}\frac{\bar{y}_{..k}}{k}=0$

(iii) $\sum_{j}(\bar{y}_{i(j).}-\bar{y}_{i..})=\sum_{j}\bar{y}_{i(j).}-j\sum_{j}\frac{\bar{y}_{i(j).}}{j}=0$

(iv) $\sum_{k}(\bar{y}_{i.k}-\bar{y}_{i..}-\bar{y}_{..k}+\bar{y}_{...})=\sum_{k}\bar{y}_{i.k}-k\sum_{k}\frac{\bar{y}_{i.k}}{k}-\sum_{k}\bar{y}_{..k}+k\sum_{k}\frac{\bar{y}_{..k}}{k}=0$

(v) $\sum_{k}(y_{i(jk)}-\bar{y}_{i(j).}-\bar{y}_{i.k}+\bar{y}_{i..})=\sum_{k}y_{i(jk)}-k\sum_{k}\frac{y_{i(jk)}}{k}-\sum_{k}\bar{y}_{i.k}+k\sum_{k}\frac{\bar{y}_{i.k}}{k}=0.$

1.16.2 Propriedade 2

A soma de quadrados das respostas sobre todos os valores de todos os índices é igual à soma de quadrados de todos os componentes sobre as variações dos mesmos índices. Esta propriedade consiste no princípio fundamental da análise de variância.

Considerando ainda o mesmo exemplo:

$$\sum_{ijk}y^2_{ijk}=\sum_{ijk}\bar{y}^2_{...}+\sum_{ijk}(\bar{y}_{i..}-\bar{y}_{...})^2+\sum_{ijk}(\bar{y}_{..k}-\bar{y}_{...})^2+\sum_{ijk}(\bar{y}_{i(j).}-\bar{y}_{i..})^2+$$
$$+\sum_{ijk}(\bar{y}_{i.k}-\bar{y}_{i..}-\bar{y}_{..k}+\bar{y}_{...})^2+\sum_{ijk}(y_{i(jk)}-\bar{y}_{i(j).}-\bar{y}_{i.k}+\bar{y}_{i..})^2,$$

a propriedade 1.16.2 é uma conseqüência direta da propriedade 1.16.1, uma vez que os duplos produtos são todos iguais a zero, pois:

(i) $\sum_{ijk}\bar{y}_{...}(\bar{y}_{i..}-\bar{y}_{...})=\sum_{jk}\bar{y}_{...}\sum_{i}(\bar{y}_{i..}-\bar{y}_{...})=0$

(ii) $\sum_{ijk}\bar{y}_{...}(\bar{y}_{..k}-\bar{y}_{...})=\sum_{ij}\bar{y}_{...}\sum_{k}(\bar{y}_{..k}-\bar{y}_{...})=0$

(iii) $\sum_{ijk}\bar{y}_{...}(\bar{y}_{i(j).}-\bar{y}_{i..})=\sum_{ik}\bar{y}_{...}\sum_{j}(\bar{y}_{i(j).}-\bar{y}_{i..})=0$

(iv) $\sum_{ijk}\bar{y}_{...}(\bar{y}_{i.k}-\bar{y}_{i..}-\bar{y}_{..k}+\bar{y}_{...})=\sum_{ij}\bar{y}_{...}\sum_{k}(\bar{y}_{i.k}-\bar{y}_{i..}-\bar{y}_{..k}+\bar{y}_{...})=0$

(v) $\sum_{ijk}\bar{y}_{...}(y_{i(jk)}-\bar{y}_{i(j).}-\bar{y}_{i.k}+\bar{y}_{i..})=\sum_{ij}\bar{y}_{...}\sum_{k}(y_{i(jk)}-\bar{y}_{i(j).}-\bar{y}_{i.k}+\bar{y}_{i..})=0.$

Este resultado é estendido para o produto entre quaisquer outros componentes.

1.17 Graus de liberdade

O número de valores linearmente independentes dos componentes de um tipo é o número graus de liberdade do tipo de componente. Também, o número de possíveis respostas linearmente independentes é o grau de liberdade do conjunto de respostas possíveis.

1.18 Analise da Variância

A análise de variância introduzida por Fisher (1947) é uma técnica que gera uma forma tabular de partição da soma de quadrados total em partes separadas, em que a cada uma pode ser dado um significado físico no sentido de descrever fontes de variação (ou complexo de fontes) associadas. Para a proposta desse trabalho, identificam-se dois tipos de análise de variância, um para a população e outro para a amostra observada. Defini-se a análise de variância da população como sendo uma partição tabular da soma de quadrados total e dos graus de liberdade de todas as respostas da população, cada parte correspondendo a um tipo de componente. Para cada componente, o quociente da soma de quadrados pelos respectivos graus de liberdade é denominado quadrado médio.

As propriedades 1.16.1 e 1.16.2 são de fundamental importância para a aplicação da técnica da análise de variância, pois permitem decompor a variação total em componentes independentes e ortogonais, condições imprescindíveis para a validade dessa técnica, que ganha mais consistência com recursos de álgebra de matrizes no capítulo 2.

A Tabela 1.1 sintetiza as médias admissíveis, componentes e somas de quadrados associados à análise de variância.

TABELA 1.1 Análise de variância populacional para um delineamento em blocos casualizados

F.V	*G.L*	*Componentes*	*Soma de Quadrados*
$\overline{y}_{...}$	1	$\overline{y}_{...}$	$\sum_{ijk} \overline{y}^2_{...}$
$\overline{y}_{i..}$	$I-1$	$(\overline{y}_{i..}-\overline{y}_{...})$	$\sum_{ijk} (\overline{y}_{i..}-\overline{y}_{...})^2$
$\overline{y}_{..k}$	$K-1$	$(\overline{y}_{..k}-\overline{y}_{...})$	$\sum_{ijk} (\overline{y}_{i(j).}-\overline{y}_{i..})^2$
$\overline{y}_{i(j).}$	$I(J-1)$	$(\overline{y}_{i(j).}-\overline{y}_{i..})$	$\sum_{ijk} (\overline{y}_{..k}-\overline{y}_{...})^2$
$\overline{y}_{i.k}$	$(I-1)(K-1)$	$(\overline{y}_{i.k}-\overline{y}_{i..}-\overline{y}_{..k}+\overline{y}_{...})$	$\sum_{ijk} (\overline{y}_{i.k}-\overline{y}_{i..}-\overline{y}_{..k}+\overline{y}_{...})^2$
$y_{i(jk)}$	$I(J-1)(K-1)$	$(y_{i(jk)}-\overline{y}_{i(j).}-\overline{y}_{i.k}+\overline{y}_{i..})$	$\sum_{ijk} (y_{i(jk)}-\overline{y}_{i(j).}-\overline{y}_{i.k}+\overline{y}_{i..})^2$
Total	$IJK-1$	$y_{i(jk)}$	$\sum_{ijk} y^2_{i(jk)}$

Esta metodologia pode ser estendida para quaisquer tipos de delineamentos experimentais com estruturas populacionais balanceadas.

A seguir serão mostrados o modelo e a análise de variância para um delineamento inteiramente casualizado com apenas um tipo de tratamento; ou seja, em uma única direção, o segundo fator representa a unidade experimental.

1.19 Delineamento inteiramente casualizado com dois fatores

A estrutura pode ser representada por (A) (B) ou (i) (j) com i = 1,..., A e j = 1,...,B e uma resposta pode ser expressa como y_{ij}; o primeiro índice i refere-se, por exemplo, ao tratamento A, e o segundo índice j refere-se à unidade experimental B. É oportuno lembrar que essa estrutura apresenta dois fatores, embora apenas um representa o tratamento, ou seja, se tem apenas um tipo de tratamento. O segundo fator diz respeito à unidade experimental, que nessa estrutura, tem classificação cruzada com tratamento.

As médias admissíveis são $y_{ij}, \bar{y}_{i.}, \bar{y}_{.j}, \bar{y}_{..}$ e possuem os seguintes componentes:

$\bar{y}_{..}$
$(\bar{y}_{i.} - \bar{y}_{..})$
$(\bar{y}_{.j} - \bar{y}_{..})$
$(y_{ij} - \bar{y}_{i.} - \bar{y}_{.j} + \bar{y}_{..})$.

Uma resposta y_{ij} pode ser expressa como função dos componentes, a qual é denominada identidade populacional, que é representada por:

$$y_{ij} = \bar{y}_{..} + (\bar{y}_{i.} - \bar{y}_{..}) + (\bar{y}_{.j} - \bar{y}_{..}) + (y_{ij} - \bar{y}_{i.} - \bar{y}_{.j} + \bar{y}_{..}).$$

O modelo matemático associado pode ser obtido fazendo-se $\mu = \bar{y}_{..}$, $T_i = (\bar{y}_{i.} - \bar{y}_{..})$, $P_j = (\bar{y}_{.j} - \bar{y}_{..})$, $(TP)_{ij} = (y_{ij} - \bar{y}_{i.} - \bar{y}_{.j} + \bar{y}_{..})$. Logo,

$$y_{ij} = \mu + T_i + P_j + (TP)_{ij}$$

e, como já mencionado antes, P_j e $(TP)_{ij}$ são componentes do erro experimental.

Pelas propriedades 1.16.1 e 1.16.2 pode-se escrever a soma de quadrados total em função dos componentes como sendo:

$$\sum_{ij} y_{ij}^2 = \sum_{ij} \bar{y}_{..}^2 + \sum_{ij} (\bar{y}_{i.} - \bar{y}_{..})^2 + \sum_{ij} (\bar{y}_{.j} - \bar{y}_{..})^2 + \sum_{ij} (y_{ij} - \bar{y}_{i.} - \bar{y}_{.j} + \bar{y}_{..})^2.$$

Esta expressão representa a decomposição da variação total em partes que correspondem aos componentes.

A análise de variância para o delineamento inteiramente casualizado com dois fatores está representada na tabela 1.2.

TABELA 1.2 Análise de variância populacional para um delineamento inteiramente casualizado com dois fatores

F. V.	*G.L*	*Componentes*	*Soma de Quadrados*
$\bar{y}_{..}$	1	$\bar{y}_{..}$	$\sum_{ij} \bar{y}_{..}^2$
$\bar{y}_{i.}$	$I-1$	$(\bar{y}_{i.} - \bar{y}_{..})$	$\sum_{ij} (\bar{y}_{i.} - \bar{y}_{..})^2$
$\bar{y}_{.j}$	$J-1$	$(\bar{y}_{.j} - \bar{y}_{..})$	$\sum_{ij} (\bar{y}_{.j} - \bar{y}_{..})^2$
y_{ij}	$(I-1)(J-1)$	$(y_{ij} - \bar{y}_{i.} - \bar{y}_{.j} + \bar{y}_{..})$	$\sum_{ij} (y_{ij} - \bar{y}_{i.} - \bar{y}_{.j} + \bar{y}_{..})^2$
Total	$IJ-1$	y_{ij}	$\sum_{ij} y_{ij}^2$

Faça-se agora a análise de variância para um delineamento com três fatores de classificação cruzada. Por exemplo, poderiam ser dois tipos diferentes de tratamentos, ou em duas direções, como também é denominado, em que o terceiro fator representa a unidade experimental.

1.20 Delineamento com três fatores completamente aleatorizados

A estrutura pode ser representada por (A)(B)(P), em que os fatores de classificação cruzada A e B representam tipos de tratamentos diferentes e P é a unidade experimental. Assim, podemos escrever (A)(B)(P) ou (ijk) com $i = 1,\ldots, A$; $j = 1,\ldots, B$ e $k = 1,\ldots,P$; nessa estrutura, uma resposta deve ser representada por y_{ijk}.

Considerando que os três fatores têm classificação cruzada, segundo o procedimento de Zyskind (1958), têm-se as seguintes médias admissíveis

$$\bar{y}_{...}, \bar{y}_{i..}, \bar{y}_{.j.}, \bar{y}_{ij.}, \bar{y}_{..k}, \bar{y}_{ik.}, \bar{y}_{.jk}, y_{ijk},$$

e os respectivos componentes são:

[redacted]

$\overline{y}_{...}$
$(\overline{y}_{i..} - \overline{y}_{...})$
$(\overline{y}_{.j.} - \overline{y}_{...})$
$(\overline{y}_{ij.} - \overline{y}_{i..} - \overline{y}_{.j.} + \overline{y}_{...})$
$(\overline{y}_{..k} - \overline{y}_{...})$
$(\overline{y}_{ik.} - \overline{y}_{i..} - \overline{y}_{.k.} + \overline{y}_{...})$
$(\overline{y}_{.jk} - \overline{y}_{.j.} - \overline{y}_{..k} + \overline{y}_{...})$
$(y_{ijk} - \overline{y}_{ij.} - \overline{y}_{i.k} - \overline{y}_{.jk} + \overline{y}_{i..} + \overline{y}_{.j.} + \overline{y}_{..k} - \overline{y}_{...}).$

A identidade populacional correspondente é dada por:

$$\begin{aligned} y_{ijk} = \overline{y}_{...} &+ (\overline{y}_{i..} - \overline{y}_{...}) + (\overline{y}_{.j.} - \overline{y}_{...}) + (\overline{y}_{ij.} - \overline{y}_{i..} - \overline{y}_{.j.} + \overline{y}_{...}) + (\overline{y}_{..k} - \overline{y}_{...}) + \\ &+ (\overline{y}_{ik.} - \overline{y}_{i..} - \overline{y}_{.k.} + \overline{y}_{...}) + (\overline{y}_{.jk} - \overline{y}_{.j.} - \overline{y}_{..k} + \overline{y}_{...}) \\ &+ (y_{ijk} - \overline{y}_{ij.} - \overline{y}_{i.k} - \overline{y}_{.jk} + \overline{y}_{i..} + \overline{y}_{.j.} + \overline{y}_{..k} - \overline{y}_{...}), \end{aligned}$$

cujo modelo matemático associado pode ser obtido fazendo-se:

$\mu = \overline{y}_{...}$, $A_i = (\overline{y}_{i..} - \overline{y}_{...})$, $B_j = (\overline{y}_{.j.} - \overline{y}_{...})$, $(AB)_{ij} = (\overline{y}_{ij.} - \overline{y}_{i..} - \overline{y}_{.j.} + \overline{y}_{...})$,
$P_k = (\overline{y}_{..k} - \overline{y}_{...})$, $(AP)_{ik} = (\overline{y}_{ik.} - \overline{y}_{i..} - \overline{y}_{.k.} + \overline{y}_{...})$, $(BP)_{jk} = (\overline{y}_{.jk} - \overline{y}_{.j.} - \overline{y}_{..k} + \overline{y}_{...})$,
$(ABP)_{ijk} = (y_{ijk} - \overline{y}_{ij.} - \overline{y}_{i.k} - \overline{y}_{.jk} + \overline{y}_{i..} + \overline{y}_{.j.} + \overline{y}_{..k} - \overline{y}_{...})$.

Logo, tem-se que:

$$y_{ijk} = \mu + A_i + B_j + (AB)_{ij} + P_k + (AP)_{ik} + (BP)_{jk} + (ABP)_{ijk},$$

em que os componentes P_k , $(AP)_{ik}$,$(BP)_{jk}$,$(ABP)_{ijk}$ representam partições do erro experimental.

As propriedades 1.16.1 e 1.16.2 garantem a identidade na soma de quadrados total como função das somas de quadrados dos componentes:

$$\begin{aligned} \sum_{ijk} y_{ijk}^2 = \sum_{ijk} y_{...}^2 &+ \sum_{ijk} (\overline{y}_{i..} - \overline{y}_{...})^2 + \sum_{ijk} (\overline{y}_{.j.} - \overline{y}_{...})^2 + \sum_{ijk} (\overline{y}_{ij.} - \overline{y}_{i..} - \overline{y}_{.j.} + \overline{y}_{...})^2 + \\ &+ \sum_{ijk} (\overline{y}_{..k} - \overline{y}_{...})^2 + \sum_{ijk} (\overline{y}_{ik.} - \overline{y}_{i..} - \overline{y}_{.k.} + \overline{y}_{...})^2 + \sum_{ijk} (\overline{y}_{.jk} - \overline{y}_{.j.} - \overline{y}_{..k} + \overline{y}_{...})^2 \\ &+ \sum_{ijk} (y_{ijk} - \overline{y}_{ij.} - \overline{y}_{i.k} - \overline{y}_{.jk} + \overline{y}_{i..} + \overline{y}_{.j.} + \overline{y}_{..k} - \overline{y}_{...})^2. \end{aligned}$$

A análise de variância correspondente encontra-se na tabela 1.3, que sintetiza as médias admissíveis, graus de liberdades e soma de quadrados.

TABELA 1.3 Análise de variância para um delineamento com três fatores completamente aleatorizados

$F.V.$	$G.L$	$Soma\ de\ Quadrados$
$\overline{y}_{...}$	1	$\sum_{ijk} \overline{y}_{...}^2$
$\overline{y}_{i..}$	$I-1$	$\sum_{ijk} (\overline{y}_{i..} - \overline{y}_{...})^2$
$\overline{y}_{.j.}$	$J-1$	$\sum_{ijk} (\overline{y}_{.j.} - \overline{y}_{...})^2$
$\overline{y}_{ij.}$	$(I-1)(J-1)$	$\sum_{ijk} (\overline{y}_{ij.} - \overline{y}_{i..} - \overline{y}_{.j.} + \overline{y}_{...})^2$
$\overline{y}_{..k}$	$K-1$	$\sum_{ijk} (\overline{y}_{..k} - \overline{y}_{...})^2$
$\overline{y}_{ik.}$	$(I-1)(K-1)$	$\sum_{ijk} (\overline{y}_{ik.} - \overline{y}_{i..} - \overline{y}_{.k.} + \overline{y}_{...})^2$
$\overline{y}_{.jk}$	$(J-1)(K-1)$	$\sum_{ijk} (\overline{y}_{.jk} - \overline{y}_{.j.} - \overline{y}_{..k} + \overline{y}_{...})^2$
y_{ijk}	$(I-1)(J-1)(K-1)$	$\sum_{ijk} (y_{ijk} - \overline{y}_{ij.} - \overline{y}_{i.k} - \overline{y}_{.jk} + \overline{y}_{i..} + \overline{y}_{.j.} + \overline{y}_{..k} - \overline{y}_{...})^2$
$Total$	IJK	$\sum_{ijk} y_{ijk}^2$

CAPÍTULO 2

RESUMO

SOUZA, Francisco Regilson. **Estruturas e esperanças de quadrados médios para modelos não-aditivos em delineamentos experimentais.** 2005. 80p. Dissertação (Mestrado em Agronomia/ Estatística e Experimentação Agropecuária)- Universidade Federal de Lavras –MG*.

Este capítulo tem por finalidade apresentar e discutir a notação matricial utilizada para representação da metodologia proposta. A estrutura populacional passa a ser descrita através da notação matricial, sendo que a matriz representativa de cada componente presente no modelo é decomposta em uma combinação linear de matrizes representativas de cada média admissível descrita naquele componente. Estas últimas, por sua vez, são definidas por produtos de Kronecker entre matrizes I's e J's, identidade e elementar, respectivamente. Esta representação matricial permite demonstrar propriedades importantes relacionadas com o modelo em questão, bem como garantir ortogonalidade e decomposição de somas de quadrados. A aplicação da notação matricial pode ser aplicada e utilizada no algoritmo para obtenção das esperanças de quadrados médios relacionados com os componentes do modelo.

---

*Comitê Orientador: Prof. Dr. Ruben Delly Veiga-UFLA (Orientador), Prof. Dr. Joel Augusto Muniz (Co-orientador) – UFLA.

ABSTRACT

SOUZA, Francisco Regilson. **Structures and medium square expectations in non-additive models in experimental designs.** 2005. 80p. Dissertation (Master in Agronomy/Statistics and Agricultural Experimentation) - Federal University of Lavras –MG*.

This chapter is intended to present and discuss the matrix notation utilized for representation of the proposed methodology. The population structure passes to be reported through the matrix notation, the representative matrix of each component present in the model is decomposed into a linear combination of matrices representative of each admissible mean reported in that component. These latter, in turn, are defined by Kronecker's products between I's and J's matrices, identity and elementary, respectively. This matrix representation allows to demonstrate important proprieties related to the model in issue, as well as to warrant orthogonality and decomposition of square sums. The application of the matrix notation cam be applied and utilized in the algorithm for obtaining of the medium square expectations related to the components of the model.

*Guidance Committee: Prof. Dr. Ruben Delly Veiga (Adviser)-UFLA, Prof. Dr. Joel Augusto Muniz (Co-adviser) - UFLA

REPRESENTAÇÃO MATRICIAL

2.1 Introdução

O propósito deste capítulo é utilizar a notação matricial para representar os modelos construídos segundo esta metodologia, tendo em vista dois objetivos principais: dispor dos recursos de álgebra de matrizes para demonstrar todas as propriedades inerentes, assim como os requisitos necessários para a validade da análise de variância, e viabilizar, através dos recursos da computação, a implementação dessa abordagem. Nessa notação, um vetor de respostas y é expresso como uma combinação linear de componentes, em que cada componente é escrito como o produto de uma matriz específica pelo vetor de respostas, sendo que essa matriz é obtida a partir do produto de Kronecker entre matrizes I's e E's, identidade e elementar, respectivamente, conforme Veiga (1982). As matrizes obtidas segundo esta definição têm o status de projetor ortogonal, representam um resultado importante para o desenvolvimento desse trabalho e têm como premissa o teorema Cochran (Graybill & Marsaglia, 1957).

Para adequação dessa metodologia, os quadrados médios são definidos em função de componentes de variação e certas combinações lineares destes foram designadas por Wilk (1955) como função sigma, que desempenham um papel importante para o desenvolvimento de um algoritmo para o cálculo de esperanças de quadrados médios.

2.2 Produto de Kronecker

O produto de Kronecker entre matrizes (Neudecker, 1969) possui características fundamentais que permitem a construção das matrizes núcleos das formas quadráticas e detém propriedades imprescindíveis para o desenvolvimento deste trabalho.

Sejam duas matrizes A_{mxn} e B_{rxs}; define-se produto de Kronecker entre A e B como sendo:

$C = A \otimes B$, em que $C = [a_{ij}B]$, com C do tipo (mr, ns).

Exemplo:

$$A \otimes B = \begin{pmatrix} a_{11}B & a_{12}B & \dots & a_{1n}B \\ a_{21}B & a_{22}B & \dots & a_{2n}B \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1}B & a_{m2}B & \dots & a_{mn}B \end{pmatrix}$$

Considere as duas matrizes I e E, em que:

I_n: matriz identidade de ordem n;

E_n: matriz elementar de ordem n, em que todos os elementos são iguais a 1.

Por definição, as matrizes I_n e E_n são simétricas. Como exemplo, considere as matrizes I_2 e E_2, então o produto de Kronecker entre elas, é a matriz

$$I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad E_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad I_2 \otimes E_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

observe que o produto entre duas matrizes de ordem 2 , é uma matriz de ordem 4.

2.2.1 Propriedades do produto de Kronecker

I. $(A \otimes B)(C \otimes D) = (AC) \otimes (BD)$

II. $(A \otimes B)' = A' \otimes B'$

III. $(A + B) \otimes (C + D) = (A \otimes C) + (A \otimes D) + (B \otimes C) + (B \otimes D)$

IV. $Tr(A \otimes B \otimes C) = Tr(A).Tr(B).Tr(C)$

V. $\lambda \otimes A = \lambda A = A \otimes \lambda = A\lambda$, λ um escalar

2.3 Identidade populacional na forma matricial

A identidade populacional numa estrutura populacional qualquer tem forma matricial:

$$I_N y = A_1 y + A_2 y + \dots + A_n y, \text{ por definição } \sum_{i=1}^{n} A_i = I_N.$$

Em que:

y: vetor formado pelas respostas;

n: número de médias admissíveis ou componentes na estrutura;

A_i: matriz que transforma o vetor y no vetor formado pelos valores do i-ésimo componente com i = 1,..., n, sendo cada matriz constituída da seguinte forma:

$$A_i = A_{i1} + A_{i2} + \dots + A_{im_i}, \text{ ou } \sum_{j=1}^{m_i} A_{ij} = A_i$$

em que:

A_{ij}: matriz que forma o vetor constituído pelos valores da j-ésima média parcial do componente i, resultante do produto de Kronecker entre matrizes I's e E's da seguinte maneira: o número de matrizes é igual ao número total de índices presentes em uma resposta individual. A cada índice presente na média corresponde uma matriz identidade indexada pela letra que representa a variação total do correspondente índice. A cada índice ausente (aquele sobre o qual está sendo calculada a média admissível) corresponde uma matriz E indexada pela letra que representa a variação total do correspondente índice. Os produtos das matrizes I's e E's cujas ordens são iguais às variações totais dos índices que as matrizes estiverem representando são feitos na mesma ordem em que os índices aparecem em uma resposta individual.

O coeficiente de A_{ij} é igual ao inverso do produto dos índices das matrizes E's, multiplicado por $(-1)^{k_j}$, sendo k_j igual ao número de índices, na média parcial j, que foram eliminados do parêntese mais à direita do termo principal do componente (mesmo sinal da média j no componente).

No exemplo 1.9.1 do delineamento em blocos casualizados, a identidade populacional é dada por:

$$y_{ijk} = \bar{y}_{...} + (\bar{y}_{i..} - \bar{y}_{...}) + (\bar{y}_{..k} - \bar{y}_{...}) + (\bar{y}_{i(j).} - \bar{y}_{i..}) + (\bar{y}_{i.k} - \bar{y}_{i..} - \bar{y}_{..k} + \bar{y}_{...}) + (y_{i(jk)} - \bar{y}_{i(j).} - \bar{y}_{i.k} + \bar{y}_{i..}).$$

Na representação matricial, cada componente está expresso pelo produto de uma matriz particular A_i com o vetor de respostas y, que obtém:

$$I_N\, y = A_1\, y + A_2\, y + A_3\, y + A_4\, y + A_5\, y + A_6\, y \text{, sendo } N = ijk.$$

As matrizes $A_i's$ são obtidas a partir de uma combinação linear de matrizes A_{ij} formadas pelo produto de Kronecker entre matrizes I's e E's, que dependem do número de médias admissíveis presentes em cada componente:

$$A_1 = A_{11}$$
$$A_2 = A_{21} - A_{22}$$
$$A_3 = A_{31} - A_{32}$$
$$A_4 = A_{41} - A_{42}$$
$$A_5 = A_{51} - A_{52} - A_{53} + A_{54}$$
$$A_6 = A_{61} - A_{62} - A_{63} + A_{64}.$$

Em que cada matriz A_i é obtida da seguinte maneira:

$$A_1 = \frac{1}{IJK} E_I \otimes E_J \otimes E_K$$
$$A_2 = \frac{1}{JK} I_I \otimes E_J \otimes E_K - \frac{1}{IJK} E_I \otimes E_J \otimes E_K$$
$$A_3 = \frac{1}{IJ} E_I \otimes E_J \otimes I_K - \frac{1}{IJK} E_I \otimes E_J \otimes E_K$$
$$A_4 = \frac{1}{k} I_I \otimes I_J \otimes E_k - \frac{1}{JK} I_I \otimes E_J \otimes E_K$$
$$A_5 = \frac{1}{J} I_I \otimes E_J \otimes I_K - \frac{1}{JK} I_I \otimes E_J \otimes E_K - \frac{1}{IJ} E_I \otimes E_J \otimes I_K + \frac{1}{IJK} E_I \otimes E_J \otimes E_K$$
$$A_6 = I_I \otimes I_J \otimes I_K - \frac{1}{K} I_I \otimes I_J \otimes E_K - \frac{1}{J} I_I \otimes E_J \otimes I_K + \frac{1}{JK} I_I \otimes E_J \otimes E_K.$$

Observa-se que as matrizes $A_i's$ possuem a mesma dimensão N, e da definição

$$\sum_{i=1}^{6} A_i = A_1 + A_2 + A_3 + A_4 + A_5 + A_6 = I_I \otimes I_J \otimes I_K = I_N .$$

Considerando ainda o exemplo do delineamento em blocos casualizados para i = 2, j = 4 e k = 2, a matriz $A_1 = A_{11}$ que transforma o vetor de respostas y no vetor formado pelas médias, conforme visto, é $A_1 = \frac{1}{IJK} E_I \otimes E_J \otimes E_K$, que é mostrada abaixo:

$$A_{11} = \frac{1}{16}\begin{pmatrix} 1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1 \\ 1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1 \\ 1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1 \\ 1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1 \\ 1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1 \\ 1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1 \\ 1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1 \\ 1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1 \\ 1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1 \\ 1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1 \\ 1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1 \\ 1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1 \\ 1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1 \\ 1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1 \\ 1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1 \\ 1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1 \end{pmatrix}$$

Uma característica do produto de Kronecker é que as matrizes I's e E's não necessariamente devem ter a mesma ordem, o que permite obter as matrizes $A_i's$, mesmo quando os fatores apresentam número de níveis diferentes.

A matriz $A_2 = A_{21} - A_{22}$, transforma o vetor de respostas y no vetor constituído dos valores dos efeitos de blocos. A matriz A_2 é obtida como segue:

$$A_2 = \frac{1}{JK} I_I \otimes E_J \otimes E_K - \frac{1}{IJK} E_I \otimes E_J \otimes E_K$$

seja a matriz $A_{21} = \frac{1}{JK} I_I \otimes E_J \otimes E_K$

$$A_{21} = \frac{1}{8}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

seja a matriz $A_{22} = \frac{1}{IJK} E_I \otimes E_J \otimes E_K$

$$A_{22} = \frac{1}{16}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A_2=\frac{1}{16}\begin{pmatrix} 1&1&1&1&1&1&1&1&-1&-1&-1&-1&-1&-1&-1&-1\\ 1&1&1&1&1&1&1&1&-1&-1&-1&-1&-1&-1&-1&-1\\ 1&1&1&1&1&1&1&1&-1&-1&-1&-1&-1&-1&-1&-1\\ 1&1&1&1&1&1&1&1&-1&-1&-1&-1&-1&-1&-1&-1\\ 1&1&1&1&1&1&1&1&-1&-1&-1&-1&-1&-1&-1&-1\\ 1&1&1&1&1&1&1&1&-1&-1&-1&-1&-1&-1&-1&-1\\ 1&1&1&1&1&1&1&1&-1&-1&-1&-1&-1&-1&-1&-1\\ 1&1&1&1&1&1&1&1&-1&-1&-1&-1&-1&-1&-1&-1\\ -1&-1&-1&-1&-1&-1&-1&-1&1&1&1&1&1&1&1&1\\ -1&-1&-1&-1&-1&-1&-1&-1&1&1&1&1&1&1&1&1\\ -1&-1&-1&-1&-1&-1&-1&-1&1&1&1&1&1&1&1&1\\ -1&-1&-1&-1&-1&-1&-1&-1&1&1&1&1&1&1&1&1\\ -1&-1&-1&-1&-1&-1&-1&-1&1&1&1&1&1&1&1&1\\ -1&-1&-1&-1&-1&-1&-1&-1&1&1&1&1&1&1&1&1\\ -1&-1&-1&-1&-1&-1&-1&-1&1&1&1&1&1&1&1&1\\ -1&-1&-1&-1&-1&-1&-1&-1&1&1&1&1&1&1&1&1 \end{pmatrix}.$$

O vetor constituído dos efeitos de blocos é obtido do produto da matriz A_2 pelo vetor de respostas y. Por procedimento análogo encontram-se todas as matrizes, que transformam o vetor de respostas y no vetor formado pelos valores do respectivo componente.

2.4 Propriedades de uma população balanceada

Aqui será vista a demonstração formal das propriedades 1.16.1 e 1.16.2 já mencionadas e exemplificadas no capítulo 1, que garantem a validade da análise de variância. Por questões de praticidade, elas serão repetidas.

2.4.1 Propriedade 1

Para todo tipo de componente, a soma dos valores dos componentes é zero sobre a variação de qualquer índice do parêntese mais à direita do termo principal.

A propriedade 2.4.1 na forma matricial equivale a mostrar $1'_N\ A_i = \varnothing$, em que:

$1'_N$: transposto do vetor de N 1's;

$\varnothing$: vetor com N elementos iguais a zero.

Para a demonstração dessa propriedade será usado o Lema 1, demonstrado a seguir:

Lema 1

Considerando o i-ésimo componente, tem-se que $1'_N \; A_{ij} = 1'_N$.

Prova:

Supõe-se que sejam i, j,..., k os índices que representam os fatores, cujas variações totais sejam A, B,..., K, respectivamente. A matriz A_{ij} poderá ser obtida de duas maneiras, a considerar:

1ª possibilidade:

A matriz relativa ao índice i é a matriz I_A. Nesse caso, A_{ij} é representada por:

$A_{ij} = I_A \otimes \frac{1}{V} P$, em que:

P: produto de Kronecker entre I's e E's relativos aos índices j, ..., k.

V: produto das variações dos índices correspondentes às matrizes E's em P, ou seja, índices ausentes na j-ésima média do componente. Então, $1'_N \, A_{ij} = 1'_N \, (I_A \otimes \frac{1}{V} P)$, em que N = A. B.... K das propriedades:

$(A \otimes B)(C \otimes D) = AC \otimes BD$ e $1'_N = 1'_A \otimes 1'_B \otimes ... \otimes 1'_K$ com $N = A.B.....K$

Decorre que:

$$1'_N \, A_{ij} = 1'_N \, (I_A \otimes \frac{1}{V} P) = (1'_A \otimes 1'_B \otimes ... \otimes 1'_K)(I_A \otimes \frac{1}{V} P) =$$

$$= 1'_A \, I_A \otimes (1'_B ... 1'_K . \frac{1}{V} P) = 1'_A \otimes (1'_B ... 1'_K . \frac{1}{V} P).$$

O mesmo raciocínio é empregado para o produto $(1'_B ... 1'_K . \frac{1}{V} P)$.

Considerando agora a segunda possibilidade:

<u>2ª possibilidade:</u>

A matriz relativa ao índice i é a matriz E_A. Nesse caso, A_{ij} é representada por $A_{ij} = \frac{1}{A} E_A \otimes \frac{1}{V} P$. Usando as propriedades já mencionadas, temos:

$$1'_N A_{ij} = 1'_N (\frac{1}{A} E_A \otimes \frac{1}{V} P) = (1'_A \otimes 1'_B \otimes ... \otimes 1'_K)(\frac{1}{A} E_A \otimes \frac{1}{V} P) =$$

$$= 1'_A \frac{1}{A} E_A \otimes (1'_B ... 1'_K . \frac{1}{V} P) = \frac{1}{A} 1'_A 1_A 1'_A \otimes (1'_B ... 1'_K . \frac{1}{V} P)$$

$$= \frac{1}{A} A\ 1'_A \otimes (1'_B ... 1'_K . \frac{1}{V} P) = 1'_A \otimes (1'_B ... 1'_K . \frac{1}{V} P)$$

o produto $(1'_B ... 1'_K . \frac{1}{V} P)$ segue raciocínio análogo ou de acordo com a primeira possibilidade. Logo, $1'_N A_{ij} = 1'_A \otimes 1'_B \otimes ... \otimes 1'_K = 1'_N$, que prova o Lema 1.

Para provar 2.4.1, basta observar que no produto $1'_N A_i$ aparecem tantos $1'_N$ s quantos forem as médias parciais no componente i (pelo Lema 1).

Todavia, por 1.14. (ii), a soma dos coeficientes dessas médias se anulam, ou seja:

$1'_N A_i = \varnothing$, com $\varnothing$ o vetor formado por N elementos iguais a zero.

Para exemplificar a propriedade 2.4.1 considera-se a matriz A_3 relativa ao componente $(\bar{y}_{..k} - \bar{y}_{...})$, formado pela média parcial $\bar{y}_{..k}$ do exemplo 1.9.1, que se refere a um delineamento em blocos casualizados.

$$A_3 = \frac{1}{IJ} E_I \otimes E_J \otimes I_K - \frac{1}{IJK} E_I \otimes E_J \otimes E_K$$

Exemplificar a validade de 2.4.1equivale a mostrar que $1'_{IJK} A_3 = \varnothing$. Utilizando as propriedades já conhecidas do produto de Kronecker, mostra-se que:

$$(1'_I \otimes 1'_J \otimes 1'_K)(\frac{1}{IJ} E_I \otimes E_J \otimes I_K - \frac{1}{IJK} E_I \otimes E_J \otimes E_K) =$$

$$(1_I' \otimes 1_J' \otimes 1_K')(\frac{1}{IJ}E_I \otimes E_J \otimes I_K) - (1_I' \otimes 1_J' \otimes 1_K')(\frac{1}{IJK}E_I \otimes E_J \otimes E_K) =$$
$$(\frac{1}{IJ}1_I' E_I) \otimes (1_J' E_J) \otimes (1_K' I_K) - (\frac{1}{IJK}1_I' E_I) \otimes (1_J' E_J) \otimes (1_K' E_K) =$$
$$(\frac{1}{IJ}1_I' 1_I 1_I') \otimes (1_J' 1_J 1_J') \otimes (1'_K) - (\frac{1}{IJK}1_I' 1_I 1_I') \otimes (1_J' 1_J 1_J') \otimes (1_K' 1_K 1_K') =$$
$$(\frac{1}{IJ}I1_I') \otimes (J1_J') \otimes (1_K') - (\frac{1}{IJK}I1_I') \otimes (J1_J') \otimes (K1_K') =$$
$$= 1_{IJK}' - 1_{IJK}' = \varnothing.$$

2.4.2 Propriedade 2

A soma de quadrados das respostas sobre todos os valores de todos os índices é igual à soma de quadrados de todos os componentes sobre as variações dos mesmos índices.

Provar esta propriedade é equivalente a mostrar, na identidade populacional:

$$I_N\, y = A_1\, y + A_2\, y + \ldots + A_n\, y,$$

a validade de:

$$y' I_N\, y = y' A_1\, y + y' A_2\, y + \ldots + y' A_n\, y,$$

que significa, na forma matricial, a decomposição da variação total em partes, que correspondem aos componentes, e consiste no princípio fundamental da análise de variância. Esta demonstração será feita com base no teorema de Cochran (Graybill & Marsaglia, 1957), enunciado da seguinte maneira:

Teorema 1

Sejam $A_1 \ldots A_n$ matrizes simétricas de dimensão r x r. Seja I_N a matriz identidade de ordem N, com $\sum_{i=1}^{n} A_i = I_N$, em que $r(I_N) = N$ e $r(A_i) = r_i$, sendo r (A_i) o posto da matriz A_i, definido pelo número de linhas ou colunas linearmente independentes de A_i.

As seguintes condições são equivalentes:

$(a)\ A_i^2 = A_i$

$(b)\ A_i A_j = \varnothing, \quad$ se $\quad i \neq j$

$(c)\ \sum_{i=1}^{n} r_i = N$

A validade de qualquer uma das condições (a), (b) ou (c) garante a validade das outras duas. Como a condição (a) é válida conforme Veiga (1982), e com a equivalência dada pelo teorema de Cochran (Graybill & Marsaglia, 1957) nas condições, conclui-se pela validade de (b) e (c).

Da idempotência das matrizes A'_is decorrem resultados importantes, os quais serão usados oportunamente, como, por exemplo, o de relacionar o posto de uma matriz A_i como sendo igual ao grau de liberdade do componente a ela associado; neste caso, o posto é igual ao traço da matriz. Maiores detalhes podem ser encontrados em Searle et al. (1992).

Como exemplo, considere a matriz A_3 relativa ao componente $A_3 y$, formado pela média parcial do exemplo 1.9.1, que se refere ao delineamento em blocos casualizados:

$$A_3 = \frac{1}{IJ} E_I \otimes E_J \otimes I_K - \frac{1}{IJK} E_I \otimes E_J \otimes E_K$$

para mostrar que A_3 é idempotente, deve-se mostrar que $A_3^2 = A_3$:

$$A_3^2 = (\frac{1}{IJ} E_I \otimes E_J \otimes I_K - \frac{1}{IJK} E_I \otimes E_J \otimes E_K)(\frac{1}{IJ} E_I \otimes E_J \otimes I_K - \frac{1}{IJK} E_I \otimes E_J \otimes E_K)$$
$$= (\frac{1}{IJ} E_I \otimes E_J \otimes I_K)(\frac{1}{IJ} E_I \otimes E_J \otimes I_K - \frac{1}{IJK} E_I \otimes E_J \otimes E_K) -$$
$$-(\frac{1}{IJK} E_I \otimes E_J \otimes E_K)(\frac{1}{IJ} E_I \otimes E_J \otimes I_K - \frac{1}{IJK} E_I \otimes E_J \otimes E_K) =$$
$$= (\frac{1}{I^2 J^2} E_I E_I \otimes E_J E_J \otimes I_K) - (\frac{1}{I^2 J^2 K} E_I E_I \otimes E_J E_J \otimes E_K) -$$
$$-(\frac{1}{I^2 J^2 K} E_I E_I \otimes E_J E_J \otimes E_K) + (\frac{1}{I^2 J^2 K^2} E_I E_I \otimes E_J E_J \otimes E_K E_K) =$$

$$A_3^2 = \frac{1}{I^2J^2} IE_I \otimes JE_J \otimes I_K - \frac{1}{I^2J^2K} IE_I \otimes JE_J \otimes E_K -$$
$$- \frac{1}{I^2J^2K} IE_I \otimes JE_J \otimes E_K + \frac{1}{I^2J^2K^2} IE_I \otimes JE_J \otimes KE_K =$$
$$= \frac{1}{IJ} E_I \otimes E_J \otimes I_K - \frac{1}{IJK} E_I \otimes E_J \otimes E_K = A_3.$$

A condição (b) $A_i\, A_j = \varnothing$, se $i \neq j$ garante a ortogonalidade dos componentes $A_i y$ e $A_j y$, condição imprescindível para a validade da análise de variância, pois permite a decomposição de uma resposta como uma soma direta de seus componentes, que será aqui também ilustrada através de um exemplo. Considere as matrizes A_1 e A_2 relativas aos componentes $A_1 y$ e $A_2 y$ formados pelas médias parciais do exemplo 1.9.1; desse modo deve-se mostrar que $A_1\, A_2 = \varnothing$.

$$A_1\, A_2 = \left(\frac{1}{IJK} E_I \otimes E_J \otimes E_K\right)\left(\frac{1}{JK} I_I \otimes E_J \otimes E_K - \frac{1}{IJK} E_I \otimes E_J \otimes E_K\right) =$$
$$= \frac{1}{IJ^2K^2} E_I\, I_I \otimes E_J E_J \otimes E_K E_K - \frac{1}{I^2J^2K^2} E_I\, E_I \otimes E_J\, E_J \otimes E_K\, E_K =$$
$$= \frac{1}{IJ^2K^2} E_I \otimes E_J\, E_J \otimes E_K\, E_K - \frac{1}{I^2J^2K^2} 1_I\, 1_I'\, 1_I\, 1_I' \otimes E_J\, E_J \otimes E_K\, E_K =$$
$$= \frac{1}{IJ^2K^2} E_I \otimes E_J\, E_J \otimes E_K\, E_K - \frac{1}{I^{\cancel{2}}J^2K^2} \cancel{I} E_I \otimes E_J\, E_J \otimes E_K\, E_K = \varnothing$$

Teorema 2

Considerando um certo componente $A_i y$, com $A_i = A_{i1} + A_{i2} + \ldots + A_{im_i}$

$A_i y = \sum_j \pm A_{ij} y$, sendo $r_i = r(A_i)$ e $r_{ij} = r(A_{ij})$. Então $r_i = \sum_j \pm r_{ij}$

Prova:

A_i é simétrica e idempotente, então o posto de A_i é igual ao traço, ou seja, $r(A_i) = tr(A_i) = tr(\sum_j \pm A_{ij}) = \sum_j \pm\, tr(A_{ij})$, pela propriedade do traço, mas A_{ij} é simétrica e idempotente, da mesma forma, pode-se escrever então que o posto de A_{ij} é igual ao traço. logo $tr(A_{ij}) = r(A_{ij})$ e, portanto:

$\sum_j \pm tr(A_{ij}) = \sum_j \pm r(A_{ij}) = \sum_j \pm r_{ij}$, ou ainda, $r_i = \sum_j \pm r_{ij}$.

Como exemplo considere a matriz $A_2 = A_{21} - A_{22}$ obtida na seção 1.3. Pelo teorema 2, $r(A_2) = tr(A_2) = tr(A_{21}) - tr(A_{22}) = \frac{1}{8}.16 - \frac{1}{16}.16 = 1$ de fato está de acordo, pois o posto da matriz A_2, que corresponde ao número de linhas linearmente independentes, é igual a 1. Da idempotência de A_2 tem-se também que o posto é igual ao traço, ou seja, $r(A_2) = tr(A_2) = \frac{1}{16}.16 = 1$.

2.4.3 Propriedade 3

Seja o componente $A_i y$ com $A_i = A_{i1} + A_{i2} + ... + A_{im}$. A dimensão do subespaço a que pertence cada componente é dada por:

$r(A_i) = \sum_j \pm r_{ij} \quad e \quad r_{ij} = r(A_{ij}) = tr(A_{ij}) = p$,

em que:

P= Produto das variações totais dos índices de uma resposta individual que estiverem representados em Aij por uma matriz I. Se todas as matrizes em Aij forem matrizes E, então p = 1.

<u>Prova:</u>

A_{ij} é simétrica e idempotente, então: $r(A_{ij}) = tr(A_{ij})$ deve-se lembrar que $tr(I_A) = A$ e $tr(\frac{1}{A}E_A) = \frac{1}{A}A = 1$, e considerando que A_{ij} é formada pelo produto de Kronecker entre I's e E's e a propriedade IV do produto de Kronecker $tr(A \otimes B \otimes ... \otimes K) = tr(A).tr(B).....tr(K)$, pode-se afirmar que $tr(A_{ij}) = p$.

Considerando, ainda no exemplo 1.9.1, o componente $A_2 y$,

$$A_2 = \frac{1}{JK} I_I \otimes E_J \otimes E_K - \frac{1}{IJK} E_I \otimes E_J \otimes E_K$$

$$r_{21} = r(A_{21}) = \frac{1}{JK} tr(I_I) tr(E_J) tr(E_K) = \frac{1}{JK} IJK = I$$

$$r_{22} = r(A_{22}) = \frac{1}{IJK} tr(E_I) tr(E_J) tr(E_K) = \frac{1}{IJK} IJK = 1$$

$$r_2 = r(A_2) = r_{21} - r_{22} = I - 1.$$

De forma alternativa pode-se obter dimensão do subespaço, de acordo com 2.4.3, tomando simplesmente o índice presente na primeira média, I, subtraindo 1, por todos os índices estarem ausentes na segunda média:

$$(\overline{y}_{i..} - \overline{y}_{...})$$

$$r_2 = r(A_2) = I - 1.$$

Tomando ainda como exemplo a matriz $A_2 = A_{21} - A_{22}$ obtida na seção 1.3. Pela propriedade 3, a dimensão do subespaço a que pertence o componente A_2y é dada por $r(A_2) = tr(A_{21}) - tr(A_{22}) = \frac{1}{8}.16 - \frac{1}{16}.16 = 1$, como foram tomados dois blocos como exemplo $r_2 = r(A_2) = 2 - 1 = 1$, o que reafirma o resultado anterior.

2.4.4 Propriedade 4

A soma das dimensões dos subespaços que contêm cada componente é N, número de respostas.

<u>Prova:</u>

Cada componente é uma transformação linear do vetor de respostas. Chamando de Z o vetor formado pelos n componentes, obtém-se:

$Z = Ay$, sendo A uma matriz n x N; porém, por 2.4.2 temos que:

$y'y = z'z$, então $y'y = z'z = y'A'Ay$, ou seja, $A'A = I_N$, e ainda:

$r(A) = r(A'A) = r(I_N) = N$, que prova 2.4.2.

As propriedades 2.4.3 e 2.4.4 utilizam-se da importante relação entre o posto da matriz núcleo da forma quadrática com os graus de liberdade para sistematizar a identificação dos g.l's dos componentes e total. O posto da matriz representa o número de linhas ou colunas linearmente independentes da matriz, ou ainda a dimensão do subespaço gerado por elas. Nesse contexto definem-se graus de liberdade (g.l) do componente como dimensão do subespaço a que ele pertence. A tabela 2.1 é uma síntese dos componentes e dos respectivos g.l's do exemplo 1.9.1.

TABELA 2.1 Componentes e os respectivos graus de liberdade para um delineamento em blocos casualizados

Componentes	*Graus de liberdade*
$\bar{y}_{...}$	$r_1 = r(A_1) = 1$
$(\bar{y}_{i..} - \bar{y}_{...})$	$r_2 = r(A_2) = I - 1$
$(\bar{y}_{..k} - \bar{y}_{...})$	$r_3 = r(A_3) = K - 1$
$(\bar{y}_{i(j).} - \bar{y}_{i..})$	$r_4 = r(A_4) = I(J-1)$
$(\bar{y}_{i.k} - \bar{y}_{i..} - \bar{y}_{..k} + \bar{y}_{...})$	$r_5 = r(A_5) = (I-1)(K-1)$
$(y_{i(jk)} - \bar{y}_{i(j).} - \bar{y}_{i.k} + \bar{y}_{i..})$	$r_6 = r(A_6) = I(J-1)(K-1)$
$y_{i(jk)}$	$r(A) = r_1 + r_2 + r_3 + r_4 + r_5 + r_6 = IJk$

Na tabela 2.1 observa-se que o posto da matriz, núcleo da forma quadrática, é dimensionalmente igual ao grau de liberdade do componente associado a ela, bem como a soma dos g.l's de todos os componentes reproduz os g.l's total. Geometricamente, o número de graus de liberdade associado a cada componente é a dimensão do subespaço que o contém. A figura 2.1 ilustra a decomposição dos g.l's para o caso de um delineamento com três componentes.

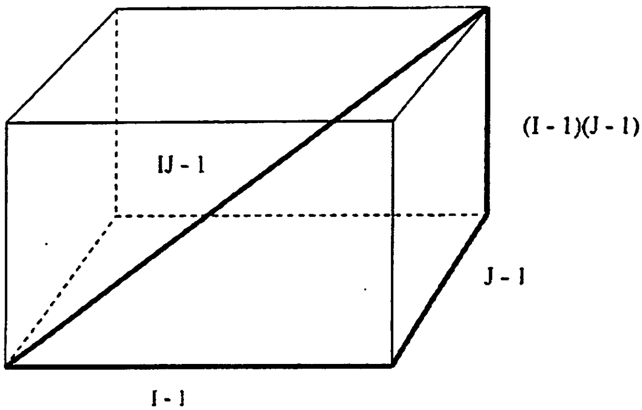

FIGURA 2.1 Número total de graus de liberdade em função do número de graus de liberdade dos três componentes

2.4.5 Propriedade 5

Para todo tipo de componente, a soma de quadrados de valores do componente sobre as variações de todos os índices de uma resposta é igual à soma sobre os mesmos índices de uma função linear de quadrados das médias parciais que formam o componente, sendo os coeficientes dos quadrados iguais aos que definem o componente em termos correspondentes médias parciais.

Prova:

Provar a propriedade 2.4.5 significa mostrar que $(A_i y)'(A_i y) = y' A_i y$, mas $(A_i y)'(A_i y) = y' A'_i A_i y$; como A_i é idempotente, temos $A'_i A_i = A_i$, então: $(A_i y)'(A_i y) = y' A'_i A_i y = y' A_i y$.

2.4.6 Interpretação dos componentes

Sabe-se que a identidade algébrica é dada por $y = A_1 y + \ldots + A_n y$, em que as matrizes que promovem as transformações A_i são simétricas e idempotentes, com $I = A_1 + ... + A_n$ e $A_i A_j = \varnothing$, logo um vetor de respostas y se decompõe como uma soma direta dos componentes $A_i y$, em que cada $A_i y$ representa a projeção ortogonal do vetor de respostas no espaço coluna da matriz A_i.

Decorrem daí resultados importantes, tais como:

(i) Cada A_i y é uma aproximação de mínimos quadrados de y no espaço coluna de A_i;

(ii) As formas quadráticas y' A_i y são aditivas, por força da ortogonalidade de A_i y e A_j y ($i \neq j$). Esta é à base da análise de variância;

(iii) Cada termo A_i y pode, pela construção, ser facilmente interpretável de modo útil na análise do vetor y;

(iv) Cada A_i tem status de um projetor ortogonal.

Considerando cada componente como um vetor, a análise de variância pode ser interpretada geometricamente conforme figura 2.2, para o caso de um delineamento contendo três componentes.

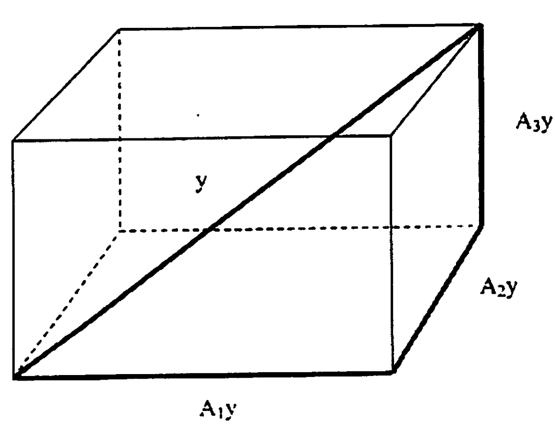

FIGURA 2.2 Partição do vetor de respostas em função dos três componentes

[redacted]

2.4.7 Componente de variação (CV)

Denota-se componente de variação por σ^2 indexado pelas variações dos correspondentes índices usados nas médias admissíveis e será determinado como segue:

A soma de quadrados dos valores dos componentes de um certo tipo, sobre as variações dos índices do termo principal do componente, dividida pelo número de graus de liberdade do componente, é chamada componentes de variação (CV).

No exemplo 1.9.1. de blocos casualizados, as médias admissíveis são $(y_{i(jk)}), (\overline{y}_{...}), (\overline{y}_{i..}), (\overline{y}_{..k}), (\overline{y}_{i(j).}), (\overline{y}_{i.k})$, com os respectivos componentes de variação dados por $\sigma^2_{B(PT)}$, $\sigma^2_{\varnothing}$, σ^2_{B}, σ^2_{T}, $\sigma^2_{B(P)}$, σ^2_{BT}. Nessa notação, usa-se o símbolo $\varnothing$ para denotar ausência de todos os índices. Pela definição, para cada componente da expressão da soma de quadrados, determina-se o correspondente componente de variação, como exemplificado abaixo:

$$\sigma^2_{\varnothing} = \overline{y}^2_{...}$$

$$\sigma^2_{B} = \frac{1}{B-1}\sum_{i}(\overline{y}_{i..} - \overline{y}_{...})^2$$

$$\sigma^2_{T} = \frac{1}{T-1}\sum_{k}(\overline{y}_{..k} - \overline{y}_{...})^2$$

$$\sigma^2_{BT} = \frac{1}{(B-1)(T-1)}\sum_{ik}(\overline{y}_{i.k} - \overline{y}_{i..} - \overline{y}_{..k} + \overline{y}_{...})^2$$

$$\sigma^2_{B(P)} = \frac{1}{B(P-1)}\sum_{ij}(\overline{y}_{i(j).} - \overline{y}_{i..})^2$$

$$\sigma^2_{B(PT)} = \frac{1}{B(P-1)(T-1)}\sum_{ijk}(y_{i(jk)} - \overline{y}_{i(j).} - \overline{y}_{i.k} + \overline{y}_{i..})^2.$$

Seja agora encontrar uma expressão para o cálculo dos quadrados médios dos componentes em função dos componentes de variação definidos.

2.4.8 Quadrado médio

Denomina-se quadrado médio o quociente da soma de quadrados de certo componente pelos respectivos graus de liberdade associados. Os quadrados médios serão aqui determinados em função dos componentes de variação.

No exemplo 1.9.1 de blocos casualizados temos os seguintes quadrados médios:

$$\sum_{ijk} \bar{y}^2_{...} = BPT\sigma^2_{\emptyset}$$

$$\frac{1}{B-1}\sum_{ijk}(\bar{y}_{i..} - \bar{y}_{...})^2 = \frac{PT}{B-1}\sum_{i}(\bar{y}_{i..} - \bar{y}_{...})^2 = PT\sigma^2_B$$

$$\frac{1}{T-1}\sum_{ijk}(\bar{y}_{..k} - \bar{y}_{...})^2 = \frac{BP}{T-1}\sum_{k}(\bar{y}_{..k} - \bar{y}_{...})^2 = BP\sigma^2_T$$

$$\frac{1}{(B-1)(T-1)}\sum_{ijk}(\bar{y}_{i.k} - \bar{y}_{i..} - \bar{y}_{..k} + \bar{y}_{...})^2 = P\sigma^2_{BT}$$

$$\frac{1}{B(P-1)}\sum_{ijk}(\bar{y}_{i(j).} - \bar{y}_{i..})^2 = T\sigma^2_{B(P)}$$

$$\frac{1}{B(P-1)(T-1)}\sum_{ijk}(y_{i(jk)} - \bar{y}_{i(j).} - \bar{y}_{i.k} + \bar{y}_{i..})^2 = \sigma^2_{B(PT)}.$$

2.4.9 Função sigma (Σ)

Aqui será introduzida uma função linear de componentes de variação definida por Wilk (1955), a qual foi designada de sigma maiúscula (Σ). Esta função foi usada também em trabalhos posteriores por Wilk & Kempthorne (1955 e 1957). A função sigma tem o papel de simplificar as expressões das esperanças de quadrados médios.

Definição:

Considere um determinado tipo de componente e todo os σ^2's da seguinte forma:

(i) O conjunto dos índices do termo principal do componente é subconjunto do conjunto de índices do σ^2.

(ii) Os índices em excesso estão exclusivamente no parêntese mais à direita do σ^2.

A combinação linear de todos estes σ^2's, em que o coeficiente de um σ^2, em particular, com k índices em excesso, é:

$(-1)^k$ (produto das variações dos índices em excesso)$^{-1}$ é definida como Σ correspondente ao tipo de componente considerado.

Ainda com relação ao exemplo 1.9.1 do delineamento em blocos casualizados, para cada componente de variação obtido (σ^2) escreve-se um sigma (Σ), com os mesmos índices. Assim, para os componentes de variação $\sigma^2_{B(PT)}$, $\sigma^2_{\varnothing}$, σ^2_B, σ^2_T, $\sigma^2_{B(P)}$, σ^2_{BT}, tem-se $\sum_{B(PT)}, \sum_{\varnothing}, \sum_B, \sum_T, \sum_{B(P)}, \sum_{BT}$.

Pela definição, cada sigma (Σ) é uma combinação linear de componentes de variação (σ^2), de modo que, só entra nesta combinação os componentes em que o seu conjunto de índices contém o conjunto de índices do sigma e o excesso pertence ao parêntese mais à direita. Para o caso do delineamento em blocos, as funções sigmas Σ's são obtidas como segue:

$$\sum_{\varnothing} = \sigma^2_{\varnothing} - \frac{1}{B}\sigma^2_B - \frac{1}{T}\sigma^2_T + \frac{1}{BT}\sigma^2_{BT}$$

$$\sum_B = \sigma^2_B - \frac{1}{P}\sigma^2_{B(P)} - \frac{1}{T}\sigma^2_{BT} + \frac{1}{PT}\sigma^2_{B(PT)}$$

$$\sum_T = \sigma^2_T - \frac{1}{B}\sigma^2_{BT}$$

$$\sum_{BT} = \sigma^2_{BT} - \frac{1}{P}\sigma^2_{B(PT)}$$

$$\sum_{B(P)} = \sigma^2_{B(P)} - \frac{1}{T}\sigma^2_{B(PT)}$$

$$\sum_{B(PT)} = \sigma^2_{B(PT)}.$$

A tabela 2.2 sintetiza as fontes de variação, somas de quadrados dos componentes com seus respectivos graus de liberdades e quadrados médios populacionais para um delineamento em blocos casualizados.

TABELA 2.2 Análise de variância populacional para um delineamento em blocos casualizados

F.V	G.L	S.Q	Q.M
$(\bar{y}_{...})$	1	$\sum_{ijk} \bar{y}_{...}^2$	$BPT\sigma_{\emptyset}^2$
$(\bar{y}_{i..})$	$B-1$	$\sum_{ijk} (\bar{y}_{i..} - \bar{y}_{...})^2$	$PT\sigma_B^2$
$(\bar{y}_{..k})$	$T-1$	$\sum_{ijk} (\bar{y}_{..k} - \bar{y}_{...})^2$	$BP\sigma_T^2$
$(\bar{y}_{i.k})$	$(B-1)(T-1)$	$\sum_{ijk} (\bar{y}_{i.k} - \bar{y}_{i..} - \bar{y}_{..k} + \bar{y}_{...})^2$	$P\sigma_{BT}^2$
$(\bar{y}_{i(j).})$	$B(P-1)$	$\sum_{ijk} (\bar{y}_{i(j).} - \bar{y}_{i..})^2$	$T\sigma_{B(P)}^2$
$(y_{i(jk)})$	$B(P-1)(T-1)$	$\sum_{ijk} (y_{i(jk)} - \bar{y}_{i(j).} - \bar{y}_{i.k} + \bar{y}_{i..})^2$	$\sigma_{B(PT)}^2$
Total	BPT	$\sum_{ijk} y_{ijk}^2$	

CAPÍTULO 3

RESUMO

SOUZA, Francisco Regilson. **Estruturas e esperanças de quadrados médios para modelos não-aditivos em delineamentos experimentais.** 2005. 80p. Dissertação (Mestrado em Agronomia/ Estatística e Experimentação Agropecuária)- Universidade Federal de Lavras –MG*.

Este capítulo destaca a importância da metodologia proposta quanto à dedução do modelo linear a partir da identidade populacional, sobretudo quanto à ausência da necessidade de pressuposições sobre a forma da resposta observada como uma função de fatores que a influenciam. Aqui a abordagem descrita por vários autores na utilização de variáveis de Bernoulli auxilia na definição do modelo e na obtenção do modelo deduzido. Esta metodologia empregada em todos os componentes do modelo possibilita o relacionamento da estrutura populacional com a estrutura amostral e da obtenção do experimento propriamente dito.

---

*Comitê Orientador: Prof. Dr. Ruben Delly Veiga-UFLA (Orientador), Prof. Dr. Joel Augusto Muniz (Co-orientador) – UFLA.

ABSTRACT

SOUZA, Francisco Regilson. **Structures and medium square expectations in non-additive models in experimental designs.** 2005. 80p. Dissertation (Master in Agronomy/ Statistics and Agricultural Experimentation) - Federal University of Lavras –MG*.

This chapter stresses the importance of the methodology proposed as regards the deduction of the linear model from the population identity, above all, concerning the absence of the need of presuppositions about the form of the response observed as a function of factors which influence it. Here the approach reported by a number of authors in the utilization of Bernoulli's variables helps in the definition of the deducted model. This methodology employed in all the components of the model enables the relationship of the population structure with the sample structure and of the obtaining of the properly stated experiment.

*Guidance Committee: Prof. Dr. Ruben Delly Veiga (Adviser)-UFLA, Prof. Dr. Joel Augusto Muniz (Co-adviser) - UFLA

MODELO DEDUZIDO LINEAR PARA UM DELINEAMENTO COMPLETAMENTE ALEATORIZADO

3.1 Introdução

Neste capítulo será deduzido um modelo linear a partir de uma identidade populacional considerando delineamentos completamente aleatorizados. O modelo linear obtido segundo esta abordagem é geral; a situação de delineamentos que envolvem modelos aleatórios, mistos e fixos é tratada aqui como casos particulares. O modelo é deduzido com auxílio de variáveis aleatórias Bernoulli (Mood et al, 1974) empregadas em todos os componentes do modelo, as quais foram usadas inicialmente para este fim por Cornfield (1944) e Kempthorne (1952). Estas variáveis aleatórias desempenham o papel de identificar os valores dos efeitos nas observações produzidas pelo experimento e sobre o qual é imposta a aditividade ao longo de todos os valores observados.

Uma característica dos modelos deduzidos é que sua aplicação não requer nenhuma suposição quanto à forma da resposta como uma função dos valores dos fatores que a influenciam, e a análise de variância obtida independe de quaisquer pressuposições especiais.

3.2 Estruturas amostrais

A identidade amostral é construída de maneira análoga à populacional, permanecendo válidas todas as propriedades para população necessárias para a validade da análise de variância. Um valor observado na amostra é representado pelo símbolo x, com índices que representam os fatores; o asterisco no expoente de cada índice serve para diferenciar índice populacional e amostral.

3.3 Modelo deduzido linear

O modelo deduzido linear é obtido a partir de uma situação experimental, em que uma amostra é considerada após um amplo processo de aleatorização em todos os fatores envolvidos no modelo. Uma resposta conceitual é uma função de componentes que reflete todas as possíveis fontes de variação no experimento; assim, num valor observado no experimento são identificados todos os efeitos que o constituem, e sobre os quais é imposta a aditividade com auxílio de variáveis aleatórias ao longo de todas as observações do experimento.

3.3.1 Delineamento inteiramente casualizado com dois fatores

Uma resposta conceitual para um delineamento inteiramente casualizado com dois fatores pode ser representada por y_{ik}, em que k representa a unidade experimental na qual o tratamento i é aplicado. É importante lembrar que, nesta estrutura, tratamento e unidades experimentais são fatores de classificação cruzada que se pode denotar por (T)(P) ou (ik) com i = 1,..., T e k = 1,..., P, e identidade populacional dada por:

$$y_{ik} = \bar{y}_{..} + (\bar{y}_{i.} - \bar{y}_{..}) + (\bar{y}_{.k} - \bar{y}_{..}) + (y_{ik} - \bar{y}_{i.} - \bar{y}_{.k} + \bar{y}_{..}).$$

Note que os componentes $(\bar{y}_{.k} - \bar{y}_{..})$ e $(y_{ik} - \bar{y}_{i.} - \bar{y}_{.k} + \bar{y}_{..})$ representam uma partição do erro experimental em que $(\bar{y}_{.k} - \bar{y}_{..})$ quantifica o erro de unidade e $(y_{ik} - \bar{y}_{i.} - \bar{y}_{.k} + \bar{y}_{..})$, a interação tratamento x unidade experimental; tem-se então $(\bar{y}_{.k} - \bar{y}_{..}) + (y_{ik} - \bar{y}_{i.} - \bar{y}_{.k} + \bar{y}_{..}) = (y_{ik} - \bar{y}_{i.})$, e ainda, por força da ortogonalidade, a soma das variações captadas individualmente por cada um dos dois componentes é igual à variação observada em $(y_{ik} - \bar{y}_{i.})$. O modelo matemático associado a essa estrutura é dado por:

$$y_{ik} = \mu + T_i + P_k + (TP)_{ik}.$$

Kempthorne & Hinkelmann (1994) classificam o modelo matemático quanto à aditividade em dois tipos: *strict sense* e *broad sense*. No primeiro caso eles consideram a interação tratamento versus unidade experimental nula $(y_{ik} - \bar{y}_{i.} - \bar{y}_{.k} + \bar{y}_{..}) = 0$, ou seja, os efeitos de tratamento e unidade experimental são aditivos e o modelo é denominado linear parcialmente deduzido. No segundo caso, que é mais geral, os autores não assumem a aditividade desses efeitos e o modelo é classificado como deduzido linear. Nesta abordagem optou-se por não assumir a aditividade dos efeitos, e todos os modelos tratados aqui são deduzidos lineares.

O processo de aleatorização consiste em escolher aleatoriamente t níveis de T e r t unidades de P e aplicar cada tratamento t a r unidades experimentais. A relação entre uma resposta conceitual e um valor observado é estabelecida pelas variáveis aleatórias de delineamento Bernoulli (Mood et al, 1974). Seja $i^* = 1,\dots, t$ e $j = 1,\dots,r$.

$\alpha_i^{i^*} = 1$, se a i^*- ésima escolha dos i's seleciona todos os P'_{ik} s com índice i;

$\alpha_i^{i^*} = 0$, caso contrário;

$\delta_{i^* j}^{k} = 1$, se a j-ésima seleção dentro i^*-ésimo grupo selecionado corresponder ao valor P_{ik} com segundo índice k;

$\delta_{i^* j}^{k} = 0$, caso contrário.

Estas variáveis aleatórias são largamente utilizadas durante todo este processo e apresentam algumas propriedades importantes que merecem destaque:

$$p[(\alpha_i^{i^*})^r = 1] = p(\alpha_i^{i^*} = 1) = \frac{1}{T} \text{ e } p(\alpha_i^{i^*}, \alpha_{i'}^{i^{*'}}) = \frac{1}{T(T-1)}; \quad i \neq i' \text{ e } i^* \neq i^{*'}$$

$$p(\delta^k_{i^*j}=1)=\frac{1}{P} \text{ e } p(\delta^k_{i^*j}=1\,,\,\delta^{k'}_{i^*j'}=1)=\frac{1}{P(P-1)} \quad ; \quad k\neq k' \text{ e } j\neq j'$$

$$p(\delta^k_{i^*j}=1\,,\,\delta^{k'}_{i^{*'}j'}=1)=\frac{1}{P(P-1)} \quad ; \quad i^*\neq i^{*'} \;,\; k\neq k' \text{ e } \quad \forall\; j,j'$$

decorre da definição que

$$\alpha_i^{i^*}\alpha_i^{i^{*'}}=\alpha_i^{i^*}\alpha_{i'}^{i^*}=0 \text{ e } \quad \delta^k_{i^*j}\delta^{k'}_{i^*j}=\delta^k_{i^*j}\delta^k_{i^{*'}j}=\delta^k_{i^*j}\delta^k_{i^*j'}=0\,.$$

A mesma amostra não pode ser originada de grupos diferentes da população; cada nível da população só pode ser tomado como amostra uma única vez e cada unidade recebe apenas um tratamento, assim como a combinação (i^*j) não pode ser aplicada a mais de uma unidade experimental.

Denote a j-ésima repetição do i^*-ésimo nível selecionado pelo valor x_{i^*j}, então:

$$x_{i^*j}=\sum_{ik}\alpha_i^{i^*}\delta^k_{i^*j}y_{ik}=\sum_{ik}\alpha_i^{i^*}\delta^k_{i^*j}(\mu+T_i+P_k+(TP)_{ik})$$

$$x_{i^*j}=\mu+\sum_i\alpha_i^{i^*}T_i+\sum_k\delta^k_{i^*j}P_k+\sum_{ik}\alpha_i^{i^*}\delta^k_{i^*j}(TP)_{ik}$$

representa o modelo linear deduzido.

3.3.1.1 Modelo aleatório e modelo fixo

O modelo assim definido é geral, podendo ser classificado como aleatório se o número de tratamentos selecionados para amostra for muito inferior ao número de tratamentos existentes na população, ou seja, t << T, ou fixo, se todos tratamentos da população são tomados como amostra; nesse caso, t = T. No primeiro caso, o modelo possui a mesma representação. No segundo, temos a identidade $i^*=i$ e, conseqüentemente, $\sum_i\alpha_i^{i^*}T_i=T_i$; logo,

$$x_{i^*j}=x_{ij}=\mu+T_i+\sum_k\delta^k_{ij}P_k+\sum_{ik}\delta^k_{ij}(TP)_{ik}\,.$$

3.3.1.2 Esperanças dos quadrados de médias admissíveis

Pode-se calcular esperanças de formas quadráticas associadas à análise de variância para facilitar o cálculo das esperanças de quadrados médios e para a obtenção da variância de certas médias admissíveis, se esse for o objetivo. Considere o exemplo para ilustrar esta situação:

$$x_{i^*j} = \mu + \sum_i \alpha_i^{i^*} T_i + \sum_k \delta_{i^*j}^k P_k + \sum_{ik} \alpha_i^{i^*} \delta_{i^*j}^k (TP)_{ik}.$$

Seja E o operador da esperança, então:

$$E[x_{i^*j}] = E[\mu] + \frac{1}{T}\sum_i T_i + \frac{1}{P}\sum_k P_k + \frac{1}{TP}\sum_{ik}(TP)_{ik} = \mu.$$

Da mesma forma, tem-se:

$$\bar{x}_{i^*.} = \frac{1}{r}\sum_j x_{i^*j} = \frac{1}{r}\sum_j [\mu + \sum_i \alpha_i^{i^*} T_i + \sum_k \delta_{i^*j}^k P_k + \sum_{ik} \alpha_i^{i^*} \delta_{i^*j}^k (TP)_{ik}] \text{ logo,}$$

$$\bar{x}_{i^*.} = \frac{1}{r}[r\mu + r\sum_i \alpha_i^{i^*} T_i + \sum_{j,k} \delta_{i^*j}^k P_k + \sum_{i,j,k} \alpha_i^{i^*} \delta_{i^*j}^k (TP)_{ik}] \text{ então,}$$

$$E(\bar{x}_{i^*.}) = \frac{1}{r}[E(r\mu) + \frac{r}{T}\sum_i T_i + \frac{r}{P}\sum_k P_k + \frac{r}{TP}\sum_{i,k}(TP)_{ik}] = \mu.$$

E ainda:

$$\bar{x}_{..} = \frac{1}{tr}\sum_{i^*j} x_{i^*j} = \frac{1}{tr}\sum_{i^*j}[\mu + \sum_i \alpha_i^{i^*} T_i + \sum_k \delta_{i^*j}^k P_k + \sum_{ik} \alpha_i^{i^*} \delta_{i^*j}^k (TP)_{ik}] \text{ de modo que,}$$

$$\bar{x}_{..} = \frac{1}{tr}[tr\mu + r\sum_{i^*i} \alpha_i^{i^*} T_i + \sum_{i^*,j,k} \delta_{i^*j}^k P_k + \sum_{i^*,i,j,k} \alpha_i^{i^*} \delta_{i^*j}^k (TP)_{ik}] \text{ então,}$$

$$E(\bar{x}_{..}) = \frac{1}{tr}[E(tr\mu) + \frac{tr}{T}\sum_i T_i + \frac{tr}{P}\sum_k P_k + \frac{tr}{TP}\sum_{i,k}(TP)_{ik}] = \mu.$$

Pois, das propriedades já estudadas no capítulo 1, tem-se que:

$$\sum_i T_i = \sum_i (\bar{y}_{i.} - \bar{y}_{..}) = 0$$

$$\sum_k P_k = \sum_k (\bar{y}_{.k} - \bar{y}_{..}) = 0$$

$$\sum_{ik} (TP)_{ik} = \sum_{ik} (y_{ik} - \bar{y}_{i.} - \bar{y}_{.k} + \bar{y}_{..}) = 0.$$

O objetivo agora é deduzir uma equação para o cálculo da esperança do quadrado de um valor observado

$$E[x_{i^* j}]^2 = E[\mu + \sum_i \alpha_i^{i^*} T_i + \sum_k \delta^k_{i^* j} P_k + \sum_{ik} \alpha_i^{i^*} \delta^k_{i^* j} (TP)_{ik}]^2$$

$$E[x_{i^* j}]^2 = E[\mu^2] + E[\sum_i \alpha_i^{i^*} T_i]^2 + E[\sum_k \delta^k_{i^* j} P_k]^2 + E[\sum_{ik} \alpha_i^{i^*} \delta^k_{i^* j} (TP)_{ik}]^2,$$

uma vez que a esperança dos produtos cruzados é nula. Segue que:

$$E[\sum_i \alpha_i^{i^*} T]^2 = E[\sum_i (\alpha_i^{i^*})^2 T_i^2 + \sum_{i \neq i'} \alpha_i^{i^*} \alpha_{i'}^{i^*} T_i T_{i'}] = \frac{1}{T} \sum_i T_i^2 =$$

$$= \frac{T-1}{T} \frac{1}{T-1} \sum_i T_i^2 = \frac{T-1}{T} \sigma_T^2 = (1 - \frac{1}{T}) \sigma_T^2.$$

É importante lembrar que $\sigma_T^2 = \dfrac{\sum_i T_i^2}{T-1}$

$$E[\sum_k \delta^k_{i^* j} P_k]^2 = E[\sum_k (\delta^k_{i^* j})^2 P_k^2 + \sum_{k \neq k'} \delta^k_{i^* j} \delta^{k'}_{i^* j} P_k P_{k'}] = \frac{1}{P} \sum_k P_k^2 =$$

$$= \frac{P-1}{P} \frac{1}{P-1} \sum_k P_k^2 = \frac{P-1}{P} \sigma_P^2 = (1 - \frac{1}{P}) \sigma_P^2;$$

Da mesma forma, tem-se que $\sigma_P^2 = \dfrac{\sum_k P_k^2}{P-1}$

$$E[\sum_{ik} \alpha_i^{i^*} \delta^k_{i^* j} (TP)_{ik}]^2 = E[\sum_{ik} (\alpha_i^{i^*})^2 (\delta^k_{i^* j})^2 (TP)_{ik}^2 + \sum_{\substack{i \\ k \neq k'}} (\alpha_i^{i^*})^2 \delta^k_{i^* j} \delta^{k'}_{i^* j} (TP)_{ik} (TP)_{ik'} +$$

$$+ \sum_{\substack{i \neq i' \\ k}} \alpha_i^{i^*} \alpha_{i'}^{i^*} (\delta^k_{i^* j})^2 (TP)_{ik} (TP)_{i'k} + \sum_{\substack{i \neq i' \\ k \neq k'}} \alpha_i^{i^*} \alpha_{i'}^{i^*} \delta^k_{i^* j} \delta^{k'}_{i^* j} (TP)_{ik} (TP)_{i'k'}]$$

$$= \frac{1}{TP} \sum_{ik} (TP)_{ik}^2 = \frac{(T-1)(P-1)}{TP} \frac{\sum_{ik} (TP)_{ik}^2}{(T-1)(P-1)} = (1 - \frac{1}{T})(1 - \frac{1}{P}) \sigma_{TP}^2;$$

Pois, aqui se tem os produtos $\delta^k_{i^* j} \delta^{k'}_{i^* j}$ e $\alpha_i^{i^*} \alpha_{i'}^{i^*}$ iguais a zero. Do mesmo modo, se tem $\sigma_{TP}^2 = \dfrac{\sum_{ik}(TP)_{ik}^2}{(T-1)(P-1)}$. Agora na expressão inicial pode-se escrever

$E[x_{i^* j}]^2 = \mu^2 + (1-\frac{1}{T})\sigma_T^2 + (1-\frac{1}{P})\sigma_P^2 + (1-\frac{1}{T})(1-\frac{1}{P})\sigma_{TP}^2$. Se desenvolver esta expressão e reagrupar de forma conveniente, de acordo com a função sigma maiúscula (Σ) definida no capítulo II, obtém-se:

$E[x_{i^* j}]^2 = \Sigma_{\varnothing} + \Sigma_T + \Sigma_P + \Sigma_{TP}$.

Seja agora calcular a esperança do quadrado da média de tratamento $E[\overline{x}_{i^* .}]^2 = E[\frac{1}{r}\sum_j x_{i^* j}]^2$.

$$x_{i^* j} = \mu + \sum_i \alpha_i^{i^*} T_i + \sum_k \delta_{i^* j}^k P_k + \sum_{ik} \alpha_i^{i^*} \delta_{i^* j}^k (TP)_{ik}$$

$$E[\overline{x}_{i^* .}]^2 = E[\frac{1}{r}\sum_j (\mu + \sum_i \alpha_i^{i^*} T_i + \sum_k \delta_{i^* j}^k P_k + \sum_{ik} \alpha_i^{i^*} \delta_{i^* j}^k (TP)_{ik})]^2$$

$$= \frac{1}{r^2} E[r\mu + r\sum_i \alpha_i^{i^*} T_i + \sum_{jk} \delta_{i^* j}^k P_k + \sum_{ijk} \alpha_i^{i^*} \delta_{i^* j}^k (TP)_{ik}]^2$$

$$= \frac{1}{r^2}[E(r\mu)^2 + E(\,r\sum_i \alpha_i^{i^*} T_i)^2 + E(\sum_{jk} \delta_{i^* j}^k P_k)^2 + E(\,\sum_{ijk} \alpha_i^{i^*} \delta_{i^* j}^k (TP)_{ik})^2],$$

pois as esperanças dos produtos cruzados são todas iguais a zero; temos ainda:

$$E(\,r\sum_i \alpha_i^{i^*} T_i)^2 = r^2 E(\sum_i \alpha_i^{i^*} T_i)^2 = r^2 E[\sum_i (\alpha_i^{i^*})^2 T_i^2 + \sum_{i \neq i'} \alpha_i^{i^*} \alpha_i^{i^{*\prime}} T_i T_{i'}] \quad ; \quad \alpha_i^{i^*} \alpha_i^{i^{*\prime}} = 0$$

$$= r^2 E[\sum_i (\alpha_i^{i^*})^2 T_i^2] = r^2 \frac{1}{T}\sum_i T_i^2 = r^2 (\frac{T-1}{T}) \frac{\sum_i T_i^2}{T-1} = r^2 (1-\frac{1}{T})\sigma_T^2$$

$$E[\sum_{jk} \delta_{i^* j}^k P_k]^2 = E[\sum_{jk} (\delta_{i^* j}^k)^2 P_k^2 + \sum_{\substack{j \\ k \neq k'}} \delta_{i^* j}^k \delta_{i^* j}^{k'} P_k P_{k'} + \sum_{\substack{j \neq j' \\ k}} \delta_{i^* j}^k \delta_{i^* j'}^k P_k^2 + \sum_{\substack{j \neq j' \\ k \neq k'}} \delta_{i^* j}^k \delta_{i^* j'}^{k'} P_k P_{k'}]$$

$$= E[\sum_{jk} (\delta_{i^* j}^k)^2 P_k^2 + \sum_{\substack{j \neq j' \\ k \neq k'}} \delta_{i^* j}^k \delta_{i^* j'}^{k'} P_k P_{k'}] = \frac{1}{P}\sum_{jk} P_k^2 + \frac{1}{P(P-1)} \sum_{\substack{j \neq j' \\ k \neq k'}} P_k P_{k'}$$

$$= \frac{r}{P}\sum_k P_k^2 + \frac{r(r-1)}{P(P-1)} \sum_{k \neq k'} P_k P_{k'} \;,\; \delta_{i^* j}^k \delta_{i^* j}^{k'} = \delta_{i^* j}^k \delta_{i^* j'}^k = 0$$

mas $\sum_{k\neq k'} P_k P_{k'} = -\sum_k P_k^2$, pois já se mostrou que $\sum_k P_k = 0$; então;

$$E[\sum_{jk} \delta_{i^*j}^k P_k]^2 = \frac{r}{P}\sum_k P_k^2 - \frac{r(r-1)}{P(P-1)}\sum_k P_k^2 = \left[\frac{r}{P} - \frac{r(r-1)}{P(P-1)}\right]\sum_k P_k^2$$

$$= \frac{r(P-r)}{P(P-1)}\sum_k P_k^2 = r(\frac{P-r}{P})\sigma_p^2 = r(1-\frac{r}{P})\sigma_p^2$$

$$E[\sum_{ijk} \alpha_i^{i^*} \delta_{i^*j}^k (TP)_{ik}]^2 = E[\sum_{ijk}(\alpha_i^{i^*})^2(\delta_{i^*j}^k)^2(TP)_{ik}^2 + \sum_{j\neq j'}\sum_{\substack{i\\k\neq k'}}(\alpha_i^{i^*})^2\delta_{i^*j}^k\delta_{i^*j'}^{k'}(TP)_{ik}(TP)_{ik'}]$$

$$= \frac{1}{TP}\sum_{ijk}(TP)_{ik}^2 + \frac{1}{TP(P-1)}\sum_{j\neq j'}\sum_{\substack{i\\k\neq k'}}(TP)_{ik}(TP)_{ik'} = \left[\frac{r}{TP} - \frac{r(r-1)}{TP(P-1)}\right]\sum_{ik}(TP)_{ik}^2$$

$$= \left[\frac{rP - r - r^2 + r}{TP(P-1)}\right]\sum_{ik}(TP)_{ik}^2 = \frac{r(P-r)(T-1)}{TP}\sigma_{TP}^2 = r(1-\frac{1}{T})(1-\frac{r}{P})\sigma_{TP}^2$$

e, portanto,

$$E[\overline{x}_{i^*.}]^2 = \frac{1}{r^2}[r^2\mu^2 + r^2(1-\frac{1}{T})\sigma_T^2 + r(1-\frac{r}{P})\sigma_p^2 + r(1-\frac{1}{T})(1-\frac{r}{P})\sigma_{TP}^2]$$

$$= \mu^2 + (1-\frac{1}{T})\sigma_T^2 + (1-\frac{r}{P})\frac{\sigma_p^2}{r} + (1-\frac{1}{T})(1-\frac{r}{P})\frac{\sigma_{TP}^2}{r}.$$

Reescrevendo a expressão acima para a função sigma maiúscula (Σ), obtém-se :

$$E[\overline{x}_{i^*.}]^2 = (\mu^2 - \frac{1}{T}\sigma_T^2 - \frac{1}{P}\sigma_P^2 + \frac{1}{TP}\sigma_{TP}^2) + (\sigma_T^2 - \frac{1}{P}\sigma_{TP}^2) + \frac{1}{r}(\sigma_P^2 - \frac{1}{P}\sigma_{TP}^2) + \frac{1}{r}\sigma_{TP}^2$$

$$E[\overline{x}_{i^*.}]^2 = \Sigma_\varnothing + \Sigma_T + \frac{1}{r}\Sigma_P + \frac{1}{r}\Sigma_{TP} = \Sigma_\varnothing + \Sigma_T + \frac{1}{r}(\Sigma_P + \Sigma_{TP}).$$

O objetivo agora é encontrar uma expressão para calcular a esperança do quadrado da média geral amostral $E[\overline{x}_{..}]^2 = E[\frac{1}{tr}\sum_{i^*j} x_{i^*j}]^2$:

$$E[\overline{x}_{..}]^2 = E[\frac{1}{tr}\sum_{i^*j}(\mu + \sum_i \alpha_i^{i^*} T_i + \sum_k \delta_{i^*j}^k P_k + \sum_{ik}\alpha_i^{i^*}\delta_{i^*j}^k (TP)_{ik})]^2$$

$$= \frac{1}{t^2 r^2}E[tr\mu + r\sum_{i^*i}\alpha_i^{i^*}T_i + \sum_{i^*jk}\delta_{i^*j}^k P_k + \sum_{i^*ijk}\alpha_i^{i^*}\delta_{i^*j}^k(TP)_{ik}]^2$$

$$= \frac{1}{t^2 r^2}[E(tr\mu)^2 + E(r\sum_{i^*i}\alpha_i^{i^*}T_i)^2 + E(\sum_{i^*jk}\delta_{i^*j}^k P_k)^2 + E(\sum_{i^*ijk}\alpha_i^{i^*}\delta_{i^*j}^k(TP)_{ik})^2]$$

$$E(r\sum_{i^*i}\alpha_i^{i^*}T_i)^2 = r^2E[\sum_{i^*i}(\alpha_i^{i^*})^2T_i^2 + \sum_{\substack{i^*\neq i^{*'}\\ i\neq i'}}\alpha_i^{i^*}\alpha_{i'}^{i^{*'}}T_iT_{i'}] = r^2[\frac{1}{T}\sum_{i^*i}T_i^2 + \frac{1}{T(T-1)}\sum_{\substack{i^*\neq i^{*'}\\ i\neq i'}}T_iT_{i'}]$$

$$= r^2[\frac{t}{T}\sum_i T_i^2 - \frac{t(t-1)}{T(T-1)}\sum_i T_i^2] = r^2\left[\frac{tT-t-t^2+t}{T(T-1)}\right]\sum_i T_i^2 = tr^2(1-\frac{t}{T})\sigma_T^2$$

$$E(\sum_{i^*jk}\delta_{i^*j}^kP_k)^2 = E[\sum_{i^*jk}(\delta_{i^*j}^k)^2P_k^2 + \sum_{\substack{i^*\\ j\neq j'\\ k\neq k'}}\delta_{i^*j}^k\delta_{i^*j'}^{k'}P_kP_{k'} + \sum_{\substack{i^*\neq i^{*'}\\ j\\ k\neq k'}}\delta_{i^*j}^k\delta_{i^{*'}j}^{k'}P_kP_{k'} + \sum_{\substack{i^*\neq i^{*'}\\ j\neq j'\\ k\neq k'}}\delta_{i^*j}^k\delta_{i^{*'}j'}^{k'}P_kP_{k'}] =$$

$$= \frac{1}{P}\sum_{i^*jk}P_k^2 + \frac{1}{P(P-1)}\sum_{\substack{i^*\\ j\neq j'\\ k\neq k'}}P_kP_{k'} + \frac{1}{P(P-1)}\sum_{\substack{i^*\neq i^{*'}\\ j\\ k\neq k'}}P_kP_{k'} + \frac{1}{P(P-1)}\sum_{\substack{i^*\neq i^{*'}\\ j\neq j'\\ k\neq k'}}P_kP_{k'} =$$

$$= \left[\frac{tr}{P} - \frac{tr(r-1)}{P(P-1)} - \frac{tr(t-1)}{P(P-1)} - \frac{tr(t-1)(r-1)}{P(P-1)}\right]\sum_i P_k^2 = tr\left[\frac{P-tr}{P(P-1)}\right]\sum_i P_k^2 =$$

$$= tr\left[1-\frac{tr}{P}\right]\frac{\sum_i P_k^2}{P-1} = tr(1-\frac{tr}{P})\sigma_P^2$$

$$E[\sum_{i^*ijk}\alpha_i^{i^*}\delta_{i^*j}^k(TP)_{ik}]^2 = E[\sum_{i^*j}\sum_{i,k}(\alpha_i^{i^*})^2(\delta_{i^*j}^k)^2(TP)_{ik}^2 + \sum_{\substack{i^*\\ j\neq j'}}\sum_{\substack{i\\ k\neq k'}}(\alpha_i^{i^*})^2\delta_{i^*j}^k\delta_{i^*j'}^{k'}(TP)_{ik}(TP)_{ik'} +$$

$$+ \sum_{\substack{i^*\neq i^{*'}\\ j}}\sum_{\substack{i\neq i'\\ k\neq k'}}\alpha_i^{i^*}\alpha_{i'}^{i^{*'}}\delta_{i^*j}^k\delta_{i^{*'}j}^{k'}(TP)_{ik}(TP)_{i'k'} + \sum_{\substack{i^*\neq i^{*'}\\ j\neq j'}}\sum_{\substack{i\neq i'\\ k\neq k'}}\alpha_i^{i^*}\alpha_{i'}^{i^{*'}}\delta_{i^*j}^k\delta_{i^{*'}j'}^{k'}(TP)_{ik}(TP)_{i'k'}]$$

observe que o somatório em j e j'com j, j'= 1, ..., r e j$\neq$j' é igual r(r-1) termos,

$$E[\sum_{i^*ijk}\alpha_i^{i^*}\delta_{i^*j}^k(TP)_{ik}]^2 = \frac{1}{TP}\sum_{i^*j}\sum_{i,k}(TP)_{ik}^2 - \frac{1}{TP(P-1)}\sum_{\substack{i^*\\ j\neq j'}}\sum_{i,k}(TP)_{ik}^2 + \frac{1}{TP(T-1)(P-1)}\sum_{\substack{i^*\neq i^{*'}\\ j}}\sum_{i,k}(TP)_{ik}^2 +$$

$$+ \frac{1}{TP(T-1)(P-1)}\sum_{\substack{i^*\neq i^{*'}\\ j\neq j'}}\sum_{i,k}(TP)_{ik}^2 = \left(\frac{tr}{TP} - \frac{tr(r-1)}{TP(P-1)} + \frac{tr(t-1)}{TP(T-1)(P-1)} + \right.$$

$$\left. + \frac{tr(t-1)(r-1)}{TP(T-1)(P-1)}\right)\sum_{i,k}(TP)_{ik}^2 = tr\left[\frac{TP-P-Tr+tr}{TP(T-1)(P-1)}\right]\sum_{i,k}(TP)_{ik}^2$$

$$E[\sum_{i^*ijk}\alpha_i^{i^*}\delta_{i^*j}^k(TP)_{ik}]^2 = tr\left[\frac{TP-P-Tr+tr}{TP}\right]\frac{\sum_{i,k}(TP)_{ik}^2}{(T-1)(P-1)} = tr\left[1-\frac{1}{T}-\frac{r}{P}+\frac{tr}{TP}\right]\sigma_{TP}^2 =$$

$$= tr\left[(1-\frac{1}{T}) - \frac{r}{P}(1-\frac{t}{T})\right]\sigma_{TP}^2,$$

e portanto, a esperança do quadrado da média amostral é dada por:

$$E[\bar{x}_{..}]^2 = \frac{1}{(tr)^2}\left[(tr)^2\mu^2 + tr^2(1-\frac{t}{T})\sigma_T^2 + tr(1-\frac{tr}{P})\sigma_P^2 + tr\left((1-\frac{1}{T}) - \frac{r}{P}(1-\frac{t}{T})\right)\sigma_{TP}^2\right]$$

$$E[\overline{x}_{..}]^2 = \mu^2 + (1-\frac{t}{T})\frac{\sigma_T^2}{t} + (1-\frac{tr}{P})\frac{\sigma_P^2}{tr} + \left((1-\frac{1}{T}) - \frac{r}{P}(1-\frac{t}{T})\right)\frac{\sigma_{TP}^2}{tr}.$$

Pode-se expressar a esperança do quadrado da média amostral em função de sigma maiúscula (Σ) desenvolvendo a expressão acima e reagrupando os termos de forma conveniente:

$$E[\overline{x}_{..}]^2 = (\mu^2 - \frac{1}{T}\sigma_T^2 - \frac{1}{P}\sigma_P^2 + \frac{1}{TP}\sigma_{TP}^2) + \frac{1}{t}(\sigma_T^2 - \frac{1}{P}\sigma_{TP}^2) + \frac{1}{tr}(\sigma_P^2 - \frac{1}{T}\sigma_{TP}^2) + \frac{1}{tr}\sigma_{TP}^2$$

$$E[\overline{x}_{..}]^2 = \Sigma_\varnothing + \frac{1}{t}\Sigma_T + \frac{1}{tr}\Sigma_P + \frac{1}{tr}\Sigma_{TP} = \Sigma_\varnothing + \frac{1}{t}\Sigma_T + \frac{1}{tr}(\Sigma_P + \Sigma_{TP}).$$

3.3.1.3 Variâncias de médias admissíveis

Seja agora encontrar uma expressão para o cálculo da variância da média de tratamento, ou seja, $V[\overline{x}_{i.}]$.

Da fórmula da variância tem-se que: $V[\overline{x}_{i.}] = E[\overline{x}_{i.}]^2 - (E[\overline{x}_{i.}])^2$, como já foram calculadas as esperanças, então:

$$V[\overline{x}_{i.}] = \Sigma_\varnothing + \Sigma_T + \frac{1}{r}\Sigma_P + \frac{1}{r}\Sigma_{TP} - \mu^2 = \Sigma_T + \frac{1}{r}\Sigma_P + \frac{1}{r}\Sigma_{TP}.$$

Seja agora encontrar uma expressão para o cálculo da variância da média amostral, ou seja, $V[\overline{x}_{..}]$. Temos então que $V[\overline{x}_{..}] = E[\overline{x}_{..}]^2 - (E[\overline{x}_{..}])^2$; substituindo os valores já conhecidos, temos:

$$V[\overline{x}_{..}] = \Sigma_\varnothing + \frac{1}{t}\Sigma_T + \frac{1}{tr}\Sigma_P + \frac{1}{tr}\Sigma_{TP} - \mu^2 = \frac{1}{t}\Sigma_T + \frac{1}{tr}\Sigma_P + \frac{1}{tr}\Sigma_{TP}.$$

3.3.1.4 Obtenção das esperanças dos quadrados médios:

A identidade populacional, como já visto, é dada por:

$$y_{ik} = \overline{y}_{..} + (\overline{y}_{i.} - \overline{y}_{..}) + (\overline{y}_{.k} - \overline{y}_{..}) + (y_{ik} - \overline{y}_{i.} - \overline{y}_{.k} + \overline{y}_{..}).$$

Já ficou claro que a soma das variações produzida individualmente pelos componentes $(\bar{y}_{.k} - \bar{y}_{..})$ e $(y_{ik} - \bar{y}_{i.} - \bar{y}_{.k} + \bar{y}_{..})$ do erro experimental, bem como seus respectivos graus de liberdade, podem ser representadas no único componente $(y_{ik} - \bar{y}_{i.})$. Na identidade amostral, o erro experimental está representado por $(x_{i^{\bullet}j} - \bar{x}_{i^{\bullet}.})$, em que os efeitos dos componentes que o constituem e seus respectivos graus de liberdade estão confundidos.

A identidade amostral do exemplo dado é da forma:

$x_{i^{\bullet}j} = \bar{x}_{..} + (\bar{x}_{i^{\bullet}.} - \bar{x}_{..}) + (x_{i^{\bullet}j} - \bar{x}_{i^{\bullet}.})$, e a correspondente soma de quadrados;

$$\sum_{i^{\bullet}j} x_{i^{\bullet}j}^2 = \sum_{i^{\bullet}j} \bar{x}_{..}^2 + \sum_{i^{\bullet}j} (\bar{x}_{i^{\bullet}.} - \bar{x}_{..})^2 + \sum_{i^{\bullet}j} (x_{i^{\bullet}j} - \bar{x}_{i^{\bullet}.})^2.$$

Utilizando as esperanças dos quadrados das médias admissíveis já calculadas, podemos obter facilmente as esperanças dos quadrados médios.

Seja a soma de quadrados de tratamentos $\sum_{i^{\bullet}j} (\bar{x}_{i^{\bullet}.} - \bar{x}_{..})^2 = r \sum_{i^{\bullet}} (\bar{x}_{i^{\bullet}.}^2 - \bar{x}_{..}^2)$. Então,

$$E[r \sum_{i^{\bullet}} (\bar{x}_{i^{\bullet}.}^2 - \bar{x}_{..}^2)] = r \sum_{i^{\bullet}} [E(\bar{x}_{i^{\bullet}.})^2 - E(\bar{x}_{..})^2] = tr[E(\bar{x}_{i^{\bullet}.})^2 - E(\bar{x}_{..})^2]$$

$$= tr[(\Sigma_T - \frac{1}{t}\Sigma_T) + \frac{1}{r}(\Sigma_P + \Sigma_{TP}) - \frac{1}{tr}(\Sigma_P + \Sigma_{TP})]$$

$$E[r \sum_{i^{\bullet}} (\bar{x}_{i^{\bullet}.}^2 - \bar{x}_{..}^2)] = tr[\frac{(t-1)}{t}\Sigma_T + \frac{(t-1)}{tr}(\Sigma_P + \Sigma_{TP})] =$$

$$= r(t-1)\Sigma_T + (t-1)(\Sigma_P + \Sigma_{TP}).$$

Dividindo pelos graus de liberdade $(t-1)$, obtém-se $\Sigma_P + \Sigma_{TP} + r\Sigma_T$.

Considere agora a soma de quadrados de resíduo $\sum_{i^{\bullet}j} (x_{i^{\bullet}j} - \bar{x}_{i^{\bullet}.})^2$. Então,

$$E[\sum_{i^{\bullet}j} (\bar{x}_{i^{\bullet}j}^2 - \bar{x}_{i^{\bullet}.}^2)] = \sum_{i^{\bullet}j} [E(\bar{x}_{i^{\bullet}j})^2 - E(\bar{x}_{i^{\bullet}.})^2] = tr[E(\bar{x}_{i^{\bullet}j.})^2 - E(\bar{x}_{i^{\bullet}.})^2]$$

$$= tr[(\Sigma_P + \Sigma_{TP}) - \frac{1}{r}(\Sigma_P + \Sigma_{TP})] = t(r-1)(\Sigma_P + \Sigma_{TP}).$$

Dividindo pelos respectivos graus de liberdade $t(r-1)$, obtém-se $\Sigma_P + \Sigma_{TP}$.

Por questões de praticidade a soma $\Sigma_P + \Sigma_{TP}$ será denotada por $\Sigma_{T(P)}$. Considerou-se conveniente representar o erro experimental por um único termo, ao invés de escrever todos os componentes que o constituem; além do mais, o termo $\Sigma_{T(P)}$ é bem próprio, pois sugere a variação entre unidades dentro de tratamento. Logo a esperança de quadrados médios de tratamento fica $\Sigma_{T(P)} + r\Sigma_T$.

Na análise de variância amostral, os sigmas amostrais são escritos com índices relativos à amostra por se tratar de uma notação mais apropriada, embora sejam obtidos de forma igual à que se obtêm os populacionais.

3.3.1.5 Análise de variância amostral

A tabela 3.1 abaixo sintetiza as somas de quadrados, graus de liberdade e respectivas esperanças de quadrados médios para um delineamento inteiramente casualizado com dois fatores de classificação.

TABELA 3.1 Análise de variância para um delineamento inteiramente casualizado com dois fatores

$F.V$	$G.L$	$S.Q$	$E[Q.M]$
t	$t-1$	$\sum_{i^*j} (\bar{x}_{i^*.} - \bar{x}_{..})^2$	$\Sigma_{t(r)} + r\Sigma_t$
res	$t(r-1)$	$\sum_{i^*j} (x_{i^*j} - \bar{x}_{i^*.})^2$	$\Sigma_{t(r)}$
$Total$	$tr-1$	$\sum_{i^*j} x_{i^*j}^2 - \sum_{i^*j} \bar{x}_{..}^2$	

3.3.2 Delineamento com três fatores completamente aleatorizados

Considere uma situação na qual as combinações de tratamentos de interesse podem ser classificadas de acordo com os níveis de dois fatores A e B. As unidades experimentais são denotadas pelo fator P, em que cada nível de P representa uma unidade experimental diferente. O procedimento experimental consiste em escolher a níveis de A, b níveis de B e rab níveis de P; então se associam aleatoriamente as rab unidades experimentais escolhidas a ab combinações de tratamentos escolhidos, de tal forma que cada combinação de tratamentos ocorra com exatamente r unidades experimentais. A figura 3.1 ilustra esta situação:

As combinações de tratamentos a serem usadas são obtidas das interseções e aplicadas a rab unidades experimentais homogêneas, de modo que cada unidade tenha igual probabilidade de receber qualquer combinação de tratamento.

Fator B

Fator A

	x		x		x
	x		x		x
	x		x		x

FIGURA 3.1 Combinação dos tratamentos A e B de classificação cruzada

Uma resposta conceitual para um delineamento inteiramente casualizado com três fatores A, B e P completamente cruzados pode ser representada por y_{ijk}, em que i representa o fator A, j é o fator B e k representa a unidade experimental na qual a combinação de tratamento ij é aplicada.

Seja i = 1,..., A; j = 1,..., B e k = 1,...,P. A identidade populacional é dada por

$$\begin{aligned} y_{ijk} &= \overline{y}_{...} + (\overline{y}_{i..} - \overline{y}_{...}) + (\overline{y}_{.j.} - \overline{y}_{...}) + (\overline{y}_{ij.} - \overline{y}_{i..} - \overline{y}_{.j.} + \overline{y}_{...}) + (\overline{y}_{..k} - \overline{y}_{...}) \\ &+ (\overline{y}_{ik.} - \overline{y}_{i..} - \overline{y}_{.k.} + \overline{y}_{...}) + (\overline{y}_{.jk} - \overline{y}_{.j.} - \overline{y}_{..k} + \overline{y}_{...}) \\ &+ (y_{ijk} - \overline{y}_{ij.} - \overline{y}_{i.k} - \overline{y}_{.jk} + \overline{y}_{i..} + \overline{y}_{.j..} + \overline{y}_{..k} - \overline{y}_{...}). \end{aligned}$$

O modelo matemático é representado por:

$$y_{ijk} = \mu + A_i + B_j + (AB)_{ij} + P_k + (AP)_{ik} + (BP)_{jk} + (ABP)_{ijk}.$$

Seja $x_{i^*j^*f}$ o valor observado na f-ésima repetição em que a combinação de tratamento (i^*j^*) foi aplicada, em que $f = 1,...,r$; $i^* = 1,...,a$ e $j^* = 1,...,b$, e as variáveis aleatórias de delineamento são definidas como segue:

$\alpha_i^{i^*} = 1$, se a seleção do i^* corresponde a i;

$\alpha_i^{i^*} = 0$, caso contrário;

$\beta_j^{j^*} = 1$, se a seleção do j^* corresponde a j;

$\beta_j^{j^*} = 0$, caso contrário;

$\delta_k^{i^*j^*f} = 1$, se a seleção da (i^*j^*f) corresponde a k;

$\delta_k^{i^*j^*f} = 0$, caso contrário.

$$p[(\alpha_i^{i^*})^r = 1] = p(\alpha_i^{i^*} = 1) = \frac{1}{A} \text{ e } p(\alpha_i^{i^*} = 1, \alpha_{i'}^{i^{*\prime}} = 1) = \frac{1}{A(A-1)}$$

$$p[(\beta_i^{i^*})^r = 1] = p(\beta_i^{i^*} = 1) = \frac{1}{B} \text{ e } p(\beta_i^{i^*} = 1, \beta_{i'}^{i^{*\prime}} = 1) = \frac{1}{B(B-1)}$$

$$p[(\delta_k^{i^*j^*f})^r = 1] = p(\delta_k^{i^*j^*f} = 1) = \frac{1}{P} \text{ e } p(\delta_k^{i^*j^*f} = 1, \delta_{k'}^{i^*j^*f'} = 1) = \frac{1}{P(P-1)}$$

e ainda $\alpha_i^{i^*}\alpha_i^{i^{*\prime}} = \alpha_i^{i^*}\alpha_{i\cdot}^{i^*} = \beta_j^{j^*}\beta_j^{j^{*\prime}} = \beta_j^{j^*}\beta_{j\cdot}^{j^*} = \delta_k^{i^*j^*f}\delta_k^{i^*j^*f'} = \delta_k^{i^*j^*f}\delta_{k\cdot}^{i^*j^*f} = 0$,

a relação entre um valor observado $x_{i^*j^*f}$ e uma resposta conceitual y_{ijk} é estabelecida na equação:

$$x_{i^*j^*f} = \sum_{ijk}\alpha_i^{i^*}\beta_j^{j^*}\delta_k^{i^*j^*f}y_{ijk}$$

$$x_{i^*j^*f} = \sum_{ijk}\alpha_i^{i^*}\beta_j^{j^*}\delta_k^{i^*j^*f}(\mu + A_i + B_j + (AB)_{ij} + P_k + (AP)_{ik} + (BP)_{jk} + (ABP)_{ijk})$$

$$x_{i^*j^*f} = \mu + \sum_{i}\alpha_i^{i^*}A_i + \sum_{j}\beta_j^{j^*}B_j + \sum_{ij}\alpha_i^{i^*}\beta_j^{j^*}(AB)_{ij} + \sum_{k}\delta_k^{i^*j^*f}P_k +$$
$$+\sum_{ik}\alpha_i^{i^*}\delta_k^{i^*j^*f}(AP)_{ik} + \sum_{jk}\beta_j^{j^*}\delta_k^{i^*j^*f}(BP)_{jk} + \sum_{ijk}\alpha_i^{i^*}\beta_j^{j^*}\delta_k^{i^*j^*f}(ABP)_{ijk}$$

e o modelo acima descrito denomina-se linear deduzido.

3.3.2.1 Modelos aleatório, fixo e misto

Como já citado antes, o referido modelo é geral. Os modelos, aleatório, fixo e misto caracterizam casos particulares.

Assim, se temos a = A e b = B, o modelo é denominado fixo. Se a for muito menor que A (a << A) e b muito menor que B (b << B), o modelo é classificado como aleatório; e finalmente, se a = A e b muito menor que B (b << B), ou o contrário, a muito menor que A (a << A) e b = B, o modelo é chamado de misto. O conceito de muito menor é subjetivo e depende do bom senso do pesquisador. Seja, por exemplo, a = A e b << B, então temos o modelo:

$$x_{i^*j^*f} = \mu + A_i + \sum_{j}\beta_j^{j^*}B_j + \sum_{ij}\beta_j^{j^*}(AB)_{ij} + \sum_{k}\delta_k^{i^*j^*f}P_k +$$
$$+\sum_{ik}\delta_k^{i^*j^*f}(AP)_{ik} + \sum_{jk}\beta_j^{j^*}\delta_k^{i^*j^*f}(BP)_{jk} + \sum_{ijk}\beta_j^{j^*}\delta_k^{i^*j^*f}(ABP)_{ijk},$$

o qual denominado modelo deduzido linear misto. As outras situações são construídas de maneira análoga.

[redacted]

3.3.2.2 Esperanças dos quadrados de médias admissíveis

Como já foi feito em detalhes todo o procedimento no exemplo 3.3.1, algumas passagens foram economizadas para evitar o excesso de cálculos, mesmo porque todo o desenvolvimento é análogo ao anterior. Maiores detalhes poderão ser visto em Zyskind (1958).

Seja então deduzir uma equação para o cálculo da esperança do quadrado de um valor observado

$$E[x^2_{i^* j^* f}] = E[\mu]^2 + E[\sum_i \alpha_i^{i^*} A_i]^2 + E[\sum_j \beta_j^{j^*} B_j]^2 + E[\sum_{ij} \alpha_i^{i^*} \beta_j^{j^*} (AB)_{ij}]^2 + E[\sum_k \delta_k^{i^* j^* f} P_k]^2$$
$$+ E[\sum_{ik} \alpha_i^{i^*} \delta_k^{i^* j^* f} (AP)_{ik}]^2 + E[\sum_{jk} \beta_j^{j^*} \delta_k^{i^* j^* f} (BP)_{jk}]^2 + E[\sum_{ijk} \alpha_i^{i^*} \beta_j^{j^*} \delta_k^{i^* j^* f} (ABP)_{ijk}]^2,$$

já que a esperança dos duplos produtos é nula, temos ainda que:

$$E[\sum_i \alpha_i^{i^*} A_i]^2 = (1-\frac{1}{A})\sigma_A^2;$$

$$E[\sum_j \beta_j^{j^*} B_j]^2 = (1-\frac{1}{B})\sigma_B^2;$$

$$E[\sum_{ij} \alpha_i^{i^*} \beta_j^{j^*} (AB)_{ij}]^2 = (1-\frac{1}{A})(1-\frac{1}{B})\sigma_{AB}^2;$$

$$E[\sum_k \delta_k^{i^* j^* f} P_k]^2 = (1-\frac{1}{P})\sigma_P^2;$$

$$E[\sum_{ik} \alpha_i^{i^*} \delta_k^{i^* j^* f} (AP)_{ik}]^2 = (1-\frac{1}{A})(1-\frac{1}{P})\sigma_{AP}^2;$$

$$E[\sum_{jk} \beta_j^{j^*} \delta_k^{i^* j^* f} (BP)_{jk}]^2 = (1-\frac{1}{B})(1-\frac{1}{P})\sigma_{BP}^2;$$

$$E[\sum_{ijk} \alpha_i^{i^*} \beta_j^{j^*} \delta_k^{i^* j^* f} (ABP)_{ijk}]^2 = (1-\frac{1}{A})(1-\frac{1}{B})(1-\frac{1}{P})\sigma_{ABP}^2.$$

As deduções dessas esperanças obedecem a uma certa lei de formação e são de fácil obtenção até mesmo para delineamentos mais complexos; uma generalização desse procedimento pode ser encontrada em Zyskind (1958). Portanto, agora pode-se escrever:

$$E[x^2_{i^*j^*f}] = \mu^2 + (1-\frac{1}{A})\sigma^2_A + (1-\frac{1}{B})\sigma^2_B + (1-\frac{1}{A})(1-\frac{1}{B})\sigma^2_{AB} + (1-\frac{1}{P})\sigma^2_P +$$
$$+ (1-\frac{1}{A})(1-\frac{1}{P})\sigma^2_{AP} + (1-\frac{1}{B})(1-\frac{1}{P})\sigma^2_{BP} + (1-\frac{1}{A})(1-\frac{1}{B})(1-\frac{1}{P})\sigma^2_{ABP}$$

e, opcionalmente, pode-se escrever em função de sigma (Σ) maiúscula

$$E[x^2_{i^*j^*f}] = \Sigma_\varnothing + \Sigma_A + \Sigma_B + \Sigma_{AB} + \Sigma_P + \Sigma_{AP} + \Sigma_{BP} + \Sigma_{ABP}.$$

Seja agora calcular $E[\bar{x}^2_{i^*j^*.}] = E[\frac{1}{r}\sum_f x_{i^*j^*f}]^2$;

$$E[\bar{x}^2_{i^*j^*.}] = E[\frac{1}{r}\sum_f x_{i^*j^*f}]^2 = \frac{1}{r^2}E[r\mu + r\sum_i \alpha_i^{i^*} A_i + r\sum_j \beta_j^{j^*} B_j + r\sum_{ij} \alpha_i^{i^*} \beta_j^{j^*} (AB)_{ij}$$
$$+ \sum_{kf} \delta_k^{i^*j^*f} P_k + \sum_{ikf} \alpha_i^{i^*} \delta_k^{i^*j^*f} (AP)_{ik} + \sum_{jkf} \beta_j^{j^*} \delta_k^{i^*j^*f} (BP)_{jk} + \sum_{ijkf} \alpha_i^{i^*} \beta_j^{j^*} \delta_k^{i^*j^*f} (ABP)_{ijk}]^2,$$

como a esperança dos produtos cruzados é nula, temos:

$$E[\bar{x}^2_{i^*j^*.}] = \frac{1}{r^2}[E(r\mu)^2 + E(r\sum_i \alpha_i^{i^*} A_i)^2 + E(r\sum_j \beta_j^{j^*} B_j)^2 + E(r\sum_{ij} \alpha_i^{i^*} \beta_j^{j^*} (AB)_{ij})^2$$
$$+ E(\sum_{kf} \delta_k^{i^*j^*f} P_k)^2 + E(\sum_{ikf} \alpha_i^{i^*} \delta_k^{i^*j^*f} (AP)_{ik})^2 + E(\sum_{jkf} \beta_j^{j^*} \delta_k^{i^*j^*f} (BP)_{jk})^2$$
$$+ E(\sum_{ijkf} \alpha_i^{i^*} \beta_j^{j^*} \delta_k^{i^*j^*f} (ABP)_{ijk})^2].$$

Agora se deve obter as esperanças dos quadrados de cada componente como segue:

$$E(r\sum_i \alpha_i^{i^*} A_i)^2 = r^2(1-\frac{1}{A})\sigma^2_A$$

$$E(r\sum_j \beta_j^{j^*} B_j)^2 = r^2(1-\frac{1}{B})\sigma^2_B$$

$$E(r\sum_{ij} \alpha_i^{i^*} \beta_j^{j^*} (AB)_{ij}))^2 = r^2(1-\frac{1}{A})(1-\frac{1}{B})\sigma^2_{AB}$$

$$E(\sum_{kf} \delta_k^{i^*j^*f} P_k)^2 = r(1-\frac{r}{P})\sigma^2_P$$

$$E(\sum_{ikf} \alpha_i^{i^*} \delta_k^{i^* j^* f} (AP)_{ik})^2 = r(1-\frac{1}{A})(1-\frac{r}{P})\sigma_{AP}^2$$

$$E(\sum_{jkf} \beta_j^{j^*} \delta_k^{i^* j^* f} (BP)_{jk})^2 = r(1-\frac{1}{B})(1-\frac{r}{P})\sigma_{BP}^2$$

$$E(\sum_{ijkf} \alpha_i^{i^*} \beta_j^{j^*} \delta_k^{i^* j^* f} (ABP)_{ijk})^2 = r(1-\frac{1}{A})(1-\frac{1}{B})(1-\frac{r}{P})\sigma_{ABP}^2$$

substituindo na expressão inicial, fica:

$$E[\overline{x}_{i^* j^* .}^2] = \mu^2 + (1-\frac{1}{A})\sigma_A^2 + (1-\frac{1}{B})\sigma_B^2 + (1-\frac{1}{A})(1-\frac{1}{B})\sigma_{AB}^2 + (1-\frac{r}{P})\frac{\sigma_P^2}{r} + \\ + (1-\frac{1}{A})(1-\frac{r}{P})\frac{\sigma_{AP}^2}{r} + (1-\frac{1}{B})(1-\frac{r}{P})\frac{\sigma_{BP}^2}{r} + (1-\frac{1}{A})(1-\frac{1}{B})(1-\frac{r}{P})\frac{\sigma_{ABP}^2}{r}.$$

Na representação da função sigma tem-se que:

$$E[\overline{x}_{i^* j^* .}^2] = \Sigma_\varnothing + \Sigma_A + \Sigma_B + \Sigma_{AB} + \frac{1}{r}(\Sigma_P + \Sigma_{AP} + \Sigma_{BP} + \Sigma_{ABP}).$$

Agora se deve calcular $E[\overline{x}_{i^* ..}^2] = E[\frac{1}{br}\sum_{f} x_{i^* j^* f}]^2$:

$$E[\overline{x}_{i^* ..}^2] = E[\frac{1}{br}\sum_{j^* f} x_{i^* j^* f}]^2 = \frac{1}{b^2 r^2} E[br\mu + br\sum_{i} \alpha_i^{i^*} A_i + r\sum_{j^* j} \beta_j^{j^*} B_j + r\sum_{ij^* j} \alpha_i^{i^*} \beta_j^{j^*} (AB)_{ij} \\ + \sum_{kj^* f} \delta_k^{i^* j^* f} P_k + \sum_{ikj^* f} \alpha_i^{i^*} \delta_k^{i^* j^* f} (AP)_{ik} + \sum_{j^* jkf} \beta_j^{j^*} \delta_k^{i^* j^* f} (BP)_{jk} \\ + \sum_{ijj^* fk} \alpha_i^{i^*} \beta_j^{j^*} \delta_k^{i^* j^* f} (ABP)_{ijk}]^2$$

$$E[\overline{x}_{i^* ..}^2] = \mu^2 + (1-\frac{1}{A})\sigma_A^2 + (1-\frac{b}{B})\frac{\sigma_B^2}{b} + (1-\frac{1}{A})(1-\frac{b}{B})\frac{\sigma_{AB}^2}{b} + (1-\frac{br}{P})\frac{\sigma_P^2}{br} + \\ + (1-\frac{1}{A})(1-\frac{br}{P})\frac{\sigma_{AP}^2}{br} + (1-\frac{b}{B})(1-\frac{r}{P})\frac{\sigma_{BP}^2}{br} + (1-\frac{1}{A})(1-\frac{b}{B})(1-\frac{r}{P})\frac{\sigma_{ABP}^2}{br}.$$

Reescrevendo em função de sigma tem-se

$$E[\overline{x}_{i^* j^* .}^2] = \Sigma_\varnothing + \Sigma_A + \frac{1}{b}\Sigma_B + \frac{1}{b}\Sigma_{AB} + \frac{1}{br}(\Sigma_P + \Sigma_{AP} + \Sigma_{BP} + \Sigma_{ABP}).$$

Seja ainda calcular $E[\overline{x}_{. j^* .}^2] = E[\frac{1}{ar}\sum_{i^* f} x_{i^* j^* f}]^2$:

$$E[\bar{x}^2_{.j^*.}] = E[\frac{1}{ar}\sum_{i^* f} x_{i^* j^* f}]^2 = \frac{1}{a^2 r^2} E[ar\mu + r\sum_{i^* i} \alpha_i^{i^*} A_i + ar\sum_{j} \beta_j^{j^*} B_j + r\sum_{ii^* j} \alpha_i^{i^*} \beta_j^{j^*} (AB)_{ij}$$
$$+ \sum_{k i^* f} \delta_k^{i^* j^* f} P_k + \sum_{i k i^* f} \alpha_i^{i^*} \delta_k^{i^* j^* f} (AP)_{ik} + \sum_{i^* j k f} \beta_j^{j^*} \delta_k^{i^* j^* f} (BP)_{jk}$$
$$+ \sum_{i j i^* f k} \alpha_i^{i^*} \beta_j^{j^*} \delta_k^{i^* j^* f} (ABP)_{ijk}]^2 .$$

$$E[\bar{x}^2_{.j^*.}] = \mu^2 + (1-\frac{a}{A})\frac{\sigma_A^2}{a} + (1-\frac{1}{B})\sigma_B^2 + (1-\frac{a}{A})(1-\frac{1}{B})\frac{\sigma_{AB}^2}{a} + (1-\frac{ar}{P})\frac{\sigma_P^2}{ar} +$$
$$+ (1-\frac{a}{A})(1-\frac{r}{P})\frac{\sigma_{AP}^2}{ar} + (1-\frac{1}{B})(1-\frac{ar}{P})\frac{\sigma_{BP}^2}{ar} + (1-\frac{a}{A})(1-\frac{1}{B})(1-\frac{r}{P})\frac{\sigma_{ABP}^2}{ar} .$$

Reescrevendo em função de sigma tem-se:

$$E[\bar{x}^2_{.j^*.}] = \Sigma_{\varnothing} + \frac{1}{a}\Sigma_A + \Sigma_B + \frac{1}{a}\Sigma_{AB} + \frac{1}{ar}(\Sigma_P + \Sigma_{AP} + \Sigma_{BP} + \Sigma_{ABP})$$

e; finalmente, deve-se agora calcular $E[\bar{x}^2_{...}] = E[\frac{1}{abr}\sum_{i^* j^* f} x_{i^* j^* f}]^2$:

de modo análogo tem-se,

$$E[\bar{x}^2_{...}] = \Sigma_{\varnothing} + \frac{1}{a}\Sigma_A + \frac{1}{b}\Sigma_B + \frac{1}{ab}\Sigma_{AB} + \frac{1}{rab}(\Sigma_P + \Sigma_{AP} + \Sigma_{BP} + \Sigma_{ABP}) .$$

Por uma questão meramente notacional $\Sigma_{AB(P)}$ será designado para representar o erro experimental; portanto, substituir a soma $(\Sigma_P + \Sigma_{AP} + \Sigma_{BP} + \Sigma_{ABP})$ melhora a notação e não traz nenhum prejuízo, pois já se sabe que o erro é composto pela soma direta desses fatores. Então:

$$E[\bar{x}^2_{...}] = \Sigma_{\varnothing} + \frac{1}{a}\Sigma_A + \frac{1}{b}\Sigma_B + \frac{1}{ab}\Sigma_{AB} + \frac{1}{rab}\Sigma_{AB(P)} .$$

As demais esperanças dos quadrados de médias admissíveis poderão ser obtidas facilmente, de modo que

$$E[\bar{x}^2_{i^*..}] = \Sigma_{\varnothing} + \Sigma_A + \frac{1}{b}\Sigma_B + \frac{1}{b}\Sigma_{AB} + \frac{1}{rb}\Sigma_{AB(P)}$$
$$E[\bar{x}^2_{.j^*.}] = \Sigma_{\varnothing} + \frac{1}{a}\Sigma_A + \Sigma_B + \frac{1}{a}\Sigma_{AB} + \frac{1}{ra}\Sigma_{AB(P)}$$

$$E[\overline{x}^2_{i^\bullet j^\bullet .}] = \Sigma_{\varnothing} + \Sigma_A + \Sigma_B + \Sigma_{AB} + \frac{1}{r}\Sigma_{AB(P)}$$

$$E[x^2_{i^\bullet j^\bullet f}] = \Sigma_{\varnothing} + \Sigma_A + \Sigma_B + \Sigma_{AB} + \Sigma_{AB(P)}.$$

3.3.2.3 Obtenção das esperanças de quadrados médios

A identidade populacional, como já visto, é dada por:

$$\begin{aligned} y_{ijk} = {} & \overline{y}_{...} + (\overline{y}_{i..} - \overline{y}_{...}) + (\overline{y}_{.j.} - \overline{y}_{...}) + (\overline{y}_{ij.} - \overline{y}_{i..} - \overline{y}_{.j.} + \overline{y}_{...}) + (\overline{y}_{..k} - \overline{y}_{...}) \\ & + (\overline{y}_{ik.} - \overline{y}_{i..} - \overline{y}_{.k.} + \overline{y}_{...}) + (\overline{y}_{.jk} - \overline{y}_{.j.} - \overline{y}_{..k} + \overline{y}_{...}) \\ & + (y_{ijk} - \overline{y}_{ij.} - \overline{y}_{i.k} - \overline{y}_{.jk} + \overline{y}_{i..} + \overline{y}_{.j.} + \overline{y}_{..k} - \overline{y}_{...}). \end{aligned}$$

Os quatro últimos componentes integram o erro experimental e, portanto,

$$\begin{aligned} & (\overline{y}_{..k} - \overline{y}_{...}) + (\overline{y}_{ik.} - \overline{y}_{i..} - \overline{y}_{.k.} + \overline{y}_{...}) + (\overline{y}_{.jk} - \overline{y}_{.j.} - \overline{y}_{..k} + \overline{y}_{...}) + \\ & \quad + (y_{ijk} - \overline{y}_{ij.} - \overline{y}_{i.k} - \overline{y}_{.jk} + \overline{y}_{i..} + \overline{y}_{.j.} + \overline{y}_{..k} - \overline{y}_{...}) = (y_{ijk} - \overline{y}_{ij.}). \end{aligned}$$

Isto significa que a soma da variação captada por estes componentes individualmente, assim como seus graus de liberdade, podem ser representados num único componente; neste caso pode-se dizer que seus efeitos estão confundidos no componente $(y_{ijk} - \overline{y}_{ij.})$, que em termos de amostra é representado por $(x_{i^\bullet j^\bullet f} - \overline{x}_{i^\bullet j^\bullet .})$. Agora se pode apresentar a identidade amostral.

Com base no exposto, a identidade amostral é dada por:

$x_{i^\bullet j^\bullet f} = \overline{x}_{...} + (\overline{x}_{i^\bullet ..} - \overline{x}_{...}) + (\overline{x}_{.j^\bullet .} - \overline{x}_{...}) + (\overline{x}_{i^\bullet j^\bullet .} - \overline{x}_{i^\bullet ..} - \overline{x}_{.j^\bullet .} + \overline{x}_{...}) + (x_{i^\bullet j^\bullet f} - \overline{x}_{i^\bullet j^\bullet .})$ e a soma de quadrados correspondente dada por:

$$\begin{aligned} \sum_{i^\bullet j^\bullet f} (x_{i^\bullet j^\bullet f} - \overline{x}_{...})^2 = {} & \sum_{i^\bullet j^\bullet f} (\overline{x}_{i^\bullet ..} - \overline{x}_{...})^2 + \sum_{i^\bullet j^\bullet f} (\overline{x}_{.j^\bullet .} - \overline{x}_{...})^2 + \sum_{i^\bullet j^\bullet f} (\overline{x}_{i^\bullet j^\bullet .} - \overline{x}_{i^\bullet ..} - \overline{x}_{.j^\bullet .} + \overline{x}_{...})^2 \\ & + \sum_{i^\bullet j^\bullet f} (x_{i^\bullet j^\bullet f} - \overline{x}_{i^\bullet j^\bullet .})^2. \end{aligned}$$

Seja agora calcular as esperanças de quadrados médios associados à análise de variância.

Seja calcular a E (QM) do resíduo.

Considere a soma de quadrados do resíduo:

$$\sum_{i^*j^*f} (x_{i^*j^*f} - \overline{x}_{i^*j^*.})^2 = \sum_{i^*j^*f} (x^2_{i^*j^*f} - \overline{x}^2_{i^*j^*.})$$

e a esperança da soma de quadrados dada por $E[\sum_{i^*j^*f} (x^2_{i^*j^*f} - \overline{x}^2_{i^*j^*.})]$

$$\sum_{i^*j^*f} [E(x^2_{i^*j^*f}) - E(\overline{x}^2_{i^*j^*.})] = abr[\Sigma_{AB(P)} - \frac{1}{r}\Sigma_{AB(P)}] = ab(r-1)\Sigma_{AB(P)}.$$

Dividindo-se pelos graus de liberdade $ab(r-1)$ obtém-se $\Sigma_{AB(P)}$.

Seja calcular a E (QM) do fator A.

O fator A tem a soma de quadrados $br\sum_{i^*} (\overline{x}_{i^*..} - \overline{x}_{...})^2 = br\sum_{i^*} (\overline{x}^2_{i^*..} - \overline{x}^2_{...})$

e a esperança da soma de quadrados pode ser obtida como $E[br\sum_{i^*} (\overline{x}^2_{i^*..} - \overline{x}^2_{...})]$

$$br\sum_{i^*} [E(\overline{x}^2_{i^*..}) - E(\overline{x}^2_{...})] = abr[\frac{(a-1)}{a}\Sigma_A + \frac{(a-1)}{ab}\Sigma_{AB} + \frac{(a-1)}{rab}\Sigma_{AB(P)}] =$$
$$= br(a-1)\Sigma_A + r(a-1)\Sigma_{AB} + (a-1)\Sigma_{AB(P)}.$$

Dividindo-se pelos respectivos graus de liberdade $(a-1)$, tem-se

$$\Sigma_{AB(P)} + r\Sigma_{AB} + br\Sigma_A.$$

Seja agora calcular a E (QM) do fator B.

O fator B tem a soma de quadrados $ar\sum_{j^*} (\overline{x}_{.j^*.} - \overline{x}_{...})^2 = ar\sum_{j^*} (\overline{x}^2_{.j^*.} - \overline{x}^2_{...})$

e a esperança da soma de quadrados é obtida como segue: $E[ar\sum_{j^*} (\overline{x}^2_{.j^*.} - \overline{x}^2_{...})]$

$$ar\sum_{j^*} [E(\overline{x}^2_{.j^*.}) - E(\overline{x}^2_{...})] = abr[\frac{(b-1)}{b}\Sigma_A + \frac{(b-1)}{ab}\Sigma_{AB} + \frac{(b-1)}{rab}\Sigma_{AB(P)}] =$$
$$= ar(a-1)\Sigma_A + r(a-1)\Sigma_{AB} + (a-1)\Sigma_{AB(P)}.$$

Dividindo-se pelos graus de liberdade $(b-1)$, tem-se: $\Sigma_{AB(P)} + r\Sigma_{AB} + ar\Sigma_A$.

Seja agora calcular a E (QM) da interação entre os fatores A e B.

De modo análogo, se obtém a esperança dos quadrados médios da interação, que é dada por

$$\Sigma_{AB(P)} + r\Sigma_{AB}.$$

3.3.2.4 Análise de variância amostral

A tabela 3.2 sintetiza as somas de quadrados com as respectivas esperanças para um delineamento com três fatores completamente aleatorizados.

TABELA 3.2 Análise de variância para um delineamento com três fatores completamente casualizado

$F.V$	$G.L$	$S.Q$	$E[Q.M]$
a	$a-1$	$br\sum_{i^*}(\bar{x}_{i^*...} - \bar{x}_{...})^2$	$\Sigma_{ab(r)} + r\Sigma_{ab} + rb\Sigma_a$
b	$b-1$	$ar\sum_{j^*}(\bar{x}_{.j^*.} - \bar{x}_{...})^2$	$\Sigma_{ab(r)} + r\Sigma_{ab} + ar\Sigma_b$
axb	$(a-1)(b-1)$	$r\sum_{i^*j^*}(\bar{x}_{i^*j^*.} - \bar{x}_{i^*...} - \bar{x}_{.j^*.} + \bar{x}_{...})^2$	$\Sigma_{ab(r)} + r\Sigma_{ab}$
res	$ab(r-1)$	$\sum_{i^*j^*f}(x_{i^*j^*f} - \bar{x}_{i^*j^*.})^2$	$\Sigma_{ab(r)}$
$Total$	$abr-1$	$\sum_{i^*j^*f}(x_{i^*j^*f} - \bar{x}_{...})^2$	

3.3.3 Delineamento em blocos casualizados

Uma resposta conceitual para um delineamento em blocos casualizados pode ser representada por y_{ijk}, em que j representa a unidade experimental que recebeu o tratamento k no bloco i. A estrutura populacional é dada por (B:P)(T) ou (i: j) (k) com i = 1,..., B; j = 1,..., P e k = 1,..., T.

A identidade populacional, como já visto no capítulo 1, é:

$$y_{ijk} = \bar{y}_{...} + (\bar{y}_{i..} - \bar{y}_{...}) + (\bar{y}_{..k} - \bar{y}_{...}) + (\bar{y}_{i.k} - \bar{y}_{i..} - \bar{y}_{..k} + \bar{y}_{...}) +$$
$$+ (\bar{y}_{i(j).} - \bar{y}_{i..}) + (y_{i(jk)} - \bar{y}_{i(j).} - \bar{y}_{i.k} + \bar{y}_{i..}).$$

O modelo matemático associado é:

$$y_{ijk} = \mu + B_i + T_k + (BT)_{ik} + P_{i(j)} + (TP)_{i(jk)}.$$

O procedimento experimental consiste em escolher aleatoriamente b blocos de B, e em cada bloco escolhido rt unidades experimentais de P, selecionar t tratamentos de T e dentro de cada bloco escolhido aplicar aleatoriamente cada um dos t tratamentos selecionados a exatamente r unidades experimentais. Observe que dentro de cada bloco, cada tratamento é aplicado a r unidades, embora, se o objetivo for aplicar cada tratamento em apenas uma unidade experimental, basta fazer r = 1. Denote por $x_{i^*k^*f}$ o valor observado associado com a f-ésima repetição do k^*-ésimo tratamento escolhido no i^*-ésimo bloco selecionado, sendo $i^* = 1, ..., b$; $k^* = 1,..., t$ e $f = 1,..., r$.

E sejam as variáveis aleatórias de delineamento definidas como segue:

$\alpha_i^{i^*} = 1$, se o i^*-ésimo bloco selecionado corresponde ao i;

$\alpha_i^{i^*} = 0$, caso contrário.

$\beta_k^{k^*} = 1$, se o k^*-ésimo tratamento escolhido corresponde a k;

$\beta_k^{k^*} = 0$, caso contrário.

$\delta_j^{i^*k^*f} = 1$, se i^*k^*f ocorre na unidade j;

$\delta_j^{i^*k^*f} = 0$, caso contrário.

As variáveis aleatórias possuem as seguintes propriedades:

$$p[(\alpha_i^{i^*})^r = 1] = p(\alpha_i^{i^*} = 1) = \frac{1}{B} \text{ e } p(\alpha_i^{i^*} = 1, \alpha_{i'}^{i^{*\prime}} = 1) = \frac{1}{B(B-1)}$$

$$p[(\beta_k^{k^*})^r = 1] = p(\beta_k^{k^*} = 1) = \frac{1}{T} \text{ e } p(\beta_k^{k^*} = 1, \beta_{k'}^{k^{*\prime}} = 1) = \frac{1}{T(T-1)}$$

$$p[(\delta_j^{i^*k^*f})^r = 1] = p(\delta_j^{i^*k^*f} = 1) = \frac{1}{P} \text{ e } p(\delta_j^{i^*k^*f} = 1, \delta_{j'}^{i^*k^*f'} = 1) = \frac{1}{P(P-1)}.$$

Então a relação entre um valor observado $x_{i^*k^*f}$ e uma resposta conceitual y_{ijk} é dada por:

$$x_{i^*k^*f} = \sum_{ijk} \alpha_i^{i^*} \beta_k^{k^*} \delta_j^{i^*k^*f} y_{ijk} = \mu + \sum_i \alpha_i^{i^*} B_i + \sum_k \beta_k^{k^*} T_k + \sum_{ik} \alpha_i^{i^*} \beta_k^{k^*} (BT)_{ik}$$
$$+ \sum_{ij} \alpha_i^{i^*} \delta_j^{i^*k^*f} P_{i(j)} + \sum_{ijk} \alpha_i^{i^*} \beta_k^{k^*} \delta_j^{i^*k^*f} (TP)_{i(jk)},$$

que representa o modelo linear deduzido.

3.3.3.1 Esperanças dos quadrados de médias admissíveis

Analogamente ao procedimento dos exemplos anteriores, pode-se ver facilmente que a esperança do quadrado de um valor observado é dada por:

$$E[x_{i^*k^*f}]^2 = \mu^2 + (1-\frac{1}{B})\sigma_B^2 + (1-\frac{1}{T})\sigma_T^2 + (1-\frac{1}{B})(1-\frac{1}{T})\sigma_{BT}^2$$
$$+ (1-\frac{1}{P})\sigma_{B(P)}^2 + [(1-\frac{1}{T}) - \frac{1}{P}(1-\frac{1}{T})]\sigma_{B(PT)}^2$$

com $\sigma_{B(P)}^2 = \dfrac{\sum_{ij}(BP)_{i(j)}^2}{B(P-1)}$ e $\sigma_{B(PT)}^2 = \dfrac{\sum_{ijk}(PT)_{i(jk)}^2}{B(P-1)(T-1)}$.

Em função de sigma maiúscula obtém-se:

$$E[x_{i^*k^*f}]^2 = \Sigma_\varnothing + \Sigma_B + \Sigma_T + \Sigma_{BT} + \Sigma_{B(P)} + \Sigma_{B(PT)}.$$

Seja agora calcular:

$$E[\overline{x}_{i^*k^*.}]^2 = \mu^2 + (1-\frac{1}{B})\sigma_B^2 + (1-\frac{1}{T})\sigma_T^2 + (1-\frac{1}{B})(1-\frac{1}{T})\sigma_{BT}^2$$
$$+ (1-\frac{r}{P})\frac{\sigma_{B(P)}^2}{r} + [(1-\frac{1}{T}) - \frac{r}{P}(1-\frac{1}{T})]\frac{\sigma_{B(PT)}^2}{r}.$$

Através da função sigma maiúscula, escreve-se:

$$E[\overline{x}_{i^{\bullet}k^{\bullet}.}]^2 = \Sigma_{\varnothing} + \Sigma_B + \Sigma_T + \Sigma_{BT} + \frac{1}{r}\Sigma_{B(P)} + \frac{1}{r}\Sigma_{B(PT)}.$$

As demais esperanças do quadrado de médias admissíveis podem ser obtidas por um raciocínio análogo.

3.3.3.2 Obtenção das esperanças de quadrados médios

A identidade amostral para o delineamento em blocos casualizados é igual a:

$$x_{i^{\bullet}k^{\bullet}f} = \overline{x}_{...} + (\overline{x}_{i^{\bullet}..} - \overline{x}_{...}) + (\overline{x}_{.k^{\bullet}.} - \overline{x}_{...}) + (\overline{x}_{i^{\bullet}k^{\bullet}.} - \overline{x}_{i^{\bullet}..} - \overline{x}_{.k^{\bullet}.} + \overline{x}_{...}) + (x_{i^{\bullet}k^{\bullet}f} - \overline{x}_{i^{\bullet}k^{\bullet}.})$$

com soma de quadrados da forma

$$\sum_{i^{\bullet}k^{\bullet}f} x^2_{i^{\bullet}k^{\bullet}f} = \sum_{i^{\bullet}k^{\bullet}f} \overline{x}^2_{...} + \sum_{i^{\bullet}k^{\bullet}f} (\overline{x}_{i^{\bullet}..} - \overline{x}_{...})^2 + \sum_{i^{\bullet}k^{\bullet}f} (\overline{x}_{.k^{\bullet}.} - \overline{x}_{...})^2 +$$
$$+ \sum_{i^{\bullet}k^{\bullet}f} (\overline{x}_{i^{\bullet}k^{\bullet}.} - \overline{x}_{i^{\bullet}..} - \overline{x}_{.k^{\bullet}.} + \overline{x}_{...})^2 + \sum_{i^{\bullet}k^{\bullet}f} (x_{i^{\bullet}k^{\bullet}f} - \overline{x}_{i^{\bullet}k^{\bullet}.})^2.$$

Pode-se agora calcular as esperanças de quadrados médios associados à análise de variância usando as esperanças do quadrado de médias admissíveis já determinadas.

Seja calcular a E (QM) do resíduo.

Considere a soma de quadrados do resíduo $\sum_{i^{\bullet}k^{\bullet}f} (x_{i^{\bullet}k^{\bullet}f} - \overline{x}_{i^{\bullet}k^{\bullet}.})^2$. Então, a esperança da soma de quadrados do resíduo é dada por:

$$E[\sum_{i^{\bullet}k^{\bullet}f} (x_{i^{\bullet}k^{\bullet}f} - \overline{x}_{i^{\bullet}k^{\bullet}.})^2] = \sum_{i^{\bullet}k^{\bullet}f} [E(x_{i^{\bullet}k^{\bullet}f})^2 - E(\overline{x}_{i^{\bullet}k^{\bullet}.})^2] = rbt[\frac{(r-1)}{r}\Sigma_{B(P)} + \frac{(r-1)}{r}\Sigma_{B(PT)}]$$
$$= bt[(r-1)\Sigma_{B(P)} + (r-1)\Sigma_{B(PT)}].$$

Dividindo pelos graus de liberdade $bt(r-1)$ obtém-se, $\Sigma_{B(P)} + \Sigma_{B(PT)}$. A exemplo dos delineamentos anteriores, a soma dos dois componentes do erro experimental será representada por apenas um sigma, com índices amostrais, por se tratar de uma notação mais apropriada. Desse modo, $\Sigma_{bt(r)} = \Sigma_{B(P)} + \Sigma_{B(PT)}$.

De maneira análoga, se obtém ainda as esperanças:

E [QM] de tratamento, que é dada por:

$$\Sigma_{bt(r)} + r\Sigma_{bt} + br\Sigma_{t}.$$

E [QM] de blocos:

$$\Sigma_{bt(r)} + r\Sigma_{bt} + rt\Sigma_{b}.$$

E [QM] da interação bloco tratamento:

$$\Sigma_{bt(r)} + r\Sigma_{bt}.$$

3.3.3.3 Análise de variância amostral

A tabela 3.3 sintetiza as somas de quadrados com as respectivas esperanças num delineamento em blocos casualizados.

TABELA 3.3 Análise de variância para um delineamento em blocos casualizados

$F.V$	$G.L$	$S.Q$	$E[QM]$
b	$b-1$	$\sum_{i^\bullet k^\bullet f} (\bar{x}_{i^\bullet ..} - \bar{x}_{...})^2$	$\Sigma_{bt(r)} + r\Sigma_{bt} + rt\Sigma_{b}$
t	$t-1$	$\sum_{i^\bullet k^\bullet f} (\bar{x}_{.k^\bullet .} - \bar{x}_{...})^2$	$\Sigma_{bt(r)} + r\Sigma_{bt} + br\Sigma_{t}$
bxt	$(b-1)(t-1)$	$\sum_{i^\bullet k^\bullet f} (\bar{x}_{i^\bullet k^\bullet .} - \bar{x}_{i^\bullet ..} - \bar{x}_{.k^\bullet .} + \bar{x}_{...})^2$	$\Sigma_{bt(r)} + r\Sigma_{bt}$
res	$bt(r-1)$	$\sum_{i^\bullet k^\bullet f} (x_{i^\bullet k^\bullet f} - \bar{x}_{i^\bullet k^\bullet .})^2$	$\Sigma_{bt(r)}$
$Total$	$btr-1$	$\sum_{i^\bullet k^\bullet f} x_{i^\bullet k^\bullet f}^2 - \sum_{i^\bullet k^\bullet f} \bar{x}_{...}^2$	

3.4 Um algoritmo para obtenção das esperanças de quadrados médios

Será proposto um algoritmo para obtenção das esperanças de quadrados médios, aplicável a populações balanceadas, a exemplo de Hicks (1973).

1. Colocam-se à esquerda as fontes de variação representadas pelos próprios efeitos do modelo e, na entrada superior da tabela, o número de níveis correspondentes aos índices envolvidos no modelo.

2. Em cada coluna coloca-se o número de níveis correspondentes em cada linha na qual o índice da coluna não aparece. Nos demais coloca-se 1.

3. Multiplicam-se os valores internos da tabela, em cada linha. Esses produtos são multiplicados, respectivamente, pelos Σ's correspondentes. A soma desses produtos resulta as E [QM], porém devem ser eliminadas dessa soma todas as parcelas oriundas de linhas que não contenham o índice do efeito a que se refere a E [QM].

3.4.1 Esperanças de quadrados médios em um delineamento em blocos casualizados

	b	t	r	$E[QM]$
x_b	1	t	r	$\Sigma_{bt(r)} + r\Sigma_{bt} + rt\Sigma_b$
x_t	b	1	r	$\Sigma_{bt(r)} + r\Sigma_{bt} + rb\Sigma_t$
x_{bt}	1	1	r	$\Sigma_{bt(r)} + r\Sigma_{bt}$
$x_{bt(r)}$	1	1	1	$\Sigma_{bt(r)}$

3.4.2 Esperanças de quadrados médios em um delineamento com três fatores

	a	b	r	$E[QM]$
x_a	1	b	r	$\Sigma_{ab(r)} + r\Sigma_{ab} + rb\Sigma_a$
x_b	a	1	r	$\Sigma_{ab(r)} + r\Sigma_{ab} + ar\Sigma_b$
x_{ab}	1	1	r	$\Sigma_{ab(r)} + r\Sigma_{ab}$
$x_{ab(r)}$	1	1	1	$\Sigma_{ab(r)}$

3.4.3 Esperanças de quadrados médios em um delineamento inteiramente casualizado com dois fatores

	t	r	$E[Q.M]$
x_t	1	r	$\Sigma_{t(r)} + r\Sigma_t$
$x_{t(r)}$	1	1	$\Sigma_{t(r)}$

3.5 Considerações gerais

A análise de variância obtida segundo esta metodologia independe de quaisquer pressuposições especiais para sua validade. Segundo Kempthorne & Hinkelmann (1994), este procedimento ainda tem a propriedade de controlar o erro, produzir uma variância do erro menor.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

COCHRAN, W.G. Some consequences when the assumptions for the analysis of variance are not satisfied. **Biometrics**, v.3, p. 22-38, 1947.

CORNFIELD, J. On samples from finite populations. **Journal of the American Statistical Association,** v.39, p.236-239, 1944.

CORNFIELD, J.; TUKEY, J.W. Average values of means squares in factorials. **Annals of Mathematical Statistics**, v.27, p.907-949, 1956.

FISHER, R. A. **The design of experiments.** 4.ed. New York: Hafner, 1947.

GRAYBILL, F. A.;MARSAGLIA, G. Idempotent matrices and quadratics forms in the general linear hypothesis. **Annals of Mathematical Statistics,** v. 28, p.678-686, Jan 1957.

HICKS, C.R. **Fundamental concepts in the design of experiments.** 2. ed. New York: Holt, Rinehart and Winston, 1973. 349p.

HINKELMANN, K.; KEMPTHORNE, O. **Design and analysis of experiments**. New York: John Wiley & Sons.Inc., 1994. 495p.

MOOD, A.M.; GRAYBILL, F.A.; BOES, D.C. **Introduction to the theory of statistics.** 3. ed. Tokyo: McGraw-Hill, 1974.564p.

NEUDECKER, H. Some theorems on matrix differentiation with special reference to Kronecker matrix products. **Journal of the American Statistical Association,** v. 64, p. 953-962, 1969.

KEMPTHORNE, O. **The design and analysis of experiments**. New York: John Wiley & Sons.Inc., 1952. 631p.

KEMPTHORNE, O. The randomization theory of experimental inference. **Journal of the American Statistical Association,** v.50, p.946-967, 1955.

Wilk, M.B. **Linear models and randomized experiments.**1955. Tese Ph.D. Iowa State Colege Library.Ames, Iowa. Não publicada.

Wilk, M.B.; KEMPTHORNE, O. Fixed, mixed end random models. **Journal of the American Statistical Association,** v. 50, p.1144-1169, 1955.

Wilk, M.B.; KEMPTHORNE, O. Non-additivities in a Latin square design. **Journal of the American Statistical Association,** v.52, p.218-236, 1957.

SEARLE, S.R.; CASELA, G.; MCCULLOCH, C.E. **Variance components.** New York: John Wiley & Sons.Inc., 1992. 497p.

ZYSKIND, G. **Error structures in experimental designes.**1958. Tese Ph.D. Iowa State University of Science and Technology, Ames, Iowa. Não publicada.

TUKEY, J.W. One degree of freedom for non-additivity. **Biometrics,** v.5, p.232-242,1949.

VEIGA, R.D. **Estruturas e esperanças de formas quadráticas.**1982.72p. Dissertação de mestrado (Ciências da Computação e Estatística). Universidade de São Carlos, São Paulo.