



XXXVII IBERIAN LATIN AMERICAN CONGRESS
ON COMPUTATIONAL METHODS IN ENGINEERING
BRASÍLIA - DF - BRAZIL

ESTUDO NUMÉRICO COMPARATIVO DE METODOLOGIAS PARA A DEGRADAÇÃO DA RIGIDEZ À FLEXÃO NO CONTEXTO DO MÉTODO DA RÓTULA PLÁSTICA REFINADO

Ígor José Mendes Lemes

Andréa Regina Dias da Silva

Ricardo Azoubel da Mota Silveira

Paulo Anderson Santana Rocha

igorjml@hotmail.com

andreadiassilva@yahoo.com.br

ricardo@em.ufop.com

paulorochoa@em.ufop.br

Programa de Pós Graduação em Engenharia Civil (Propec/Deciv/EM), Universidade Federal de Ouro Preto, Campus Universitário s/n, Morro do Cruzeiro, 35400-000, Ouro Preto, MG, Brasil

Resumo. *O presente trabalho visa a avaliação de metodologias para a simulação numérica da degradação da rigidez à flexão de sistemas estruturais via Método da Rótula Plástica Refinado (MRPR). Nesse método, a plasticidade é considerada de forma concentrada apenas nos pontos nodais dos elementos. Duas abordagens se destacam neste âmbito: a utilização de molas fictícias nas extremidades dos elementos e a construção da relação momento-curvatura. A perda gradual da rigidez à flexão, pelas molas fictícias, é determinada através da localização da combinação de esforços solicitantes dentro do diagrama de interação NM. É necessária a definição dos limites de início de plastificação e da capacidade resistente da seção. A segunda abordagem se enquadra no contexto do Método da Compatibilidade de Deformações (MCD), via relação momento-curvatura. Conhecida a configuração deformada da seção transversal no ponto nodal é possível, utilizando as relações constitutivas dos materiais, obter o módulo de elasticidade tangente e conseqüentemente as rigidezes axial e à flexão. As duas metodologias serão confrontadas no que diz respeito à precisão e ao tempo de processamento.*

Palavras-chave: *Não linearidade física, MRPR, molas fictícias, relação momento-curvatura*

1 INTRODUÇÃO

Na concepção dos projetos estruturais na engenharia civil, os projetistas iniciam os cálculos baseados em 3 premissas: segurança, tempo (elaboração dos projetos e execução da obra) e economia. Para se atingir o equilíbrio entre essas variáveis há uma gama de materiais e métodos disponíveis (Lemes *et al.* 2015a). No contexto da análise numérica de sistemas estruturais, o Método dos Elementos Finitos (MEF) se destaca por sua eficiência. Em uma análise via MEF existem diferentes metodologias para a simulação da não linearidade física. Os métodos que fornecem resultados mais precisos, considerando a plasticidade distribuída, demandam um intenso esforço computacional.

Para se obter boa precisão nos resultados de forma mais prática e viável computacionalmente, o Método da Rótula Plástica Refinado (MRPR) surge como alternativa. Usualmente, o MRPR está associado à análise de estruturas metálicas (Chan e Chui, 2000; Silva, 2009) e mistas (Fong e Chan, 2012; Lemes, 2015). Nessas abordagens, é possível que a degradação da rigidez da seção transversal seja feita por meio de elementos de mola fictícios inseridos nas extremidades dos elementos finitos de viga-coluna. Essa degradação se inicia quando a combinação de esforço normal e momento fletor ultrapassa o limite do regime elástico imposto por uma curva de início de plastificação. Em outras palavras, a seção transversal apresenta comportamento linear elástico até que essa curva seja atingida. Por outro lado, em qualquer análise, sempre haverá um trecho onde o comportamento dos materiais presentes na seção será linear elástico. Dessa forma, a modelagem de elementos de concreto armado não é precisa.

Liu *et al.* (2012) propuseram um modelo de análise de estruturas de concreto armado via MRPR. Nesse modelo a rigidez a flexão da seção transversal é avaliada através da relação momento-curvatura. Assim o momento de inércia da seção transversal era reduzido por uma equação aproximada proposta por Branson e Metz (1963). Já Ngo-Huu e Kim (2012) estudaram uma metodologia mista entre o MRPR e o MZP para a avaliação de estruturas mistas. Nesse trabalho os autores fizeram a discretização da seção transversal em fibras e avaliavam o módulo de elasticidade tangente dos materiais por meio das respectivas deformações.

Lemes *et al.* (2015b) propuseram o uso do Método da Compatibilidade de Deformações (MCD) (Caldas, 2004; Chiorean, 2013) para a avaliação tanto da capacidade resistente da seção transversal, quanto das rigidezes axial e à flexão. A construção da relação momento-curvatura se torna essencial para tal avaliação. Uma vez considerando a tangente à relação momento-curvatura, as rigidezes dependem somente do módulo de elasticidade dos materiais, retirado das respectivas relações constitutivas. Acopla-se essa metodologia ao MRPR avaliando a plasticidade em termos nodais através dos parâmetros generalizados de rigidez. Dessa forma, as molas fictícias não são necessárias para a simulação da não linearidade dos materiais da seção transversal.

O presente estudo visa a comparação das duas metodologias de degradação da rigidez usualmente aplicadas ao MRPR. Pretende-se avaliar a precisão e o tempo de execução de cada um dos métodos comparando-os com resultados presentes na literatura.

2 FORMULAÇÃO VIA MEF

No MRPR a plasticidade é considerada de forma concentrada nos pontos nodais. Nesta seção apresenta-se o método de forma geral, para em seguida se descrever as duas metodologias a serem comparadas no presente trabalho.

É importante destacar algumas considerações envolvendo a formulação de elementos finitos adotada neste trabalho, isto é:

- todos os elementos são inicialmente retos e prismáticos, e a seção transversal permanece plana após a deformação;
- são desprezados os efeitos de instabilidade locais, como a flambagem nas chapas componentes dos perfis de aço; assim a seção pode desenvolver sua capacidade total de rotação plástica;
- os efeitos de instabilidade globais que podem acontecer em problemas tridimensionais, como a flambagem lateral ou torcional, são ignorados pois considera-se um sistema de travamento no eixo z ;
- grandes deslocamentos e rotações de corpo rígido são permitidos;
- as deformações originadas pelo cisalhamento são ignoradas;
- no caso da análise de estruturas mistas, considera-se a interação total entre os elementos de aço e concreto.

A relação de equilíbrio na forma incremental de um elemento finito de viga-pilar é dada por:

$$\begin{Bmatrix} \Delta P \\ \Delta M_i \\ \Delta M_j \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} k_{11} & 0 & 0 \\ 0 & k_{22} & k_{23} \\ 0 & k_{32} & k_{33} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \Delta \delta \\ \Delta \theta_i \\ \Delta \theta_j \end{Bmatrix} \quad (1)$$

ou ainda, na sua forma compacta, escreve-se:

$$\Delta \mathbf{f}_c = \mathbf{K}_c \Delta \mathbf{u}_c \quad (2)$$

na qual, ΔP , ΔM_i e ΔM_j são os incrementos de força axial e de momentos fletores e $\Delta \delta$, $\Delta \theta_i$ e $\Delta \theta_j$ são os incrementos de deformação axial e rotações nodais, respectivamente.

Já os parâmetros k_{22} , k_{23} , k_{32} e k_{33} são termos da matriz de rigidez que dependem da formulação geometricamente não linear. Optou-se, neste trabalho, pela formulação linearizada proposta por Yang e Kuo (1994). Além disso, esses termos são diferentes para cada uma das duas abordagens descritas no presente trabalho.

Após a montagem do sistema de equações no sistema corrotacional o mesmo é passado para o sistema local e posteriormente global, onde o problema é resolvido. Vale lembrar que interpolações de deslocamentos não são realizadas no interior do elemento finito. Dessa forma há formação de rótulas plásticas apenas nos pontos nodais. Uma vez formadas rótulas plásticas na estrutura, um incremento de carga pode fazer com que as forças internas violem o domínio resistente naquele ponto. Faz-se necessária então uma estratégia para que isso não ocorra. Assim, o esforço axial é mantido constante e o momento fletor é reduzido de forma a não violar a curva de interação normal-momento. Essa estratégia é denominada *Return Mapping* (Silva, 2009). Maiores detalhes sobre a transformação de sistemas e o *Return Mapping* podem ser vistos em Silva (2009).

3 FORMULAÇÃO DO MRPR COM MOLAS FICTÍCIAS

Nessa formulação um elemento finito híbrido, com molas fictícias é utilizado. Os efeitos da degradação da rigidez à flexão são simulados por meio da redução da rigidez rotacional das molas, S_h . Para isso, definem-se três regimes: elástico, elastoplástico e plástico, conforme ilustrado na Fig. 1. O parâmetro S_h é definido no regime elástico como 10^{16} , e no plástico como 10^{-10} . A degradação da rigidez quando em regime elastoplástico, pode ser acompanhada pela equação:

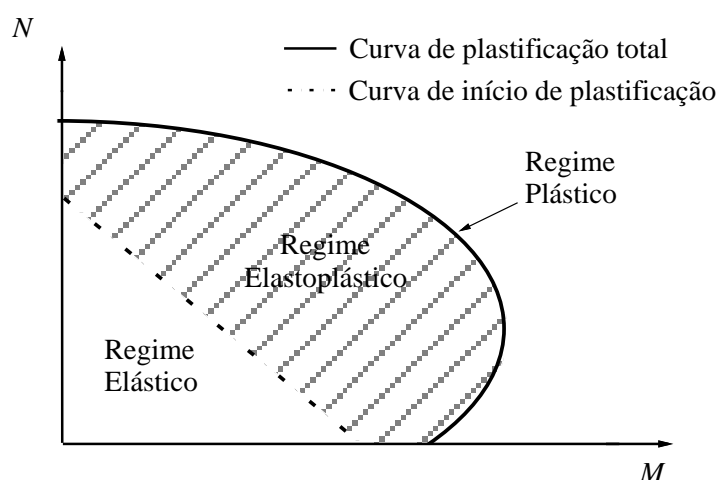


Figura 1: Diagrama esforço normal-momento fletor

$$S_h = \frac{(EI)_{comp}}{L} \left(\frac{M_{pr} - M}{M - M_{er}} \right) \quad (3)$$

em que L é o comprimento do elemento finito; M_{pr} e M_{er} são, respectivamente, os momentos resistente último e de início de plastificação; e $(EI)_{comp}$ é a rigidez à flexão da seção mista homogeneizada que, para seções duplamente simétricas é dada por:

$$(EI)_{comp} = \eta [(EI)_a + (EI)_b + (\mu EI)_c] \quad (4)$$

em que os subscritos a , b e c referem-se, respectivamente, ao perfil de aço, às armaduras e ao concreto; μ o fator de redução da rigidez flexional de concreto devido à fissuração; e η um coeficiente de redução da rigidez global. Esses últimos são tidos como dados de entrada, já que há uma gama de possibilidades de valores disponíveis na literatura. No caso de lajes apoiadas sobre perfis I, Liew *et al.* (2001) definem a seguinte expressão:

$$(EI)_{comp} = E_a (0, 4I_{comp} + 0, 6I'_{comp}) \quad (5)$$

sendo I_{comp} e I'_{comp} os momentos de inércia da seção mista em regiões de momento positivo e de momento negativo, respectivamente, e E_a é módulo de elasticidade do aço do perfil.

Uma vez conhecidas as rigidezes homogeneizadas e a rigidez rotacional das molas fictícias, pode-se combiná-las de modo a obter os parâmetros k da matriz de rigidez da Eq. 1. Ressalta-se que o termo k_{11} não é alterado nessa formulação já que é considerada apenas a degradação da rigidez à flexão. Assim, tem-se:

$$k_{11} = \frac{EA_{comp}}{L} \quad (6)$$

$$k_{22} = S_{hi} - \frac{S_{hi}^2 (k_{jj} + S_{hj})}{\beta} \quad (7)$$

$$k_{23} = k_{32} = \frac{S_{hi} S_{hj} k_{ij}}{\beta} \quad (8)$$

$$k_{33} = S_{hj} - \frac{S_{hj}^2 (k_{ii} + S_{hi})}{\beta} \quad (9)$$

em que $EA_{comp} = EA_a + EA_b + EA_c$, $\beta = (S_{hi} + k_{ii})(S_{hj} + k_{jj}) - k_{ij}k_{ji} > 0$ e os parâmetros k_{ii} , k_{ij} , k_{ji} e k_{jj} são termos da matriz de rigidez que dependem da formulação geometricamente não linear, dados por:

$$k_{ii} = k_{jj} = \frac{4(EI)_{comp}}{L} + \frac{2PL}{15} \quad (10)$$

$$k_{ij} = k_{ji} = \frac{2(EI)_{comp}}{L} - \frac{PL}{30} \quad (11)$$

sendo I_{comp} e A_{comp} as propriedades geométricas da seção mista homogeneizada.

4 FORMULAÇÃO DO MRPR VIA RELAÇÃO M- ϕ

Nessa abordagem, parte-se da configuração deformada da seção transversal e por meio de sua matriz constitutiva chegam-se nas rigidezes generalizadas.

Para se fazer a análise da condição deformada da seção transversal e obter a capacidade resistente e sua rigidez, uma discretização da seção é feita. Na análise de estruturas planas, a discretização em fatias (Fig. 2(b)) é bastante satisfatória (Lemes, 2015). Porém, no presente trabalho, as tensões residuais serão introduzidas explicitamente no perfil metálico. Assim, será feita a discretização em fibras, como ilustrado na Fig. 2(c). A seguir apresentam-se os modelos constitutivos do aço e do concreto. Na Subseção 4.2, é descrito o procedimento iterativo realizado a nível da seção transversal para a construção da relação momento-curvatura. Por fim, são descritos nas seções 4.3 e 5, respectivamente, os procedimentos para obtenção das rigidezes generalizadas e a curva de interação normal-momento.

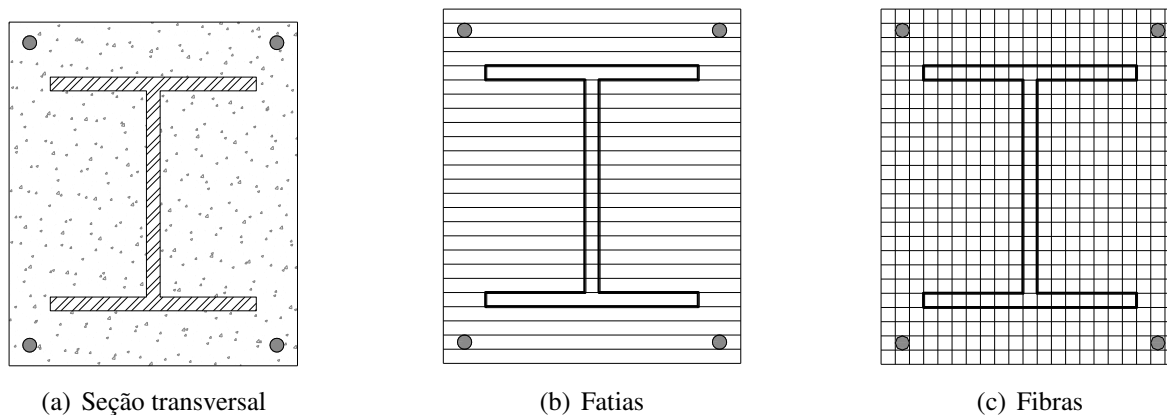


Figura 2: Discretização da seção transversal

4.1 Relações constitutivas

Aço

O comportamento do aço será descrito através do modelo constitutivo bilinear ilustrado na Fig. 3(a). Deve-se ressaltar a possibilidade da consideração do encruamento do material. Uma característica do aço é a isotropia, ou seja, seu comportamento à tração é igual ao de compressão. Assim, na Fig. 3(a) é mostrado apenas o trecho referente ao primeiro quadrante da relação constitutiva. Vale lembrar que, após o processo de fabricação, o elemento de aço sofre um resfriamento desigual originando as tensões residuais. Assim, considera-se que ocorram deformações prescritas na seção. Neste trabalho, a distribuição das tensões residuais, σ_r , segue o modelo ilustrado na Fig. 3(b), que é o mesmo utilizado por Chiorean (2013). Descreve-se então o comportamento do aço da seguinte forma:

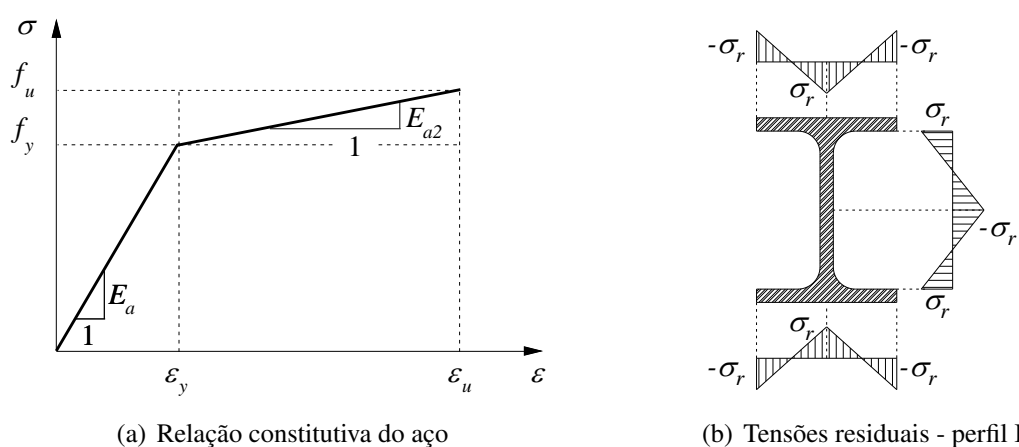


Figura 3: Comportamento do aço: relação constitutiva e tensões residuais

$$\sigma = \begin{cases} -f_y + E_{a2} (\varepsilon + \varepsilon_y), & -\varepsilon_u \leq \varepsilon \leq -\varepsilon_y \\ E_a \varepsilon, & -\varepsilon_y < \varepsilon < \varepsilon_y \\ f_y + E_{a2} (\varepsilon - \varepsilon_y), & \varepsilon_y \leq \varepsilon \leq \varepsilon_u \end{cases} \quad (12)$$

em que f_y , f_u , ε_y e ε_u , são, respectivamente, as tensões e deformações de escoamento e última do aço, E_a é o módulo de elasticidade no regime elástico e E_{a2} é o módulo de elasticidade na fase de encruamento.

Concreto

O concreto tem propriedades mecânicas distintas na tração e na compressão. Quando traçado, esse material apresenta resistência máxima f_{cr} (Fig. 4(b)). Destaca-se, também, que ao atingir a resistência f_{cr} inicia-se o processo de fissuração. Para deformações superiores a ε_{cr} o concreto perde resistência. Assim, diversos pesquisadores e até mesmo as normas de projeto desconsideram sua contribuição quando traçado. No presente trabalho a relação constitutiva proposta pela NBR 6118 (2014), ilustrada na Fig. 4(a), é utilizada para descrever o comportamento do concreto à compressão. Na tração, o modelo proposto por Bažant e Oh (1983), optando por limitar a máxima deformação de tração em 0,0007, como feito por Bratina *et al.* (2004), e ilustrado na Fig. 4(b), foi implementado. Dessa forma, tem-se:

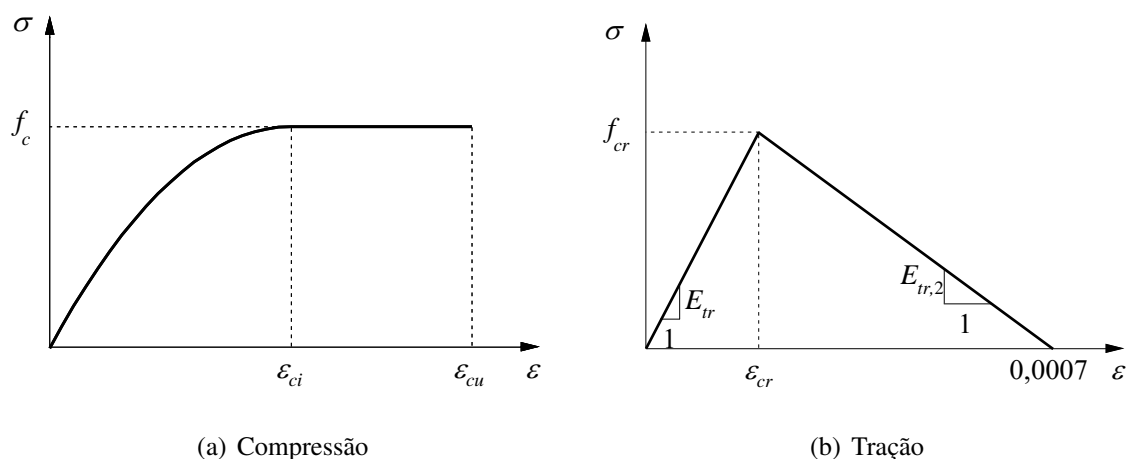


Figura 4: Relações constitutivas do concreto: compressão e tração

$$\sigma_c = \begin{cases} E_{tr}\varepsilon, 0 \leq \varepsilon \leq \varepsilon_{cr} \\ E_{tr,2}(\varepsilon - \varepsilon_{cr}) - f_{cr}, \varepsilon > \varepsilon_{cr} \\ \left[\frac{2\varepsilon}{\varepsilon_{ci}} - \left(\frac{\varepsilon}{\varepsilon_{ci}} \right)^2 \right] f_c, \varepsilon_{ci} < \varepsilon \leq 0 \\ -f_c, \varepsilon_{cu} \leq \varepsilon \leq \varepsilon_{ci} \end{cases} \quad (13)$$

sendo ε_{ci} , ε_{cu} e ε_{cr} a deformação limite do trecho de comportamento não linear do concreto, a deformação última do concreto à compressão, e a deformação de início de fissuração, respectivamente; f_{cr} é a resistência à fissuração do concreto; E_{tr} e $E_{tr,2}$ são os módulos de elasticidade do concreto à tração antes e depois da fissuração, respectivamente.

4.2 Relação momento-curvatura

Neste trabalho, optou-se por utilizar o método iterativo de *Newton-Raphson* para a obtenção da relação momento-curvatura ($M - \phi$). Para um valor fixo de esforço axial, N , são dados incrementos no momento fletor solicitante, M , até que o momento último resistente seja atingido. A estratégia de incrementos utilizada foi baseada na proposta de Zubyan (2013), ou seja:

$$M_{j+1} = M_j + d\phi EI \quad (14)$$

Para descrever a distribuição de deformações, a discretização da seção em fibras ilustrada na Fig. 2(c) é bastante eficiente. O propósito dessa divisão é captar a deformação axial, ε , no centroide plástico (CP) de cada fibra e então, através das relações constitutivas dos materiais, obter as respectivas tensões, σ_i . Duas variáveis são substanciais para empregar essa metodologia: a área das fibras, A_i , e sua respectiva posição, y_i . Essa segunda é referenciada à linha neutra plástica (LNP), já que alguns pesquisadores (Caldas, 2004; Chen *et al.*, 2001; Sfakianakis, 2002) apontam que dessa forma os problemas de convergência são minimizados.

A Figura 5 ilustra a distribuição de deformações em uma seção de concreto armado para uma combinação de esforços axial e de momento fletor. Assim, a deformação axial na i -ésima

fibra, ε_i , é dada por:

$$\varepsilon_i = \varepsilon_0 + \varepsilon_{ri} + \phi y_i \quad (15)$$

em que y_i é a distância entre os centroides plásticos da fibra analisada e da seção transversal, ε_0 é a deformação axial no CP da seção, ε_r é a deformação devido às tensões residuais (se houver aço na fibra), e ϕ a respectiva curvatura.

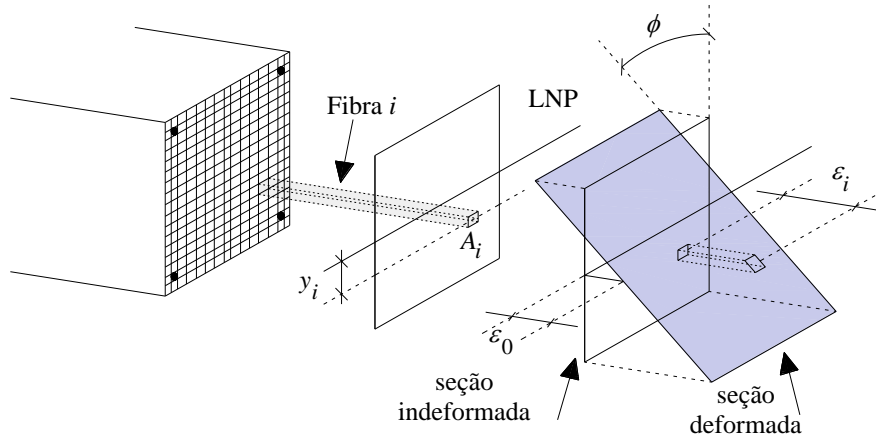


Figura 5: Campo linear de deformações sem curvatura no eixo y

Para a notação matricial adotada a seguir, as variáveis ε_0 e ϕ serão posições do vetor de deformações $\mathbf{X} = [\varepsilon_0 \quad \phi]^T$. Chiorean (2013) ressalta que, adotando-se $\mathbf{X} = \mathbf{0}$ na primeira iteração, a convergência é atingida rapidamente. Numericamente, pode-se dizer que o equilíbrio da seção é obtido quando a seguinte equação é satisfeita:

$$\mathbf{F}(\mathbf{X}) = \mathbf{f}_{ext} - \mathbf{f}_{int} \cong 0 \quad (16)$$

em que o vetor de forças externas \mathbf{f}_{ext} é dado pelo esforço axial, N , e de momento fletor, M . Na forma matricial, a equação anterior é descrita como:

$$\mathbf{F}(\mathbf{X}) = \begin{bmatrix} N \\ M \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^{n_{fib}} \sigma[\varepsilon_i(\varepsilon_0, \phi)] A_i \\ \sum_{i=1}^{n_{fib}} \sigma[\varepsilon_i(\varepsilon_0, \phi)] y_i A_i \end{bmatrix} \quad (17)$$

na qual, n_{fib} é o número de fibras geradas pela discretização da seção.

Já o vetor de forças internas é dado por expressões integrais clássicas para o esforço axial, N_{int} , e momento fletor, M_{int} . Uma vez conhecidas as áreas, A_i , e posições, y_i , de cada fibra, a integral passa a ser o somatório descrito na Eq. 17.

Embora seja eficiente iniciar o processo com $\mathbf{X} = \mathbf{0}$, a convergência só é atingida na primeira iteração se os esforços externos forem nulos. Assim, para a iteração seguinte, $k + 1$, o vetor de deformações é dado por:

$$\mathbf{X}^{k+1} = \mathbf{X}^k + \mathbf{F}'(\mathbf{X}^k)^{-1} \mathbf{F}(\mathbf{X}^k) \quad (18)$$

na qual \mathbf{F}' é a matriz Jacobiana do problema não linear expresso na Eq. 16, isto é:

$$\mathbf{F}' = \left(\frac{\partial \mathbf{F}}{\partial \mathbf{X}} \right) = \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^{n_{fib}} E_{T,i} A_i & \sum_{i=1}^{n_{fib}} E_{T,i} y_i A_i \\ \sum_{i=1}^{n_{fib}} E_{T,i} y_i A_i & \sum_{i=1}^{n_{fib}} E_{T,i} y_i^2 A_i \end{bmatrix} \quad (19)$$

em que $E_{T,i}$ é o módulo de elasticidade tangente retirado diretamente da relação constitutiva do material componente da i -ésima fibra.

O critério de convergência adotado neste trabalho é baseado na razão das normas Euclidianas do vetor de forças desequilibradas, \mathbf{F} , e do vetor de forças externas, \mathbf{f}_{ext} . Assim, escreve-se:

$$\frac{\|\mathbf{F}\|}{\|\mathbf{f}_{ext}\|} \leq Tol \quad (20)$$

com Tol sendo uma dada tolerância, que é assumida aqui 10^{-5} .

4.3 Rigidez generalizada

Uma vez construída a relação momento-curvatura e conhecendo os esforços atuantes no ponto nodal em questão, é possível, através do MCD, obter os parâmetros de rigidez EA_t e EI_t . Para isso, escrevem-se as seguintes equações (Chiorean, 2013):

$$EA_t = \frac{f_{11}f_{22} - f_{12}^2}{f_{22}} \quad (21)$$

$$EI_t = \frac{f_{11}f_{22} - f_{12}^2}{f_{11}} \quad (22)$$

sendo f_{ij} os termos da matriz Jacobiana dada na Eq. 19.

4.4 Termos da Matriz de Rigidez do Elemento

Os termos da matriz de rigidez, Eq. 1 (k_{11} , k_{22} , k_{23} , k_{32} e k_{33}), com exceção de k_{11} , são termos que dependem da formulação geometricamente não linear (Yang e Kuo, 1994), como visto anteriormente. Partindo dos estudos de Ziemian e McGuire (2002), Gonçalves (2013) desenvolveu expressões para avaliar os termos da Eq. 1 considerando a variação do módulo de elasticidade de forma linear ao longo do comprimento do elemento. Dessa forma, utilizando as rigidezes à flexão, tem-se:

$$k_{11} = \frac{EA_t}{L} \quad (23)$$

$$k_{22} = \frac{3EI_{t,i} + EI_{t,j}}{L} + \frac{2PL}{15} \quad (24)$$

$$k_{23} = k_{32} = \frac{EI_{t,i} + EI_{t,j}}{L} - \frac{PL}{30} \quad (25)$$

$$k_{33} = \frac{EI_{t,i} + 3EI_{t,j}}{L} + \frac{2PL}{15} \quad (26)$$

sendo os termos $EI_{t,i}$ e $EI_{t,j}$ as rigidezes à flexão dos pontos nodais i e j , respectivamente, obtidas por meio do procedimento descrito na Seção 4.2.

5 CURVAS DE INTERAÇÃO NM

Quando, para um dado esforço axial, é atingido o momento máximo da relação momento-curvatura, tem-se a plastificação total da seção. Define-se então que esse par de esforços é um ponto da curva de interação normal-momento fletor referente a plastificação total da seção. Para a formulação descrita no item 3 faz-se necessária a definição de um limite para o regime elástico, que neste trabalho segue a proposta de Lemes (2015). Nessa abordagem, um loop é dado nas fibras/fatias e verifica-se se alguma fatia extrapolou ϵ_y ou ϵ_{cin} (Fong e Chan, 2012), como ilustrado a seguir.

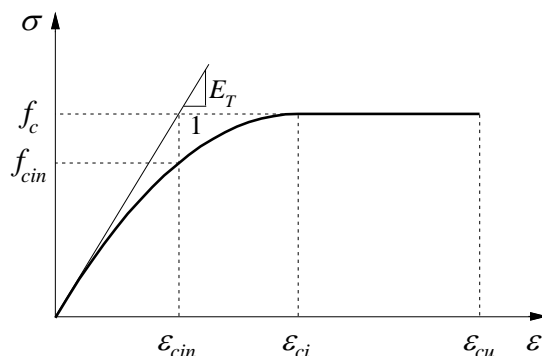


Figura 6: Deformação de início de plastificação do concreto

6 EXEMPLOS NUMÉRICOS

6.1 Pilar de Foure

Na Figura 7 é apresentado o chamado pilar de Foure, que foi ensaiado inicialmente por Espion (1993) e depois estudado por diversos pesquisadores (Bratina *et al.*, 2004; Liu *et al.*, 2012; Gonçalves e Carvalho, 2014) para validação de seus resultados numéricos. Trata-se de um pilar de concreto armado com 225 cm de comprimento engastado na base, sob flexão em torno do eixo de menor inércia, como ilustrado na Fig. 7. Essa flexão ocorre devido à uma excentricidade da carga vertical aplicada a 1,5 cm do eixo centroidal do elemento. Além disso, segundo Liu *et al.* (2012), uma imperfeição geométrica inicial deve ser tomada igual a $h/1000$. A malha de elementos finitos adotada neste exemplo tem 4 elementos e 5 pontos nodais. A seção transversal é retangular 15x20 cm com armaduras positivas e negativas com áreas iguais à 2,26 cm², com cobrimento de 2 cm, discretizada em 16 fibras estruturadas. Os dados dos materiais componentes da coluna são ilustrados na Tabela 1.

Tabela 1: Dados dos materiais

Concreto			Aço		
F_{cd} (kN/cm ²)	ϵ_{ci}	ϵ_{cu}	F_{yd} (kN/cm ²)	E_a (kN/cm ²)	ϵ_u
3,83	-0,0023	-0,0035	46,5	20000	0,020

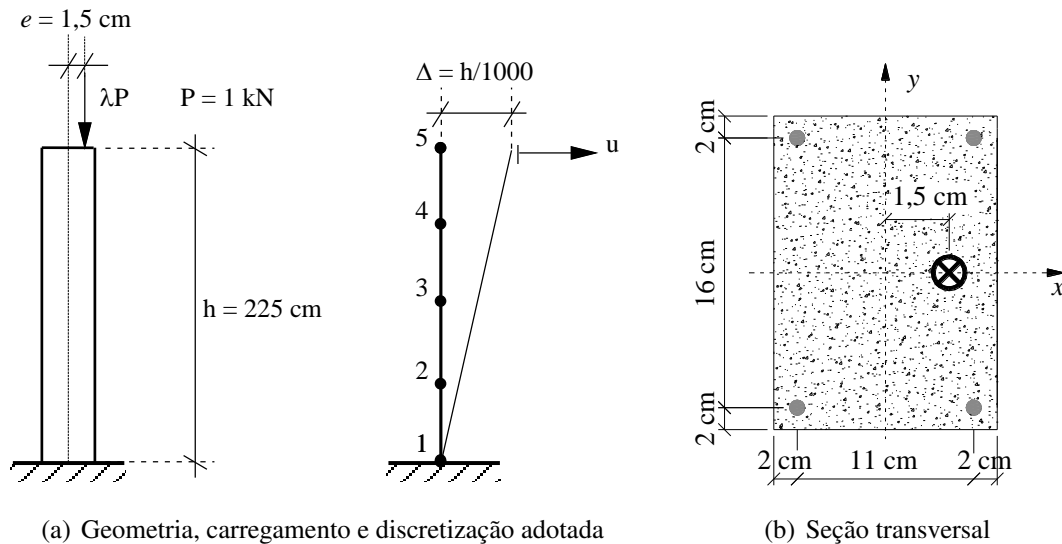


Figura 7: Pilar de Foure

Ao observar a Fig. 8 vê-se o conservadorismo imposto pelo uso do módulo de elasticidade secante de concreto tomado igual a 19,2 MPa. De fato, a análise com molas fictícias (RMF) exige que a relação constitutiva dos materiais empregados apresentem um trecho linear elástico. Essa consideração introduz uma perda de precisão considerável na aferição dos resultados. Em contrapartida, o tempo de análise é de 2,4 segundos, sendo menor do que na análise considerando a relação momento-curvatura (RRMC), que é de 2,7 segundos.

Por sua vez, a curva RRMC se apresenta praticamente coincidente com a resposta experimental fornecida em Espion (1993). Isso se deve a consideração direta de relações constitutivas realistas e grande facilidade na introdução da resistência à tração do concreto.

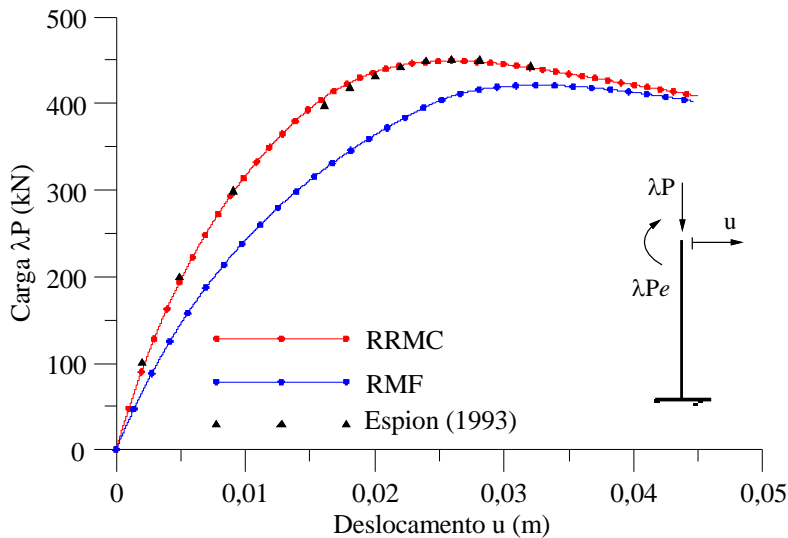


Figura 8: Trajetória de equilíbrio - pilar de Foure

Dessa forma, destaca-se a necessidade de revisão de qual módulo de elasticidade deve-se usar na análise RMF e ainda se o parâmetro de degradação S_h é condizente com a diminuição do módulo de elasticidade dada pela relação constitutiva do concreto.

6.2 Pilar metálico engastado-livre

Um pilar metálico engastado na base e livre no topo também é simulado. Esse elemento estrutural foi proposto por Zubyan (2011) e também estudado por Gonçalves (2013). Trata-se de um perfil W21x160 feito de aço, com f_y de 250 MPa e módulo de elasticidade tomado como 200 GPa, fletido em torno do eixo de menor inércia. Tomando a carga incremental como a carga H , faz-se três análises diferentes: considerando $P = 0.2P_y$, $P = 0.4P_y$ e $P = 0.6P_y$.

As duas estratégias apresentadas no presente trabalho são utilizadas, seguindo a mesma nomenclatura utilizada no exemplo anterior. Nota-se nas trajetórias ilustradas na Fig. 9 que o modelo com molas fictícias (RMF) foi inicialmente mais rígido em todas as 3 análises. Dessa forma, pode-se dizer que os modelos de curva de início de plastificação presentes na literatura para o MRPR estão superestimando a região elástica do diagrama esforço normal-momento fletor. Como consequência, o regime elastoplástico ilustrado na Fig. 5, resulta em uma degradação da rigidez de forma mais acentuada como pode ser visto na curva $P/P_y = 0.2$. Na curva $P/P_y = 0.6$ pode-se destacar claramente que o regime elástico ficou amplificado em relação às análises RRMC e a de Zubyan (2011).

Quando observadas as curvas obtidas considerando a relação momento-curvatura (RRMC), vê-se a boa proximidade na comparação com os dados fornecidos por Zubyan (2011). Como fator preponderante para tal proximidade pode-se destacar a forma realista com que a metodologia simula o comportamento do material, incluindo explicitamente as tensões residuais e usando diretamente as relações constitutivas dos materiais.

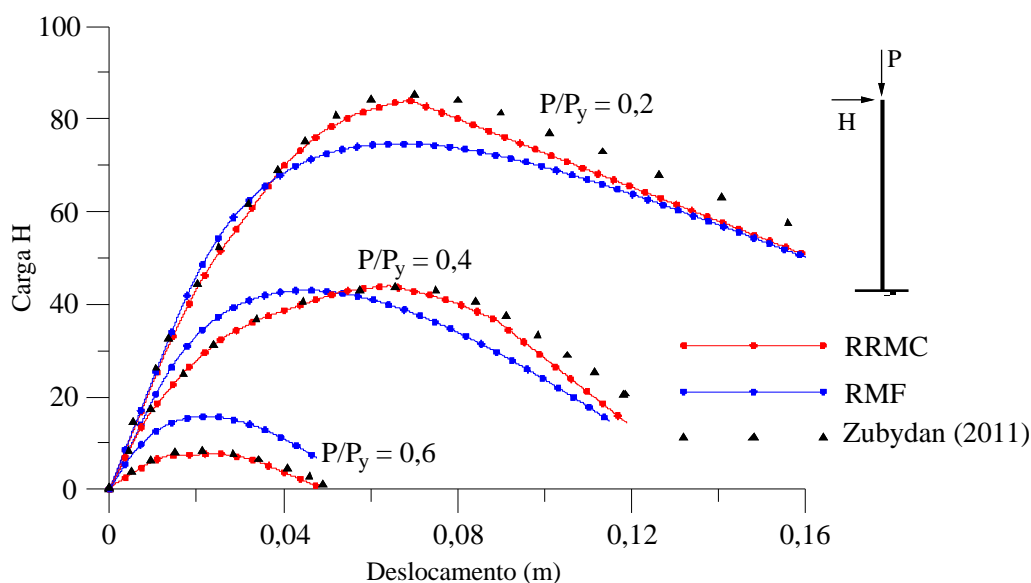


Figura 9: Trajetória de equilíbrio - pilar metálico

7 CONCLUSÕES

O presente trabalho apresentou um estudo numérico comparativo de estratégias para a avaliação da degradação da rigidez à flexão associadas ao MRPR. Duas abordagens de destaque foram simuladas: usando molas fictícias nas extremidades dos elementos finitos e usando a relação momento-curvatura.

Vê-se claramente a necessidade de uma melhoria na abordagem de estruturas de concreto armado utilizando molas fictícias nas extremidades dos elementos finitos. Ressalta-se também a dificuldade em simular o efeito da contribuição da tração do concreto na avaliação dos parâmetros de rigidez. Além disso, propõem-se para essas abordagens o uso do módulo de elasticidade secante do concreto acoplado à proposta de Fong e Chan (2012) para a redução da margem de segurança observada no item 6.1.

Foi verificada também dificuldades na simulação do comportamento de estruturas de aço fletidas em torno do eixo de menor inércia. As respostas obtidas levam à conclusão de uma modificação nas propostas da literatura para a obtenção das curvas de início de plastificação, já que é visível uma maior rigidez do sistema em todas as análises usando as molas fictícias.

Pretende-se estender este estudo para uma avaliação mais condizente do parâmetro de degradação S_h em estruturas de concreto armado, tal como a melhoria das curvas de início de plastificação em estruturas metálicas sob flexão em torno do eixo de menor inércia.

AGRADECIMENTOS

Os autores agradecem à CAPES, ao CNPq, à Fapemig, à Fundação Gourceix, ao PROPEC e à Propp/UFOP o apoio fornecido para o desenvolvimento desta pesquisa.

REFERÊNCIAS

Alvarenga, A.R., 2005. *Aspectos Importantes na Análise Avançada com Zona Plástica de Portais Planos de Aço*. Dissertação de Mestrado. Programa de Pós Graduação em Engenharia Civil, Universidade Federal de Ouro Preto.

Branson, D.E. & Metz G.A., 1963. *Instantaneous and time-dependent deflections of simple and continuous reinforced concrete beams*. Auburn: Dept. of Civil Engineering and Auburn Research Foundation, Auburn University.

Bratina, S., Saje, M. & Planinc, I., 2004. On materially and geometrically non-linear analysis of reinforced concrete planar frames. *International Journal of Solids and Structures*, vol. 41, pp. 7181-7207.

Chan, S.L. & Chui, P., 2000. *Non-linear static and cyclic analysis of steel frames with semi-rigid connections*. Oxford, Elsevier.

Chiorean, C.G., 2013. A Computer Method for Nonlinear Inelastic Analysis of 3D Composite Steel-Concrete Frame Structures. *Engineering Structures*, vol. 57, pp. 125-152.

Espion, B., 1993. Benchmark Examples for Creep and Shrinkage Analysis Computer Programs, Creep and Shrinkage of Concrete. *TC 114 RILEM. E&FN Spon*.

Fong, M. & Chan, S. L., 2012. Advanced analysis of steel-concrete composite beam-columns by refined plastic-hinge method. *International Journal of Structural Stability and Dynamics*, v. 12, n. 6.

Gonçalves, G.A., 2013. *Modelagem do Comportamento Inelástico de Estruturas de Aço: Membros sob Flexão em torno do Eixo de Menor Inércia*. Dissertação de Mestrado. Programa de Pós Graduação em Engenharia Civil, Universidade Federal de Ouro Preto.

Lemes, Í.J.M., 2015. *Análise Avançada via MRPR de Estruturas Mistas de Aço e Concreto*. Dissertação de Mestrado. Programa de Pós Graduação em Engenharia Civil, Universidade Federal de Ouro Preto.

Lemes Í.J.M., Silva, A.R.D, Silveira R.A.M & Rocha, P.A.S., 2015a. Determinação da capacidade resistente de elementos estruturais mistos através do método da rótula plástica refinado. *Revista Internacional de Métodos Numéricos para Cálculo y Diseño en Ingeniería*. Em processo de impressão.

Lemes, Í.J.L, Silva, A.R.D, Silveira, R.A.M., Rocha, P.A.S., 2015b. Acomplamento MCD/MRPR para Análise de Estruturas Metálicas, de Concreto e Mistas. *XXXVI Ibero-Latin American Congress on Computational Methods in Engineering*.

Liew, J.Y.R., 1992. A generalized design-based elastoplastic analysis of steel frames by section assemblage concept. *Engineering Structures*. vol. 19, pp. 628-636.

Liu, S.W., Liu, Y.P. & Chan, S.L., 2012. Advanced analysis of hybrid steel and concrete frames. Part 2: Refined plastic hinge and advanced analysis. *Journal of Constructional Steel Research*, vol. 70, pp. 337-349.

Liew, J., Chen, H. & Shanmugam, N. 2001. Inelastic analysis of steel frames with composite beams. *Journal of Structural Engineering*, vol. 127, n. 2, pp. 194-202.

Machado, F.C.S., 2005. *Análise Inelástica de Segunda Ordem de Sistemas Estruturais Metálicos*. Dissertação de Mestrado. Programa de Pós Graduação em Engenharia Civil, Universidade Federal de Ouro Preto.

NBR6118, 2014. Projeto de estruturas de concreto - procedimento. *Associação Brasileira de Normas Técnicas*.

Ngo-Huu, C. & Kim, S.E., 2012. Practical nonlinear analysis of steel-concrete composite frames using fiber-hinge method *Journal of Constructional Steel Research*, vol. 74, pp. 90-97.

Silva, A.R.D, 2009. *Sistema Computacional para Análise Avançada Estática e Dinâmica de Estruturas Metálicas*. Tese de Doutorado. Programa de Pós Graduação em Engenharia Civil, Universidade Federal de Ouro Preto.

Yang, Y.B. & Kuo, S.B., 1994. *Theory & Analysis of Nonlinear Framed Structures*. Prentice Hall.

Ziemian, R.D. & McGuire, W., 2002. Modified tangent modulus approach, a contribution to plastic hinge analysis. *Journal of Structural Engineering*, vol. 128, n. 10, pp. 1301-1307.

Zubydan, A.H., 2011. Inelastic second order analysis of steel frame elements flexed about minor axis. *Engineering Structures*, vol. 33, n. 10, pp. 1240-1250.