



RAFAEL LUIS JUNQUEIRA COSTA

**AÇÕES EFETIVAS PARA TEORIAS DE GAUGE: CAMPO
ELETROMAGNÉTICO E O CAMPO DE KALB-RAMOND**

LAVRAS – MG

2018

RAFAEL LUIS JUNQUEIRA COSTA

**AÇÕES EFETIVAS PARA TEORIAS DE GAUGE: CAMPO ELETROMAGNÉTICO E
O CAMPO DE KALB-RAMOND**

Dissertação apresentada à Universidade Federal de Lavras, como parte das exigências do Programa de Pós-Graduação em Física, área de concentração em Física de Partículas e Campos, para a obtenção do título de Mestre.

Prof. Dr. Rodrigo Bufalo

Orientador

LAVRAS – MG

2018

**Ficha catalográfica gerada pelo Sistema de Geração de Ficha catalográfica da Biblioteca
Universitária da UFLA, com dados informados pelo(a) próprio(a) autor(a)**

Costa, Rafael Luis Junqueira

Ações Efetivas para Teorias de Gauge: Campo Eletromagnético e o Campo de Kalb-Ramond / Rafael Luis Junqueira Costa. – Lavras : UFLA, 2018.

109 p. : il.

Dissertação (mestrado acadêmico)–Universidade Federal de Lavras, 2018.

Orientador: Prof. Dr. Rodrigo Bufalo.

Bibliografia.

1. Física. 2. Teoria Quântica de Campos. 3. Física de Partículas. I. Bufalo, Rodrigo Santos. . II. Título.

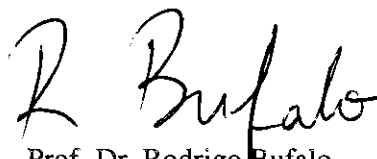
RAFAEL LUIS JUNQUEIRA COSTA

**AÇÕES EFETIVAS PARA TEORIAS DE GAUGE: CAMPO ELETROMAGNÉTICO E
O CAMPO DE KALB-RAMOND**

Dissertação apresentada à Universidade Federal de Lavras, como parte das exigências do Programa de Pós-Graduação em Física, área de concentração em Física de Partículas e Campos, para a obtenção do título de Mestre.

APROVADA em 31 de Agosto de 2018.

Prof. Dr. Rodrigo Bufalo UFLA
Prof. Dr. Léo Gouveia Medeiros UFRN
Profa. Dra. Tatiana Ramos Cardoso UFLA


Prof. Dr. Rodrigo Bufalo
Orientador

**LAVRAS – MG
2018**

AGRADECIMENTOS

- Agradeço primeiramente à minha família: Minha mãe Aida, meu pai Luís Cláudio e minha irmã Mariana pelo apoio durante minha trajetória.
- Agradeço a minha companheira Lauriene por todos os momentos juntos, por me escutar falar sobre Física, pela ajuda e apoio extremo nas minhas decisões. Agradeço também por me ajudar em todos os momentos difíceis que passei, além de toda ajuda na leitura deste texto e sugestões de melhoria. Muito obrigado de coração, você é e sempre vai ser extremamente importante na minha vida.
- Aos meus grandes amigos Pedro, Jack, Isaac, Camila e Pedro sulinho por me acompanharem durante todo o processo, contribuindo cada um do seu jeito para minha formação acadêmica e pessoal, obrigado “guys”.
- Aos meninos e meninas do DFI: João e suas dicas e ajudas sobre Linux e instalação de diversos programas em diversos sistemas operacionais, Benta e seus dotes culinários, Ana Luiza, Pablo, Duidinha, Piva e seu talento para Física e música, do qual pude absorver um pouco, Ju Assunção, Ju, Romão, Amanda, Nayara, Lauziene, Marcelo, Aline e Bel.
- À todos os professores do DFI, em especial a Professora Tati com quem pude discutir e aprender muito sobre os conceitos básicos presentes nessa dissertação, te agradeço imensamente e o Professor Gilson com quem tive maior contato nas disciplinas do mestrado. E, aos meus professores do IFMG - *Campus* Bambuí, em especial João, Mário, Mayler e Warley. Ademais, agradeço também ao Professor Léo pelas sugestões de melhoria.
- Por fim, agradeço a pessoa que me guiou durante minha jornada no mestrado, Professor Rodrigo Búfalo, com quem tive a honra de adquirir importantes conhecimentos sobre Física. Agradeço, todo o apoio pessoal e toda confiança, que depositou em mim para a execução desta dissertação e também todas as conversas sobre temas diversos da vida. Muito obrigado de coração Rodrigo, e espero que continuemos a trabalhar juntos.
- Agradeço a CAPES, CNPq e FAPEMIG pelo apoio financeiro.

RESUMO

A presente dissertação apresenta o cálculo de ações efetivas à *1-loop* para teorias de gauge como o campo eletromagnético e o campo de Kalb-Ramond. As ações efetivas funcionam como correções quânticas às teorias clássicas, a fim de explicar certos fenômenos quânticos. Por exemplo, no eletromagnetismo, os efeitos não-lineares como a singularidade da auto-energia de uma carga pontual e a polarização do vácuo. Sobre a polarização do vácuo se destaca a Lagrangeana de Euler-Heisenberg. Assim, este trabalho apresentará um método de cálculo da mesma denominado método de tempo próprio, proposto por Schwinger. A análise seguirá o formalismo de Integrais de Caminho, permitindo assim uma discussão bastante clara. Uma análise sobre a criação de pares de elétron-pósitron no vácuo devido a um campo eletromagnético externo também será feita. Assim como, algumas aplicações das ações efetivas, como por exemplo o efeito Casimir e a ação efetiva à temperatura finita. Ademais, será calculada também a ação efetiva para QED tridimensional. E por fim será calculado a ação efetiva para o campo de Kalb-Ramond.

Palavras-chave: Ação Efetiva. Ação Efetiva à *1-Loop*. Criação de Pares. Campo de Kalb-Ramond

ABSTRACT

The present dissertation presents the calculation of effective *1-loop* actions for gauge theories such as the electromagnetic field and the Kalb-Ramond field. Effective actions work as quantum corrections to classical theories in order to explain certain quantum phenomena. For example, in electromagnetism, the nonlinear effects as the singularity of the self-energy of a point charge and the polarization of the vacuum. On the polarization of the vacuum the Euler-Heisenberg Lagrangian is highlighted. Thus, this work will present a method of calculation of the same denominated method of proper time, proposed by Schwinger. The analysis will follow the formalism of Path Integrals, thus allowing a very clear discussion. An analysis of the creation of electron-positron pairs in vacuum due to an external electromagnetic field will also be made. As well as, some applications of effective actions, such as the Casimir effect and the effective action at the finite temperature. In addition, the effective action for three-dimensional QED will also be calculated. And last the effective action for the Kalb-Ramond field will be calculated.

Keywords: Effective Action. *1-Loop* Effective Action. Pair Creation. Kalb-Ramond Field.

LISTA DE FIGURAS

Figura 1.1 – Interação de uma carga elétrica e_0 com pares virtuais de elétron-pósitron do vácuo.	8
Figura 1.2 – Esquema qualitativo da constante de acoplamento eletromagnética gerada pela polarização do vácuo à 1-loop.	8
Figura 2.1 – Os dois caminhos, contínuo e tracejado, representam uma possível trajetória de evolução do estado inicial $ q, t\rangle$ para o estado final $ q', t'\rangle$, passando por estados intermediários.	16
Figura 3.1 – O diagrama à esquerda representa o espalhamento fóton-fóton em qualquer escala de energia enquanto que o da direita corresponde à uma aproximação efetiva do mesmo em escalas de baixas energias quando comparadas com a massa do elétron.	52

SUMÁRIO

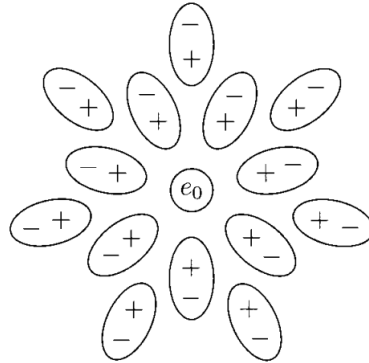
1	INTRODUÇÃO	7
2	INTEGRAIS DE CAMINHO	14
2.1	Integrais de Caminho na Mecânica Quântica	14
2.1.1	<i>Aplicação: Uma Partícula Livre</i>	22
2.2	Integrais de Caminho em Teoria Quântica de Campos	23
2.2.1	<i>Geradores Funcionais com Interação</i>	27
3	AÇÃO EFETIVA A 1-loop	32
3.1	Ação Efetiva para Campo Magnético Puro	34
3.2	Análise de Criação de Pares de Elétron-Pósitron (E-P)	44
3.3	Ação Efetiva Para o Campo Eletromagnético	46
4	AÇÃO EFETIVA E VÁCUO QUÂNTICO: APLICAÇÕES	54
4.1	Ação Efetiva à Temperatura Finita	54
4.2	Efeito Casimir	61
4.3	Ação Efetiva para QED Tridimensional	64
4.4	<i>QED₍₂₊₁₎ para Campos não Constantes</i>	70
5	AÇÃO EFETIVA A 1-LOOP PARA O CAMPO DE KALB-RAMOND	75
6	CONSIDERAÇÕES FINAIS	93
	REFERÊNCIAS	96
	APENDICE A – Integrais Gaussianas	99
	APENDICE B – Cálculo do Funcional $iW[A]^{(1)}$ e $\frac{i\delta W[A]^{(1)}}{\delta A_\mu(x)}$	101
	APENDICE C – Matrizes γ^μ e suas Propriedades	106
	APENDICE D – Matrizes γ^μ e suas propriedades em 3-D	108

1 INTRODUÇÃO

A ideia de vácuo vem sendo debatida ao longo de séculos na história da física, surgindo com a filosofia da Grécia antiga, onde se acreditava que o vácuo seria um espaço ausente de matéria, um vazio. Entretanto esta ideia foi perdendo força com os questionamentos acerca do que havia no espaço entre os corpos celestes. Estes questionamentos conduziram o pensamento da época à ideia de uma substância que permearia todo o universo e não apresentaria resistência ao movimento, o “éter”, derrubando completamente a ideia de um espaço totalmente vazio, fornecendo assim um meio para a propagação de forças. Este pensamento ganhou ainda força após o desenvolvimento da teoria eletromagnética de Maxwell. Por mostrar o caráter ondulatório da luz, havia então a necessidade de um meio para que ela pudesse propagar-se, devido às luzes dos corpos celestes que chegavam até a Terra. Entretanto, em 1887 foi realizado o famoso experimento de Michelson-Morley cujo objetivo era justamente detectar o “éter” através do padrão de interferência causado na luz devido ao movimento da Terra em relação ao “éter”, análogo ao efeito do vento sobre as ondas sonoras. Contudo o experimento não apresentou resultados favoráveis com a teoria do “éter”, favorecendo o conceito de vácuo. Com o advento da teoria da Relatividade de Einstein, a ideia de “éter” foi finalmente abandonada e substituída novamente pelo conceito de vácuo.

Todavia, essa visão pode ser entendida como sendo clássica. De um ponto de vista quântico, encontra-se sistemas físicos simples que apresentam energia no ponto zero, como o oscilador harmônico simples. Desta forma, dependendo da energia adquirida pelo vácuo, é possível que ele apresente flutuações, permitidas pela relação de incerteza $\Delta E \Delta t \sim \hbar$. Num contexto de física de partículas, essas flutuações do vácuo para um determinado limiar de energia permitem agora a criação de pares virtuais de partícula e antipartícula. Por exemplo no caso da eletrodinâmica quântica (QED), teoria que descreve a propagação e interação de férmions de Dirac com o campo eletromagnético de Maxwell, tanto a propagação de um elétron ou de um fóton é agora afetada por suas interações com esses pares virtuais de partículas. Em particular, o movimento de uma carga elétrica e_0 é afetado pelas interações que essa partícula sofre com o vácuo, efetivamente o vácuo começa a se comportar como um meio “dielétrico” devido à presença dessa carga, esse fenômeno de alinhamento dos “dipolos” é o que chamamos de Polarização do Vácuo Fig. 1.1..

Figura 1.1 – Interação de uma carga elétrica e_0 com pares virtuais de elétron-pósitron do vácuo.



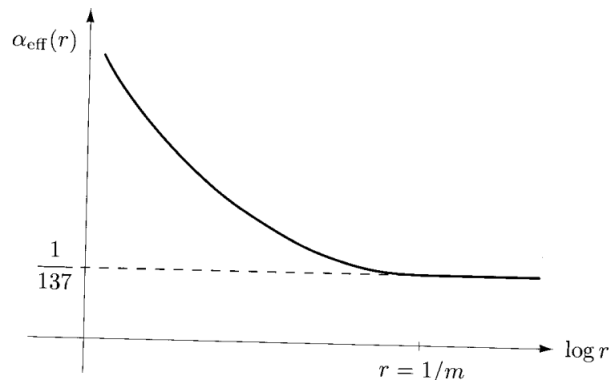
Fonte: (PESKIN; SCHROEDER, 2018).

Ademais, ao medirmos a energia potencial eletrostática desse sistema para $r > m$, encontramos

$$U(r) = -\frac{\alpha}{r} \left[1 + \frac{\alpha}{4\sqrt{\pi}} \frac{e^{-2mr}}{(mr)^{3/2}} + \dots \right] \quad (1.1)$$

(PESKIN; SCHROEDER, 2018). Isso mostra que se nos afastamos de uma distância espacial r da partícula, o valor da sua carga elétrica aparente é menor do que a carga “livre”, isto devido à interação desta partícula com os pares virtuais. Este fenômeno é conhecido como a blindagem da carga elétrica Fig. 1.2.

Figura 1.2 – Esquema qualitativo da constante de acoplamento eletromagnética gerada pela polarização do vácuo à 1-loop.



Fonte: (PESKIN; SCHROEDER, 2018).

Estes consistem nos primeiros exemplos que exploraram o fenômeno de flutuação da energia do vácuo, há uma gama de exemplos interessantes que fazem uso da criação de pares virtuais de partícula e antipartícula, o que originou uma série de propostas de novos e instigantes fenômenos físicos envolvendo o vácuo quântico.

Ainda sobre efeitos do vácuo na QED vale ressaltar à separação entre os estados degenerados do primeiro estado excitado do átomo de hidrogênio. Inicialmente, o primeiro estado excitado do átomo de hidrogênio possuía grau de degenerescência três, segundo a equação de Schrödinger que diferenciava os estados somente pelo número quântico n . Contudo, com a equação relativística de Dirac foi possível separar dois dos três estados degenerados, conhecida como estrutura fina, que levava em conta interação spin-órbita e a natureza relativística do elétron. Entretanto, dois estados ainda permaneciam degenerados, mais precisamente $^2S_{\frac{1}{2}}$ e $^2P_{\frac{1}{2}}$ (CARDOSO, 2016). Lamb e Rutherford conseguiram encontrar uma pequena diferença entre estes dois estados, fenômeno denominado “*Lamb Shift*” (JR; RUTHERFORD, 1947). A explicação desta quebra de degenerescência veio juntamente com a criação da QED e se dá devido as correções quânticas à dinâmica do elétron (auto-energia) e do fóton (polarização do vácuo).

Um dos efeitos mais intrigantes originário das flutuações do vácuo quântico é o da atração entre duas placas paralelas condutoras e neutras separadas por uma distância de alguns nanômetros, conhecido como efeito Casimir (CASIMIR, 1948). Na descrição clássica, na ausência de um campo externo, implica que não há um campo elétrico entre as placas, e portanto nenhuma força será medida entre as placas. Todavia, na abordagem quântica, é possível que as placas comecem a interagir através das partículas virtuais criadas devido à flutuação do vácuo. Essa interação quântica dá origem à uma força resultante, que dependendo do arranjo das placas poderá ser de atração ou repulsão (ROSA, 2006; HAWKING, 1977). Este fenômeno foi observado diretamente por Lamoreaux (LAMOREAUX, 1997), antes disto haviam apenas medidas indiretas do efeito.

Embora os exemplos citados acima possuam verificação experimental, há outros efeitos quânticos do vácuo que são mais difíceis de verificar, principalmente quando se trata de sistemas físicos gravitacionais. A radiação de Hawking consiste basicamente na predição de um espectro térmico de um buraco negro de Schwarzschild a partir da criação de pares de partículas devido a efeitos quânticos do vácuo na vizinhança do horizonte de eventos deste buraco negro (HAWKING, 1975). Basicamente se o fenômeno de criação de pares virtuais acontece na vizinhança do horizonte de eventos, partículas com energia negativa podem entrar no buraco negro enquanto que seus pares com energia positiva ficam de fora, isto pode ocorrer de tal forma que o buraco negro perca massa com o tempo. Este fenômeno foi proposto por S. Hawking como um mecanismo para a “evaporação” de buracos negros. Além disso, uma vez que essas partículas

virtuais possuem energia, elas de fato contribuem para a curvatura do Universo segundo à teoria da relatividade geral.

O vácuo (quântico) quando submetido à um campo externo, se torna um meio ótico (dielétrico) com índice de refração não trivial, mais especificamente tornando-o um meio birrefringente ou polarizado ¹. Uma das possíveis consequências da birrefringência do vácuo seria que em determinadas circunstâncias, partículas carregadas poderiam perder energia irradiando fótons, dando origem ao chamado efeito Cherenkov no Vácuo (SCHRECK, 2017), que pode ser considerado um fenômeno anômalo do efeito Cherenkov observado em meios materiais ².

Todos os fenômenos descritos acima levam em conta as modificações devido a flutuações quânticas na dinâmica de partículas carregadas. Por um outro lado, podemos também focar nos efeitos dessas flutuações do vácuo na propagação do campo eletromagnético de Maxwell. Classicamente, a teoria eletromagnética de Maxwell é uma das teorias mais bem sucedidas na Física, entretanto existem situações em que ela não é mais suficiente para a descrição de determinados fenômenos. Quanticamente a propagação do campo eletromagnético é modificada devido a sua interação com pares virtuais de partículas e antipartículas. Essa interação gera efeitos (quânticos) não-lineares na dinâmica do fóton, apresentando uma série de novos fenômenos físicos de natureza completamente quântica, ou seja, não possui uma contraparte clássica. Os exemplos mais proeminentes de complementos à teoria de Maxwell são as ações efetivas de Born-Infeld (BI) e Euler-Heisenberg (EH). Sendo que a ação de BI foi proposta a fim de solucionar a singularidade da auto-energia de uma carga pontual (BORN; INFELD, 1934), e também aparece no limite de baixas-energias da teoria de Cordas (FRADKIN; TSEYTLIN, 1985).

No início da década de 1930, Heisenberg e Euler (HEISENBERG; EULER, 1936)³ propôs uma correção (quântica) às equações de Maxwell do eletromagnetismo, que levava em

¹ A birrefringência ocorre quando a onda eletromagnética atravessa um meio anisotrópico, que possui índices de refração diferentes dependendo da direção (por exemplo os dois modos transversais de propagação ordinário e extraordinário), passam a se propagar com velocidades diferentes, o que acarreta em uma mudança na polarização da onda eletromagnética. Classicamente, no vácuo, os modos da onda eletromagnética se propagam com a mesma velocidade; todavia, devido à flutuação do vácuo, efeitos não-lineares são induzidos na dinâmica do campo eletromagnético, tal que é previsto que seus modos transversal e longitudinal se propaguem com velocidades distintas no vácuo. Um dos modelos que preveem a existência da birrefringência do vácuo é a teoria de Euler-Heisenberg que abordaremos em breve.

² Assim como um avião supersônico emite um cone de onda de choque quando ultrapassa a velocidade do som, uma partícula emitida próximo a reatores com velocidade superior a da luz na água interage com as moléculas de água, emitindo fótons e formando um cone de onda de choque fazendo com que os arredores dos reatores fiquem azulados.

³ A versão em inglês pode ser encontrada em (HEISENBERG; EULER, 2006).

conta os efeitos quânticos da polarização do vácuo, a já mencionada Lagrangeana efetiva de EH. Este mesmo resultado foi posteriormente encontrado por Weisskopf (WEISSKOPF, 1936) e por Schwinger (SCHWINGER, 1951). Na época sabia-se das limitações apresentadas pela teoria de Maxwell em nível quântico e algumas propostas foram feitas com o intuito de se obter generalizações da mesma, com maior destaque para os trabalhos de Heisenberg e Schwinger. É possível mostrar que esses efeitos não-lineares estão estritamente relacionados com a probabilidade de criação de pares de partícula-antipartícula. Basicamente podemos entender que a presença de um campo eletromagnético externo pode excitar o vácuo, e assim propiciar a criação desses pares. Entretanto, devido à limitação tecnológica da época não era possível fazer observações experimentais sobre esses fenômenos quânticos da flutuação do vácuo nas equações do eletromagnetismo de Maxwell.

Os efeitos não-lineares do vácuo da QED excitados por um campo eletromagnético externo não estão restritos somente a pares de elétron-pósitron, podendo haver efeitos análogos a este com diferentes tipos de partículas que acoplem com o fóton, gerando também correções à teoria de Maxwell (GIES, 2009). Ademais, é interessante notar que recentemente (GIES; TORGRIMSSON, 2016) foi identificado características universais na produção de pares próximos ao ponto crítico da transição da fase virtual para a fase real destes pares (para dada configuração de campo), utilizando como parâmetro de ordem a parte imaginária da ação efetiva, que como veremos na Seção 3.2 está diretamente relacionada com a probabilidade de criação de pares. O conceito de universalidade é muito interessante na física, pois significa a independência das propriedades macroscópicas do sistema físico com suas propriedades microscópicas. Outra aplicação da Lagrangeana de Euler-Heisenberg se encontra no estudo de fusão e espalhamento de fótons submersos em um campo eletromagnético não homogêneo de fundo. Este processo foi primeiramente investigado por Adler (ADLER, 1971) sobre a influência de um campo puramente magnético externo.

Um exemplo de efeito não linear da QED é a polarização do vácuo devido à sua instabilidade provocada por oscilações de criação de pares de partícula e antipartícula quando submetido a um campo eletromagnético externo (GIES; KARBSTEIN; SEEGERT, 2016).⁴ A produção de pares de elétron-pósitron devido a instabilidade do vácuo é sem dúvida uma das predições mais estimulantes da QED. Com os recentes avanços nas instalações de lasers, é possível agora

⁴ De acordo com a relação $\Delta E \Delta t \sim \hbar$, para atingir o limiar da energia necessária para criação dos pares, o intervalo de tempo em que eles existem é muito pequeno, ou seja a dificuldade experimental reside na medição dos fenômenos físicos neste intervalo de tempo Δt ínfimo.

atingir a intensidade necessária de campo elétrico para que se faça observações mais diretas da produção de pares em instalações ópticas de laser de alta intensidade, tais como Vulcan, ELI ou em X-ray Free Electron Laser (XFEL)⁵. A observação e constatação do fenômeno de criação de pares representa um significativo avanço no entendimento de outros fenômenos relacionados a efeitos não perturbativos em uma Teoria de Campos como o efeito Unruh e a radiação Hawking (HEBENSTREIT et al., 2009). O mecanismo de produção de pares de partícula e antipartícula também é utilizado para se estudar outros fenômenos, como por exemplo em saturação em colisões de íons pesados (KHARZEEV; LEVIN; TUCHIN, 2007).

Com o avanço de novos recursos tecnológicos, a observação de efeitos devido à flutuação do vácuo não reside somente em laboratórios terrestres, mas também se encontram presentes nos cosmos. Recentemente, evidências desta criação de pares, foi observada próxima a uma Estrela de Neutron Isolada (INS) (MIGNANI et al., 2017). Estas INS são objetos extremamente interessantes por possuírem certas propriedades intrigantes, como a de campos magnéticos extremamente intensos, na ordem de $10^{15}G$, e são os objetos mais densos do universo depois dos buracos negros ($\sim 10^{14}g/cm^3$). A alta intensidade do campo magnético de uma INS se dá devido ao seu pequeno período de rotação em torno do seu próprio eixo, cerca de dezenas de milissegundos, fazendo com que seu campo magnético seja milhares de bilhões de vezes mais intenso que o da Terra. Uma vez que o fenômeno de formação de pares de partículas e antipartículas devido a um campo eletromagnético externo, torna o vácuo um meio birrefringente, tem-se que as INS são objetos atraentes para testar o efeito de polarização do vácuo. Assim, observando a polarização da luz próximo a uma INS pode-se testar este fenômeno da QED no regime de campos fortes.

A partir da motivação desta série e outros exemplos de fenômenos decorrentes da flutuação do vácuo quântico, pretendemos nos aprofundar neste assunto e analisar com o devido cuidado os efeitos não-lineares do campo eletromagnético. Nos atentaremos principalmente ao estudo dos efeitos de campos externos constantes, i.e. a análise ocorre num intervalo de tempo inferior aos efeitos de oscilação do campo externo. A fim de ilustrar pontos importantes da análise, começaremos primeiramente com o caso de um campo magnético externo, explorando as suas nuances e detalhes dos resultados – sendo que o caso de um campo elétrico puro segue naturalmente a partir da substituição $\mathcal{B} \rightarrow i\mathcal{E}$. O cálculo da ação efetiva de Euler-Heisenberg se apoia fortemente em métodos funcionais de teoria de campos, i.e. cálculo de traços de operado-

⁵ Para mais informações sobre os projetos ELI e XFEL veja eli-laser.eu e xfel.eu, respectivamente.

res diferenciais, e no caso de férmions, a operação de traço também é sobre as matrizes γ . Para isso, faremos uma breve revisão do método de integral de caminhos (IC) em teoria de campos.

Além do cálculo da ação efetiva de Euler-Heisenberg para um campo eletromagnético (constante), apresentaremos algumas aplicações interessantes de fenômenos envolvendo o vácuo quântico, como o efeito Casimir e ação efetiva à temperatura finita. Como um terceiro exemplo, calcularemos a ação efetiva para a QED tridimensional, ou seja, a dimensão do espaço-tempo é reduzida para duas dimensões espaciais e uma temporal. Dentre os novos fenômenos decorrentes desta redução dimensional, temos a geração de um termo de massa para o fóton. Este termo é conhecido como termo de Chern-Simons que possui origem topológica e aparece sempre quando a dimensão do espaço-tempo é ímpar. Este termo de Chern-Simons também leva a teoria tridimensional à apresentar uma quebra de Paridade (DITTRICH; GIES, 2000).

Por fim será discutido nesta dissertação sobre a ação efetiva envolvendo o campo de Kalb-Ramond. O campo de Kalb-Ramond foi proposto como uma generalização do campo eletromagnético para descrever a interação entre partículas carregadas dentro da teoria de cordas (KALB; RAMOND, 1974). Como as partículas nesta teoria são representadas por objetos extensos e não mais pontuais, conhecidos como cordas, então houve uma necessidade de ter um campo eletromagnético que possuía como fonte estes objetos unidimensionais. Portanto, nesta dissertação também será abordado o cálculo desta ação efetiva, que mostrará o acoplamento entre os campos eletromagnético de Maxwell e de Kalb-Ramond, permitindo assim estipular possíveis efeitos oriundos de teoria de cordas em física de baixa energia.

2 INTEGRAIS DE CAMINHO

O cálculo de ações efetivas a serem realizadas neste trabalho requer a introdução de conceitos presentes na formulação de Feynman-Dirac da Mecânica Quântica (MQ) e sua generalização na Teoria Quântica de Campos (TQC), as Integrais de Caminho (IC). As IC são utilizadas na TQC como um método de quantização alternativo à quantização canônica, além de também serem uma representação alternativa da MQ ao invés das representações de operadores de Heisenberg e a de funções de onda de Schrödinger. As IC se baseiam em uma integral sobre todas as configurações de campos ou, no caso da MQ, sobre as possíveis trajetórias que a partícula possa seguir (GREINER; REINHARDT, 2013).

As integrais de caminho se apresentam na forma de uma integral funcional. As integrais funcionais já haviam sido estudadas antes de Feynman elaborar sua versão pelo matemático Wiener e também por Dirac que estendeu seu uso para incluir uma representação da MQ que se baseasse no formalismo Lagrangeano (JÚNIOR, 2007). Na representação de Feynman, entretanto, as integrais apresentam uma exponencial com argumento imaginário, possuindo assim uma fundamentação matemática não sólida. Porém, ainda assim, elas são bastante utilizadas em Física de Partículas e Campos e áreas afins.

Tendo em vista estas considerações, esta Seção tem o papel de apresentar e discutir as principais equações e resultados a respeito das IC, para que se possa entender o cálculo da ação efetiva de Euler-Heisenberg.

2.1 Integrais de Caminho na Mecânica Quântica

No início da década de 1930, P. A. M. Dirac, apresentou uma nova proposta da MQ baseando-se no formalismo Lagrangeano ao invés do Hamiltoniano, no qual generaliza a ação da mecânica clássica (DIRAC, 2005). Mais tarde este formalismo seria desenvolvido, em termos matemáticos, por R. P. Feynman em sua tese de doutorado (FEYNMAN, 2005). Até então, a mecânica quântica era expressa a partir de um Hamiltoniano como um operador definido no espaço de Hilbert, desempenhando um papel importante na evolução temporal de um dado estado de uma partícula, compondo o operador de evolução temporal responsável por esta operação. Em geral, esta é a informação procurada, pois sabendo como o sistema evolui pode-se obter diversas outras informações acerca de seu comportamento.

Na MQ o estado de uma partícula é representado por um vetor de estado definido no espaço de Hilbert, que se relaciona com a função de onda em notação de Dirac da seguinte

maneira

$$\psi(q, t) = \langle q, t | \Psi \rangle, \quad (2.1)$$

onde o termo a direita da Eq. (2.1) representa o vetor de estado da partícula em função das coordenadas e do tempo. Dado que a função de onda em Eq. (2.1) é o estado inicial de uma partícula, o estado final é representado por

$$\psi(q', t') = \langle q', t' | \Psi \rangle. \quad (2.2)$$

Esses estados se relacionam através de

$$\psi(q', t') = \langle q', t' | \Psi \rangle = \int dq \langle q', t' | q, t \rangle \langle q, t | \Psi \rangle = \int dq \langle q', t' | q, t \rangle \psi(q, t). \quad (2.3)$$

Aqui foi utilizada a relação de completude dos autoestados do operador posição, $\int dq |q, t\rangle \langle q, t| = 1$. Na Eq. (2.3) pode ser visto que a informação sobre a evolução da partícula está contida no produto interno entre os autoestados das posições inicial e final, $\langle q', t' | q, t \rangle$, também conhecido como *núcleo de Feynman* (FEYNMAN, 2005). O núcleo de Feynman também pode ser interpretado como a amplitude de probabilidade de transição entre os estados $|q, t\rangle$ e $|q', t'\rangle$ ou, simplesmente, amplitude de transição.

Na MQ, os autoestados, ou funções de onda, obedecem a equação de Schrödinger,

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} |\psi(t)\rangle = \hat{H} |\psi(t)\rangle. \quad (2.4)$$

A solução habitual para a Eq. (2.4) é da forma

$$|\psi(t)\rangle = e^{-\frac{i}{\hbar} \hat{H} t} |\psi(0)\rangle, \quad (2.5)$$

onde é possível identificar o operador de evolução temporal,

$$\hat{U}(t, 0) = e^{-\frac{i}{\hbar} \hat{H} t}, \quad (2.6)$$

citado no início desta Seção.

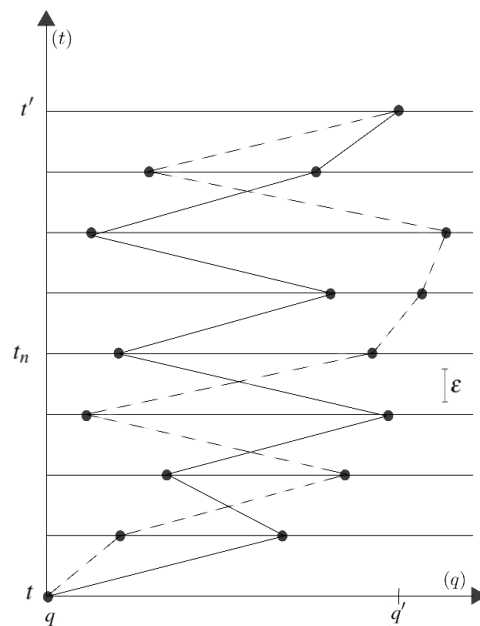
Com estas informações, a amplitude de transição pode ser expressa em termos do operador evolução temporal. Esta forma de escrever é interessante pois possibilitará uma comparação entre a formulação canônica com a formulação de Feynman-Dirac. Portanto, tem-se

$$\langle q', t' | q, t \rangle = \langle q' | e^{\frac{i}{\hbar} \hat{H} t'} e^{-\frac{i}{\hbar} \hat{H} t} | q \rangle = \langle q' | e^{\frac{i}{\hbar} \hat{H} (t' - t)} | q \rangle. \quad (2.7)$$

A proposta de Dirac para a amplitude de transição Eq. (2.7), reside na possibilidade dela ser representada em termos de uma função Lagrangeana ao invés do Hamiltoniano. Com base nesta proposta, Feynman começou a investigar melhor como seria de fato uma representação para esta amplitude de transição.

Para chegar na representação Lagrangeana para o núcleo de Feynman Eq. (2.7), imagine que para o estado inicial, $|q, t\rangle$, evoluir para o estado final, $|q', t'\rangle$, ele passe por $N - 1$ estados intermediários divididos por um intervalo de tempo ε muito pequeno, como representado na Fig. (2.1) que indica dois caminhos arbitrários possíveis de serem feitos, o contínuo e o tracejado.

Figura 2.1 – Os dois caminhos, contínuo e tracejado, representam uma possível trajetória de evolução do estado inicial $|q, t\rangle$ para o estado final $|q', t'\rangle$, passando por estados intermediários.



A partir desta consideração, é possível ver que

$$t_n = t + n\varepsilon \quad \text{e} \quad t' - t = N\varepsilon. \quad (2.8)$$

A cada estado intermediário, acrescenta-se uma relação de completeza a fim de varrer todas as possíveis posições que a partícula possa se encontrar naquele dado instante de tempo. Portanto,

$$\langle q', t' | q, t \rangle = \int dq_{N-1} \dots \int dq_2 \int dq_1 \langle q', t' | q_{N-1}, t_{N-1} \rangle \dots \langle q_2, t_2 | q_1, t_1 \rangle \langle q_1, t_1 | q, t \rangle. \quad (2.9)$$

O próximo passo é a análise de uma amplitude de transição entre estados intermediários arbitrários,

$$\langle q_{n+1}, t_{n+1} | q_n, t_n \rangle = \langle q_{n+1} | e^{i\hat{H}\varepsilon/\hbar} | q_n \rangle. \quad (2.10)$$

Aqui pode-se fazer analogia com a Mecânica Estatística (ME), ao notar que o núcleo de Feynman Eq. (2.10) representa o análogo à matriz transferência $T_{(q_{n+1}, q_n)}$. Técnica usada para se calcular funções de partição para um dado sistema físico.

Como $\varepsilon \ll 1$, a Eq. (2.10) pode ser expandida ignorando os termos de segunda ordem. Assim,

$$\langle q_{n+1}, t_{n+1} | q_n, t_n \rangle = \langle q_{n+1} | 1 - \frac{i}{\hbar} \hat{H} \varepsilon | q_n \rangle. \quad (2.11)$$

O Hamiltoniano em Eq. (2.11) depende dos operadores posição e momento. Então, afim de diagonalizar este operador, é necessário acrescentar também uma relação de completeza dos autoestados dos momentos, $\int \frac{dp}{2\pi\hbar} | p \rangle \langle p | = 1$, onde o fator de normalização $2\pi\hbar$ aparece devido a representação dos autoestados dos momentos no espaço das posições, $\langle q | p \rangle = e^{i\vec{p}\cdot\vec{q}/\hbar}$, que tem a forma de uma onda plana. O acréscimo da relação de completeza dos momentos também pode ser interpretada como uma forma de contabilizar todos os possíveis momentos que a partícula possa ter naquele mesmo instante de tempo e posição. Feito isto, e também após atuar os operadores em seus respectivos autoestados, tem-se a seguinte relação para a amplitude de transição Eq. (2.11),

$$\langle q_{n+1}, t_{n+1} | q_n, t_n \rangle = \int \frac{dp}{2\pi\hbar} e^{ip_n(q_{n+1}-q_n)/\hbar} \left(1 - \frac{i}{\hbar} H \right). \quad (2.12)$$

Como havia sido mencionado no início desta Seção, é possível observar que o caráter operador do Hamiltoniano foi transformado em seu autovalor. Dessa forma, pode-se dizer que temos um Hamiltoniano “clássico”.

De volta à Eq. (2.9) após obter o resultado da Eq. (2.12), a amplitude de transição total é dada por

$$\langle q', t' | q, t \rangle = \lim_{N \rightarrow \infty} \int \prod_{n=1}^{N-1} dq_n \int \prod_{m=0}^{N-1} \frac{dp_m}{2\pi\hbar} e^{i\epsilon \sum_{n=0}^{N-1} \frac{ip_n}{\hbar} \frac{(q_{n+1}-q_n)}{\epsilon}} \prod_{l=0}^{N-1} \left(1 - \frac{i}{\hbar} H(p_l, q_l) \right). \quad (2.13)$$

Dada a seguinte propriedade de exponenciais,

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{x}{N} \right)^N = e^x \quad (2.14)$$

e sua generalização

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \prod_{n=0}^{N-1} \left(1 + \frac{x_n}{N} \right) = e^{\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} x_n}, \quad (2.15)$$

a amplitude de transição Eq. (2.13) pode ser reescrita como

$$\langle q', t' | q, t \rangle = \lim_{N \rightarrow \infty} \int \prod_{n=1}^{N-1} dq_n \int \prod_{m=0}^{N-1} \frac{dp_m}{2\pi\hbar} e^{\frac{i\epsilon}{\hbar} \sum_{n=0}^{N-1} \left(p_n \frac{(q_{n+1}-q_n)}{\epsilon} - H \right)}. \quad (2.16)$$

No limite em que $N \rightarrow \infty$ os valores de posição e momento podem ser vistos como contínuos, o que possibilita fazer as substituições

$$\frac{(q_{n+1} - q_n)}{\epsilon} \rightarrow \dot{q}_{(t_n)}, \quad \sum_{n=0}^{N-1} \epsilon f_{(t_n)} \rightarrow \int_t^{t'} d\tau f(\tau), \quad (2.17)$$

sendo que \dot{q} representa a derivada temporal da posição, ou seja, a velocidade da partícula. Aqui é interessante a introdução de uma notação especial em IC,

$$\int \prod_{n=1}^{N-1} dq_n \rightarrow \int \mathcal{D}q \quad \text{e} \quad \int \prod_{m=0}^{N-1} \frac{dp_m}{2\pi\hbar} \rightarrow \int \mathcal{D}p. \quad (2.18)$$

De posse dessas substituições e notações, a amplitude de transição Eq. (2.16) é finalmente representada pela seguinte integral

$$\langle q', t' | q, t \rangle = \int \mathcal{D}q \int \mathcal{D}p e^{\frac{i}{\hbar} \int_t^{t'} dt (p\dot{q} - H)}. \quad (2.19)$$

Para teorias em que o Hamiltoniano apresente no máximo termos quadráticos no momento, no qual são soluções comuns na maioria de sistemas físicos, a Eq. (2.19) pode ser simplificada para uma integral funcional apenas no espaço das coordenadas e não no espaço de fase como em Eq. (2.19) fazendo uso do resultado da integral Gaussiana Eq. (6). Esta forma é chamada de Integral de Caminho de Feynman (ICF) e é dada por

$$\langle q', t' | q, t \rangle = \mathcal{N} \int \mathcal{D}q e^{\frac{i}{\hbar} W}, \quad (2.20)$$

onde \mathcal{N} é uma constante de normalização que será discutida em mais detalhes na Seção 2.2 sobre as IC em TQC. E W é chamado de ação funcional clássica, $W = \int_t^{t'} d\tau \mathcal{L}$, devidamente discretizada pelo seu caráter quântico.

Assim como na Física Estatística em que a função de partição é uma soma sobre todas as possíveis configurações do sistema, aqui foi desenvolvida uma versão análoga, entretanto, somado sobre todas as possíveis trajetórias que a partícula possa ter, desde as mais improváveis às mais prováveis, indo de um estado inicial para um estado final. Uma interpretação um tanto quanto filosófica acerca das IC é a de que elas constituem uma soma sobre as histórias que as partículas possam possuir. Como se todas estivessem acontecendo ao mesmo tempo, porém, cada uma com uma fase diferente e, assim, interferindo entre si para a história que se observa.

Até aqui foi apresentado o que é a amplitude de transição, em termos da soma sobre os caminhos possíveis que uma partícula possa realizar. Será mostrado agora, que ela também pode ser tratada como um gerador funcional para as funções de n-pontos. Estas funções são o análogo das funções de correlação encontradas na Física Estatística. Em TQC será visto que elas estão relacionadas com os propagadores.

Em termos matemáticos as funções de n-pontos consistem no valor esperado dos operadores posição em cada instante de tempo. Estes operadores são ordenados de forma crescente da direita para esquerda no tempo, pois a IC assume este tipo de ordenamento temporal que foi construído acima¹, $t \rightarrow t'$. Entretanto, obtém-se a mesma integral para o ordenamento inverso,

¹ Para mais detalhes veja (GREINER; REINHARDT, 2013).

$t' \rightarrow t$. Assim, a fim de lidar com os possíveis diferentes ordenamentos é que se introduz o operador de ordenamento temporal para que se possa contabilizar as duas opções fazendo com que os operadores fiquem na posição correta. Por exemplo, com dois operadores arbitrários $\hat{q}(t_i)$ e $\hat{q}(t_j)$, em que $i > j$,

$$\langle q', t' | T [\hat{q}(t_i) \hat{q}(t_j)] | q, t \rangle = \int \mathcal{D}q \int \mathcal{D}p \hat{q}(t_i) \hat{q}(t_j) e^{\frac{i}{\hbar}W}, \quad (2.21)$$

em que $T [\hat{q}(t_i) \hat{q}(t_j)]$ é justamente o operador de ordenamento temporal, onde no caso particular de dois pontos tem-se

$$T [\hat{q}(t_1) \hat{q}(t_2)] = \begin{cases} \hat{q}(t_1) \hat{q}(t_2) & , \text{ para } t_2 < t_1 \\ \hat{q}(t_2) \hat{q}(t_1) & , \text{ para } t_1 < t_2 \end{cases}. \quad (2.22)$$

A generalização da Eq. (2.21) para n operadores de posição é direta, portanto

$$\langle q', t' | T [\hat{q}(t_1) \cdots \hat{q}(t_n)] | q, t \rangle = \int \mathcal{D}q \int \mathcal{D}p \hat{q}(t_1) \cdots \hat{q}(t_n) e^{\frac{i}{\hbar}W}. \quad (2.23)$$

É interessante agora introduzir uma particularidade da Eq. (2.23), que é o valor esperado no vácuo, ou estado fundamental, do conjunto de n operadores ordenados no tempo. Este conceito se mostrará necessário para a construção das ações efetivas. Portanto,

$$G(t_1, \cdots, t_n) = \langle 0 | T [\hat{q}(t_1) \cdots \hat{q}(t_n)] | 0 \rangle. \quad (2.24)$$

Esta quantidade também é chamada de função de Green de n -pontos. No formalismo canônico de TQC, esta quantidade é chamado de propagador e dá a informação sobre a propagação do campo entre n -pontos e também pode ser utilizado para a construção da matriz de espalhamento, chamada de matriz S, no qual relaciona os estados iniciais e finais de um processo de espalhamento entre partículas. Aqui pode-se observar a analogia com a função de correlação citada acima, pois a função de n -pontos em Eq. (2.24) mostra quanto é a relação entre diferentes instantes de tempo da partícula e sua posição.

Uma maneira de se estudar um sistema físico, é observar como ele reage a uma perturbação externa. Assim, pode-se analisar como seria a amplitude de transição Eq. (2.19) na presença de uma fonte externa, $J(t)$, dependente do tempo. O formalismo de IC não muda ao

acrescentar-se o termo $J(t)$, portanto, a Eq. (2.19) pode ser reescrita como

$$\langle q', t' | q, t \rangle_J = \int \mathcal{D}q \int \mathcal{D}p e^{\frac{i}{\hbar} \int_t^{t'} dt [p\dot{q} - H + J(t)q]}, \quad (2.25)$$

transformando a amplitude de transição Eq. (2.19) agora em um funcional de $J(t)$.

Em especial, pode-se estudar como seria a amplitude de transição do vácuo permanecer no estado de vácuo, também chamada de amplitude vácuo-vácuo, sob a influência de $J(t)$. Assim, será introduzido aqui um funcional responsável por isto,

$$Z[J] = \langle 0|0 \rangle_J = \mathcal{N} \int \mathcal{D}q \int \mathcal{D}p e^{\frac{i}{\hbar} \int_t^{t'} dt [p\dot{q} - H + J(t)q]}, \quad (2.26)$$

que é a amplitude de transição Eq. (2.25) a menos de um fator de normalização, \mathcal{N} . O fator de normalização é obtido de tal forma que $Z[0] = 1$, ou seja, na ausência de uma fonte externa o vácuo permanece no estado de vácuo.

Lembrando que sempre que à Hamiltoniana possuir apenas termos quadráticos nos momentos, estas quantidades sempre podem ser reduzidas a uma ICF, por exemplo,

$$Z[J] = \mathcal{N}' \int \mathcal{D}q e^{\frac{i}{\hbar} \int_t^{t'} dt [L(q, \dot{q}) + J(t)q]}, \quad (2.27)$$

onde \mathcal{N}' obedece a mesma condição de \mathcal{N} .

Assim como uma função arbitrária $F(x)$ é a geradora dos coeficientes de expansão de sua respectiva série de Taylor, o funcional Eq. (2.26) ou Eq. (2.27) são geradores funcionais das funções de Green de n -pontos introduzidas acima. Explicitamente, pode-se encontrar estas funções a partir do gerador funcional $Z[J]$ a partir da relação

$$G(t_1, \dots, t_n) = \left(\frac{\hbar}{i} \right)^n \frac{\delta Z[J]}{\delta J(t_1) \cdots \delta J(t_n)} \Big|_{J=0}. \quad (2.28)$$

Esta relação mostra o caráter perturbativo das funções de Green de n -pontos. Como será visto futuramente em TQC, as funções de Green serão representadas em termos de diagramas de Feynman e será a partir destas quantidades que as correções presentes nas ações efetivas serão identificadas. Assim, as ações efetivas são calculadas por ordem de perturbação de uma determinada série, tal como, em Eq. (2.28).

Enfim, foram introduzidas e apresentadas as relações e conceitos importantes e necessários no formalismo de IC para MQ, desde a construção da IC até as funções de Green de n -pontos. Na Seção 2.2 será feita uma extensão destes conceitos no âmbito de TQC.

2.1.1 Aplicação: Uma Partícula Livre

A fim de exemplificar o método de IC para MQ, será mostrado o cálculo da amplitude de transição de uma partícula livre unidimensional. A Hamiltoniana para este problema é dada por

$$H = \frac{p^2}{2m}. \quad (2.29)$$

Para encontrar a amplitude de transição é necessário resolver as integrais dos momentos e posição em Eq. (2.16). Assim, é interessante se trabalhar com a transição entre dois estados vizinhos arbitrários e depois generalizar o resultado para a transição completa, ou seja

$$\langle q_{n+1}, t_{n+1} | q_n, t_n \rangle = \int dq_n \int \frac{dp_n}{2\pi\hbar} e^{\frac{i\varepsilon}{\hbar} \left(p_n \frac{(q_{n+1} - q_n)}{\varepsilon} - H \right)}. \quad (2.30)$$

Substituindo então Eq. (2.29) em Eq. (2.30)

$$\langle q_{n+1}, t_{n+1} | q_n, t_n \rangle = \int dq_n \int \frac{dp_n}{2\pi\hbar} e^{\frac{i\varepsilon}{\hbar} \left(p_n q_n - \frac{p_n^2}{2m} \right)}, \quad (2.31)$$

onde foi definido $q_n = \frac{(q_{n+1} - q_n)}{\varepsilon}$. A integral nos momentos pode ser resolvida completando quadrado

$$\langle q_{n+1}, t_{n+1} | q_n, t_n \rangle = \int dq_n e^{\frac{i\varepsilon}{\hbar} \frac{m}{2} q_n^2} \int \frac{dp_n}{2\pi\hbar} e^{-\frac{i\varepsilon}{2m\hbar} (p_n - m\dot{q})^2}, \quad (2.32)$$

fazendo a substituição da variável de integração $p'_n \rightarrow (p_n - m\dot{q}_n)$ a integral no momento se torna uma integral gaussiana ordinária Eq. (1) do Apêndice A

$$\langle q_{n+1}, t_{n+1} | q_n, t_n \rangle = \int dq_n e^{\frac{i\varepsilon}{\hbar} \frac{m}{2} q_n^2} \int \frac{dp'_n}{2\pi\hbar} e^{-\frac{i\varepsilon}{2m\hbar} p'^2_n}. \quad (2.33)$$

Portanto o resultado para os momentos é

$$\langle q_{n+1}, t_{n+1} | q_n, t_n \rangle = \left(\frac{m}{2\pi\hbar i \varepsilon} \right)^{\frac{1}{2}} \int dq_n e^{\frac{i\varepsilon}{\hbar} \frac{m}{2} q_n^2}. \quad (2.34)$$

Assim, voltando para amplitude completa com o resultado acima tem-se

$$\langle q', t' | q, t \rangle = \left(\frac{m}{2\pi\hbar i \varepsilon} \right)^{\frac{N}{2}} \int \prod_{n=1}^{N-1} dq_n e^{\sum_{n=0}^{N-1} \frac{i\varepsilon}{\hbar} \frac{m}{2} \left[\frac{q_{n+1} - q_n}{\varepsilon} \right]^2}. \quad (2.35)$$

O último passo agora é resolver a integral no espaço das coordenadas. Para isto é necessário o seguinte resultado

$$\int_{-\infty}^{\infty} dq_n e^{-\alpha(q_{n+1} - q_n)^2 - \beta(q_n - q_{n-1})^2} = e^{-\frac{\alpha\beta}{\alpha+\beta}(q_{n+1} - q_{n-1})^2} \sqrt{\frac{\pi}{\alpha + \beta}}, \quad (2.36)$$

que pode ser obtido completando quadrado e fazendo a seguinte substituição, da variável de integração, $q'_n \rightarrow q_n - \frac{(\alpha q_{n+1} + \beta q_{n-1})}{(\alpha + \beta)}$. Assim, para $n = 1$ tem-se

$$\left(\frac{m}{2\pi\hbar i \varepsilon} \right) \int_{-\infty}^{\infty} dq_1 e^{\frac{im}{2\hbar\varepsilon}(q_2 - q_1)^2 + \frac{im}{2\hbar\varepsilon}(q_1 - q_0)^2} = \left(\frac{m}{2\pi\hbar i \varepsilon} \right)^{\frac{1}{2}} e^{-\frac{im}{2\hbar} \frac{1}{2\varepsilon}(q_2 - q_0)^2}. \quad (2.37)$$

Analogamente para $n = 2$,

$$\left(\frac{m}{2\pi\hbar i \varepsilon} \right) \int_{-\infty}^{\infty} dq_2 e^{\frac{im}{2\hbar\varepsilon}(q_3 - q_2)^2 + \frac{im}{2\hbar\varepsilon}(q_2 - q_0)^2} = \left(\frac{m}{2\pi\hbar i 3\varepsilon} \right)^{\frac{1}{2}} e^{-\frac{im}{2\hbar} \frac{1}{3\varepsilon}(q_3 - q_0)^2}. \quad (2.38)$$

Então seguindo estes procedimentos após $N - 1$ integrações chega-se em

$$\begin{aligned} \langle q', t' | q, t \rangle &= \left(\frac{m}{2\pi\hbar i N \varepsilon} \right)^{\frac{1}{2}} e^{-\frac{im}{2\hbar} \frac{1}{N\varepsilon}(q_N - q_0)^2} \\ &= \sqrt{\frac{m}{2\pi i \hbar (t' - t)}} e^{-\frac{im}{2\hbar} \frac{(q' - q)^2}{(t' - t)}}. \end{aligned} \quad (2.39)$$

Este resultado pode ser obtido também pelo formalismo de Schrödinger de forma até mais simples. Entretanto, há alguns casos em que é mais viável o formalismo de IC.

2.2 Integrais de Caminho em Teoria Quântica de Campos

Até então foi desenvolvido o formalismo de IC para a MQ, ou seja, foi tratado um sistema com “ k ” graus de liberdade, onde “ k ” representa a dimensão do espaço. A partir da

união da MQ com Relatividade Restrita (RR), surge o que é chamado de TQC, formalismo responsável pela descrição de partículas elementares. Em contrapartida com a MQ, posição e tempo são tratados da mesma forma na RR, portanto, no formalismo de TQC eles são um único parâmetro. E por definição qualquer função que dependa da posição e do tempo é dito um campo e possui infinitos graus de liberdade. As IC para TQC são utilizadas para sistemas que apresentam estes tipos de características. Basicamente as partículas elementares são tratadas como campos quânticos. E, por isto, nesta Seção será apresentado as principais relações do formalismo de IC para campos a fim de aplicar o mesmo durante o trabalho.

Quando se fala de amplitude de transição em TQC, está se referindo a amplitude de probabilidade de transição de um campo com uma dada configuração inicial, $|\phi, t\rangle$, evoluir para uma dada configuração final, $|\phi', t'\rangle$, e não mais de somente uma transição entre pontos do espaço. O processo de construção da amplitude de transição para campos é análogo ao desenvolvido na Seção 2.1 sobre MQ e pode ser encontrado com mais detalhes em (GREINER; REINHARDT, 2013). Aqui será feita apenas uma analogia entre algumas quantidades para apresentar a forma explícita da amplitude de transição.

Com as seguintes identificações

$$p(t) \rightarrow \pi(x) \quad \text{e} \quad q(t) \rightarrow \phi(x), \quad (2.40)$$

onde π é o momento conjugado dado por $\pi = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\phi}}$ e $x = (\vec{x}, t)$ representa um ponto no espaço-tempo². Pode-se escrever a amplitude de transição para campos na forma de uma IC,

$$\langle \phi', t' | \phi, t \rangle = \int \mathcal{D}\phi \int \mathcal{D}\pi e^{\frac{i}{\hbar} \int d^4x (\pi \partial_0 \phi - \mathcal{H})}, \quad (2.41)$$

em que ∂_0 representa a derivada com relação a coordenada temporal do espaço-tempo e \mathcal{H} é a densidade Hamiltoniana.

A IC em Eq. (2.41) representa uma soma sobre todas as configurações de campos possíveis na transição de $|\phi, t\rangle$ para $|\phi', t'\rangle$. Esta representação em TQC se parece ainda mais com a função de partição da ME do que na MQ, que são trajetórias a serem somadas. Novamente se o Hamiltoniano apresenta somente termos quadráticos no momento, pode-se reduzir a integral de caminho no espaço de fase em Eq. (2.41) numa integral de caminho somente sobre as

² Durante todo o trabalho será adotado as seguintes convenções de $x^\mu \equiv (x^0, x^i) = x(x^0, \vec{x})$ e para a métrica $diag(-, +, +, +)$

configurações de campo

$$\langle \phi', t' | \phi, t \rangle = \mathcal{N} \int \mathcal{D}\phi e^{\frac{i}{\hbar} W[\phi]}. \quad (2.42)$$

A notação introduzida aqui para a ação, $W[\phi]$, representa explicitamente que ela é um funcional do campo $\phi(x)$.

Da mesma maneira que as funções de Green na MQ possuem um gerador funcional, a TQC também tem seu gerador funcional, $Z[J]$,

$$Z[J] = \mathcal{N} \int \mathcal{D}\phi e^{\frac{i}{\hbar} W[J]}. \quad (2.43)$$

A fim de exemplificar alguns resultados, será utilizado o gerador funcional para o caso de um campo escalar real não carregado, $\phi(x)$. Então, o gerador funcional Eq. (2.43) fica

$$Z_E[J] = \mathcal{N}_E \int \mathcal{D}\phi e^{-\frac{1}{\hbar} \int d^4x_E \left(\frac{\hbar^2}{2} \partial_\mu^E \phi \partial_\mu^E \phi + \frac{1}{2} m^2 \phi^2 - J\phi \right)}, \quad (2.44)$$

em que os subíndices E indicam que a quantidade está definida no espaço 4-dimensional Euclidiano. É possível voltar ao espaço de Minkowski fazendo uma continuação analítica, porém, a IC Eq. (2.44) não possui uma convergência segura no espaço de Minkowski e por isso a necessidade de utilizar a rotação de Wick. Esta operação consiste na rotação de 90° da componente temporal do vetor em questão. A prescrição utilizada para tal rotação é $x_4 = ix_0$, o que implica na convenção adotada $x^2 = x_E^2$ e, portanto, Eq. (2.44) é uma integral Gaussiana generalizada. Introduzindo agora uma notação especial para produto escalar

$$(\phi, P\phi) = \int dx dy \phi(x) P(x-y) \phi(y). \quad (2.45)$$

Então, Eq. (2.44) pode ser reescrita como

$$Z_E[J] = \mathcal{N}_E \int \mathcal{D}\phi e^{-\frac{1}{2}(\phi, P\phi) + (J, \phi)}, \quad (2.46)$$

onde $P(x-y) = \frac{1}{\hbar} \left(-\hbar^2 \partial_\mu^E \partial_\mu^E + m \right) \delta(x-y)$.

E o resultado para este tipo de integral Gaussiana é uma generalização do resultado Eq. (6) encontrado no Apêndice A. Assim, tem-se

$$Z_E[J] = \mathcal{N}_E \int \mathcal{D}\phi e^{-\frac{1}{2}(\phi, P\phi) + (J, \phi)} = \mathcal{N}_E (\det P)^{-\frac{1}{2}} e^{\frac{1}{2}(J, P^{-1}J)}. \quad (2.47)$$

No caso de $J = 0$, a expressão acima se reduz a

$$Z_E[0] = \mathcal{N}_E (\det P)^{-\frac{1}{2}}. \quad (2.48)$$

A inversa de P , o operador P^{-1} , é identificado como o propagador do campo a menos de um fator \hbar^2 . Assim, pode-se dizer que o propagador é o inverso do operador presente na parte quadrática da ação, devido a esta parte ser o operador da sua respectiva equação de movimento e, com isso, é possível identificar esta inversa como uma função de Green. No caso do campo escalar real não carregado, agora de volta ao espaço de Minkowski, esta função de Green é

$$\Delta(x-y) = (-\partial_\mu \partial^\mu - m^2)^{-1}, \quad (2.49)$$

ou seja o inverso do operador de Klein-Gordon. Uma observação importante é de que no caso de férmions, o expoente do determinante em Eq. (2.48) é positivo ao invés de negativo, devido a sua natureza não comutativa³.

É possível também evitar a rotação de Wick ao utilizar a prescrição de Feynman. Basicamente se introduz um fator $i\varepsilon$ no operador da parte quadrática a fim de garantir a convergência da IC e evitar os polos presentes em (2.49). Ademais, dependendo do tipo de contorno que se faz para evitar os polos tem-se uma diferente função $\Delta(x-y)$, por exemplo as funções avançada, retardada, Dyson, Feynman etc. Com a utilização desta prescrição o que se tem é o propagador de Feynman. Portanto o propagador, evitando a rotação de Wick e utilizando a prescrição de Feynman, fica

$$\Delta(x-y) = (-\partial_\mu \partial^\mu - m^2 + i\varepsilon)^{-1}. \quad (2.50)$$

Estas funções de Green podem ser obtidas a partir do gerador funcional através de derivadas funcionais, assim como enunciado na Seção 2.1, porém aqui a função é de pontos no espaço-tempo e não só no tempo. Então, neste caso tem-se

³ Veja a Eq (7) no Apêndice A.

$$G(x_1, \dots, x_n) = \left(\frac{\hbar}{i} \right)^n \frac{\delta Z[J]}{\delta J(x_1) \cdots \delta J(x_n)} \Big|_{J=0}. \quad (2.51)$$

A função de 2-pontos, por exemplo, calculada a partir desta equação têm como resultado o propagador a menos de um fator $i\hbar$.

$$G(x, y) = i\hbar \Delta(x - y). \quad (2.52)$$

Estas funções de n -pontos podem ser representadas através de diagramas, que são representações diagramáticas para estas funções e são denominados diagramas de Feynman. Em particular para a função de 2-pontos, o diagrama respectivo é

$$G(x, y) = \bullet \text{---} \bullet \quad (2.53)$$

Na forma de diagrama de Feynman, pode-se observar melhor que a função de 2-pontos está representando a propagação do campo de um ponto x à um outro y .

A ação funcional $W[J]$, é definida como

$$Z[J] = e^{\frac{1}{\hbar} W[J]}, \quad (2.54)$$

e também é chamada de gerador funcional conexos, e gera uma nova classe de diagramas, chamados diagramas conexos. Este novo gerador pode ser obtido a partir da seguinte série

$$\frac{i}{\hbar} W[J] = \sum_{n=0}^{\infty} \int d^4 x_1 \cdots \int d^4 x_n \frac{1}{n!} \left(\frac{i}{\hbar} \right)^n G_c(x_1 \cdots x_n) J(x_1) \cdots J(x_n), \quad (2.55)$$

onde $G_c(x_1 \cdots x_n)$ denota as funções de Green conexas. Este novo conjunto de funções de Green são mais fundamentais, assim como as funções $1PI$, que possui como representação diagramática os diagramas de vértice, que serão discutidas a seguir.

2.2.1 Geradores Funcionais com Interação

Até então, os resultados acima são válidos para o caso de uma teoria livre, ou seja, sem interação. Quando estamos lidando com algum tipo de interação entre campos, um cálculo exato do propagador não é possível. Para resolver este problema é necessário um tratamento com

expansões perturbativas em torno da constante de acoplamento entre os campos. Um exemplo interessante a ser discutido é o caso em que considera-se a auto-interação do campo escalar, conhecida como teoria $\lambda\phi^4$, onde λ faz o papel da constante de acoplamento. A Lagrangeana desta teoria é

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_0 + \mathcal{L}_{int} = -\frac{\hbar^2}{2}\partial_\mu\phi\partial^\mu\phi - m^2\phi^2 - \lambda V(\phi), \quad (2.56)$$

em que $\lambda V(\phi) = \lambda \frac{\phi^4}{4!}$. Portanto o funcional gerador com interação é escrito

$$Z[J] = \mathcal{N} \int \mathcal{D}\phi e^{\frac{i}{\hbar} \int d^4x (\mathcal{L}_0 + \mathcal{L}_{int} + J\phi)} = \mathcal{N} \int \mathcal{D}\phi e^{-\frac{i}{\hbar} \int d^4x [\lambda V(\phi)]} e^{\frac{i}{\hbar} \int d^4x [\mathcal{L}_0 + J\phi]}. \quad (2.57)$$

Pode-se notar a identidade $\phi(x) \rightarrow \frac{\hbar}{i} \frac{\delta}{\delta J(x)}$, pois

$$\frac{\delta}{\delta J(x)} e^{\frac{i}{\hbar} \int d^4x [\mathcal{L}_0 + J\phi]} = \frac{i}{\hbar} \phi(x) e^{\frac{i}{\hbar} \int d^4x [\mathcal{L}_0 + J\phi]}. \quad (2.58)$$

Assim, o gerador funcional Eq. (2.57) é reescrito como

$$Z[J] = \mathcal{N} e^{-\frac{i}{\hbar} \int d^4x [\lambda V(\frac{\hbar}{i} \frac{\delta}{\delta J(x)})]} Z_0[J], \quad (2.59)$$

em que $Z_0[J]$ é a parte sem interação. E o fator de normalização é escolhido de tal forma que mantenha a condição de que $Z[0] = 1$. Aqui então, entra a expansão perturbativa em termos de λ . A fim de se obter soluções para o gerador funcional para cada ordem de expansão, escreve-se

$$Z[J] = \mathcal{N} Z_0[J] (1 + \lambda z_1[J] + \lambda^2 z_2[J] + \dots), \quad (2.60)$$

onde cada $z_i[J]$ é um coeficiente da expansão contendo uma dependência funcional de J . Cada ordem da expansão entra como uma correção para o gerador funcional, conseqüentemente para as funções de n -pontos. Estas correções, as vezes, são chamadas de correções quânticas para um dado processo físico, como por exemplo a propagação de um campo escalar que é representado pela função de 2-pontos. Esta correção, em termos de diagramas de Feynman é expressa, em primeira ordem, como

$$G(x,y) = \text{---}\bullet\text{---}\bullet\text{---} + \frac{1}{2}\lambda \text{---}\bullet\text{---}\bullet\text{---} + \mathcal{O}(\lambda^2). \quad (2.61)$$

Este resultado é obtido simplesmente com a utilização da relação Eq. (2.51) e expressando-a em termos de diagramas de Feynman, com as seguintes relações denominadas de regras de Feynman:

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Propagador} \rightarrow i\hbar\Delta(x-y) \rightarrow \text{---} \\ \text{Loop} \rightarrow i\hbar\Delta(x-x) \rightarrow \text{---} \circ \text{---} \\ \text{Interação} \rightarrow -\frac{i}{\hbar} \int d^4x \rightarrow \text{---} \times \text{---} \end{array} \right. \quad (2.62)$$

Cabe aqui ressaltar que, para cada teoria que se trabalhe, as regras de Feynman serão diferentes devido a inserção de novos campos e, conseqüentemente, a presença de novas interações.

Neste exemplo, aparece um tipo de propagador pois está-se lidando somente com um tipo de campo, o escalar real. Entretanto, em teorias que descrevem outros tipos de campos irão aparecer outros propagadores respectivos a estes novos campos. O fator numérico que aparece nos diagramas são chamados de fatores de simetria, e significam o número de diagramas que podem ser desenhados de formas diferentes, porém, representando a mesma função de Green. O *loop* mostrado em Eq. (2.62), é chamado de bolha de vácuo, pois a interpretação por trás dele é a de que o campo saiu do estado de vácuo e voltou para o estado de vácuo. A expansão feita em termos do parâmetro de acoplamento λ em Eq. (2.61), pode ser feita equivalentemente a níveis de *loop*, pois em ordens superiores aparecerão diagramas contendo mais de um *loop*. Já o diagrama de interação mostrado em Eq. (2.62), irá aparecer quando se calcula a função de 4-pontos. A função de 4-pontos em termos de diagramas até primeira ordem fica

$$G(x_1, x_2, x_3, x_4) = \begin{array}{c} \text{---} \text{---} \\ | \quad | \\ \text{---} \text{---} \end{array} + \begin{array}{c} \text{---} \\ \text{---} \end{array} + \begin{array}{c} \text{---} \\ \times \\ \text{---} \end{array} + \\ + \frac{1}{2}\lambda \left[\begin{array}{c} \text{---} \\ \circ \\ \text{---} \end{array} \text{---} + \text{---} \begin{array}{c} \text{---} \\ \circ \\ \text{---} \end{array} + \begin{array}{c} \text{---} \\ \text{---} \end{array} + \begin{array}{c} \text{---} \\ \text{---} \end{array} + \begin{array}{c} \text{---} \\ \text{---} \end{array} + \begin{array}{c} \text{---} \\ \text{---} \end{array} + \begin{array}{c} \text{---} \\ \text{---} \end{array} + \begin{array}{c} \text{---} \\ \text{---} \end{array} \right] + \\ + \lambda \begin{array}{c} \text{---} \\ \times \\ \text{---} \end{array} \quad (2.63)$$

A função de 4-pontos em Eq. (2.63), contém muitos diagramas que são formados a partir de produtos de propagadores e podem parecer um tanto quanto confusos. As funções de n -pontos conexas, por outro lado, fornecem diagramas menos confusos, cujo conteúdo físico fica mais claro. Por exemplo, a função de 4-pontos conexas em termos de diagramas de Feynman é

simplesmente

$$G_c(x_1, x_2, x_3, x_4) = \lambda \begin{array}{c} \bullet \quad \bullet \\ \diagdown \quad \diagup \\ \bullet \quad \bullet \end{array} + \mathcal{O}(\lambda^2). \quad (2.64)$$

Em geral, os diagramas de *loop* são expressões singulares e, com isso, divergentes. Este é um problema que aparece muitas vezes em TQC, entretanto, são corrigidos por meio de renormalização através da redefinição de alguns parâmetros físicos. Dando um resultado não divergente e mantendo a física do problema intacta. Existe um ramo da matemática chamado de Grupo de Renormalização cujo objetivo é estudar redefinições nas escalas de parâmetros físicos.

Um outro funcional gerador de extrema importância no estudo de ações efetivas, é aquele responsável por gerar as chamadas funções de n -pontos Irredutíveis de uma Partícula (*1PI*). Estas funções possuem este nome pois elas geram diagramas de Feynman que não podem ser divididos em outras partes mais fundamentais a partir do “corte” de uma linha de seus diagramas.

A função de n -pontos *1PI* é também chamada de função vértice. Ela é definida a partir do funcional que é a transformada de Legendre da ação funcional, $W[J]$,

$$\Gamma[\Phi_c] = W[J] - \int d^4x J(x) \Phi_c(x), \quad (2.65)$$

em que Φ_c é uma nova variável definida como a derivada funcional da $W[J]$ com respeito à fonte $J(x)$

$$\Phi_c(x) = \frac{\delta W[J]}{\delta J(x)}. \quad (2.66)$$

O funcional $\Gamma[\Phi_c]$ definido na Eq. (2.65) é conhecido como gerador funcional *1PI*.

O conceito de ação efetiva pode ser entendido como correções quânticas para a ação funcional clássica. Uma diferença entre ação funcional $W[J]$ e a ação efetiva $\Gamma[\Phi_c]$ é que a ação efetiva possui poucos campos (SCHWARTZ, 2014), no caso abordado neste trabalho a ação efetiva é calculada e expressa em termos do campo eletromagnético somente, mesmo o modelo geral contendo também o campo fermiônico. Existem alguns métodos específicos para a determinação destas ações efetivas além de Eq. (2.65), em particular neste trabalho na Seção 3 será demonstrado um deles.

Assim como os outros geradores funcionais, a ação efetiva pode também ser obtida através de uma série, chamada de série de Volterra

$$\Gamma[\Phi_c] = \sum_{n=0}^{\infty} \int d^4x_1 \cdots \int d^4x_n \frac{1}{n!} \Gamma(x_1 \cdots x_n) \Phi_c(x_1) \cdots \Phi_c(x_n), \quad (2.67)$$

cujo os coeficientes da série são as funções de n -pontos *1PI*

$$\Gamma(x_1 \cdots x_n) = \left. \frac{\delta \Gamma[\Phi_c]}{\delta \Phi_c(x_1) \cdots \delta \Phi_c(x_n)} \right|_{\Phi_c=0}, \quad (2.68)$$

também chamadas de funções de vértice.

Existem pouquíssimos exemplos em que a ação efetiva pode ser calculada exatamente, por exemplo nas teorias de campo bidimensionais, modelos de Thirring e de Schwinger. Em geral, como será mostrado adiante, a ação efetiva pode ser calculada a níveis de *loop* apresentando correções perturbativas ordem a ordem.

3 AÇÃO EFETIVA A 1-LOOP

Visto as motivações e possíveis aplicações citadas na introdução decorrentes da criação de pares de elétron-pósitron no vácuo, será mostrado a parte técnica do cálculo de ação efetiva a 1-loop para um campo fermiônico sujeito à interação com um campo eletromagnético de fundo. Para isto, consideraremos como ponto de partida a seguinte densidade Lagrangeana

$$\mathcal{L}_{QED} = \bar{\psi} (i\gamma^\mu \partial_\mu - e\gamma^\mu A_\mu - m) \psi - \frac{1}{4} \mathcal{F}_{\mu\sigma} \mathcal{F}^{\mu\sigma} \quad (3.1)$$

em que $(\psi, \bar{\psi})$ são campos fermiônicos e $\mathcal{F}_{\mu\sigma} = \partial_\mu A_\sigma - \partial_\sigma A_\mu$ representa o tensor eletromagnético, sendo A_μ o campo de gauge de Maxwell, que corresponde à interação da luz com a matéria. Esta Lagrangeana é invariante sob as seguintes transformações locais de gauge

$$\psi \rightarrow e^{i\lambda} \psi, \quad A \rightarrow A - \frac{1}{e} \partial \lambda \quad (3.2)$$

Basicamente se está interessado em determinar a amplitude de transição vácuo-vácuo, que será representada por $\langle 0|0 \rangle_A$, na presença de uma fonte externa que é o campo A_μ . Para determinar tal amplitude na linguagem de integral funcional, corresponde à integração somente sobre os graus de liberdade fermiônicos, resultando assim numa Lagrangeana efetiva que não contém explicitamente o campo de Dirac, mas somente o campo eletromagnético, A_μ . Logo, observa-se que os efeitos não lineares do campo eletromagnético e as correções necessárias às equações de Maxwell vem de fato das flutuações quânticas dos pares de elétron-pósitron no vácuo.

Na Seção 2.2, foi visto que a amplitude vácuo-vácuo pode ser calculada a partir da Eq. (2.54), que para o modelo abordado neste trabalho é ¹

$$\langle 0|0 \rangle_A = e^{iW[A]} = \int \mathcal{D}\bar{\psi} \mathcal{D}\psi e^{i \int d^4x [\bar{\psi} (i\gamma^\mu \partial_\mu - e\gamma^\mu A_\mu - m) \psi - \frac{1}{4} \mathcal{F}_{\mu\sigma} \mathcal{F}^{\mu\sigma}]}, \quad (3.3)$$

fator de normalização foi omitido mas ele deve satisfazer a condição de que no limite de campo nulo $\langle 0|0 \rangle_{A=0} = 1$. Note que a integração funcional está somente nos campos fermiônicos, resultando assim num funcional do campo A^μ , justamente porque está-se interessado nas contribuições (quânticas) geradas pela sua interação com o campo fermiônico. Ademais os campos fermiônicos devem ser tratados como variáveis de Grassman, para que se leve em consideração sua natureza anticomutativa. Pode-se ainda considerar uma forma perturbativa em série do

¹ A partir desta Seção será adotado $\hbar = c = 1$.

funcional $iW[A]$

$$iW[A] = iW[A]^{(0)} + iW[A]^{(1)} + \dots \quad (3.4)$$

Neste ponto identifica-se $W[A]^{(0)} = -\int d^4x \frac{1}{4} \mathcal{F}_{\mu\sigma} \mathcal{F}^{\mu\sigma}$ como a parte livre de Maxwell e $W[A]^{(1)}$ como a correção a 1-loop. Ou seja, a ação efetiva entra como correção às equações de Maxwell. Por sua vez, a primeira correção é escrita como

$$e^{iW[A]^{(1)}} = \det(i\gamma^\mu \partial_\mu - e\gamma^\mu A_\mu - m), \quad (3.5)$$

onde aqui foi feito uso do resultado Eq. (8) do Apêndice A para a integral Gaussiana em termos de férmions. Assim, a ação efetiva a 1-loop é dada por²

$$\begin{aligned} iW[A]^{(1)} &= \ln \det(i\gamma^\mu \partial_\mu - e\gamma^\mu A_\mu - m) \\ &= \ln \det G_+[xx|A]^{-1} \\ &= \text{Tr} \ln G_+[xx|A]^{-1}. \end{aligned} \quad (3.6)$$

Através do resultado acima e seguindo uma sistemática, apresentada em detalhes no Apêndice B, é possível mostrar que

$$\frac{i\delta W[A]^{(1)}}{\delta A_\mu(x)} = -\text{etr}\{\gamma^\mu G_+[xx|A]\}. \quad (3.7)$$

O ponto de partida para o cálculo da ação efetiva será Eq. (3.7), ou seja determinar a solução que a satisfaça. Este cálculo será feito utilizando o método apresentado por Schwinger (SCHWINGER, 1951), no qual consiste numa representação de tempo próprio para o propagador do férmion³. Para melhor entendimento, antes de se aprofundar no cálculo da Lagrangeana efetiva de Euler-Heisenberg, que consiste em levar em conta um campo eletromagnético completo, será feito o cálculo para o caso particular de campo magnético puro e, depois, com ambos os campos magnético e elétrico.

² Aqui definiu-se que o traço de Dirac juntamente com o traço no espaço das coordenadas será denotado com “Tr” e somente o traço de Dirac com “tr”, ou seja $Tr = tr \int d^4x$.

³ Outras referências para este método, no qual é feito um cálculo a nível 2-loop e também à temperatura finita, são (DITTRICH; REUTER, 1985) e (DITTRICH; GIES, 2000).

3.1 Ação Efetiva para Campo Magnético Puro

Aqui será apresentada uma dedução da representação de tempo próprio da Lagrangeana efetiva, tal como proposto por Schwinger (SCHWINGER, 1951). A utilização do tempo próprio como parâmetro na Lagrangeana efetiva tem a vantagem de ser invariante de gauge e de Lorentz simultaneamente.

O Ansatz da ação efetiva para a Eq. (3.7) em termos do tempo próprio, que será denotado aqui como s , é

$$iW[A]^{(1)} = i \int d^4x \mathcal{L}^{(1)} = -\frac{1}{2} \int_0^\infty \frac{ds}{s} e^{-ism^2} \text{Tr} \left[e^{is(\gamma \cdot \Pi)^2} \right], \quad (3.8)$$

onde $(\gamma \cdot \Pi)^2 = -\Pi^2 + \frac{e}{2} \sigma_{\mu\nu} \mathcal{F}^{\mu\nu}$ e $\Pi_\mu(x) = p_\mu - eA_\mu(x)$ é a derivada covariante na representação dos momentos. O parâmetro s é também chamado de parâmetro de Schwinger. Para mostrar a validade de Eq. (3.8), é necessário calcular sua primeira derivada e comparar com a Eq. (3.7). Assim, tem-se

$$\frac{i\delta W[A]^{(1)}}{\delta A_\mu(y)} = -\frac{\delta}{\delta A_\mu(y)} \frac{1}{2} \int_0^\infty \frac{ds}{s} e^{-ism^2} \text{Tr} \left[e^{is[\gamma \cdot \Pi(x)]^2} \right]. \quad (3.9)$$

Entretanto, pode-se reescrever a derivada em função do campo eletromagnético utilizando a seguinte regra da cadeia

$$\frac{\delta}{\delta A_\mu(y)} = -e \frac{\delta}{\delta \Pi_\mu(y)}. \quad (3.10)$$

Realizando os passos corretamente chega-se ao seguinte resultado para a derivada

$$\frac{i\delta W[A]^{(1)}}{\delta A_\mu(y)} = -ie \int_0^\infty ds e^{-ism^2} \text{tr} \left\{ \gamma^\mu [\gamma \cdot \Pi(y)] e^{is[\gamma \cdot \Pi(y)]^2} \right\}. \quad (3.11)$$

E como o traço de um número ímpar de matrizes γ^μ é nulo pode-se reescrever a Eq. (3.11) como

$$\frac{i\delta W[A]^{(1)}}{\delta A_\mu(y)} = -ie \text{tr} \left\{ \gamma^\mu \int_0^\infty ds [m - \gamma \cdot \Pi(y)] e^{-is[m^2 - [\gamma \cdot \Pi(y)]^2]} \right\}. \quad (3.12)$$

No espaço dos momentos o propagador é escrito como

$$G_+(p) = \frac{1}{[\gamma^\mu \Pi_\mu + m]} = \frac{[m - (\gamma \cdot \Pi)]}{[m^2 - (\gamma \cdot \Pi)^2 - i\epsilon]}, \quad (3.13)$$

assim pode-se identificar o termo entre colchetes que está multiplicando a matriz γ_μ na Eq. (3.12) como a representação de tempo próprio do propagador (SCHWINGER, 1951)⁴. Então, conclui-se que o Ansatz sobre a forma geral da Lagrangeana efetiva Eq. (3.8), de fato satisfaz Eq. (3.7).

E por sua vez, o termo $(\gamma \cdot \Pi)^2$ explicitamente fica

$$(\gamma \cdot \Pi)^2 = \frac{1}{2} \{\gamma_\mu, \gamma_\sigma\} \Pi^\mu \Pi^\sigma + \frac{1}{4} [\gamma_\mu, \gamma_\sigma] [\Pi^\mu, \Pi^\sigma], \quad (3.14)$$

usando $\{\gamma_\mu, \gamma_\sigma\} = -2\eta_{\mu\sigma}$ e $[\gamma_\mu, \gamma_\sigma] = -2i\sigma_{\mu\sigma}$, tem-se

$$(\gamma \cdot \Pi)^2 = -\Pi^2 - \frac{i}{2} \sigma_{\mu\sigma} [\Pi^\mu, \Pi^\sigma]. \quad (3.15)$$

O comutador do momento Π_μ agindo numa função arbitrária tem como resultado o seguinte

$$[\Pi^\mu, \Pi^\sigma] = ie\mathcal{F}^{\mu\sigma}, \quad (3.16)$$

lembrando que $\mathcal{F}^{\mu\sigma}$ é o tensor eletromagnético, então o propagador no espaço dos momentos assume a forma

$$G_+(p) = \frac{[(\gamma \cdot \Pi) - m]}{[-\Pi^2 + \frac{e}{2} \sigma_{\mu\sigma} \mathcal{F}^{\mu\sigma} - m^2 + i\epsilon]}. \quad (3.17)$$

Considerando que para a análise inicial tem-se somente um campo magnético, $\vec{\mathcal{B}}$, na direção do eixo z, o tensor eletromagnético, $\mathcal{F}^{\mu\sigma}$, só possui as componentes $\mathcal{F}^{12} = -\mathcal{F}^{21} = \mathcal{B}_z$, então

$$G_+(p) = \frac{[(\gamma \cdot \Pi) - m]}{[-\Pi^2 + e\sigma_{12}\mathcal{B}_z - m^2 + i\epsilon]}, \quad (3.18)$$

uma vez que $\sigma_{12} \equiv \sigma^3 = \begin{pmatrix} \sigma^3 & 0 \\ 0 & \sigma^3 \end{pmatrix}$, tem-se que

$$G_+(p) = \frac{[m - (\gamma \cdot \Pi)]}{[\Pi^2 + \mathcal{K}^2 - i\epsilon]}, \quad (3.19)$$

sendo que $\mathcal{K}^2 = m^2 - e\sigma^3\mathcal{B}_z$.

⁴ A representação de tempo próprio consiste na identidade matemática $\frac{\Gamma(b+1)}{A^{b+1}} = \int_0^\infty ds s^b e^{-As}$.

Ao encontrar a forma do propagador no espaço dos momentos, é interessante e útil escrever uma representação especial deste propagador no espaço das posições $G_+ [xx'|A]$. Uma condição necessária é a de que a representação de $G_+ [xx'|A]$ satisfaça

$$[\gamma^\mu (-i\partial_\mu - eA_\mu(x)) + m] G_+ [xx'|A] = \delta(x - x'), \quad (3.20)$$

pois como se está lidando com uma partícula de Dirac então ele deve ser a função de Green do operador da equação de Dirac, o que implica na Eq. (3.20).

Para resolver a Eq. (3.20) será utilizado o Ansatz

$$G_+ [xx'|A] = \phi(x, x') [m - \gamma^\mu (-i\partial_\mu - eA_\mu(x))] \Delta_+ [xx'|A'], \quad (3.21)$$

onde $\phi(x, x') = e^{ie \int_x^{x'} dx_\mu \{A^\mu(x) + \frac{1}{2} \mathcal{F}^{\mu\sigma} (x_\sigma - x'_\sigma)\}}$ é a fase invariante de gauge proposta por Schwinger, no caso particular de uma trajetória retilínea $z(t) = x + t(x' - x)$ com $t \in [0, 1]$, o segundo termo não contribui e tem-se que

$$\phi(x, x') = e^{ie \int_x^{x'} dx_\mu A^\mu(x)}. \quad (3.22)$$

Agora, substituindo Eq. (3.21) em Eq. (3.20) encontra-se a seguinte expressão

$$\left[(-i\partial_\mu - eA_\mu(x))^2 + m^2 \right] \Delta_+ [xx'|A'] = \delta(x - x'), \quad (3.23)$$

esta é a equação diferencial para o funcional $\Delta_+ [xx'|A']$. Escolhendo a condição de gauge

$$A_\mu(x) = -\frac{1}{2} \mathcal{F}_{\mu\sigma} (x^\sigma - x^{\sigma'}) \quad (3.24)$$

que condiz com a escolha de um campo externo constante e definindo a diferença $(x^\sigma - x^{\sigma'}) \equiv x^\sigma$, obtêm-se

$$\left[-\partial^\mu \partial_\mu - \frac{e^2}{4} x_\mu (\mathcal{F}^2)^{\mu\sigma} x_\sigma + m^2 \right] \Delta_+ [x|A'] = \delta(x). \quad (3.25)$$

Neste passo foi utilizado a invariância rotacional com respeito ao eixo z, ou seja

$$\mathcal{F}^{\mu\sigma} (x_\mu \partial_\sigma - x_\sigma \partial_\mu) \Delta_+ [x|A'] = 0. \quad (3.26)$$

Com isso tem-se uma equação diferencial agora para $\Delta_+ [x|A']$. Para determinar esta função utiliza-se a transformada de Fourier

$$\Delta_+ [x|A'] = \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} e^{ikx} \Delta_+ [k|A']. \quad (3.27)$$

Portanto, a Eq. (3.25) no espaço dos momentos fica

$$\left[k^\mu k_\mu + \frac{e^2}{4} \partial_\mu^{(k)} (\mathcal{F}^2)^{\mu\sigma} \partial_\sigma^{(k)} + m^2 - i\varepsilon \right] \Delta_+ [k|A'] = 1. \quad (3.28)$$

Aqui o fator $i\varepsilon$ foi exposto novamente, e vale lembrar que ele serve para evitar os polos do operador.

Para resolver a Eq. (3.28), utiliza-se o Ansatz

$$\Delta_+ [k|A'] = i \int_0^\infty ds e^{-M(is)} e^{-is(m^2 - i\varepsilon)} \quad (3.29)$$

encontrando as funções que o satisfaça. Baseado na estrutura da Eq. (3.28) quanto a dependência em k , identifica-se $M(is) = k^\alpha X_{\alpha\beta}(is) k^\beta + Y(is)$ com $X_{\alpha\beta} = X_{\beta\alpha}$. Substituindo Eq. (3.29) em Eq. (3.28) e escrevendo em notação matricial, tem-se

$$i \int_0^\infty \left[k (1 + X(is) \mathcal{F}^2 X(is)) k - \frac{e^2}{2} \text{tr}(\mathcal{F}^2 X(is)) + m^2 - i\varepsilon \right] e^{-M(is)} e^{-is(m^2 - i\varepsilon)} = 1. \quad (3.30)$$

A equação acima, para um dado valor específico de X e Y , possui a forma

$$i \int_0^\infty ds g(is) e^{-f(is)} = 1. \quad (3.31)$$

A partir da qual é possível notar que para este caso, $g(is) = -\dot{f}(is)$. Logo, com essa identificação, a Eq. (3.31) pode ser escrita como

$$i \int_0^\infty ds g(is) e^{-f(is)} = \lim_{s \rightarrow 0} e^{-f(is)} - \lim_{s \rightarrow \infty} e^{-f(is)}, \quad (3.32)$$

se,

$$\lim_{s \rightarrow 0} f(is) = 0 \quad \text{e} \quad \lim_{s \rightarrow \infty} \text{Re} f(is) = \infty. \quad (3.33)$$

Estas são condições necessárias que X e Y devem satisfazer a fim de se encontrar a solução para a Eq. (3.29). Portanto, ao se comparar Eq. (3.29) e Eq. (3.30), identifica-se

$$\dot{M}(is) = k(1 + X(is) \mathcal{F}^2 X(is)) k - \frac{e^2}{2} \text{tr}(\mathcal{F}^2 X(is)). \quad (3.34)$$

Logo, da definição de $M(is)$ segue que

$$\begin{aligned} \dot{X}(is) &= 1 + e^2 X(is) \mathcal{F}^2 X(is) \\ \dot{Y}(is) &= -\frac{e^2}{2} \text{tr}(\mathcal{F}^2 X(is)). \end{aligned} \quad (3.35)$$

Uma solução para $X(is)$ e $Y(is)$ que satisfaz Eq. (3.35) é da seguinte forma

$$\begin{aligned} X(w) &= (e\mathcal{F})^{-1} \tan(e\mathcal{F}w) \\ Y(w) &= \frac{1}{2} \text{tr} \ln \cos(e\mathcal{F}w), \end{aligned} \quad (3.36)$$

onde $w = is$.

Para confirmar que as soluções da Eq. (3.36) sejam soluções para $M(is)$ deve-se ainda testar as condições exigidas em Eq. (3.33). Verificando a primeira condição

$$\lim_{w \rightarrow 0} X(w) = (e\mathcal{F})^{-1} \tan(0) = 0 \quad (3.37)$$

e

$$\lim_{w \rightarrow 0} Y(w) = \frac{1}{2} \text{tr} \ln \cos(0) = 0. \quad (3.38)$$

Como nesta Seção se está interessado somente no caso de um campo magnético, pode-se escrever explicitamente o tensor eletromagnético como

$$\mathcal{F} = \mathcal{B} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (3.39)$$

e ainda

$$(i\mathcal{F})^2 = \mathcal{B}^2 \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (3.40)$$

Desta forma, as quantidades $X(is)$ e $Y(is)$ podem ser escritas da seguinte maneira

$$X(is) = is \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \frac{\tan(e\mathcal{B}s)}{e\mathcal{B}s} \right\} \quad (3.41)$$

e

$$Y(is) = \ln \cos(e\mathcal{B}s). \quad (3.42)$$

A fim de determinar uma expressão explícita para $\Delta_+[k|A']$, é conveniente a introdução de uma notação na qual a integração dos momentos k seja mais simples:

$$\begin{aligned} a_{\parallel} &\equiv (a^0, 0, 0, a^3); \\ a_{\perp} &\equiv (0, a^1, a^2, 0); \\ (ab)_{\parallel} &= -a^0 b^0 + a^3 b^3; \\ (ab)_{\perp} &= a^1 b^1 + a^2 b^2. \end{aligned} \quad (3.43)$$

Neste caso pode-se escrever finalmente $M(is)$,

$$M(is) = is \left\{ k_{\parallel}^2 + k_{\perp}^2 \frac{\tan(e\mathcal{B}s)}{e\mathcal{B}s} \right\} + \ln \cos(e\mathcal{B}s) \quad (3.44)$$

na forma completa.

É fácil notar ainda que este resultado também satisfaz a segunda condição em Eq. (3.33). Agora pode-se substituir este resultado, Eq. (3.44), em Eq. (3.29), levando a

$$\Delta_+ [k|A'] = i \int_0^\infty ds e^{-is \left\{ k_{\parallel}^2 + k_{\perp}^2 \frac{\tan(e\mathcal{B}s)}{e\mathcal{B}s} \right\}} e^{-is(m^2 - i\epsilon)} \frac{1}{\cos(e\mathcal{B}s)}. \quad (3.45)$$

Por fim, substituindo Eq. (3.45) em Eq. (3.27) e então o resultado na Eq. (3.21) tem-se

$$G_+ [xx'|A] = \phi(x, x') [m - \gamma^\mu \Pi_\mu] i \int_0^\infty ds \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} e^{ik(x-x') - is \left\{ k_{\parallel}^2 + k_{\perp}^2 \frac{\tan(e\mathcal{B}s)}{e\mathcal{B}s} \right\}} \times e^{-is(m^2 - i\epsilon)} \frac{1}{\cos(e\mathcal{B}s)}. \quad (3.46)$$

No caso especial onde $x' = x$ o fator $\phi(x, x') = 1$, assim

$$G_+ [xx|A] = [m - \gamma^\mu \Pi_\mu] i \int_0^\infty ds \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} e^{-is \left\{ k_{\parallel}^2 + k_{\perp}^2 \frac{\tan(e\mathcal{B}s)}{e\mathcal{B}s} \right\}} e^{-is(m^2 - i\epsilon)} \frac{1}{\cos(e\mathcal{B}s)}. \quad (3.47)$$

A partir da forma geral do propagador Eq. (3.23) na representação de tempo próprio

$$\Delta_+ [xx'|A] = \left\langle x \left| \frac{1}{\Pi^2 + m^2 - i\epsilon} \right| x' \right\rangle = i \int_0^\infty ds \left\langle x \left| e^{-is\Pi^2} \right| x' \right\rangle e^{-is(m^2 - i\epsilon)}, \quad (3.48)$$

pode-se encontrar o resultado para o elemento de matriz em Eq. (3.48) ao se comparar com Eq. (3.45)

$$\left\langle x \left| e^{-is\Pi^2} \right| x \right\rangle = \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} e^{-is \left\{ k_{\parallel}^2 + k_{\perp}^2 \frac{\tan(e\mathcal{B}s)}{e\mathcal{B}s} \right\}} \frac{1}{\cos(e\mathcal{B}s)}. \quad (3.49)$$

Este resultado será de extrema importância para a determinação da Lagrangeana efetiva explicitamente.

Retornando à expressão da Lagrangeana efetiva Eq. (3.8), pode-se escrevê-la explicitamente da seguinte forma

$$\begin{aligned} \mathcal{L}^{(1)} &= \frac{i}{2} \int_0^\infty \frac{ds}{s} e^{-ism^2} \text{tr} \left[e^{is(\gamma \cdot \Pi)^2} \right] \\ &= \frac{i}{2} \text{tr} \int_0^\infty \frac{ds}{s} e^{-ism^2} e^{ie\mathcal{B}s(\sigma^3)} \left\langle x \left| e^{-is\Pi^2} \right| x \right\rangle, \end{aligned} \quad (3.50)$$

onde fez-se uso de $(\gamma \cdot \Pi)^2 = -\Pi^2 + e\mathcal{B}\sigma^3$. Assim pode-se observar a necessidade de resolver explicitamente Eq. (3.49) a fim de calcular a Lagrangeana efetiva.

Agora, resolvendo as integrais Gaussianas em Eq. (3.49) tem-se

$$\langle x | e^{-is\Pi^2} | x \rangle = -\frac{i}{16\pi^2} \frac{1}{s^2} \frac{(e\mathcal{B}s)}{\sin(e\mathcal{B}s)}. \quad (3.51)$$

Com este resultado, a Lagrangeana efetiva Eq. (3.50) pode ser reescrita como

$$\mathcal{L}^{(1)} = \frac{1}{32\pi^2} \text{tr} \left\{ \int_0^\infty \frac{ds}{s^3} e^{-ism^2} e^{ie\mathcal{B}s(\sigma^3)} \frac{(e\mathcal{B}s)}{\sin(e\mathcal{B}s)} \right\}. \quad (3.52)$$

O próximo passo a fim de obter a expressão final para a Lagrangeana efetiva é resolver o traço de Dirac. O único termo que ainda possui caráter matricial em Eq. (3.52) é a exponencial da matriz σ^3

$$\mathcal{L}^{(1)} = \frac{1}{32\pi^2} \int_0^\infty \frac{ds}{s^3} e^{-ism^2} \frac{(e\mathcal{B}s)}{\sin(e\mathcal{B}s)} \text{tr} \left[e^{ie\mathcal{B}s(\sigma^3)} \right]. \quad (3.53)$$

Utilizando a fórmula de Euler, pode-se calcular o traço que é $\text{tr} \left[e^{ie\mathcal{B}s(\sigma^3)} \right] = 4 \cos(e\mathcal{B}s)$, pois o traço da matriz σ^3 é nulo restando somente o traço da identidade. Assim a expressão para a Lagrangeana Eq. (3.53), fazendo algumas substituições trigonométricas, é escrita

$$\mathcal{L}^{(1)} = \frac{1}{8\pi^2} \int_0^\infty \frac{ds}{s^3} e^{-ism^2} (e\mathcal{B}s) \cot(e\mathcal{B}s). \quad (3.54)$$

Esta seria a Lagrangeana efetiva para o caso de campo magnético puro, entretanto, é necessário testar alguns limites para ver se ela é uma função bem comportada, caso contrário, ela deverá ser modificada. O primeiro limite que deve-se tomar é o caso de $\mathcal{B} = 0$, pois na ausência de um campo magnético os efeitos da Lagrangeana efetiva devem desaparecer. Assim, aplicando este limite tem-se

$$\lim_{\mathcal{B} \rightarrow 0} \mathcal{L}^{(1)} = \frac{1}{8\pi^2} \int_0^\infty \frac{ds}{s^3} e^{-ism^2} \lim_{\mathcal{B} \rightarrow 0} \left[\frac{(e\mathcal{B}s)}{\sin(e\mathcal{B}s)} \cos(e\mathcal{B}s) \right]. \quad (3.55)$$

Neste passo agora deve-se aplicar L'Hôpital, pois aplicando-se o limite no termo $\frac{(e\mathcal{B}s)}{\sin(e\mathcal{B}s)}$ temos uma indeterminação. Fazendo isto, vê-se que

$$\lim_{\mathcal{B} \rightarrow 0} \mathcal{L}^{(1)} = \frac{1}{8\pi^2} \int_0^\infty \frac{ds}{s^3} e^{-ism^2}, \quad (3.56)$$

ou seja, tem-se uma contribuição finita quando $\mathcal{B} = 0$. Para corrigir este resultado, é necessário subtrair de $\mathcal{L}^{(1)}$ em Eq. (3.54) o termo Eq. (3.56) de modo que na ausência de campo magnético os efeitos da Lagrangeana efetiva desapareçam. Deste modo Eq. (3.54) se torna

$$\mathcal{L}^{(1)} = \frac{1}{8\pi^2} \int_0^\infty \frac{ds}{s^3} e^{-ism^2} [(e\mathcal{B}s) \cot(e\mathcal{B}s) - 1]. \quad (3.57)$$

E agora na ausência de campo, vê-se facilmente que os efeitos da Lagrangeana efetiva desaparecem.

Outros dois limites que deve-se testar são os limites de integração 0 e ∞ para se ter certeza de seu bom comportamento. Primeiramente para $s \rightarrow 0$, utiliza-se a expansão da função cotangente em série de Laurent, a fim de melhor visualização do termo que deve-se corrigir. Fazendo isto a Eq. (3.57) fica

$$\mathcal{L}^{(1)} = \frac{1}{8\pi^2} \int_0^\infty ds e^{-ism^2} \left[-\frac{(e\mathcal{B})^2}{3s} - \frac{(e\mathcal{B})^4 s}{45} + \dots \right]. \quad (3.58)$$

Olhando para Eq. (3.58) vê-se que o termo divergente quando $s \rightarrow 0$ está contido apenas no termo quadrático em \mathcal{B} , porém ele pode ser removido através da renormalização da carga elétrica, e , e do campo magnético, \mathcal{B} . Introduzindo uma notação para os parâmetros não renormalizados, e_0 e \mathcal{B}_0 , que também são chamados de parâmetros nus. Reescrevendo Eq. (3.57) em termos dos parâmetros nus,

$$\mathcal{L}^{(1)} = \frac{1}{8\pi^2} \int_0^\infty \frac{ds}{s^3} e^{-ism^2} [(e_0\mathcal{B}_0s) \cot(e_0\mathcal{B}_0s) - 1]. \quad (3.59)$$

Ademais, a Lagrangeana livre de Maxwell, $\mathcal{L}^{(0)}$, deve ser levada em conta pois também contém parâmetros nus e é necessário reescrever toda a Lagrangeana completa em termos deles. Assim a Lagrangeana total fica

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}^{(0)} + \mathcal{L}^{(1)} = -\frac{1}{2}\mathcal{B}_0^2 + \frac{1}{8\pi^2} \int_0^\infty \frac{ds}{s^3} e^{-ism^2} [(e_0\mathcal{B}_0s) \cot(e_0\mathcal{B}_0s) - 1]. \quad (3.60)$$

Agora somando e subtraindo o termo divergente em $s \rightarrow 0$ em Eq. (3.60), tem-se

$$\begin{aligned} \mathcal{L} = & -\frac{1}{2}\mathcal{B}_0^2 - \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{24\pi^2} \int_x^\infty \frac{ds}{s^3} e^{-ism^2} (e_0\mathcal{B}_0s)^2 \right) + \\ & + \frac{1}{8\pi^2} \int_0^\infty \frac{ds}{s^3} e^{-ism^2} \left[(e_0\mathcal{B}_0s) \cot(e_0\mathcal{B}_0s) + \frac{(e_0\mathcal{B}_0s)^2}{3} - 1 \right]. \end{aligned} \quad (3.61)$$

Evidenciando o campo magnético não renormalizado nos dois primeiros termos da equação acima e introduzindo um novo parâmetro

$$\mathcal{Z}_3^{-1} = 1 + \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{e_0^2}{12\pi^2} \int_x^\infty \frac{ds}{s} e^{-ism^2} \right), \quad (3.62)$$

que pode ser identificado como a constante de renormalização. A Eq. (3.61) então se torna

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{2}\mathcal{B}_0^2 \mathcal{Z}_3^{-1} + \frac{1}{8\pi^2} \int_0^\infty \frac{ds}{s^3} e^{-ism^2} \left[(e_0\mathcal{B}_0s) \cot(e_0\mathcal{B}_0s) + \frac{(e_0\mathcal{B}_0s)^2}{3} - 1 \right]. \quad (3.63)$$

Agora pode-se definir os parâmetros renormalizados, primeiro para o campo magnético, \mathcal{B}

$$\mathcal{B}^2 = \mathcal{B}_0^2 \mathcal{Z}_3^{-1} \Rightarrow \mathcal{B} = \mathcal{B}_0 \mathcal{Z}_3^{-\frac{1}{2}}, \quad (3.64)$$

enquanto que para carga elétrica, e , define-se o seguinte

$$e = e_0 \mathcal{Z}_3^{\frac{1}{2}}. \quad (3.65)$$

É possível notar que o produto entre carga elétrica e campo é invariante por essas definições, ou seja $e\mathcal{B} = e_0\mathcal{B}_0$. Pode-se enfim escrever a Lagrangeana renormalizada

$$\mathcal{L}_R^{(1)}(\mathcal{B}) = -\frac{1}{2}\mathcal{B}^2 + \frac{1}{8\pi^2} \int_0^\infty \frac{ds}{s^3} e^{-ism^2} \left[(e\mathcal{B}s) \cot(e\mathcal{B}s) + \frac{1}{3} (e\mathcal{B}s)^2 - 1 \right]. \quad (3.66)$$

Outra forma equivalente da Lagrangeana Eq. (3.66) é rotacionando o caminho de integração de $s \rightarrow -is$,

$$\mathcal{L}_R^{(1)}(\mathcal{B}) = -\frac{1}{8\pi^2} \int_0^\infty \frac{ds}{s^3} e^{-sm^2} \left[(e\mathcal{B}s) \coth(e\mathcal{B}s) - \frac{1}{3} (e\mathcal{B}s)^2 - 1 \right]. \quad (3.67)$$

Para o outro caso extremo, de campo elétrico puro, o processo de análise é análogo. Porém, pode-se obter diretamente o resultado a partir da substituição, $\mathcal{B} \rightarrow i\mathcal{E}$, onde \mathcal{E} é o campo

elétrico externo. Assim, a Lagrangeana efetiva renormalizada para o caso de campo elétrico puro é:

$$\mathcal{L}_R^{(1)}(\mathcal{E}) = -\frac{1}{8\pi^2} \int_0^\infty \frac{ds}{s^3} e^{-sm^2} \left[(e\mathcal{E}s) \cot(e\mathcal{E}s) + \frac{1}{3} (e\mathcal{E}s)^2 - 1 \right]. \quad (3.68)$$

Como será discutido a seguir, existe uma diferença significativa entre os dois casos no processo de criação de pares de Schwinger (elétron-pósitron).

3.2 Análise de Criação de Pares de Elétron-Pósitron (E-P)

Nesta Seção será analisado em detalhes a probabilidade de se criar um par de elétron-pósitron (E-P) devido a um campo magnético ou elétrico externo. A probabilidade de criação de um par E-P é dada pela seguinte relação

$$\begin{aligned} P &= 1 - |\langle 0|0 \rangle_A|^2 \\ &= 1 - e^{-2ImW[A]}, \end{aligned} \quad (3.69)$$

onde $\langle 0|0 \rangle_A$ representa a amplitude de probabilidade do campo permanecer no estado de vácuo utilizada na Seção 3. Se $\langle 0|0 \rangle_A = 1$, ou seja, se o estado de vácuo inicial se manteve inalterado, então não houve a criação de um par E-P. Para valores pequenos de $W[A]$ a probabilidade pode ser aproximada para

$$P = \int d^4x (2Im\mathcal{L}). \quad (3.70)$$

Assim, a densidade de probabilidade de criação de pares de E-P é proporcional à parte imaginária da Lagrangeana. Então, para saber se haverá ou não a criação basta analisar se a Lagrangeana possui ou não parte imaginária.

Analisando primeiro o caso de um campo magnético puro Eq. (3.67), ou seja, a Lagrangeana efetiva

$$\mathcal{L}_R^{(1)}(\mathcal{B}) = -\frac{1}{8\pi^2} \int_0^\infty \frac{ds}{s^3} e^{-sm^2} \left[(e\mathcal{B}s) \coth(e\mathcal{B}s) - \frac{1}{3} (e\mathcal{B}s)^2 - 1 \right], \quad (3.71)$$

pode-se notar que ela não possui parte imaginária, sendo assim a probabilidade de criação de pares de E-P é nula $\mathcal{P}_{\mathcal{B}} = 0$. E de fato é um resultado esperado, pois o campo magnético não

possui a propriedade de transferir energia para as partículas virtuais em repouso devido a força de Lorentz ser sempre perpendicular à velocidade (DITTRICH; REUTER, 1985), fazendo com que elas não alcancem energia igual a $2mc^2$ que seria necessária para saírem do estado virtual para o real.

Agora com o caso de campo elétrico puro, Eq. (3.68), é conveniente utilizar a representação da Lagrangeana efetiva equivalente com a mudança da variável de integração $s \rightarrow is$, de modo que a função no integrando do caso de campo elétrico puro fique igual a do campo magnético puro para melhor comparação. Assim, a Lagrangeana efetiva para o caso de campo elétrico puro é

$$\mathcal{L}_R^{(1)}(\mathcal{E}) = \frac{1}{8\pi^2} \int_0^\infty \frac{ds}{s^3} e^{-ism^2} \left[(e\mathcal{E}s) \coth(e\mathcal{E}s) - \frac{1}{3} (e\mathcal{E}s)^2 - 1 \right]. \quad (3.72)$$

Ao contrário da Eq. (3.71), o caso de um campo elétrico possui uma parte imaginária

$$Im\mathcal{L}_R^{(1)}(\mathcal{E}) = \frac{1}{2i8\pi^2} \int_{-\infty}^\infty \frac{ds}{s^3} e^{-ism^2} \left[(e\mathcal{E}s) \coth(e\mathcal{E}s) - \frac{1}{3} (e\mathcal{E}s)^2 - 1 \right]. \quad (3.73)$$

Aqui tem-se outro resultado esperado, pois o campo elétrico possui a propriedade de transferir energia para uma partícula carregada em repouso (DITTRICH; REUTER, 1985), com isso, dependendo da intensidade do campo \mathcal{E} é possível haver a criação de pares de E-P.

Para resolver a parte imaginária em Eq. (3.73) podemos utilizar o método de resíduos, onde os polos estão em todo eixo imaginário devido a função \coth e possui valores de $s_0 = -\frac{i\pi}{e\mathcal{E}}$. Fechando o contorno em um semi círculo no semi plano inferior, tem-se

$$Im\mathcal{L}_R^{(1)}(\mathcal{E}) = \frac{1}{(2i)8\pi^2} (-2\pi i) \sum_{n=1}^{\infty} Res \left[f(s), s_0 = -\frac{i\pi}{e\mathcal{E}} \right]. \quad (3.74)$$

Como o número de potências negativas presente na série de Laurent da cotangente hiperbólica é um, então os polos são simples e pertencem aos zeros da função $\sinh(e\mathcal{E}s)$. Assim o resíduo é justamente o coeficiente a_{-1} da série de Laurent. Portanto, segue que

$$Im\mathcal{L}_R^{(1)}(\mathcal{E}) = \frac{1}{(2i)8\pi^2} (-2\pi i) \sum_{n=1}^{\infty} \lim_{s \rightarrow s_0} \left[\frac{e^{-ism^2}}{s^3} \frac{(e\mathcal{E}s)}{(e\mathcal{E})} \right] = \frac{\alpha\mathcal{E}^2}{2\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n} \right)^2 e^{-\frac{n\pi m^2}{e\mathcal{E}}}, \quad (3.75)$$

onde $\alpha = \frac{e^2}{4\pi}$ é chamada de constante de estrutura fina.

A soma em Eq. (3.75) não pode ser feita de forma fechada. Entretanto, pode-se resolvê-la para os casos limites de campo forte e fraco. Por um lado, no limite de campos fortes, $e\mathcal{E} \gg m^2$, apenas o primeiro termo da exponencial em Eq. (3.75) contribui, assim tem-se

$$\begin{aligned} \text{Im}\mathcal{L}_{R(e\mathcal{E}\gg m^2)}^{(1)}(\mathcal{E}) &= \frac{\alpha\mathcal{E}^2}{2\pi^2} (\zeta(2)) \\ &= \frac{(e\mathcal{E})^2}{48\pi}, \end{aligned} \quad (3.76)$$

onde $\zeta(2)$ representa a função zeta de Riemman de argumento dois. Por outro lado, no limite de campos fracos, $m^2 \gg e\mathcal{E}$, pode-se desconsiderar contribuições de $n \geq 2$, resultando em

$$\text{Im}\mathcal{L}_{R(m^2\gg e\mathcal{E})}^{(1)}(\mathcal{E}) = \frac{(e\mathcal{E})^2}{8\pi^3} e^{-\frac{\pi m^2}{e\mathcal{E}}}. \quad (3.77)$$

É interessante destacar o resultado para campos fracos, pois para campos fortes era esperado a criação de pares. Entretanto, mesmo em baixos valores de campo, ainda existe uma probabilidade de criação mesmo que pequena. O valor de campo para que seja significativa a criação de pares é de aproximadamente $\mathcal{E} = 10^{14}V/cm$ (DITTRICH; REUTER, 1985).

Com isso conclui-se a apresentação dos detalhes para determinar a Lagrangeana efetiva para o caso especial de apenas um dos dois campos. Ademais, será feito a seguir o processo análogo para o caso de um campo eletromagnético geral.

3.3 Ação Efetiva Para o Campo Eletromagnético

A análise para o caso geral seguirá os mesmos passos anteriores, portanto será apresentado somente as partes relevantes a fim de evitar repetições. A Lagrangiana efetiva na presença de um campo eletromagnético de fundo na representação de tempo próprio é dada por

$$\mathcal{L}^{(1)}(\mathcal{F}^{\mu\sigma}) = \frac{i}{2} \int_0^\infty \frac{ds}{s} e^{-ism^2} \text{tr} \left(e^{is\frac{e}{2}\sigma_{\mu\sigma}\mathcal{F}^{\mu\sigma}} \langle x | e^{-is\Pi^2} | x \rangle \right). \quad (3.78)$$

Basicamente possui a mesma forma para o caso do campo magnético puro Eq. (3.50). A informação de que se está lidando com um campo completo aparece no elemento de matriz que agora é diferente, pois não pode-se separá-lo em componentes “paralelas” e “perpendiculares”. Isto é, não é possível escrever Eq. (3.36) na forma simplificada Eq. (3.44). Na forma geral,

tem-se que

$$\langle x | e^{-is\Pi^2} | x \rangle = e^{-\frac{1}{2}tr \ln \cos(ie\mathcal{F}s)} \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} e^{-k(e\mathcal{F})^{-1} \tan(ie\mathcal{F}s)k}. \quad (3.79)$$

Resolvendo a integral Gaussiana, chega-se a

$$\langle x | e^{-is\Pi^2} | x \rangle = -\frac{i}{(4\pi s)^2} e^{-\frac{1}{2}tr \ln \frac{\sinh(e\mathcal{F}s)}{e\mathcal{F}s}}. \quad (3.80)$$

Substituindo agora Eq. (3.80) em Eq. (3.78)

$$\mathcal{L}^{(1)}(\mathcal{F}^{\mu\sigma}) = \frac{1}{32\pi^2} \int_0^\infty \frac{ds}{s^3} e^{-ism^2} \left(e^{-\frac{1}{2}tr \ln \frac{\sinh(e\mathcal{F}s)}{e\mathcal{F}s}} \right) tr \left[e^{is\frac{e}{2}\sigma_{\mu\sigma}\mathcal{F}^{\mu\sigma}} \right]. \quad (3.81)$$

O próximo passo é calcular o traço dos operadores presentes em Eq. (3.81). Para calcular o traço desses operadores é necessário encontrar os autovalores dos argumentos das exponenciais, pois o traço independe da base, ou seja $tr(\mathcal{U}\mathcal{A}\mathcal{U}^\dagger) = tr(\mathcal{A})$. Assim o problema se resume a somar os respectivos autovalores. Então, trabalha-se primeiramente o termo $\sigma_{\mu\sigma}\mathcal{F}^{\mu\sigma}$, notando que

$$\begin{aligned} (\sigma_{\mu\sigma}\mathcal{F}^{\mu\sigma})^2 &= \sigma_{\mu\sigma}\sigma_{\kappa\lambda}\mathcal{F}^{\mu\sigma}\mathcal{F}^{\kappa\lambda} = \frac{1}{2}\{\sigma_{\mu\sigma}, \sigma_{\kappa\lambda}\}\mathcal{F}^{\mu\sigma}\mathcal{F}^{\kappa\lambda} \\ \Rightarrow \sigma_{\mu\sigma}\mathcal{F}^{\mu\sigma} &= \pm \left(\frac{1}{2}\{\sigma_{\mu\sigma}, \sigma_{\kappa\lambda}\}\mathcal{F}^{\mu\sigma}\mathcal{F}^{\kappa\lambda} \right)^{\frac{1}{2}}. \end{aligned} \quad (3.82)$$

Utilizando a propriedade 11 das matrizes γ_μ listada no Apêndice C, o anticomutador em Eq. (3.82) pode ser escrito da seguinte maneira

$$\{\sigma_{\mu\sigma}, \sigma_{\kappa\lambda}\} = 2(\eta_{\sigma\kappa}\eta_{\mu\lambda} - \eta_{\sigma\lambda}\eta_{\mu\kappa} + i\varepsilon_{\mu\sigma\kappa\lambda}\gamma_5). \quad (3.83)$$

Logo, substituindo Eq. (3.83) em Eq. (3.82):

$$\sigma_{\mu\sigma}\mathcal{F}^{\mu\sigma} = \pm \left[2 \left(\mathcal{F}_\lambda^\sigma \mathcal{F}_\sigma^\lambda + i\gamma_5 \mathcal{F}^{\mu\sigma} \mathcal{G}_{\mu\sigma} \right) \right]^{\frac{1}{2}}. \quad (3.84)$$

No qual $\mathcal{G}_{\mu\sigma} = \frac{1}{2}\varepsilon_{\mu\sigma\kappa\lambda}\mathcal{F}^{\kappa\lambda}$ é o dual do tensor eletromagnético. Portanto,

$$\frac{1}{2}\sigma_{\mu\sigma}\mathcal{F}^{\mu\sigma} = \pm [2(\mathcal{Y} + i\gamma_5\mathcal{R})]^{\frac{1}{2}}, \quad (3.85)$$

onde $\mathcal{R} = \frac{1}{4} \mathcal{F}^{\mu\sigma} \mathcal{G}_{\mu\sigma} = \mathcal{E} \cdot \mathcal{B}$ e $\mathcal{Y} = \frac{1}{4} \mathcal{F}^{\lambda\sigma} \mathcal{F}_{\sigma\lambda} = \frac{1}{2} (\mathcal{E}^2 - \mathcal{B}^2)$, são os invariantes de Lorentz relacionados com o tensor eletromagnético e seu dual. Os autovalores da matriz γ_5 podem ser encontrados facilmente utilizando

$$\det[\gamma_5 - \lambda 1] = 0, \quad (3.86)$$

e são $\lambda = \pm 1$. Portanto os quatro autovalores do primeiro operador de interesse são

$$\left(\frac{1}{2} \sigma_{\mu\sigma} \mathcal{F}^{\mu\sigma} \right)^{AV} = \pm [2(\mathcal{Y} \pm i\mathcal{R})]^{\frac{1}{2}}, \quad (3.87)$$

onde a notação AV significa que são os autovalores. Com isso tem-se quatro autovalores, e o primeiro cálculo de traço possui como resultado

$$\text{tr} \left(e^{is\frac{e}{2} \sigma_{\mu\sigma} \mathcal{F}^{\mu\sigma}} \right) = 2 \cos \left\{ se [2(\mathcal{Y} + i\mathcal{R})]^{\frac{1}{2}} \right\} + 2 \cos \left\{ se [2(\mathcal{Y} - i\mathcal{R})]^{\frac{1}{2}} \right\}. \quad (3.88)$$

Aqui se mostra interessante reescrever esta equação em termos de novos invariantes definidos como

$$a = \left(\sqrt{\mathcal{Y}^2 + \mathcal{R}^2} + \mathcal{Y} \right)^{\frac{1}{2}} \quad \text{e} \quad b = \left(\sqrt{\mathcal{Y}^2 + \mathcal{R}^2} - \mathcal{Y} \right)^{\frac{1}{2}}, \quad (3.89)$$

tal que os antigos invariantes são expressos em termos destes novos da seguinte forma

$$|\mathcal{R}| = ab \quad , \quad \mathcal{Y} = \frac{1}{2} (a^2 - b^2). \quad (3.90)$$

Com estas novas definições a Eq. (3.88) pode ser reescrita como

$$\text{tr} \left(e^{is\frac{e}{2} \sigma_{\mu\sigma} \mathcal{F}^{\mu\sigma}} \right) = 4 \cos(esa) \cosh(esb). \quad (3.91)$$

O próximo passo é encontrar os autovalores do termo $\ln \frac{\sinh(e\mathcal{F}s)}{e\mathcal{F}s}$ em Eq. (3.81), que pode ser efetuado ao determinar os autovalores de $\mathcal{F}^{\mu\sigma}$. Para isto faz-se uso das seguintes identidades:

$$\begin{cases} \mathcal{F}^{\mu\lambda} \mathcal{G}_{\lambda\sigma} = -\delta_{\sigma}^{\mu} \mathcal{R} \\ \mathcal{G}_{\mu\lambda} \mathcal{G}^{\lambda\sigma} - \mathcal{F}_{\mu\lambda} \mathcal{F}^{\lambda\sigma} = 2\delta_{\mu}^{\sigma} \mathcal{Y} \end{cases}. \quad (3.92)$$

Estas identidades podem ser verificadas fixando-se os índices espaço-temporais livres. Da primeira identidade em Eq. (3.92) pode-se tirar o autovalor do tensor dual

$$\mathcal{G}^{\mu\sigma}\Psi_{\sigma} = -\frac{\mathcal{R}}{\mathcal{F}^{AV}}\Psi^{\mu}. \quad (3.93)$$

onde \mathcal{F}^{AV} é o autovalor do tensor eletromagnético

$$\mathcal{F}^{\mu\sigma}\Psi_{\sigma} = \mathcal{F}^{AV}\Psi^{\mu}. \quad (3.94)$$

Com isso, atuando a segunda identidade em Eq. (3.92) numa autofunção arbitrária encontra-se a seguinte equação do segundo grau em função do autovalor do tensor eletromagnético,

$$\left(\mathcal{F}^{AV}\right)^4 + 2\mathcal{Y}\left(\mathcal{F}^{AV}\right)^2 - \mathcal{R}^2 = 0. \quad (3.95)$$

As raízes que satisfazem a Eq. (3.95) são

$$\mathcal{F}^{AV} = \pm \left(-\mathcal{Y} \pm \sqrt{\mathcal{Y}^2 + \mathcal{R}^2}\right)^{\frac{1}{2}}. \quad (3.96)$$

Portanto, com o resultado (3.96) pode-se proceder e calcular o $tr\left(\ln\frac{\sinh(e\mathcal{F}s)}{e\mathcal{F}s}\right)$. Utilizando também a notação dos novos invariantes a e b definidos na Eq. (3.89) o resultado para o operador em questão é

$$\exp\left[-\frac{1}{2}tr\ln\frac{\sinh(e\mathcal{F}s)}{e\mathcal{F}s}\right] = \left[\frac{(es)^2 ab}{\sinh(ebs)\sin(eas)}\right], \quad (3.97)$$

onde os quatro autovalores foram somados.

Por fim, com os resultados Eq. (3.91) e Eq. (3.97), a Lagrangeana efetiva Eq. (3.81) pode ser escrita explicitamente como

$$\begin{aligned} \mathcal{L}^{(1)}(\mathcal{F}^{\mu\sigma}) &= \frac{1}{8\pi^2} \int_0^{\infty} \frac{ds}{s^3} e^{-ism^2} (es)^2 |\mathcal{R}| \cot \left[es \left(\sqrt{\mathcal{Y}^2 + \mathcal{R}^2} + \mathcal{Y} \right)^{\frac{1}{2}} \right] \\ &\quad \times \coth \left[es \left(\sqrt{\mathcal{Y}^2 + \mathcal{R}^2} - \mathcal{Y} \right)^{\frac{1}{2}} \right]. \end{aligned} \quad (3.98)$$

Da mesma forma como foi feito para o caso de um campo magnético puro, é necessário testar os limites em que não há campo e no limite em que s vai para zero, afim de ter uma função bem comportada. Primeiramente, no limite em que $a, b \rightarrow 0$, que significa ausência de campo,

tem-se

$$\begin{aligned}\lim_{a,b \rightarrow 0} \mathcal{L}^{(1)}(\mathcal{F}^{\mu\sigma}) &= \lim_{a,b \rightarrow 0} \frac{1}{8\pi^2} \int_0^\infty \frac{ds}{s^3} e^{-ism^2} (es)^2 ab \cot(esa) \coth(esb) \\ &= \frac{1}{8\pi^2} \int_0^\infty \frac{ds}{s^3} e^{-ism^2}.\end{aligned}\quad (3.99)$$

Como esperado, a forma Eq. (3.98) da Lagrangeana ainda não se anula na ausência de campo, o que implica que os efeitos não lineares não desaparecem também. Para corrigir isso se introduz um termo, novamente, tal que a expressão tenha o comportamento esperado. Este consiste no primeiro passo da “normalização” da Lagrangeana efetiva, portanto tem-se

$$\mathcal{L}^{(1)}(\mathcal{F}^{\mu\sigma}) = \frac{1}{8\pi^2} \int_0^\infty \frac{ds}{s^3} e^{-ism^2} \left[(es)^2 ab \cot(esa) \coth(esb) - 1 \right]. \quad (3.100)$$

O próximo limite a ser testado é o de $s \rightarrow 0$. Assim,

$$\begin{aligned}\lim_{s \rightarrow 0} \mathcal{L}^{(1)}(\mathcal{F}^{\mu\sigma}) &= \lim_{s \rightarrow 0} \frac{1}{8\pi^2} \int_0^\infty \frac{ds}{s^3} e^{-ism^2} \left[(es)^2 ab \cot(esa) \coth(esb) - 1 \right] \\ &= \lim_{s \rightarrow 0} \frac{1}{8\pi^2} \int_0^\infty ds e^{-ism^2} \left[-\frac{2e^2}{3s} \mathcal{Y} - \dots \right].\end{aligned}\quad (3.101)$$

Para lidar com o termo divergente de maneira apropriada, é necessário proceder com a renormalização dos parâmetros físicos $(\mathcal{Y}, \mathcal{R})$ e e . Escrevendo a Lagrangeana completa

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_R(\mathcal{F}^{\mu\sigma}) &= \mathcal{L}_R^{(0)} + \mathcal{L}_R^{(1)} \\ &= -\mathcal{Y} + \frac{1}{8\pi^2} \int_0^\infty \frac{ds}{s^3} e^{-ism^2} \left\{ (es)^2 |\mathcal{R}| \cot \left[es \left(\sqrt{\mathcal{Y}^2 + \mathcal{R}^2} + \mathcal{Y} \right)^{\frac{1}{2}} \right] \right. \\ &\quad \left. \times \coth \left[es \left(\sqrt{\mathcal{Y}^2 + \mathcal{R}^2} - \mathcal{Y} \right)^{\frac{1}{2}} \right] - 1 \right\}.\end{aligned}\quad (3.102)$$

Novamente adicionando e subtraindo o termo divergente, tem-se

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_R(\mathcal{F}^{\mu\sigma}) &= -\mathcal{Y}_0 \mathcal{L}_3^{-1} + \frac{1}{8\pi^2} \int_0^\infty \frac{ds}{s^3} e^{-ism^2} \left\{ (e_0s)^2 |\mathcal{R}_0| \cot \left[e_0s \left(\sqrt{\mathcal{Y}_0^2 + \mathcal{R}_0^2} + \mathcal{Y}_0 \right)^{\frac{1}{2}} \right] \right. \\ &\quad \left. \times \coth \left[e_0s \left(\sqrt{\mathcal{Y}_0^2 + \mathcal{R}_0^2} - \mathcal{Y}_0 \right)^{\frac{1}{2}} \right] + \frac{2e_0^2 s^2}{3} \mathcal{Y}_0 - 1 \right\},\end{aligned}\quad (3.103)$$

onde a constante de renormalização é escrita como

$$\mathcal{L}_3^{-1} = \left(1 + \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e_0^2}{12\pi^2} \int_x^\infty \frac{ds}{s} e^{-ism^2} \right) \quad (3.104)$$

e como pode-se notar ela não muda em comparação com a Eq.(3.62). Definindo $e = \mathcal{L}_3^{\frac{1}{2}} e_0$, $(\mathcal{Y}, \mathcal{R}) = \mathcal{L}_3^{-1} (\mathcal{Y}_0, \mathcal{R}_0)$ e $(\mathcal{B}, \mathcal{E}) = \mathcal{L}_3^{-\frac{1}{2}} (\mathcal{B}_0, \mathcal{E}_0)$, então os produtos $e_0^2 (\mathcal{Y}_0, \mathcal{R}_0) = e^2 (\mathcal{Y}, \mathcal{R})$, se mantêm inalterados por esta redefinição nos parâmetros físicos. Com isso a Lagrangeana renormalizada é escrita como

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_R(\mathcal{F}^{\mu\sigma}) = & -\mathcal{Y} + \frac{1}{8\pi^2} \int_0^\infty \frac{ds}{s^3} e^{-ism^2} \left\{ (es)^2 |\mathcal{R}| \cot \left[es \left(\sqrt{\mathcal{Y}^2 + \mathcal{R}^2} + \mathcal{Y} \right)^{\frac{1}{2}} \right] \right. \\ & \left. \times \coth \left[es \left(\sqrt{\mathcal{Y}^2 + \mathcal{R}^2} - \mathcal{Y} \right)^{\frac{1}{2}} \right] + \frac{2e^2 s^2}{3} \mathcal{Y} - 1 \right\}. \end{aligned} \quad (3.105)$$

Este resultado está de acordo com o teorema de Furry (invariância por conjugação de carga da QED) que prevê que diagramas de Feynman com um número ímpar de pernas de fótons externas são nulos.

No limite de campos fracos, ou seja tomar a menor ordem de expansão da carga elétrica nas funções cotangente e cotangente hiperbólica, a integral pode ser resolvida e possui como resultado a seguinte expressão

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_R(\mathcal{F}^{\mu\sigma}) = & -\mathcal{Y} + \frac{2\alpha^2}{45m^4} \left[(-2\mathcal{Y})^2 + 7\mathcal{R}^2 \right] \\ = & -\frac{1}{2} (\mathcal{E}^2 - \mathcal{B}^2) + \frac{2\alpha^2}{45m^4} \left[(\mathcal{B}^2 - \mathcal{E}^2)^2 + 7(\mathcal{E} \cdot \mathcal{B})^2 \right], \end{aligned} \quad (3.106)$$

conhecida como a Lagrangeana efetiva de Euler-Heisenberg (HEISENBERG; EULER, 2006). A fim de ilustração dos termos que alteram a dinâmica do campo eletromagnético incluindo os efeitos não lineares e a polarização do vácuo, apresentamos a equação de movimento relacionada com esta Lagrangeana

$$\partial_\alpha \left(\mathcal{F}^{\alpha\beta} - \frac{16\alpha^2}{45m^4} \mathcal{F}^{\alpha\beta} \mathcal{Y} - \frac{28\alpha^2}{45m^4} \widetilde{\mathcal{F}}^{\alpha\beta} \mathcal{R} \right) = 0. \quad (3.107)$$

em que podemos identificar $J^\beta = \frac{4\alpha^2}{45m^4} \partial_\alpha \left(4\mathcal{F}^{\alpha\beta} \mathcal{Y} + 7\widetilde{\mathcal{F}}^{\alpha\beta} \mathcal{R} \right)$ como a corrente da auto-interação neste contexto, tal que tenhamos a equação de Maxwell generalizada $\partial_\alpha \mathcal{F}^{\alpha\beta} = J^\beta$. Ou seja, mesmo na ausência das correntes usuais (fontes de carga e/ou corrente) que apare-

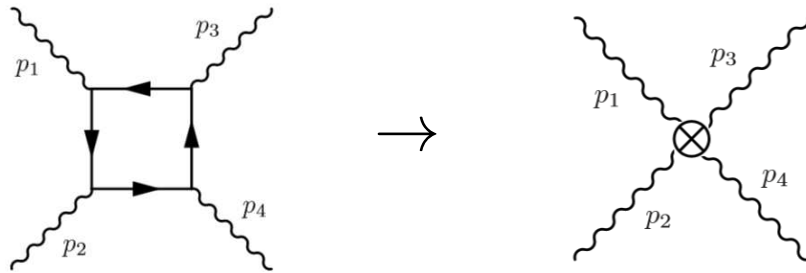
cem do lado direito das equações de Maxwell, temos no vácuo uma auto-interação do campo eletromagnético.

Vale a pena mencionar que a motivação original de Heisenberg e Euler era calcular a razão em que fótons sofrem espalhamento por eles mesmos, ou seja espalhamento fóton-fóton. Uma maneira alternativa ao método não-perturbativo apresentado anteriormente para determinar a Lagrangeana efetiva de Euler-Heisenberg é calcular a seguinte matriz do espalhamento fóton-fóton em nível de 1-loop

$$\begin{aligned} \Pi^{\mu\nu\rho\sigma}(p_1, p_2, p_3, p_4) = -e^4 \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \text{tr} \left[\gamma^\mu \frac{(\gamma \cdot k + m)}{k^2 - m^2} \gamma^\nu \frac{(\gamma \cdot (k + p_1) + m)}{(k + p_1)^2 - m^2} \right. \\ \left. \times \gamma^\rho \frac{(\gamma \cdot (k + p_1 + p_2) + m)}{(k + p_1 + p_2)^2 - m^2} \gamma^\sigma \frac{(\gamma \cdot (k - p_3) + m)}{(k - p_3)^2 - m^2} \right] \end{aligned} \quad (3.108)$$

onde a conservação do momento $p_1 + p_2 + p_3 + p_4 = 0$ é aplicada. Este elemento de matriz corresponde ao diagrama de Feynman à esquerda na Fig. 3.1, sendo que o diagrama em nível de árvore corresponde justamente à interação efetiva entre fótons ditada pela Lagrangeana de Euler-Heisenberg. Experimentos realizados no PVLAS (Polarization of the Vacuum with LASer) Experiment apresentam resultados promissores na medida da seção de choque do espalhamento fóton-fóton e novos limites para a birrefringência do vácuo, alguns destes resultados podem ser encontrados em (VALLE et al., 2016). Ademais, evidências do espalhamento fóton-fóton como na Fig. 3.1 foram encontradas no experimento ATLAS em colisões de Pb+Pb (COLLABORATION et al., 2017).

Figura 3.1 – O diagrama à esquerda representa o espalhamento fóton-fóton em qualquer escala de energia enquanto que o da direita corresponde à uma aproximação efetiva do mesmo em escalas de baixas energias quando comparadas com a massa do elétron.



Fonte: (SCHWARTZ, 2014).

A Lagrangeana efetiva de EH pode ser utilizada para a descrição de diversos fenômenos não lineares da QED, um exemplo disso é a criação de pares E-P no vácuo devido a um campo eletromagnético externo como discutido na Seção 3.2, vale ressaltar também que a criação de pares também pode ser feita com o campo de variação lenta⁵. Esta criação de pares de partículas e antipartículas também foi observada recentemente nos arredores de uma INS (MIGNANI et al., 2017). Ademais, pode-se também utilizar a Lagrangeana de EH no estudo de espalhamento e fusão de fótons submersos em um campo eletromagnético não homogêneo externo, como feito por (GIES; KARBSTEIN; SEEGERT, 2016). A Lagrangeana Eq. (3.106) ainda é utilizada no estudo de processos de espalhamento fóton-fóton, para levar em consideração as contribuições de 1-loop da QED, na aproximação de baixas energias dentro da teoria de Born-Infeld (DÁVILA; SCHUBERT; TREJO, 2014). Portanto, existe uma gama de possibilidades de aplicação desta Lagrangeana na descrição de fenômenos não lineares da QED.

⁵ São campos cujas variações sobre o comprimento de onda de Compton do elétron ($\lambda = 3.9 \times 10^{-11} \text{ cm}$) e sobre o seu respectivo período ($T = \frac{\lambda}{c}$) são muito menores que o campo em si.

4 AÇÃO EFETIVA E VÁCUO QUÂNTICO: APLICAÇÕES

Neste Capítulo será discutido algumas aplicações do formalismo de ação efetiva. Além de representar correções quânticas em diversos contextos, a abordagem de ação efetiva serve para a investigação de outros tipos de fenômenos dentro da Física teórica, como por exemplo ação efetiva à temperatura finita para um gás de férmions ou ainda para deduzir a força de Casimir.¹ Por fim, também será visto que o método de ação efetiva para QED (2 + 1) é uma ferramenta poderosa para o cálculo do termo de Chern-Simons.

4.1 Ação Efetiva à Temperatura Finita

Para derivar os efeitos de temperatura em um gás de férmions, será levado em conta a interação do mesmo com o campo eletromagnético externo para que se possa utilizar o formalismo de ação efetiva. Durante o processo, será tomado o limite de campo nulo de modo que, ao final, somente os efeitos de temperatura no gás sejam contabilizados. O ponto de partida é a expressão (3.6) para a ação efetiva

$$iW[A]^{(1)} = -Tr \ln G_+[A] = -\ln \det G_+[A], \quad (4.1)$$

onde o fator de normalização $G_+[0]$ está implícito. Porém a definição usual do determinante de um operador arbitrário A , como o produto de seus autovalores, é ineficiente para este caso, dado que essa produtória diverge. Para contornar este problema será utilizado uma generalização da definição do determinante a partir de algumas considerações, conhecida como regularização zeta. Primeiro considere um operador A que possui autovalores discretos, i.e. $A\Psi_n(x) = a_n\Psi_n(x)$, e a partir desta equação define-se a função ζ associada a este operador

$$\zeta_A(s) = \sum_n a_n^{-s} = \sum_n e^{-s \ln a_n}. \quad (4.2)$$

Derivando Eq. (4.2) com relação ao parâmetro s e depois fazendo $s = 0$ tem-se

$$\partial_{(s)} \zeta_A(0) = \partial_{(s)} \sum_n e^{-s \ln a_n} \Big|_{s=0} = -\ln \left(\prod_n a_n \right). \quad (4.3)$$

¹ Embora o cálculo de efeitos de térmicos para um gás de férmions livres e do efeito de Casimir não envolverem a presença de um campo externo, procuramos com esta análise introduzir técnicas de cálculo e também ilustrar efeitos do vácuo quântico.

Dessa forma, a generalização do determinante em termos da função $\zeta_A(0)$ é escrita como

$$\det A = e^{-\partial_{(s)} \zeta_A(0)}. \quad (4.4)$$

A grande vantagem de se utilizar esta definição de determinante é que a operação $\partial_{(s)} \zeta_A(0)$ não é singular para a maioria dos operadores A de interesse físico. Primeiramente, no caso do propagador fermiônico, tem-se que

$$iW[A]^{(1)} = -\ln \det G_+[A] = \ln \det [\gamma^\mu \Pi_\mu + m], \quad (4.5)$$

onde o fator $i\varepsilon$ foi omitido. Porém, pode-se trabalhar o operador de Dirac numa forma conveniente a partir da seguinte manipulação

$$\begin{aligned} Tr \ln (m + \gamma^\mu \Pi_\mu) + Tr \ln (m - \gamma^\mu \Pi_\mu) &= Tr \ln [m^2 - (\gamma^\mu \Pi_\mu)^2] \\ &= Tr \ln [(m^2 + \Pi^2) \mathbf{1} - e\sigma^3 \mathcal{B}_z], \end{aligned} \quad (4.6)$$

em que foi usado a identidade $(\gamma \cdot \Pi)^2 = -\Pi^2 + \frac{e}{2} \sigma_{\mu\sigma} \mathcal{F}^{\mu\sigma}$ com a escolha de somente um campo magnético $\vec{\mathcal{B}} = \mathcal{B}_z \hat{k}$. Agora, denotando separadamente a operação traço com relação ao espaço spinorial como tr_γ da com relação ao espaço das coordenadas como tr_x , tem-se que

$$Tr \ln (m + \gamma^\mu \Pi_\mu) + Tr \ln (m - \gamma^\mu \Pi_\mu) = tr_\gamma tr_x \ln [(m^2 + \Pi^2) \mathbf{1} - e\sigma^3 \mathcal{B}_z] \quad (4.7)$$

e calculando a operação traço sobre as matrizes 4×4 , segue consequentemente

$$Tr \ln (m + \gamma^\mu \Pi_\mu) + Tr \ln (m - \gamma^\mu \Pi_\mu) = 2tr_x [\ln (m^2 + \Pi^2 + e\mathcal{B}_z) + \ln (m^2 + \Pi^2 - e\mathcal{B}_z)], \quad (4.8)$$

porém $Tr \ln (m \pm \gamma^\mu \Pi_\mu)$ é um escalar de Lorentz, assim os dois termos à esquerda da Eq. (4.8) se somam resultando em

$$Tr \ln (m + \gamma^\mu \Pi_\mu) = tr_x [\ln (m^2 + \Pi^2 + e\mathcal{B}_z) + \ln (m^2 + \Pi^2 - e\mathcal{B}_z)]. \quad (4.9)$$

Por fim, substituindo a Eq. (4.9) em Eq. (4.5), escreve-se

$$iW[A]^{(1)} = \ln \det_x (m^2 + \Pi^2 + e\mathcal{B}_z) + \ln \det_x (m^2 + \Pi^2 - e\mathcal{B}_z). \quad (4.10)$$

Aqui encontra-se um problema, a ação por definição é uma quantidade adimensional, e no lado direito de Eq. (4.10) tem dimensão de (massa)². Assim é necessário introduzir um parâmetro arbitrário μ com dimensão de massa,

$$iW[A]^{(1)} = \ln \det_x \mu^{-2} (m^2 + \Pi^2 + e\mathcal{B}_z) + \ln \det_x \mu^{-2} (m^2 + \Pi^2 - e\mathcal{B}_z). \quad (4.11)$$

Utilizando a definição da Eq. (4.4) a expressão acima pode ser escrita como

$$iW[A]^{(1)} = -\partial_{(s)} \zeta_2(0), \quad (4.12)$$

onde definiu-se

$$\zeta_2(0) = \zeta_{\mu^{-2}(m^2 + \Pi^2 + e\mathcal{B}_z)}(0) + \zeta_{\mu^{-2}(m^2 + \Pi^2 - e\mathcal{B}_z)}(0).$$

Para calcular a ação efetiva a partir de (4.12) é necessário obter uma expressão fechada para função $\zeta_2(0)$, o que de fato implica em determinar o espectro do operador

$$M^2 \equiv m^2 + \Pi^2 = m^2 + \partial_{(t)}^2 - \partial_{(3)}^2 - (\vec{p} - e\vec{A})^2. \quad (4.13)$$

O espectro do operador $(\vec{p} - e\vec{A})^2$ é conhecido da mecânica quântica (a partir do cálculo dos níveis de Landau (GREINER, 2011))

$$E_n = e\mathcal{B} \left(n + \frac{1}{2} \right). \quad (4.14)$$

Antes de prosseguir, com o propósito de introduzir efeitos de temperatura será feito uma rotação de Wick de modo que M^2 esteja definido no espaço Euclideano. Como será discutido abaixo, isso permite que o tempo assumira valores imaginários, possibilitando substituir o inverso da temperatura com o tempo imaginário postulando condições de contorno antiperiódicas para os férmions (ABRIKOSOV; GORKOV; DZHALOSHINSKI, 2012). Para isto faz-se $t \rightarrow \tau = it$,

$$M_E^2 = m^2 - \partial_{(\tau)}^2 - \partial_{(3)}^2 - (\vec{p} - e\vec{A})^2. \quad (4.15)$$

Com esta mudança pode-se agora considerar que os campos estão normalizados em um volume $\Omega_{(4)} = L^4$ e, assim, o operador $(-\partial_{(t)}^2 - \partial_{(3)}^2)$ pode ser aproximado por ondas planas com autovalores $(k_0^2 + k_3^2)$. Outro importante ponto é de que somente no limite de campo magnético nulo é possível obter uma expressão fechada para a função ζ , esta condição também é satisfatória pois quer-se ilustrar efeitos de temperatura no formalismo de ação efetiva. Com essas considerações, a Eq. (4.15) é escrita com

$$M_E^2 = m^2 + k_0^2 + k_1^2 + k_2^2 + k_3^2. \quad (4.16)$$

Com este espectro pode-se finalmente escrever a função $\zeta_2(s)$ simplificada

$$\zeta_{2,\mathcal{B}=0}(s) = 2\mu^{2s}\Omega_{(4)} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d^4 k_E}{(2\pi)^4} [m^2 + k_0^2 + k_1^2 + k_2^2 + k_3^2]^{-s} \quad (4.17)$$

e prosseguir com o objetivo de calculá-la explicitamente.

Com o intuito de levar em conta efeitos de temperatura em $\zeta_{2,\mathcal{B}=0}(s)$ para um gás de férmions, deve-se lembrar que os férmions satisfazem a estatística de Fermi-Dirac e para manter esta característica intrínseca a temperatura é introduzida de tal forma a preservar o caráter antiperiódico de funções fermiônicas. O método mais claro para introduzir temperatura é a partir do formalismo de Matsubara (ABRIKOSOV; GORKOV; DZIALOSHINSKI, 2012), que consiste na seguinte identificação

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dk_0}{2\pi} f(k_0^2) \rightarrow \frac{1}{\beta} \sum_{l=0}^{\infty} f\left(\left[\frac{\pi}{\beta}\{2l+1\}\right]^2\right), \quad (4.18)$$

em que a prescrição de Matsubara para férmions (frequências antiperiódicas) é usada $k_0 = \omega_l = \frac{\pi}{\beta}\{2l+1\}$, note que $\beta = \frac{1}{k_B T}$, em que k_B é a constante de Boltzman. Por fim, tem-se que a Eq. (4.17) fica

$$\zeta_{2,\mathcal{B}=0}^\beta(s) = 2\mu^{2s}\Omega_{(3)} \frac{1}{\beta} \sum_{l=0}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dk_1 dk_2 dk_3}{(2\pi)^3} \left[m^2 + \left(\frac{\pi}{\beta}\{2l+1\}\right)^2 + k_1^2 + k_2^2 + k_3^2 \right]^{-s}, \quad (4.19)$$

note que o fator de normalização quadri-dimensional foi substituído por $\Omega_{(3)}$, pois agora uma das dimensões dos momentos foi transformada em uma função antiperiódica na temperatura. Utilizando coordenadas esféricas, $d^3 k = dk_1 dk_2 dk_3 = k^2 \sin\theta dk d\theta d\phi$, Eq. (4.19) é reduzida

para

$$\zeta_{2,\mathcal{B}=0}^{\beta}(s) = 2\mu^{2s}\Omega_{(3)} \frac{4\pi}{(2\pi)^3} \frac{1}{\beta} \sum_{l=0}^{\infty} \int_0^{\infty} dk k^2 \left[m^2 + \left(\frac{\pi}{\beta} \{2l+1\} \right)^2 + k^2 \right]^{-s}. \quad (4.20)$$

Em seguida, fazendo a seguinte mudança de variável $\frac{k}{\sqrt{\Delta}} \rightarrow x$, onde $\Delta = m^2 + \left(\frac{\pi}{\beta} \{2l+1\} \right)^2$, tem-se

$$\zeta_{2,\mathcal{B}=0}^{\beta}(s) = \frac{\mu^{2s}\Omega_{(3)}}{\pi^2} \frac{1}{\beta} \sum_{l=0}^{\infty} \left[m^2 + \left(\frac{\pi}{\beta} \{2l+1\} \right)^2 \right]^{\frac{3}{2}-s} \int_0^{\infty} dx x^2 [1+x^2]^{-s}. \quad (4.21)$$

Para resolver a integração final na variável x , é interessante recordar do resultado (GRADSH-TEYN; RYZHIK, 2014)

$$\int_0^{\infty} dx x^{\mu-1} (1+x^2)^{\nu-1} = \frac{1}{2} B\left(\frac{\mu}{2}, 1-\nu-\frac{\mu}{2}\right), \quad (4.22)$$

onde $B\left(\frac{\mu}{2}, 1-\nu-\frac{\mu}{2}\right)$ é a função beta de Euler, também representada por

$$B(x,y) = \frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)}. \quad (4.23)$$

Portanto, com o auxílio do resultado Eq. (4.22), encontra-se que

$$\zeta_{2,\mathcal{B}=0}^{\beta}(s) = \frac{\mu^{2s}\Omega_{(3)}}{2\pi^2} \frac{1}{\beta} \sum_{l=0}^{\infty} \left[m^2 + \left(\frac{\pi}{\beta} \{2l+1\} \right)^2 \right]^{\frac{3}{2}-s} B\left(\frac{3}{2}, s-\frac{3}{2}\right), \quad (4.24)$$

ou, ainda, em termos das funções $\Gamma(x)$, tem-se

$$\zeta_{2,\mathcal{B}=0}^{\beta}(s) = \frac{\mu^{2s}\Omega_{(3)}}{2\pi^2} \frac{1}{\beta} \sum_{l=0}^{\infty} \left[m^2 + \left(\frac{\pi}{\beta} \{2l+1\} \right)^2 \right]^{\frac{3}{2}-s} \frac{\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)\Gamma\left(s-\frac{3}{2}\right)}{\Gamma(s)}. \quad (4.25)$$

Embora seja possível determinar uma expressão perturbativa no parâmetro de massa m^2 , preferiu-se preservar o caráter não-perturbativo da solução da somatório em Eq. (4.25), então será tomado o limite de massa nula e obter o resultado para QED não-massiva. Logo, segue a seguinte expressão

$$\zeta_{2,m=\mathcal{B}=0}^{\beta}(s) = \frac{\mu^{2s}\Omega_{(3)}}{2\pi^2} \left(\frac{2\pi}{\beta} \right)^{3-2s} \frac{1}{\beta} \sum_{l=0}^{\infty} \left(l + \frac{1}{2} \right)^{3-2s} \frac{\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)\Gamma\left(s-\frac{3}{2}\right)}{\Gamma(s)}. \quad (4.26)$$

Ao se fazer uso da função Zeta de dois argumentos

$$\zeta(z, p) = \sum_{n=0}^{\infty} (n+p)^{-z}, \quad (4.27)$$

pode-se agora reescrever a equação acima em termos de

$$\zeta_{2,m=\mathcal{B}=0}^{\beta}(s) = \frac{\mu^{2s} \Omega_{(3)}}{2\pi^2} \frac{1}{\beta} \left(\frac{2\pi}{\beta} \right)^{3-2s} \zeta \left(2s-3, \frac{1}{2} \right) \frac{\Gamma\left(\frac{3}{2}\right) \Gamma\left(s-\frac{3}{2}\right)}{\Gamma(s)}. \quad (4.28)$$

Com isto fora obtido uma expressão fechada para a função ζ_2 no limite de campo e massa nula, que contém efeitos de temperatura para um gás de férmions. Em seguida, ao se fazer uso das definições (3.8) e (4.12), segue que a Lagrangeana efetiva é escrita como

$$\mathcal{L}_{m=\mathcal{B}=0}^{(1)}(\beta) = -\Omega_{(3)}^{-1} \partial_{(s)} \zeta_{2,m=\mathcal{B}=0}^{\beta}(0). \quad (4.29)$$

Substituindo então o resultado (4.28) na Eq. (4.29) tem-se

$$\mathcal{L}_{m=\mathcal{B}=0}^{(1)}(\beta) = \frac{1}{2\pi^2 \beta} \left(\frac{2\pi}{\beta} \right)^3 \zeta \left(-3, \frac{1}{2} \right) \Gamma\left(\frac{3}{2}\right) \Gamma\left(-\frac{3}{2}\right) \partial_{(s)} \left[\frac{1}{\Gamma(s)} \right]_{s=0}, \quad (4.30)$$

onde foi utilizado que $\frac{1}{\Gamma(0)} = 0$. Além disso se faz necessário analisar a derivada da função gamma recíproca, $\frac{1}{\Gamma(s)}$, aplicada em $s \rightarrow 0$

$$\partial_{(s)} \left[\frac{1}{\Gamma(s)} \right]_{s=0} = \partial_{(s)} \left[s + \gamma s^2 + \left(\frac{\gamma^2}{2} - \frac{\pi^2}{12} \right) s^3 + \dots \right]_{s=0} = 1, \quad (4.31)$$

que de fato é um valor finito. Dessa forma escreve-se a Lagrangeana efetiva como

$$\mathcal{L}_{m=\mathcal{B}=0}^{(1)}(\beta) = 4\pi\beta^{-4} \zeta \left(-3, \frac{1}{2} \right) \Gamma\left(\frac{3}{2}\right) \Gamma\left(-\frac{3}{2}\right). \quad (4.32)$$

Para concluir o cálculo, será feito uso da seguinte propriedade da função Zeta

$$\zeta(-n, q) = -\frac{\partial_{(q)} B_{n+2}(q)}{(n+1)(n+2)}, \quad (4.33)$$

onde $B_{n+2}(q)$ são os polinômios de Bernoulli e os primeiros são dados por

$$\begin{aligned} B_0(q) &= 1, & B_1(q) &= q - \frac{1}{2} \\ B_2(q) &= q^2 - q + \frac{1}{6}, & B_3(q) &= q^3 - \frac{3}{2}q^2 + \frac{1}{2}q \\ B_4(q) &= q^4 - 2q^3 + q^2 - \frac{1}{30}, & B_5(q) &= q^5 - \frac{5}{2}q^4 + \frac{5}{3}q^3 - \frac{1}{6}q. \end{aligned} \quad (4.34)$$

que também satisfazem a seguinte relação recursiva

$$\partial_{(q)} B_n(q) = n B_{n-1}(q), \quad (4.35)$$

Com isso chega-se na seguinte expressão,

$$\mathcal{L}_{m=\mathcal{B}=0}^{(1)}(\beta) = 4\pi\beta^{-4} \left. \frac{\partial_{(q)} B_5(q)}{20} \right|_{q=\frac{1}{2}} \Gamma\left(\frac{3}{2}\right) \Gamma\left(-\frac{3}{2}\right). \quad (4.36)$$

Pode-se assim utilizar os resultados para as funções $\Gamma\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{4}{3}\sqrt{\pi}$ e $\Gamma\left(-\frac{3}{2}\right) = \frac{1}{2}\sqrt{\pi}$, e finalmente obter o resultado final para a Lagrangeana efetiva

$$\mathcal{L}_{m=\mathcal{B}=0}^{(1)}(\beta) = \frac{7}{360} \pi^2 k_B^4 T^4. \quad (4.37)$$

Todavia, este resultado ainda não leva em conta as projeções de spin dos férmions. Para isso, é necessário multiplicar Eq. (4.37) por um fator 2 para levar em consideração que o gás é de elétrons e pósitrons. Portanto, de um ponto de vista termodinâmico, foi encontrado

$$\mathcal{L}_{m=\mathcal{B}=0}^{(1)}(\beta) = \frac{2}{3} \frac{7}{120} \pi^2 k_B^4 T^4. \quad (4.38)$$

Foi discutido em detalhes a introdução de efeitos de temperatura num contexto de Ação Efetiva para um gás de férmions. É importante notar que a Eq. (4.38) possui um valor não nulo devido aos efeitos térmicos mesmo na ausência de um campo externo, contrastando assim com os resultados obtidos no Capítulo anterior em que os efeitos de vácuo com temperatura zero são idênticamente nulo na ausência de um campo externo. De fato, foi utilizado em conjunto conceitos de integração funcional e do formalismo de Matsubara, que consiste na soma de frequências periódicas/anti-periódicas, dependendo da natureza dos campos serem bosôni-

cos/fermiônicos, respectivamente. Será discutido na próxima seção, como esta mesma técnica pode ser aplicada para a análise do efeito Casimir.

4.2 Efeito Casimir

O efeito Casimir é um efeito quântico devido à flutuação do vácuo que produz uma força entre duas placas condutoras neutras no vácuo, sendo esta atrativa. Nesta Seção será apresentado uma discussão deste fenômeno a partir de métodos funcionais da Ação Efetiva, que segue uma abordagem diferente da abordada na ref. (CASIMIR, 1948), que é baseada nas oscilações que o campo eletromagnético possui em seu estado fundamental. A intensidade da força calculada por Casimir é dada por

$$F^{(C)} = -\frac{\pi \hbar c}{240 a^4}, \quad (4.39)$$

onde a é a distância entre as placas e o sinal negativo dá o caráter atrativo à força. Pode-se notar também que o caráter desta força é puramente quântico, pois no limite em que $\hbar \rightarrow 0$ ela desaparece. De fato, o conceito de vácuo no qual Casimir baseou sua análise era o de que o estado fundamental do campo eletromagnético é representado por um conjunto infinito de osciladores harmônicos no estado fundamental, com todos os modos de vetor de onda \vec{k} e polarização σ permitidos

$$E = \sum_{\vec{k}, \sigma} \frac{1}{2} \hbar \omega_{\vec{k}}. \quad (4.40)$$

Este resultado leva a uma divergência da energia no estado de vácuo. Entretanto a diferença de energia entre diferentes estados, $E(a) - E(a + \delta a)$, é um valor finito levando também a uma força por unidade de área finita

$$P^{(c)} = -\frac{1}{A} \frac{\partial E(a)}{\partial a}. \quad (4.41)$$

Naturalmente, esse resultado pode ser chamada de pressão de Casimir. A abordagem original feita por Casimir leva em consideração a energia do ponto zero do campo eletromagnético devido às flutuações do vácuo,. O efeito Casimir foi verificado experimentalmente (LAMORE-AUX, 1997). Como já mencionado no final da Seção 4.1, para o cálculo da força de Casimir

seguiremos a abordagem de integrais de caminho juntamente com a regularização via função Zeta de Riemann de acordo com (HAWKING, 1977).

Por razões de simplicidade, será considerado o efeito Casimir apenas para um campo real e escalar

$$\mathcal{L}(\phi) = -\frac{1}{2}\partial_\mu\phi\partial^\mu\phi - \frac{1}{2}m^2\phi^2 - V(\phi). \quad (4.42)$$

Posteriormente, para estender o resultado obtido para o campo eletromagnético basta multiplicá-lo por um fator 2 correspondente aos dois estados de polarização do fóton. Primeiro o campo ϕ é acoplado a uma fonte externa J

$$\mathcal{L}(\phi) \rightarrow \mathcal{L}(\phi) + J\phi. \quad (4.43)$$

Assim a amplitude vácuo-vácuo tem a forma

$$\langle 0_+ | 0_- \rangle^J = e^{iW[J]} = \int \mathcal{D}\phi e^{i\int d^4x \{\mathcal{L}(\phi) + J\phi\}}, \quad (4.44)$$

em que a medida $\int \mathcal{D}\phi$ representa a soma sobre todas as configurações de todos os campos ϕ . Porém quando duas placas condutoras neutras são introduzidas nos pontos $z = 0$ e $z = a$, somente um destes campos contribui, justamente aquele que desaparece nas superfícies das placas. Isto é equivalente a dizer que o campo satisfaz uma condição de contorno do tipo Dirichlet, ou seja que o campo satisfaça

$$\phi(x_0, x_1, x_2, 0) = \phi(x_0, x_1, x_2, a) = 0, \quad (4.45)$$

para quaisquer conjunto de pontos (x_0, x_1, x_2) . Estas condições de contorno são satisfeitas na QED pelo uso de placas condutoras perfeitas. Sob estas condições tem-se que a amplitude vácuo-vácuo é escrita como

$$\langle 0_+ | 0_- \rangle^J = e^{iW(a, [J])} = \int_{f_a} \mathcal{D}\phi e^{i\int d^4x \{-\frac{1}{2}\partial_\mu\phi\partial^\mu\phi - \frac{1}{2}(m^2 - i\varepsilon)\phi^2 - V(\phi) + J\phi\}}, \quad (4.46)$$

onde f_a denota que a IC é tomada sobre a restrição dada por Eq. (4.45). Para resolver as integrais acima será realizada novamente uma rotação de Wick para definir as quantidades para o espaço Euclidiano 4-dimensional. Ademais, por simplicidade, tomando os seguintes limites

$J = V(\phi) = m = 0$, tem-se a seguinte amplitude

$$\langle 0_+ | 0_- \rangle^J = \int_{f_a} \mathcal{D}\phi e^{i \int d^4x \phi (-\square_E) \phi} = \left[\det \left(-\square_E^{(f_a)} \right) \right]^{-\frac{1}{2}}, \quad (4.47)$$

onde a quantidade $\square_E^{f_a}$ representa o operador d'Alembertiano definido no espaço Euclideo, sendo que somente os autovalores associados com autofunções que satisfazem Eq. (4.45) serão considerados para o cálculo do determinante em (4.47). Assim, tem-se que

$$\langle 0_+ | 0_- \rangle^J = \exp \left[\frac{1}{2} \partial_{(s)} \zeta_{-\square_E^{f_a}}(0) \right]. \quad (4.48)$$

Em termos de ondas planas, o espectro do operador $-\square_E^{f_a}$ é expresso como

$$\left\{ k_0^2 + k_1^2 + k_2^2 + \left(\frac{\pi n}{a} \right)^2 \mid k_0, k_1, k_2 \in R, n \in N \right\}, \quad (4.49)$$

onde $k_3 = \frac{\pi n}{a}$, que corresponde à condição de contorno de Dirichlet imposta anteriormente. Portanto a função Zeta para este operador fica

$$\zeta_{-\square_E^{f_a}}(s) = 2 \frac{A\tau}{(2\pi)^3} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \left[k_0^2 + k_1^2 + k_2^2 + \left(\frac{\pi n}{a} \right)^2 \right]^{-s}, \quad (4.50)$$

onde a inclusão do fator 2 se dá pelos dois estados de polarização do fóton já discutidas anteriormente. Ademais $A\tau$ corresponde ao volume de normalização no espaço tridimensional $(0, 1, 2)$. A equação (4.50) possui praticamente a mesma forma que do caso de temperatura finita para um sistema de férmions Eq. (4.19), diferindo pelo termo periódico, a integral é feita sobre uma componente espacial e o fator a corresponde ao fator β . Escrevendo em termos de coordenadas esféricas e resolvendo a integral em Eq. (4.50) tem-se

$$\begin{aligned} \zeta_{-\square_E^{f_a}}(s) &= \frac{A\tau}{(2\pi)^3} 4\pi \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\pi n}{a} \right)^{3-2s} B \left(\frac{3}{2}, s - \frac{3}{2} \right) \\ &= \frac{A\tau_E}{(2\pi)^3} 4\pi \left(\frac{\pi}{a} \right)^{3-2s} \zeta(2s-3) \frac{\Gamma(\frac{3}{2}) \Gamma(s - \frac{3}{2})}{\Gamma(s)}, \end{aligned} \quad (4.51)$$

onde foi feita a seguinte substituição $\frac{k}{\Delta} \rightarrow x$ a fim de escrever a integral na forma cuja solução seja em termos da função Beta. Calculando a sua derivada e tomando o limite $s \rightarrow 0$, obtêm-se

$$\partial_{(s)} \zeta_{-\square_E^{fa}}(0) = \frac{A\tau}{(2\pi)^3} 4\pi \left(\frac{\pi}{a}\right)^3 \left(\frac{1}{120}\right) \left(\frac{4}{3}\sqrt{\pi}\right) \left(\frac{1}{2}\sqrt{\pi}\right) = \frac{\pi^2}{360a^3} A\tau. \quad (4.52)$$

Portanto a amplitude vácuo-vácuo fica

$$\langle 0_+ | 0_- \rangle^J = e^{\frac{\pi^2}{720a^3} A\tau}, \quad (4.53)$$

e retornando ao espaço de Minkowski tem-se

$$\langle 0_+ | 0_- \rangle^J = e^{i\frac{\pi^2}{720a^3} At} = e^{-iE(a)t}, \quad (4.54)$$

onde é possível identificar $E(a) = -\frac{\pi^2}{720a^3} A$. Com o aparecimento do fator $e^{-iE(a)t}$ pode-se interpretar que o vácuo adquire uma certa energia para que não sofra uma transição, ou seja, existe um certo *gap* de energia na transição entre os estados vácuo-vácuo. Esta identificação permite o cálculo da força de Casimir por unidade de área dada por

$$P^{(c)} = -\frac{1}{A} \frac{\partial E(a)}{\partial a} = \frac{\partial}{\partial a} \left(\frac{\pi^2}{720a^3} \right) = -\frac{\pi^2}{240a^4}, \quad (4.55)$$

reintroduzindo as constantes \hbar e c

$$P^{(c)} = -\frac{\pi^2 \hbar c}{240 a^4}. \quad (4.56)$$

O resultado é o mesmo obtido por Casimir, entretanto a abordagem seguida aqui foi a partir de conceitos de IC e a regularização via função Zeta de Riemann.

4.3 Ação Efetiva para QED Tridimensional

Esta Seção será dedicada ao estudo de alguns aspectos sobre a QED definida num espaço-tempo tridimensional $(2+1)$ -dim. É conhecido que a redução dimensional em teoria de campos induz novos efeitos que em dimensões maiores são ausentes, permitindo assim uma melhor compreensão de fenômenos e ainda ferramentas. Um dos exemplos mais importantes é o modelo bidimensional de Schwinger, que é a QED num espaço-tempo $(1+1)$ -dim, que possui soluções exatas e também gera uma massa não-nula para o fóton. Já no caso tridimensional,

há a presença de um termo de massa, conhecido como termo topológico de Chern-Simons (presente somente em espaços de dimensão ímpar). Esses dois exemplos mostram que é possível acomodar uma massa não-nula para o fóton enquanto preservam a simetria de gauge, contudo no caso tridimensional a simetria de paridade é quebrada no processo de geração de massa, justamente pelo fato de que o termo de quebra de simetria aparece no termo de Chern-Simons. Entretanto a teoria ainda é simétrica sobre CTP, pois a inversão temporal compensa a mudança de sinal no termo massivo feito pela transformação de paridade. Será discutido em seguida o cálculo da ação efetiva à 1-loop para a QED $(2 + 1)$ – dim na presença de campos constantes e também variáveis.

Como visto anteriormente na Eq. (3.78) a ação efetiva para o campo eletromagnético pode ser obtida através de

$$\mathcal{L}^{(1)}(\mathcal{F}^{\mu\sigma}) = \frac{i}{2} \int_0^\infty \frac{ds}{s} e^{-ism^2} \text{tr} \left(e^{is\frac{e}{2}\sigma_{\mu\sigma}\mathcal{F}^{\mu\sigma}} \langle x | e^{-is\Pi^2} | x \rangle \right), \quad (4.57)$$

Além da sutileza na mudança da dimensionalidade das integrais, a solução do elemento de matriz em Eq. (4.57) segue a mesma rotina do caso anterior apresentado na Seção 3.1. No qual é necessário resolver a equação diferencial

$$\left[-\partial^\mu \partial_\mu - \frac{e^2}{4} x_\mu (\mathcal{F}^2)^{\mu\sigma} x_\sigma + m^2 - i\varepsilon \right] \Delta_+ [xx'|A'] = \delta(x' - x). \quad (4.58)$$

Assim para encontrar quem é a função $\Delta_+ [xx'|A']$ utiliza-se novamente a transformada de Fourier

$$\Delta_+ [x|A'] = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} e^{ikx} \Delta_+ [k|A']. \quad (4.59)$$

Reescrevendo a Eq. (4.58) para o espaço dos momentos segue

$$\left[k^\mu k_\mu + \frac{e^2}{4} \partial_\mu^{(k)} (\mathcal{F}^2)^{\mu\sigma} \partial_\sigma^{(k)} + m^2 - i\varepsilon \right] \Delta_+ [k|A'] = 1. \quad (4.60)$$

Após uma série de manipulações como aquelas que levarão até (3.45), a solução para a equação é

$$\Delta_+ [k|A'] = i \int_0^\infty ds e^{-k^\alpha (e\mathcal{F}_{\alpha\beta})^{-1} \tan(e\mathcal{F}_{\alpha\beta}s) k^\beta - \frac{1}{2} \text{tr} \ln \cos(e\mathcal{F}_{\alpha\beta}s)} e^{-ism^2}. \quad (4.61)$$

Portanto, substituindo o resultado Eq. (4.61) em Eq. (4.59)

$$\Delta_+ [xx'|A'] = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} e^{ik(x'-x)} i \int_0^\infty ds e^{-k^\alpha (e^{\mathcal{F}_{\alpha\beta}})^{-1} \tan(e^{\mathcal{F}_{\alpha\beta}s}) k^\beta - \frac{1}{2} tr \ln \cos(e^{\mathcal{F}_{\alpha\beta}s})} e^{-ism^2}. \quad (4.62)$$

Porém é necessário tomar o limite de $x = x'$, assim

$$\Delta_+ [xx|A'] = i \int_0^\infty ds e^{-ism^2} e^{-\frac{1}{2} tr \ln \cos(e^{\mathcal{F}_{\alpha\beta}s})} \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} e^{-k^\alpha (e^{\mathcal{F}_{\alpha\beta}})^{-1} \tan(e^{\mathcal{F}_{\alpha\beta}s}) k^\beta}. \quad (4.63)$$

Comparando este resultado com a forma geral do propagador

$$\Delta_+ [xx|A'] = i \int_0^\infty ds \langle x | e^{-is\Pi^2} | x \rangle e^{-ism^2} \quad (4.64)$$

é fácil identificar o elemento de matriz como tendo a expressão

$$\langle x | e^{-is\Pi^2} | x \rangle = e^{-\frac{1}{2} tr \ln \cos(ie^{\mathcal{F}_{\alpha\beta}s})} \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} e^{-k(e^{\mathcal{F}})^{-1} \tan(ie^{\mathcal{F}s})k}. \quad (4.65)$$

A integral restante é de forma gaussiana, logo tem-se que

$$\langle x | e^{-is\Pi^2} | x \rangle = \frac{i}{(4\pi is)^{\frac{3}{2}}} e^{-\frac{1}{2} tr \ln \frac{\sinh(e^{\mathcal{F}s})}{e^{\mathcal{F}s}}}. \quad (4.66)$$

Por fim, a Lagrangeana efetiva pode ser escrita como

$$\mathcal{L}^{(1)}(\mathcal{F}^{\mu\sigma}) = -\frac{e^{-\frac{3}{4}i\pi}}{16\pi^{\frac{3}{2}}} \int_0^\infty ds s^{-\frac{5}{2}} e^{-ism^2} e^{-\frac{1}{2} tr \ln \frac{\sinh(e^{\mathcal{F}s})}{e^{\mathcal{F}s}}} tr \left(e^{is\frac{e}{2}\sigma_{\mu\sigma}\mathcal{F}^{\mu\sigma}} \right). \quad (4.67)$$

A principal diferença do presente caso com a análise anterior está no cálculo dos traços dos operadores e matrizes γ . Para determinar os autovalores, reescreve-se Eq. (4.67) utilizando a propriedade 24 do Apêndice D

$$\mathcal{L}^{(1)}(\mathcal{F}^{\mu\sigma}) = -\frac{e^{-\frac{3}{4}i\pi}}{16\pi^{\frac{3}{2}}} \int_0^\infty ds s^{-\frac{5}{2}} e^{-ism^2} e^{-\frac{1}{2} tr \ln \frac{\sinh(e^{\mathcal{F}s})}{e^{\mathcal{F}s}}} tr \left(e^{-ise\gamma^\nu \widetilde{\mathcal{F}}_\nu} \right), \quad (4.68)$$

em que foi introduzido o tensor dual $\widetilde{\mathcal{F}}_\nu = \frac{1}{2}\varepsilon_{\nu\mu\sigma}\mathcal{F}^{\mu\sigma}$. Em seguida, é necessário calcular o autovalor de $\mathcal{F}^{\mu\sigma}$ presente no primeiro traço da expressão acima, para isto note que

$$\widetilde{\mathcal{F}}^\mu \widetilde{\mathcal{F}}_\mu = -\frac{1}{2}\mathcal{F}_{\sigma\kappa}\mathcal{F}^{\sigma\kappa} = -(\mathcal{B}^2 - \mathcal{E}^2). \quad (4.69)$$

Assim

$$|\widetilde{\mathcal{F}}_\mu| = \sqrt{|\widetilde{\mathcal{F}}^\mu \widetilde{\mathcal{F}}_\mu|} = \sqrt{\frac{1}{2}|\mathcal{F}_{\sigma\kappa}\mathcal{F}^{\sigma\kappa}|} = \sqrt{\mathcal{B}^2 - \mathcal{E}^2}. \quad (4.70)$$

É possível ainda mostrar a seguinte relação

$$\mathcal{F}^{\mu\sigma}\mathcal{F}_{\sigma\kappa}\mathcal{F}^{\kappa\lambda} = -\frac{1}{2}\mathcal{F}^2\mathcal{F}^{\mu\lambda} = -\widetilde{\mathcal{F}}^2\mathcal{F}^{\mu\lambda} \quad (4.71)$$

Agora, pode-se aplicar a relação acima na seguinte equação de auto-valores do tensor eletromagnético

$$\mathcal{F}^{\mu\sigma}\Psi_\sigma = \lambda\Psi^\mu, \quad (4.72)$$

tal que via processo de iteração, segue a equação

$$\lambda^3\Psi^\mu + \widetilde{\mathcal{F}}^2\lambda\Psi^\mu = 0, \quad (4.73)$$

sendo que as soluções são

$$\lambda_1 = 0, \quad \lambda_{2,3} = \pm i|\widetilde{\mathcal{F}}_\mu|. \quad (4.74)$$

De posse desses autovalores, é fácil calcular o seguinte resultado para o primeiro traço

$$e^{-\frac{1}{2}tr \ln \frac{\sinh(e\mathcal{F}s)}{e\mathcal{F}s}} = \frac{e|\widetilde{\mathcal{F}}_\mu|s}{\sin\left(e|\widetilde{\mathcal{F}}_\mu|s\right)}. \quad (4.75)$$

Para o segundo operador de interesse utiliza-se a fórmula de Euler, lembrando que as matrizes de Dirac agora são expressas em termos das matrizes de Pauli

$$\gamma^0 = \sigma^3, \quad \gamma^1 = i\sigma^1, \quad \gamma^2 = i\sigma^2, \quad (4.76)$$

desta forma há novos resultados envolvendo essa álgebra (para maiores detalhes veja o Apêndice D). Assim, segue facilmente que

$$\text{tr} \left(e^{-ise\gamma^{\nu} \widetilde{\mathcal{F}}_{\nu}} \right) = 2 \cos \left(es \sqrt{(\mathcal{B}^2 - \mathcal{E}^2)} \right). \quad (4.77)$$

Por fim, substituí-se os resultados Eqs. (4.75) e (4.77) na expressão Eq. (4.68) para obter

$$\mathcal{L}^{(1)}(\mathcal{F}^{\mu\sigma}) = -\frac{e^{-\frac{3}{4}i\pi}}{8\pi^{\frac{3}{2}}} \int_0^{\infty} \frac{ds}{s^{5/2}} e^{-ism^2} es \sqrt{(\mathcal{B}^2 - \mathcal{E}^2)} \left[\cot \left(es \sqrt{(\mathcal{B}^2 - \mathcal{E}^2)} \right) - 1 \right], \quad (4.78)$$

sendo que já foi introduzido a correção para o caso de campo nulo. Vale mencionar que no caso especial de limite de massa nula, $m = 0$, é possível obter para a QED tridimensional um resultado finito e simples para a Lagrangeana Eq. (4.78),

$$\mathcal{L}^{(1)}(\mathcal{F}^{\mu\sigma}) = \frac{1}{2\pi^2} \left[\frac{e\sqrt{(\mathcal{B}^2 - \mathcal{E}^2)}}{2} \right]^{3/2} \zeta \left(\frac{3}{2} \right). \quad (4.79)$$

Pode-se pensar também que o valor do campo é grande o suficiente para poder ser tomado o limite de massa nula. Retornando para Eq. (4.78), deve-se investigar o comportamento do integrando no limite $s \rightarrow 0$

$$\begin{aligned} \mathcal{L}^{(1)}(\mathcal{F}^{\mu\sigma}) &= -\lim_{s \rightarrow 0} \frac{e^{-\frac{3}{4}i\pi}}{8\pi^{\frac{3}{2}}} \int_0^{\infty} ds e^{-ism^2} \\ &\times \left[-\frac{1}{3s^{1/2}} \left(e\sqrt{(\mathcal{B}^2 - \mathcal{E}^2)} \right)^2 - \frac{s^{3/2}}{45} \left(e\sqrt{(\mathcal{B}^2 - \mathcal{E}^2)} \right)^4 - \dots \right]. \end{aligned} \quad (4.80)$$

vê-se assim que o primeiro termo da expressão é divergente quando $s \rightarrow 0$. Essa divergência implica na renormalização dos parâmetros físicos presentes na Lagrangeana completa

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_R(\mathcal{F}^{\mu\sigma}) &= \mathcal{L}^{(0)} + \mathcal{L}^{(1)} \\ &= -\frac{1}{2} (\mathcal{B}_0^2 - \mathcal{E}_0^2) \mathcal{L}_2^{-1} - \frac{e^{-\frac{3}{4}i\pi}}{8\pi^{\frac{3}{2}}} \int_0^{\infty} \frac{ds}{s^{5/2}} e^{-ism^2} \left[es \sqrt{(\mathcal{B}^2 - \mathcal{E}^2)} \cot \left(e_0 s \sqrt{(\mathcal{B}_0^2 - \mathcal{E}_0^2)} \right) \right. \\ &\quad \left. + \frac{s^2 e_0^2}{3} (\mathcal{B}_0^2 - \mathcal{E}_0^2) - 1 \right], \end{aligned} \quad (4.81)$$

onde

$$\mathcal{L}_2^{-1} = \left[1 + \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e_0^2 e^{-\frac{3}{4}i\pi}}{12\pi^{\frac{3}{2}}} \int_x^{\infty} \frac{ds}{s^{1/2}} e^{-ism^2} \right]$$

é a constante de renormalização e os parâmetros físicos são redefinidos da seguinte maneira: $e = \mathcal{L}_2^{\frac{1}{2}} e_0$ e $(\mathcal{B}, \mathcal{E}) = \mathcal{L}_2^{-\frac{1}{2}} (\mathcal{B}_0, \mathcal{E}_0)$. Com isso pode-se notar que $e_0^2 (\mathcal{B}_0^2 - \mathcal{E}_0^2) = e^2 (\mathcal{B}^2 - \mathcal{E}^2)$, assim a Lagrangeana renormalizada é escrita como

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_R(\mathcal{F}_{2+1}^{\mu\sigma}) &= -\frac{1}{2} (\mathcal{B}^2 - \mathcal{E}^2) - \frac{e^{-\frac{3}{4}i\pi}}{8\pi^{\frac{3}{2}}} \int_0^\infty \frac{ds}{s^{5/2}} e^{-ism^2} \\ &\times \left[es\sqrt{(\mathcal{B}^2 - \mathcal{E}^2)} \cot\left(es\sqrt{(\mathcal{B}^2 - \mathcal{E}^2)}\right) + \frac{s^2 e^2}{3} (\mathcal{B}^2 - \mathcal{E}^2) - 1 \right]. \end{aligned} \quad (4.82)$$

Este resultado representa a correção completa a 1-loop para a densidade Lagrangeana. Entretanto, sabe-se que o termo de Chern-Simons está relacionado com a contribuição com paridade ímpar. Para evidenciá-lo é necessário usar operadores de projeção de paridade, para obter a parte ímpar da Lagrangeana efetiva. Para isto será utilizado a corrente fermiônica que é obtida a partir de

$$\begin{aligned} \langle J^\mu \rangle &= \frac{i\delta W[A]^{(1)}}{\delta A_\mu(x)} = -etr \{ \gamma^\mu G_+ [xx|e'A] \} \\ &= -etr \gamma^\mu \int_0^\infty ds [m - (\gamma \cdot \Pi)] e^{-ism^2} \left[e^{is(\gamma \cdot \Pi)^2} \right], \end{aligned} \quad (4.83)$$

ou ainda,

$$\langle J^\mu \rangle = -\frac{e^{-\frac{3}{4}i\pi}}{8\pi^{\frac{3}{2}}} etr_\gamma \left\{ \gamma^\mu \int_0^\infty \frac{ds}{s^{3/2}} [m - (\gamma \cdot \Pi)] e^{-ism^2} e^{-\frac{1}{2}tr \ln \frac{\sinh(e\mathcal{F}s)}{e\mathcal{F}s}} \left(e^{-ise\gamma^\nu \widetilde{\mathcal{F}}_\nu} \right) \right\}. \quad (4.84)$$

note que foi feito uso do resultado (4.66). Tomando somente a parte ímpar da expressão

$$\begin{aligned} \langle J^\mu \rangle_I &= -iem \frac{e^{-\frac{3}{4}i\pi}}{8\pi^{\frac{3}{2}}} \int_0^\infty \frac{ds}{s^{3/2}} e^{-ism^2} e^{-\frac{1}{2}tr \ln \frac{\sinh(e\mathcal{F}s)}{e\mathcal{F}s}} tr_\gamma \left\{ \gamma^\mu \left(e^{-ise\gamma^\nu \widetilde{\mathcal{F}}_\nu} \right) \right\} \\ &\quad - iem \frac{e^{-\frac{3}{4}i\pi}}{8\pi^{\frac{3}{2}}} \int_0^\infty \frac{ds}{s^{3/2}} e^{-ism^2} tr \left[\gamma^\mu es\sqrt{(\mathcal{B}^2 - \mathcal{E}^2)} \cot\left(es\sqrt{(\mathcal{B}^2 - \mathcal{E}^2)}\right) - ies\gamma^\mu \gamma^\nu \widetilde{\mathcal{F}}_\nu \right] \\ &= -\frac{m}{|m|} \frac{e^2}{4\pi} \widetilde{\mathcal{F}}^\mu, \end{aligned} \quad (4.85)$$

onde o subíndice I significa que corresponde à parte ímpar da corrente. Por fim, como essa corrente está contraída com um campo de gauge (i.e. $\langle J^\mu \rangle_I A_\mu$), segue que em nível Lagrangeano o termo de Chern-Simons é escrito como

$$\mathcal{L}_I^{(1)} = -\frac{m}{|m|} \frac{e^2}{8\pi} \varepsilon^{\mu\sigma\kappa} A_\mu \partial_\sigma A_\kappa = 2\pi \mathcal{L}_{CS}, \quad (4.86)$$

Na expressão acima pode-se identificar a massa do fóton como dada por $\kappa = \frac{\alpha}{\pi}$, e seu caráter topológico segue do fato que ele surge somente em dimensões ímpares. Por exemplo, o propagador do campo eletromagnético no gauge de Lorenz $\partial_\mu A^\mu = 0$ na escolha $\xi = 0$, mostra o polo massivo

$$iD_{\mu\nu}(p) = \frac{1}{p^2(p^2 - \kappa^2)} \left(p^2 \eta_{\mu\nu} - p_\mu p_\nu + i\kappa \epsilon_{\mu\nu\lambda} p^\lambda \right) \quad (4.87)$$

Um ponto importante a notar neste resultado é a presença de um termo de quebra de simetria de paridade, assim vê-se mais uma evidência de que partículas ganham massa através da quebra de alguma simetria, neste caso o fóton e a simetria de paridade.

4.4 $QED_{(2+1)}$ para Campos não Constantes

Ainda no âmbito da $QED_{(2+1)}$, será feito o estudo sobre a Ação Efetiva para o caso de um campo eletromagnético não constante ², com o objetivo de encontrar as correções necessárias para a Eq. (4.82).

Como visto anteriormente a Lagrangeana Efetiva para o campo eletromagnético pode ser expressa de forma geral como

$$\mathcal{L}(\mathcal{F}_{2+1}^{\mu\sigma}) = \frac{1}{2} \int_0^\infty \frac{ds}{s} e^{-m^2 s} \text{tr}[K(x, x, s)], \quad (4.88)$$

sendo que foi feita uma rotação de Wick no tempo próprio e definiu-se o funcional *kernel*

$$K(x, y, s) = \langle x | e^{-Hs} | y \rangle. \quad (4.89)$$

Diferentemente do procedimento adotado anteriormente aqui será adotado o método de *Heat-Kernel* devido às semelhanças com a equação de Schrödinger e também por sua generalidade em comparação ao método anterior, principalmente no caso de campos não constantes dificultando a solução em termos dos propagadores. Para determinar o *kernel* $K(x, y, s)$ será utilizado o fato dele satisfazer a seguinte equação de difusão (DITTRICH; GIES, 2000),

$$\left[\frac{\partial}{\partial s} + (\gamma^\mu D_\mu)^2 \right] K(x, y, s) = 0, \quad (4.90)$$

² O que significa não homogêneo na posição e não constante no tempo.

que de fato é uma equação diferença parcial parabólica, onde o operador de Dirac $(\gamma^\mu D_\mu)^2$ é identificado com a Hamiltoniana do sistema, e que Eq. (4.90) possui uma estrutura semelhante à equação de Schrödinger, com s sendo o tempo próprio. Ademais, a partir da definição da derivada covariante

$$\gamma^\mu D_\mu = \gamma^\mu (\partial_\mu - ieA_\mu(x)) \quad (4.91)$$

e algumas manipulações com as matrizes γ , é possível calcular a quantidade

$$(\gamma^\mu D_\mu)^2 = -\partial^\mu \partial_\mu + ie(\partial^\mu A_\mu(x)) + 2ieA^\mu(x)\partial_\mu + e^2 A^\mu(x)A_\mu(x) + \frac{e}{2}\sigma_{\mu\sigma}\mathcal{F}^{\mu\sigma}. \quad (4.92)$$

Então substituindo o resultado Eq. (4.92) em Eq. (4.90), encontra-se

$$\left(\frac{\partial}{\partial s} - \partial^\mu \partial_\mu + 2ieA^\mu \partial_\mu + ie(\partial^\mu A_\mu) + e^2 A^\mu A_\mu + \frac{e}{2}\sigma_{\mu\sigma}\mathcal{F}^{\mu\sigma} \right) K(x, y, s) = 0. \quad (4.93)$$

A fim de determinar um Ansatz para o funcional K , é conveniente considerar primeiramente o caso de campos nulos

$$\left(\frac{\partial}{\partial s} - \partial^\mu \partial_\mu \right) K(x, y, s) = 0, \quad (4.94)$$

que por sua vez pode ser facilmente resolvida por

$$K_0(x, y, s) = \frac{1}{(4\pi s)^{3/2}} e^{-(x-y)^2/4s}.$$

Agora, para o caso de campos não nulos é natural pensar em uma solução em forma de série construída a partir da solução homogênea

$$K(x, y, s) = \frac{1}{(4\pi s)^{3/2}} e^{-(x-y)^2/4s} \sum_{k=0}^{\infty} a_k(x, y) s^k. \quad (4.95)$$

Os coeficientes $a_k(x, y)$ podem ser determinados através das relações de recorrência

$$\left(D^\mu D_\mu + \frac{e}{2}\sigma_{\mu\sigma}\mathcal{F}^{\mu\sigma} \right) a_n(x, y) = (n+1)a_{n+1}(x, y) + (x-y)_\mu (\partial^\mu - ieA^\mu) a_{n+1}(x, y) \quad (4.96)$$

sendo que $n \geq 1$, ademais tem-se

$$(x-y)_\mu (\partial^\mu - ieA^\mu) a_0(x,y) = 0 \quad (4.97)$$

para $n = 0$, que são obtidas substituindo a Eq. (4.95) em Eq. (4.93). Pode-se ainda separar as diferentes dependências dos coeficientes $a_k(x,y)$ da seguinte maneira

$$a_k(x,y) = \phi(x,y) f_k(x,y), \quad (4.98)$$

onde $\phi(x,y)$ é o fator que carrega a dependência de gauge, como usado na Seção 3.1. Vale a pena mencionar de que o gauge de Schwinger utilizado é dado por

$$A_\nu(x) = - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x^\lambda - y^\lambda) \dots (x^{\nu_n} - y^{\nu_n})}{n!(n+2)} \partial_1 \dots \partial_{\nu_n} \mathcal{F}_{\lambda\nu}(y), \quad (4.99)$$

no caso particular de campos constantes ($n = 0$) a expressão é reduzida à Eq. (3.24). Retornando aos coeficientes $f_k(x,y)$, como a forma funcional do tensor eletromagnético e a definição da matriz σ se mantém para $(2+1)$ a mesma que $(3+1)$,³ pode-se utilizar o resultado da $QED_{(3+1)}$ (HAUKNES, 1984),

$$\left\{ \begin{array}{l} [f_0] = 1 \\ [f_1] = \frac{e}{2} \sigma \mathcal{F} \\ [f_2] = \frac{e^2}{12} \mathcal{F}^2 + \frac{e^2}{12} \sigma \mathcal{F}^{\cdot\mu\mu} + \frac{1}{2} \left(\frac{e}{2} \sigma \mathcal{F} \right)^2 \\ [f_3] = \frac{1}{3!} \left(\frac{e}{2} \sigma \mathcal{F} \right)^3 + \frac{e}{2} \sigma \mathcal{F} \left(\frac{e}{12} \sigma \mathcal{F}^{\cdot\mu\mu} + \frac{e^2}{12} \sigma \mathcal{F}^2 \right) + \frac{e^2}{48} \sigma \mathcal{F}^{\cdot\mu} \sigma \mathcal{F}^{\cdot\mu} + \\ + \frac{e}{120} \sigma \mathcal{F}^{\cdot\mu\mu\nu\nu} - \frac{e^2}{30} \mathcal{F}^{\alpha\beta} \mathcal{F}^{\alpha\beta\cdot\mu\mu} - \frac{e^2}{45} (\mathcal{F}^{\cdot\mu})^2 - \frac{e^2}{180} \mathcal{F}_{\mu\nu,\nu} \mathcal{F}^{\mu\nu,\nu} \end{array} \right. , \quad (4.100)$$

onde $\sigma \mathcal{F} = \sigma^{\mu\nu} \mathcal{F}_{\mu\nu}$, $\mathcal{F}^2 = \mathcal{F}_{\mu\nu} \mathcal{F}^{\mu\nu}$, $(\mathcal{F}^{\cdot\mu})^2 = \mathcal{F}_{\mu\nu,\sigma} \mathcal{F}^{\mu\nu,\sigma}$ e $\mathcal{F}^{\mu\nu,\sigma} = \frac{\partial}{\partial \sigma} \mathcal{F}^{\mu\nu}$. Estes coeficientes representam tanto as correções de campos constantes como as não constantes, assim pode-se convenientemente separá-las da seguintes forma

$$\sum_{k=0}^{\infty} [f_k] s^k = [1 + b_1(x)s + b_2(x)s^2 + b_3(x)s^3 + \dots] \sum_{k=0}^{\infty} [f_k^c(x)] s^k, \quad (4.101)$$

³ De fato, a diferença entre as dimensões está na representação das matrizes γ e a dimensão da matriz que representa o tensor eletromagnético, fatores que não alteram esses resultados.

onde $f_k^c(x)$ são os coeficientes para campos constantes, enquanto $b_i(x)$ representam as devidas correções devido à presença de campos não constantes. Portanto, comparando a expansão acima (4.101) com os termos da Eq. (4.100), é possível identificar que os termos proporcionais à contribuição de campo constante são

$$\begin{cases} [f_0^c] = 1 \\ [f_1^c] = \frac{e}{2} \sigma \mathcal{F} \\ [f_2^c] = \frac{e^2}{12} \mathcal{F}^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{e}{2} \sigma \mathcal{F} \right)^2 \\ [f_3^c] = \frac{1}{3!} \left(\frac{e}{2} \sigma \mathcal{F} \right)^3 + \frac{e}{2} \sigma \mathcal{F} \left(\frac{e^2}{12} \mathcal{F}^2 \right) \end{cases} \quad (4.102)$$

Com isso, tem-se que os coeficientes $b_i(x)$ são escritos como

$$\begin{cases} b_1(x) = 0 \\ b_2(x) = \frac{e^2}{12} \mathcal{F}^{\cdot, \mu \mu} \\ b_3(x) = \frac{e^2}{48} \sigma \mathcal{F}^{\cdot, \mu} \sigma \mathcal{F}^{\cdot, \mu} + \frac{e}{120} \sigma \mathcal{F}^{\cdot, \mu \mu \nu \nu} - \frac{e^2}{30} \mathcal{F}_{\alpha \beta} \mathcal{F}^{\alpha \beta, \mu \mu} - \frac{e^2}{45} (\mathcal{F}^{\cdot, \mu})^2 - \frac{e^2}{180} \mathcal{F}_{\mu \nu, \nu} \mathcal{F}^{\mu \nu, \nu} \end{cases} \quad (4.103)$$

Pode-se mostrar agora o ponto forte da separação acima das contribuições de campo constante e não constante. Esta separação de coeficientes é interessante pois agora o primeiro termo da soma em Eq. (4.101) dá diretamente o resultado de campo constante para a Eq. (4.95),

$$K(x, x, s) = \frac{1}{(4\pi s)^{3/2}} e^{-\frac{1}{2} \text{tr} \ln \frac{\sin(e\mathcal{F}s)}{e\mathcal{F}s} + \frac{e}{2} \sigma_{\mu\sigma} \mathcal{F}^{\mu\sigma} s} \left[1 + \frac{e}{12} \sigma \mathcal{F}^{\cdot, \mu \mu} s^2 + \left(\frac{e^2}{48} \sigma \mathcal{F}^{\cdot, \mu} \sigma \mathcal{F}^{\cdot, \mu} + \frac{e}{120} \sigma \mathcal{F}^{\cdot, \mu \mu \nu \nu} - \frac{e}{30} \mathcal{F}_{\mu\nu} \mathcal{F}^{\mu\nu, \beta\beta} - \frac{e^2}{45} (\mathcal{F}^{\cdot, \mu})^2 - \frac{e^2}{180} \mathcal{F}_{\mu\nu, \nu} \mathcal{F}^{\mu\nu, \nu} \right) s^3 + \dots \right] \quad (4.104)$$

sendo essa contribuição corrigida pelos termos proporcionais à presença de um campo não constante. A última parte restante da análise é o cálculo da operação de traço das matrizes γ . Para isto, foi utilizada as propriedades de traço das matrizes γ listadas no Apêndice D, chegando

à expressão

$$\begin{aligned}
tr[K(x,x,s)] = & \frac{1}{(4\pi s)^{3/2}} \left\{ \left[2es\sqrt{(\mathcal{B}^2 - \mathcal{E}^2)} \coth\left(es\sqrt{(\mathcal{B}^2 - \mathcal{E}^2)}\right) - 1 \right] \right. \\
& + \frac{es\sqrt{(\mathcal{B}^2 - \mathcal{E}^2)} \coth\left(es\sqrt{(\mathcal{B}^2 - \mathcal{E}^2)}\right)}{15} \left(\frac{7}{12}e^2 \mathcal{F}_{\alpha\beta,\mu} \mathcal{F}^{\alpha\beta,\mu} \right. \\
& \left. \left. - e \mathcal{F}_{\mu\nu} \mathcal{F}^{\mu\nu,\beta\beta} - \frac{e^2}{6} \mathcal{F}_{\mu\nu,\nu} \mathcal{F}^{\mu\nu,\nu} \right) s^3 + \dots \right\}. \quad (4.105)
\end{aligned}$$

Por fim, substituindo o resultado (4.105) na expressão (4.88), a Lagrangeana Efetiva para campos não constantes da $QED_{(2+1)}$ é escrita como

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}(\mathcal{F}_{2+1}^{\mu\sigma}) = & \frac{1}{16\pi^{3/2}} \int_0^\infty \frac{ds}{s^{5/2}} e^{-m^2 s} \left\{ 2 \left[es\sqrt{(\mathcal{B}^2 - \mathcal{E}^2)} \coth\left(es\sqrt{(\mathcal{B}^2 - \mathcal{E}^2)}\right) - 1 \right] \right. \\
& + \frac{1}{15} es\sqrt{(\mathcal{B}^2 - \mathcal{E}^2)} \coth\left(es\sqrt{(\mathcal{B}^2 - \mathcal{E}^2)}\right) \\
& \left. \times \left(\frac{7}{12}e^2 \mathcal{F}_{\alpha\beta,\mu} \mathcal{F}^{\alpha\beta,\mu} - e \mathcal{F}_{\mu\nu} \mathcal{F}^{\mu\nu,\beta\beta} - \frac{e^2}{6} \mathcal{F}_{\mu\nu,\nu} \mathcal{F}^{\mu\nu,\nu} \right) s^3 + \dots \right\}. \quad (4.106)
\end{aligned}$$

É importante enfatizar que a análise aqui foi focada no cálculo perturbativo das contribuições de campos não constantes até ordem s^3 , sendo que sejam mais difíceis no cálculo as demais ordens seguem a mesma sistemática. Com este resultado encerra-se a análise sobre a QED_{2+1} e também as aplicações do método de Lagrangeana efetiva, onde foi possível explorar as diferenças que surgem devido a restrição de uma dimensão espacial, como por exemplo o termo de Chern-Simons presente na Eq. (4.86).

5 AÇÃO EFETIVA A 1-LOOP PARA O CAMPO DE KALB-RAMOND

A QED é uma teoria de gauge com simetria $U(1)$ definida no espaço-tempo de Minkowski, a imposição desta simetria local é a responsável por introduzir a interação entre os campos fermiônicos e o campo de gauge conhecido como o potencial A_μ , além disso significa que existe apenas um potencial. Entre outras características da QED a de maior interesse neste capítulo é a de que o campo de gauge A_μ é 1-forma,¹ ou seja, um campo vetorial cuja fonte é o campo de Dirac ψ , que, por sua vez, representa partículas pontuais. De forma geral, pode-se escrever o termo de interação da partícula com o campo eletromagnético como

$$\frac{q}{c} \int dX^\mu A_\mu = \frac{q}{c} \int d\tau \frac{dX^\mu(\tau)}{d\tau} A_\mu(X(\tau)) = \int d^D x J^\mu A_\mu, \quad (5.1)$$

em que τ é o tempo próprio, que parametriza a linha de mundo da partícula pontual de carga q , e a corrente de uma carga pontual é

$$J^\mu(x) = \frac{q}{c} \int d\tau \delta^D(x - X(\tau)) \frac{dX^\mu}{d\tau}, \quad (5.2)$$

em que pode-se identificar $u^\mu = \frac{dX^\mu}{d\tau}$ como a quadri-velocidade da partícula.

Com o advento da Teoria de Cordas, os constituintes fundamentais que antes possuíam uma descrição de partículas pontuais, ou seja dimensão zero, são deixados de lado para dar lugar a objetos unidimensionais com extensão, as cordas. A motivação principal da teoria de cordas é a unificação de todas as interações da natureza em uma única teoria Física, fornecendo um ambiente natural para a teoria da gravitação quântica, cujo problema se encontra na não renormalizabilidade da sua formulação quântica (POLCHINSKI, 1998).

Portanto a questão que surge com esta nova visão de como tratar as partículas fundamentais, é de como seria a QED para as cordas, ou seja, qual seria a quantidade análoga ao potencial A_μ na descrição de cordas. Esta generalização foi inicialmente discutida por (KALB; RAMOND, 1974), onde foi proposto um campo de gauge análogo ao A_μ , mas que agora é um tensor anti-simétrico de Lorentz de *rank-2*, dando origem ao que é chamado de QED 2-forma.

O campo de gauge de *rank-2* não-massivo é expresso por $B_{\mu\nu} = -B_{\nu\mu}$, é conhecido como campo de Kalb-Ramond e representa a generalização do potencial eletromagnético, sendo que sua natureza anti-simétrica se dá por ser um campo 2-forma. A fonte para o campo $B_{\mu\nu}(x)$

¹ Uma p-forma é um tensor anti-simétrico de *rank-p* que consiste na generalização matemática do conceito de vetores, definido num espaço vetorial abstrato chamado de variedade (FELSAGER, 2012).

são os campos generalizados de Dirac para cordas, $\psi[X(\tau, \sigma)]$, cuja coordenadas $X = X(\tau, \sigma)$ da superfície de mundo da corda dependem do tempo próprio τ , mas também do parâmetro σ que mede o tamanho da corda. Logo, a fim de parametrizar a trajetória da corda através de um escalar

$$-\int dX^\mu dX^\nu B_{\mu\nu} = \int d\tau d\sigma \frac{\partial X^\mu}{\partial \tau} \frac{\partial X^\nu}{\partial \sigma} B_{\mu\nu} = -\int d^D x J^{\mu\nu} B_{\mu\nu}, \quad (5.3)$$

em que a corrente da corda é definida por

$$J^{\mu\nu}(x) = \frac{1}{2} \int d\tau d\sigma \delta^D(x - X(\tau, \sigma)) \left[\frac{\partial X^\mu}{\partial \tau} \frac{\partial X^\nu}{\partial \sigma} - \frac{\partial X^\mu}{\partial \sigma} \frac{\partial X^\nu}{\partial \tau} \right]. \quad (5.4)$$

Ademais, associado ao campo de Kalb-Ramond, há também uma generalização do tensor eletromagnético que é definida como

$$\mathcal{H}_{\mu\nu\lambda} = \partial_\mu B_{\nu\lambda} + \partial_\nu B_{\lambda\mu} + \partial_\lambda B_{\mu\nu}. \quad (5.5)$$

Com essas definições, é possível escrever a densidade Lagrangeana com uma estrutura bastante geral para a QED 2-forma como

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{12} \mathcal{H}_{\mu\nu\lambda} \mathcal{H}^{\mu\nu\lambda} + \bar{\psi}[x(t, \sigma)] \Gamma_{\mu\nu} \left(i \frac{\delta}{\delta \Omega_{\mu\nu}} - g B^{\mu\nu} \right) \psi[x(t, \sigma)], \quad (5.6)$$

esse funcional é construído a partir da exigência de ser invariante sob as seguintes transformações de gauge

$$\begin{aligned} B_{\mu\nu}(x) &\rightarrow B_{\mu\nu}(x) + \partial_\mu \Lambda_\nu(x) - \partial_\nu \Lambda_\mu(x) \\ \psi[X(t, \sigma)] &\rightarrow e^{ig \int_\sigma \Lambda_\mu(x) dx^\mu} \psi[X(t, \sigma)], \end{aligned} \quad (5.7)$$

onde Λ_μ é uma função vetorial arbitrária, sendo que a derivada funcional $\frac{\delta}{\delta \Omega_{\mu\nu}}$ mede a variação de $\psi[X(t, \sigma)]$ dada uma mudança infinitesimal da configuração da corda que varre um elemento de superfície $\delta \Omega_{\mu\nu}$ (DASS; SHAJESH, 2002).

Neste capítulo irá-se um pouco além às discussões anteriores, e tem-se como objetivo determinar a Lagrangeana efetiva para o caso em que há simultaneamente os campos de Kalb-Ramond e o eletromagnético de fundo constantes interagindo com o campo de Dirac. Entretanto, o modelo apresentado em Eq. (5.6) é demasiado complicado por envolver teoria de cordas. Pode-se todavia assumir algumas considerações para simplificar a dinâmica destes campos

em uma primeira aproximação, que consiste em considerar que os campos de gauge estejam interagindo com um férmion pontual, i.e. $\psi(x)$. A Lagrangeana para este modelo é escrita da seguinte forma

$$\begin{aligned} \mathcal{L} = \bar{\psi} & \left(-i\gamma_\mu \partial^\mu - e\gamma_\mu A^\mu - \frac{1}{12} \frac{g}{m} \sigma_{\mu\nu\lambda} \mathcal{H}^{\mu\nu\lambda} - m \right) \psi \\ & - \frac{1}{4} \mathcal{F}_{\mu\nu} \mathcal{F}^{\mu\nu} - \frac{1}{12} \mathcal{H}_{\mu\nu\lambda} \mathcal{H}^{\mu\nu\lambda}, \end{aligned} \quad (5.8)$$

onde $\sigma_{\mu\nu\lambda}$ é o produto antissimétrico de matrizes γ . É importante enfatizar que a Lagrangeana acima segue a partir da imposição de simetria de gauge, todavia representa um acoplamento não mínimo do campo de Kalb-Ramond com férmions pontuais. Esta interação pode ser entendida como uma generalização do acoplamento de Pauli para o momento de dipolo magnético do elétron $\sigma_{\mu\nu} \mathcal{F}^{\mu\nu}$ podendo assim ser uma contribuição adicional para esta quantidade física. As transformações de gauge impostas para a construção da Lagrangeana Eq. (5.8) são

$$\begin{aligned} B_{\mu\nu}(x) & \rightarrow B_{\mu\nu}(x) + \partial_\mu \Lambda_\nu^{(B)}(x) - \partial_\nu \Lambda_\mu^{(B)}(x) \\ A_\mu(x) & \rightarrow A_\mu(x) + \partial_\mu \Lambda^{(A)}(x) \\ \psi(x) & \rightarrow e^{ie\Lambda^{(A)}(x)} \psi(x). \end{aligned} \quad (5.9)$$

Note que é possível introduzir outros tipos de acoplamentos entre férmions e o campo de Kalb-Ramond, interação que seja diretamente com o campo $B_{\mu\nu}$, todavia a transformação do campo fermiônico seria diferente daquela apresentada em (5.9) e sim similar aquela em (5.7).

Como visto anteriormente na Seção 2, a Ação Efetiva pode ser obtida a partir da expressão da integral de caminho

$$Z[\mathcal{F}, \mathcal{H}] = \frac{\int \mathcal{D}\psi \mathcal{D}\bar{\psi} e^{i \int d^4x \left[-\frac{1}{4} \mathcal{F}_{\mu\nu} \mathcal{F}^{\mu\nu} - \frac{1}{12} \mathcal{H}_{\mu\nu\lambda} \mathcal{H}^{\mu\nu\lambda} + \bar{\psi} \left(-i\gamma_\mu \partial^\mu - e\gamma_\mu A^\mu - \frac{1}{12} \frac{g}{m} \sigma_{\mu\nu\lambda} \mathcal{H}^{\mu\nu\lambda} - m \right) \psi \right]}}{\int \mathcal{D}\psi \mathcal{D}\bar{\psi} e^{i \int d^4x \left[\bar{\psi} \left(-i\gamma_\mu \partial^\mu - m \right) \psi \right]}}, \quad (5.10)$$

em que foi deixado explícito o fator de normalização proveniente da condição de que na ausência de campos $Z[0,0] = 1$, ou seja o denominador em Eq. (5.10) representa a parte sem os campos eletromagnético e de Kalb-Ramond. Pode-se reescrever ainda a Eq. (5.10) numa forma

ainda mais conveniente

$$Z[\mathcal{F}, \mathcal{H}] = e^{i \int d^4x \left[-\frac{1}{4} \mathcal{F}_{\mu\nu} \mathcal{F}^{\mu\nu} - \frac{1}{12} \mathcal{H}_{\mu\nu\lambda} \mathcal{H}^{\mu\nu\lambda} \right]} \times \frac{\int \mathcal{D}\psi \mathcal{D}\bar{\psi} e^{i \int d^4x \left[\bar{\psi} (-i\gamma_\mu \partial^\mu - e\gamma_\mu A^\mu - \frac{1}{12} \frac{g}{m} \sigma_{\mu\nu\lambda} \mathcal{H}^{\mu\nu\lambda} - m) \psi \right]}}{\int \mathcal{D}\psi \mathcal{D}\bar{\psi} e^{i \int d^4x \left[\bar{\psi} (-i\gamma_\mu \partial^\mu - m) \psi \right]}}, \quad (5.11)$$

onde foi separado a parte livre dos campos de gauge do conteúdo de interação com os campos fermiônicos. A integração dos campos $(\psi, \bar{\psi})$ pode ser efetuada a partir do resultado Eq. (8), logo

$$Z[\mathcal{F}, \mathcal{H}, \psi] = e^{i \int d^4x \left[-\frac{1}{4} \mathcal{F}_{\mu\nu} \mathcal{F}^{\mu\nu} - \frac{1}{12} \mathcal{H}_{\mu\nu\lambda} \mathcal{H}^{\mu\nu\lambda} \right]} \frac{\det \left(-i\gamma_\mu \partial^\mu - e\gamma_\mu A^\mu - \frac{1}{12} \frac{g}{m} \sigma_{\mu\nu\lambda} \mathcal{H}^{\mu\nu\lambda} - m \right)}{\det \left(-i\gamma_\mu \partial^\mu - m \right)}. \quad (5.12)$$

Pode-se identificar na expressão acima novamente a parte livre de Maxwell juntamente com a parte livre do campo de Kalb-Ramond $\mathcal{L}^{(0)} = -\frac{1}{4} \mathcal{F}_{\mu\nu} \mathcal{F}^{\mu\nu} - \frac{1}{12} \mathcal{H}_{\mu\nu\lambda} \mathcal{H}^{\mu\nu\lambda}$, sendo que a correção (quântica ou ainda de efeitos não-lineares) à *1-loop* surge do termo funcional

$$\frac{\det \left(-i\gamma_\mu \partial^\mu - e\gamma_\mu A^\mu - \frac{1}{12} \frac{g}{m} \sigma_{\mu\nu\lambda} \mathcal{H}^{\mu\nu\lambda} - m \right)}{\det \left(i\gamma_\mu \partial^\mu - m \right)}. \quad (5.13)$$

Desta forma, identifica-se que a densidade Lagrangeana (efetiva) a *1-loop* é dada por

$$\mathcal{L}^{(1)} = -i \ln \left[\det \left(-i\gamma_\mu \partial^\mu - e\gamma_\mu A^\mu - \frac{1}{12} \frac{g}{m} \sigma_{\mu\nu\lambda} \mathcal{H}^{\mu\nu\lambda} - m \right) \right] + i \ln \left[\det \left(-i\gamma_\mu \partial^\mu - m \right) \right]. \quad (5.14)$$

A fim de se calcular os determinantes acima, deve-se notar que seus valores não são alterados sob uma transformação de similaridade $\det[M] = \det[SMS^{-1}]$. Em especial, usando como transformação a conjugação de carga \mathcal{C} ,² pode-se reescrever os determinantes como

$$\det \left(i\gamma_\mu \partial^\mu - m \right) = \det \left[\left(-i\gamma_\mu \partial^\mu - m \right) \left(i\gamma_\nu \partial^\nu - m \right) \right]^{\frac{1}{2}}, \quad (5.15)$$

² A simetria discreta de conjugação de carga é uma transformação que transforma todas as partículas em suas correspondentes anti-partículas, mudando assim o sinal de todas as cargas: não somente a carga elétrica, mas também as cargas relevantes às outras forças do sistema. Aqui pode-se escolher a conjugação de carga como uma transformação de similaridade devido ao fato da QED respeitar a simetria de carga, além de estar diagonalizando o operador de Dirac.

e também que

$$\begin{aligned}
& \det \left(i\gamma_\mu \partial^\mu - e\gamma_\mu A^\mu - \frac{1}{12} \frac{g}{m} \sigma_{\mu\nu\lambda} \mathcal{H}^{\mu\nu\lambda} - m \right) = \\
& = \det \left[\left(-i\gamma_\mu \partial^\mu - e\gamma_\mu A^\mu - \frac{1}{12} \frac{g}{m} \sigma_{\mu\nu\lambda} \mathcal{H}^{\mu\nu\lambda} - m \right) \right. \\
& \left. \times \left(i\gamma_\mu \partial^\mu + e\gamma_\mu A^\mu - \frac{1}{12} \frac{g}{m} \sigma_{\mu\nu\lambda} \mathcal{H}^{\mu\nu\lambda} - m \right) \right]^{\frac{1}{2}} \quad (5.16)
\end{aligned}$$

onde foi utilizado o fato de que $\mathcal{C}\gamma^\mu\mathcal{C}^{-1} = -\gamma^\mu$ e $\det[M] = \det[M\mathcal{C}M\mathcal{C}^{-1}]^{\frac{1}{2}}$. Com estes resultados, pode-se reescrever a expressão Eq. (5.14)

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}^{(1)} = & -\frac{i}{2} Tr \left\{ -\ln [(-i\gamma_\mu \partial^\mu - m) (i\gamma_\mu \partial^\mu - m)] \right. \\
& \left. - \ln \left[\left(i\gamma_\mu \partial^\mu + e\gamma_\mu A^\mu + \frac{1}{12} \frac{g}{m} \sigma_{\mu\nu\lambda} \mathcal{H}^{\mu\nu\lambda} + m \right) \left(i\gamma_\nu \partial^\nu + e\gamma_\nu A^\nu - \frac{1}{12} \frac{g}{m} \sigma_{\alpha\beta\gamma} \mathcal{H}^{\alpha\beta\gamma} - m \right) \right] \right\}. \quad (5.17)
\end{aligned}$$

Em seguida, defini-se os operadores “Hamiltonianos”³

$$\begin{aligned}
\mathcal{H} & = \left(-i\gamma_\mu \partial^\mu - e\gamma_\mu A^\mu - \frac{1}{12} \frac{g}{m} \sigma_{\mu\nu\lambda} \mathcal{H}^{\mu\nu\lambda} - m \right) \left(i\gamma_\mu \partial^\mu + e\gamma_\mu A^\mu - \frac{1}{12} \frac{g}{m} \sigma_{\mu\nu\lambda} \mathcal{H}^{\mu\nu\lambda} - m \right) \\
\mathcal{H}_0 & = (-i\gamma_\mu \partial^\mu - m) (i\gamma_\mu \partial^\mu - m), \quad (5.18)
\end{aligned}$$

de tal forma que pode-se escrever a Lagrangeana efetiva Eq. (5.17) como

$$\mathcal{L}^{(1)} = -\frac{i}{2} Tr \{ \ln[\mathcal{H}] - \ln[\mathcal{H}_0] \}. \quad (5.19)$$

Com o auxílio da representação integral da função ln

$$\ln M = - \int_0^\infty \frac{ds}{s} e^{-iMs}, \quad (5.20)$$

pode-se reescrever a Eq. (5.19) como

$$\mathcal{L}^{(1)} = \frac{i}{2} \int_0^\infty \frac{ds}{s} tr \left\{ e^{-i\mathcal{H}s} - e^{-i\mathcal{H}_0s} \right\}. \quad (5.21)$$

³ Denomina-se estes operadores desta maneira devido ao fato deles atuarem como parte do operador evolução temporal no parâmetro s chamado de “tempo próprio” por Schwinger.

Utilizando as propriedades 13 e 14 das matrizes γ (presentes no Apêndice C) e levando em consideração que se está trabalhando com campos constantes, a “Hamiltoniana” interagente em Eq. (5.18) pode ser escrita como

$$\mathcal{H} = \Pi^2 - \frac{e}{2} \sigma_{\mu\sigma} \mathcal{F}^{\mu\sigma} + i \frac{g}{m} \gamma_5 \widetilde{\mathcal{H}}_\mu \Pi^\mu + \frac{1}{4} \left(\frac{g}{m} \gamma_5 \widetilde{\mathcal{H}}_\zeta \right)^2 + ig \gamma_5 \gamma^\zeta \widetilde{\mathcal{H}}_\zeta + m^2, \quad (5.22)$$

onde foi escrito a derivada covariante $\Pi^\mu = -i\partial^\mu - eA^\mu$ e introduzido o tensor dual $\widetilde{\mathcal{H}}_\alpha = \frac{1}{3!} \varepsilon_{\alpha\beta\sigma\rho} \mathcal{H}^{\beta\sigma\rho}$. Agora, com o resultado Eq. (5.22), escreve-se explicitamente a Lagrangeana efetiva como

$$\mathcal{L}^{(1)} = \frac{i}{2} \int_0^\infty \frac{ds}{s} \text{tr} \left\{ e^{-i \left[\Pi^2 - i \frac{g}{m} \gamma_5 \widetilde{\mathcal{H}}_\mu \Pi^\mu + \frac{1}{4} \left(\frac{g}{m} \gamma_5 \widetilde{\mathcal{H}}_\zeta \right)^2 + \mathcal{S}^2 \right] s} - e^{-i[\Pi^2 + m^2]s} \right\}, \quad (5.23)$$

ou ainda, pode-se expressá-la numa forma conveniente

$$\mathcal{L}^{(1)} = \frac{i}{2} \int_0^\infty \frac{ds}{s} \text{tr} [U(x', x, s) - U_0(x', x, s)], \quad (5.24)$$

em que foi definido $\mathcal{S}^2 = -\frac{e}{2} \sigma_{\mu\sigma} \mathcal{F}^{\mu\sigma} + m^2 - ig \gamma_5 \gamma^\mu \widetilde{\mathcal{H}}_\mu$. Lembrando que para manter a convergência da amplitude de transição toma-se $m^2 \rightarrow m^2 - i\varepsilon$. Seguindo o método de Schwinger, interpreta-se o operador

$$U(x', x, s) = \langle x' | e^{-i\mathcal{H}s} | x \rangle \quad (5.25)$$

como sendo o operador de evolução temporal de um dado sistema quântico, em que \mathcal{H} é o operador responsável pela dinâmica e que s é o tempo próprio da partícula. Lembrando que na representação de interação, os autoestados e operadores evoluem no tempo a partir das seguintes relações

$$\begin{aligned} A(s) &= e^{iHs} A(0) e^{-iHs} \\ |x'(s)\rangle &= e^{-iHs} |x'(0)\rangle. \end{aligned} \quad (5.26)$$

em que os operadores posição satisfazem as seguintes equações de auto-valores

$$\begin{aligned}x'(s) |x'(s)\rangle &= x' |x'(s)\rangle \\x(0) |x\rangle &= x |x\rangle.\end{aligned}\tag{5.27}$$

É importante enfatizar as diferenças entre o método aplicado nas Seções anteriores para análise da Lagrangeana efetiva com o método apresentado agora em termos do operador de evolução temporal (5.24). No caso de ter-se somente o campo eletromagnético, o cálculo do elemento de matriz $\langle x | e^{-is\Pi^2} | x \rangle$ era relativamente simples em termos de propagadores, entretanto neste caso no qual contém o campo de Kalb-Ramond, o sistema de equações diferenciais a se resolver torna-se mais complicado devido à dependência linear que surge em k ao invés de só o termo quadrático em Eq. (3.34). Assim, o uso do formalismo do operador de evolução temporal se mostra mais adequado para casos gerais, em que mais de um campo está presentes e que os operadores Hamiltonianos tenham expressões complicadas. Pode-se ainda pensar que a solução em termos de propagadores seja um caso particular do método do operador de evolução temporal.

Para determinar explicitamente a Lagrangeana efetiva é necessário encontrar as soluções para os operadores de evolução temporal em Eq. (5.24). Na mecânica clássica o operador de evolução temporal é responsável pelas transformações

$$\begin{aligned}x_\mu(s) &= x_\mu(x(0), p(0), s) \\p_\mu(s) &= p_\mu(x(0), p(0), s)\end{aligned}\tag{5.28}$$

o qual é resolvido solucionando as equações de Hamilton-Jacobi (LEMOS, 2007). Como se está trabalhando com um sistema quântico, as equações equivalentes às equações de Hamilton-Jacobi para um sistema são dadas por

$$\begin{aligned}\mathcal{H}U(x'(s), x(0), s) &= i \frac{\partial}{\partial s} U(x'(s), x(0), s) \\ \Pi_\mu(0)U(x'(s), x(0), s) &= (-i\partial^\mu - eA^\mu(x))U(x'(s), x(0), s) \\ \Pi_\mu(s)U(x'(s), x(0), s) &= (i\partial'^\mu - eA^\mu(x'))U(x'(s), x(0), s),\end{aligned}\tag{5.29}$$

com a condição inicial de que

$$\lim_{s \rightarrow 0} U(x', x, s) = \delta(x' - x). \quad (5.30)$$

Para encontrar a forma funcional de $U(x', x, s)$ precisa-se resolver o conjunto de equações diferenciais em Eq. (5.29) sujeito a condição inicial Eq. (5.30). Juntamente com essas equações, deve-se também resolver as equações de movimento de Heisenberg para os operadores posição e momentos

$$\begin{aligned} \frac{dx_\mu(s)}{ds} &= -i[x_\mu(s), H] \\ \frac{d\Pi_\mu(s)}{ds} &= -i[\Pi_\mu(s), H]. \end{aligned} \quad (5.31)$$

O primeiro passo para determinar as soluções para a posição e momento deve-se calcular os comutadores presentes no lado direito da Eq. (5.31). Para isto é interessante reescrever a Eq. (5.22) em uma forma conveniente

$$H = \Pi^2 + N_\beta \Pi^\beta + \frac{1}{4} N_\beta N^\beta + \mathcal{L}^2, \quad (5.32)$$

onde $N_\mu = -i \frac{g}{m} \gamma_5 \widetilde{\mathcal{H}}_\mu$. O cálculo desses comutadores é direto, e resulta em

$$\begin{aligned} [x_\mu(s), H] &= 2i\Pi_\mu(s) + iN_\mu \\ [\Pi_\mu(s), H] &= ie\mathcal{F}_{\mu\nu}(2\Pi^\nu(s) + N^\nu). \end{aligned} \quad (5.33)$$

Portanto, vem-se que as equações de movimento são

$$\begin{aligned} \frac{dx_\mu(s)}{ds} &= 2\Pi_\mu(s) + N_\mu \\ \frac{d\Pi_\mu(s)}{ds} &= e\mathcal{F}_{\mu\nu}(2\Pi^\nu(s) + N^\nu). \end{aligned} \quad (5.34)$$

É interessante notar a simples contribuição do campo de Kalb-Ramond nas equações de movimento. Isto é, ele surge somente como uma constante aditiva (como uma translação), não modificando significativamente o movimento da partícula. Talvez devido à aproximação de que a fonte do campo de Kalb-Ramond sejam partículas pontuais considerada neste estudo. A solução para o momento é diretamente obtida a partir da segunda equação de (5.34) utilizando o

método de separação de variáveis

$$\Pi_{\mu}(s) = e^{2es\mathcal{F}_{\mu}^{\alpha}} \left(\Pi(0) + \frac{1}{2}N \right)_{\alpha} - \frac{1}{2}N_{\mu}. \quad (5.35)$$

Em seguida, substituindo este resultado para o momento na equação diferencial para a posição chega-se em

$$x_{\mu}(s) = x_{\mu}(0) + \left(\frac{e^{2es\mathcal{F}} - 1}{e^{\mathcal{F}}} \right)_{\mu}^{\beta} \left(\Pi(0) + \frac{1}{2}N \right)_{\beta}. \quad (5.36)$$

Por sua vez, com estes dois resultados pode-se encontrar a solução para o momento inicial, $\Pi_{\mu}(0)$,

$$\Pi_{\mu}(0) = \left(\frac{es\mathcal{F}}{e^{2es\mathcal{F}} - 1} \right)_{\mu}^{\beta} [x_{\beta}(s) - x_{\beta}(0)] - \frac{1}{2}N_{\mu}, \quad (5.37)$$

escrito em termos dos operadores posição. Esta operação de inversão, de escrever os operadores momento em termos da posição se torna útil para se determinar explicitamente o operador de evolução temporal, ordenando os operadores de tal forma que $x_{\mu}(s)$ fique sempre do lado esquerdo e $x_{\mu}(0)$ do lado direito, fazendo com que todos os operadores possam ser tratados como c-números. Pode-se proceder da mesma forma, e substituindo a Eq. (5.37) em Eq. (5.35) tem-se que

$$\Pi_{\mu}(s) = \left(\frac{e^{\mathcal{F}}}{1 - e^{-2es\mathcal{F}}} \right)_{\mu}^{\beta} [x_{\beta}(s) - x_{\beta}(0)] - \frac{1}{2}N_{\mu}. \quad (5.38)$$

Assim, com as equações de movimento foi possível encontrar soluções de $\Pi_{\mu}(s)$ e $\Pi_{\mu}(0)$ em função de $x(s)$ e $x(0)$,

$$\begin{aligned} \Pi_{\mu}(s) &= \frac{1}{2}e^{es\mathcal{F}_{\mu}^{\alpha}} \left(\frac{e^{\mathcal{F}}}{\sinh(es\mathcal{F})} \right)_{\alpha}^{\beta} [x_{\beta}(s) - x_{\beta}(0)] - \frac{1}{2}N_{\mu} \\ \Pi_{\mu}(0) &= \left(\frac{e^{\mathcal{F}}}{e^{2es\mathcal{F}} - 1} \right)_{\mu}^{\beta} [x_{\beta}(s) - x_{\beta}(0)] - \frac{1}{2}N_{\mu}, \end{aligned} \quad (5.39)$$

onde foi utilizado a identidade $2e^{-e\mathcal{F}s} \sinh(e\mathcal{F}s) = 1 - e^{-2e\mathcal{F}s}$. Ao substituir o resultado para $\Pi_\mu(s)$ em Eq. (5.39) na Hamiltoniana, chega-se em

$$\mathcal{H} = [x_\beta(s) - x_\beta(0)] K^{\beta\gamma} [x_\gamma(s) - x_\gamma(0)] + \mathcal{I}^2, \quad (5.40)$$

em que se introduziu a notação $K^{\beta\gamma} = \frac{1}{4} \left[\left(\frac{e\mathcal{F}}{\sinh(es\mathcal{F})} \right)^2 \right]^{\beta\gamma}$. Agora é necessário rearranjar os termos de modo que os operadores posição fiquem ordenados no tempo devido as integrais presentes na IC e também para que os operadores possam ser tratados como c-números como discutido anteriormente. Portanto, levando em conta esse ordenamento a Eq. (5.40) é escrita como

$$\begin{aligned} \mathcal{H} = & x_\beta(s) K^{\beta\gamma} x_\gamma(s) - 2x_\beta(s) K^{\beta\gamma} x_\gamma(0) + x_\beta(0) K^{\beta\gamma} x_\gamma(0) \\ & - \frac{i}{2} \text{tr} \left[\frac{e\mathcal{F}}{\tanh(es\mathcal{F})} \right] + \mathcal{I}^2, \end{aligned} \quad (5.41)$$

onde foi utilizado o resultado da seguinte relação de comutação:

$$x_\beta(s) K^{\beta\gamma} x_\gamma(0) - x_\beta(0) K^{\beta\gamma} x_\gamma(s) = -\frac{i}{2} \text{tr} \left[\frac{e\mathcal{F}}{\tanh(e\mathcal{F}s)} \right].$$

Pode-se por fim substituir os resultados para \mathcal{H} , $\Pi(0)$ e $\Pi(s)$ obtidos acima no conjunto de equações (5.29), obtendo respectivamente

$$\begin{aligned} i \frac{\partial}{\partial s} U(x'(s), x(0), s) = & \left\{ x_\beta(s) K^{\beta\gamma} x_\gamma(s) - 2x_\beta(s) K^{\beta\gamma} x_\gamma(0) + x_\beta(0) K^{\beta\gamma} x_\gamma(0) \right. \\ & \left. - \frac{i}{2} \text{tr} \left[\frac{e\mathcal{F}}{\tanh(e\mathcal{F}s)} \right] + \mathcal{I}^2 \right\} U(x'(s), x(0), s), \end{aligned} \quad (5.42)$$

e

$$\begin{aligned} (-i\partial^\mu - eA^\mu(x)) U(x'(s), x(0), s) = & \left\{ \left(\frac{e\mathcal{F}}{e^{2e\mathcal{F}s} - 1} \right)^{\mu\beta} [x(s) - x(0)]_\beta - \frac{1}{2} N^\mu \right\} \\ & \times U(x'(s), x(0), s) \end{aligned} \quad (5.43)$$

$$\begin{aligned} (i\partial'^\mu - eA^\mu(x')) U(x'(s), x(0), s) = & \left\{ \left(\frac{e\mathcal{F}}{1 - e^{-2e\mathcal{F}s}} \right)^{\mu\beta} [x(s) - x(0)]_\beta - \frac{1}{2} N^\mu \right\} \\ & \times U(x'(s), x(0), s). \end{aligned} \quad (5.44)$$

Em seguida, é possível resolver a integração na Eq. (5.42) a partir do ansatz

$$U(x'(s), x(0), s) = \frac{1}{s^2} C(x', x) e^{\frac{i}{4s}(x'_\beta - x_\beta)} \left\{ \frac{e^{\mathcal{F}s}}{\tanh(e^{\mathcal{F}s})} \right\}^{\beta\gamma} (x'_\gamma - x_\gamma) e^{-\frac{1}{2}tr \ln \frac{\sinh(e^{\mathcal{F}s})}{e^{\mathcal{F}s}}} e^{-i\mathcal{F}^2 s}, \quad (5.45)$$

que tem uma forma gaussiana nas variáveis (x', x) , sendo que $C(x', x)$ é uma constante de integração e não possui dependência com s . É possível determinar uma expressão para $C(x', x)$ ao se substituir a Eq. (5.45) em Eq. (5.43) ou Eq. (5.44). Fazendo isto, chega-se nas seguintes expressões

$$\left\{ \left(\frac{e^{\mathcal{F}}}{e^{2e^{\mathcal{F}s}} - 1} \right)^{\mu\beta} [x(s) - x(0)]_\beta - \frac{1}{2} N^\mu + i\partial^\mu + eA^\mu(x) - \frac{1}{2s} \left\{ \frac{e^{\mathcal{F}s}}{\tanh(e^{\mathcal{F}s})} \right\}^{\mu\gamma} (x' - x)_\gamma \right\} C(x', x) = 0 \quad (5.46)$$

e

$$\left\{ \left(\frac{e^{\mathcal{F}}}{1 - e^{-2e^{\mathcal{F}s}}} \right)^{\mu\beta} [x(s) - x(0)]_\beta - \frac{1}{2} N^\mu - i\partial'^\mu + eA^\mu(x) + \frac{1}{2s} \left\{ \frac{e^{\mathcal{F}s}}{\tanh(e^{\mathcal{F}s})} \right\}^{\mu\gamma} (x' - x)_\gamma \right\} C(x', x) = 0, \quad (5.47)$$

que são as equações diferenciais para a constante de integração. Para resolvê-las, é útil notar que

$$\left(\frac{e^{\mathcal{F}}}{e^{2e^{\mathcal{F}s}} - 1} \right)^{\mu\beta} [x(s) - x(0)]_\beta - \frac{1}{2} \left\{ \frac{e^{\mathcal{F}}}{\tanh(e^{\mathcal{F}s})} \right\}^{\mu\gamma} (x' - x)_\gamma = -\frac{1}{2} e^{\mathcal{F}\mu\beta} [x(s) - x(0)]_\beta \quad (5.48)$$

e

$$\left(\frac{e^{\mathcal{F}}}{1 - e^{-2e^{\mathcal{F}s}}} \right)^{\mu\beta} [x(s) - x(0)]_\beta + \frac{1}{2} \left\{ \frac{e^{\mathcal{F}}}{\tanh(e^{\mathcal{F}s})} \right\}^{\mu\gamma} (x' - x)_\gamma = \frac{1}{2} e^{\mathcal{F}\mu\beta} [x(s) - x(0)]_\beta. \quad (5.49)$$

Com estes resultados as duas equações diferenciais para a constante de integração simplificam e podem ser escritas simplesmente como

$$\begin{aligned} \left[-i\partial^\mu - eA^\mu(x) + \frac{1}{2}N^\mu + \frac{1}{2}e\mathcal{F}^{\mu\beta}(x'_\beta - x_\beta) \right] C(x', x) &= 0 \\ \left[i\partial'^\mu - eA^\mu(x) + \frac{1}{2}N^\mu - \frac{1}{2}e\mathcal{F}^{\mu\beta}(x'_\beta - x_\beta) \right] C(x', x) &= 0. \end{aligned} \quad (5.50)$$

Resolvendo-as simultaneamente chega-se ao seguinte resultado para a constante de integração

$$C(x', x) = C_0 e^{-i \int_x^{x'} \left(eA^\mu(y) - \frac{1}{2}N^\mu - \frac{1}{2}e\mathcal{F}^{\mu\beta}(y'_\beta - y_\beta) \right) dy_\mu}, \quad (5.51)$$

onde C_0 é uma constante que pode ser obtida a partir da condição inicial Eq. (5.30), tendo como resultado o valor

$$C_0 = -i \frac{1}{16\pi^2}. \quad (5.52)$$

Portanto, após determinar a solução para a constante de integração $C(x', x)$ (5.51), escreve-se o operador evolução temporal (5.45) da seguinte forma

$$\begin{aligned} U(x'(s), x(0), s) &= -i \frac{1}{16\pi^2 s^2} \phi(x', x) \\ &\times \exp \left[\frac{i}{4s} (x' - x)_\beta \left\{ \frac{es\mathcal{F}}{\tanh(es\mathcal{F})} \right\}^{\beta\gamma} (x' - x)_\gamma - \frac{1}{2} \text{tr} \ln \frac{\sinh(es\mathcal{F})}{es\mathcal{F}} - i\mathcal{L}^2 s \right], \end{aligned} \quad (5.53)$$

onde foi definido o fator invariante de gauge como

$$\phi(x', x) = e^{-i \int_x^{x'} \left(eA^\mu(y) - \frac{1}{2}N^\mu - \frac{1}{2}e\mathcal{F}^{\mu\beta}(y'_\beta - y_\beta) \right) dy_\mu}.$$

É possível determinar $U_0(x'(s), x(0), s)$ presente na Eq. (5.24), i.e. o operador para campos nulos, basta tomar o limite de $A_\mu \rightarrow 0$ e $B_{\mu\nu} \rightarrow 0$ na expressão Eq. (5.53). Com esta aplicação tem-se

$$U_0(x'(s), x(0), s) = -i \frac{1}{16\pi^2 s^2} e^{\frac{i}{4s}(x'-x)^2} e^{-im^2 s}. \quad (5.54)$$

Entretanto, deve-se lembrar que como nos casos anteriores esta-se interessados na transição vácuo-vácuo, ou seja determinar os operadores de evolução temporal no ponto $x'(s) = x(0)$.

Desta forma, as Eqs. (5.53) e (5.54) se resumem a

$$\begin{aligned} U(x'(s), x(0), s) &= -i \frac{1}{16\pi^2 s^2} e^{-\frac{1}{2} \text{tr} \ln \frac{\sinh(e\mathcal{F}s)}{e\mathcal{F}s}} e^{-i\mathcal{I}^2 s} \\ U_0(x'(s), x(0), s) &= -i \frac{1}{16\pi^2 s^2} e^{-im^2 s}. \end{aligned} \quad (5.55)$$

Substituindo estes resultados na Lagrangeana efetiva Eq. (5.24) obtêm-se

$$\mathcal{L}^{(1)} = \frac{1}{32\pi^2} \int_0^\infty \frac{ds}{s^3} e^{-im^2 s} \left[e^{-\frac{1}{2} \text{tr} \ln \frac{\sinh(e\mathcal{F}s)}{e\mathcal{F}s}} \text{tr} \left(e^{-i\mathcal{V}^2 s} \right) - 4 \right], \quad (5.56)$$

onde $\mathcal{V}^2 = -\frac{\epsilon}{2} \sigma_{\mu\sigma} \mathcal{F}^{\mu\sigma} - ig\gamma_5 \gamma^\mu \widetilde{\mathcal{H}}_\mu$.

Agora que foi determinado a forma funcional da Lagrangeana efetiva, é necessário calcular as operações de traço dos respectivos operadores na Eq. (5.56). O primeiro termo envolvendo o cálculo de traço já foi calculado em (3.97) na Seção 3.3,

$$\exp \left[-\frac{1}{2} \text{tr} \ln \frac{\sinh(e\mathcal{F}s)}{e\mathcal{F}s} \right] = \left[\frac{(es)^2 ab}{\sinh(eps) \sin(eas)} \right], \quad (5.57)$$

em que define-se

$$a = \left(\sqrt{\mathcal{Y}^2 + \mathcal{R}^2} + \mathcal{Y} \right)^{\frac{1}{2}}, \quad b = \left(\sqrt{\mathcal{Y}^2 + \mathcal{R}^2} - \mathcal{Y} \right)^{\frac{1}{2}}, \quad (5.58)$$

em termos dos invariantes de Lorentz

$$\mathcal{R} = \frac{1}{4} \mathcal{F}^{\mu\sigma} \widetilde{\mathcal{F}}_{\mu\sigma}, \quad \mathcal{Y} = \frac{1}{4} \mathcal{F}_\lambda^\sigma \mathcal{F}_\sigma^\lambda, \quad (5.59)$$

note que esta contribuição envolve somente o campo eletromagnético Para o segundo traço em Eq. (5.56), segue-se a mesma ideia de escrever \mathcal{V}^2 em termos de invariantes de Lorentz, sendo que em adição aos que envolvem o campo de Maxwell há outros dois envolvendo o campo de Kalb-Ramond

$$\begin{aligned} \mathcal{G} &= \frac{1}{12} \mathcal{H}_{\mu\nu\lambda} \mathcal{H}^{\mu\nu\lambda}, \\ \mathcal{I}^2 &= -\frac{1}{12} \left(\widetilde{\mathcal{H}}^\mu \widetilde{\mathcal{F}}_{\mu\sigma} \right) \left(\widetilde{\mathcal{F}}^{\mu\sigma} \widetilde{\mathcal{H}}_\sigma \right) = \frac{1}{48} \left(\mathcal{F}^{\mu\sigma} \mathcal{H}_{\sigma\nu\lambda} \right) \left(\mathcal{H}^{\mu\nu\lambda} \mathcal{F}_{\nu\lambda} \right). \end{aligned} \quad (5.60)$$

Note que o invariante \mathcal{I}^2 é o único operador que apresenta uma mistura dos campos de Maxwell e Kalb-Ramond. A primeira manipulação é quadrar o operador \mathcal{V}^2 , tem-se assim que

$$(\mathcal{V}^2)^2 = \frac{e^2}{4} \frac{1}{2} \{ \sigma_{\mu\sigma}, \sigma_{\alpha\beta} \} \mathcal{F}^{\mu\sigma} \mathcal{F}^{\alpha\beta} + \frac{ige}{2} \{ \sigma_{\mu\sigma}, \gamma_5 \gamma^\alpha \} \mathcal{F}^{\mu\sigma} \widetilde{\mathcal{H}}_\alpha + g^2 \widetilde{\mathcal{H}}_\mu \widetilde{\mathcal{H}}^\mu. \quad (5.61)$$

em que foi utilizado no último termo $\{ \gamma_5, \gamma_\mu \} = 0$. O anti-comutador presente no primeiro termo já foi calculado anteriormente na Seção 3.3, $\{ \sigma_{\mu\sigma}, \sigma_{\alpha\beta} \} = 2 (\eta_{\sigma\alpha} \eta_{\mu\beta} - \eta_{\sigma\beta} \eta_{\mu\alpha} + i \varepsilon_{\mu\sigma\alpha\beta} \gamma_5)$. Desta forma, o resultado acima pode ser escrito como

$$(\mathcal{V}^2)^2 = 2e^2 \mathcal{Y} - 2g^2 \mathcal{G} + i2e^2 \gamma_5 \mathcal{R} + \frac{ige}{2} \{ \sigma_{\mu\sigma}, \gamma_5 \gamma^\alpha \} \mathcal{F}^{\mu\sigma} \widetilde{\mathcal{H}}^\alpha, \quad (5.62)$$

Por fim, a parte matricial do último termo de (5.62) é calculada utilizando a álgebra das matrizes γ chega-se em $\{ \sigma_{\mu\sigma}, \gamma_5 \gamma^\alpha \} = -2 \varepsilon_{\mu\sigma\alpha\beta} \gamma^\beta$. Logo, consegue-se escrever o operador \mathcal{V}^2 em termos de invariantes como

$$(\mathcal{V}^2)^2 = 2e^2 \mathcal{Y} - 2g^2 \mathcal{G} + i2e^2 \gamma_5 \mathcal{R} + i4\sqrt{3}eg\gamma^\beta \mathcal{I}_\beta. \quad (5.63)$$

Como quer-se calcular o traço do operador \mathcal{V}^2 , é necessário determinar os autovalores desse operador. Para este fim, reescreve-se Eq. (5.63) como

$$(\mathcal{V}^2)^2 = \alpha - \delta + i\beta\gamma_5 + i\gamma^\beta \chi_\beta, \quad (5.64)$$

em termos das seguintes quantidades $\alpha = 2e^2 \mathcal{Y}$, $\delta = 2g^2 \mathcal{G}$, $\beta = 2e^2 \mathcal{R}$ e $\chi_\beta = 4\sqrt{3}eg\mathcal{I}_\beta$. A partir da Eq. (5.64) pode-se ainda escrever

$$(\mathcal{V}^2)^4 = (\alpha - \delta)^2 - \beta^2 + \chi^2 + 2i(\alpha - \delta)\gamma^\alpha \chi_\alpha + i2\beta\gamma_5(\alpha - \delta). \quad (5.65)$$

Pode-se comparar as Eqs. (5.64) e (5.65), tal que pode-se notar que (\mathcal{V}^2) satisfaz a seguinte expressão

$$(\mathcal{V}^2)^4 - 2(\alpha - \delta)\mathcal{V}^2 + \{ (\alpha - \delta)^2 + \beta^2 - \chi^2 \} = 0, \quad (5.66)$$

e assim a partir dela é possível encontrar os autovalores de (\mathcal{V}^2) . Por fim, segue imediatamente que os quatro auto-valores são

$$(\mathcal{V}^2)^{AV} = \pm \left\{ 2 \left[(e^2 \mathcal{Y} - g^2 \mathcal{G}) \pm i \sqrt{e^4 \mathcal{R}^2 - 12e^2 g^2 \mathcal{J}^2} \right] \right\}^{\frac{1}{2}}. \quad (5.67)$$

Com estes resultados pode-se enfim calcular o último traço restante da Lagrangeana efetiva

$$\text{tr} \left(e^{-i\mathcal{V}^2 s} \right) = 4 \cosh [ies (a' + b')] \cosh [ies (a' - b')], \quad (5.68)$$

onde define-se os parâmetros

$$a' = \frac{1}{\sqrt{2}} \left[(\mathcal{Y} - \kappa^2 \mathcal{G}) + i \sqrt{\mathcal{R}^2 - 12\kappa^2 \mathcal{J}^2} \right]^{\frac{1}{2}} \quad (5.69)$$

e

$$b' = \frac{1}{\sqrt{2}} \left[(\mathcal{Y} - \kappa^2 \mathcal{G}) - i \sqrt{\mathcal{R}^2 - 12\kappa^2 \mathcal{J}^2} \right]^{\frac{1}{2}}, \quad (5.70)$$

sendo que foi definido o parâmetro $\kappa = g/e$ como a medida do desvio das contribuições do campo de Kalb-Ramond em relação à contribuição do campo de Maxwell.

Por fim, substituindo os resultados Eqs. (5.57) e (5.68) em Eq. (5.56), encontra-se a seguinte expressão para a Lagrangeana efetiva

$$\mathcal{L}^{(1)} = \frac{1}{8\pi^2} \int_0^\infty \frac{ds}{s^3} e^{-im^2 s} \left\{ (es)^2 ab \frac{\cos [es (a' + b')] \cos [es (a' - b')]}{\sinh (ebs) \sin (eas)} - 1 \right\}. \quad (5.71)$$

É importante ressaltar que o limite de campos nulos já foi levado em conta desde o início e por isso o fator -1 na Lagrangeana efetiva Eq. (5.71), e também que ela é reduzida àquela de Euler-Heisenberg Eq. (3.100) no limite de $\kappa \rightarrow 0$. A fim de complementar a análise desta expressão da Lagrangeana efetiva, é de estabelecer se ela possui termos divergentes quando $s \rightarrow 0$ como aconteceu nos casos anteriores. Para verificar esse comportamento, expande-se o integrando da Eq. (5.71) em série de potências em s , assim

$$\mathcal{L}^{(1)} = \frac{1}{8\pi^2} \int_0^\infty \frac{ds}{s^3} e^{-im^2 s} \left(-\frac{2}{3} e^2 s^2 \mathcal{Y} + s^2 g^2 \mathcal{G} + \dots \right). \quad (5.72)$$

ou seja há termos da ordem $\int_0^\infty \frac{ds}{s}$ que são divergentes. Para solucionar o problema é necessário a absorção desses termos divergentes nas constantes de renormalização dos parâmetros físicos. O processo de renormalização deve ser realizado em termos da Lagrangeana total, portanto escreve-se ela em termos dos parâmetros nus

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_R = & -\mathcal{Y}_0 (1 + e_0^2 C_e) - \mathcal{G}_0 (1 - g_0^2 C_g) \\ & + \frac{1}{8\pi^2} \int_0^\infty \frac{ds}{s^3} e^{-im^2 s} \left\{ (e_0 s)^2 ab \frac{\cosh[ie_0 s (a' + b')] \cosh[ie_0 s (a' - b')]}{\sinh(e_0 b s) \sin(e_0 a s)} + \frac{2}{3} e_0^2 s^2 \mathcal{Y}_0 - s^2 g_0^2 \mathcal{G}_0 - 1 \right\}, \end{aligned} \quad (5.73)$$

onde foi definido as constantes de renormalização associadas com os campos e constantes de acoplamento de Maxwell e de Kalb-Ramond respectivamente como

$$C_e = \frac{1}{12\pi^2} \lim_{x \rightarrow 0} \int_x^\infty \frac{ds}{s} e^{-im^2 s}, \quad C_g = \frac{1}{8\pi^2} \lim_{x \rightarrow 0} \int_x^\infty \frac{ds}{s} e^{-im^2 s}. \quad (5.74)$$

Pode-se então redefinir as grandezas físicas presentes em (5.73) da seguinte forma

$$\begin{aligned} \mathcal{Y} &= \mathcal{Y}_0 (1 + e_0^2 C_e), & \mathcal{R} &= \mathcal{R}_0 (1 + g_0^2 C_g), \\ \mathcal{G} &= \mathcal{G}_0 (1 - g_0^2 C_g), & \mathcal{I}^2 &= \mathcal{I}_0^2 (1 - g_0^2 C_g) (1 + e_0^2 C_e), \\ e^2 &= \frac{e_0^2}{(1 + e_0^2 C_e)}, & g^2 &= \frac{g_0^2}{(1 - g_0^2 C_g)}. \end{aligned} \quad (5.75)$$

Pode-se notar que somente a renormalização do invariante \mathcal{I}^2 que apresenta uma mistura das constantes C_e e C_g , os demais invariantes e parâmetros são desacoplados. Por fim, com estas novas redefinições é possível reescrever Eq. (5.73), ou seja a Lagrangeana de Euler-Heisenberg generalizada, como

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_R = & -\mathcal{Y} - \mathcal{G} + \frac{1}{8\pi^2} \int_0^\infty \frac{ds}{s^3} e^{-im^2 s} \left\{ (es)^2 ab \frac{\cosh[is (a' + b')] \cosh[is (a' - b')]}{\sinh(ebs) \sin(eas)} \right. \\ & \left. + \frac{2}{3} e^2 s^2 \mathcal{Y} - s^2 g^2 \mathcal{G} - 1 \right\}. \end{aligned} \quad (5.76)$$

Que é o resultado obtido por H. Dass e K. Shajesh (DASS; SHAJESH, 2002).

De forma a ilustrar o comportamento não-linear das novas contribuições, pode-se considerar uma expansão perturbativa em primeira ordem dos parâmetros e e g (ou ainda κ). Desta

forma, a expressão para a Lagrangeana efetiva para o limite de campos fracos é

$$\mathcal{L}_R = -\mathcal{Y} - \mathcal{G} + \frac{e^4}{8\pi^2 m^4} \left(\frac{4}{45} \mathcal{Y}^2 + \frac{7}{45} \mathcal{R}^2 - \frac{1}{6} \kappa^4 \mathcal{G}^2 + 2\kappa^2 \mathcal{J}^2 \right). \quad (5.77)$$

Podemos calcular as equações de movimento do campo eletromagnético e o campo de Kalb-Ramond a fim de visualizar as mudanças causadas pelos efeitos não-lineares outro. A equação de movimento para o campo eletromagnético é dada por

$$\partial_\alpha \left(\mathcal{F}^{\alpha\beta} - \frac{16\alpha^2}{45m^4} \mathcal{F}^{\alpha\beta} \mathcal{Y} - \frac{28\alpha^2}{45m^4} \widetilde{\mathcal{F}}^{\alpha\beta} \mathcal{R} + \frac{4\sqrt{3}\alpha\rho}{3m^4} \mathcal{H}^{\alpha\beta\lambda} \mathcal{J}_\lambda \right) = 0, \quad (5.78)$$

onde $\rho = \frac{g^2}{4\pi}$. Vemos assim uma contribuição proporcional ao campo de Kalb-Ramond em relação aos termos de auto-interação do campo eletromagnético usualmente presentes na Eq. (3.107). Esse termo adicional devido à interação dos campos de Maxwell e Kalb-Ramond podem a priori ser utilizado para estudar contribuições de teoria de cordas em fenômenos de fótons em baixa-energia, procurando basicamente por anomalias na dinâmica do fóton que poderiam ser atribuídas à física além do modelo padrão. Ademais, por complementaridade, a equação de movimento relacionada ao campo de Kalb-Ramond é dada por

$$\partial_\alpha \left[\mathcal{H}^{\alpha\beta\omega} + \frac{2\rho^2}{3m^4} \mathcal{H}^{\alpha\beta\omega} \mathcal{G} - \frac{4\sqrt{3}\alpha\rho}{3m^4} \left(\mathcal{F}^{\alpha\beta} \mathcal{J}^\omega + \mathcal{F}^{\beta\omega} \mathcal{J}^\alpha + \mathcal{F}^{\omega\alpha} \mathcal{J}^\beta \right) \right] = 0, \quad (5.79)$$

onde $\mathcal{J}_\lambda = \frac{1}{4\sqrt{3}} \mathcal{H}_{\lambda\mu\sigma} \mathcal{F}^{\mu\sigma}$.

Portanto pode-se ver a presença de novos termos na Lagrangeana efetiva devido ao acoplamento entre os campos eletromagnético e o de Kalb-Ramond. O primeiro termo, de ordem κ^4 é proporcional à auto-interação do campo de Kalb-Ramond, $-\mathcal{G}^2$, o segundo termo adicional na Lagrangeana efetiva representa a interação entre os campos eletromagnético e o Kalb-Ramond, \mathcal{J}^2 . Ou seja, além da auto-interação quártica (efeitos não-lineares no vértice $\langle AAAA \rangle$) do campo eletromagnético tem-se também a presença de um novo vértice de interação $\langle AABB \rangle$, que de fato dá uma contribuição não-nula no processo de espalhamento luz-luz. Ademais, pode-se notar também a aparição de somente termos quadráticos assim como no caso do campo eletromagnético puro, mostrando uma possível evidência de que o campo de Kalb-Ramond também obedece ao teorema de Furry e que somente diagramas contendo um número

par de pernas contribuem para um processo de espalhamento luz-luz. É interessante ressaltar que no limite em que a constante κ tende a zero o resultado de Euler-Heisenberg é restaurado.

6 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Nesta dissertação foi discutido o cálculo da Ação Efetiva a partir do método do tempo próprio de Schwinger para diversos sistemas físicos. É importante ressaltar a natureza não-perturbativa da abordagem de Schwinger, uma vez que o cálculo do determinante dos operadores de Dirac (no caso de férmions) é exato, e se resume ao cálculo de auto-valores de certos operadores diferenciais e também de matrizes γ .

Tinha-se como interesse ao longo deste trabalho o cálculo de correções quânticas à dinâmica do fóton. Pode-se dizer que a ação de Maxwell para o campo eletromagnético sofre correções devido à polarização do vácuo, i.e. dependendo da energia do fóton há uma determinada probabilidade de que a sua propagação seja afetada por sua interação com pares virtuais de partícula-antipartícula, satisfazendo a relação de incerteza $\Delta E \Delta t \sim \hbar$ que resulta na flutuação do vácuo.

Primeiro foi realizado o cálculo da ação efetiva para o caso de férmions sujeitos a um campo magnético externo, e em seguida como seria o caso complementar de um campo elétrico externo, ambos constantes (i.e. campos com pequenas oscilações). Devido aos efeitos não-lineares (quânticos) oriundos do vácuo, é de interesse analisar o limiar da probabilidade de criação de pares de partículas e antipartículas, em particular mostrou-se que no caso de um campo elétrico, existe a possibilidade de criação destes pares, Eq. (3.75), fazendo com que o vácuo se torne um meio polarizado, ou seja birrefringente. Por outro lado, para o caso de campo magnético puro, não há criação de pares (ou seja o campo magnético constante não realiza trabalho para haver mudança na energia do sistema). Todavia, introduzindo campos magnéticos que variam com o tempo, a probabilidade de criação se torna diferente de zero, em geral o tempo de variação do campo deve ser muito menor que $t = \frac{\lambda_e}{c}$, onde λ_e é o comprimento de onda do elétron.

Após apresentar a análise dos casos de campos magnético ou elétrico constantes, fora discutido o caso geral do cálculo da ação efetiva para um campo eletromagnético no qual envolve algumas sutilezas quanto ao cálculo de traços de certos operadores matriciais. A expressão renormalizada obtida para a Lagrangeana efetiva é *1-loop* exata, i.e. leva em conta todas as contribuições de diferentes ordens em α que sejam de *1-loop*, resultando na conhecida Lagrangeana de Euler-Heisenberg (HEISENBERG; EULER, 1936). Ademais, a fim de ilustrar as modificações na dinâmica do fóton, considerou-se o primeiro termo da expansão na constante de acoplamento na ordem de α^2 .

No Capítulo seguido foi explorado o método da Ação Efetiva para calcular alguns exemplos conhecidos, mas que são bastante enriquecedores: um gás de férmions à temperatura finita, a força entre placas do efeito Casimir, a ação efetiva para a QED_{2+1} na presença de campos constantes e não constantes. Seguiu-se a abordagem de Matsubara para a introdução de temperatura no gás de férmions, que consiste na compactificação da dimensão temporal $t \in [0, \beta]$ e que resulta na discretização das frequências de oscilação dos férmions, i.e. $\omega_n = \frac{(2n+1)\pi}{\beta}$, em que $\beta = (k_B T)^{-1}$. Para o cálculo de uma expressão fechada para a Lagrangeana efetiva para um gás de férmions à temperatura finita foi necessário assumir alguns limites de massa e campo nulos na função zeta de Riemann. De maneira bastante similar ao caso de temperatura, foi abordado o efeito Casimir para o cálculo da força de atração experimentada por duas placas descarregadas, a análise seguia via função zeta sujeita a condições de contorno de Dirichlet.

Por fim, quis-se explorar as nuances que ocorrem em teoria de campos devido à redução dimensional do espaço-tempo. Para isso foi analisado a ação efetiva para a QED tridimensional, embora a estrutura geral não-perturbativa não sofra muitas mudanças nesse processo de redução dimensional, veja a Eq. (4.82), as consequências são importantes, sendo o fenômeno de geração de massa o mais importante. O termo de Chern-Simons Eq. (4.86) corresponde a um termo (topológico) de massa em três dimensões que preserva a simetria de gauge, mas quebra a simetria de paridade – um resultado de acordo com outros mecanismos de geração de massa, este processo está associado com a quebra de uma simetria, seja uma geração espontânea ou dinâmica.

Para finalizar o estudo na dissertação foi analisada a ação efetiva para os campos de Maxwell e de Kalb-Ramond seguindo os passos em (DASS; SHAJESH, 2002). O objeto desta análise era determinar uma Lagrangeana que apresentasse uma interação efetiva entre os campos de Maxwell e Kalb-Ramond, implicando assim em possíveis efeitos mensuráveis de um campo oriundo da teoria de cordas. A fim de simplificar o cálculo, assumiu-se que a interação do campo de Kalb-Ramond fosse com férmions pontuais e não objetos extensos, embora esta aproximação não resulte na forma de um acoplamento mínimo. Portanto, o resultado obtido para o limite de campos fracos, expresso em Eq. (5.77), mostra ainda a característica da presença de somente termos de potência par dos campos nas partes de interação e auto-interação, e que o acoplamento entre os campos de Maxwell e Kalb-Ramond é da seguinte forma $\mathcal{S}^2 = \frac{1}{48} (\mathcal{F}^{\mu\sigma} \mathcal{H}_{\sigma\nu\lambda}) (\mathcal{H}^{\mu\nu\lambda} \mathcal{F}_{\nu\lambda})$, em que \mathcal{F} e \mathcal{H} são os tensores dos campos de

Maxwell e Kalb-Ramond, respectivamente. Esta interação permite a priori uma perspectiva em determinar efeitos de teoria de cordas em física de baixa-energia.

Como perspectivas futuras do presente trabalho, pretende-se repetir a análise das ações efetivas para os campos eletromagnéticos e de Kalb-Ramond, porém com termos que violem a simetria de Lorentz, buscando novos fenômenos que surgem a partir destes termos. Ademais, pretende-se também analisar, com o formalismo de ações efetivas, o acoplamento entre o fóton e os axions, partículas de spin zero candidatas a matéria escura, afim de encontrar novos efeitos que possam ser medidos nos recentes experimentos discutidos em (BATTESTI et al., 2018).

REFERÊNCIAS

- ABRIKOSOV, A. A.; GORKOV, L. P.; DZYALOSHINSKI, I. E. **Methods of quantum field theory in statistical physics**. [S.l.]: Courier Corporation, 2012.
- ADLER, S. L. Photon splitting and photon dispersion in a strong magnetic field. **Annals of Physics**, Elsevier, v. 67, n. 2, p. 599–647, 1971.
- BATTESTI, R. et al. High magnetic fields for fundamental physics. **Physics Reports**, 2018. ISSN 0370-1573. Disponível em: <<http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S037015731830190X>>.
- BORN, M.; INFELD, L. Foundations of the new field theory. **Proceedings of the Royal Society of London. Series A, Containing Papers of a Mathematical and Physical Character**, JSTOR, v. 144, n. 852, p. 425–451, 1934.
- CARDOSO, T. R. O espaço-tempo não comutativo em teoria quântica de campos, matéria condensada mole e física biológica. Universidade Estadual Paulista (UNESP), 2016.
- CASIMIR, H. B. On the attraction between two perfectly conducting plates. In: **Proc. Kon. Ned. Akad. Wet.** [S.l.: s.n.], 1948. v. 51, p. 793.
- COLLABORATION, A. et al. Evidence for light-by-light scattering in heavy-ion collisions with the atlas detector at the lhc. **Nature Physics**, Nature Research, v. 13, n. 9, p. 852–858, 2017.
- DASS, N. H.; SHAJESH, K. Vacuum polarization induced coupling between maxwell and kalb-ramond fields. **Physical Review D**, APS, v. 65, n. 8, p. 085010, 2002.
- DÁVILA, J. M.; SCHUBERT, C.; TREJO, M. A. Photonic processes in born–infeld theory. **International Journal of Modern Physics A**, World Scientific, v. 29, n. 30, p. 1450174, 2014.
- DIRAC, P. A. The lagrangian in quantum mechanics. In: **Feynman’s Thesis—A New Approach To Quantum Theory**. [S.l.]: World Scientific, 2005. p. 111–119.
- DITTRICH, W.; GIES, H. **Probing the quantum vacuum: perturbative effective action approach in quantum electrodynamics and its application**. [S.l.]: Springer Science & Business Media, 2000. v. 166.
- DITTRICH, W.; REUTER, M. **Effective lagrangians in quantum electrodynamics**. [S.l.]: Springer, 1985.
- FELSAGER, B. **Geometry, particles, and fields**. [S.l.]: Springer Science & Business Media, 2012.
- FEYNMAN, R. P. The principle of least action in quantum mechanics. In: **Feynman’s Thesis—A New Approach To Quantum Theory**. [S.l.]: World Scientific, 2005. p. 1–69.
- FRADKIN, E.; TSEYTLIN, A. A. Non-linear electrodynamics from quantized strings. **Physics Letters B**, Elsevier, v. 163, n. 1-4, p. 123–130, 1985.
- GIES, H. Strong laser fields as a probe for fundamental physics. **The European Physical Journal D**, Springer, v. 55, n. 2, p. 311–317, 2009.

- GIES, H.; KARBSTEIN, F.; SEEGERT, N. Photon merging and splitting in electromagnetic field inhomogeneities. **Physical Review D**, APS, v. 93, n. 8, p. 085034, 2016.
- GIES, H.; TORGRIMSSON, G. Critical schwinger pair production. **Physical Review Letters**, APS, v. 116, n. 9, p. 090406, 2016.
- GRADSHTEYN, I. S.; RYZHIK, I. M. **Table of Integrals, series, and products**. [S.l.]: Academic press, 2014.
- GREINER, W. **Quantum mechanics: an introduction**. [S.l.]: Springer Science & Business Media, 2011.
- GREINER, W.; REINHARDT, J. **Field quantization**. [S.l.]: Springer Science & Business Media, 2013.
- HAUKNES, J. An effective action for a variable electromagnetic field. **Annals of Physics**, Elsevier, v. 156, n. 2, p. 303–323, 1984.
- HAWKING, S. W. Particle creation by black holes. **Communications in mathematical physics**, Springer, v. 43, n. 3, p. 199–220, 1975.
- HAWKING, S. W. Zeta function regularization of path integrals in curved spacetime. **Communications in Mathematical Physics**, Springer, v. 55, n. 2, p. 133–148, 1977.
- HEBENSTREIT, F. et al. Momentum signatures for schwinger pair production in short laser pulses with a subcycle structure. **Physical Review Letters**, APS, v. 102, n. 15, p. 150404, 2009.
- HEISENBERG, W.; EULER, H. Folgerungen aus der diracschen theorie des positrons. **Zeitschrift für Physik**, Springer, v. 98, n. 11-12, p. 714–732, 1936.
- HEISENBERG, W.; EULER, H. Consequences of dirac theory of the positron. **arXiv preprint physics/0605038**, 2006.
- JR, W. E. L.; RETHERFORD, R. C. Fine structure of the hydrogen atom by a microwave method. **Physical Review**, APS, v. 72, n. 3, p. 241, 1947.
- JÚNIOR, L. B. de S. Coordenadas vestidas: formulação segundo a interpretação de dirac-feynman para a mecânica quântica e aplicações em cqed. Universidade Estadual Paulista (UNESP), 2007.
- KALB, M.; RAMOND, P. Classical direct interstring action. **Physical Review D**, APS, v. 9, n. 8, p. 2273, 1974.
- KHARZEEV, D.; LEVIN, E.; TUCHIN, K. Multiparticle production and thermalization in high-energy qcd. **Physical Review C**, APS, v. 75, n. 4, p. 044903, 2007.
- LAMOREAUX, S. K. Demonstration of the casimir force in the 0.6 to 6 μ m range. **Physical Review Letters**, APS, v. 78, n. 1, p. 5, 1997.
- LEMOS, N. A. **Mecânica analítica**. [S.l.]: Editora Livraria da Física, 2007.
- MIGNANI, R. P. et al. Evidence of vacuum birefringence from the polarisation of the optical emission from an isolated neutron star. **arXiv preprint arXiv:1710.08709**, 2017.

PESKIN, M. E.; SCHROEDER, D. V. **An introduction to quantum field theory**. [S.l.]: CRC Press, 2018.

POLCHINSKI, J. **String theory, vol. 1, 2**. [S.l.: s.n.], 1998. v. 402.

ROSA, F. S. d. S. d. O efeito casimir e a ação efetiva em teorias de campo deformadas. Universidade Federal do Rio de Janeiro, Instituto de Física, UFRJ/IF, 2006.

SCHRECK, M. Vacuum cherenkov radiation for lorentz-violating fermions. **Physical Review D**, APS, v. 96, n. 9, p. 095026, 2017.

SCHWARTZ, M. D. **Quantum field theory and the standard model**. [S.l.]: Cambridge University Press, 2014.

SCHWINGER, J. On gauge invariance and vacuum polarization. **Physical Review**, APS, v. 82, n. 5, p. 664, 1951.

VALLE, F. D. et al. The pvlas experiment: measuring vacuum magnetic birefringence and dichroism with a birefringent fabry–perot cavity. **The European Physical Journal C**, Springer, v. 76, n. 1, p. 24, 2016.

WEISSKOPF, V. On the electrodynamics of the vacuum on the basis of the quantum theory of the electron. **Kgl. Dan. Vid. Selsk., Mat-fys. Medd.**, v. 24, p. 3–39, 1936.

APÊNDICE A – Integrais Gaussianas

Aqui será apresentado alguns resultados de integrais gaussianas que foram utilizadas no trabalho. Primeiro conhece-se o resultado para a integral gaussiana ordinária:

$$\int dx e^{-ax^2} = \left(\frac{\pi}{a}\right)^{\frac{1}{2}}. \quad (1)$$

Sendo x um vetor D -dimensional e A uma matriz simétrica podendo ser diagonalizada através de uma transformação de similaridade por uma matriz \mathcal{U} unitária:

$$A_{Diag} = \mathcal{U} A \mathcal{U}^{-1}. \quad (2)$$

Então uma mudança na variável $x' \rightarrow \mathcal{U} x$ não altera o elemento de volume. Assim, temos:

$$\begin{aligned} \int dx'^D e^{-x'^T A x'} &= \int dx^D e^{-x^T \mathcal{U} A \mathcal{U}^{-1} x} = \int dx^D e^{-x^T A_{Diag} x} \\ &= \prod_{i=1}^D \int dx_i e^{-\alpha_i x_i^2} = \prod_{i=1}^D \left(\frac{\pi}{\alpha_i}\right)^{\frac{1}{2}} = \sqrt[D]{\pi} (\det A)^{-\frac{1}{2}}. \end{aligned} \quad (3)$$

Outro resultado interessante é da seguinte integral:

$$\int dx^D e^{-\frac{1}{2}x^T A x + \rho x}. \quad (4)$$

Para encontrá-lo modifica-se o termo da exponencial completando quadrado:

$$-\frac{1}{2}x^T A x + \rho x = -\frac{1}{2}(x - A^{-1}\rho)^T A (x - A^{-1}\rho) - \rho^T A^{-1}\rho. \quad (5)$$

Fazendo a seguinte mudança na variável de integração $x' \rightarrow x - A^{-1}\rho$, o elemento de volume novamente não é alterado. Portanto tem-se

$$\int dx^D e^{-\frac{1}{2}x^T A x + \rho x} = \sqrt[D]{2\pi} (\det A)^{-\frac{1}{2}} e^{\rho^T A^{-1}\rho}. \quad (6)$$

Para o caso de variáveis de Grassman, que durante o trabalho entende-se como férmions, o resultado acima é

$$\int d\theta_1 \dots \theta_n e^{-\frac{1}{2}\theta^T A \theta + \rho \theta} = (\det A)^{\frac{1}{2}} e^{\rho^T A^{-1}\rho}, \quad (7)$$

onde θ_i simboliza as variáveis de Grassman.

Outro resultado interessante é o caso para variáveis de Grassman complexas, que tem como resultado

$$\int d\theta_1^* \cdots d\theta_n^* \theta_1 \cdots d\theta_n e^{-\theta^T A \theta} = \det A. \quad (8)$$

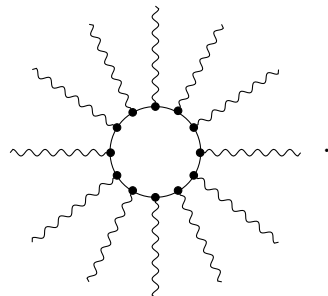
Estes são os resultados utilizados no decorrer do trabalho.

APÊNDICE B – Cálculo do Funcional $iW[A]^{(1)}$ e $\frac{i\delta W[A]^{(1)}}{\delta A_\mu(x)}$

Neste apêndice será mostrado o cálculo da forma geral da ação efetiva a 1-loop. Como visto na Seção 2.2, a ação efetiva, $\Gamma[A]$, pode ser calculada a partir da série de Volterra Eq. (2.67), e que em função do campo eletromagnético é escrita

$$\Gamma[A] = \sum_n \frac{1}{n} \int d^4x_1 \cdots d^4x_n \Gamma_{\mu_1 \dots \mu_n}(x_1 \dots x_n) A^{\mu_1}(x_1) \cdots A^{\mu_n}(x_n). \quad (9)$$

Como se está interessado na aproximação de 1-loop para a ação funcional, então os únicos diagramas que são levados em conta são



(10)

Aqui as linhas onduladas não representam o propagador do fóton, mas sim o campo eletromagnético externo. Cada linha sólida entre os pontos representa um propagador fermiônico. Por sua vez, cada ponto representa os vértices de interação entre o campo fermiônico com o campo eletromagnético. Para estabelecer a tradução do diagrama na linguagem de funções de vértice utilizamos as seguintes regras de Feynman:

- Um fator de (-1) deve ser inserido para cada *loop* fechado de férmion;
- Um fator de $(n-1)!$ para se levar em conta os grafos não equivalentes topologicamente que podem ser criados com as linhas dos “fótons”, após se fixar uma delas;
- Um fator $(e\gamma_\mu)$ é atribuído a cada vértice, indicando a interação com o campo externo;
- Um propagador livre $G_+(x_1, x_2)$ é atribuído a cada linha de férmion;
- Um *loop* de férmion requer um traço de Dirac.

Portanto, o diagrama (10) é escrito

$$\Gamma_{\mu_1 \dots \mu_n}(x_1 \dots x_n) = (-1)(n-1)! \text{tr} [(e\gamma_{\mu_1}) G_+(x_1, x_2) (e\gamma_{\mu_2}) G_+(x_2, x_3) \dots (e\gamma_{\mu_n}) G_+(x_n, x_1)]. \quad (11)$$

Substituindo Eq. (11) na Eq. (9),

$$\begin{aligned} \Gamma[A] &= \sum_n \frac{1}{n!} \int d^4x_1 \dots d^4x_n (-1)(n-1)! \text{tr} \{ [(e\gamma_{\mu_1}) G_+(x_1, x_2) \times \\ &\quad \times \dots (e\gamma_{\mu_n}) G_+(x_n, x_1)] A^{\mu_1}(x_1) \dots A^{\mu_n}(x_n) \} \\ &= - \sum_n \frac{1}{n} \int d^4x_1 \dots d^4x_n \text{tr} [e\gamma_{\mu_1} A^{\mu_1}(x_1) G_+(x_1, x_2) \dots e\gamma_{\mu_n} A^{\mu_n}(x_n) G_+(x_n, x_1)], \quad (12) \end{aligned}$$

passando para a notação de Dirac,

$$\begin{aligned} \Gamma[A] &= - \sum_n \frac{1}{n} \int d^4x_1 \int d^4x_2 \dots d^4x_n \text{tr} [\langle x_1 | e\gamma_{\mu_1} A^{\mu_1} G_+ | x_2 \rangle \langle x_2 | e\gamma_{\mu_2} A^{\mu_2} G_+ | x_3 \rangle \\ &\quad \times \dots \langle x_n | e\gamma_{\mu_n} A^{\mu_n} G_+ | x_1 \rangle] \\ &= - \sum_n \frac{1}{n} \int d^4x_1 \text{tr} [\langle x_1 | (e\gamma_{\mu} A^{\mu} G_+)^n | x_1 \rangle] = - \text{tr} \int d^4x_1 \left[\sum_n \frac{1}{n} \langle x_1 | (e\gamma_{\mu} A^{\mu} G_+)^n | x_1 \rangle \right]. \quad (13) \end{aligned}$$

Usando a identidade $\ln(1-x) = -\sum_n \frac{1}{n} x^n$,

$$\Gamma[A] \approx iW[A]^{(1)} = \text{tr} \int d^4x_1 [\langle x_1 | \ln(1 - e\gamma_{\mu} A^{\mu} G_+) | x_1 \rangle]. \quad (14)$$

É importante notar que na Eq. (14), o símbolo de aproximação foi utilizado pois a ação efetiva calculada aqui representa apenas parte do funcional que é obtido pela série de Volterra e por isso denominamos de ação efetiva a 1-loop. Para ser realmente o funcional da série de Volterra deve-se levar em consideração todos os níveis de aproximação. Entretanto, para os fenômenos discutidos na Seção 1 a aproximação de 1-loop já é suficiente.

Definindo $Tr = \text{tr} \int d^4x$, onde $\int d^4x$ representa o traço no espaço das posições e tr o traço de Dirac, tem-se

$$iW[A]^{(1)} = Tr \{ \ln [1 - e\gamma_{\mu} A^{\mu}(x) G_+(x, x)] \}, \quad (15)$$

ou ainda

$$iW[A]^{(1)} = -Tr \left\{ \ln [1 - e\gamma_\mu A^\mu(x) G_+(x,x)]^{-1} \right\}. \quad (16)$$

Como primeiro passo para o cálculo da primeira derivada da ação efetiva, é conveniente encontrar uma forma mais explícita para a ação efetiva acima. Para isto utiliza-se a identidade

$$\ln(1-x) = - \int_0^1 d\lambda x \left(1 + \lambda x + (\lambda x)^2 + \dots \right) = - \int_0^1 d\lambda \frac{x}{(1-\lambda x)}. \quad (17)$$

Identificando $x = e\gamma_\mu A^\mu(x) G_+(x,x)$, tem-se

$$\ln [1 - e\gamma_\mu A^\mu(x) G_+(x,x)] = - \int_0^1 d\lambda \frac{e\gamma_\mu A^\mu(x) G_+(x,x)}{[1 - e\lambda \gamma_\mu A^\mu(x) G_+(x,x)]}. \quad (18)$$

Fazendo a mudança de variável de integração $e' = e\lambda \Rightarrow de' = ed\lambda$,

$$\ln [1 - e\gamma_\mu A^\mu(x) G_+(x,x)] = - \int_0^{e'} de' \frac{\gamma_\mu A^\mu(x) G_+(x,x)}{[1 - e'\gamma_\mu A^\mu(x) G_+(x,x)]}. \quad (19)$$

Assim, é possível escrever a ação efetiva (16) utilizando o resultado acima como

$$iW[A]^{(1)} = - \int_0^{e'} de' tr \left\{ \int d^4x \gamma_\mu A^\mu(x) G_+[xx|e'A] \right\}, \quad (20)$$

em que $G_+[xx|e'A] = G_+(x,x) [1 - e\gamma_\mu A^\mu(x) G_+(x,x)]^{-1}$.

O próximo passo é determinar uma forma mais clara para Eq. (20). Para começar considere uma função de 2-pontos que satisfaz a equação

$$\left[m + \gamma \left(\frac{1}{i} \partial_x - eA(x) \right) \right] G_+[xy|eA] = \delta(x-y), \quad (21)$$

onde uma solução para esta equação não-homogênea é

$$G_+[xy|eA] = G_+(x-y) + \int du G_+(x-u) e\gamma_\mu A^\mu(u) G_+[uy|eA]. \quad (22)$$

Ela deve satisfazer esta equação, pois se está interessado na função de Green do operador da equação de Dirac para um campo A_μ .

Tomando a derivada da ação efetiva (20), tem-se

$$\frac{i\delta W[A]^{(1)}}{\delta A_\mu(y)} = -tr \int_0^e de' \int d^4x \frac{\delta}{\delta A_\mu(y)} \left\{ \gamma^\beta A_\beta(x) G_+[xx|e'A] \right\}. \quad (23)$$

Portanto atuando a regra da cadeia, tem-se

$$\frac{i\delta W[A]^{(1)}}{\delta A_\mu(y)} = -tr \int_0^e de' \left\{ \gamma^\mu G_+[yy|e'A] \right\} - tr \int_0^e de' \int d^4x \left\{ \gamma^\beta A_\beta(x) \frac{\delta G_+[xx|e'A]}{\delta A_\mu(y)} \right\}. \quad (24)$$

Para calcular a derivada no segundo termo da expressão acima, utiliza-se a relação Eq. (22).

Assim,

$$\begin{aligned} \frac{\delta G_+[xx|e'A]}{\delta A_\mu(z)} &= \int du G_+(x-u) e' \gamma^\beta \frac{\delta A_\beta(u)}{\delta A_\mu(z)} G_+[ux|e'A] + \\ &+ \int du G_+(x-u) e' \gamma^\beta A_\beta(u) \frac{\delta G_+[ux|e'A]}{\delta A_\mu(z)} \\ &= G_+(x-z) e' \gamma^\mu G_+[zx|e'A] + \int du G_+(x-u) e' \gamma^\beta A_\beta(u) \frac{\delta G_+[ux|e'A]}{\delta A_\mu(z)}, \end{aligned} \quad (25)$$

isolando os termos com derivadas funcionais, tem-se

$$\begin{aligned} &\int du \left\{ \left[\delta(x-u) - G_+(x-u) e' \gamma^\beta A_\beta(u) \right] \frac{\delta G_+[ux|e'A]}{\delta A_\mu(z)} \right\} \\ &= G_+(x-z) e' \gamma^\mu G_+[zx|e'A]. \end{aligned} \quad (26)$$

Com isso, tem-se

$$\begin{aligned} \frac{\delta G_+[ux|e'A]}{\delta A_\mu(z)} &= \left[1 - G_+(x-u) e' \gamma^\beta A_\beta(u) \right]^{-1} G_+(x-z) e' \gamma^\mu G_+[zx|e'A] \\ &= G_+[xy|e'A] e' \gamma^\mu G_+[yx|e'A]. \end{aligned} \quad (27)$$

Substituindo este resultado em Eq. (24):

$$\begin{aligned}
\frac{i\delta W[A]^{(1)}}{\delta A_\mu(y)} &= -tr \int_0^e de' \{ \gamma^\mu G_+[yy|e'A] \} - \\
&\quad - tr \int_0^e de' \int d^4x \{ \gamma^\beta A_\beta(x) G_+[xy|e'A] e' \gamma^\mu G_+[zx|e'A] \} \\
&= -tr \int_0^e de' \left\{ \gamma^\mu G_+[yy|e'A] - \int d^4x \gamma^\beta A_\beta(x) G_+[xy|e'A] e' \gamma^\mu G_+[yx|e'A] \right\}.
\end{aligned} \tag{28}$$

Utilizando a propriedade cíclica do traço das matrizes γ^μ , é possível reescrever a equação como

$$\frac{i\delta W[A]^{(1)}}{\delta A_\mu(y)} = -tr \int_0^e de' \left\{ \gamma^\mu G_+[yy|e'A] - \int d^4x G_+[yx|e'A] \gamma^\beta A_\beta(x) G_+[xy|e'A] e' \gamma^\mu \right\}. \tag{29}$$

Por fim, utiliza-se a substituição $\frac{\partial G_+[xy|e'A]}{\partial e'} = -G_+[yx|e'A] \gamma^\beta A_\beta(x) G_+[xy|e'A]$, que pode ser verificada facilmente, em Eq. (29). Portanto,

$$\begin{aligned}
\frac{i\delta W[A]^{(1)}}{\delta A_\mu(y)} &= -tr \int_0^e de' \left\{ \left[\frac{\partial e'}{\partial e'} \right] \gamma^\mu G_+[yy|e'A] + \left[\frac{\partial G_+[yy|e'A]}{\partial e'} \right] e' \gamma^\mu \right\} \\
&= -tr \int_0^e de' \frac{\partial}{\partial e'} \{ \gamma^\mu G_+[yy|e'A] e' \}
\end{aligned} \tag{30}$$

logo

$$\frac{i\delta W[A]^{(1)}}{\delta A_\mu(y)} = -etr \left\{ \gamma^\mu G_+[yy|e'A] \right\}. \tag{31}$$

Com isso escrevemos a primeira derivada do funcional $W[A]^{(1)}$. Este resultado será de bastante importância a fim de provar a validade do Ansatz da Lagrangeana efetiva proposto na Seção 3.1, ou seja para determinar uma solução para $W[A]^{(1)}$.

APÊNDICE C – Matrizes γ^μ e suas Propriedades

A métrica utilizada é:

$$1. \eta^{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Matriz γ e suas relações:

2. $\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = -2\eta^{\mu\nu}$;
3. $\gamma^0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$;
4. $\gamma^i = \begin{pmatrix} 0 & \sigma^i \\ -\sigma^i & 0 \end{pmatrix}$ onde σ^i são as matrizes de Pauli;
5. $\gamma_\mu \gamma^\mu = 4$;
6. $\gamma_\mu \gamma^\nu \gamma^\mu = 2\gamma^\nu$;
7. $\gamma_\mu \gamma^\alpha \gamma^\beta \gamma^\mu = -4\eta^{\alpha\beta}$;
8. $\gamma_\mu \gamma^\alpha \gamma^\beta \gamma^\zeta \gamma^\mu = 2\gamma^\zeta \gamma^\beta \gamma^\alpha$;
9. $\gamma_5 = -\frac{i}{4!} \varepsilon^{\mu\nu\sigma\beta} \gamma_\mu \gamma_\nu \gamma_\sigma \gamma_\beta$;
10. $i\varepsilon_{\mu\nu\sigma\beta} \gamma_5 = -\gamma_\mu \gamma_\nu \gamma_\sigma \gamma_\beta$;
11. $\gamma_\sigma \gamma_\kappa \gamma_\lambda = \eta_{\sigma\kappa} \gamma_\lambda + \eta_{\kappa\lambda} \gamma_\sigma - \eta_{\lambda\sigma} \gamma_\kappa - i\varepsilon_{\sigma\kappa\lambda\nu} \gamma^\nu \gamma_5$.

Definindo uma nova matriz:

12. $\sigma^{\mu\nu} = \frac{i}{2} [\gamma^\mu, \gamma^\nu]$;
13. $[\sigma_{\mu\nu\gamma}, \gamma_\zeta] = 2i\varepsilon_{\zeta\mu\nu\gamma} \gamma_5$;
14. $\sigma_{\mu\nu\gamma} = i\varepsilon_{\mu\nu\gamma\zeta} \gamma_5 \gamma^\zeta$;
15. $[\sigma^{\nu\lambda}, \gamma^\mu] = 2i (\eta^{\mu\nu} \gamma^\lambda - \eta^{\mu\lambda} \gamma^\nu)$;
16. $\sigma^{ij} = \varepsilon_{ijk} \begin{pmatrix} \sigma^k & 0 \\ 0 & \sigma^k \end{pmatrix}$;

$$17. \sigma^{12} = \begin{pmatrix} \sigma^3 & 0 \\ 0 & \sigma^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \sigma^3;$$

$$18. \sigma^{0i} = \begin{pmatrix} 0 & \sigma^i \\ \sigma^i & 0 \end{pmatrix}.$$

O produto escalar é dado como:

$$19. \gamma_\mu a^\mu = \eta_{\mu\beta} \gamma^\beta a^\mu = \gamma \cdot a = -\gamma^0 a^0 + \gamma^i a^i.$$

Propriedades de traço:

$$20. \text{tr}(\gamma_1 a^1 \gamma_2 a^2) = -4a_1 \cdot a_2;$$

$$21. \text{tr}(\gamma_1 a^1 \gamma_2 a^2 \gamma_3 a^3 \gamma_4 a^4) = 4[(a_1 \cdot a_2)(a_3 \cdot a_4) - (a_1 \cdot a_3)(a_2 \cdot a_4) + (a_1 \cdot a_4)(a_2 \cdot a_3)];$$

$$22. \text{tr}(\gamma_\mu \gamma_\nu) = -4\eta_{\mu\nu};$$

$$23. \text{tr}(\gamma_\mu \gamma_\nu \gamma_\alpha \gamma_\beta) = 4[\eta_{\mu\nu} \eta_{\alpha\beta} - \eta_{\mu\alpha} \eta_{\nu\beta} + \eta_{\mu\beta} \eta_{\nu\alpha}].$$

Mais algumas propriedades:

$$24. \gamma^\mu \gamma_\mu = -4;$$

$$25. \gamma_\mu (\gamma \cdot a) \gamma^\mu = 2\gamma \cdot a;$$

$$26. \gamma_\mu (\gamma \cdot a) (\gamma \cdot b) \gamma^\mu = 4a \cdot b;$$

$$27. \gamma_\mu (\gamma \cdot a) (\gamma \cdot b) (\gamma \cdot c) \gamma^\mu = 2(\gamma \cdot a) (\gamma \cdot b) (\gamma \cdot c).$$

APÊNDICE D – Matrizes γ^μ e suas propriedades em 3-D

Métrica em $(2+1)$ dim:

$$1. \eta^{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Tensor eletromagnético e seu dual em $(2+1)$ dim:

$$2. \widetilde{\mathcal{F}}^\mu = \frac{1}{2} \varepsilon^{\mu\sigma\kappa} \mathcal{F}_{\sigma\kappa}$$

$$3. \mathcal{F}^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & \mathcal{E}^1 & \mathcal{E}^2 \\ -\mathcal{E}^1 & 0 & \mathcal{B} \\ -\mathcal{E}^2 & -\mathcal{B} & 0 \end{pmatrix}.$$

As matrizes de Pauli são:

$$4. \sigma^1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix};$$

$$5. \sigma^2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix};$$

$$6. \sigma^3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Álgebra das matrizes de Pauli:

$$7. \{\sigma^i, \sigma^j\} = 2\delta^{ij};$$

$$8. [\sigma^i, \sigma^j] = 2i\varepsilon^{ijk} \sigma^k;$$

$$9. [\sigma^i]^2 = 1;$$

$$10. Tr[\sigma^i] = 0.$$

Matrizes γ e suas relações na representação bidimensional:

$$11. \gamma^0 = \sigma^3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix};$$

$$12. \gamma^1 = i\sigma^1 = \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix};$$

$$13. \gamma^2 = i\sigma^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix};$$

$$14. \{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = -2\eta^{\mu\nu};$$

$$15. (\gamma^0)^\dagger = \gamma^0;$$

$$16. (\gamma^1)^\dagger = -\gamma^1;$$

$$17. (\gamma^2)^\dagger = -\gamma^2.$$

Propriedades de produtos e contrações envolvendo matrizes γ :

$$18. \gamma_\mu \gamma^\mu = -3;$$

$$19. \gamma_\mu \gamma^\nu \gamma^\mu = \gamma^\nu;$$

$$20. \gamma^\mu \gamma^\nu = -\eta^{\mu\nu} + i\varepsilon^{\mu\nu\sigma} \gamma_\sigma;$$

$$21. \gamma_\mu \gamma^\alpha \gamma^\beta \gamma^\mu = 3\eta^{\alpha\beta} + i\varepsilon^{\alpha\beta\sigma} \gamma_\sigma;$$

$$22. \gamma_\mu \gamma^\alpha \gamma^\beta \gamma^\mu = 4\eta^{\alpha\beta} + \gamma^\alpha \gamma^\beta;$$

$$23. \gamma_\mu \gamma^\alpha \gamma^\beta \gamma^\zeta \gamma^\mu = 3\gamma^\zeta \gamma^\beta \gamma^\alpha + 2\gamma^\alpha \eta^{\beta\zeta} - 2\gamma^\beta \eta^{\alpha\zeta} + 2\gamma^\zeta \eta^{\beta\alpha}.$$

Definindo novamente uma matriz $\sigma^{\mu\nu}$:

$$24. \sigma^{\mu\nu} = \frac{i}{2} [\gamma^\mu, \gamma^\nu] = -\varepsilon^{\mu\nu\sigma} \gamma_\sigma;$$

$$25. [\gamma^\mu, \gamma^\nu] = 2i\varepsilon^{\mu\nu\sigma} \gamma_\sigma.$$

Propriedades de traço das matrizes γ :

$$26. tr(\gamma_\mu) = 0;$$

$$27. tr(\gamma_\mu \gamma_\nu) = -2\eta_{\mu\nu};$$

$$28. tr(\gamma_\mu \gamma_\nu \gamma_\alpha \gamma_\beta) = 3\eta_{\mu\nu} \eta_{\alpha\beta} + 3\eta_{\mu\beta} \eta_{\nu\alpha} - 3\eta_{\mu\alpha} \eta_{\nu\beta};$$

$$29. tr(\sigma^{\mu\nu}) = 0;$$

$$30. tr(\sigma^{\mu\nu} \sigma^{\lambda\sigma}) = 2(\delta^{\mu\lambda} \delta^{\nu\sigma} - \delta^{\mu\sigma} \delta^{\nu\lambda});$$

$$31. tr(\sigma^{\mu\nu} \sigma^{\lambda\sigma} \sigma^{\rho\kappa}) = 2i(\varepsilon^{\mu\nu\rho} \varepsilon^{\lambda\sigma\kappa} - \varepsilon^{\mu\nu\kappa} \varepsilon^{\lambda\sigma\rho}).$$