



MARCOS COSTA DE PAULA

DESEMPENHO DE INTERVALOS DE CONFIANÇA
PARA A MÉDIA DE POPULAÇÕES $GAMA(\alpha, \beta)$
AVALIADO POR SIMULAÇÃO MONTE CARLO

LAVRAS-MG
2019

MARCOS COSTA DE PAULA

DESEMPENHO DE INTERVALOS DE CONFIANÇA PARA A MÉDIA
DE POPULAÇÕES $GAMA(\alpha, \beta)$ AVALIADO POR SIMULAÇÃO MONTE
CARLO

Dissertação apresentada à Universidade Federal de Lavras, como parte das exigências do Programa de Pós-Graduação em Estatística e Experimentação Agropecuária, área de concentração em Estatística Computacional, para a obtenção do título de Mestre.

Dr. Daniel Furtado Ferreira
Orientador

LAVRAS-MG
2019

Ficha catalográfica elaborada pelo Sistema de Geração de Ficha Catalográfica da Biblioteca Universitária da UFLA, com dados informados pelo(a) próprio(a) autor(a).

Paula, Marcos Costa de.

Desempenho de intervalos de confiança para a média de populações $gama(\alpha, \beta)$ avaliado por simulação Monte Carlo / Marcos Costa de Paula – 2019.

55 p.

Orientador: Daniel Furtado Ferreira.

Dissertação (mestrado acadêmico) - Universidade Federal de Lavras, 2019.

Bibliografia.

1. Distribuição gama. 2. Estimação intervalar. 3. Simulação Monte Carlo. I. Ferreira, Daniel Furtado. II. Título.

MARCOS COSTA DE PAULA

DESEMPENHO DE INTERVALOS DE CONFIANÇA PARA A MÉDIA
DE POPULAÇÕES $GAMA(\alpha, \beta)$ AVALIADO POR SIMULAÇÃO MONTE
CARLO
PERFORMANCE OF RELIABILITY INTERVALS FOR THE AVERAGE
POPULATION $GAMA(\alpha, \beta)$ ASSESSED BY MONTE CARLO
SIMULATION

Dissertação apresentada à Universidade Federal de Lavras, como parte das exigências do Programa de Pós-Graduação em Estatística e Experimentação Agropecuária, área de concentração em Estatística Computacional, para a obtenção do título de Mestre.

APROVADO em 14 de dezembro de 2018.

Dr. Paulo Henrique Sales Guimarães UFPA

Dra. Patricia de Siqueira Ramos UNIFAL-MG

Dr. Daniel Furtado Ferreira
Orientador

LAVRAS-MG
2019

Primeiramente, a Deus pelo dom da vida.

Aos meus pais, Mária de Fátima e João Batista, meu irmão Rafael Costa, minha esposa Cláudia Maria Souza Costa, aos professores da UFLA, UNIFAL-MG, e de outras instituições que estudei, em especial aos professores Daniel Furtado Ferreira, Tales Jesus Fernandes, Lucas Monteiro Chaves, Renato Ribeiro de Lima, Paulo Henrique Sales, Deive Ciro, Patrícia Siqueira, Marcelo Oliveira, Joel Augusto Muniz, Eric Batista Ferreira, Denismar Alves Nogueira, Angela Leite Moreno, Evandro Monteiro, aos meus grandes amigos, Mateus Pimenta, Felipe Vieira (*in memoriam*), Neto Pascoal, Marcel Irving e Jefferson Rezende Félix, enfim, a todos que fizeram parte ao longo de toda essa trajetória.

DEDICO.

Frases Autor

AGRADECIMENTOS

Primeiramente, queria agradecer a Deus pela minha vida e por todas as batalhas a mim confiadas. Nesse caminho, tive muitas situações que me fizeram pensar em desistir, passei nesse período por uma depressão muito forte, mas o senhor colocou anjos que não me deixaram fraquejar e em alguns momentos me carregaram para que eu não desistisse. Essa dissertação, atribuo mais mérito, as pessoas que serão citadas do que a mim mesmo, pois sem essas pessoas o que está constado aqui, dificilmente existiria.

Um agradecimento especial ao meu orientador, Professor Daniel, por toda amizade de sempre, gentileza, companheirismo e por ser meu guia independente da minha situação. Que Deus o faça a cada dia mais reconhecido, para que possas ajudar mais pessoas com o seu dom mudando nossas vidas. Minha eterna gratidão.

A minha esposa Cláudia, por ser tão importante na minha vida. Sempre a meu lado, me pondo para cima e me fazendo acreditar que posso mais que imagino. Devido a seu companheirismo, amizade, paciência, compreensão, apoio, alegria e amor, este trabalho pôde ser concretizado. Obrigado por ter feito do meu sonho o nosso sonho!

A meus pais, Maria de Fátima e João Batista, meu infinito agradecimento. Sempre acreditaram em minha capacidade e me acharam O MELHOR de todos, mesmo não sendo. Isso só me fortaleceu e me fez tentar, não ser O MELHOR, mas a fazer o melhor de mim. Obrigada pelo amor incondicional!

Ao meu orientador de graduação, Eric Batista Ferreira por tudo que fez por mim na época de graduação. O meu muito obrigado.

Aos professores, Lucas Chaves, Renato Ribeiro e Marcelo Oliveira, meu eterno agradecimento pela complacência que tiveram comigo no período em que estive doente, que Deus os abençoe cada dia mais e os conserve do jeito que são.

Aos meus amigos e colaboradores dessa dissertação, Marcel e Neto Pascoal. Agradeço muito a vocês não só pela ajuda profissional, mas pela ajuda pessoal, pois foram meus amigos em um ambiente que não era o meu.

Às funcionárias do Colegiado de Pós-graduação, especialmente à Nádia, pela disponibilidade, simpatia e gentileza. Obrigado pela ajuda!

À Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (CAPES) pela bolsa de estudo concedida no Mestrado, a PROBIC II e PIBIC/CNPq pelas bolsas na Graduação, a FAPEMIG pelo apoio financeiro nos eventos que participei.

Finalmente, gostaria de agradecer o programa de pós graduação em Estatística e Experimentação Agropecuária, por abrirem as portas para que eu pudesse realizar este sonho que era a minha DISSERTAÇÃO DE MESTRADO. Proporcionaram-me mais que a busca de conhecimento técnico e científico, mas uma LIÇÃO DE VIDA. Ninguém vence sozinho... OBRIGADO A TODOS!

RESUMO

Quando se tem interesse em realizar inferência para o parâmetro μ de uma distribuição $\text{gama}(\alpha, \beta)$, a estimação por intervalo torna-se uma grande ferramenta. Na literatura, as pesquisas que contemplam a inferência para esse parâmetro não tem sido frequentes, dessa forma, a presente dissertação têm por objetivo principal avaliar por simulação o desempenho de três intervalos de confiança para a média de populações $\text{gama}(\alpha, \beta)$, sendo que uma dessas opções é uma proposta de intervalo de confiança via *bootstrap* paramétrico e outros dois assintóticos, um baseado em aproximações dadas pela distribuição normal e um construído via estatística de Wald, estudando as probabilidades de cobertura e comprimentos médios dos intervalos de confiança considerados em $N = 1000$ simulações Monte Carlo. No presente estudo foi constatado que os intervalos assintóticos, mesmo adotando metodologias distintas, são equivalentes. Por outro lado, com base no intervalo de confiança binomial exato a 99%, foi constatado que os três intervalos são assintoticamente equivalentes e que a convergência do intervalo de confiança *bootstrap* paramétrico é mais rápida e tem menores comprimentos médios dos intervalos, sendo considerado melhor nos cenários estudados.

Palavras-Chave: Distribuição gama. média. estimação intervalar. Monte Carlo. simulação.

ABSTRACT

When there is interest in accomplish inference for the μ parameter of a $\text{gama}(\alpha, \beta)$ distribution, the estimation by interval is a great tool. In literature, researches focused on the interference for this parameter are not frequent. Therefore, the present work has the main objective to evaluate by Monte Carlo simulation the performance of three confidence intervals for the average of $\text{gama}(\alpha, \beta)$ distributions, where one of these options is a novel confidence interval based on parametric bootstrap and the two others are asymptotics approaches, one based on the Normal distribution and the other constructed by Wald statistic. The evaluation was made using the coverage probabilities and lengths of the confidence intervals considered in $N = 1000$ Monte Carlo simulations. In the present study, it was verified that the asymptotic intervals, even adopting distinct methodologies, are equivalent. On the other hand, based on the exact binomial interval of 99% confidence level, it was verified that the three intervals are asymptotically equivalent, and that the convergence of the parametric bootstrap confidence interval is faster and has smaller average interval lengths, and, therefore it was considered the best choice in the several scenarios studied.

Keywords: Gamma distribution. average. interval estimation. Monte Carlo. simulation.

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	11
2	REFERENCIAL TEÓRICO	13
2.1	Estimação pontual	13
2.1.1	Estimação pelo método dos momentos	13
2.1.2	Estimação pelo método da máxima verossimilhança	14
2.2	Estimação Intervalar	15
2.2.1	Métodos exatos	16
2.2.2	Métodos assintóticos	17
2.2.2.1	Método baseado em aproximações pela distribuição normal	17
2.2.2.2	Método Baseado na estatística de Wald	18
2.2.3	Desempenho de um intervalo de confiança	19
2.3	Distribuição gama	19
2.3.1	Estimação dos parâmetros da distribuição $\text{gama}(\alpha, \beta)$	22
2.3.1.1	Estimação dos parâmetros da distribuição $\text{gama}(\alpha, \beta)$ pelo método da máxima verossimilhança	22
2.4	Estimação dos parâmetros $\text{gama}(\alpha, \beta)$ pelo métodos dos momentos	24
2.5	Média e variância da distribuição $\text{gama}(\alpha, \beta)$ pelo método dos momentos	25
2.6	Intervalo de confiança para a média de populações $\text{gama}(\alpha, \beta)$	26
2.6.1	Método de Grice e Bain (M_1)	26
2.6.2	Método de Shiue e Bain (M_2)	27
2.7	<i>Bootstrap</i>	27
2.7.1	<i>Bootstrap</i> paramétrico	28
2.7.2	<i>Bootstrap</i> não-paramétrico	29
2.8	Simulação Monte Carlo	29
3	MATERIAL E MÉTODOS	31
3.1	Intervalo de confiança <i>bootstrap</i>	31
3.2	Intervalo de confiança assintótico baseado em aproximações pela distribuição normal	32
3.3	Intervalo de confiança assintótico via estatística de Wald	33
3.4	Avaliação do desempenho dos intervalos estudados	35
4	RESULTADOS E DISCUSSÃO	37
5	CONCLUSÕES	43
	REFERÊNCIAS.....	44

1 INTRODUÇÃO

A estatística inferencial tem por princípio realizar generalizações a partir de um subconjunto representativo de uma população qualquer, denominado amostra, para os parâmetros populacionais. Estas generalizações são feitas por intermédio dos estimadores e as estimativas são obtidas na amostra aleatória disponível. Além disso, é necessário obter a distribuição de probabilidade destes estimadores para se obter margens de erro ou testar hipóteses.

Dessa forma, para obter bons resultados devem-se utilizar técnicas de amostragem apropriadas, que possibilitem ao pesquisador a obtenção de uma amostra que seja representativa da população em questão. Mesmo assim, as generalizações que o pesquisador poderá realizar para a população, mesmo que a amostra seja representativa e aleatória, contarão com um certo grau de incerteza, sejam elas obtidas via estimação pontual, intervalo de confiança ou testes de hipóteses.

As populações de interesse da presente dissertação se restringem às da distribuição gama, especificamente a distribuição gama de dois parâmetros, $\text{gama}(\alpha, \beta)$. A distribuição gama é usada para modelar valores de dados positivos que são assimétricos à direita e maiores que 0. Ela é comumente usada em estudos de sobrevivência e de confiabilidade.

A distribuição $\text{gama}(\alpha, \beta)$ é versátil e flexível, pois diversas distribuições de probabilidade são casos particulares dela. Por exemplo, para $\alpha = 1$, tem-se o modelo exponencial. Utilizando, $\alpha = n/2$ com $n > 0$ e $\beta = 1/2$ tem-se o modelo qui-quadrado, com n graus de liberdade. Por sua vez, quando $\alpha = n$, sendo n um inteiro positivo, a distribuição gama representa o modelo Erlang de ordem n .

Pode-se ressaltar também que o modelo $\text{gama}(\alpha, \beta)$ é largamente utilizado para a estimativa de probabilidades de ocorrências climáticas com chuvas e temperaturas extremas, bem como na simulação de dados climáticos (Thom, 1958; Murta et al., 2005; Moreira et al., 2010, Dallacort et al., 2011; Martins et al., 2011).

Há muitas referências na literatura sobre a inferência em relação aos parâmetros individuais da distribuição $\text{gama}(\alpha, \beta)$, ou seja, em relação ao parâmetro de forma α ou ao parâmetro de escala β . No entanto, em muitos casos, como por exemplo, em teoria da confiabilidade, os pesquisadores geralmente possuem um grande interesse em fazer uma inferência estatística sobre o tempo médio de vida μ , que é igual à razão α/β .

A grande questão é que, para fazer inferência para a média μ , usualmente não se conhecem ambos parâmetros α e β da distribuição gama. Além disso, as pesquisas para estimar a média da distribuição gama na literatura não têm sido frequentes, deixando uma lacuna neste campo.

Conseqüentemente, visando contribuir para a área de estatística inferencial, no sentido de especificamente realizar inferência para a média da distribuição $\text{gama}(\alpha, \beta)$, o presente trabalho tem por objetivo propor um intervalo de confiança para a média de populações gama construído via *bootstrap paramétrico*, bem como avaliar tal intervalo nos diversos cenários presentes em simulações Monte Carlo. Para efeito de comparação deste intervalo, também foram avaliados dois intervalos de confiança assintóticos para a média da distribuição gama.

Adicionalmente, o presente trabalho possui os seguintes objetivos específicos:

- a) Utilizar *bootstrap* paramétrico na estimação de médias da distribuição $\text{gama}(\alpha, \beta)$ para construir um intervalo de confiança *bootstrap* percentílico para média de populações $\text{gama}(\alpha, \beta)$.
- b) Usar o método assintótico baseado em aproximações dadas pela distribuição normal, para construir um intervalo de confiança assintótico para a média da distribuição $\text{gama}(\alpha, \beta)$.
- c) Com base na estatística de Wald, construir um intervalo de confiança assintótico para a média de populações $\text{gama}(\alpha, \beta)$;
- d) Avaliar por simulação o desempenho desses três intervalos, por intermédio das probabilidades de cobertura e das amplitudes médias dos intervalos de confiança gerados.

2 REFERENCIAL TEÓRICO

Nesta seção são abordados os principais tópicos relacionados à teoria necessária para o desenvolvimento da presente dissertação. Assim, são revisados os principais métodos de estimação pontual e intervalar, a distribuição gama de dois parâmetros e os métodos específicos de estimação intervalar e pontual para os seus parâmetros.

Inicialmente, assumindo-se que não é possível trabalhar com todos os elementos de uma população e a única informação que tem-se dela é uma amostra aleatória, deve-se utilizar a inferência estatística para obter informação dos parâmetros populacionais a partir dos estimadores encontrados na amostra e de suas distribuições. Os métodos utilizados para a estimação se dividem em estimação pontual e intervalar, a serem descritos primeiramente na sequência.

2.1 Estimação pontual

A teoria dessa seção, que contempla a estimação pontual, e as subseções subsequentes, referentes a estimação pelo método dos momentos e pelo método da máxima verossimilhança, será apresentada de maneira semelhante à que se encontra em Cavalcanti (2014).

Um procedimento geral adotado para se estimar um parâmetro θ de uma população consiste em definir inicialmente uma função da amostra (X_1, X_2, \dots, X_n) da variável aleatória X , g_n . Esta função é conhecida por estatística, sendo dada por $g_n(X_1, X_2, \dots, X_n)$, que também denomina-se estimador do parâmetro θ , sendo representado por $\hat{\theta}$.

Nota-se que $\hat{\theta}$ é uma variável aleatória, pois é uma função de variáveis aleatórias. Ao valor observado de $\hat{\theta}$, uma vez realizada a amostra, denomina-se estimativa do parâmetro θ . Os dois métodos para a estimação pontual que serão apresentados referem-se à estimação pelo método dos momentos e pelo método da máxima verossimilhança. Existem ainda métodos bayesianos que não serão abordados por esta revisão.

2.1.1 Estimação pelo método dos momentos

Nesse método deve-se igualar os momentos amostrais aos momentos populacio-

nais. Na sequência são definidos os momentos populacionais não centrais e os respectivos momentos amostrais. Ainda é ilustrado o caso particular do momento de ordem 1.

- O momento populacional de ordem k de uma variável aleatória é definido por:

$$\mu_k = \mathbb{E}(X^k), k \geq 1. \quad (1)$$

Se $k = 1 \implies \mu_1 = \mu = \mathbb{E}(X)$.

- O momento amostral de ordem k de uma variável aleatória é definido como:

$$m_k = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i^k. \quad (2)$$

Observa-se que, se $k = 1 \implies m_k = \bar{X}$.

- Assim, o estimador de μ é $\hat{\mu} = \bar{X}$.

2.1.2 Estimação pelo método da máxima verossimilhança

De maneira simples, pode-se definir o estimador de máxima verossimilhança como sendo o valor que maximiza a distribuição conjunta da amostra, chamada de função de verossimilhança.

Seja X uma variável aleatória relacionada a uma população arbitrária, com função de probabilidade $p(x; \theta)$ (se X é uma variável aleatória discreta) ou função densidade de probabilidade (se X é uma variável aleatória contínua) $f(x; \theta)$, sendo θ o parâmetro desconhecido. De posse de uma amostra aleatória de observações independentes e identicamente distribuídas de X com tamanho n , X_1, \dots, X_n , considere que x_1, \dots, x_n são os valores efetivamente observados. A função de verossimilhança L , para variáveis aleatórias contínuas, é definida por

$$L(\theta; x_1, \dots, x_n) = f(x_1; \theta) \times \dots \times f(x_n; \theta) = \prod_{i=1}^n f(x_i; \theta).$$

Se X é uma variável aleatória discreta com função de distribuição $p(x; \theta)$, então a

função de verossimilhança é dada por

$$L(\theta; x_1, \dots, x_n) = p(x_1; \theta) \times \dots \times p(x_n; \theta) = \prod_{i=1}^n p(x_i; \theta),$$

que deve ser interpretada como uma função de θ . O estimador de máxima verossimilhança de θ é o valor que maximiza $L(\theta; x_1, \dots, x_n)$.

Outra maneira de se estimarem os parâmetros populacionais, é utilizando a estimação intervalar. Neste caso, a precisão do processo de estimação da quantidade populacional ou parâmetro de interesse é contemplada. A próxima seção lida com estes casos.

2.2 Estimação Intervalar

A estimação intervalar para um parâmetro de valor real θ , segundo Casella e Berger (2010), é qualquer par de funções de valores reais, $L(X_1, X_2, \dots, X_n)$ e $U(X_1, X_2, \dots, X_n)$ de uma amostra aleatória (X_1, X_2, \dots, X_n) que satisfaz $L(X_1, X_2, \dots, X_n) \leq U(X_1, X_2, \dots, X_n)$. O intervalo aleatório $[L(X_1, X_2, \dots, X_n), U(X_1, X_2, \dots, X_n)]$ é denominado de estimador intervalar.

O exemplo a seguir refere-se à motivação que esses autores utilizaram para inserir a estimação intervalar como uma opção mais completa que a estimação pontual.

Suponha que, para uma amostra X_1, X_2, X_3, X_4 , a partir de uma $N(\mu, 1)$, um estimador intervalar de μ é $[\bar{X} - 1; \bar{X} + 1]$. Utilizando o estimador pontual, apenas \bar{X} era usado para estimar μ , mas claramente tem-se que a estimação intervalar $[\bar{X} - 1; \bar{X} + 1]$ é menos precisa. Neste último caso é feita a asserção de que μ está neste intervalo. O que se obtém com a perda de precisão é que abriu-se mão dela (da precisão) para se obter alguma confiança, ou garantia, de que a asserção feita está correta.

Os autores ainda complementam que o objetivo de utilizar estimação intervalar em vez de uma estimação pontual, consiste em encontrar um intervalo em torno de $\hat{\theta}$ que tenha alta probabilidade de conter θ . Uma medida utilizada para verificar se o parâmetro de interesse pertence ao estimador intervalar, é a probabilidade de cobertura. As definições 1 e 2 a serem apresentadas na sequência foram retiradas de Casella e Berger (2010).

Definição 1 (Probabilidade de cobertura) *Para um estimador intervalar $[L(X), U(X)]$ de um parâmetro θ , a probabilidade de cobertura é a probabilidade de que o intervalo ale-*

at6rio $[L(X), U(X)]$ abranja o parâmetro verdadeiro, θ . Em s6mbolos, 6 denotado por $P_\theta(\theta \in [L(X), U(X)])$ ou $P(\theta \in [L(X), U(X)])$.

Definiç6o 2 (Coeficiente de confiançA) A partir do estimador intervalar $[L(X), U(X)]$ de um parâmetro θ , o coeficiente de confiançA de $[L(X), U(X)]$ 6 o 6nfimo da probabilidade de cobertura, $\inf_\theta P_\theta(\theta \in [L(X), U(X)])$

Estimadores intervalares juntamente com uma medida de confiançA (geralmente um coeficiente de confiançA), s6o chamados intervalos de confiançA. 6 poss6vel encontrar na literatura intervalos de confiançA exatos e intervalos de confiançA assint6ticos.

2.2.1 M6todos exatos

De acordo com Almeida e Silva (2015), os m6todos de construç6o de intervalos de confiançA exatos podem ser definidos em dois grandes grupos: m6todo da invers6o de um teste de hip6tese e o m6todo da quantidade pivotal. No presente trabalho ser6 feita a revis6o apenas contemplando o m6todo da quantidade pivotal. Segue como sugest6o ao leitor, que para construir intervalos utilizando o m6todo da invers6o de um teste de hip6tese, 6 sugerido o livro de Casella e Berger (2010). Nesta obra os autores fazem uma ampla revis6o de maneira bem detalhada. A seguir, s6o definidos os conceitos de quantidade pivotal e intervalo de confiançA segundo Bolfarine e Sandoval (2010).

Uma vari6vel aleat6ria $Q(X_1, X_2, \dots, X_n, \theta) = Q(\mathbf{X}, \theta)$ 6 dita ser uma quantidade pivotal para o parâmetro θ , se sua distribu76o for independente de θ . Sendo assim, verifica-se que a quantidade pivotal n6o 6 uma estat6stica, pois ela depende de um parâmetro θ desconhecido. Dessa forma, para cada $\gamma = 1 - \alpha$, pode-se encontrar λ_1 e λ_2 na distribu76o de $Q(\mathbf{X}, \theta)$ de modo que:

$$\mathbb{P}(\lambda_1 \leq Q(\mathbf{X}, \theta) \leq \lambda_2) = \gamma. \quad (3)$$

Sendo a distribu76o de $Q(\mathbf{X}, \theta)$ independente de θ , λ_1 e λ_2 tamb6m n6o dependem de θ . Al6m disso, se para cada \mathbf{X} existirem as funç6es $t_1(\mathbf{X})$ e $t_2(\mathbf{X})$ tais que

$$\lambda_1 \leq Q(\mathbf{X}, \theta) \leq \lambda_2 \Leftrightarrow t_1(\mathbf{X}) \leq \theta \leq t_2(\mathbf{X}).$$

Utilizando esse fato e a quantidade apresentada em 3, tem-se que

$$\mathbb{P}(t_1(\mathbf{X}) \leq Q(\mathbf{X}, \theta) \leq t_2(\mathbf{X})) = \gamma, \quad (4)$$

de modo que $[t_1(\mathbf{X}); t_2(\mathbf{X})]$ é um intervalo (aleatório) que contém θ com probabilidade (coeficiente de confiança) $\gamma = 1 - \alpha$.

Almeida e Silva (2015) afirmam que em certos problemas não é possível encontrar o intervalo exato, por dois motivos, por não conhecer a distribuição da estatística utilizada, ou pelo fato de tal distribuição ser de difícil manipulação algébrica. Dessa forma é recomendado a utilização de métodos assintóticos visando contornar essas limitações. Casella e Berger (2010) fazem uma revisão minuciosa sobre os métodos assintóticos da literatura. Nesse momento, apenas são apresentados os métodos assintóticos que serão utilizados para o desenvolvimento do trabalho.

2.2.2 Métodos assintóticos

Os métodos baseados em aproximações pela distribuição normal e na estatística de Wald serão apresentados da mesma maneira que se encontra em Almeida e Silva (2015) e Pawitan (2001), respectivamente.

2.2.2.1 Método baseado em aproximações pela distribuição normal

Sejam $\hat{\theta}$ e $\hat{\sigma}_{\hat{\theta}}$ estatísticas para o parâmetro θ tais que

$$\frac{\hat{\theta} - \theta}{\hat{\sigma}_{\hat{\theta}}} \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} N(0, 1), \quad (5)$$

então o intervalo de confiança aproximado para θ , de coeficiente de confiança γ , pode ser obtido por

$$IC_{\gamma}(\theta) = \left[\hat{\theta} - \hat{\sigma}_{\hat{\theta}} z_{\frac{(1-\gamma)}{2}}, \hat{\theta} + \hat{\sigma}_{\hat{\theta}} z_{\frac{(1-\gamma)}{2}} \right], \quad (6)$$

em que $z_{(1-\gamma)/2}$ é o percentil superior $100(1 - \gamma)/2\%$ da distribuição normal padrão.

No caso particular em que $\theta = \mu$, $\hat{\theta} = \bar{X}$ e sendo X_1, X_2, \dots, X_n independentes e identicamente distribuídas com média μ e variância σ^2 , pelo teorema central do limite,

tem-se

$$\frac{\bar{X} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}} \longrightarrow N(0, 1). \quad (7)$$

Além disso, se $S^2 = \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2 / (n - 1) \longrightarrow \sigma^2$ em probabilidade, então:

$$\frac{\bar{X} - \mu}{S/\sqrt{n}} \longrightarrow N(0, 1). \quad (8)$$

Portanto, o intervalo de confiança assintótico para μ , com $100\gamma\%$ de confiança, é dado por

$$IC_\gamma(\mu) = \left[\bar{X} - z_{(1-\gamma)/2} \frac{S}{\sqrt{n}}, \bar{X} + z_{(1-\gamma)/2} \frac{S}{\sqrt{n}} \right]. \quad (9)$$

2.2.2.2 Método Baseado na estatística de Wald

A distribuição assintótica de um estimador vetorial de máxima verossimilhança $\hat{\boldsymbol{\theta}}$ pode ser aproximada da seguinte forma

$$\sqrt{n}(\hat{\boldsymbol{\theta}} - \boldsymbol{\theta}) \xrightarrow{d} N_p(\boldsymbol{\theta}, \mathbf{I}(\boldsymbol{\theta})^{-1}), \quad (10)$$

em que $\mathbf{I}(\boldsymbol{\theta})$ é a matriz de informação de Fisher.

Na prática, pode-se construir um intervalo de confiança para o componente θ_i , da seguinte maneira. Inicialmente, tem-se

$$z_i = \frac{\hat{\theta}_i - \theta_i}{se(\hat{\theta}_i)}, \quad (11)$$

em que,

- z_i tem aproximadamente distribuição normal padrão,
- $se(\hat{\theta}_i)$ é o erro padrão de θ_i , obtido por meio da relação

$$se(\hat{\theta}_i) = \sqrt{I^{ii}},$$

em que I^{ii} o i -ésimo termo da diagonal de $\mathbf{I}(\boldsymbol{\theta})^{-1}$

Dessa forma, o intervalo assintótico para θ_i , com confiança $100\gamma\%$ é dado por

$$\hat{\theta}_i - z_{(1-\gamma)/2} se(\hat{\theta}_i) \leq \theta_i \leq \hat{\theta}_i + z_{(1-\gamma)/2} se(\hat{\theta}_i). \quad (12)$$

2.2.3 Desempenho de um intervalo de confiança

O desempenho de um intervalo de confiança pode ser avaliado utilizando duas medidas, a probabilidade de cobertura e a amplitude média. A probabilidade de cobertura, tem por princípio, verificar se um dado intervalo, contém o verdadeiro valor do parâmetro, em um número finito de simulações. A amplitude média, por sua vez, também é uma medida de suma importância para comparação de intervalos de confiança, por exemplo, se dois intervalos possuírem mesma probabilidade de cobertura, o critério de desempate para inferir sobre o melhor intervalo, se dará pelo intervalo que possui menor comprimento médio. Intervalos que possuem comprimentos menores, são mais informativos que intervalos com amplitudes maiores.

No presente trabalho, tem-se interesse em populações gama, dessa forma, será feita uma revisão que visa apresentar as variações da distribuições gama, em relação aos seus parâmetros. É possível encontrar na literatura, distribuições gama, de um, dois e três parâmetros.

2.3 Distribuição gama

A distribuição gama de três parâmetros, $gama(\alpha, \beta, \gamma)$, é definida por

$$f_X(x; \alpha, \beta, \gamma) = \frac{1}{\beta\Gamma(\alpha)} \left(\frac{x - \gamma}{\beta} \right)^{\alpha-1} e^{-\frac{(x-\gamma)}{\beta}}, \quad x > \gamma, \quad (13)$$

em que $\alpha > 0$ é o parâmetro de forma, $\beta > 0$ é o parâmetro de escala e $\gamma > 0$ o parâmetro de posição. A função $\Gamma(\alpha)$ é a função Γ avaliada em α , sendo dada por

$$\Gamma(\alpha) = \int_0^{\infty} y^{\alpha-1} e^{-y} dy, \quad \alpha > 0. \quad (14)$$

De acordo com Ferreira (2013), a distribuição gama nas aplicações, é descrita em termos de dois parâmetros. Dessa forma, a distribuição gama de dois parâmetros será apresentada da mesma maneira que se encontra em Mood, Graybill e Boes (2001).

Uma variável aleatória X tem distribuição $gama(\alpha, \beta)$ com parâmetros $\alpha > 0$ (também denominado parâmetro de forma) e $\beta > 0$ (parâmetro de taxa), denotando-se

$X \sim \text{gama}(\alpha, \beta)$, se sua função densidade é dada por

$$f_X(x; \alpha; \beta) = \frac{\beta}{\Gamma(\alpha)} (\beta x)^{\alpha-1} e^{-\beta x} \mathbf{I}_{[0, \infty)}(x). \quad (15)$$

Nota-se que a distribuição $\text{gama}(\alpha, \beta)$, exposta em 15, depende da função gama $\Gamma : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, apresentada em (14). As propriedades que circundam a função gama, são apresentadas na sequência. Vale ressaltar que essas propriedades foram retiradas de Farias (2010).

Teorema 2.1 (*Propriedades da função gama*)

Seja $\Gamma : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ uma função de variável real, apresentada na expressão (14). Então valem as seguintes propriedades:

(P1) Dados $\alpha > 0$ e $\lambda > 0$, tem-se:

$$\frac{\Gamma(\alpha)}{\lambda^\alpha} = \int_0^\infty x^{\alpha-1} e^{-\lambda x} dx$$

(P2) Dados $\alpha > 1$, $\Gamma(\alpha) = (\alpha - 1)\Gamma(\alpha - 1)$.

(P3) Dado $n \in \mathbb{N}$, $\Gamma(n) = (n - 1)!$.

Demonstração:

(G1) Para mostrar que $\frac{\Gamma(\alpha)}{\lambda^\alpha} = \int_0^\infty x^{\alpha-1} e^{-\lambda x} dx$, é suficiente mostrar que, $\Gamma(\alpha) = \lambda^\alpha \int_0^\infty x^{\alpha-1} e^{-\lambda x} dx$.

Para isso, substituindo ($x = \lambda y$), supondo $\lambda > 0$, a propriedade segue. Assim,

$$\Gamma(\alpha) = \int_0^\infty x^{\alpha-1} e^{-x} dx = \int_0^\infty (\lambda y)^{\alpha-1} e^{-\lambda y} \lambda dy = \lambda^\alpha.$$

(G2) Para mostrar a veracidade desta propriedade, basta utilizar a teoria de integração por partes. Dessa forma, fazendo: $u = x^{\alpha-1} \implies du = (\alpha - 1)x^{\alpha-2} dx$ e $dv = e^{-x} \implies v = e^{-x}$.

$$\begin{aligned}
\Gamma(r) &= \int_0^{\infty} x^{r-1} e^{-x} dx = -x^{r-1} e^{-x} \Big|_0^{\infty} + \int_0^{\infty} e^{-x} (r-1) x^{r-2} dx \\
&= \int_0^{\infty} e^{-x} (r-1) x^{r-2} dx = (r-1) \int_0^{\infty} x^{r-2} e^{-x} dx \\
&= (r-1) \Gamma(r-1).
\end{aligned} \tag{16}$$

- (G3) Inicialmente será considerado que $r = n$ é um inteiro positivo. Usando a propriedade (G2), a propriedade será provada por indução. Observa-se que a afirmação é verdadeira para $n = 1$. De fato,

$$\Gamma(1) = \int_0^{\infty} x^{1-1} e^{-x} dx = 1. \tag{17}$$

Supondo que é verdade para qualquer $n \in \mathbb{N}$, admitindo que $\Gamma(n) = (n-1)!$, veja que essa afirmação implica em ser verdade para $n + 1$. Usando o resultado apresentado em (G2) ,

$$\Gamma(n+1) = n\Gamma(n) = n(n-1)! = n!. \tag{18}$$

A distribuição gama padrão é um caso particular da distribuição gama de três parâmetros mais geral, quando os parâmetros $\beta = 1$ e $\gamma = 0$. Dessa forma, a função densidade de probabilidade é

$$f_X(x; \alpha) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} x^{\alpha-1} e^{-x} \mathbf{I}_{[0, \infty)}(x). \tag{19}$$

Ferreira (2013) afirma que a distribuição gama pode ser vista como uma generalização da distribuição exponencial do tempo de espera até que α -ésimo evento ocorra, para α inteiro. Pode-se definir a distribuição *gama*(α, β) de forma alternativa (Botelho e Morais, 1999), com o mesmo valor de $\alpha > 0$ (parâmetro de forma) e $\frac{1}{\beta} > 0$ (parâmetro de taxa), denotando-se $X \sim \text{gama}(\alpha, \beta)$, se sua função densidade é dada por

$$f_X(x; \alpha; \beta) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)\beta^\alpha} x^{\alpha-1} e^{-\frac{x}{\beta}} \mathbf{I}_{[0, \infty)}(x). \tag{20}$$

No presente trabalho tem-se interesse em populações *gama*(α, β). Dessa forma, na

próxima seção, que contempla a estimação dos parâmetros, será considerado apenas o caso da gama de dois parâmetros. É possível encontrar informações com relação a estimação dos parâmetros de distribuições gama de três parâmetros em Basak e Balakrishnan (2011).

2.3.1 Estimação dos parâmetros da distribuição $\text{gama}(\alpha, \beta)$

Em trabalhos que envolvem a distribuição $\text{gama}(\alpha, \beta)$, uma das dificuldades encontradas é na de estimação dos parâmetros α e β . De acordo com Ye e Chen (2017), o método mais utilizado para encontrar os estimadores de α e β é o da máxima verossimilhança. Esses autores ainda complementam que não há uma fórmula fechada para os estimadores. Eles afirmam que pelo método dos momentos, no entanto, existem fórmulas fechadas para os estimadores de α e β da distribuição $\text{gama}(\alpha, \beta)$. Todavia, os estimadores encontrados não são eficientes tanto em situações de pequenas amostras quanto de grandes amostras.

2.3.1.1 Estimação dos parâmetros da distribuição $\text{gama}(\alpha, \beta)$ pelo método da máxima verossimilhança

Thom (1966), usando o método da máxima verossimilhança, derivou as equações para os estimadores dos parâmetros da distribuição $\text{gama}(\alpha, \beta)$. Para o parâmetro α é necessário obter a resolução da seguinte equação quadrática

$$12A\alpha^2 - 6\alpha - 1 = 0, \quad (21)$$

em que uma das soluções é

$$\hat{\alpha} = \frac{1}{4A} \left(1 + \sqrt{1 + \frac{4A}{3}} \right), \quad (22)$$

sendo

$$A = \ln(\bar{x}) - \bar{x}_g. \quad (23)$$

$$\bar{x} = \sum_1^n \frac{x_i}{n}. \quad (24)$$

$$\bar{x}_g = \sum_1^n \frac{\ln(x_i)}{n} \quad (25)$$

em que \bar{x} é a média aritmética das observações e \bar{x}_g é logaritmo neperiano da média geométrica das observações, x_i ésimo é o i -ésimo valor observado e n é o número de observações.

Para o parâmetro β , o estimador é

$$\hat{\beta} = \frac{\bar{x}}{\hat{\alpha}}. \quad (26)$$

Minka (2012) explicitou os estimadores dos parâmetros α e β via método da máxima verossimilhança utilizando a parametrização alternativa apresentada em 20. Sendo assim, a função de verossimilhança para a distribuição $\text{gama}(\alpha, \beta)$ é dada por

$$\begin{aligned} L(\alpha, \beta; x_1, x_2, \dots, x_n) &= \prod_{i=1}^n \frac{1}{\beta^\alpha \Gamma(\alpha)} x_i^{\alpha-1} \exp\left\{-\frac{x_i}{\beta}\right\} \\ &= \left(\frac{1}{\beta^\alpha \Gamma(\alpha)}\right)^n \prod_{i=1}^n x_i^{\alpha-1} \exp\left\{-\frac{\sum_{i=1}^n x_i}{\beta}\right\}. \end{aligned} \quad (27)$$

A função $\ln(L(x; \theta))$ é dada por

$$\begin{aligned} \ln(L(\alpha, \beta; x_1, x_2, \dots, x_n)) &= (\alpha - 1) \sum_{i=1}^n \ln(x_i) - n \ln \Gamma(\alpha) - \\ &\quad - n \ln \Gamma(\alpha) - n\alpha \ln(\beta) - \frac{1}{\beta} \sum_{i=1}^n x_i. \end{aligned} \quad (28)$$

Equivalentemente, tem-se:

$$\begin{aligned} \ln(L(\alpha, \beta; x_1, x_2, \dots, x_n)) &= n(\alpha - 1) \overline{\ln(x)} - n \ln(\Gamma(\alpha)) - \\ &\quad - n\alpha \ln(\beta) - n \frac{\bar{x}}{\beta}. \end{aligned} \quad (29)$$

Derivando a expressão (28), em relação ao parâmetro β e igualando a zero, é obtido o estimador para este parâmetro, desta forma:

$$\frac{\partial \ln(\ln(L(\alpha, \beta; x_1, x_2, \dots, x_n)))}{\partial \beta} = -\frac{n\hat{\alpha}}{\hat{\beta}} + \frac{n\bar{x}}{\hat{\beta}^2} = 0 \quad (30)$$

Portanto,

$$\frac{n\hat{\alpha}}{\hat{\beta}} = \frac{n\bar{x}}{\hat{\beta}^2} \implies \hat{\beta} = \frac{\bar{x}}{\hat{\alpha}} \quad (31)$$

Para o parâmetro α foi encontrada a seguinte aproximação:

$$\hat{\alpha} \approx \frac{0,5}{\ln(\bar{x}) - \ln(x)} \quad (32)$$

2.4 Estimação dos parâmetros $\text{gama}(\alpha, \beta)$ pelo métodos dos momentos

Os dois primeiros momentos da distribuição $\text{gama}(\alpha, \beta)$ são dados por

$$\mu_1 = \frac{\alpha}{\beta} \quad (33)$$

$$\mu_2 = \frac{\alpha(\alpha + 1)}{\beta^2} \quad (34)$$

Para aplicar o método dos momentos deve-se expressar α e β em função dos parâmetros μ_1 e μ_2 . Daí,

$$\mu_2 = \frac{\alpha(\alpha + 1)}{\beta^2} \iff \mu_2 = \frac{\beta\mu_1}{(\beta\mu_1 + 1)} \quad (35)$$

Além disso, a partir da equação para o primeiro momento, apresentada em (33), tem-se

$$\alpha = \beta\mu_1 = \frac{\mu_1^2}{\mu_2 - \mu_1^2} \quad (36)$$

Os estimadores dos métodos de momentos, para o parâmetro α e β , desde que $\hat{\sigma}_2^2 = \hat{\mu}_2 - \hat{\mu}_1^2$, são:

$$\hat{\alpha} = \frac{\bar{X}^2}{\hat{\sigma}_2} \quad \text{e} \quad \hat{\beta} = \frac{\bar{X}}{\hat{\sigma}_2} \quad (37)$$

Ao obter informações em relação aos parâmetros α e β de uma distribuição $\text{gama}(\alpha, \beta)$, tem-se interesse em estudar funções destes parâmetros, bem como, média e variância da distribuição. Desta forma, a média e variância da distribuição $\text{gama}(\alpha, \beta)$ serão apresentadas utilizando o método dos momentos, subtópico que será apresentado na sequência.

2.5 Média e variância da distribuição $\text{gama}(\alpha, \beta)$ pelo método dos momentos

Seja X uma variável aleatória, tal que $X \sim \text{gama}(\alpha, \beta)$, então sua função geradora de momentos é dada por:

$$\begin{aligned} M_X(t) &= \mathbb{E}(e^{tX}) = \int_0^{\infty} e^{tx} x^{\alpha-1} e^{-\beta x} \frac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)} \\ &= \frac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)} \int_0^{\infty} x^{\alpha-1} e^{-(\beta-t)x} dx = \frac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)} \frac{\Gamma(\alpha)}{(\beta-t)^\alpha}. \end{aligned}$$

Portanto, conclui-se que

$$M_X(t) = \left(\frac{\beta}{\beta-t} \right)^\alpha.$$

Para se calcular o valor esperado e a variância será necessário obter o primeiro e o segundo momentos, bastando para isso derivar a função geradora de momentos.

$$M'_X(t) = \frac{\alpha}{\beta-t} \left(\frac{\beta}{\beta-t} \right)^\alpha$$

e

$$M''_X(t) = \frac{\alpha(\alpha+1)}{(\beta-t)^2} \left(\frac{\beta}{\beta-t} \right)^\alpha.$$

Desta forma, o valor esperado de X é dado por:

$$\mathbb{E}(X) = M'_X(0) = \frac{\alpha}{\beta} \left(\frac{\beta}{\beta} \right)^\alpha = \frac{\alpha}{\beta}.$$

Sua variância é dada por

$$\begin{aligned} \text{Var}(X) &= \mathbb{E}(X^2) - \mathbb{E}^2(X) \\ &= M''_X(0) - (M'_X(0))^2 \\ &= \frac{\alpha(\alpha+1)}{\beta^2} - \left(\frac{\alpha}{\beta} \right)^2 \\ &= \frac{\alpha}{\beta^2}. \end{aligned}$$

Pelo método dos momentos foi possível encontrar um estimador pontual para a média da distribuição gama. Como foi salientado no presente referencial, outra forma de

se encontrar esse estimador para o parâmetro média de uma distribuição $\text{gama}(\alpha, \beta)$ é utilizando um estimador intervalar, que associado a uma medida de confiança, fornece um intervalo de confiança.

A seguir serão apresentados dois métodos para construção de intervalos de confiança para o parâmetro $\mu = \alpha/\beta$ de populações $\text{gama}(\alpha, \beta)$ encontrados na literatura. Vale ressaltar que ambos intervalos descritos na sequência não serão objetos de estudo do presente trabalho.

Segue como sugestão a leitura do trabalho dos autores Kulkarni e Powar (2010). Nesta obra, é possível encontrar outras propostas para o cálculo de intervalos de confiança para o parâmetro média da distribuição $\text{gama}(\alpha, \beta)$.

2.6 Intervalo de confiança para a média de populações $\text{gama}(\alpha, \beta)$

2.6.1 Método de Grice e Bain (M_1)

Grice e Bain (1980) obtiveram o seguinte IC aproximado $(1 - \alpha)$ 100% para μ com base no fato de que $2ns/\theta \sim \chi^2(2nk)$:

$$[2n\hat{k}s/\chi_{1-\beta}^2(2n\hat{k}), 2n\hat{k}s/\chi^2\beta(2n\hat{k}),] \quad (38)$$

em que s é a média amostral com base em uma amostra aleatória de tamanho n da distribuição $\text{gama}(k, \theta)$, o parâmetro k da distribuição χ^2 acima mencionada é desconhecido e os autores sugerem substituindo-o pelo seu estimador de máxima verossimilhança \hat{k} . Como o parâmetro k é substituído por \hat{k} , o nível de confiança alcançado é perturbado.

Dessa forma, para uma determinada confiança α e um valor observado de k , um número β é estimado usando simulação Monte Carlo para substituir os quantis χ_α^2 e $\chi_{1-\alpha}^2$ da distribuição χ^2 relevantes, por χ_β^2 e $\chi_{1-\beta}^2$, respectivamente, de modo a alcançar o nível de confiança o mais próximo possível de α .

A abordagem baseia-se na ideia chave de que a razão do α -ésimo quantil da distribuição qui-quadrado aos seus graus de liberdade, isto é, $\chi_{\alpha;\nu}^2/\nu$, é relativamente constante ao longo dos valores possíveis de ν , exceto por valores pequenos de ν .

Os autores também estudaram o poder para o teste relacionado de $H_0 : \mu = \mu_0$ contra $H_1 : \mu = \mu_1 < \mu_0$ para $\beta = 0,025$, $k = 1, 2, 4$, $n = 10, 20, 40$ e $\mu_0/\mu_1 = 0, 4; 0, 6; 1, 4; 1, 8$. Os autores descobriram que esses poderes aproximam cerca de 88%

dos poderes correspondente ao teste uniformemente mais poderoso (UMP) para testar μ quando k é conhecido.

Este teste verificou-se robusto quando o verdadeiro modelo era uma mistura de distribuições gamas e foi aplicado a um conjunto de dados numéricos, obtendo menor comprimento de intervalos de confiança do que aqueles obtidos por Gross e Clark (1975). Também foi constatado que o teste necessita estimar o nível ajustado de significância β dado na equação 1 por um valor observado de k com α pré-estabelecido. Os autores tabelaram esses valores para as combinações selecionadas combinações de k e α , enquanto que para outras elas precisam ser interpoladas.

2.6.2 Método de Shiue e Bain (M2)

Shiue e Bain (1990) adotam outra abordagem para modificar o teste para a média especificada μ_0 com base na estatística $T = 2nks/\mu \sim \chi^2(2nk)$ quando κ é desconhecido. Se t é o valor observado de T , então o valor p observado deste teste para a alternativa $\mu < \mu_0$ é $u = Pr[2nks/\mu_0 \leq t] = H(t; 2nk)$ onde $H(t; 2nk)$ é a distribuição cumulativa função de $\chi^2(2nk)$ em t . Shiue e Bain (1990) estimam esse valor p em substituir desconhecido κ por sua *m.l.e.* κ dando o valor p estimado $u = H(t; 2nk)$ onde $t = (2nk)/\mu_0$. Eles aproximam a distribuição de $W = -\ln(u)$ por um Weibull distribuição e propor o valor- p do teste resultante como $\exp[-(-\ln(u))/a]b$. Os parâmetros a e b envolvidos nesta expressão são obtidos por mínimos quadrados ajustando-se aos pontos percentuais simulados de W (com $\kappa = 1$) sobre n dando $a = 1 - (0,232/n) + (1,360/n^2)$, $b = 1 - (0,482/n) - (0,88/n^2)$. O intervalo de confiança resultante é dado por

$$2n\hat{k}s/\chi^2_{ql}(2n\hat{k}), 2n\hat{k}s/\chi^2_{qu}(2n\hat{k}) \quad (39)$$

em que $ql = \exp(-a(-\ln(1-\alpha))1/b)$ e $qu = \exp(-a(-\ln(\alpha))1/b)$. Os cálculos sugerem a aproximação $\chi^2_\gamma(v)/v = [1 - (2/9v) + Z_\gamma\sqrt{2/9v}]^3$ em que Z_γ é o quantil 100 γ % da distribuição normal padrão.

2.7 Bootstrap

Segundo Gebert e Ferreira (2013), dois dos maiores problemas da estimação estatís-

tica são a determinação do valor de um parâmetro de interesse e avaliar sua precisão. De forma a tentar solucionar essas questões, Efron (1982), ao introduzir sua versão *bootstrap*, foi motivado por essas duas situações. De acordo com Ferreira (2013), o método *bootstrap* é baseado na ideia de realizações de réplicas do processo de estimação da amostra original, usadas para fazer inferências estatística, com objetivos de determinar as propriedades da distribuição do estimador de certo parâmetro, e sem fazer suposições sobre a forma da distribuição dos dados.

A técnica de reamostragem *bootstrap* pode ser aplicada quando se conhece ou não a distribuição de probabilidade da variável aleatória. A seguir serão apresentados as duas vertentes do método *bootstrap*, o *bootstrap* paramétrico e *bootstrap* não-paramétrico

2.7.1 *Bootstrap* paramétrico

No método *bootstrap* paramétrico a distribuição de probabilidade da variável aleatória é conhecida. Quando as observações são provindas de uma função distribuição paramétrica, então $X_1, X_2, \dots, X_n \sim i.i.d. F(x; \theta)$. Supondo que os dados observados são usados para estimar θ por $\hat{\theta}$, que frequentemente, mas nem sempre, é o estimador de máxima verossimilhança, então sua substituição no modelo fornece o modelo ajustado $X_1^*, X_2^*, \dots, X_n^* \sim i.i.d. F(x; \hat{\theta})$, o qual pode ser usado para calcular estimativas dos parâmetros (DAVISON; HINKLEY, 2008).

Segundo Gebert(2014), no método *bootstrap* paramétrico, a primeira ação, é estimar os parâmetros que caracterizam essa distribuição de probabilidade na amostra de n observações. A partir dos valores encontrados e da função de distribuição estimada, são geradas B amostras *bootstrap* paramétricas, cada uma de tamanho n , de mesmo tamanho da amostra original. Em cada uma das amostras geradas no processo *bootstrap* paramétrico, calcula-se a estimativa de um parâmetro de interesse. Dessa forma é gerada uma distribuição *bootstrap* de estimativas pela qual é possível realizar estudos inferenciais sobre o parâmetro θ em questão, isto é, construção de intervalos de confiança para θ e testes de hipótese para θ .

2.7.2 *Bootstrap* não-paramétrico

Nesse caso, a distribuição de probabilidade da variável aleatória é desconhecida e o pesquisador dispõe apenas das observações amostrais, não tendo informações sobre a distribuição de probabilidade geradora do processo.

O procedimento *bootstrap* não-paramétrico, é um método baseado em reamostragens com reposição, a partir da amostra de n observações disponível. São geradas B amostras de tamanho n , mesmo tamanho da amostra inicial, em seguida é calculada uma estatística de interesse em cada uma das pseudo-amostras, sendo assim, com auxílio da distribuição *bootstrap* de estimativas é possível realizar inferências sobre o parâmetro de interesse (GENTLE, 2003).

De maneira geral, uma das funcionalidades da técnica *bootstrap*, em suas duas vertentes, é a da possibilidade de se construir intervalos de confiança para os parâmetros, em circunstâncias em que outras técnicas não são aplicáveis, em particular, no caso em que o tamanho de amostras é reduzido. Os intervalos gerados por meio de *bootstrap* também são aproximados, mas oferecem melhor aproximação que os intervalos de confiança padrão (EFRON; TIBSHIRANI, 1993). A precisão dos intervalos torna-se cada vez maior quando o número de reamostragens cresce.

Chernick (2008) recomenda que o número mínimo necessário para se realizar um processo de reamostragem de modo que se encontre boas estimativas, seria em pelo menos 1000 repetições *bootstrap*, utilizando a abordagem paramétrica ou não paramétrica.

Vale ressaltar que esta técnica foi extrapolada para a resolução de muitos outros problemas de difícil resolução por meio de técnicas de análise estatística tradicionais (baseadas na hipótese de um elevado número de parâmetros).

2.8 Simulação Monte Carlo

O nome Monte Carlo está associado com a cidade Monte Carlo, no Principado de Mônaco. O nome é provindo, basicamente, em razão dos jogos de azar, decorrentes da roleta, que é um mecanismo simples para gerar números aleatórios (BUSSAB; MORETTIN, 2003).

Segundo Oliveira (2016), simulação Monte Carlo é usada para servir como uma pri-

meira avaliação de um sistema para gerar novas estratégias de análise e regras de decisões antes de se correr o risco de experimentá-las no sistema real. Santos (2001) complementa que todo processo simulado, que envolve pelo menos um componente aleatório, é pertencente ao método Monte Carlo.

De acordo com Ferreira (2013), os métodos Monte Carlo são utilizados de forma útil na avaliação das propriedades de um estimador, de um método de estimação intervalar, de um teste estatístico, na determinação de tamanhos amostrais e na solução direta de problemas estatísticos.

3 MATERIAL E MÉTODOS

A presente proposta tem intenção de avaliar por simulação Monte Carlo o desempenho de três opções para o intervalo de confiança para o parâmetro $\mu = \alpha/\beta$ da distribuição $\text{gama}(\alpha, \beta)$, em que um dos intervalos, o intervalo de confiança utilizando a técnica *bootstrap*, é uma nova proposta do presente trabalho. O desempenho será medido por intermédio das probabilidades de cobertura e dos comprimentos médios dos intervalos considerados em simulações Monte Carlo.

3.1 Intervalo de confiança *bootstrap*

Inicialmente foi considerada uma amostra aleatória X_1, X_2, \dots, X_n de observações independentes e identicamente distribuídas de uma distribuição $\text{gama}(\alpha, \beta)$. Os parâmetros α e β da distribuição gama foram estimados na amostra original por meio do pacote VGAM do programa R (R Core Team, 2018). Estas estimativas foram utilizadas para obter a função densidade empírica da distribuição gama dada por

$$\hat{f}_X(x; \hat{\alpha}, \hat{\beta}) = \frac{1}{\Gamma(\hat{\alpha})} \hat{\beta}^{\hat{\alpha}} x^{\hat{\alpha}-1} e^{-\hat{\beta}x}. \quad (40)$$

A partir da função densidade de probabilidade estimada da distribuição $\text{gama}(\hat{\alpha}, \hat{\beta})$, apresentada em 40, são geradas N_b amostras *bootstrap* paramétricas de tamanho n (de mesmo tamanho da amostra original). Em cada uma das N_b amostras, são obtidas estimativas as $\hat{\alpha}_i, \hat{\beta}_i$ e $\hat{\theta} = \hat{\alpha}_i/\hat{\beta}_i$, para $i = 1, \dots, N_b$. Estas estimativas de $\hat{\theta}_i$ formaram a distribuição *bootstrap* das médias. De posse desta distribuição *bootstrap* das médias $\hat{\theta}^* = (\hat{\theta}_1^*, \hat{\theta}_2^*, \dots, \hat{\theta}_{N_b}^*)$ foi construído um intervalo de confiança *bootstrap* percentílico para a média de populações $\text{gama}(\alpha, \beta)$ com coeficiente de confiança $100(1 - \alpha)\%$ dado por

$$(\hat{\theta}_{q_1}^*, \hat{\theta}_{q_2}^*) \quad (41)$$

em que $q_1 = \lceil N_b \times (\alpha/2) \rceil$ e $q_2 = N_b - q_1$ e $\lceil x \rceil$ indica o menor inteiro maior ou igual ao argumento x .

3.2 Intervalo de confiança assintótico baseado em aproximações pela distribuição normal

Utilizando o fato de que os estimadores de máxima verossimilhança são assintoticamente normais, então a função

$$\frac{\hat{\theta} - \theta}{\hat{\sigma}_{\hat{\theta}}} \sim N(0, 1), \quad n \rightarrow \infty. \quad (42)$$

Como $\hat{\theta}$ é uma média, sabe-se que sua variância é $\sigma_{\hat{\theta}}^2 = \sigma^2/n$. Mas a esperança μ e variância σ^2 da variável aleatória X , que é uma gama, são dadas a seguir. Se os parâmetros forem substituídos pelos estimadores tem-se também os seguintes estimadores da média e da variância da variável aleatória X :

$$\begin{cases} \theta = \mu = \frac{\alpha}{\beta} \Rightarrow \hat{\theta} = \hat{\mu} = \frac{\hat{\alpha}}{\hat{\beta}} \\ \sigma^2 = \frac{\alpha}{\beta^2} \Rightarrow \hat{\sigma}^2 = \frac{\hat{\alpha}}{\hat{\beta}^2}. \end{cases} \quad (43)$$

Portanto, o estimador da variância de $\hat{\theta}$ é dado por

$$\hat{\sigma}_{\hat{\theta}}^2 = \frac{\hat{\sigma}^2}{n}, \quad (44)$$

que se $\hat{\sigma}^2$ for substituído pelo estimador dado em (43), tem-se

$$\hat{\sigma}_{\hat{\theta}}^2 = \frac{\hat{\alpha}}{n\hat{\beta}^2}. \quad (45)$$

Isolando-se θ na expressão (42) tem-se a expressão geral para o intervalo de confiança assintótico para θ , dado por

$$P\left(\hat{\theta} - z_{1-\alpha/2}\hat{\sigma}_{\hat{\theta}} \leq \theta \leq \hat{\theta} + z_{1-\alpha/2}\hat{\sigma}_{\hat{\theta}}\right) = 1 - \alpha. \quad (46)$$

Fazendo-se a substituição de (45) em (46), o intervalo de confiança assintótico para a média da distribuição $\text{gama}(\alpha, \beta)$ é expresso por

$$P\left(\frac{\hat{\alpha}}{\hat{\beta}} - z_{1-\alpha/2}\frac{\sqrt{\hat{\alpha}}}{\hat{\beta}\sqrt{n}} \leq \theta \leq \frac{\hat{\alpha}}{\hat{\beta}} + z_{1-\alpha/2}\frac{\sqrt{\hat{\alpha}}}{\hat{\beta}\sqrt{n}}\right) = 1 - \alpha. \quad (47)$$

3.3 Intervalo de confiança assintótico via estatística de Wald

Para aplicar a teoria geral apresentada em 2.2.2.2, deve-se fazer uma reparametrização na parametrização apresentada em (15). Nota-se que, utilizando (15), a média da distribuição $\text{gama}(\alpha, \beta)$ é dada por $\mu = \alpha/\beta$. Dessa forma, tem-se que

$$\mu = \frac{\alpha}{\beta} \implies \alpha = \mu\beta \quad \text{e} \quad \beta = \beta. \quad (48)$$

Assim, tem-se que a função densidade de probabilidade da distribuição $\text{gama}(\alpha, \beta)$, com a nova reparametrização é

$$f_X(x|\mu, \beta) = \frac{\beta^{\mu\beta}}{\Gamma(\mu\beta)} x^{\mu\beta-1} e^{-\beta x} I_{(0,\infty)}(x); \quad \mu, \beta > 0. \quad (49)$$

Dessa maneira, a informação sobre a variância de $\hat{\mu}$ é obtida usando o método da máxima verossimilhança. Primeiramente, deve-se obter a matriz de informação de Fisher. As funções de verossimilhança e de log-verossimilhança são dadas por

$$\begin{aligned} L(\mu, \beta|x) &= \prod_{i=1}^n f_X(x_i|\mu, \beta) \\ &= \left(\frac{\beta^{\mu\beta}}{\Gamma(\mu\beta)} \right) e^{-\beta \sum_{i=1}^n x_i} \prod_{i=1}^n x_i^{\mu\beta-1} \\ l(\mu, \beta|x) &= n [\mu\beta \ln \beta - \ln \Gamma(\mu\beta)] - \beta \sum_{i=1}^n x_i + \sum_{i=1}^n \ln x_i. \end{aligned}$$

As derivadas parciais de primeira ordem são

$$\frac{\partial l}{\partial \mu} = n [\beta \ln \beta - \beta \psi^{(0)}(\mu\beta)] + \beta \sum_{i=1}^n \ln x_i \quad (50)$$

e

$$\frac{\partial l}{\partial \beta} = n [\mu \ln \beta + \mu - \mu \psi^{(0)}(\mu\beta)] - \sum_{i=1}^n x_i + \mu \sum_{i=1}^n \ln x_i, \quad (51)$$

em que $\psi^{(0)}(\cdot)$ é a função digama, definida como $\ln(\Gamma(\cdot))'$. (No programa R está implementada com a função `digamma`).

As derivadas parciais de segunda ordem são:

$$\frac{\partial^2 l}{\partial \mu^2} = -nb^2 \psi^{(1)}(\mu b), \quad (52)$$

$$\frac{\partial^2 l}{\partial b^2} = n\mu \left[\frac{1}{b} - \mu\psi^{(1)}(\mu b) \right] \quad (53)$$

e

$$\frac{\partial^2 l}{\partial \beta \partial \mu} = n \left[\ln \beta + 1 - \psi^{(0)}(\mu\beta) - \mu\beta\psi^{(1)}(\mu\beta) \right] + \sum_{i=1}^n \ln x_i, \quad (54)$$

em que $\psi^{(1)}(\cdot)$ é a função trigama, definida como $\ln(\Gamma(\cdot))''$. (No **R** está implementada com a função `trigamma`). Observe também que $\frac{\partial^2 l}{\partial \beta \partial \mu} = \frac{\partial^2 l}{\partial \mu \partial \beta}$, logo a matriz de informação de Fisher é

$$I(\mu, \beta) = - \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix},$$

em que

$$\begin{aligned} a_{11} &= -n\beta^2\psi^{(1)}(\mu\beta) \\ a_{21} &= a_{12} = n \left[\ln \beta + 1 - \psi^{(0)}(\mu\beta) - \mu\beta\psi^{(1)}(\mu\beta) \right] + \sum_{i=1}^n \ln x_i \\ a_{22} &= n\mu \left[\frac{1}{\beta} - \mu\psi^{(1)}(\mu\beta) \right]. \end{aligned}$$

Conseqüentemente,

$$I^{-1}(\mu, \beta) = -\frac{1}{a_{11}a_{22} - a_{12}^2} \begin{bmatrix} a_{22} & -a_{21} \\ -a_{12} & a_{11} \end{bmatrix}.$$

Portanto, o erro padrão de $\hat{\mu}$ é dado por

$$\begin{aligned} se(\hat{\mu}) &= \sqrt{\frac{\hat{a}_{22}}{\hat{a}_{11}\hat{a}_{22} - \hat{a}_{12}^2}} \\ &= \sqrt{\frac{n\hat{\mu} \left[\frac{1}{\hat{\beta}} - \hat{\mu}\psi^{(1)}(\hat{\mu}\hat{\beta}) \right]}{A - B^2}}, \end{aligned}$$

em que

$$A = -n\hat{\beta}^2\psi^{(1)}(\hat{\mu}\hat{\beta})n\hat{\mu} \left[\frac{1}{\hat{\beta}} - \hat{\mu}\psi^{(1)}(\hat{\mu}\hat{\beta}) \right]$$

$$B = n \left[\ln(\hat{\beta}) + 1 - \psi^{(0)}(\hat{\mu}\hat{\beta}) - \hat{\mu}\hat{\beta}\psi^{(1)}(\hat{\mu}\hat{\beta}) \right] + \sum_{i=1}^n \ln x_i,$$

além de que $\hat{\mu}$ e $\hat{\beta}$ são os estimadores de máxima verossimilhança da distribuição gama, obtidos via método do *Score* (*Fisher's Scoring*) por meio do pacote VGAM. A estimativa da média foi obtida por meio da propriedade de invariância dos estimadores de máxima verossimilhança, uma vez que, $\hat{\mu} = \hat{\alpha}/\hat{\beta}$.

Assim, o intervalo assintótico para μ com confiança $100(1 - \alpha)\%$ é dado por

$$\hat{\mu} - z_{1-\alpha/2} se(\hat{\mu}) \leq \mu \leq \hat{\mu} + z_{1-\alpha/2} se(\hat{\mu}). \quad (55)$$

3.4 Avaliação do desempenho dos intervalos estudados

A fim de avaliar os desempenhos dos intervalos de confiança *bootstrap* e assintóticos, foram considerados o comprimento médio e a probabilidade de cobertura dos intervalos de confiança gerados em N simulações Monte Carlo. O comprimento médio do intervalo de confiança k , na j -ésima simulação é dada por

$$\widehat{CM}_k = \frac{\sum_{j=1}^N (LS_{k,j} - LI_{k,j})}{N}. \quad (56)$$

em que $LS_{k,j}$ e $LI_{k,j}$ são os limites superior e inferior do intervalo k na j -ésima simulação, respectivamente. Vale ressaltar que, os valores assumidos por k e j , correspondem a $k = 1, 2, 3$, e $j = 1, 2, \dots, N$.

A probabilidade de cobertura, refere-se a probabilidade de que um determinado intervalo contenha o verdadeiro valor do parâmetro, que é $\mu = \alpha/\beta$. Para verificar se o verdadeiro valor do parâmetro pertence ao intervalo, utilizou-se uma função indicadora

$I_j(IC_{k,j})$, da seguinte maneira

$$I_j(IC_{k,j}) \left(\frac{\alpha}{\beta} \right) = \begin{cases} 1, & \text{se } \frac{\alpha}{\beta} \in (LI_{k,j}, LS_{k,j}) \\ 0, & \text{se } \frac{\alpha}{\beta} \notin (LI_{k,j}, LS_{k,j}). \end{cases}$$

em que $k = 1, 2, 3$, referem-se aos intervalos de confiança *bootstrap* e assintóticos, respectivamente, e $j = 1, 2, \dots, N$, refere-se a j -ésima simulação. Dessa forma, a probabilidade de cobertura dos intervalos de confiança *bootstrap* e assintóticos, representados por $k = 1, 2, 3$, nesta sequência, na j -ésima simulação é expressa por:

$$\widehat{PC}_k = \frac{\sum_{j=1}^N I_j(IC_{k,j})}{N}. \quad (57)$$

Para cada intervalo, o comprimento médio e a probabilidade de cobertura, foram computados ao final das N simulações. Os resultados foram tabulados e apresentados na forma gráfica e o intervalo de menor comprimento e probabilidade de cobertura próximo ao coeficiente confiança nominal $100(1 - \alpha)\%$ foi considerado ótimo. Para que os resultados possuíssem significado expressivo, foram utilizados vários cenários (configurações), em relação ao tamanho amostral n , aos valores dos parâmetros α e β e ao coeficiente de confiança $100(1 - \alpha)\%$.

Adicionalmente, foram consideradas $N = 1000$ simulações Monte Carlo, $N_b = 1000$ reamostragens *bootstrap* e os tamanhos amostrais considerados nas simulações foram: $n = 5, 20, 50, 100, 1000, 2000$. Os valores de α e β fixados para realizar as simulações, $(\alpha = \beta = 1)$ e $(\alpha = 7, \beta = 2)$ $(\alpha = 2, \beta = 5)$. Os níveis nominais utilizados nesse trabalho, foram de 90%, 95% e 99%. Todos algoritmos e simulações, para a realização do trabalho, foram feitos utilizando o software R (R Core Team, 2018).

4 RESULTADOS E DISCUSSÃO

Após a realização das simulações, os valores das probabilidades de cobertura e comprimentos médios dos três intervalos para o parâmetro média da distribuição $\text{gama}(\alpha, \beta)$ nos diversos cenários foram computadas. Para fins de simplificação, foram utilizadas as seguintes abreviações para os intervalos utilizados: $IC1$, $IC2$, $IC3$, correspondendo aos intervalos de confiança, *bootstrap* paramétrico, assintótico baseado em aproximação dada pela distribuição Normal e assintótico baseado na estatística de Wald, respectivamente.

Nesse primeiro momento, a ideia inicial é fazer uma apresentação completa dos resultados, utilizando como base o coeficiente nominal de confiança de 95% nas simulações, juntamente com os valores de α e β fixados e os tamanhos amostrais considerados. Em anexo, estão os resultados para os valores de probabilidade de cobertura e comprimento médio dos intervalos $IC1$, $IC2$ e $IC3$ nas situações em que os coeficientes de confiança nominais fixados foram de 90% e 99%, tendo em vista que as discussões são semelhantes e os intervalos obtiveram praticamente mesmo padrão de comportamento do que o obtido para o coeficiente de confiança de 95%. Dessa forma, a presente discussão aborda apenas o caso em que o nível nominal fixado é de 95%.

No presente trabalho, verificou-se que os intervalos de confiança $IC2$ e $IC3$ mesmo adotando metodologias diferentes, são equivalentes, isto é, forneceram resultados iguais tanto na cobertura quanto no comprimento médio. No decorrer da discussão dos resultados, o leitor poderá verificar esse fato. Para fins de comparação dos resultados, foi feito o intervalo de confiança binomial de 99%, considerando uma pseudo observação de 950 sucessos. O intervalo obtido é $[0, 9295, 0, 9661]$. Valores da probabilidade de cobertura não contidos neste intervalo são considerados significativamente ($p\text{-valor} \leq 0,01$) diferentes do valor nominal. Valores abaixo do limite inferior indica intervalos com cobertura inferior ao valor mínimo. Valores acima do limite superior do intervalo, indicam cobertura superior ao valor nominal do coeficiente de confiança, mas não acarretando problemas mais sérios, como no primeiro caso. Valores dentro deste limite, indicam intervalos de confiança exatos.

Conseqüentemente, na tabela 1 é possível identificar que para o coeficiente de confiança de 95%, quando os valores dos parâmetros foram $\alpha = 7$ e $\beta = 2$, nos cenários de $n = 5$ e $n = 50$, o intervalo $IC1$ obteve maior taxa de cobertura em relação aos intervalos

IC2 e *IC3*. Embora isto tenha acontecido, os três intervalos apresentaram cobertura significativamente inferiores ao valor nominal, no caso de $n = 5$. Por outro lado, os intervalos de confiança *IC2* e *IC3* obtiveram desempenho superior ao intervalo *IC1* quando os tamanhos amostrais eram de $n = 20, 100, 2000$, sendo que os três intervalos alcançaram mesma cobertura com $n = 1000$. A partir de $n \geq 50$, os três intervalos apresentaram coberturas idênticas ao valor nominal de 95%, quando utilizamos o intervalo de confiança binomial exato ao nível de 99%. Então pode-se concluir que os três métodos são assintoticamente equivalentes, ou seja, para grandes amostras eles apresentam probabilidades de cobertura iguais entre si e iguais ao valor nominal de confiança. Obviamente, esta igualdade é estatística e as pequenas diferenças observadas são atribuídas ao erro de Monte Carlo.

Tabela 1 - Probabilidade de cobertura dos três intervalos de confiança estudados (*IC1* - *Bootstrap*; *IC2*, *IC3*- Assintóticos), utilizando $N = 1000$ simulações Monte Carlo para diferentes valores de n , considerando $n = 5, 20, 50, 100, 1000, 2000$, com nível nominal fixado em 95%, usando os valores de ($\alpha = 7$ e $\beta = 2$).

		n					
		5	20	50	100	1000	2000
PC	<i>IC1</i>	84,50%	92,40%	94,10%	94,50%	94,70%	95,70%
PC	<i>IC2</i>	83,90%	92,70%	93,90%	95,20%	94,70%	96,10%
PC	<i>IC3</i>	83,90%	92,70%	93,90%	95,20%	94,70%	96,10%

A probabilidade de cobertura ideal para o cenário simulado é 95%. Todos os intervalos assintóticos e *bootstrap* convergiram em probabilidade na mesma velocidade, quando considera-se o intervalo binomial para a probabilidade de cobertura nominal. Esta situação está evidenciada na Tabela 1, pois quando o tamanho amostral era $n = 50$, os três resultados da probabilidade de cobertura não diferiram significativamente (p -valor > 0,01) do valor nominal de 95% do coeficiente de confiança. Deve-se observar que as diferenças entre eles a partir de $n = 50$ e entre as suas probabilidades de cobertura e o valor nominal, são atribuídas ao erro de Monte Carlo, pois todos os valores estão no intervalo binomial, citado anteriormente.

Na Tabela 2, são apresentados os comprimentos médios dos três intervalos estudados. Verifica-se, Tabela 1, que os intervalos apresentaram aumento de cobertura com o aumento dos tamanhos amostrais e a partir de $n = 50$ já foram considerados exatos.

Em relação aos comprimentos médios dos intervalos, verifica-se que o intervalo *IC1* possui menor comprimento médio, em todos os cenários estudados. Dessa forma, o intervalo *IC1* é melhor do que os outros dois pelo critério de possuir menor amplitude média, intervalos menores são mais informativos que intervalos de comprimento maior. Embora isso seja verdade, os comprimentos médios deste intervalo, não foram expressivamente menores. Assim, sua vantagem, embora exista, não foi muito grande.

Tabela 2 - Comprimentos médios dos três intervalos de confiança estudados (*IC1* - *Bootstrap*; *IC2*, *IC3*- Assintóticos), utilizando $N = 1000$ simulações Monte Carlo para diferentes valores de n , considerando $n = 5, 20, 50, 100, 1000, 2000$, com nível nominal fixado em 95% utilizando os valores de ($\alpha = 7$ e $\beta = 2$).

	n					
	5	20	50	100	1000	2000
CMIC1	1,9311	1,1167	0,7219	0,5125	0,1629	0,1153
CMIC2	1,9444	1,1213	0,7253	0,5152	0,1638	0,1158
CMIC3	1,9444	1,1213	0,7253	0,5152	0,1638	0,1158

Agora, Tabela 3, utilizando esse mesmo coeficiente nominal de confiança, estão apresentadas os casos em que os valores de α e β são iguais, em particular, quando $\alpha = \beta = 1$. Com $n = 5$ e $n = 20$, os três intervalos apresentaram cobertura inferior significativamente (valor- $p \leq 0,01$) ao valor nominal do coeficiente de confiança de 95%, com um valor um pouco maior, mais próximo do valor nominal, para o *IC1*. Já para $n = 50$, os intervalos *IC2* e *IC3* apresentaram menores probabilidades de cobertura do que o intervalo *bootstrap* paramétrico e significativamente menores que o valor nominal do coeficiente de cobertura, o que não ocorreu para o *IC1*. Verifica-se em particular que nas situações em que o tamanho amostral é $n < 20$ nenhum dos intervalos alcançou o coeficiente de confiança nominal para esse cenário, isto é, 95%. A partir do tamanho $n = 100$ os intervalos todos os intervalos atingiram a probabilidade de cobertura esperada, podendo ser considerados assintoticamente equivalentes. As diferenças observadas entre os intervalos e o valor nominal de 95%, para $n \geq 100$, são consideradas erros de Monte Carlo, tomando-se como base o intervalo de confiança binomial exato para o coeficiente de confiança. Vale ressaltar que a convergência do *IC1* foi mais rápida que a dos concorrentes, haja vista que com $n = 50$, o valor da cobertura já pode ser considerado exato para este intervalo.

Tabela 3 - Probabilidade de cobertura dos três intervalos de confiança estudados (IC1 - Bootstrap; IC2, IC3- Assintóticos), utilizando $N = 1000$ simulações Monte Carlo para diferentes valores de n , considerando $n = 5, 20, 50, 100, 1000, 2000$, com nível nominal fixado em 95%, usando os valores de $(\alpha = \beta = 1)$.

		n					
		5	20	50	100	1000	2000
PC	IC1	82,80%	91,60%	93,20%	94,70%	94,60%	94,50%
PC	IC2	81,40%	90,40%	92,80%	94,80%	95,10%	94,70%
PC	IC3	81,40%	90,40%	92,80%	94,80%	95,10%	94,70%

Como pode ser observado na Tabela 4, à medida em que os tamanhos amostrais aumentam, os comprimentos médios de todos intervalos tendem a diminuir, como preconizado pela teoria. Para pequenas amostras ($n \leq 20$), embora o *IC1* não tenha sido exato, ele teve coberturas maiores que os dos demais intervalos (Tabela 3) e também apresentou menor comprimento médio (Tabela 4). Este intervalo, de forma menos expressiva, continuou tendo menores intervalos que os outros dois concorrentes para $n \geq 50$.

Tabela 4 - Comprimentos médios dos três intervalos de confiança estudados (IC1 - *Bootstrap*; IC2, IC3- Assintóticos), utilizando $N = 1000$ simulações Monte Carlo para diferentes valores de n , considerando $n = 5, 20, 50, 100, 1000, 2000$, com nível nominal fixado em 95% utilizando os valores de $(\alpha = \beta = 1)$.

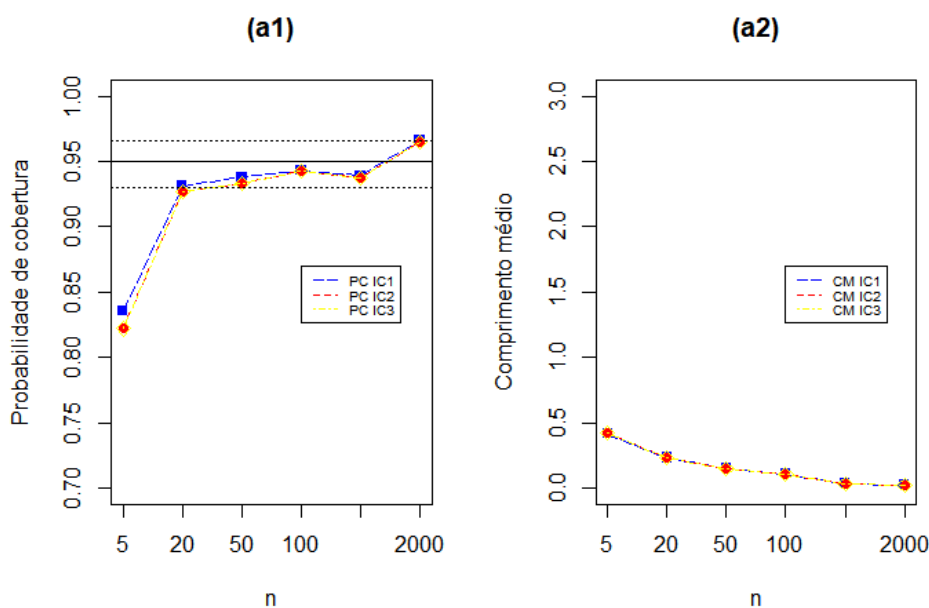
		n					
		5	20	50	100	1000	2000
CMIC1		1,5000	0,8259	0,5403	0,3852	0,1232	0,0874
CMIC2		1,5273	0,8346	0,5445	0,3879	0,1240	0,0877
CMIC3		1,5273	0,8346	0,5445	0,3879	0,1240	0,0877

Na Figura 1, (a1) e (a2), são mostrados, respectivamente, a probabilidade de cobertura estimada e o comprimento médio do intervalos três intervalos, quando foi utilizado $\alpha = 2$ e $\beta = 5$. Pode-se ver pelo intervalo de confiança de 99% para o coeficiente de confiança nominal de 95%, que os três testes tem cobertura igual ao valor nominal a partir de $n = 20$, para este caso. A uma tendência de o *IC1* superar os demais, pois sua probabilidade de cobertura é consistentemente superior, embora com pouca expressividade, à dos demais intervalos, que são iguais entre si (sobreposição de suas linhas), como já antevisto no início desta discussão. Nota-se, pela Figura 1 (a2), que utilizando os valores

mencionados para os parâmetros, houve uma grande queda nos comprimentos médios dos intervalos no geral, em relação aos mesmos cenários anteriores, com valores diferentes valores dos parâmetros. Os três intervalos obtiveram probabilidades de cobertura não diferentes do valor nominal de 90%, a partir de $n = 20$, mas, novamente pela Figura 1 (a2), verifica-se que o *IC1* apresentou menor comprimento médio do que os outros dois, na maioria dos casos, embora isso seja praticamente impossível de se perceber no gráfico, ou seja, as diferenças embora existentes, são inexpressivas.

Assim, há uma vantagem, se considerarmos os diferentes cenários, para o intervalo *bootstrap* paramétrico. Em alguns casos, a convergência para a probabilidade de cobertura nominal é mais rápida (ocorre com menores tamanho de amostra) e possui, embora de pequena magnitude a diferença, intervalos de comprimentos menores. Para os cenários de coeficiente de confiança de 90% e 99%, os resultados também apresentaram este padrão de comportamento. Assim, pode-se concluir que os três intervalos são assintoticamente equivalentes, e que a convergência do *IC1* é mais rápida e tem menores comprimentos médios de intervalos, sendo considerado melhor, nos cenários estudados.

Figura 1 - Probabilidades de cobertura e comprimentos médios dos três intervalos de confiança estudados (*IC1 - Bootstrap*; *IC2, IC3- Assintóticos*), utilizando $N = 1000$ simulações Monte Carlo para diferentes valores de n , considerando $n = 5, 20, 50, 100, 1000, 2000$, com nível nominal fixado igual a 95% utilizando os valores de ($\alpha = 2$ e $\beta = 5$).



Vale ressaltar que, Fraser et al. (1997), utilizaram intervalos de confiança para a

média de populações $gama(\alpha, \beta)$ aplicando o método da máxima verossimilhança. Por sua vez, os resultados encontrados nesse trabalho foram semelhantes aos da presente dissertação.

Durante a realização das simulações, foi constatado que ao utilizar os estimadores de máxima verossimilhança propostos por Minka (2002), a probabilidade de cobertura atingida é de certa forma comprometida, pois, os estimadores desses autores subestimam a probabilidade de cobertura não fornecendo resultados tão bons quanto aos obtidos utilizando o pacote *VGAM* do programa R (R Core Team, 2018).

5 CONCLUSÕES

São obtidas as seguintes conclusões a respeito dos intervalos de confiança estudados:

- Os intervalos assintóticos para a média de populações $\text{gama}(\alpha, \beta)$ são equivalentes, mesmo adotando metodologias diferentes, os resultados de probabilidade de cobertura e comprimentos médios dos dois intervalos são iguais em todas as situações simuladas.
- Pode-se concluir que os três intervalos são assintoticamente equivalentes, e que a convergência do $IC1$ é mais rápida e tem menores comprimentos médios de intervalos, sendo considerado melhor, nos cenários estudados.

Dessa forma, foram alcançados os objetivos da presente dissertação.

REFERÊNCIAS

- ALMEIDA, G. C. F. de; SILVA, I. R. **Intervalos de confiança via simulação Monte Carlo: o estado da arte**. Revista da Estatística da Universidade Federal de Ouro Preto, v. IV, p. 21–43, 2015.
- BOLFARINE, H.; SANDOVAL, M. C. **Introdução a Inferência Estatística, Coleção Matemática Aplicada**, SBM, 2010.
- BOTELHO, V.A.; MORAIS, A.R. **Estimativas dos parâmetros da distribuição gama de dados pluviométricos do município de Lavras, Estado de Minas Gerais**. Ciências e Agrotecnologia, v.23, n.3, p.697–706, 1999.
- BUSSAB, W. O.; MORETTIN, P. A. **Estatística Básica**. 5ª ed. São Paulo: Atual, 526 p. 2003.
- CASELLA, G.; BERGER, R. L. **Inferência Estatística**. Tradução da 2ª ed. São Paulo: Cengage Learning, 2010. 588 p.
- CHERNICK, M. R. **Bootstrap Methods: A Guide for Practitioners and Researchers**. 2ª ed. Newtown: Wiley-Interscience, 369 p. 2008.
- DALLACORT, R.; MARTINS, J. A.; FREITAS, P. S. L.; COLETTI, A. J. **Distribuição das chuvas no município de Tangará da Serra, médio norte do estado de Mato Grosso, Brasil**. Acta Scientiarum Agronomy, v.33, n.2, p.193–200, 2011.
- DAVISON, A. C.; HINKLEY, D. V. **Bootstrap methods and their application**. Cambridge: Cambridge University Press, 582 p. 2008.
- DUTCOSKY, S. D. **Análise sensorial de alimentos**. Curitiba: Editora Champagnat, 1996. 123 p.
- EFRON, B. **Bootstrap methods: another look at the jackknife**. Annals of Statistics, v. 7, p. 1–26, 1979.
- EFRON, B.; TIBSHIRANI, R. J. **An introduction to the bootstrap**. Boca Raton: Champman & Hall, 1993. 436.p.
- FERREIRA, D. F. **Estatística Básica**. 2ª ed. rev. Lavras: Editora UFLA, 2009. 664 p.

- FERREIRA, D. F. **Estatística Computacional em Java**. 1ª ed. Lavras: Editora UFLA, 2013. 235 p.
- FRASER, D. A. S., REID, N. e WONG, A. **Simple and Accurate Inference for the Mean of the Gamma Model**. The Canadian Journal of Statistics / La Revue Canadienne de Statistique, Vol. 25, No. 1, p. 91-99, mar. 1997.
- GEBERT, D. M. P. **Uma solução via bootstrap paramétrico para o problema de Behrens-Fisher multivariado**. 2014.120 p. Tese (Doutorado em Estatística e Experimentação Agropecuária)-Universidade Federal de Lavras, Lavras, 2014.
- GENTLE, J. E. **Random generation and Monte Carlo methods**. 2nd ed. New York: Springer, 2003. 381 p (Statistics and Computing).
- GRICE, J. V.; BAIN, L. J. **Inferences concerning the mean of the Gamma Distribution**. J Am Stat Assoc, p. 929-933, 1980.
- MARTINS, J. A.; DALLACORT, R.; INOUE, M. H.; GALVANIN, E. A. S.; MAGNANI, E. B. Z.; OLIVEIRA, K. C. **Caracterização do regime pluviométrico no arco das nascentes do Rio Paraguai**. Revista Brasileira de Meteorologia, v.26, n.4, p.639-647, 2011.
- MOOD, A. M.; GRAYBILL, F. A.; BOES, D. C. **Introduction to the Theory of Statistics**. International Student Edition, Third Edition, 564 p. 1974.
- MOREIRA, P. S. P.; DALLACORT, R.; MAGALHÃES, R. A.; INOUE, M. H.; STIELER, M. C.; SILVA, D. J.; MARTINS, J. A. **Distribuição e probabilidade de ocorrência de chuvas no município de Nova Maringá-MT**. Revista de Ciências Agro-Ambientais, v.8, n.1, p.9-20, 2010.
- MURTA, R. M.; TEODORO, S. M.; BONOMO, P.; CHAVES, M. A. **Precipitação pluvial mensal em níveis de probabilidade pela distribuição gama para duas localidades do sudoeste da Bahia**. Ciência e Agrotecnologia, v.29, n.5, p.988-994, 2005;
- OLIVEIRA, H. M. P. **Comparação de testes para a igualdade de médias sob heterocedasticidade: simulação e aplicações**. 2016. 77p. Dissertação (Mestrado em Estatística Aplicada em Biometria). Universidade Federal de Alfenas, Alfenas, 2016.
- R CORE TEAM. **R: A Language and Environment for Statistical Computing**. Vienna, Austria: R Foundation for Statistical Computing. 2013.

SANTOS, E. N. F. **Comparações múltiplas multivariadas via bootstrap e permutação**. 2008. 50 p. Dissertação (Mestrado em Estatística e Experimentação Agropecuária). Universidade Federal de Lavras, Lavras, 2008.

SHIUE W.K.; BAIN L.J. **A two sample test of equal Gamma distribution scale parameters with unknown common shape parameter**. *Technometrics*. 25:377–381

THOM, H.C.S. **A note on the gama distribuiton**. *Monthly Weather Review*, v.8, p.117–122, 1958.

THOM, H. C. S. **Some methods of climatological analysis** . Roma: FAO, 1966. 50p.

ANEXO A

Tabela 5 - Probabilidade de cobertura dos três intervalos de confiança estudados (IC1 - *Bootstrap*; IC2, IC3- Assintóticos), utilizando $N = 1000$ simulações Monte Carlo para diferentes valores de n , considerando $n = 5, 20, 50, 100, 1000, 2000$, com níveis nominais fixados em 90% e 99% , usando os valores de ($\alpha = 7$ e $\beta = 2$).

coef		n					
		5	20	50	100	1000	2000
90%	PC IC1	78,40%	86,90%	87,90%	90,10%	88,10%	91,00%
	PC IC2	78,30%	87,70%	87,90%	90,20%	88,20%	91,30%
	PC IC3	78,30%	87,70%	87,90%	90,20%	88,20%	91,30%
99%	PC IC1	90,50%	98,00%	98,10%	99,00%	98,60%	98,80%
	PC IC2	90,90%	98,40%	98,30%	98,80%	98,90%	99,20%
	PC IC3	90,90%	98,40%	98,30%	98,80%	98,90%	99,20%

ANEXO B

Tabela 6 - Comprimentos médios dos três intervalos de confiança estudados (IC1 - *Bootstrap*; IC2, IC3- Assintóticos), utilizando $N = 1000$ simulações Monte Carlo para diferentes valores de n , considerando $n = 5, 20, 50, 100, 1000, 2000$, com níveis nominais fixados em 90% e 99% , usando os valores de ($\alpha = 7$ e $\beta = 2$).

coef		n					
		5	20	50	100	1000	2000
90%	CMIC1	1,6183	0,9361	0,6061	0,431	0,1369	0,0967
	CMIC2	1,6318	0,4323	0,6087	0,4323	0,1374	0,0972
	CMIC3	1,6318	0,4323	0,6087	0,4323	0,1374	0,0972
99%	CMIC1	2,5196	1,4538	0,9394	0,6678	0,2112	0,1499
	CMIC2	2,5554	1,4736	0,9532	0,6771	0,2152	0,1522
	CMIC3	2,5554	1,4736	0,9532	0,6771	0,2152	0,1522

ANEXO C

Tabela 7 - Probabilidade de cobertura dos três intervalos de confiança estudados (IC1 - *Bootstrap*; IC2, IC3- Assintóticos), utilizando $N = 1000$ simulações Monte Carlo para diferentes valores de n , considerando $n = 5, 20, 50, 100, 1000, 2000$, com níveis nominais fixados em 90% e 99% , usando os valores de ($\alpha = 1$ e $\beta = 1$).

coef		n					
		5	20	50	100	1000	2000
90%	PC IC1	77,40%	85,20%	88,10%	89,00%	90,80%	89,50%
	PC IC2	77,30%	85,90%	88,20%	88,40%	90,80%	89,00%
	PC IC3	77,30%	85,90%	88,20%	88,40%	90,80%	89,00%
99%	PC IC1	90,00%	97,30%	97,40%	98,60%	98,70%	98,80%
	PC IC2	86,90%	96,20%	97,20%	98,70%	98,80%	99,20%
	PC IC3	86,90%	96,20%	97,20%	98,70%	98,80%	99,20%

ANEXO D

Tabela 8 - Comprimentos médios dos três intervalos de confiança estudados (IC1 - *Bootstrap*; IC2, IC3- Assintóticos), utilizando $N = 1000$ simulações Monte Carlo para diferentes valores de n , considerando $n = 5, 20, 50, 100, 1000, 2000$, com níveis nominais fixados em 90% e 99% , usando os valores de ($\alpha = 1$ e $\beta = 1$).

coef		n					
		5	20	50	100	1000	2000
90%	CMIC1	1,249	0,694	0,4541	0,3246	0,1037	0,0734
	CMIC2	1,2817	0,7004	0,457	0,3255	0,104	0,0736
	CMIC3	1,2817	0,7004	0,457	0,3255	0,104	0,0736
99%	CMIC1	1,9783	1,0812	0,7065	0,5029	0,1609	0,1132
	CMIC2	2,0073	1,0968	0,7156	0,5096	0,1629	0,1153
	CMIC3	2,0073	1,0968	0,7156	0,5096	0,1629	0,1153

ANEXO E

Tabela 9 - Probabilidade de cobertura dos três intervalos de confiança estudados (IC1 - *Bootstrap*; IC2, IC3- Assintóticos), utilizando $N = 1000$ simulações Monte Carlo para diferentes valores de n , considerando $n = 5, 20, 50, 100, 1000, 2000$, com níveis nominais fixados em 90% e 99% , usando os valores de ($\alpha = 2$ e $\beta = 5$).

coef		n					
		5	20	50	100	1000	2000
90%	PC IC1	77,10%	88,10%	88,80%	90,50%	89,10%	92,80%
	PC IC2	77,20%	88,20%	88,00%	90,50%	89,30%	93,30%
	PC IC3	77,20%	88,20%	88,00%	90,50%	89,30%	93,30%
99%	PC IC1	91,20%	97,20%	97,50%	97,80%	98,70%	99,10%
	PC IC2	89,30%	97,30%	97,30%	98,30%	98,90%	98,90%
	PC IC3	89,30%	97,30%	97,30%	98,30%	98,90%	98,90%

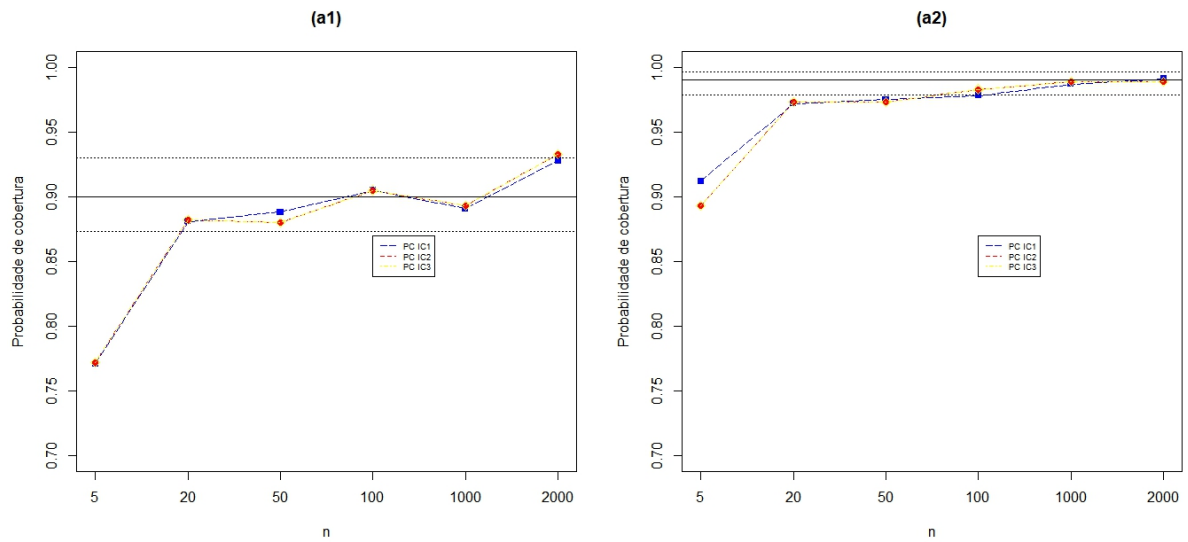
ANEXO F

Tabela 10 - Comprimentos médios dos três intervalos de confiança estudados (IC1 - *Bootstrap*; IC2, IC3- Assintóticos), utilizando $N = 1000$ simulações Monte Carlo para diferentes valores de n , considerando $n = 5, 20, 50, 100, 1000, 2000$, com níveis nominais fixados em 90% e 99% , usando os valores de ($\alpha = 2$ e $\beta = 5$).

coef		n					
		5	20	50	100	1000	2000
90%	CMIC1	0,3518	0,1975	0,1287	0,0928	0,0293	0,0207
	CMIC2	0,3547	0,1987	0,1291	0,0925	0,0294	0,0208
	CMIC3	0,3547	0,1987	0,1291	0,0925	0,0294	0,0208
99%	CMIC1	0,546	0,3072	0,1991	0,1433	0,0453	0,0321
	CMIC2	0,5558	0,3111	0,2021	0,145	0,046	0,0325
	CMIC3	0,5558	0,3111	0,2021	0,145	0,046	0,0325

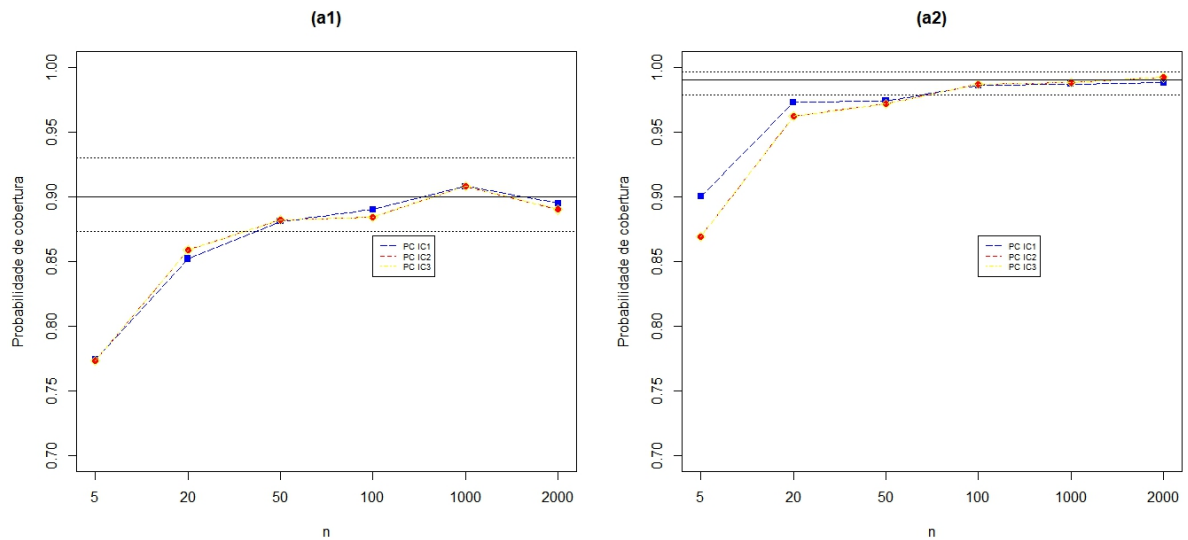
ANEXO G

Figura 2 - Probabilidades de cobertura e comprimentos médios dos três intervalos de confiança estudados (IC1 - *Bootstrap*; IC2, IC3- Assintóticos), utilizando $N = 1000$ simulações Monte Carlo para diferentes valores de n , considerando $n = 5, 20, 50, 100, 1000, 2000$, com níveis nominais fixados iguais a 90% (a1) e 99% (a2) utilizando os valores de ($\alpha = 2$ e $\beta = 5$), contemplando o intervalo de confiança binomial ao nível de confiança de 99% (linhas tracejadas).



ANEXO H

Figura 3 - Probabilidades de cobertura e comprimentos médios dos três intervalos de confiança estudados (IC1 - *Bootstrap*; IC2, IC3- Assintóticos), utilizando $N = 1000$ simulações Monte Carlo para diferentes valores de n , considerando $n = 5, 20, 50, 100, 1000, 2000$, com níveis nominais fixados iguais a 90% (a1) e 99% (a2) utilizando os valores de $(\alpha = 1$ e $\beta = 1)$, contemplando o intervalo de confiança binomial ao nível de confiança de 99% (linhas tracejadas).



ANEXO I

Figura 4 - Probabilidades de cobertura e comprimentos médios dos três intervalos de confiança estudados (IC1 - *Bootstrap*; IC2, IC3- Assintóticos), utilizando $N = 1000$ simulações Monte Carlo para diferentes valores de n , considerando $n = 5, 20, 50, 100, 1000, 2000$, com níveis nominais fixados iguais a 90% (a1) e 99% (a2) utilizando os valores de ($\alpha = 7$ e $\beta = 2$), contemplando o intervalo de confiança binomial ao nível de confiança de 99% (linhas tracejadas).

