



GUSTAVO VENANCIO PIMENTA

**O DESENVOLVIMENTO DO CAMPO CONCEITUAL DA
TRIGONOMETRIA EM SITUAÇÕES DESENCADEADORAS
DE APRENDIZAGEM MEDIADAS POR TECNOLOGIAS
DIGITAIS**

LAVRAS – MG

2019

GUSTAVO VENANCIO PIMENTA

**O DESENVOLVIMENTO DO CAMPO CONCEITUAL DA TRIGONOMETRIA EM
SITUAÇÕES DESENCADEADORAS DE APRENDIZAGEM MEDIADAS POR
TECNOLOGIAS DIGITAIS**

Dissertação apresentada à Universidade Federal de Lavras, como parte das exigências do Programa de Pós-Graduação em Educação, área de concentração em Formação de Professores, para obtenção do título de Mestre.

Dr. José Antônio Araújo Andrade

Orientador

LAVRAS – MG

2019

**Ficha catalográfica elaborada pelo Sistema de Geração de Ficha Catalográfica da Biblioteca
Universitária da UFLA, com dados informados pelo(a) próprio(a) autor(a).**

Pimenta, Gustavo Venancio.

O desenvolvimento do campo conceitual da Trigonometria em situações desencadeadoras de aprendizagem mediadas por tecnologias digitais / Gustavo Venancio Pimenta. - 2019.

93 p.

Orientador(a): José Antônio Araújo Andrade.

Dissertação (mestrado profissional) - Universidade Federal de Lavras, 2019.

Bibliografia.

1. Teoria da Atividade. 2. Educação Matemática. 3. Lógico-histórico. I. Andrade, José Antônio Araújo. II. Título.

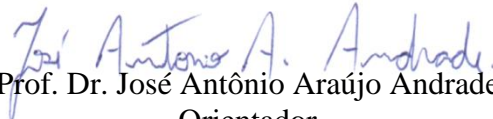
GUSTAVO VENANCIO PIMENTA

**O DESENVOLVIMENTO DO CAMPO CONCEITUAL DA TRIGONOMETRIA EM
SITUAÇÕES DESENCADEADORAS DE APRENDIZAGEM MEDIADAS POR
TECNOLOGIAS DIGITAIS**

**THE DEVELOPMENT OF THE CONCEPTUAL FIELD OF TRIGONOMETRY IN
LEARNING PROMOTED BY SITUATIONS MEDIATED BY DIGITAL
TECHNOLOGIES**

Dissertação apresentada à Universidade Federal de Lavras, como parte das exigências do Programa de Pós-Graduação em Educação, área de concentração em Formação de Professores, para obtenção do título de Mestre.

APROVADO em 24 /04 /2019.
Prof. Dr. Célio Roberto Melillo CEFET-MG.
Prof. Dr. Ronei Ximenes Martins UFLA.
Prof. Dr. José Antônio Araújo Andrade UFLA.


Prof. Dr. José Antônio Araújo Andrade
Orientador

**LAVRAS – MG
2019**

À minha mãe Fátima, por me dar o maior presente de todos: o ensinamento de que é necessário manter sempre fixos os olhos em Deus, independente das lutas e desafios.

Dedico.

AGRADECIMENTOS

À Universidade Federal de Lavras (UFLA) e ao Departamento de Educação, pela oportunidade concedida para a realização do mestrado.

À minha noiva, e eterna namorada, Ana Carolina Almeida Costa, com quem pude compartilhar todos os bons e difíceis momentos desta trajetória acadêmica. Obrigado por estar sempre presente, tenho orgulho em chamá-la de minha melhor amiga. Serei eternamente grato a Deus por me permitir viver, ainda nesta Terra, as verdades ditas em 1Co13.

Aos professores do Departamento de Educação da UFLA, pelos ensinamentos transmitidos e pela harmoniosa convivência.

Ao professor Dr. José Antônio Araújo Andrade, pela orientação e pelos ensinamentos que foram de grande relevância para o meu crescimento profissional.

Ao casal Célio Roberto Melillo e Kelly Maria de Campos Fornero Abreu de Lima Melillo, pela inspiração em minha escolha pela área.

Ao casal Aldo Sander Almeida Costa e Déborah Ribeiro Almeida Costa. Sinto-me acarinhado quando penso em vocês, e um versículo descreve esse meu sentimento: Efésios 3.20.

Aos professores do curso de Licenciatura em Matemática do Instituto Federal de Minas Gerais (IFMG, *Campus* Formiga), pela excelente formação disponibilizada.

À Sandra Paula Salve Silveira, pela expressiva contribuição na Seção 3 deste trabalho.
A todos vocês,

MUITO OBRIGADO!

"Se o ensino da Matemática, nos cursos básicos, fosse feito, como realmente deveria ser, com vivo interesse, clareza e simplicidade, essa fabulosa ciência exerceria sobre todos os homens estranha e desmedida fascinação"

TAHAN (1983, p. 11).

RESUMO

Nesta pesquisa, são investigadas as elaborações conceituais produzidas por estudantes de uma turma do nono ano de um colégio na cidade de Lavras – MG. Com esse intuito, introduziu-se o campo de conceitos da Trigonometria por meio de Situações Desencadeadoras de Aprendizagem (SDA) mediadas por tecnologias digitais em uma perspectiva lógico-histórica. Nesse viés, o objetivo geral foi analisar o desenvolvimento do pensamento teórico do campo de conceitos da Trigonometria a partir dos processos de significação produzidos. Para desenvolver a atividade, investigou-se os eventuais nexos conceituais da Trigonometria, tendo em vista que o conteúdo trata-se de um campo de conceitos que, em determinado momento da história, foram desenvolvidos por necessidades lógicas e sociais. Por conseguinte, a partir dos registros midiáticos audiovisuais e diário de campo, identificou-se, em um episódio, quatro núcleos de significação produzidos ao longo das cenas. As SDA criaram, portanto, uma evidente Zona de Desenvolvimento Iminente e os participantes tiveram uma evolução do pensamento empírico ao teórico, sempre abarcando os conceitos com a questão histórica dos mesmos.

Palavras-chave: Teoria da Atividade. Educação Matemática. Lógico-histórico. Tecnologia Digital. Trigonometria.

ABSTRACT

In this research, it was propose to investigate the conceptual elaborations produced by students of a ninth grade class of a college in the city of Lavras – MG (Brazil). With this in mind, the field of Trigonometry concepts was introduce through Learning Situations (SDA) mediated by digital technologies in a logical-historical perspective. In this bias, the general objective was to analyze the development of theoretical thinking in the field of Trigonometry concepts from the processes of signification produced. In short, to develop the activity, it was investigated the possible conceptual links of Trigonometry, considering that the content is a field of concepts that, at a given moment in history, were developed by logical and social needs. Therefore, from the audiovisual media records and field diary, one episode was identified, four cores of signification produced throughout the scenes. Thus, since the SDA created an evident Zone of Imminent Development and the participants had an evolution from empirical thought to theoretical thought, always encompassing the concepts with the historical question that constituted them.

Keywords: Activity theory. Mathematics Education. Logical and historical. Digital Technology. Trigonometry.

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

Figura 1 – Representação esquemática de um gnômon.....	34
Figura 2 – Papiro Rhind no British Museum, visão geral.	37
Figura 3 – Papiro Rhind no British Museum, ampliado.....	37
Figura 4 – Linhas, rótulos e figuras simuladas no céu de Lavras.....	46
Figura 5 – Posição do Sol.	47
Figura 6 – Posição do Sol: equinócios e solstícios. (Continua)	47
Figura 6 – Posição do Sol: equinócios e solstícios. (Conclusão)	48
Figura 7 – Simulação dos raios solares.	48
Figura 8 – Comparação da área de incidência solar.	49
Figura 9 – Simulação de um gnômon.	49
Figura 10 – Deslocamento do Sol em Lavras (MG).....	49
Figura 11 – Lavras, linhas e rótulos das constelações no <i>Stellarium</i>	65
Figura 12 – Lavras: linhas, rótulos e figuras das constelações no <i>Stellarium</i>	66
Figura 13 – Posição do Sol no dia 23 dos 5 primeiros meses do ano de 2018 na cidade de Lavras pelo <i>Stellarium</i>	66
Figura 14 – Posição do Sol - equinócios e solstícios.....	69
Figura 15 – Simulação dos raios solares.	70
Figura 16 – Comparação da área de incidência solar.	70
Figura 17 – Relógio de Sol reproduzido em “GIF” durante uma das SDA.....	71
Figura 18 – Deslocamento do Sol em Lavras (MG).....	71
Figura 19 – Lua da sala de aula.	74
Figura 20 – Medindo a Lua da Sala (01).....	75
Figura 21 – Medindo a Lua da sala (02).....	75
Figura 22 – Desenho do PP no quadro branco (1).....	77
Figura 23 – Desenho do PP no quadro branco (2).....	78

LISTA DE QUADROS

Quadro 1 – Transcrição do áudio com a fala do PP que deu início à Cena 1.....	57
Quadro 2 – Transcrição de trecho do diálogo entre estudantes.....	58
Quadro 3 – Transcrição do áudio com a fala de um dos estudantes.....	59
Quadro 4 – Transcrição do áudio com a fala do PP.....	59
Quadro 5 – Transcrição do áudio com o diálogo a respeito da padronização da medida.....	60
Quadro 6 – Transcrição do áudio com o diálogo interno de um grupo.....	61
Quadro 7 – Transcrição do áudio com o diálogo interno de determinado grupo.....	61
Quadro 8 – Transcrição do áudio com o diálogo sobre medir o Tempo.....	62
Quadro 9 – Transcrição do áudio com o diálogo sobre a importância de se medir o Tempo.....	62
Quadro 10 – Transcrição do áudio com outro diálogo sobre a importância de se medir o Tempo.....	62
Quadro 11 – Transcrição do áudio com o diálogo sobre as estações.....	63
Quadro 12 – Transcrição do áudio com o diálogo sobre as constelações.....	63
Quadro 13 – Transcrição do áudio com o diálogo sobre História e Matemática.....	64
Quadro 14 – Transcrição do áudio com o diálogo sobre o relógio de Sol.....	64
Quadro 15 – Transcrição do áudio de um participante sobre as constelações.....	66
Quadro 16 – Transcrição do áudio com o diálogo sobre a grandeza Tempo.....	67
Quadro 17 – Transcrição do áudio com o diálogo sobre o movimento do Sol.....	68
Quadro 18 – Transcrição do áudio com o diálogo sobre o movimento do Sol.....	73
Quadro 19 – Transcrição do áudio de um comentário do estudante após realização das SDA.....	74
Quadro 20 – Transcrição do áudio com o diálogo a respeito da distância da Terra à Lua....	76
Quadro 21 – Transcrição do áudio com o diálogo a respeito da Cena 1.....	76
Quadro 22 – Transcrição do áudio com o diálogo a respeito da provável Regra de Três.....	77
Quadro 23 – Transcrição do áudio com o diálogo sobre os cálculos finais.....	78
Quadro 24 – Transcrição do áudio com o diálogo sobre os resultados calculados.....	79
Quadro 25 – Transcrição do áudio com o diálogo na Cena 3 que retoma à Cena 2.....	80
Quadro 26 – Transcrição do áudio com o diálogo sobre Proporções.....	80
Quadro 27 – Transcrição do áudio com o diálogo que ocorreu após a realização das SDA.	82

LISTA DE TABELAS

Tabela 1 – Tábua egípcia.....	35
Tabela 2 – SDA. (Continua).....	43
Tabela 2 – SDA. (Conclusão).....	45
Tabela 3 – Escolha do instrumento pelos grupos	58

LISTA DE ABREVIATURAS E SÍMBOLOS

a.C.	antes de Cristo
cos	cosseno
<i>et. al</i>	e outros
<i>etc.</i>	<i>et cetera</i> (entre outros)
°	grau(s)
∞	infinito
p.	página
π	pi
<i>sen</i>	seno
tg	tangente
v.	versículo

LISTA DE SIGLAS

BNCC	BASE NACIONAL COMUM CURRICULAR
GIF	<i>GRAPHICS INTERCHANGE FORMAT</i> (FORMATO PARA INTERCÂMBIO DE GRÁFICOS)
IFMG	INSTITUTO FEDERAL DE MINAS GERAIS
INEP	INSTITUTO NACIONAL DE ESTUDOS E PESQUISAS EDUCACIONAIS ANÍSIO TEIXEIRA
OCEM	ORIENTAÇÕES CURRICULARES PARA O ENSINO MÉDIO
PCN	PARÂMETROS CURRICULARES NACIONAIS
PCN+	PARÂMETROS CURRICULARES NACIONAIS DE MATEMÁTICA
PIBID	PROGRAMA INSTITUCIONAL DE BOLSA DE INICIAÇÃO À DOCÊNCIA
PP	PROFESSOR/PESQUISADOR
SDA	SITUAÇÕES DESENCADEADORAS DE APRENDIZAGEM
TDIC	TECNOLOGIAS DIGITAIS DE INFORMAÇÃO E COMUNICAÇÃO
UFLA	UNIVERSIDADE FEDERAL DE LAVRAS
UFMG	UNIVERSIDADE FEDERAL DE MINAS GERAIS

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO.....	15
2 CONSTRUTOS TEÓRICOS DA TEORIA HISTÓRICO-CULTURAL.....	18
2.1 Elementos de mediação	30
2.1.1 Educação Mediada por Tecnologias.....	30
3 O DESENVOLVIMENTO LÓGICO-HISTÓRICO DA TRIGONOMETRIA.....	34
4 METODOLOGIA.....	43
4.1 Contexto, participantes e objeto de pesquisa	43
4.1.1 Situação 1: Analisar os conceitos Medida e Número.....	45
4.1.2 Situação 2: Explorar os conceitos Tempo, Movimento, Comparação, Orientação e Regularidade.....	46
4.1.3 Situação 3: Explorar o conceito Ângulo.....	47
4.1.4 Situação 4: Explorar o conceito Distância a partir do conceito Ângulo.....	50
4.2 Instrumentos.....	50
4.3 Núcleos de significação	51
4.3.1 Escolha do método de análise dos dados.....	54
5 ANÁLISE DAS ELABORAÇÕES CONCEITUAIS A RESPEITO DA TRIGONOMETRIA, POR ESTUDANTES DO NONO ANO, EM SITUAÇÕES DESENCADEADORAS DE APRENDIZAGEM.....	56
5.1 Luz, câmera, ação!.....	56
5.1.1 Cena 1: Análise dos conceitos Medida e Número.....	57
5.1.2 Cena 2: Medir, sem medir	76
5.1.3 Cena 3: Eureka!	80
6 CONSIDERAÇÕES FINAIS	84
REFERÊNCIAS	86

1 INTRODUÇÃO

Ao se referir à disciplina Matemática como um conhecimento social e historicamente construído, as Orientações Curriculares para o Ensino Médio (OCEM) ressaltam que os problemas de cálculos de distâncias inacessíveis são interessantes aplicações da Trigonometria. Por conseguinte, enfatizam que esse conteúdo programático “merece ser priorizado na escola” (BRASIL, 2006, p. 74).

Somando-se a isso, as OCEM avultam que os estudantes, ao final do ensino médio, devem saber apreciar a importância dessas aplicações da Matemática no desenvolvimento científico e tecnológico do país (p. 70). Essa mesma preocupação é evidenciada em outros documentos oficiais como os PCN – Parâmetros Curriculares Nacionais – quando especificam que a disciplina “reflete as leis sociais e serve de poderoso instrumento para o conhecimento do mundo e da natureza” (BRASIL, 1997, p. 23); bem como a BNCC – Base Nacional Comum Curricular – ao destacar que as medidas “quantificam grandezas do mundo físico e são fundamentais para a compreensão da realidade” (BRASIL, 2017, p. 271). Por essas razões, ao professor que ensina Matemática fica a incumbência de conceber o conhecimento matemático como uma construção humana, a qual exerce um papel fundamental no desenvolvimento psíquico e social das pessoas.

Entretanto, mesmo com esses apontamentos apresentados nos documentos curriculares, quando o autor deste trabalho cursou o nono ano do ensino fundamental, seu professor de Matemática preferiu que os conteúdos trigonométricos fossem estudados ao final do quarto e último bimestre, uma vez que, segundo aquele profissional, a classe estaria mais “preparada para entender tal conteúdo”. Porém, o quarto bimestre se passou e o tema foi negligenciado, o que fez com que o primeiro contato do autor deste trabalho com a Trigonometria se desse no segundo ano de seu ensino médio de forma rápida e “revisional”. Ou seja, o conteúdo foi visto sem grandes significados, uma vez que não foi tarefa fácil “rever” o que ainda não havia sido aprendido.

O autor deste trabalho percebeu, assim, que a Trigonometria às vezes é tratada por meio de uma perspectiva rasa e rápida, por pouco praticamente associada, por ele, ao “modelo bancário”, postulado por Freire (1987).

Nesse modelo bancário, o Ensino de Matemática, bem como o ensino de outras ciências, consiste em “transferir” explicações conteudistas de modo a sonegar aos discentes uma vivência de um processo conceitual. Ou seja, o professor informa sobre os conteúdos no momento em que resolve os exercícios de fixação no quadro, os estudantes fazem suas anotações com rara

ou nenhuma participação em sala de aula e memorizam procedimentos e enunciados para a realização de provas bimestrais. Estas, não raramente, como afirmam Vieira Junior e Colvara (2006), avaliam somente a capacidade de memorizar e repetir os conceitos já vistos em exercícios de fixação.

Contrapondo-se a isso, pretende-se criar neste trabalho algumas Situações Desencadeadoras de Aprendizagem (SDA) que se distanciem do tradicionalismo e que possibilitem o desenvolvimento do pensamento teórico. Com esse intuito, chegou-se na seguinte **questão orientadora da pesquisa**: quais elaborações conceituais são produzidas por estudantes do nono ano ao se introduzir o campo de conceitos da Trigonometria por meio de SDA mediadas por tecnologias digitais em uma perspectiva lógico-histórica?

Em concordância com Cunha (2008, p. 2), e apoiando-se em Moura (2001), entende-se por “elaborações conceituais” as manifestações do pensamento (seja na forma oral ou escrita) sobre os conceitos colocados em movimento durante a realização das SDA.

Com essas considerações, a turma do nono ano¹ de um colégio de Lavras (MG) foi convidada a participar desta pesquisa, em que o uso da tecnologia digital foi indispensável. Isso porque foi esse uso que tornou possível, em poucos minutos, uma visualização que poderia estender este trabalho por meses, senão anos, de observação contínua em relação ao movimento do Sol, como será visto ao longo do texto.

Além disso, considerando a relevância da discussão da Trigonometria na sala de aula, buscou-se compreender, neste trabalho, o que são os nexos conceituais da Trigonometria. Isto é, se a Trigonometria é um campo de conceitos, então como e por que esses conceitos foram criados?

A fim de buscar esse esclarecimento, traçou-se como **objetivo geral** desta pesquisa analisar o desenvolvimento do pensamento teórico do campo de conceitos da Trigonometria a partir dos processos de significação produzidos por estudantes do nono ano em SDA mediadas por tecnologias digitais. Além disso, para que se obtivesse uma análise de como as elaborações conceituais são produzidas em uma perspectiva lógico-histórica, foram traçados os seguintes **objetivos específicos**:

- Identificar os nexos conceituais da Trigonometria, bem como os elementos pedagógicos tensionadores no processo de desenvolvimento lógico-histórico, para orientar a SDA do professor;

¹ O autor deste trabalho é professor de Matemática nesta turma.

- Analisar o processo de significação estabelecido nas SDA de Trigonometria que constituem a Unidade Didática;
- Analisar como os elementos de mediação produzidos pela cultura humana desencadeiam o processo de significação e contribuem para o desenvolvimento do pensamento dos estudantes.

Tendo em vista todas essas considerações, esta dissertação foi organizada como descrito a seguir.

A **seção 1** ficou reservada para esta introdução.

Na **seção 2**, serão discutidos os construtos teóricos da teoria histórico-cultural, visto que a Teoria do Conhecimento estará evidenciada de modo a alicerçar esta produção científica. Essas discussões terão influências do materialismo histórico dialético, proposto por Marx (1989); do movimento dialético do pensamento, pautando-se em Davydov (1988); do conhecimento humano em busca da verdade, baseado em Kopnin (1978); dos sentidos e significados, propostos por Vigotski (2009); do método de ascensão do abstrato ao concreto, em Kosik (1976); e, por fim, dos elementos de mediação presentes nesses processos, discutidos em Vigotski (2009).

Na **seção 3**, serão assinalados alguns fatores fundamentais no desenvolvimento lógico-histórico da Trigonometria. Isso porque há necessidade de se compreender essa história para, então, desenvolver as SDA, de modo a torná-las ainda mais relevantes ao mostrar como a Trigonometria fez e faz parte da sociedade atual. Além disso, será discutido nesta terceira seção a importância da mediação pedagógica, com ou sem o uso de tecnologias digitais.

A **seção 4** ficará reservada para a metodologia utilizada. Nela, serão discutidos detalhadamente o contexto, os participantes, e o objeto de pesquisa, bem como os instrumentos e o que são os núcleos de significação.

Por fim, na **seção 5** haverá uma análise dos dados com uma identificação detalhada dos núcleos de significação identificados no decorrer do episódio (o qual foi dividido em três cenas).

2 CONSTRUTOS TEÓRICOS DA TEORIA HISTÓRICO-CULTURAL

Nesta seção, a Teoria Histórico-Cultural será evidenciada de modo a alicerçar esta produção científica. Para isso, é importante ressaltar, inicialmente, alguns conceitos trazidos por Marx (1818 -1883) ao longo de sua trajetória literária, de modo a traçar os caminhos desta pesquisa. Isso porque, segundo Pires (1996), a dialética que aparece no pensamento de Marx surgiu como uma tentativa de superação da dicotomia, da separação entre o sujeito e o objeto, o que será de extrema importância para a construção deste trabalho.

Ainda segundo Pires (1996), Marx buscava um caminho epistemológico que fundamentasse o conhecimento para a interpretação da realidade histórica e social que o desafiava. Assim, de acordo com a autora, o filósofo incorporou as posições de Hegel e, mais que isso, foi além, conferindo à dialética (que era até então tratada no plano do espírito e das ideias) um caráter materialista e histórico, adequando-a ao mundo dos homens.

Com isso, Pires (1996) enfatiza que o método materialista histórico-dialético é caracterizado por Marx pelo movimento do pensamento através da materialidade histórica da vida dos homens em sociedade. Isso se deriva da investigação – que se dá pelo movimento do pensamento – das leis fundamentais que definem a forma organizativa dos homens durante toda a história da humanidade.

Nesse cenário, Marx (1989) cria o conceito histórico de trabalho, o qual está relacionado a uma práxis. Isto é, a um conjunto de duas atividades que se complementam e se completam, tornando-se uma unidade entre a atividade prática (agir) e a atividade do pensamento (pensar), ambas fundamentais para o desenvolvimento do homem.

Somando-se a essas ideias, Kopnin (1978) aborda sobre como a lógica estuda o movimento do conhecimento humano em busca da verdade, da solução dos problemas por meio da demonstração. Por esse motivo, ele resalta que, na medida que o conhecimento aumenta, o campo do lógico se enriquece, incorporando novos elementos, transformando-se e reorganizando-se interiormente.

Com base nessas leituras, pode-se concluir que o objetivo do professor torna-se possibilitar ao estudante o desenvolvimento do pensamento teórico, pois, assim, o estudante passa a ter a possibilidade de entender a totalidade do objeto, desde sua aparência até sua essência, propriamente dita. Dessa forma, torna-se concreto aquele conhecimento.

Uma vez compreendido que está muito além dos limites deste trabalho uma descrição detalhada da teoria de Vigotski (2009), bem como dos conceitos de Davydov (1988) e Leontiev

(2001), ressalta-se apenas os pontos importantes para a construção das SDA e para a discussão do pensamento empírico e teórico.

Para Davydov (1988), os processos do pensamento que ocorrem baseados nas abstrações e nas generalizações formam os conceitos empíricos (que podem ser tanto cotidianos quanto científicos). Já o pensamento teórico constitui sistemas articulados de conhecimento, os quais levam à consciência e ao pensamento reflexivo. Há para o autor, portanto, uma ascensão do pensamento empírico para o teórico, visto que este está ligado à compreensão da natureza mesma de cada conceito e das inter-relações conceituais. Nesse sentido, pela leitura entende-se que Davydov faz uma crítica às escolas que não promovem essa ascensão do pensamento, ao descrever que esse tipo de escola

[...] tem um caráter classificador, catalisador e assegura a orientação da pessoa no sistema de conhecimentos já acumulados sobre as particularidades e traços externos de objetos e fenômenos isolados da natureza e da sociedade. Tal orientação é indispensável para fazeres cotidianos, durante o cumprimento de ações laborais rotineiras, porém é absolutamente insuficiente para assimilar o espírito autêntico da ciência contemporânea e os princípios de uma relação criativa, ativa e de profundo conteúdo face à realidade. (DAVÍDOV, 1987, p. 144).

Por isso, para Davydov (1988), é essencial que o estudante entenda o conceito, visto que a apropriação do pensamento teórico está justamente no entender da realidade em forma de conceito. Isto é,

o conteúdo do pensamento teórico é a existência mediatizada, refletida, essencial. O pensamento teórico é o processo de idealização de um dos aspectos da atividade objetivo-prática, a reprodução, nela, das formas universais das coisas. Tal reprodução tem lugar na atividade laboral das pessoas como peculiar experimento objetivo-sensorial. Logo, este experimento adquire, cada vez mais, um caráter cognoscitivo, permitindo às pessoas passarem, com o tempo, a realizar os experimentos mentalmente (DAVYDOV, 1988, p. 125).

Para que haja essa ascensão do pensamento, primeiro é necessário que esse processo faça sentido para o estudante. Por essa razão, pautando-se em Vigotski (2009), cabe ressaltar que o sentido trata de uma formação dinâmica e variável, a qual, segundo o autor, possui inúmeras zonas de estabilidade. Desse modo, para ele, o sentido se dá a partir do estabelecimento de distinções e relações entre a linguagem interna e a externa. Nessa definição, o autor leva em conta que a significação da palavra em seu contexto de uso e nas condições de interação dos sujeitos, afinal, defende que o sentido das palavras depende conjuntamente da interpretação do mundo de cada qual e da estrutura interna da personalidade (VIGOTSKI, 2009).

Já o significado, ainda segundo Vigotski (2009), é a essência da palavra, isto é, a unidade de análise estabelecida entre pensamento e fala, que ocorre por meio da generalização. Por sua vez, essa generalização reflete a realidade de uma forma distinta da sensorial e perceptual. O significado é, assim, uma das zonas do sentido e, segundo Vigotski (2009), a mais precisa, estável e coerente. Sendo assim, para o autor, o significado da palavra, acrescido de seu sentido, é imprescindível para a dinâmica da significação da palavra.

A significação possui aspectos culturais, motivacionais e da personalidade dos sujeitos, o que reflete na interação verbal, e pode interferir no modo de aprendizagem de cada estudante, no contexto escolar.

Para que tudo isso ocorra na sala de aula, é necessário que o professor assuma o papel de facilitador do processo de ensino e aprendizagem, orientando e direcionando os estudantes quanto à aquisição dos novos conhecimentos, bem como estimulando suas diversas habilidades cognitivas. Para isso, é necessário que o docente organize as técnicas e os procedimentos adequados para o desenvolvimento daquele conteúdo estudado pela unidade.

Portanto, para que se objetivasse, neste trabalho, o possibilitar ao estudante o desenvolvimento de seu pensamento teórico, foi preciso iniciar um processo de investigação no qual fosse revelada a gênese da Trigonometria e em qual contexto se deu o seu surgimento. Ou seja, qual foi a necessidade humana que direcionou para que esse campo de conceitos fosse constituído.

A partir da identificação dessa gênese, torna-se essencial se compreender a lógica desse desenvolvimento, bem como todas as conexões internas referentes ao objeto.

Para isso, de acordo com Davydov (1988), o professor deve trilhar com os estudantes um caminho semelhante ao percorrido pelo pensamento científico, de modo a possibilitar que vivenciem o movimento dialético do pensamento. Assim, segundo o autor, os estudantes tornam-se, “de certo modo, co-participantes da busca científica” (p. 174).

Isto pode ocorrer em sala de aula por meio de situações-problema correlatas aos desafios enfrentados pela sociedade nos momentos históricos, em que se consegue identificar as situações histórico-culturais que contribuíram para o desenvolvimento do conceito, ou seja, o professor buscaria compreender os elementos tensionadores que impulsionaram a construção social do conceito para a elaboração e desenvolvimento do que chamamos de Situações Desencadeadoras de Aprendizagem (SDA).

Nesse sentido, segundo Lanner de Moura (2003), pode-se abarcar uma discussão aprofundada no movimento da criação do conceito na história humana, buscando “encontrar elementos pedagógicos tensionadores, da (re)criação conceitual em quem ensina e em quem

aprende; ao entender que o elemento tensionador é determinante para estabelecer uma relação subjetiva do sujeito, com o conceito” (LANNER DE MOURA, 2003, p. 6).

Com base nessas ideias, conclui-se que um dos desafios da escola é, em síntese, o de desenvolver o pensamento teórico com os estudantes. Isso porque, se os estudantes entendem, por meio dos conceitos que lhe são ensinados, a totalidade do objeto, então estão construindo suas ideias a partir da compreensão de que o conhecimento é, exclusivamente, uma construção humana. Esta, por sua vez, se dá na inter-relação entre o lógico e o histórico.

De acordo com Kopnin (1978), o elemento lógico está voltado para a evolução do pensamento no sentido da verdade. Isto é, o lógico caracteriza-se pelo movimento do pensamento e passa a ser o reflexo do histórico. Assim, ambos constituem-se em uma unidade dialética denominada de lógico-histórico, em que o histórico reflete o processo de mudança do objeto, ou seja, as etapas de seu surgimento e desenvolvimento.

Mais que isso,

o lógico reflete não só a história do próprio objeto como também a história do seu conhecimento. Daí a unidade entre o lógico e o histórico ser premissa necessária para a compreensão do processo de movimento do pensamento, na criação da teoria científica. [...] A unidade entre o lógico e o histórico é premissa metodológica indispensável na solução dos problemas da inter-relação do conhecimento e da estrutura do objeto e conhecimento da história de seu desenvolvimento (KOPNIN, 1978, p. 186).

Assim, antes de dar início à investigação nesse processo de apropriação do conceito, é necessário que o professor conheça aspectos essenciais do objeto em sua forma geral. Isso porque, segundo Kopnin (1978), para revelar a essência do objeto é necessário reproduzir o processo histórico de seu desenvolvimento, o qual só é possível caso se conheça o desenvolvimento lógico-histórico do objeto. Dessa forma, o autor afirma que o estudante acaba estabelecendo metas para se ter a compreensão do objeto em sua totalidade nesse processo de apropriação, o qual se dá pela unidade dialética. Para que isso ocorra,

o estudioso deve começar do objeto pelo fim, a partir da sua forma mais madura, do estágio de desenvolvimento em que aspectos essenciais estão suficientemente desenvolvidos e não estão disfarçados por casualidades que não tem relação direta com ela. A base do estudo da fase superior, madura de desenvolvimento do objeto fazem-se as definições primárias de sua essência. Essas definições têm caráter abstrato, são insuficientemente profundas, mas indispensáveis como linha no estudo do processo histórico de desenvolvimento do objeto (KOPNIN, 1978, p. 185).

Nessa perspectiva, para se entender a lógica, torna-se necessário, nesse processo de investigação do objeto, saber o que o originou, como ele se desenvolveu, e quais necessidades históricas impulsionaram esse surgimento. Por isso, o conhecimento a ser ensinado vai muito

além de uma simples “transmissão” de conceitos do professor ao estudante, pois depende de uma apreensão conceitual do conteúdo que pode ser obtida por meio da compreensão do desenvolvimento lógico-histórico do conceito. Assim, é importante que seja revelada a lógica, a partir da gênese, e, mais que isso, que seja investigado todo o seu desenvolvimento. As Situações Desencadeadoras de Aprendizagem (SDA) serão aqui utilizadas justamente com esse intuito.

A partir dessas observações, as SDA deverão conter em seu planejamento o lógico e o histórico como uma unidade dialética. Assim, é possível estabelecer estratégias metodológicas que levarão os estudantes a caminhar para o desenvolvimento do pensamento teórico, possibilitando a visualização da essência do objeto em questão. Tudo isso, em concordância com Kopnin (1978), quando afirma que a lógica dos conceitos que expressam o objeto constitui o ponto de partida no estudo do processo de formação e desenvolvimento de dado objeto.

Feito isso, as SDA elaboradas devem propiciar a lógica daquelas ideias estabelecidas historicamente, seguindo o movimento das ideias. Esse "movimento não será mais que o reflexo do processo histórico em forma abstrata e teoricamente coerente" (MARX E ENGELS, 1980, *apud* KOPNIN, 1978, p. 184).

Para isso, faz-se necessária a inter-relação entre o conceito ou o campo de conceitos que se estuda (Trigonometria) com outros relacionados a ele, mesmo que seus surgimentos não tenham se dado simultaneamente. Será justamente essa relação e interconexão conceitual que fará com que novos conceitos surjam. Para esse conjunto de conceitos, cuja síntese é o próprio conceito ou o campo conceitual em estudo, dá-se o nome “nexos conceituais”.

Sousa (2004) acrescenta ainda que esses nexos conceituais fundamentam os conceitos e contêm a lógica, a história, as abstrações, e as formalizações do pensar humano no processo de constituir-se humano pelo conhecimento. A autora define, assim, "nexo conceitual como o elo (...) entre as formas de pensar o conceito" (p. 61). Essa apropriação de conceitos possibilita que o estudante desenvolva seu pensamento teórico, dando-lhe maior autonomia em sua forma de agir e de pensar em seu cotidiano.

Desse modo, o estudante poderá tecer análises mais coerentes e completas, visto que poderá pensar no todo de maneira profunda e concreta. Nessa situação, a escola estará atendendo as sugestões trazidas nos documentos curriculares oficiais, citados anteriormente, e os estudantes estarão mais preparados para pensar de maneira teórica.

Kopnin (1978), ao entender que o pensamento humano sempre carece de novos conceitos que lhe ampliem as possibilidades, questiona-se a respeito da possibilidade da criação de categorias que dirijam o movimento do pensamento em consonância com o conteúdo. Nessa

perspectiva, o autor pondera o risco dessa criação restringir a filosofia, à liberdade do pensamento. Assim, o papel dessas categorias da dialética materialista no conhecimento científico moderno deve ser o de permitir uma maior escolha na solução, e não o de dirigir o pensamento de maneira rígida, mas com certa liberdade. Isso porque, para ele, as categorias são instrumentos da especulação criadora livre, que orientam a solução dos problemas pela via do método científico.

Discussões nesse viés acabam sempre direcionando a um processo histórico, e isso fica evidente quando Kopnin (1978) ressalta que o desenvolvimento da lógica só é possível por meio de sua aproximação, cada vez maior, às necessidades da ciência. Entretanto, aproximar a lógica dialética como método do conhecimento teórico-científico moderno como teoria do conhecimento é impossível sem um estudo atento do processo de evolução do conhecimento humano, da análise e do conhecimento científico. Deste modo, o autor acrescenta que qualquer corrente de estudo da lógica moderna pode merecer atenção somente se não visar apenas a fins próprios, mas satisfizer a certas necessidades no desenvolvimento do conhecimento científico.

Somando-se a isso, a história da filosofia mostra, notoriamente, que o método filosófico de cada época acaba surgindo como resultado do entendimento do quadro científico do mundo, criado para atender às necessidades das ações teóricas e práticas do próprio homem.

Pensando assim, Kopnin (1978) sugere a dialética materialista (proposta por Marx) enquanto método filosófico. Para o autor, diferentemente dos sistemas filosóficos antecedentes, esse método não constrói um quadro universal do mundo, mas são as próprias ciências e a inter-relação entre elas que acabam o fazendo. No entanto, a experiência conjunta do conhecimento se constitui na base em que essa dialética cria suas categorias. Ainda segundo o autor, nesse sistema de categorias apreendem-se não só os resultados do conhecimento e da prática, mas também as suas tarefas (razão pela qual a dialética materialista é definida, pelo autor, como um método do conhecimento científico).

Ampliando o significado de categorias, Marx (1983) menciona que estas expressam os aspectos fundamentais das relações humanas (dos homens entre si, bem como com a natureza). Para ele, essas categorias são criadas a partir do desenvolvimento do conhecimento aliado à prática social.

Somando-se a isso, Kopnin (1978), baseado na dialética materialista, define o significado de lógica e teoria do conhecimento, afirmando que o campo do lógico sempre se enriquece com novos conteúdos. No entanto, para que esse pensamento não se finde no misticismo, ou na fantasia estéril, ou mesmo na confusão, o autor enfatiza a necessidade de um apoio e de meios de demonstração que movimentem, como citado, de forma direcionada, porém

livre, o conhecimento humano, sempre no sentido da verdade. Esse apoio lógico se dá pela experiência que antecede o conhecimento (categorias da dialética materialista), ou seja, a experiência conjunta desse conhecimento histórico acaba constituindo uma base, na qual a dialética cria suas categorias.

Por todas essas razões, quando os PCN+ (Parâmetros Curriculares Nacionais de Matemática) sugerem que o professor deve possibilitar a autonomia do estudante (BRASIL, 1998), esse documento oficial sinaliza a necessidade de o professor elaborar situações que auxiliem os estudantes a pensarem e agirem. Essas SDA devem ser de tal modo que, fora do contexto da sala de aula, cada estudante seja capaz de exercer este trabalho (agir e pensar), encontrando soluções e saídas na resolução de situações-problemas.

Entretanto, a atual ordem capitalista (em suas exigências de produtividade e lucratividade) tem se instaurado dentro das escolas o suficiente para criar um caráter adaptativo, o qual, segundo Mészáros (2008), vincula a natureza da educação ao destino do mercado de trabalho. Desse modo, a escola passa a ser, para o jovem, apenas um espaço físico destinado à apropriação de conhecimentos práticos e úteis, visando sua preparação para esse mercado de trabalho, unicamente. Esse fato impossibilita a “apropriação de um conhecimento num plano mais elevado, mais elaborado do que aquele no cotidiano” (GIARDINETTO, 1999, p. 67), uma vez que o professor deixa de lado elementos importantes, singulares e particulares do objeto e segue direto ao geral, ao prático e “útil” para o mercado de trabalho.

Essa “nova educação” distancia o estudante de um conceito no qual, “segundo a lógica dialética, não inclui unicamente o geral, mas também o singular e o particular” (VIGOTSKI, 1996, p. 78). Se não há um entendimento aprofundado nessas particularidades, então aquele objeto não passa “de um conhecimento essencialmente prático-utilitário, pois nasce da necessidade da resposta imediata de superação dos problemas próprios da vida cotidiana” (GIARDINETTO, 1999, p. 4). Segundo Facci (2004), isso potencializa o sistema capitalista e sedimenta entre os estudantes a cumplicidade com o discurso neoliberal, criando um distanciamento entre o que os documentos oficiais sugerem (possibilitar a autonomia do estudante) e o que realmente ocorre na sala de aula.

Por esses motivos, deveria se almejar

uma educação de novo tipo, comprometida com a formação integral do ser humano, que desenvolva suas funções superiores, que lhe permita pensar e realizar análises de seu papel humano, político e social. Almejamos uma educação formadora do homem, em vez de uma educação de cunho utilitarista, considerada como valor de troca (CRESTANI, 2016, p. 19).

Crestani (2016) assevera que o conhecimento proporcionado pela escola, além de capacitar para o desempenho profissional, deve capacitar para o trabalho, no sentido de se ocupar em desenvolver o ser humano por completo. Também cabe à escola voltar-se para o desenvolvimento da própria humanização do homem (MORETTI; MOURA, 2010), e isso, como afirma Crestani (2016), somente será possível por meio do conhecimento científico, teórico.

Vale ressaltar que a história e a cultura são dois conceitos importantes e articuladores dessa teoria, que fala de um homem (histórico, ou seja, que está em permanente transformação) na relação com a cultura (com os elementos culturais produzidos pelo homem para mediar sua ação no mundo e que, por sua vez, transformam o homem fazendo-o se desenvolver).

História e cultura constituem-se em uma unidade dialética, são dois conceitos articuladores que caminham juntos. Sendo assim, Vigotski (2009) não decide criar uma teoria histórico-cultural, mas percebe, em determinado momento, que é esse movimento dialético, essa transformação permanente e histórica (vivenciada no processo de desenvolvimento na relação com os instrumentos culturais criados pela humanidade) que transforma as pessoas em humanos. Para ele, a cultura se dá justamente nessa relação com o outro, uma vez que o sujeito nasce biológico, mas se constitui humano nesse processo de desenvolvimento que se dá de forma mediada.

Nessa relação do sujeito com a realidade concreta (materialidade) que se tornam possíveis as SDA. Com elas, o sujeito vai deixando de ser somente um ser biológico e vai se tornando humano na relação com os signos e com os instrumentos ou dispositivos produzidos pela cultura humana. Assim, esse sujeito vai se apropriando desses bens culturais, desses conceitos, desses valores e não só internaliza esses bens, mas, de alguma forma, os produz, objetivando-os na realidade concreta. Nesse movimento de internalização e de objetivação, dá-se o processo de apropriação.

Para que se entenda esse conceito, SDA, será iniciada uma investigando sobre a fala egocêntrica proposta por Piaget (1932). Para ele, essa fala é observada no momento em que a criança não tem o intuito de se comunicar com o “ouvinte” de suas brincadeiras, mas, ainda assim, ela faz comentários em voz alta sobre o que está fazendo, independente se alguém está ali para ouvir aquele comentário ou não. É como se a criança fosse narrando a brincadeira: “agora vou colocar o cavalinho dentro do caminhão”, “aí o cavalinho vai descer do caminhão”, “aí o caminhão vai andar” *etc.*. Segundo Piaget (1932), essa fala egocêntrica desaparece por volta dos 7 ou 8 anos de idade, momento em que é internalizada e se transforma no pensamento verbal, não apresentando, portanto, nenhuma função útil no comportamento infantil.

No entanto, Vigotski (2009) se vale desse conceito de fala egocêntrica proposto por Piaget, mas ressalta que, na verdade, ela possui um papel muito importante no desenvolvimento do pensamento da criança, pois ajuda a organizar melhor as ideias e até mesmo a planejar de forma mais elaborada as ações. Ou seja, é como se a criança precisasse falar para resolver uma situação-problema que um adulto conseguiria resolver utilizando apenas o plano do pensamento. Além disso, esse período da fala egocêntrica dá ênfase à curiosidade da criança pelas palavras, pelo enriquecimento de seu vocabulário, e essa é a razão pela qual as crianças sempre perguntam sobre tudo o que é novo para elas. Assim, para Vigotski (2009) essa fala não desaparece, ao contrário do que pensa Piaget (1932).

Vigotski (2009) afirma que a criança aprende a falar se comunicando, relacionando-se com os humanos (o que é um fenômeno coletivo, ou seja, inter-relacional) e percebe rapidamente que com esse fenômeno ela conquista o comportamento do outro e o outro consegue obter da mesma forma um comportamento dela. Assim, a fala significativa (que diferentemente da linguagem, é estritamente humana) é essencial nesse processo de desenvolvimento infantil.

A partir dessas relações com o outro, a criança demonstra dia após dia que pode fazer hoje o que ontem não conseguia. Esse processo é conhecido como Zona de Desenvolvimento Proximal, sugerida por Vigotski (2009). No entanto, a palavra traduzida como “Proximal” será aqui substituída pela palavra “Iminente”, uma vez que se considera “Proximal” como algo próximo (ou seja, de próxima etapa), o que não condiz com os pensamentos deixados pelo autor. Isso porque, em concordância com Prestes (2012), não se acredita que exista um nível potencial, mas sim um nível atual (o qual já está dentro de uma zona de possibilidades).

Sobre essa zona de possibilidades, ainda é comum se ouvir em salas de professores: “cobrei exatamente o mesmo exercício na prova, mas o estudante não conseguiu”. Na verdade, ele poderia conseguir, uma vez que aquele exercício estava na atual zona de possibilidades do estudante, mas isso não quer dizer que esteja numa zona de obrigatoriedade (que ele precisa conseguir). Por esse motivo, Vigotski (2009) alerta que se pautar pelo que o estudante já sabe é se pautar pelo ontem. Ou seja, o objetivo do professor não deveria ser a contínua aplicação de provas, mas deveria ser pautado por aquilo que impulse o desenvolvimento e as possibilidades, o que pode ocorrer por meio das SDA.

Assim, na expectativa de desenvolver uma psicologia baseada nessa literatura marxista, Vigotski (2009) discute essa atividade histórico-cultural dos indivíduos no processo de formação de suas funções mentais superiores, na qual a educação e o ensino têm participações

fundamentais. Este processo, por sua vez, conecta as informações externas, tais como os fatores socioculturais, com a condição interna do indivíduo.

Nessa perspectiva, ao analisar essas condições internas do indivíduo, Leontiev (2001) investiga a atividade psíquica, a qual seria constituída pelos elementos: necessidade, tarefas, ações e operações. Para esse autor, cada atividade só existe devido aos respectivos grupos de ação da mesma. Ou seja, a atividade de comunicação se manifesta por meio das ações de comunicação, do mesmo modo que a atividade didática se manifesta por meio das ações de aprendizagem, por exemplo. Nesse contexto, Leontiev (2001) analisa a atividade de agir e de pensar (práxis), sugerida por Marx (1989) (em que existe uma relação dialética entre o extrair a realidade do objeto e torna-la consciente ao sujeito), e traduz esses conceitos para a ideia de atividade objetual, no momento em que investiga como o sujeito produz conhecimento. Koppin (1978) vai além, afirmando que o conhecimento não segue tão servilmente esse objeto, mas o reflete de modo criativo, uma vez que, para esse autor, o conhecimento não só se opõe, como coincide com o objeto e, portanto, o reproduz.

Nessa perspectiva, uma SDA não é uma ação somente compreendida como um “fazer” e, por isso, é incorreta a utilização da expressão: “os estudantes estão fazendo uma atividade que passei no quadro”. Até porque, a atividade, segundo Leontiev (1978), só se constitui como tal se for algo consciente, isto é, a atividade surge quando uma necessidade do sujeito é identificada com um modo de satisfazê-la no mundo real, e então este modo de satisfação converte-se no objeto da nova atividade. Pensando assim, as SDA serão sempre movidas por uma intencionalidade.

Para exemplificar o que foi dito no parágrafo anterior, faz-se uso de uma ilustração: todos têm a necessidade diária de se alimentar; logo, a partir dessa necessidade, uma motivação é produzida: matar a fome. Para isso, pode-se caçar, ir à lanchonete comprar algo, pedir por *delivery* etc., mas o fato é que qualquer uma dessas ações descritas coincide com a motivação inicial (matar a fome). É diferente de João fazer uma dessas ações para matar a fome de José, pois essa ação não corresponderia à motivação de João, uma vez que não é uma necessidade dele.

Então, seguindo esse exemplo, chegar até o lanche satisfaz à necessidade inicial de João, pois ele está com fome, assim, ele teria noção o tempo todo da completude dessa situação. Logo, João vai planejando as ações (ir a pé à lanchonete, ou ir de carro), o que seriam as operações das SDA, de modo a satisfazer, ao final, a sua motivação. Desse modo, cada ação corresponderia a essa motivação inicial, e isso se configuraria em uma atividade.

Suponha agora que não houvesse ainda a existência de veículos. Então, provavelmente, as pessoas perceberiam que uma das ações essenciais para satisfazer uma necessidade (chegar ao lanche) poderia ser facilitada caso houvesse uma modificação em uma das ações (como “ir a pé” desenvolver-se para “ir de carro”). O que se faz lembrar o conceito de trabalho de Marx (1989), quando afirma que o trabalho é uma atividade com um objeto determinado e que, ao realizar essa atividade, o sujeito transforma a realidade e se transforma.

Desse modo, o trabalho alienado seria o sujeito desenvolver ações que não respondem à sua motivação, pois, assim, ele não teria a visão da atividade como um todo, mas somente enxergaria ações que não respondem à sua necessidade, mas a de outro.

Então, quando o professor pede para o estudante entregar uma lista de exercícios sem explicar o porquê daquilo, sem apresentar a completude ou o propósito de cada um daqueles conceitos envolvidos naquela lista, ele está fazendo com que haja uma ação descontextualizada de uma situação. No máximo, seria uma “atividade do professor”, em que uma das ações (operações) seria tão somente exigir dos estudantes a resolução de uma lista. Em poucas palavras, o sujeito só está de fato em atividade quando o objeto desta coincide com a sua motivação.

Sendo assim, se uma ação está sendo desenvolvida e de repente ela ganha um motivo, então ela passa a se tornar uma atividade. Como é o caso do estudante lendo o livro de história, citado por Vigostky (2009): o professor pediu a leitura de um livro, mas quando o estudante já estava na metade do livro, o professor voltou atrás e disse que não precisava mais cumprir a leitura. Se aquele estudante desejar terminar o livro, ele fez daquela ação (ler o livro para ganhar pontos), uma atividade (ler o livro). Do mesmo modo, se uma atividade perde sua necessidade, ela se transforma em uma ação.

A partir desses fatos, torna-se mais fácil enxergar que o ideal se distancia de apresentar o campo de conceitos trigonométricos, pronto e acabado. Claro que, na medida em que os elementos tensionadores vão surgindo, o professor vai apresentando as possibilidades. Desse modo, o estudante compreenderá a relevância de se contemplar as necessidades que mobilizaram os seres humanos a construírem os conceitos em estudo. Logo, o desafio é que, no decorrer das SDA, essa necessidade (ensinar a Trigonometria) se transforme na necessidade do sujeito (o estudante), que ele faça daquele problema, seu problema. Por essa razão, uma das intencionalidades das SDA é suscitar a atividade do sujeito.

Ampliando essa discussão, Marx (1983) aponta para algumas categorias da dialética materialista. Essas, por sua vez, são ferramentas que permitam certa liberdade ao pensamento em relação à criação de novos conceitos, sem dirigir esse pensamento de maneira rígida. Isto é,

tais categorias são um “instrumento de especulação criadora livre, que orienta a solução dos problemas pela via do método científico” (KOPNIN, 1978, p. 31). Nessa perspectiva, a realidade concreta não é apreendida imediatamente pelo sujeito, uma vez que este percebe o fenômeno (a aparência do objeto), mas abstrai a essência (a estrutura interna do objeto), movimentando o pensamento do abstrato ao concreto. Nesse contexto, percebe-se que “a atividade prático-sensorial é a base imediata do surgimento de todas as faculdades intelectuais, inclusive do próprio pensamento” (KOPNIN, 1978, p. 50). Além disso,

o método da ascensão do abstrato ao concreto é o método do pensamento; em outras palavras, é um movimento que atua nos conceitos, no elemento da abstração. A ascensão do abstrato ao concreto não é uma passagem de um plano (sensível) para outro plano (racional): é um movimento no pensamento e do pensamento. Para que o pensamento possa progredir do abstrato ao concreto, tem de mover-se no seu próprio elemento, isto é, no plano do abstrato, que é negação da imediaticidade, da evidência e da concreticidade sensível. A ascensão do abstrato ao concreto é um movimento para o qual todo o início é abstrato e cuja dialética consiste na superação desta abstratividade. O progresso da abstratividade à concreticidade é, por conseguinte, em geral movimento da parte para o todo e do todo para a parte; do fenômeno para a essência e da essência para o fenômeno; da totalidade para a contradição e da contradição para a totalidade; do objeto para o sujeito e do sujeito para o objeto. O processo do abstrato ao concreto, como método materialista do conhecimento da realidade, é a dialética da totalidade concreta, na qual se reproduz idealmente a realidade em todos os seus planos e dimensões. Os processos do pensamento não se limitam a transformar o todo caótico das representações no todo transparente dos conceitos; no curso do processo o próprio todo é concomitantemente delineado, determinado e compreendido (KOSIK, 1976, p. 30).

Nesse caminho lógico, movimentar o pensamento, implica uma reflexão sobre a realidade. Para Pires (1996), a diferença entre o empírico (real aparente) e o concreto (real pensado) são as abstrações (reflexões) do pensamento que tornam mais completa a realidade observada.

Por razões como essas, conclui-se a importância de que figure o pensamento empírico na sala de aula, sendo necessário que este possibilite, e até mesmo encoraje, uma nobilitação ao pensamento teórico.

Para isso, faz-se necessária uma mediação atenta do professor. Isso porque, em baseando-se em Vigotski (2009), o que se aprende na escola é (ou deveria ser) hierarquicamente sistematizado. Isto é, para que o conteúdo seja compreendido, deve existir uma intencionalidade trabalhada num processo de interação professor/aluno. Por isso, a importância dos elementos de mediação nessa condução do processo.

2.1 Elementos de mediação

A mediação consiste em um processo de intervenção de um ou mais elemento(s) que se faz(em) intermediador(es) em determinada relação. Isto é, a relação deixa de ser algo direto e torna-se mediada por esse(s) elemento(s).

Ampliando essa discussão, é comum se perceber no universo infantil a vontade de experimentar. As crianças tocam em objetos a fim de sentirem as texturas particulares, clicam nos botões do controle remoto e deslumbram-se com os resultados obtidos no televisor do outro lado da sala etc.. No entanto, muitas das relações entre esses indivíduos e os objetos não ocorre de maneira direta, mas sim, mediada. Para exemplificar, para a água chegar até a boca, é necessário o uso do copo. Ao atravessar uma avenida perigosa, a criança ouve um comando de negação de sua mãe e muda de ideia. Para alcançar um brinquedo no alto, sobe em um banquinho. Em todos esses casos, há interposições que atuam entre o ser humano e o mundo.

Por razões como essas, Vigotski (2002) desenvolveu estudos a fim de identificar esses filtros entre o organismo e o meio, ao apresentar a importância dessas mediações no desenvolvimento dos pensamentos superiores. Com isso, o autor identificou dois tipos de elementos: os instrumentos e os signos. Este, é estritamente humano, como a fala, quando se ouve a palavra “cadeira”, é possível imaginar claramente a figura de uma cadeira e sua utilidade. Aquele, possibilita uma ampliação do contato entre o indivíduo e o meio; tendo um machado, por exemplo, o homem consegue fazer um corte mais afiado e preciso.

Na medida em que o sujeito cresce e se desenvolve, ele vai percebendo determinados efeitos sem precisar passar por determinadas experiências. Um adolescente sabe que colocar o dedo na chama de um fogão provoca queimadura, embora nunca o tenha feito, mas ele certamente recebeu essa instrução quando criança ou alguma instrução similar (“não coloque o dedo na vela acesa!”).

Essas relações sociais são discutidas por Vigotski (2002) e possuem conexão com o materialismo histórico dialético. Isso porque o indivíduo se constitui nas relações históricas, tornando-se uma síntese de tudo aquilo que ele viveu, seja na escola, em casa, nos grupos de amizades entre outros.

2.1.1 Educação Mediada por Tecnologias

A era tecnológica tem provocado mudanças substanciais no mundo nas suas diversas esferas sociais, o contexto globalizado faz com que incontáveis informações sejam lançadas no

“ciberespaço” e inúmeros cidadãos tenham conhecimento instantâneo. Dessa maneira, o universo contemporâneo tem sido permeado por incontáveis transformações sociais, que têm como ponto motivador as tecnologias de informação e comunicação. Por esse motivo, é de suma importância que o processo de ensino-aprendizagem de Matemática contemple o meio em que vive o estudante e dialogue com as tecnologias que subjazem os processos comunicativos.

Embora as tecnologias digitais, TDIC, não tenham sido criadas para fins educacionais, percebe-se um engajamento das instituições de ensino para inseri-las no contexto da sala de aula. Assim, Lévy (1999) explica que a tecnologia não é boa, nem má, mas depende do uso que se faz dela, do contexto em que se insere. A questão é, portanto, definir qual tecnologia é utilizável na educação e como fazer uma utilização realmente significativa para o ensino.

Nesse sentido, as autoras Peixoto e Araújo (2012) investigaram 107 artigos científicos e perceberam que o que havia em comum entre eles era a preocupação com as mudanças do mundo atual, em função da presença das tecnologias. Do mesmo modo, Borba (2014) defende que a tecnologia tem alterado até mesmo a noção do que é ser humano. Para ele, a internet, o *tablet*, o celular estão modificando até mesmo os valores associados às ações. No entanto, mais uma vez, esse processo está ocorrendo em ritmos diferentes fora e dentro da escola, pois o aluno está “plugado” na internet, mas na escola ela é proibida.

Diante dessas considerações, é importante destacar que, ao lecionar Matemática, o professor deve ver as TDIC como aliadas para a dinamização das aulas. Desse modo, ao elaborar uma atividade matemática com base no uso das tecnologias, essa atividade precisa oferecer meios para a experimentação. Além disso, ela deve possuir um caráter investigativo, e explorar conceitos e percepções que não seriam possíveis sem a utilização dessas tecnologias.

As Tecnologias Digitais têm, portanto, influenciado direta ou indiretamente o ser humano, o qual, querendo ou não, está se tornando dependente desse uso. Mori (2013) pondera que essas tecnologias têm mediado a forma como o homem se relaciona, se veste, se transporta e se diverte, trazendo uma concepção atualizada de tempo e de espaço, de comunicação e de informação, de participação e de produção. Por esses motivos, torna-se improdutivo tentar compreender o mundo sem compreender essa nova cultura, denominada por “cibercultura” (SOARES, 2002).

Não é difícil perceber que tais tendências têm impulsionado a sociedade e, conseqüentemente, a educação, a qual tem sido convidada a reformular suas estratégias de ensino, a reconstruir-se.

Para ampliar essa discussão, retoma-se a base teórica deste trabalho, na qual Vigotski (2009) discute sobre a aprendizagem mediada pela fala e pela cultura. Segundo esse autor, o

sujeito opera simbólica e mentalmente sobre os objetos e vai construindo (culturalmente) seu pensamento. Por sua vez, é papel da escola (enquanto mediação pedagógica) promover esse amadurecimento do intelecto do educando, visto que é ela quem facilita a significação dos novos conceitos. Portanto, para se obter resultados positivos, é necessário que todas as categorias (professor, estudantes, gestores das propostas curriculares) relacionem-se bem e estejam sincronizadas.

Nesse viés, Piaget (1978) comenta que o desenvolvimento intelectual deve ser considerado a partir de dois elementos: o cognitivo e o afetivo. Este, associado ao interesse e ao “gostar” e “não gostar”; aquele, de cunho epistemológico. Isso porque, para o autor, é impossível encontrar um comportamento oriundo apenas da afetividade, sem nenhum elemento cognitivo, bem como é impossível encontrar um comportamento composto só de componentes cognitivos.

Mori (2013) vai além, quando afirma que somente em uma relação de afinidade, respeito, empatia e confiança é que se constitui uma relação dialógica que propicia a aprendizagem do estudante. Desse modo, para a autora, é na mediação pedagógica que o professor provoca o desequilíbrio epistemológico, problematiza, desafia e, ao mesmo tempo, estimula a autonomia do estudante, o interesse pelo conteúdo, o gosto por aprender.

Somando-se a essas ideias, Mori (2013) comenta ainda que o veículo da mediação continua sendo a fala e os signos culturais; no entanto, com o advento das Tecnologias Digitais de Informação e Comunicação (TDIC), a linguagem ganha a dimensão da virtualidade e é potencializada para além da linguagem oral e escrita.

Por meio dessa “cibercultura”, o indivíduo não apenas possui acesso à informação, mas, mais que isso, ele a produz numa arquitetura não linear de memórias dinâmicas e hipertextuais. Sobre isso, Soares (2002) defende que o ser humano está tão imerso no universo tecnológico que o próprio pensamento é, hoje, associado ao hipertexto, pois da mesma forma que o esquema mental trabalha, “em rede”, os ambientes virtuais também trazem essa dinâmica.

Sendo assim, o professor passa a ser o mediador de um domínio de diferentes linguagens e, segundo Feldmann (2000), deve ampliar e diversificar as formas de interagir e compartilhar experiências em novas dimensões de tempos e espaços. Para isso, torna-se cada vez menos interessante ignorar os recursos digitais em sala de aula (computadores, *tablets*, simuladores, *datashow*, sons...).

Por outro lado, é importante que, assim como sugere Mori (2013), se a proposta de uso das TDIC na escola não tiver um comprometimento com suas implicações na aprendizagem e se os professores não se apropriarem dos recursos para diversificar suas situações de

aprendizagem, dificilmente será possível afirmar que houve inovação naquele ambiente. Isto é, para a autora, significa dizer que utilizar as TDIC no processo de mediação pedagógica pode ser inovador se essas tecnologias forem mediadoras deste processo de ensino-aprendizagem. Isso porque, com esse uso, o professor torna-se capaz, segundo Mori (2013) de expandir seu universo comunicativo – escrito, oral, imagético, hipertextual, animado – experimentando diferentes mídias, provocando o estudante por diferentes canais sensoriais de compreensão.

É exatamente a partir desse pensamento que se desenvolve este trabalho, em que o uso das tecnologias digitais foi indispensável, como será visto adiante, tendo uma participação que, de tão grande, superou o tema que se pensava ser o maior inicialmente: a Trigonometria.

Ainda assim, neste trabalho a Trigonometria é investigada. Como ponto de partida, sabe-se que esse conteúdo não foi desenvolvido de forma unitária. Em sua composição (essência) estão: a Distância (entre um navio e a superfície terrestre); o Ângulo (conceito essencial para o entendimento da variação azimutal); o Número (que, em sua padronização, inclusive simbólica, torna possível a divisão de uma volta em trezentas e sessenta partes); a Medida (que quantifica e qualifica a distância); a Regularidade (encontrada na constância e na periodicidade); a Comparação (como a relação do Sol com algo manipulável/mensurável, por exemplo); a Orientação (como a noção das três dimensões do planeta Terra); e o Movimento (que torna possível a observação natural do universo). Isto é, se a Trigonometria é um campo de conceitos, então esses conceitos em determinados momentos da história da humanidade foram sendo desenvolvidos e têm uma inter-relação entre si, ou seja, um não existiria sem o outro.

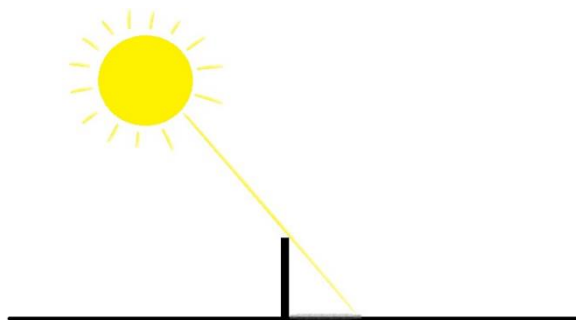
3 O DESENVOLVIMENTO LÓGICO-HISTÓRICO DA TRIGONOMETRIA

Antes de serem abordados os detalhes acerca do desenvolvimento das Situações Desencadeadoras de Aprendizagem (SDA), será útil assinalar alguns fatores históricos fundamentais para a criação da Trigonometria. Isso porque há necessidade de se compreender essa história para, então, desenvolver as SDA, de modo a torná-las ainda mais relevantes ao mostrar como a Trigonometria fez e faz parte da sociedade atual.

No entanto, cabe mencionar que, infelizmente, há um grande hiato nesse processo, visto que muitos conceitos foram engendrados em períodos arcaicos, o que pode ter acarretado uma dissipação dos registros formais. Ampliando essa discussão, Kennedy (1992) assegura que os primórdios do desenvolvimento da Trigonometria são identificados nas relações entre o comprimento da sombra com as horas do dia observadas no gnômon (uma vara perpendicular ao plano do chão). Em conformidade com esse posicionamento, Junqueira (2011) vai além, acrescentando que esse instrumento de medição já teria sido inventado pelo menos 5000 a.C..

Nesse procedimento primitivo, a sombra do gnômon é longa no início da manhã, reduz-se a um mínimo ao meio-dia e, em seguida, cresce novamente à medida em que a tarde avança, conforme ilustrado na Figura 1.

Figura 1 – Representação esquemática de um gnômon.



Fonte: Produção autoral

Note que, se não houvesse incidência de Sol em determinado dia, poderia se perder a noção de tempo. Entretanto, para a época, certamente tratava-se de uma tecnologia de importante valor social e, embora trouxesse falhas, era considerada extremamente útil. Por esse motivo, não é difícil imaginar que os sábios daqueles tempos já tentavam estabelecer relações métricas entre a posição do Sol e a sombra projetada por ele.

No que diz respeito a essa questão, Kennedy (1992) pondera que há pelo menos quatro tábuas (egípcia, iraniana, indiana e grega) com registros tabelados indicando essas

investigações em relação a utilização do gnômon. Apresentando uma abordagem aproximada, Leach (1954) sinaliza que em aproximadamente 800 a.C. já se faziam observações trigonométricas nesse sentido. Abarcando a esse posicionamento, de um modo que se confirma a veracidade dessa data, na Bíblia, Arterburn (2012), são acrescentados detalhes quando em 2Reis capítulo 20 acontece o diálogo entre o rei de Judá, Ezequias (726 a.C.), filho do rei Acaz, e o profeta Isaías. Nesse diálogo, Isaías pergunta se o rei prefere (como sinal de que a promessa de Deus se cumpra e ele tenha sua vida prolongada por quinze anos) que a sombra avance ou recue dez graus. Ao escolher a segunda opção, “o profeta Isaías clamou ao Senhor e fez retroceder dez graus a sombra lançada pelo Sol declinante no **relógio de Acaz**” (v. 11, grifo do autor). Ou seja, a posição de Leach (1954) em relação à essa data torna-se fielmente assegurada. Isto é, havia de fato observações trigonométricas relacionando medidas (neste caso, graus) a um gnômon em aproximadamente 800 a.C..

Desse modo, a invenção desse instrumento de medição tornou possível perceber inúmeras outras relações matemáticas, não só geométricas (como a notória configuração de um triângulo retângulo observada na “Figura 1 – Representação esquemática de um gnômon”, apresentada anteriormente, no qual os catetos são a vara vertical e o solo, e a hipotenusa é a projeção do Sol, oposta ao ângulo reto), mas também algébricas, como o uso das funções.

Nesse contexto algébrico, não é difícil imaginar a construção de tabelas relacionando horas do dia e sombra do gnômon, em que a sombra assume papel de variável dependente e varia conforme o movimento solar (variável independente). Tábuas com registros similares a essa ideia foram encontradas. Uma delas, segundo Kennedy (1992), foi escrita no século XIII a.C. no Alto Egito e traz as informações contidas na Tabela 1 a seguir.

Tabela 1 – Tábua egípcia

Fim de hora	Sombra
-	-
2	30
3	18
4	9
5	3
Meio-dia	0

Fonte: Kennedy (1992, p. 4)

Entretanto, assim como o próprio autor, Kennedy (1992), aponta, esses esquemas são ingênuos e não seria frutífero procurar padrões muito aprofundados nessas sequências

numéricas apresentadas. Isso porque, além de os intervalos serem desiguais, as sombras poderiam variar conforme a latitude geográfica do gnômon ou até mesmo conforme determinadas estações do ano, o que torna os dados coletados no instrumento pouco precisos, por se tratarem de registros realizados há muito.

Por outro lado, a partir de análises de esquemas como esse, Junqueira (2011) considera que a divisão do dia em vinte e quatro horas surgiu por volta de 5000 a.C. e que essa divisão foi estabelecida a partir do gnômon. Esse autor afirma ainda que os babilônios teriam dividido a trajetória da sombra projetada pela vara vertical em doze partes, sendo elas seis antes do meio-dia (manhã) e seis após (tarde); e que o número doze foi escolhido por ser um submúltiplo de sessenta, que era a base do sistema matemático babilônico. Assim, teria sido criada a divisão do dia em vinte e quatro partes (horas), doze durante o dia, e outras doze durante a noite.

A posição de Garbi (2009) coaduna com a de Junqueira (2011) ao afirmarem os motivos da escolha do número doze. Entretanto, apresentando um posicionamento diferente, Garbi (2009) assevera que essas ideias não partiram dos babilônios, mas dos egípcios, e ainda garante que os registros mais antigos são, na verdade, os tablets sumérios feitos de barro cozido, os quais datam de, até, 3500 a.C.. Porém, esse autor pondera que os egípcios elaboravam seus registros em papiros facilmente degradáveis, que podem até ser ainda mais antigos, como sugere Junqueira (2011), mas, infelizmente, terem se perdido na natureza.

Em face ao exposto, percebe-se a dificuldade em afirmar se foram os egípcios ou babilônios os primeiros a desenvolver padrões matemáticos, tais como o sistema de numeração, envolvendo o gnômon.

Somando-se a isso, um outro fator que também acaba prejudicando as pesquisas e causando certas lacunas na história da Matemática são as aquisições de objetos encontrados na natureza e mantidos como simples peças de decoração. Para ilustrar essa afirmação, o autor deste trabalho entrou em contato com um colecionador de antiguidades do Reino Unido e descobriu que alguns raros tablets sumérios feitos de barro cozido no ano 2100 a.C. foram disponibilizados em um site de vendas do mesmo país. Um deles, foi comprado no ano de 2016 por apenas £ 200,00 (duzentas libras esterlinas, moeda oficial do Reino Unido), que equivalem atualmente (2019)² a R\$ 965,93 (novecentos e sessenta e cinco reais e noventa e três centavos).

Não necessariamente existem informações relevantes para a história da Matemática nessas peças vendidas por esse colecionador. Mas, certamente, há pessoas que mantêm consigo

² Conferido em 09 fev. 2019, às 17h02min.

peças fundamentais para o preenchimento das lacunas da história da Trigonometria por uma questão de coleção ou, até mesmo, decoração.

Exatamente por essas razões apresentadas, a origem da Matemática e, mais especificamente, da Trigonometria, é incerta. Provavelmente, já identificavam suas variadas aplicações em diversos contextos, mesmo em períodos pré-históricos. Para elucidar essa afirmação trazendo um documento antigo e em partes deteriorado, o papiro *Rhind*, transcrito pelo escriba Ahmes por volta do ano 1650 a.C. de um arquivo ainda mais antigo, foi descoberto, segundo Martins (2015), pelo escocês Alexander Henry Rhind (por isso a justificativa do nome do papiro), em 1858. Esse documento, que hoje pertence ao *British Museum*, museu britânico de Londres, em seus quase seis metros de comprimento, por pouco mais que trinta e dois centímetros de largura, contém diversos elementos matemáticos (inclusive muitos trigonométricos) que são algumas das principais fontes para o estudo da matemática egípcia antiga. A seguir, fotografias do papiro *Rhind* no *British Museum* (Figuras 2 e 3).

Figura 2 – Papiro Rhind no British Museum, visão geral.



Fonte: MATHGROUND (2017)

Figura 3 – Papiro Rhind no British Museum, ampliado.



Fonte: MONTEIRO (2015)

Nessas inscrições, existem registros que mostram como eram realizadas operações como divisão, radiciação e até mesmo resoluções equacionais na época. Um dos desafios retirados desse papiro foi:

"Linda donzela, de olhos brilhantes, diz-me qual o número que, multiplicado por 3, somado a três quartos do produto, dividido por 7, subtraindo de um terço do quociente, multiplicado por si mesmo, subtraindo de 52, tendo sua raiz quadrada extraída, somado a 8 e depois dividido por 10, dá o número 2?"

Resolução - Resolvendo do fim para o início temos que:

Se dividindo o penúltimo resultado por 10 dá 2, então aquele será vinte;

Se o anterior somado a 8 dá 20 então, serão 12;

Se o anterior tem raiz quadrada 12 então, serão 144;

Se ao anterior subtraindo 52 dá 144 então, serão 196;

Se o anterior multiplicado por si mesmo dá 196 então será 14;

Se subtraindo um terço do anterior dá 14 então será 21;

Se o anterior dividido por sete dá 21 então será 147;

Se ao anterior somar três quartos dá 147 então será 84.

Finalmente se o número multiplicado por 3 dá 84 ele será 28.

(BLOGUEIRO, 2011).

Além desse, Martins (2013) revela que o papiro apresenta pelo menos outros oitenta e quatro problemas do cotidiano da época, com suas respectivas resoluções. A autora pondera ainda que é consenso entre historiadores em matemática que grande parte do conhecimento atual provém desse papiro.

Após essa revisão bibliográfica, e com entendimento consistente dos principais constructos teóricos que constituem a perspectiva histórico-cultural, pôde-se estabelecer, fundamentados em Hogben (1970), os nexos conceituais da Trigonometria. No entanto, antes de apresentá-los, faz-se necessária uma explanação da revisão elaborada.

Como ponto de partida, Hogben (1970) coloca duas questões que apontam para o enfoque histórico de modo extremamente significativo:

1) Há quanto tempo isso se deu?

Segundo esse autor, semear vegetais e criar animais que só reproduzem em determinadas épocas do ano gerou nos homens a necessidade de se fazer um registro do tempo, mais específico, das estações. Além disso, há um relato bíblico, no primeiro capítulo de Gênesis, que descreve como se deu a criação das estrelas e o porquê dessa criação, no qual "Disse Deus: "Haja luminares no firmamento do céu para separar o dia da noite. Sirvam eles de sinais para marcar estações, dias e anos, e sirvam de luminares no firmamento do céu para iluminar a terra". E assim foi" (ARTERBURN, 2012). Não há um consenso sobre quando esse capítulo foi escrito, mas, de acordo com Arterburn (2012), estudiosos afirmam que,

indubitavelmente, do início dos tempos até, no máximo, 1400 a.C. (mil e quatrocentos anos antes de Cristo).

Nesse sentido, segundo Hogben (1970), os homens observavam que a Lua nascia e se punha cada vez mais tarde, e perceberam um período entre duas luas cheias. Com isso, começaram a agrupar os dias em luas, ou meses de trinta dias.

Em seguida, Hogben (1970) acrescenta que os homens observaram as constelações que nascem mais cedo a cada dia, reconhecendo, assim, as estações. Tudo isso de acordo com as primeiras constelações que se viam nascer e, também, de acordo com o número de luas transcorridas entre as estações chuvosas. Além disso, ainda segundo o autor, por volta de 4.000 a.C., os egípcios já teriam fixado a duração do ano em trezentos e sessenta e cinco dias, através do nascimento da estrela Sírius, pouco antes do arrebol. Inclusive, talvez tenha sido esse o fato de uma volta completa ter sido originalmente dividida em trezentos e sessenta graus. Pode ter existido alguma comparação com um ciclo (um ano, aproximadamente, trezentos e sessenta graus).

Perceberam ainda que, de acordo com Hogben (1970), no hemisfério norte o dia com a sombra mais curta ao meio-dia (21 de junho) é o solstício de verão, e o dia com a sombra mais longa (22 de dezembro) é o solstício de inverno. Já no hemisfério sul, há uma inversão: o solstício de inverno se dá em 21 de junho e o de verão em 22 de dezembro. Desse modo, um ano completo passou a ser identificado como o número de dias transcorridos entre dois solstícios de verão sucessivos.

Através de tantas observações, os homens certamente determinaram situações cotidianas como horas para as refeições e trabalho. Além disso, existia uma tarefa social de observar a marcha das estações, que era confiada aos mais velhos e sábios da tribo, os quais, segundo Hogben (1970), eram considerados uma espécie de magos, pois tinham um conhecimento especial dos segredos do céu.

2) Em que direção fica tal coisa?

É quase certo que o homem aprendeu a medir ângulos muito antes de medir comprimentos. Hogben (1970) conta que, logo que se estabeleceram cidades no vale do Nilo, o homem já havia determinado o número de dias no ano pelo nascer da estrela Sírius. Desse modo, construía monumentos rudimentares para fixar a direção de certos fenômenos celestes, antes mesmo de construir cidades (como exemplo, basta atentar-se ao primeiro *Stonehenge*, construído por volta de 3100 a.C.).

Com isso, de acordo com Hogben (1970), para fixar a direção de um corpo celeste, três distâncias angulares importantes foram reconhecidas: a que esse corpo forma com a vertical (zênite do observador) como sendo sua distância zenital; a que ele forma com o horizonte, ou seja, sua altura; e a que ele forma com o meridiano, partindo do norte, intitulada distância azimutal. Nesse momento, já conseguiam, portanto, representar o céu com seus círculos de altura e azimute.

Somando-se a essas experiências, Hogben (1970) assevera que a trajetória circular do Sol na eclíptica foi estimada em trezentas e sessenta etapas, cada uma correspondendo a um dia e uma noite. Desse modo, acaba não restando dúvidas de que essa divisão natural do passeio do Sol originou o grau. E, justamente através dessa geometria, foi possível medir a altura de um barranco, por exemplo, inicialmente com a sombra solar, depois sem subir ao seu cume, e, em seguida, sem nem aproximar-se de sua base, obtendo a distância horizontal entre os dois pontos dos quais se visa o cume do barranco aos trinta e sessenta graus (como será discutido um pouco mais adiante).

Consonante a isso, a navegação, sem que houvesse terra à vista, também passava a ser possível, uma vez que os homens provavelmente começaram a orientar os seus navios pela órbita das estrelas, visto que os fazedores de calendário estavam certamente acostumados a ver o disco circular através da sombra na Terra dos eclipses lunares. Além disso, não é difícil imaginar que os navegadores percebiam tal esfericidade quando viam as montanhas emergirem das águas ao se aproximarem dos portos, ou os tetos dos edifícios mergulharem no mar, quando se afastavam da terra. Ou, ainda, como naquela época a luz artificial era um luxo, então em uma única viagem pelo Mediterrâneo os marinheiros provavelmente já se convenciam de que no verão os dias se alongavam e as noites encurtavam, e no inverno ocorria o contrário.

Em relação à primeira tábua de senos mencionada, a primeira definição importante é se lembrar de que $\text{sen } A = \text{cos } (90^\circ - A)$ e $\text{cos } A = \text{sen } (90^\circ - A)$. Com isso, pode-se determinar ângulos próximos de 0° e 90° . Num círculo de raio unitário, tornando o ângulo cada vez menor, até assumir praticamente o valor 0° , seu cosseno aproxima-se cada vez mais do valor de r (raio), ou seja, $\text{cos } 0^\circ = 1$. Ao mesmo tempo, o seu seno desaparece, ou seja, $\text{sen } 0^\circ = 0$. Dessa maneira, tomando-se um ângulo cada vez maior, até assumir praticamente o valor 90° , seu seno aproxima-se cada vez mais do valor de r e seu cosseno torna-se cada vez menor e desaparece, ou seja, $\text{sen } 90^\circ = 1$ e $\text{cos } 90^\circ = 0$.

Desse modo, parece absurdo estabelecer uma relação entre os lados de um triângulo com um ângulo igual a 0° ou com dois ângulos iguais a 90° , pois, nesse caso, o triângulo deixa de existir (devido à soma dos ângulos internos de um triângulo ser igual a 180° ,

impossibilitando que dois deles sejam suplementares). No entanto, esses números destinam-se a serem utilizados em medições feitas com instrumentos imperfeitos e, então, um ângulo, de tão pequeno, desafia a medição.

Dessa mesma ideia, considerando-se que $tg A = \frac{sen A}{cos A}$, pode-se concluir que $tg 0^\circ = 0$ e que a $tg 90^\circ$ possui um comportamento indeterminado. Isso porque, $tg 0^\circ = \frac{sen 0^\circ}{cos 0^\circ} = \frac{0}{1} = 0$, e $tg 90^\circ = \frac{sen 90^\circ}{cos 90^\circ} = \frac{1}{k} = n$, sendo k um número excessivamente pequeno, próximo de 0, e, portanto, n um número excessivamente grande, ou seja, tendendo ao ∞ .

Com cálculos semelhantes a esses, Hiparco calculou a distância da Terra à Lua numa estimativa de, segundo Costa (2000), aproximadamente quatrocentos e trinta e três mil, duzentos e vinte e oito quilômetros, ou seja, com um erro em torno de doze por cento, somente. Pode se ter uma ideia da necessidade da construção de tábuas com intervalos muito pequenos para finalidades astronômicas, como essa, em que se usavam medidas conhecidas de um triângulo para efetuarem cálculos de distâncias inacessíveis. Ou seja, uma vez construídas tábuas de senos e cossenos, foi fácil atribuir para esse número um valor tão aproximado quanto necessário.

Desse modo, assim como assevera Hogben (1970), a história da ciência jamais confirma a crença popular de que as descobertas são obras de gênios solitários. Pelo contrário, o autor salienta que são frutos da compreensão simultânea de vários. Assim, as descobertas se repetem porque o labor intelectual avança segundo as linhas traçadas pela cultura social herdada. Observa-se, portanto, a forte presença do lógico-histórico.

Após todas essas observações, estabelecem-se elementos importantes considerados, aqui, Nexos Conceituais da Trigonometria. São eles:

- **Distância:** que, em Trigonometria, pode ser encontrada numa reta (distância entre dois pontos), num ângulo (distância angular, como a zenital, a altura e a azimutal), ou num arco (distância percorrida por um navio no mar, superfície esférica);
- **Ângulo:** essencial para o entendimento da variação azimutal;
- **Número:** torna possível a padronização (como a divisão de uma volta em trezentas e sessenta partes) com o uso de símbolos (3, 6 e 0);
- **Medida:** quantifica e qualifica a distância, principal objeto medido na Trigonometria. Pode-se relacionar ao comprimento, ao ângulo ou, ainda, ao tempo;
- **Regularidade:** que, em Trigonometria, encontra-se na Constância (π) e na Periodicidade (funções de seno e cosseno, movimentos ondulatórios e oscilatórios);

- **Comparação:** relação do Sol com algo manipulável/mensurável, por exemplo;
- **Orientação:** noção das três dimensões do planeta Terra (visualização essa que será feita durante as SDA com uso de um *software*);
- **Movimento:** da observação dos movimentos naturais do universo criou-se o tempo. O movimento também está associado à transformação.

Com todos esses importantes nexos conceituais, ainda se vê a Trigonometria sendo estudada, em alguns casos, de forma rápida e sem muitos sentidos ou significados. Sobre isso, Dionizio e Brandt (2011) desenvolveram uma pesquisa a fim de investigarem a dificuldade que os estudantes do ensino médio apresentam em compreender muitos conteúdos da Matemática, especialmente no que se refere à Trigonometria. Os autores concluíram que essa falta de compreensão pode ser devida a diversos fatores, dentre eles a dificuldade que os estudantes têm de conceitualizar os objetos matemáticos que se apresentam de forma muito abstrata. Os autores perceberam ainda que, em relação aos conteúdos da Trigonometria, geralmente os estudantes encontram dificuldades na compreensão de conceitos trigonométricos básicos.

Com isso, Dionizio e Brandt (2011) sugerem que haja uma mudança na maneira como o conteúdo é apresentado em sala de aula, de modo que se tenha a superação dos fracassos encontrados. Para isso, indicam que os professores sigam mais rigorosamente os documentos oficiais como os PCN's, fazendo uma relação do conteúdo com a realidade do sujeito.

Para que se contemple tais requisitos, faz-se necessária uma mediação pedagógica. O papel central dessa mediação, nesta pesquisa, cabe ao professor, o qual deverá criar, orientar as SDA, e disponibilizar recursos que auxiliarão na construção dos conceitos. Um desses recursos será o uso das Tecnologias Digitais.

4 METODOLOGIA

Nesta seção, será discutida a quantidade de aulas que foram disponibilizadas para o desenvolvimento das Situações Desencadeadoras de Aprendizagem (SDA), bem como os detalhes da organização dessas aulas. Além disso, será apresentada a análise utilizada na pesquisa.

4.1 Contexto, participantes e objeto de pesquisa

Após submissão ao comitê de ética, o autor deste trabalho entrou em contato com a direção do colégio no qual leciona Matemática na turma do nono ano do ensino fundamental e a proposta foi aceita de imediato. Assim, para o desenvolvimento da pesquisa, foram disponibilizadas quatro aulas do nono ano, cada qual com duração de 45 (quarenta e cinco) minutos.

Como descrito pelo comitê de ética responsável, um dia antes do desenvolvimento das SDA, o Professor/Pesquisador (PP)³ recolheu dos estudantes o “Termo de Consentimento Livre e Esclarecido aos Responsáveis” (ANEXO 1), em que o(a) pai/mãe/responsável/cuidador concordava com a participação de seu(a) filho(a), menor de idade, na pesquisa. Na falta desse termo, o estudante permaneceria na sala de aula, mas as informações por ele apresentadas (caso houvesse) não seriam analisadas nos resultados da pesquisa.

A proposta das SDA segue resumida na “Tabela 2 – SDA”, em que as quatro⁴ situações são apresentadas. Além disso, na tabela é descrito o que se esperava que acontecesse na sala de aula para que fossem identificados os conceitos.

Tabela 2 – SDA. (Continua)

Situação proposta	Intencionalidade		Metodologia	Instrumento(s)
	Conceitual	(Necessidade)		
1. Analisar os conceitos Medida e Número.	Reconhecer o conceito de medida a partir de uma investigação da grandeza Comprimento.	Quando forem comparadas as respostas de todos os grupos, os participantes perceberão qual foi a necessidade social comum que levou à padronização dos	Sem usar a régua, cada grupo estipulará uma medida numérica para o lado direito da carteira da sala de aula, adotando um instrumento qualquer para isso. Seria viável a utilização desse mesmo	Cada grupo ficará livre para utilizar o(s) instrumento(s) que quiser, como, por exemplo, uma caneta. Nesse caso, basta

³ No decorrer deste trabalho, o Professor/ Pesquisador será chamado PP.

⁴ A tabela foi dividida em quatro momentos para melhor organização textual, mas não quer dizer que esses momentos sejam independentes, muito pelo contrário.

Tabela 2 – SDA. (Continua)

Situação proposta	Intencionalidade		Metodologia	Instrumento(s)
	Conceitual	(Necessidade)		
1. Analisar os conceitos Medida e Número.	Discutir a necessidade do estabelecimento das unidades, incluindo múltiplos e submúltiplos (cm, m, km <i>etc.</i>).	instrumentos de medida.	instrumento escolhido pelo grupo para medir a distância real entre as cidades Lavras (MG) e Campo Belo (MG)? E para medir o tamanho de uma bactéria microscópica?	investigar quantas canetas cabem no lado da carteira.
2. Explorar os conceitos Tempo, Movimento, Comparação, Orientação e Regularidade.	Identificar que Tempo também é uma grandeza escalar e que, embora os corpos celestes tenham sido fundamentais na criação desse conceito, com o avanço tecnológico essa associação tornou-se obsoleta, embora não totalmente descartada.	Como mencionado na seção teórica, Hogben (1970) relata a necessidade social comum da definição de períodos de trabalho e de descanso. Em função disso, os períodos manhã, tarde e noite foram determinados com base no movimento aparente do Sol.	É possível medir algo abstrato, como o tempo? Por que surgiu a necessidade de se determinar o tempo (segundos, minutos, horas, dias, meses...)? Qual a necessidade da divisão do dia em turnos (manhã, tarde e noite) ou mesmo em estações (primavera, verão, outono e inverno)? Se ainda não tivessem inventado o relógio, como seria possível medir o tempo? Que eventual(is) deficiência(s) esse(s) método(s) apresenta? Será que o Sol nasce todos os dias no mesmo lugar?	<i>Stellarium</i> ⁵ (observação e discussão da regularidade que ocorre nos movimentos dos corpos celestes, para que se perceba como o calendário teria sido organizado).
3. Explorar o conceito Ângulo.	Discutir o ângulo zenital e azimutal e identificar a subdivisão do dia.	Necessidade da padronização de uma escala para medir o tempo, a partir das observações dos corpos celestes com o uso do instrumento Gnômon.	Como olhar as horas a partir do instrumento Gnômon?	Gnômon (observar a regularidade do Gnômon para a subdivisão dos períodos) e <i>Stellarium</i> (observar a regularidade dos corpos celestes para a subdivisão de períodos).

⁵ *Stellarium* é um *software* com simulação planetária de código aberto para computador. Com um céu realista em três dimensões, igual ao que se vê a olho nu, com binóculos ou telescópio, basta ajustar as coordenadas geográficas e começar a observar o céu da cidade escolhida, como Lavras (MG). Esse *software* está disponível, em sua versão gratuita, em: <<https://stellarium.org/pt/>>, acesso em 17 mar. 2019.

Tabela 3 – SDA. (Conclusão)

Situação proposta	Intencionalidade		Metodologia	Instrumento(s)
	Conceitual	(Necessidade)		
4. Explorar o conceito Distância a partir do conceito de Ângulo.	Calcular distâncias inacessíveis; e Identificar quais elementos tensionadores podem estabelecer as relações trigonométricas, como as tabelas, e quais as necessidades dessas tabelas.	Desenvolvimento de uma tabela de sen/ cos/ tg.	Distância Lua da Sala. Estabelecer exemplos que recaiam nos mesmos ângulos notáveis, para mostrar que embora os triângulos possuam lados de medidas diferentes, tendo o ângulo reto há uma regularidade (padrões) que podem ser tabelados. Mostrar que essas mesmas relações podem ser aplicadas em outras áreas, como para medir a largura de um rio, ou a altura de uma serra, ou de uma pirâmide, por exemplo.	Lua fora da sala.

Fonte: Produção autoral.

Uma vez compreendida essa “Tabela 2 – SDA”, as quatro situações descritas serão detalhadas a seguir.

4.1.1 Situação 1: Analisar os conceitos Medida e Número.

Com o olhar na “Tabela 2 – SDA” apresentada, o PP propôs a primeira situação, em que os participantes mediram o lado direito da carteira com o instrumento escolhido pelo grupo. Os resultados serão detalhados na Seção 5 (Análise dos dados).

Em seguida, após as discussões e apresentações de suas respostas, o professor pediu que cada grupo medisse, com o instrumento escolhido: a distância de Lavras (MG) a Campo Belo (MG); e a espessura de um fio de cabelo.

Com essas situações propostas, esperava-se que os participantes compreendessem a necessidade do estabelecimento de múltiplos e submúltiplos (CUNHA, 2008), bem como qual foi a necessidade social comum que levou à padronização de uma unidade internacional de medida.

4.1.2 Situação 2: Explorar os conceitos Tempo, Movimento, Comparação, Orientação e Regularidade.

Nesta segunda situação, o PP questionou a possibilidade de se medir algo abstrato (a ideia aqui era chegar no conceito Tempo). Em seguida, perguntou se o Sol nasce todos os dias no mesmo lugar. Para esta pergunta, o mais comum seria esperar a resposta imediata: “Sim, no Leste”. Entretanto, o PP sugeriu uma observação constante em relação ao ponto exato em que o Sol nasce. Se essa situação não contasse com os recursos da tecnologia digital, tais observações poderiam se estender por meses, senão anos. Nesse cenário, a tecnologia digital fez total diferença, uma vez que o PP utilizou o *software Stellarium*, bem como os simuladores que serão apresentados na sequência.

Antes de ser respondida essa questão (se o Sol nasce todos os dias no mesmo lugar), o PP explorou um pouco o *software (Stellarium)* juntamente com os participantes. Para isso, projetou o programa computacional no quadro branco, por meio de um *datashow*, e foi investigando com a turma os recursos disponíveis.

Um desses recursos tratava-se de imagens de linhas, rótulos e figuras formadas pelas constelações vistas de Lavras (MG), à noite, como mostra a Figura 4.

Figura 4 – Linhas, rótulos e figuras simuladas no céu de Lavras.



Fonte: <<https://stellarium.org/pt/>>, visualizado em 17 mai. 2019.

Após um tempo de familiarização com os recursos do programa, o PP buscou no *software* a manhã do dia atual para encontrar a posição exata em que o Sol havia nascido naquele dia da pesquisa. Em seguida, voltou o tempo, mensalmente, a fim de que fosse observado o momento exato em que o Sol nascia em Lavras nos meses anteriores àquele dia. A Figura 5, representa um pouco do que foi reproduzido.

Figura 5 – Posição do Sol.



Fonte: <<https://stellarium.org/pt/>>, visualizado em 17 mai. 2019.

Com isso, esperava-se que os grupos percebessem que o Sol “se move” de alguma forma em torno do ponto cardinal Leste. Para que se houvesse a total compreensão desse movimento, foi iniciada a terceira situação.

4.1.3 Situação 3: Explorar o conceito Ângulo.

Para que ficasse ainda mais claro que o Sol não nasce todos os dias exatamente no mesmo lugar, e para que houvesse um entendimento de como se dá esse “movimento” do Sol, foi projetada uma animação “GIF”, conforme representado na Figura 6.

Figura 6 – Posição do Sol: equinócios e solstícios. (Continua)



Figura 7 – Posição do Sol: equinócios e solstícios. (Conclusão)

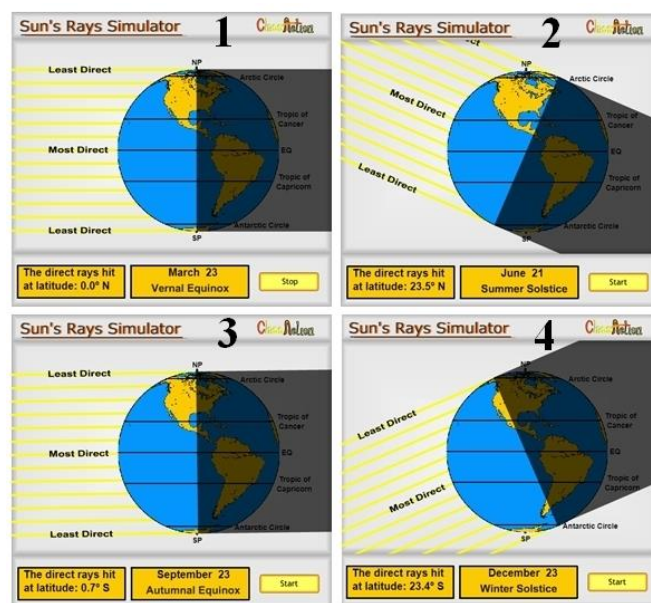


Fonte: < http://gruposputnik.com/paginas_com_flash/Sun%27s%20Position%20on%20Horizon.htm>, visualizado em 01 jun. 2018.

Ainda na Figura 6, foi possível entender as afirmações de Hogben (1970), quando defende que no hemisfério norte o dia com a sombra mais curta ao meio-dia (21 de junho) é o solstício de verão, e aquele com a sombra mais longa (22 de dezembro) é o solstício de inverno. Já no hemisfério sul, há, segundo o autor, uma inversão: o solstício de inverno se dá em 21 de junho e o de verão em 22 de dezembro.

Para complemento dessa animação, na sequência uma outra animação, “Figura 8 – Simulação dos raios solares”, reproduziu o percurso do Sol. Com isso, o PP introduziu a ideia de Ângulo, a partir da explicação de zênite e azimute.

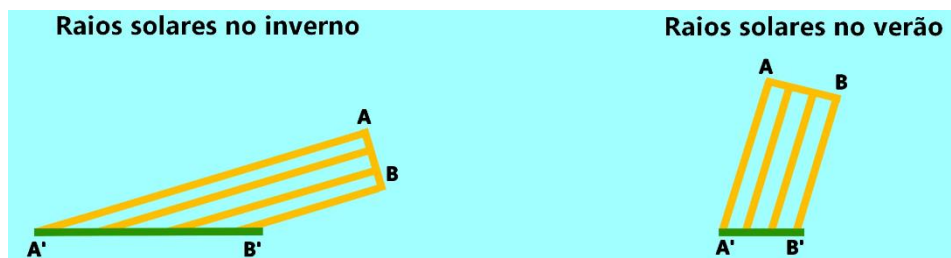
Figura 8 – Simulação dos raios solares.



Fonte: < http://gruposputnik.com/paginas_com_flash/Sun%27s%20Rays%20Simulator.htm>, visualizado em 01 jun. 2018.

Após essas observações, foi discutido, ainda, a questão da área de incidência solar em um mesmo horário, porém em diferentes estações do ano, como apresentado na Figura 9.

Figura 9 – Comparação da área de incidência solar.



Fonte: Produção autoral.

Após essas discussões acerca das subdivisões do dia e das necessidades da padronização de uma escala para medir o tempo a partir das observações dos corpos celestes, uma outra animação “GIF” simulou o funcionamento do instrumento gnômon, como mostra a Figura 10.

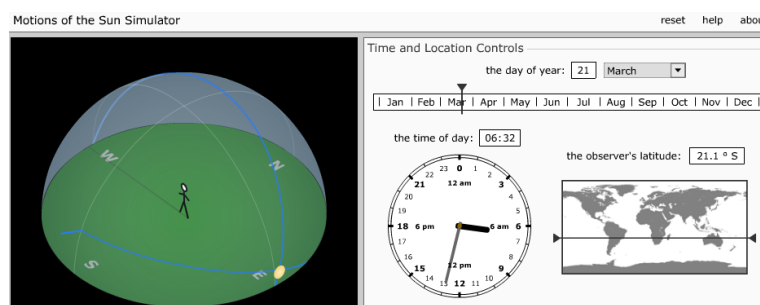
Figura 10 – Simulação de um gnômon.



Fonte: Disponível em: <<https://es.slideshare.net/IngesAerospace/que-vemos-en-el-cielo-de-mi-barrio>>, acesso em 09 fev. 2020.

Com esse GIF, esperava-se dos participantes uma percepção de que a regularidade observada no movimento projetado pela sombra da vara perpendicular ao solo será sempre melhor compreendida se dividida em pequenas partes (ângulos). Para maior exploração desse conceito, ângulo, o PP utilizou um simulador *online* do deslocamento do Sol na cidade de Lavras. Uma dessas imagens é a Figura 11 a seguir, em que o Sol está representado em amarelo.

Figura 11 – Deslocamento do Sol em Lavras (MG).



Fonte: <http://gruposputnik.com/paginas_com_flash/Sun%20Motions%20Demonstrator.htm>, visualizado em 01 jun. 2018.

Com essa simulação, e analisando-se a variação da sombra do observador, esperava-se que os grupos percebessem a importância do estudo de ângulos na Matemática e do quão essenciais eles são quando o assunto é movimentação de corpos celestes.

4.1.4 Situação 4: Explorar o conceito Distância a partir do conceito Ângulo

Nesta situação final, o PP colocou do lado de fora da sala de aula uma bexiga branca tamanho G, e propôs que aquela fosse a “Lua da sala”, a qual seria estudada por eles.

A partir de tais investigações, esperava-se que os grupos percebessem que, tendo-se o conhecimento de determinados ângulos, torna-se possível estabelecer medidas em relação a um objeto, mesmo que ele esteja fora de alcance. Assim, os grupos entenderiam como foram medidas pela primeira vez as distâncias entre a Terra e quaisquer outros corpos celestes.

Desse modo, conforme as considerações elaboradas na seção teórica, essas SDA (mediadas por tecnologias digitais) compuseram uma unidade didática com o intuito de analisar o desenvolvimento do pensamento teórico do campo de conceitos da Trigonometria a partir dos processos de significação produzidos pelos participantes. Tudo isso, sempre abarcando os conceitos com a questão histórica que os fez serem desenvolvidos.

4.2 Instrumentos

Em face ao exposto até aqui, esta pesquisa teve um cunho **qualitativo**, o qual, segundo Neves (1996), propõe a obtenção de dados descritivos mediante contato direto e interativo do PP com a situação, objeto de estudo. Segundo esse autor, é comum que o PP, ao procurar entender a situação em estudo, o faça segundo a perspectiva dos participantes e, a partir daí, situe a sua interpretação.

Portanto, para que isso ocorresse da melhor forma, fez-se o uso do diário de campo, de gravadores de áudio e vídeo, e, ainda, contou-se com os registros elaborados pelos estudantes, sempre em conformidade com o Termo de Consentimento Livre e Esclarecido aos Responsáveis. Todos esses registros transformaram-se, ao final, em documentos, uma vez que até mesmo os áudios e vídeos foram transcritos para composição da análise dos dados.

O diário de campo, em específico, geralmente traz as percepções imediatas do PP durante o desenvolvimento da pesquisa. Por isso, de acordo com Lima et. al (2007, p. 99), esse instrumento deve ser utilizado de modo que garanta a maior sistematização e o maior detalhamento possível de todas as situações ocorridas no dia da pesquisa e das entrelinhas nas

falas dos participantes durante eventuais intervenções. Desse modo, o PP anotou no diário de campo todas as percepções referentes aos gestos e às expressões dos participantes, que poderiam vir a apontar algum fator relevante para a análise dos dados.

Contudo, como o diário de campo vem carregado das emoções do momento e, portanto, embasado na subjetividade do PP, fez-se necessária a utilização de outros instrumentos de coleta de dados, como os registros elaborados pelos participantes e as gravações de áudio e vídeo, pois, como sugere Ponte (1997, p. 2), é por meio da comunicação oral e escrita que os participantes dão sentido aos conhecimentos matemáticos que vão sendo construídos. Por esses motivos, a importância da união desses instrumentos a fim de que, ao final, houvessem documentos que permitissem tais elaborações.

4.3 Núcleos de significação

Os núcleos de significação foram identificados a partir das sintetizações das determinações essenciais dos seres. Isso porque, para Aguiar e Ozella (2006), um núcleo deve trazer a contradição social que manifeste as expressões contraditórias do sujeito. Ou seja, é preciso ter a fala do sujeito e negar essa fala para que a síntese vá além da aparência.

Sendo assim, foi necessário, inicialmente, fazer um pequeno agrupamento que expressasse a singularidade que é o participante ou que são aqueles participantes (o grupo). Para isso, bastou selecionar uma unidade no texto que revelasse, de algum modo, o todo.

Em seguida, foi necessário perceber se uma fala tornava claro que só foi possível aquele participante produzi-la por meio da subjetividade. Isto é, a fala era dele, mas jamais existiria se ele não tivesse se apropriado das significações sociais. Ou seja, um não era um sem o outro e um constitui o outro. No caso deste trabalho, desenvolvido em pequenos grupos, não se buscou o que um participante falou, unicamente, mas sim as mediações daquelas significações produzidas por aquele grupo.

Tendo-se essas considerações, o autor selecionou com cores, bem como negrito e itálico, aquilo que lhe chamava atenção nas falas transcritas (resultados dos coletores de áudio distribuídos em cada grupo), sempre com um olhar nas categorias expostas anteriormente.

Pautando-se em autores como Vigotski e tendo, portanto, a noção de que a fala revela o sujeito e que ele é um todo, e que a fala dele como um todo tem que ser compreendida, não foi possível seguir simplesmente a ordem cronológica dos áudios. Isso porque era claro que os participantes tinham contradições no discurso, mas contradições que demonstram ser de cunhos

sociais. Por essa razão, só foi possível entender a fala dos participantes ao buscar o processo constitutivo das significações.

Para isso, foram agrupadas as falas de acordo com a recorrência, ou pela igualdade ou diferença, ou pelo inusitado, pela surpresa *etc.*. Essas palavras serão, aqui, chamadas de indicadores. E os pré-indicadores, que são as falas, virão acompanhando essas palavras.

Desse modo, o conjunto de indicadores, neste movimento que é dialético, negava e/ou associava e, assim, compunha um núcleo de significação.

É interessante destacar que os indicadores não foram simplesmente agrupados por similaridade. Na verdade, os elementos que constituem o núcleo também foram vistos em uma perspectiva dialética, uma vez que encontravam-se em movimento. Ou seja, numa segunda, terceira ou mesmo quarta leitura, esses núcleos foram sendo alterados. Decorrida essa etapa, foi feita uma análise dos núcleos, sempre articulados nas falas, o que será descrito na Seção 5 deste trabalho.

Para que essa análise dos dados fosse alcançada, desenvolveu-se uma mediação teórica mais aprofundada. Isso porque se fez necessário construir uma forma de pensar e olhar para o real de uma maneira orientada pelo método, de modo a buscar entender o movimento desse real como um pensamento categorial. Desse modo, algumas categorias teórico-metodológicas foram essenciais, tais como mediação, historicidade e contradição, as quais serão discutidas a seguir. Embora Vigotski não coloque esse termo de forma clara em suas obras, nas leituras fica evidente que ele pensa em concordância com as categorias.

Categorias, por sua vez, são construções teóricas que carregam o movimento do real, são abstrações, construtos intelectivos, que os pesquisadores vão produzindo. Esses construtos têm o objetivo de apreender o movimento do real, suas contradições e sua materialidade. Por isso, a categoria se diferencia dos conceitos. Ela não vai falar apenas do que é naquele determinado momento, mas de um movimento que existe na realidade e que é produtor de realidade e do movimento humano. Ou seja, as categorias carregam a historicidade e acabam sendo orientadoras na forma em que o sujeito aprende o real.

Como exemplo, pode-se pensar na grande categoria de Marx (2002), que era, aparentemente, a Mercadoria, visto que foi ela quem fez com que fosse possível entender o que é o modo de produção capitalista, o que é o valor de uso, de troca e o dinheiro. Sendo assim, a categoria Mercadoria teve, e tem, o intuito de carregar o movimento do real.

Com esse pensamento, este trabalho foi construído a partir das seguintes categorias:

- **Mediação:** permite ao autor quebrar as dicotomias; ou seja, proporciona um olhar à realidade, e não percebe-la dicotomicamente. Sendo assim, não tem fala boa, fala ruim.

Como anteriormente citado, a mediação consiste em um processo de intervenção de um ou mais elemento(s) que se faz(em) intermediador(es) em determinada relação. Isto é, a relação deixa de ser algo direto e torna-se mediada por esse(s) elemento(s).

A fim de identificar esses filtros entre o organismo e o meio, Vigotski (2002) apresenta a importância dessas mediações no desenvolvimento dos pensamentos superiores, como mencionado na seção teórica deste texto.

Para sintetizar, quando se fala em mediação, refere-se "a uma instância que relaciona objetos, processos ou situações entre si" (SEVERINO, 2002, p. 44) e que atua como "centro organizador" da relação do homem com o mundo (Aguiar e Ozella, 2006, p. 225). Uma instância que, como ressalta Leite (2006), não tem apenas efeitos cognitivos, mas também e, ao mesmo tempo, afetivos.

Ou seja, cada participante dessa pesquisa é único e vai objetivar a sua subjetividade ao seu modo, mas a maneira como cada um objetiva não seria a que é se não fosse a história individual e a história da turma. Do mesmo modo, a turma não seria o que é se não tivesse os mesmos estudantes produzindo, articulando e se relacionando. Um indivíduo não é o seu colega, nem o seu grupo, no entanto, para entender esse sujeito, é necessário entender o que aconteceu naquela turma, naquela escola, naquele conjunto de ideias. Além disso, é importante destacar que o alcance para todas essas observações varia conforme o tempo determinado, ou seja, ao terminarem as aulas, encerram-se as coletas.

Resumidamente, para entender e analisar as falas que estarão descritas na Seção 5, foi preciso compreender que múltiplos outros elementos estavam presentes e que existiam mediações que eram visíveis. Sendo assim, essa categoria chamou a atenção para as observações que pareciam imediatas, mas que não eram, deixando evidente que as relações não são dicotômicas, mas um sujeito constitui o outro.

- **Historicidade:** considera a materialidade dos fatos, a cronologia, o meio e a totalidade no que se refere à dialética geral. Ou seja, ao ouvir a fala foi preciso entender como esta foi sendo produzida. Isso porque a fala pode estar relacionada diretamente a uma série de outros elementos, podendo representar muito mais do que aquilo que simplesmente foi dito. Ou seja, a historicidade é um movimento dialético com inúmeros elementos de mediação.

Em síntese, essa categoria se configura no entender o processo dialético que constitui as falas dos sujeitos de modo que se articule as falas na busca por essas relações.

- **Contradição:** vai além da fala do sujeito. Primeiro, explicita e, depois, explica porque essas contradições na fala aparecem. Mas, para isso, foi preciso identificar a compreensão da contradição nas mediações que constituem a própria contradição, uma vez que

estas, quando verdadeiras, estão presentes nas manifestações sociais, pois são reveladas nas falas. Sendo assim, faz-se uma análise construtiva e interpretativa, como será visto um pouco mais a frente, nas transcrições de algumas das falas.

4.3.1 Escolha do método de análise dos dados

Para Marx (2002, p. 21), a investigação científica tem de apoderar-se da matéria e, em seus pormenores, analisar e entender suas diferentes formas de desenvolvimento. Além disso, o autor completa que deve-se perquirir a conexão íntima que há entre essas formas e que, somente após concluído esse trabalho, é que se pode descrever, adequadamente, o movimento real ocorrido durante a investigação. Para o filósofo, se isso se consegue, fica espelhada, no plano ideal, a realidade pesquisada.

Para que isso ocorresse, foi importante a compreensão de que o PP não iniciou sabendo o que aquele particular (aquela escola, aquele grupo de estudantes) revelaria, embora ele já conhecesse a turma. Por esse motivo, a pesquisa não está pronta e acabada. Se fosse assim, não se precisaria dela.

Portanto, é necessário apropriar-se da matéria e não só contar ou descrever os resultados, mas analisar como o processo se desenvolveu e, mais que isso, perceber a conexão íntima que existe entre as múltiplas relações envolvidas. Isso não quer dizer que o pesquisador não possua alguns pressupostos que o fazem orientar o olhar para o real. No entanto, mais que isso, deve-se ir além e apropriar-se, de fato, da singularidade daquele real e de cada uma de suas particularidades, e isso só foi possível por meio das mediações discutidas anteriormente.

Por esse motivo, neste trabalho foi preciso ultrapassar a análise de um produto final, o mais importante, aqui, foi analisar o processo, bem como os movimentos e as transições do mesmo. Isso para que fosse entendido como o participante e aquela realidade foram se constituindo.

Atrelado a isso, o intuito não foi o de entender o discurso, mas o de entender o pensamento do participante. Por esse motivo, partiu-se da fala, mas, para tentar aproximar o participante da sua totalidade, foi necessário apropriar-se do que foi realizado no seu pormenor. Só depois de concluir esse trabalho é que se pôde descrever adequadamente o movimento do real ocorrido, uma vez que a realidade vive em constante transformação (movimento dialético do real).

Ou seja, a verdade está pautada nesta realidade singular, mas não é absoluta, pronta e acabada. Isto é, se o autor tivesse feito o uso de outros instrumentos, outra realidade e o mesmo

percurso de pesquisa, a conclusão poderia se dar em uma outra verdade. Por esse motivo, foi necessário ir além da aparência e não analisar apenas a fala solta e isolada. Por isso, a importância de se analisar a totalidade, bem como os aspectos contraditórios.

Desse modo, a verdade se trata do momento e do movimento do conhecimento. Sendo assim, para uma análise mais profunda, foi imprescindível acompanhar o movimento do real (na tentativa de ir além do que foi falado) e entender as mediações que constituíram aquela fala.

A partir dessas considerações, buscou-se na fala (transcrições dos áudios) detalhes que levassem a entender o participante como síntese de múltiplas determinações, uma vez que, ao longo de sua história, esse estudante se apropriou ou se configurou nessas múltiplas determinações. Estas vão se constituindo em propriedades desse ser, integrando-se dialeticamente na dimensão da sua subjetividade. Como Hegel (1986) propõe, determinações como essas não se tratam de uma relação causal, mas de uma propriedade essencial do ser.

Por esse motivo, a análise buscou por essas determinações através dos núcleos de significação. Para isso, o olhar do PP foi direcionado para o que foi dito, mas buscando entender: “por que esse processo está acontecendo?”. Tendo-se em mente que, seja qual for o participante, as suas expressões (cognitivas, sociais) sempre são individuais. Isto é, suas falas são subjetivações dele e seu modo foi historicamente constituído. Por isso, a importância de não se pautar na aparência, mas sim buscar entender os aspectos da totalidade.

5 ANÁLISE DAS ELABORAÇÕES CONCEITUAIS A RESPEITO DA TRIGONOMETRIA, POR ESTUDANTES DO NONO ANO, EM SITUAÇÕES DESENCADEADORAS DE APRENDIZAGEM

Nesta seção, será apresentada uma análise dos dados obtidos através da coleta realizada ao longo da pesquisa.

Uma vez organizadas as transcrições da mesma, optou-se por denominar esse conjunto de aulas investigadas como episódio. Ao mesmo passo que, por esse episódio ter sido relativamente extenso (ter tido duração de quatro aulas) e multifacetado, optou-se ainda por dividi-lo em três cenas. Com isso, obteve-se uma melhor organização dos dados coletados, o que facilitou o processo de identificação dos núcleos de significação que foram surgindo. As duas primeiras aulas foram geminadas, e, portanto, compuseram a cena um. Já a terceira e a quarta (última) aula estão representadas pelas cenas dois e três, respectivamente.

Na análise desse episódio, buscou-se compreender quais elaborações conceituais são produzidas por estudantes do nono ano ao se introduzir o campo de conceitos da Trigonometria por meio de Situações Desencadeadoras de Aprendizagem (SDA) mediadas por tecnologias digitais em uma perspectiva lógico-histórica. Além disso, ainda nesta seção, será destacada a relevância dos elementos mediadores presentes nesta negociação dos significados e de que forma esses recursos tornaram-se essenciais no processo de significação.

Para tais compreensões, as cenas serão apresentadas a seguir.

5.1 Luz, câmera, ação!

Ao iniciar o episódio, o autor deste trabalho, sendo também professor regular de Matemática da turma, percebeu que era dispensável sua apresentação. Desse modo, foram reduzidas as chances de distanciamento e timidez entre os participantes envolvidos, isso porque os estudantes demonstraram estar bem à vontade com a proposta de seu professor. Inclusive, foi notório que nem mesmo a presença dos gravadores de áudios fez com que eles se sentissem envergonhados com a participação na pesquisa, fato esse que enriqueceu ainda mais o desenvolvimento da mesma.

Além disso, há também o lado do Professor/Pesquisador (PP), o qual, já conhecendo a turma e estando em um ambiente familiar, também sentiu-se à vontade com a situação. Além dessa, outras grandes implicações ficaram evidenciadas, como quando um estudante se

manifestava durante as SDA, o PP já previa em partes os rumos daquela participação, uma vez que já o conhecia na sala de aula. Isto é, um estudante muito participativo levantava a mão, então o PP já esperava por certos comentários relevantes. No entanto, quebrando a previsibilidade, percebeu-se que, durante as SDA, alguns estudantes pouco participativos durante o ano letivo demonstraram grande interesse no episódio. Isso foi valioso para o PP, o qual entendeu que é necessário criar situações que estimulem o interesse, não só de alguns, mas do mais próximo possível da totalidade.

Um outro ponto importante para esse registro, foi que dos quarenta e dois estudantes presentes na sala de aula do nono ano, seis não levaram o Termo de Assentimento assinado pelo responsável. Por esse motivo, esses estudantes formaram um grupo no fundo da sala e nenhum recurso de gravação (seja áudio ou vídeo) registrou suas discussões.

O restante da turma foi dividido em seis grupos com seis integrantes cada, e o PP explicou novamente (visto que já o havia feito em aulas anteriores, antes de entregar o Termo de Consentimento) do que se tratava aquela “aula diferente”, isso para que todos pudessem ter a noção completa da proposta, conforme discutido na seção teórica deste trabalho.

5.1.1 Cena 1: Análise dos conceitos Medida e Número.

A fala descrita no Quadro 1 retrata o início das duas primeiras das quatro aulas, isto é, como o episódio teve seu ponto de partida. Este é, portanto, o início da primeira das três cenas.

Quadro 1 – Transcrição do áudio com a fala do PP que deu início à Cena 1.

<p>PP: [Transcrição do áudio] Lembrando que nós vamos descobrir como alguns conceitos foram produzidos ao longo da história, e, com isso, vamos entender as necessidades que levaram à criação desses conceitos e como as pessoas pensaram na época. É como se a gente voltasse no tempo. Para começar, o desafio de vocês é encontrar algum instrumento que não seja a sua régua para medir o lado direito da carteira de vocês.</p>

Fonte: Registros da aula de 23 de maio de 2018.

Nesse momento, as discussões entre os grupos quebraram o silêncio da sala de aula e os participantes claramente não demonstravam se importar com o fato de existirem instrumentos de gravação.

No Quadro 2, a seguir, seguem os comentários captados pelo gravador (interno)⁶ em um dos grupos, após o lançamento desse desafio do PP (encontrar um instrumento, que não fosse a

⁶ Cada grupo possuía um gravador de áudio. No total, havia seis grupos e, portanto, seis gravadores de áudio. Um sétimo grupo (que não havia trazido o Termo de Consentimento) não recebeu o gravador de áudio.

régua, para medir o lado direito da carteira).

Quadro 2 – Transcrição de trecho do diálogo entre estudantes.

E1 ⁷ :	Palmo!
E2:	Polegada não é mais fácil?
E3:	Não, com o palmo!
E2:	Mas a mão de todo mundo não é igual.
E4:	Então, pega a mão maior.
E1:	É, vai ter que padronizar.
E5:	É a mão do [E6], então.
E1:	Vai medir qual carteira?
E3:	A minha é diferente...
E2:	A nossa é padrão, mede a nossa.
E6:	Um... Dois...
E3:	Dois palmos e cinco dedos.
E6:	Uai!
E5:	Então não é melhor resumir não? Três palmos?
E1:	É, aproxima pra três palmos.

Fonte: Registros da aula de 23 de maio de 2018.

Aqui, os participantes reconheceram o conceito de medida a partir de uma investigação da grandeza Comprimento, o que havia sido proposto como intencionalidade conceitual para esta situação.

Era notória a participação satisfatória em todos os grupos, embora ainda cedo para afirmar que os participantes estavam em atividade, conforme descrito na seção teórica.

Após mais alguns instantes de discussões, o PP pediu que os grupos revelassem para a turma o instrumento escolhido, bem como o resultado da medição. Na “Tabela 4 – Escolha do instrumento pelos grupos” a seguir, são descritas as ferramentas escolhidas, bem como suas respostas para esse primeiro desafio.

Tabela 4 – Escolha do instrumento pelos grupos

	Instrumento	Explicação do grupo para a medida do lado da mesa
Grupo 1	Palmo	Dois palmos e três quartos. Mas arredondamos para três palmos.
Grupo 2	Mão	Três mãos.
Grupo 3	Caneta	Quatro canetas e uma tampa de caneta.
Grupo 4	Caderno	Dois cadernos, mas passou só um pouquinho.
Grupo 5	Palmo	Três palmos e meio.
Grupo 6	Palmo	Entre três e meio, e quatro.

Fonte: Produção autoral

⁷ E1: Estudante 1. Os estudantes receberam esta denominação, em concordância com o que foi proposto pelo Comitê de Ética, preservando, assim, suas identidades.

Após cada grupo comentar essas medidas encontradas, eles perceberam que havia uma necessidade social comum de uma padronização dos instrumentos de medida. Tendo percebido esse fato, o PP perguntou qual seria a solução para tal problema, já que cada grupo trouxe um resultado diferente, embora o comprimento tivesse sido o mesmo em todas as situações. A seguir, no Quadro 3, o estudante E7 fez uma refutação interessante sobre esse fato.

Quadro 3 – Transcrição do áudio com a fala de um dos estudantes.

E1: É só usar o palmo da pessoa mais importante, tipo do rei.
E7: Mas e quando o rei morrer? Iria ter que fazer tudo de novo?

Fonte: Registros da aula de 23 de maio de 2018.

Claramente, os participantes entenderam que era de extrema necessidade essa padronização do conceito de Medida. Eles reconheceram esse conceito a partir de uma investigação da grandeza comprimento, conforme intencionalidade conceitual descrita na Tabela 2 – SDA, que se encontra na página 43 deste texto. Nesse momento, em seu diário de campo, o PP relatou o notório envolvimento da turma nessa investigação. Os participantes nitidamente não se importavam com o fato de estarem presentes os instrumentos de pesquisa (tais como os gravadores de áudio). A primeira situação continuou, conforme descrito no Quadro 4.

Quadro 4 – Transcrição do áudio com a fala do PP.

PP: Agora, com o instrumento escolhido pelo seu grupo, palmo, mão, caneta ou caderno, vocês irão, com esse instrumento escolhido, medir a distância real entre Lavras [MG] e Campo Belo [MG].

Fonte: Registros da aula de 23 de maio de 2018.

Todos assustaram-se e riram dessa proposta. Ambos concordaram que seria inviável, visto que esta distância real excede cinquenta quilômetros. O PP pediu, então, que utilizassem aquele instrumento escolhido para medirem a espessura do fio de cabelo de um dos integrantes do grupo. Todos ficaram em silêncio, procurando o cabelo ideal para ser medido no grupo.

Em seu diário de campo, o PP anotou que, de modo geral, os grupos aproximavam os instrumentos escolhidos dos cabelos de alguma menina (visto que em cada grupo havia pelo menos uma menina com o cabelo comprido).

Tendo todos os grupos percebido quão inviável era a tentativa daquela proposta (medir o fio de cabelo com um palmo, caneta ou caderno), o PP perguntou o que eles achariam de utilizar o mesmo instrumento para medir o tamanho real de uma bactéria microscópica. Um dos participantes comentou que “teria que fazer uma redução do instrumento”. Os grupos concordaram e, assim, os estudantes compreendam a necessidade do estabelecimento de

múltiplos e submúltiplos. Desse modo, o PP pôde identificar a intencionalidade conceitual mencionada na Tabela 2 – SDA, cuja proposta era discutir a necessidade do estabelecimento das unidades, incluindo múltiplos e submúltiplos.

Após análise minuciosa dessa primeira cena, o autor agrupou por cores, itálico e/ ou negrito as falas transcritas e, após incontáveis leituras e comparações, conforme descrito anteriormente, agrupou essas falas, formando, assim, núcleos de significação.

O **primeiro núcleo**, com falas encontradas em todos os grupos durante essa primeira cena, descreve a percepção da necessidade da criação de uma unidade internacional de medida, como mencionado anteriormente. Esse núcleo concorda com a SDA proposta na “Tabela 2 – SDA”, a qual propunha analisar os conceitos Medida e Número. Nessa SDA, a intencionalidade conceitual era a de reconhecer o conceito de Medida a partir de uma investigação da grandeza Comprimento. Com ela, os participantes perceberam a necessidade social comum que levou à padronização dos instrumentos de medida. O que pode ser confirmado no Quadro 5.

Quadro 5 – Transcrição do áudio com o diálogo a respeito da padronização da medida.

[PP pediu para medirem o lado direito da cadeira com um objeto qualquer, exceto régua.]
E3: Deu três palmos e meio.
E4: O meu deu quatro.
E2: Então a gente tem que escolher um.
[...]
E1: E se usasse a medida da pessoa mais importante da época? Tipo o rei?
E7: E quando o rei morresse? Mudaria tudo de novo?
E2: Ixe... tem que padronizar então. Fazer uma medida só e ficar fixa.

Fonte: Registros da aula de 23 de maio de 2018.

Quando os grupos compararam as respostas entre si, eles perceberam qual foi a necessidade social comum que levou à padronização internacional dos instrumentos de medida. Isto é, eles não só trilharam os passos descritos na seção teórica, mas também fizeram com que a intencionalidade da primeira SDA fosse cumprida.

Os participantes pareciam estar envolvidos o suficiente com as situações, a ponto de o professor estar certo de que eles estavam em atividade e de que haviam encontrado, naquelas situações, um motivo. Eles estavam engajados, e não demonstraram, de forma alguma, estarem apenas cumprindo obrigações, ou seja, as SDA suscitaram a atividade nos participantes.

As zonas de desenvolvimentos estavam criadas. Assim, o PP decidiu iniciar a segunda situação descrita na Tabela 2 – SDA (Explorar os conceitos Tempo, Movimento, Comparação, Orientação e Regularidade). A intencionalidade conceitual, agora, era a de identificar que Tempo (também) é uma grandeza escalar.

Para isso, o PP perguntou se é possível medir algo abstrato. Os grupos iniciaram as discussões. A seguir, o registro de uma delas, no Quadro 6, captada pelo gravador (interno) em um dos grupos.

Quadro 6 – Transcrição do áudio com o diálogo interno de um grupo.

E1: O que seria uma coisa abstrata?
E2: Tipo o oxigênio?
E3: Tipo o que não pode pegar...
E1: Ah, tipo sentimentos...
E2: Amor...
E1: Sentimentos são coisas abstratas, não tem como medir porque não é uma coisa física, entendeu?
E4: Mas lembra aquele filme que o [professor de Redação do colégio] passou do médico? De louco. Que via a loucura...
E1: Mas teria como medir a loucura? Tipo, ele tá com vinte metros de loucura? [Risadas baixas.]
E1: Mas deve ter algum instrumento pra medir o comportamento... era só olhar uma pessoa, depois olhar outra e olhar outra... pra depois padronizar uma medida... tipo isso?
E2: Acho que não. Acho que não dá não pra medir algo abstrato.

Fonte: Registros da aula de 23 de maio de 2018.

Nos grupos, houve um consenso de que era impossível se medir algo abstrato, com exceção de um deles, o grupo 2, no qual foi registrado no gravador (interno) de áudio o que segue no Quadro 7.

Quadro 7 – Transcrição do áudio com o diálogo interno de determinado grupo.

E1: Abstrato é o que não pode tocar. Tipo...
E2: Não é uma grandeza física...
E1: Aham.
E3: Tipo felicidade.
E2: Não tem como medir com número.
E1: É... não tem como... mas isso... é... não pode tocar com a mão.
E2: É... medir com número não... [Silêncio entre o grupo]
E2: Gravidade.
E1: Tem como medir, né?
E2: Que mais?
E1: Onda sonora. Velocidade da luz.
E2: É. Então dá.

Fonte: Registros da aula de 23 de maio de 2018.

Após esse tempo de discussões somente entre os grupos, o PP pediu que eles revelassem as discussões internas para o restante da turma. Assim que este grupo 2 comentou seus resultados (possibilidade de medição de gravidade, onda sonora e velocidade da luz), os demais grupos foram somando ideias para a turma: “força de atrito, luminosidade, energia, força, movimento, tempo”, e então aconteceu o diálogo descrito no Quadro 8.

Quadro 8 – Transcrição do áudio com o diálogo sobre medir o Tempo.

PP:	[Interrompe] Tempo? Dá pra medir o tempo?
Grupos:	[Juntos] Dá.
PP:	E tempo é algo abstrato?
Grupos:	[Juntos] É.
E1:	Ninguém pode tocar no tempo. É abstrato.

Fonte: Registros da aula de 23 de maio de 2018.

Aqui, os grupos começaram a trilhar uma linha lógica que os direcionou, mais à frente, para um importante nexos conceitual da Trigonometria: Medida, relacionada à grandeza Tempo. A mobilização desses conceitos evidenciou, mais uma vez, a geração de zonas de desenvolvimento iminentes criadas pelas SDA, pelo processo de mediação estabelecido entre os participantes envolvidos e pela mediação dos instrumentos utilizados. Além disso, nesse momento o PP anotou em seu diário de campo algo que lhe chamou atenção positivamente: não havia a menor sombra de dúvidas de que os participantes estavam em atividade. Isso porque eles não estavam participando apenas para cumprimento de uma obrigação, pelo contrário, eles nitidamente queriam estar ali. Ninguém pedia para tomar água, ninguém pedia para ir ao banheiro, o que era incomum nas aulas de Matemática daquela turma. As discussões eram ininterruptas, não havia brincadeiras registradas nos gravadores de áudio, nada que tirasse o foco das investigações.

Tendo em mente essa percepção e a proximidade com a seção teórica em que as SDA estavam conduzindo aquelas discussões, o PP continuou (Quadro 9).

Quadro 9 – Transcrição do áudio com o diálogo sobre a importância de se medir o Tempo.

PP:	Mas por que alguém decidiu medir o tempo?
E2:	Pra plantar, pra criar gado...

Fonte: Registros da aula de 23 de maio de 2018.

Os grupos perceberam aqui o que foi proposto por Hogben (1970), ao afirmar que semear vegetais e criar animais que só reproduzem em determinadas épocas do ano gerou nos homens a necessidade de fazer um registro do tempo, mais específico, das estações. Segundo o autor, os homens observavam que a Lua nascia e se punha cada vez mais tarde, e perceberam um período entre duas luas cheias. Com isso, começaram a agrupar os dias em luas ou meses de trinta dias. As discussões entre os grupos continuaram e seguem no Quadro 10.

Quadro 10 – Transcrição do áudio com outro diálogo sobre a importância de se medir o Tempo.

E3:	[Decidiram medir o tempo por causa do] Convívio com as pessoas também.
E4:	E também assim, <i>eles deve que pensavam</i> ‘quando o Sol ficar no topo, eu vou fazer tal função’, por exemplo, se você não sabia a hora, então você não sabia a hora de começar, nem de parar.

Fonte: Registros da aula de 23 de maio de 2018.

Novamente, os participantes seguiam aquele caminho proposto por Hogben (1970), quando afirma que, através de tantas observações, os homens certamente determinaram situações cotidianas como horas para as refeições e trabalho. Dando continuidade, iniciou-se o que está contido no Quadro 11.

Quadro 11 – Transcrição do áudio com o diálogo sobre as estações.

PP: E as estações, primavera, verão, outono e inverno? Pra que inventaram as estações? E2: Acho que pra agricultura também. Saber quando dá pra plantar as coisas. E6: Também antigamente tinha relógio de Sol, mas o Sol que tá aqui não é o mesmo que tá na China, porque lá tá de noite. Então por isso também que tem as horas...

Fonte: Registros da aula de 23 de maio de 2018.

Como relatado, Kennedy (1992) pondera que há pelo menos quatro tábuas (egípcia, iraniana, indiana e grega) com registros tabelados indicando investigações em relação a utilização do relógio de Sol. Apresentando uma abordagem aproximada, Leach (1954) sinaliza que em aproximadamente 800 a.C. já se faziam observações trigonométricas com base nesse tipo de instrumento. Os participantes começam a perceber, portanto, aquilo que foi percebido 800 a.C., de modo natural e investigativo. O Quadro 12 mostra que eles começaram a discutir ainda mais profundamente esse tema.

Quadro 12 – Transcrição do áudio com o diálogo sobre as constelações.

E5: Professor, eu penso que tipo assim... Quando <i>eles iam fazer</i> comércio, vamos supor, <i>atravessava</i> o mundo, aí, vamos supor, eles saíam de lá de dia e chegavam lá de noite, aí tinha tipo um fuso horário que eles percebiam essas coisas. E7: É mesmo. E também eles podiam pensar que quando o Sol nascia e quando a Lua aparecia era um determinado tempo. PP: Por observação? E7: É. Na navegação também deve que eles utilizavam as estrelas.
--

Fonte: Registros da aula de 23 de maio de 2018.

Sobre o que foi citado pelo estudante E7, Hogben (1970) assevera que a luz artificial era um luxo, então em uma única viagem pelo Mediterrâneo os marinheiros se convenciam de que no verão os dias se alongavam e as noites encurtavam, e, no inverno, o inverso. Desse modo, segundo o autor, os homens observaram as constelações que nascem mais cedo a cada dia, reconhecendo, assim, as estações. Tudo isso de acordo com as primeiras constelações que se viam nascer e, também, de acordo com o número de luas transcorridas entre as estações chuvosas. As discussões continuaram (Quadro 13).

Quadro 13 – Transcrição do áudio com o diálogo sobre História e Matemática.

E8:	Eu fui uma vez numa igreja, lá em Tiradentes (MG) ⁸ , e lá tem relógio de Sol lindíssimo. Dependendo da posição do Sol, um ferro que tem nele aponta pra um horário.
E5:	A sombra dele?
E8:	É, a sombra desse ferro aponta pro horário que tá. Tem lá os numerozinhos certos, romanos, um, dois...
E9:	[Registrado em um dos gravadores (internos) neste momento, este estudante sussurrou aos demais integrantes do grupo] Parece que o [E8] tá misturando Matemática com História.
E10:	Mas você tem que estudar História pra você saber Matemática, as duas <i>vai junto</i> , uai... Não tem como você saber Matemática se não sabe a história das coisas dela.

Fonte: Registros da aula de 23 de maio de 2018.

Essa última fala (do estudante E10) marcou muito o PP. Foi imensamente satisfatório perceber que os estudantes veem Matemática desta maneira. Tudo que o autor pensou, neste momento da transcrição, foi em trazer ainda mais História para as suas aulas de Matemática. Percebeu-se a relevância desta proposta (histórica) na aprendizagem de Matemática da turma, não só deste grupo, ou, ainda, do estudante E10, mas da turma, propriamente dita.

Como citado anteriormente, entender a história de como a Trigonometria fez e faz parte da sociedade é essencial para um melhor aproveitamento do conteúdo. Por isso, é necessário que o professor tenha essa consciência ao abordá-lo.

Ampliando brevemente essa discussão, D'Ambrósio (1996) ressalta que não é necessário que o professor seja um especialista para introduzir a história da Matemática, ele simplesmente deve utilizar das informações que dispõe para compartilhá-las com os estudantes, de modo que venha fazer sentido para eles a aplicação desse conteúdo estudado, assim como objetivado neste trabalho.

As discussões continuaram (Quadro 14).

Quadro 14 – Transcrição do áudio com o diálogo sobre o relógio de Sol.

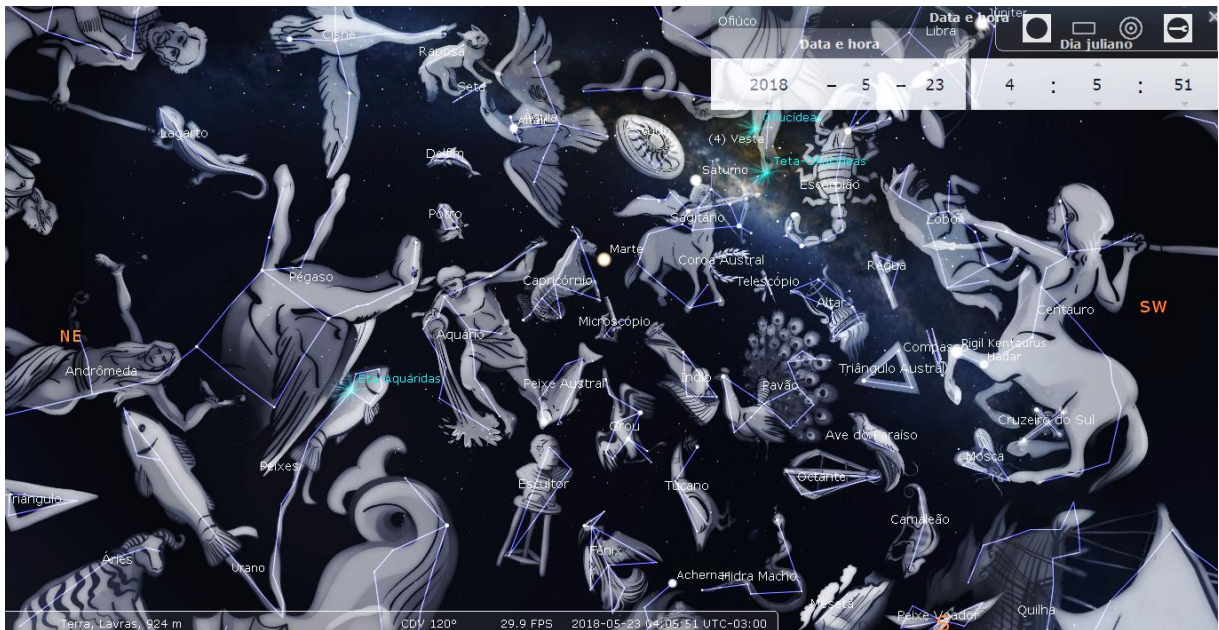
PP:	E quais possíveis deficiências esse método do relógio de Sol apresentaria?
E3:	Nuvens!
E2:	Noite, não tem Sol.

Fonte: Registros da aula de 23 de maio de 2018.

Após essas discussões, os grupos identificaram o que foi dito anteriormente, ou seja, que embora os corpos celestes tenham sido fundamentais na criação do conceito Tempo, com

⁸ Segundo Guerra (2012), datado da metade do século XVIII, o Relógio de Sol da cidade mineira de Tiradentes é um dos mais antigos do Brasil. Construído em pedra sabão, tem quarenta centímetros no seu maior diâmetro.

Figura 13 – Lavras: linhas, rótulos e figuras das constelações no *Stellarium*.



Fonte: <<https://stellarium.org/pt/>>, visualizado em 17 mai. 2019.

Toda a turma demonstrou grande interesse ao deslumbrar as figuras que iam surgindo com os cliques no *software*. A participação era visualmente satisfatória e os comentários muito interessantes. Um estudante chegou a comentar o que está descrito no Quadro 15.

Quadro 15 – Transcrição do áudio de um participante sobre as constelações.

E8: Quem será que foi o primeiro que viu que essas constelações davam essas figuras? Tipo o centauro? Bacana demais.

Fonte: Registros da aula de 23 de maio de 2018.

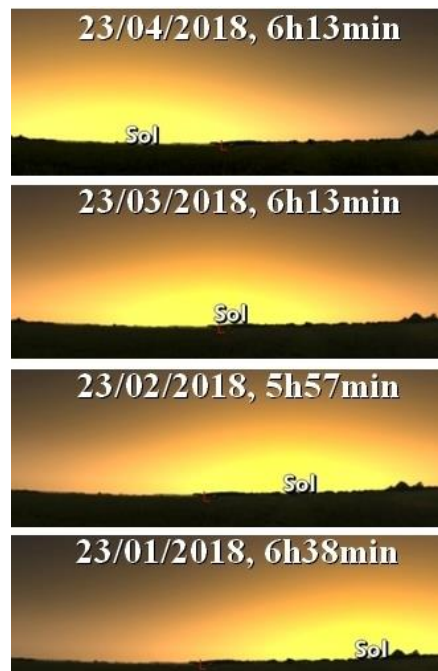
Após um tempo de exploração do *Stellarium*, o PP retomou à pergunta: “o Sol nasce todos os dias no mesmo lugar?”, para, juntos, buscarem essa resposta a partir desse instrumento.

Para isso, o PP digitou no aplicativo o dia atual, e foi alterando o tempo, mensalmente, a fim de que fosse observado o momento exato em que o Sol nasceu em Lavras naquele dia, e nos meses anteriores àquele dia, como representado na Figura 14.

Figura 14 – Posição do Sol no dia 23 dos 5 primeiros meses do ano de 2018 na cidade de Lavras pelo *Stellarium*. (Continua)



Figura 15 – Posição do Sol no dia 23 dos 5 primeiros meses do ano de 2018 na cidade de Lavras pelo *Stellarium*. (Conclusão)



Fonte: <<https://stellarium.org/pt/>>, visualizado em 17 mai. 2019.

É possível perceber na Figura 14 que o horário também era alterado, quadro a quadro, de modo que, em todas as imagens, o Sol estivesse exatamente no horizonte. Os grupos ficaram perplexos, pois não imaginavam tal fato. Tendo sido feitas essas observações, todos perceberam que o Sol “movia-se” de alguma forma em torno do ponto cardinal Leste.

O **segundo núcleo** de significação foi identificado nessas falas, ainda na cena um. Esse núcleo recebeu o título de Regularidade. Assim como núcleo anterior, esse também concorda com uma das situações sugeridas na “Tabela 2 – SDA”: “Explorar os conceitos Tempo e Movimento”.

Nessa situação, a intencionalidade conceitual almejava identificar que Tempo também é uma grandeza escalar. O núcleo se deu, por exemplo, nas falas apresentadas no Quadro 16.

Quadro 16 – Transcrição do áudio com o diálogo sobre a grandeza Tempo. (Continua)

PP:	Tem como a gente medir alguma coisa abstrata?
E1:	Não dá pra pegar, então não faz sentido medir. Tipo felicidade.
E2:	É! É?
E3:	Tipo... tem 2 cm de felicidade hoje.
E1:	Então não dá pra medir coisas abstratas.
	[...]
PP:	O que seria algo abstrato?
E3:	Tipo felicidade.
E5:	A beleza.
E6:	Mas quando relaciona a Física dá. Tipo velocidade.
PP:	E velocidade depende do quê?

Quadro 16 – Transcrição do áudio com o diálogo sobre a grandeza Tempo. (Conclusão)

E1:	De tempo?
PP:	E dá pra medir o tempo?
E2:	Claro que dá.
PP:	Mas tempo não é abstrato?
	[...]
PP:	Pra que medir o tempo? Pra que inventaram isso?
E1:	Pra saber se estava na hora de plantar. De colher...
E2:	Lojinha também... Iria vender as coisas e tinha que ter hora de ir embora.

Fonte: Registros da aula de 23 de maio de 2018.

Os estudantes concluíram, mesmo sem saber, aquilo que foi citado por Hogben (1970), ao relatar a necessidade social comum da definição de períodos de trabalho e de descanso. Entretanto, foram além, como descrito no Quadro 17.

Quadro 17 – Transcrição do áudio com o diálogo sobre o movimento do Sol.

PP:	E por que motivo dividiram o tempo em estações? Primavera...
E1:	[Interrompe] Pra saber se tem que fazer tal coisa em tal época. Tipo plantar.
E2:	Pra olhar a temperatura também, se tá muito quente é verão. É mesmo! Temperatura também é abstrato e dá pra medir!
PP:	E como mediam a Temperatura?
E1:	Tem um relógio de Sol do lado da matriz [igreja localizada na praça municipal]. É lindíssimo. Deve que eles usavam ele pra converter. Tipo... vamos converter o Sol em números.
E2:	Verdade. Mas já tendo os números era mais fácil. Tipo um, dois... [...]
PP:	E relógio de Sol era cem por cento eficaz? Quais deficiências esse método apresentaria?
E1:	Tipo à noite... não tem Sol, então não daria pra medir a hora. [...]
PP:	E será que o Sol nasce todos os dias no mesmo lugar? Porque aí também daria diferença nesse relógio de Sol se ele não nascesse no mesmo lugar, não é mesmo?
E1:	Depende do ponto de vista.
E2:	Eu acho que não... porque tipo assim... Por exemplo... Pode ser na mesma direção, mas exatamente no mesmo lugar, acho que não.
E3:	Até porque a Terra tá em constante movimento.
E4:	Acho que no mesmo lugar, não milimetricamente no mesmo lugar, mas mais ou menos no mesmo lugar. Porque a Terra segue um padrão de movimento em volta do Sol. Ela tem um eixo meio que já definido. Mas uns milímetros ele deve mexer sim, com certeza.

Fonte: Registros da aula de 23 de maio de 2018.

Devido às simulações apresentadas, e com base nessas discussões, os grupos perceberam que o Sol “movia-se” de alguma forma em torno do ponto cardeal Leste. Sem o suporte da tecnologia digital, essas observações levariam meses, o que poderia, inclusive, tornar este trabalho impróprio para uma dissertação de mestrado. Com a presença dessas tecnologias, entretanto, foi possível iniciar discussões importantes, não só como essas, mas também como a questão da área de incidência solar em um mesmo horário, porém em dias diferentes.

Além disso, foi possível discutir as subdivisões do dia e das necessidades da padronização de uma escala para medir o tempo a partir das observações dos corpos celestes. Com essas simulações e discussões, os grupos concluíram a importância do estudo de ângulos na Matemática e o quão essenciais eles são quando o assunto é movimentação de corpos celestes.

Para que ficasse ainda mais claro que o Sol não nasce todos os dias no mesmo lugar, e para que houvesse um entendimento de como se dá esse “movimento” do Sol, foi projetada uma animação “GIF” como mostrado na Figura 16. Com isso, ainda na Cena um, o PP abarcou a terceira situação descrita na Tabela 2 – SDA (Explorar o conceito Ângulo).

Figura 16 – Posição do Sol - equinócios e solstícios



Fonte: <http://gruposputnik.com/paginas_com_flash/Sun%27s%20Position%20on%20Horizon.htm>, visualizado em 01 jun. 2018.

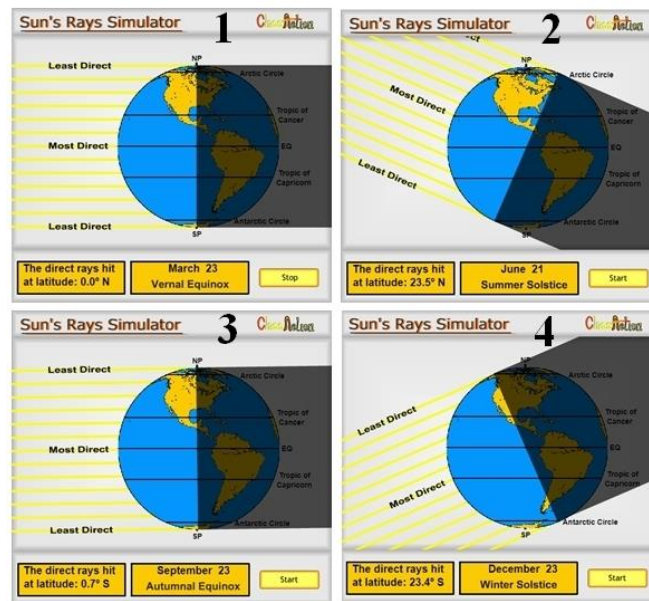
Os participantes gostaram muito dessa animação. Alguns disseram que agora fez sentido um livro comum entre eles: Percy Jackson, *The Lightning Thief*⁹, que fala de uma missão entre deuses do Olimpo, a qual acontece durante o solstício de verão. Todos continuavam extremamente focados nas situações propostas pelo PP. As animações chamavam muito a

⁹ Percy Jackson é um livro infantil escrito por Rick Riordan, publicado em 2010 pela editora Miramax Books.

atenção dos grupos e não havia absolutamente nenhum comentário que fugisse do que estava sendo visto naquele momento.

Para complemento dessa animação, na sequência uma outra (Figura 17) reproduziu o percurso do Sol. Com isso, o PP introduziu a ideia de Ângulo, a partir da explicação de zênite e azimute.

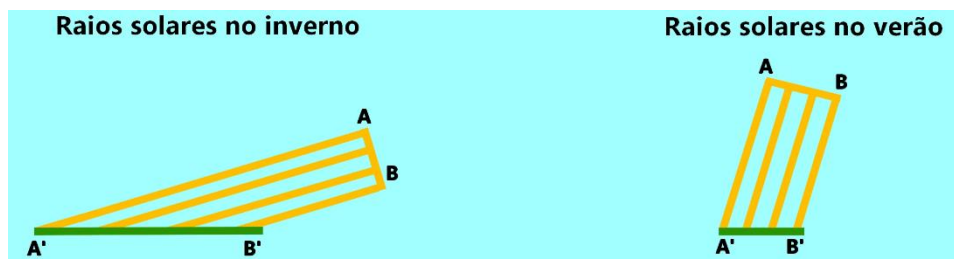
Figura 17 – Simulação dos raios solares.



Fonte: <http://gruposputnik.com/paginas_com_flash/Sun%27s%20Rays%20Simulator.htm>, visualizado em 01 jun. 2018.

Foi discutido, ainda, a questão da área de incidência solar em um mesmo horário, porém em diferentes estações do ano, como apresentado na “Figura 18”.

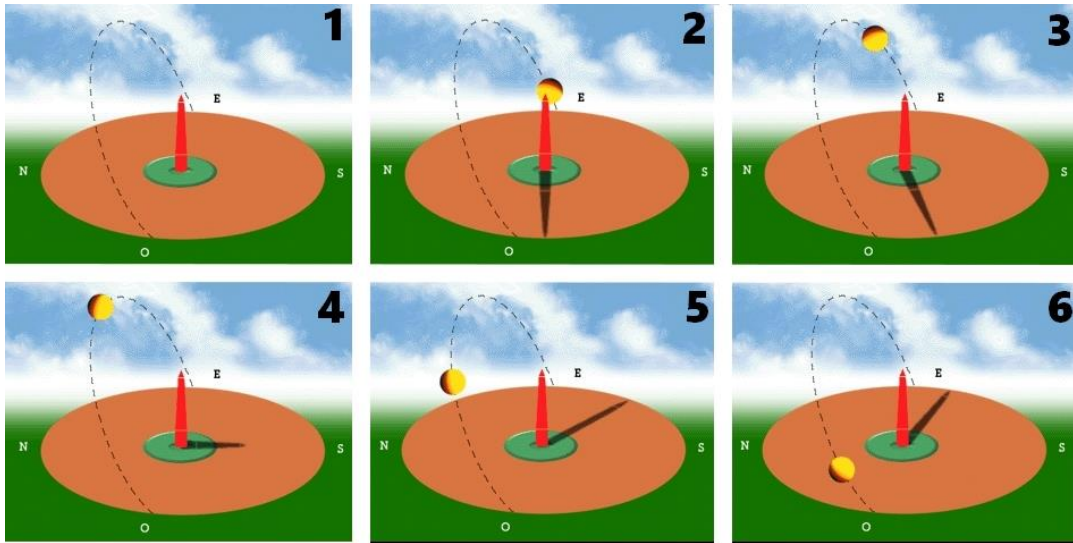
Figura 18 – Comparação da área de incidência solar.



Fonte: Produção autoral.

Após essas discussões acerca das subdivisões do dia e das necessidades da padronização de uma escala para medir o tempo a partir das observações dos corpos celestes, uma outra animação “GIF” simulou o funcionamento do instrumento gnômon, como indicado na Figura 19.

Figura 19 – Relógio de Sol reproduzido em “GIF” durante uma das SDA.



Fonte: Disponível em: <<https://es.slideshare.net/IngesAerospace/que-vemos-en-el-cielo-de-mi-barrio>>, acesso em 09 fev. 2020.

Desse modo, houve uma percepção de que a regularidade observada no movimento projetado pela sombra da vara perpendicular ao solo será sempre melhor compreendida se dividida em pequenas partes (ângulos). Para maior exploração desse conceito, ângulo, o PP utilizou um simulador *online*, Figura 20, em que o Sol é representado em amarelo.

Figura 20 – Deslocamento do Sol em Lavras (MG). (Continua)

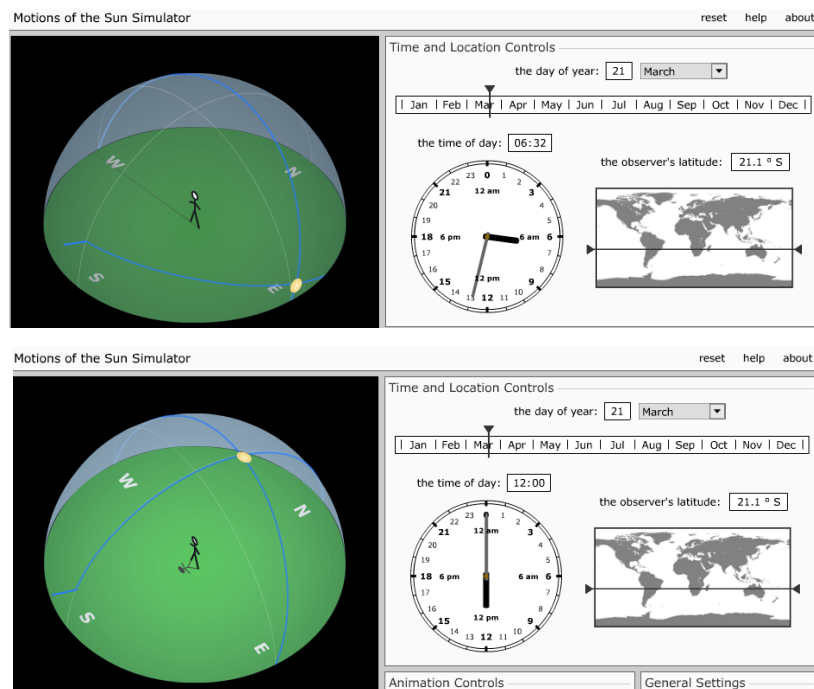
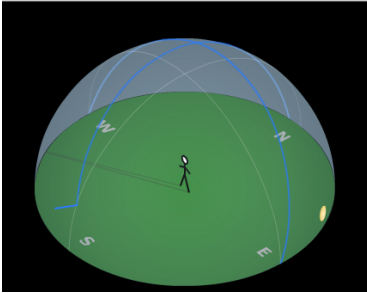


Figura 21 – Deslocamento do Sol em Lavras (MG). (Continua)

Motions of the Sun Simulator reset help about



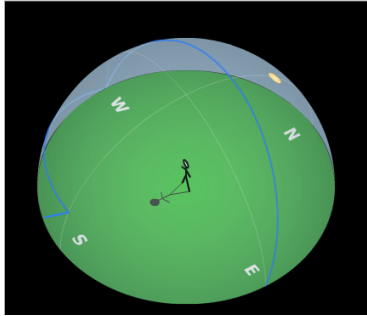
Time and Location Controls

the day of year: 21 June

the time of day: 07:10

the observer's latitude: 21.1° S

Motions of the Sun Simulator reset help about



Time and Location Controls

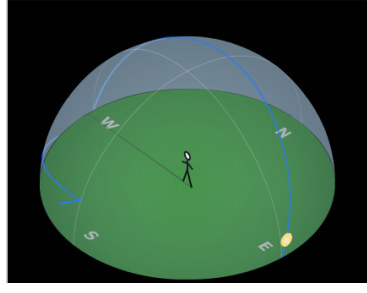
the day of year: 21 June

the time of day: 12:00

the observer's latitude: 21.1° S

Animation Controls General Settings

Motions of the Sun Simulator reset help about



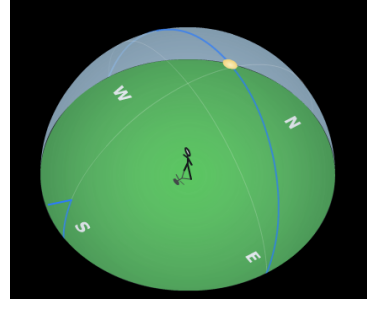
Time and Location Controls

the day of year: 22 September

the time of day: 06:24

the observer's latitude: 21.1° S

Motions of the Sun Simulator reset help about



Time and Location Controls

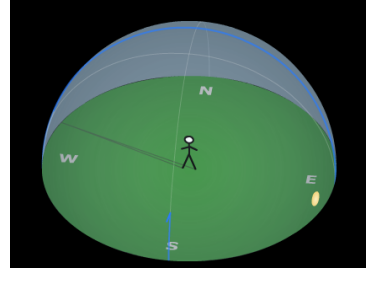
the day of year: 22 September

the time of day: 12:00

the observer's latitude: 21.1° S

Animation Controls General Settings

Motions of the Sun Simulator reset help about



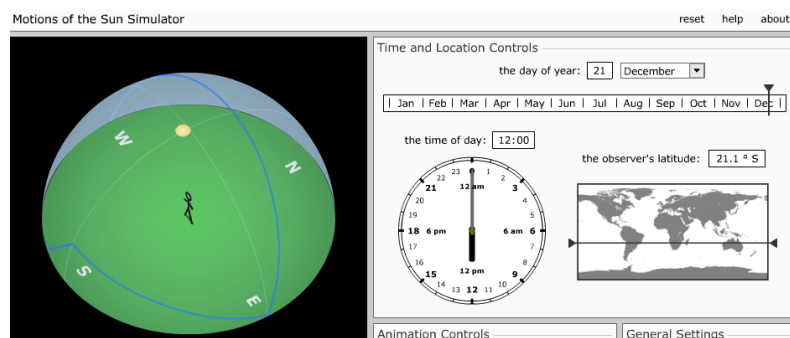
Time and Location Controls

the day of year: 21 December

the time of day: 05:57

the observer's latitude: 21.1° S

Figura 22 – Deslocamento do Sol em Lavras (MG). (Conclusão)



Fonte: <http://gruposputnik.com/paginas_com_flash/Sun%20Motions%20Demonstrator.htm>, visualizado em 01 jun. 2018.

Com essa simulação, e analisando-se a variação da sombra do observador, os grupos concluíram a importância do estudo de ângulos na Matemática e comprovaram algumas de suas aplicações práticas.

Até aqui, já estava mais que evidente um **terceiro núcleo** de significação, ainda na primeira cena, o qual descreveu a percepção angular constatada ao se utilizar o aplicativo *Stellarium* e as animações apresentadas. Esse núcleo também concordou com uma das SDA propostas na “Tabela 2 – SDA”: “Explorar o conceito Ângulo”. Nessa SDA, a intencionalidade conceitual era discutir o ângulo zenital e azimutal e entender a subdivisão do dia, de modo a identificar qual foi a necessidade da padronização de uma escala para medir o tempo a partir das observações dos corpos celestes, com o uso do instrumento gnômon. Esse núcleo de significação foi identificado, por exemplo, nos registros a seguir (Quadro 18).

Quadro 18 – Transcrição do áudio com o diálogo sobre o movimento do Sol.

- | | |
|------|---|
| E1: | Ah, cê tá brincando que isso dá um triângulo! |
| E13: | A gente descobre tudo usando os ângulos. Dentro do triângulo a soma não dá sempre cento e oitenta? |
| E8: | [Observando o desenho no quadro, “Figura 27 – Desenho do PP no quadro branco (2)”]. É só pegar o ângulo. Pega noventa (altura) e divide por três, por exemplo, e acha trinta. Aí observa num ângulo de trinta. A altura já tem noventa. Aí sempre usa o de trinta, por exemplo, aí dá a proporção dos triângulos. |
| E4: | Ahhh entendi. Verdade! |
| E5: | Não tem um instrumento que mede isso? |
| PP: | Tem sim, o teodolito, usado pelo topógrafo. |
| E11: | [Interrompe] O triângulo vai ser sempre o mesmo, só vai mudar as proporções. Dá pra achar. |

Fonte: Registros da aula de 23 de maio de 2018.

Somando-se a essas falas, nos relatos obtidos ao final das quatro aulas, um estudante comentou o que está no Quadro 19.

Quadro 19 – Transcrição do áudio de um comentário do estudante após realização das SDA.

E1: E1: Achei muito legal, gostei principalmente do *software Stellarium*, porque amo coisas relacionadas à tecnologia e à astronomia. E no final, acabou me instigando a querer saber mais sobre o assunto [Trigonometria], porque é muito legal entender pra que servem os ângulos que a gente estuda. Deu pra entender pela primeira vez pra que serve os ângulos que a gente estuda.

Fonte: Registros da aula de 23 de maio de 2018.

Relatos como esse comprovaram que os participantes perceberam qual o sentido de se estudar ângulos na disciplina Matemática. Em seu diário de campo, o PP anotou que esse conteúdo foi muito além de uma simples “memorização para provas”. Foi gratificante perceber a satisfação dos participantes em contemplarem o sentido de se aprender Ângulos. Os grupos, de fato, perceberam a relevância de se trabalhar esse conceito, tendo visto a aplicação do mesmo em assuntos cotidianos, até então, inexplorados.

O PP olhou em seu relógio de pulso e percebeu que ainda faltavam vinte minutos para encerrar a primeira cena (as duas primeiras aulas geminadas). Por essa razão, e vendo que os participantes continuavam interessados em tudo o que estava sendo discutido, optou por dar início à quarta e última situação proposta na Tabela 2 – SDA (Explorar o conceito Distância a partir do conceito de Ângulo).

Nesse momento, então, o PP retirou de sua pasta um pacote que continha uma bexiga branca tamanho grande, e os participantes olharam curiosos. O PP encheu essa bexiga ao máximo, a amarrou e a entregou aos participantes, perguntando o que eles achavam de, a partir daquele momento, aquela ser a “Lua da sala”, a qual seria estudada por eles. Eles se divertiram e se empolgaram com a ideia. Uma foto retirada pelo PP, Figura 23, registrou um pouco daquele momento de descontração.

Figura 23 – Lua da sala de aula.



Fonte: Produção autoral.

Ainda havia quinze minutos para o término daquele horário, isto é, para encerramento da cena. O PP pediu, então, que alguns representantes dos grupos fossem à frente para estipularem algumas medidas em relação à nova Lua. Para isso, ele pediu que um estudante ficasse do lado de fora da sala, em frente à porta, e segurasse a bexiga. Além disso, pediu que alguém segurasse, do lado de dentro da sala de aula, duas canetas com uma distância de dois centímetros compreendidos entre elas e que, também dentro da sala, outro estudante aproximasse dos olhos uma folha de papel com um pequeno furo, de modo a enxergar a Lua (fora da sala) desse pequeno furo e compreendida exatamente entre as duas canetas, conforme indicado nas Figuras 21 e 22 a seguir.

Figura 24 – Medindo a Lua da Sala (01)



Fonte: Produção autoral.

Figura 25 – Medindo a Lua da sala (02).



Fonte: Produção autoral.

As medidas foram registradas, mas, por ter havido troca de horários imediatamente após esse registro, a aula foi interrompida e retomada no dia seguinte. Desse modo, a cena um se encerrou.

5.1.2 Cena 2: Medir, sem medir

No dia seguinte àquela primeira cena, o PP perguntou à turma como eles achavam que mediram pela primeira vez na história o tamanho da Lua da Terra. As respostas seguem no Quadro 20.

Quadro 20 – Transcrição do áudio com o diálogo a respeito da distância da Terra à Lua.

E1:	Eu acho que chutaram, que pegaram alguma coisa aqui [na Terra] e falaram ‘ah, é mais ou menos isso’.
E2:	É... tipo pegaram um prédio grande... e aí... compara? O tamanho?
PP:	Será que havia prédios na época?
E2:	Pirâmide?
E3:	Não... eu acho que foi alguma coisa similar ao que a gente tentou fazer ontem [medir a Lua da sala].
E1:	É verdade, eu e o [E4] a gente achou que quanto mais longe das duas canetas a gente fosse a gente iria enxergar melhor [a Lua].
E4:	[Interrompe] Só que não! Quanto mais perto das canetas, a gente conseguia enxergar melhor.
E2:	Faz sentido, porque assim ó...
E4:	[Interrompe] Porque se fosse mais longe, dava pra enxergar todo mundo que tava lá atrás, e não só a Lua. Aí quanto mais perto das canetas dava pra enxergar só a Lua.
PP:	Ótimo! Bacana! O que você iria falar [ao E2]?
E2:	Que faz sentido, porque vamos supor, quando você coloca um dedo assim ó [aproximou um dedo na posição horizontal dos olhos] você enxerga só o seu dedo, e se você chega mais longe [afastou o dedo do rosto] enxerga mais coisas.
PP:	Verdade! E se eles queriam ver distâncias inacessíveis, então seria melhor se eles pudessem fazer isso com algum objeto próximo dos olhos, né?
E4:	Verdade.

Fonte: Registros da aula de 24 de maio de 2018.

Os participantes perceberam que é possível medir, sem ir até lá (o que eles chamaram de “medir, sem medir”). Após esse momento de discussões, o PP retomou o raciocínio com um resumo do que aconteceu no dia anterior (Quadro 21).

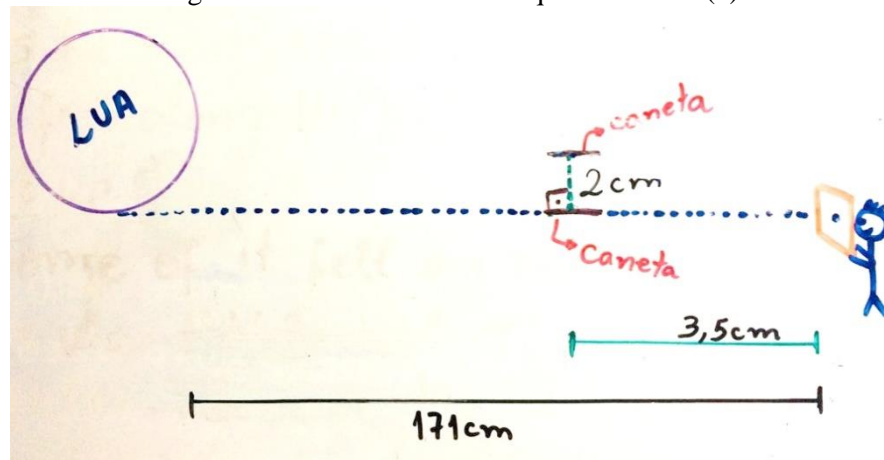
Quadro 21 – Transcrição do áudio com o diálogo a respeito da Cena 1.

PP:	Sobre a Lua da nossa sala, o que rolou ontem foi que nós encontramos a distância do [E4] até as canetas, três centímetros e meio. Sabíamos também que tinha uma distância de dois centímetros entre as canetas. Então vou desenhar aqui [no quadro branco, “Figura 26 – Desenho do PP no quadro branco (1)”] o [E4], as canetas e a folha que o [E4] segurava. Lembrando que medimos que a distância da folha [que o E4 segurava] até a Lua era de um metro e setenta e um centímetros, certo?
-----	--

Fonte: Registros da aula de 24 de maio de 2018.

Em seguida, o PP elaborou o seguinte desenho no quadro branco (Figura 23).

Figura 26 – Desenho do PP no quadro branco (1).



Fonte: Produção autoral.

Após esboçar esse desenho (Figura 23), o PP continuou as discussões:

Quadro 22 – Transcrição do áudio com o diálogo a respeito da provável Regra de Três. (Continua)

- PP: Gente, agora o que queremos é o tamanho da Lua da nossa sala. Alguém tem alguma ideia?
- E1: Dá pra gente usar a distância entre as canetas lá, os 2cm, pra fazer o raio?
- E5: [Interrompe] Regra de três, não dá não?
- E6: Eu acho que dá, porque por exemplo... Não...
- E7: Eu não consigo pensar em nada!
- E8: Nem eu!
- E5: Regra de três dá, gente!
- E1: É. Na época com certeza já tinha regra de três... [Pensou um pouco.] Tinha regra de três naquela época?
- PP: Tratam-se de proporções, certo? A regra de três é quando você tem três números e não tem um quarto.
- E7: Nooossa, faz sentido!
- E1: Então, se a gente definir um ponto central pra Lua, e... Como que fala? Usar esses dois centímetros, será que daria pra achar o raio?
- PP: Possivelmente.
- E4: Tipo assim, se a distância entre as canetas era... dois?
- PP: Dois.
- E4: Aí quer dizer que a Lua, olhando de longe ela tinha esses dois centímetros [ficou em silêncio, pensando].
- PP: E...?
- E1: Eu e o [E4] eu acho que a gente só não sabe concluir o raciocínio.
- E4: É! Se a distância entre uma caneta e a outra era dois e a gente conseguia ver a Lua inteira...
- E1: [Interrompe] Então o raio vai ser um!! [Provavelmente, o relacionou ao diâmetro.]
- E4: Então o tamanho dela [da Lua] tem que ser alguma coisa com esse dois aí.
- E1: É.
- E7: Talvez a distância da Lua até a folha tem a ver também.
- E1: Calma aí, gente! E como a gente passaria isso pra escala real? Esse tamanho dois centímetros, por exemplo?
- PP: Mas não está em escala real?

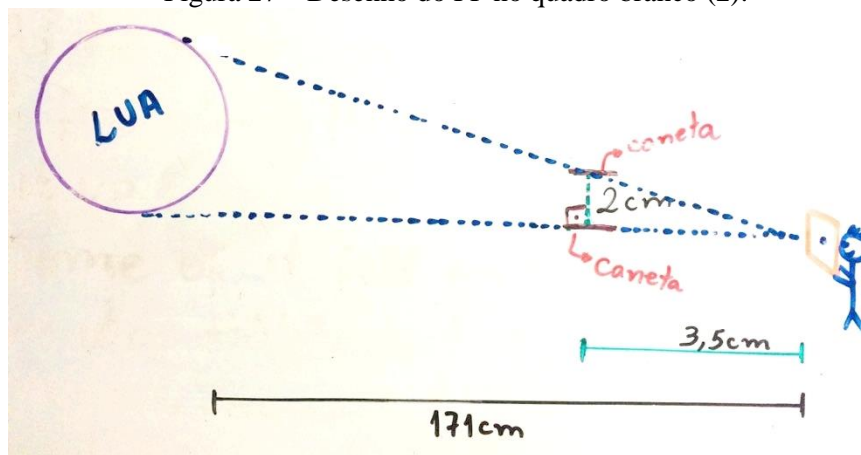
Quadro 22 – Transcrição do áudio com o diálogo a respeito da provável Regra de Três. (Conclusão)

E4: Tá, uai! É dois.
 E1: Ah, então eu não tenho IDEIA do que fazer.
 [Risos]
 E8: [Ao fundo da sala] Regra de três?
 E2: MAS QUE regra de três que vocês tão vendo?
 E4: Professor, e se fizer assim ó: cento e setenta e um menos três vírgula cinco, vai sobrar...

Fonte: Registros da aula de 24 de maio de 2018.

Nesse momento, houve um silêncio. Então o professor completou o desenho no quadro, traçando um segmento de reta que partia da folha que o observador segurava até a Lua, como mostra a Figura 24.

Figura 27 – Desenho do PP no quadro branco (2).



Fonte: Produção autoral.

Enquanto o PP acabava a construção desse último segmento, os participantes se manifestaram, como está descrito no Quadro 23.

Quadro 23 – Transcrição do áudio com o diálogo sobre os cálculos finais. (Continua)

E2: Ahh...
 E1: Ah, cê tá brincando que isso dá um triângulo!
 E5: Lembrei desse negócio aí!
 E4: Então! Dá pra montar uma proporção!
 PP: Dá? Quem concorda?
 E2: Eu concordo. É só fazer cento e setenta e um pra três vírgula cinco.
 E4: É igual a dois pra x.
 PP: Dois pra x?
 E8: Não, professor! Assim não vai dar.
 E2: [Interrompe] x pra 2.
 PP: Isso!
 E8: Não! Três vírgula cinco, pra dois.
 PP: E do lado de cá?
 E8: E... Cento e setenta e um pra x.
 PP: Ok.
 E5: Mesma coisa. Regra de três.
 Estudantes: [Juntos] Sim, mesma coisa.

Quadro 23 – Transcrição do áudio com o diálogo sobre os cálculos finais. (Conclusão)

E8:	Aeee!
PP:	Duas vezes cento e setenta e um?
E9:	[Rapidamente] Trezentos e quarenta e dois.
E4:	Nooossaa.
PP:	Dividido por três e meio?
E10:	Peraí, rapidão, professor.

Fonte: Registros da aula de 24 de maio de 2018.

O estudante E10 começou a elaborar esse cálculo em seu caderno. No entanto, o estudante E4 já o tinha feito em sua calculadora¹⁰ (Quadro 24).

Quadro 24 – Transcrição do áudio com o diálogo sobre os resultados calculados.

E4:	Dá noventa e sete vírgula sete, um, quatro, dois, oito, cinco, sete...
E6:	Tá bom, né [E4]!
PP:	Noventa e sete centímetros, aproximadamente. Então será que essa nossa Lua tem noventa e sete centímetros de diâmetro?
E8:	Só medir pra descobrir.
E4:	Não... parece que não.
E2:	Deixa eu te ajudar a medir, professor?
PP:	Pode, vem cá.
E2:	Deu quarenta e cinco centímetros de diâmetro, aproximadamente.
E1:	Ixe... [Pensativo]. Professor, então eles nunca sabiam o tamanho real? Eles só faziam, vamos supor... Alguma coisa aproximada?
PP:	Mas será que algo aproximado para a época já não era bom?
E4:	Não tinha uma coisa... exata. Tipo assim, não tinha um valor exato. Era aproximado.
PP:	Até então eles não tinham os instrumentos precisos, né... algo que chegasse até a Lua... Então, inicialmente, o que se faziam eram observações, como a que fizemos aqui agora.
E4:	Faz sentido...
PP:	Mas gente, não tá tão ruim, né? Imaginem, olhando da “Terra” (nossa sala) para o céu (Lua fora da sala) chegamos em um valor até razoavelmente bom, vocês não acham?
E1:	Então não importa a distância da Lua ou de onde eu esteja medindo, só importa como a gente faz pra chegar até ela? No nosso caso, duas canetas?
PP:	Isso daria pra medir tanto em Alexandria, como no Brasil...?
E1:	Nossa, é verdade! Sim! Que legal!

Fonte: Registros da aula de 24 de maio de 2018.

Por mais interessante que estivesse esta segunda cena, infelizmente, o sinal soou, e a aula precisou ser interrompida. Encerrava-se, assim, a terceira de quatro aulas e, conseqüentemente, a segunda das três cenas. A terceira e última cena se deu no dia seguinte, com uma grande descoberta pela turma.

¹⁰ Os estudantes utilizam suas calculadoras para algumas aulas específicas de Física no colégio.

5.1.3 Cena 3: Eureka!

O PP entrou na sala de aula e os participantes já foram logo se posicionando em grupos e indo até o PP para pegarem seus gravadores de áudio. Eles não queriam perder tempo nenhum, pois estavam prestes a descobrir, finalmente, como seria possível medir com precisão o tamanho da Lua da Sala. É interessante que a Lua continuava na sala de aula, os participantes coloriram a bexiga com canetas hidrográficas e a deixaram fixada na parede, junto ao quadro branco. Eles estavam realmente interessados naquelas situações e tratava-se de uma aula que fazia total sentido para eles, como será discutido a seguir, no quarto e último núcleo de significação identificado.

Retomando às discussões da última aula, segue o Quadro 25.

Quadro 25 – Transcrição do áudio com o diálogo na Cena 3 que retoma à Cena 2.

PP:	Na aula passada, nós fizemos uma estimativa do tamanho da Lua da nossa sala.
E11:	[Interrompe] Noventa e sete!
PP:	Isso!
E1:	Uma estimativa errada.
PP:	Mas pra época, já era alguma coisa.
E1:	Com certeza.
E5:	Mas, professor... tenho uma pergunta... A gente ontem mediu com aquela fita métrica, né?
E2:	Trena!
E5:	É. Então, mas teria como medir sem ir até lá? Porque não dá pra ir até lá.
PP:	Excelente pergunta. O que vocês acham?
E5:	No primeiro dia, no <i>Stellarium</i> , a gente não falou de azimute?
PP:	Excelente! Talvez usar o ângulo?
	[Juntos] Sim!

Fonte: Registros da aula de 25 de maio de 2018.

Os participantes trilharam tudo aquilo que foi descrito na seção teórica. Eles seguiram os passos, historicamente, e concluíram o mesmo que estudiosos daquela época, embora não soubessem disso.

Para encerrar aquela quarta e última aula, o PP fez a seguinte proposta (Quadro 26):

Quadro 26 – Transcrição do áudio com o diálogo sobre Proporções. (Continua)

PP:	Vamos pensar em algo mais próximo da gente. Como a gente poderia medir a altura de uma serra aqui no Brasil, sem subir até o topo dela?
E5:	Daria pra usar a sombra do Sol, que nem a gente viu na simulação [“Figura 11 – Deslocamento do Sol em Lavras (MG)”].
E11:	Só medir no mesmo horário, que vai ter uma sombra com proporção. Mede um graveto, por exemplo. Faz proporção.
E12:	Eu entendi. Tem que ser no mesmo horário, porque se o Sol muda de posição, muda o tamanho da sombra, que nem a gente viu [no <i>Stellarium</i>]. Aí podia mudar o tamanho real da serra.

Quadro 26 – Transcrição do áudio com o diálogo sobre Proporções. (Conclusão)

PP:	Então vamos supor que a gente tenha a medida do graveto, da sombra do graveto e da sombra da serra. A gente consegue medir a sombra da serra facilmente? [Juntos] Sim.
E13:	Aí calcula regra de três!
PP:	E se a gente não tivesse todas essas medidas, mas tivesse, por exemplo, a medida do ângulo compreendido entre o solo e o observador?
E2:	Claro! Com certeza!
E8:	Mas como é que a gente vai fazer regra de três com dois números? [Silêncio.]
PP:	E se agora eu não tenho mais o graveto?
E13:	Mas a gente descobre tudo, usando os ângulos. Dentro do triângulo a soma não dá sempre cento e oitenta?
E2:	Verdaadeeee. Porque na base sempre vai ter noventa graus, a altura.
PP:	Excelente! Vocês estão chegando exatamente no ponto que os caras chegaram na época, pois vocês não sabem o conteúdo [Trigonometria] que nos fornece esse tipo de resultado, assim com eles também não sabiam.
E5:	Descobrimos!!!
E8:	É só pegar o ângulo. Pega noventa (altura) e divide por três, por exemplo, e acha trinta. Aí observa num ângulo de trinta. A altura já tem noventa. Aí sempre usa o de trinta, por exemplo, aí dá a proporção dos triângulos.
E4:	Ahhh entendi. Verdade!
E5:	Não tem um instrumento que mede isso?
PP:	Tem sim, o teodolito, usado pelo topógrafo.
E11:	[Interrompe] O triângulo vai ser sempre o mesmo, só vai mudar as proporções. Dá pra achar.

Fonte: Registros da aula de 25 de maio de 2018.

Desse modo, conforme as considerações elaboradas na seção teórica, essas SDA proporcionaram um pensamento que foi evoluindo na medida em que o estudante avançava. Sempre abarcando, como visto, os conceitos com a questão histórica que os fez serem desenvolvidos.

Em todos os momentos, o uso da tecnologia foi essencial, pois, sem ela, seria muito mais cômodo passar direto para o prático, deixando de lado o histórico. Isso porque, sem o *Stellarium* e os demais simuladores, as discussões acerca do movimento do Sol poderiam durar meses, senão anos, uma vez que seria necessária uma estendida e periódica observação do nascer do Sol na cidade de Lavras. Isto é, os elementos de mediação tiveram um papel fundamental nesta pesquisa.

Os participantes realmente entraram em atividade durante as SDA. Eles estavam engajados, e não demonstraram de forma alguma apenas um cumprimento de obrigações. Ou seja, as SDA suscitaram as atividades nos participantes, propiciando, assim, a aprendizagem descrita na seção teórica.

Desse modo, o **quarto e último núcleo** de significação encontrado em todos os grupos, ao longo das três cenas, descreveu a satisfação dos participantes em trilharem o percurso que

os levou à descoberta da Trigonometria, e não somente à apresentação “congelada” desse conteúdo, pronta e acabada. Isso fez com que houvesse concordância com o que foi sugerido no início deste trabalho, quando os documentos oficiais BRASIL (2006, p. 74) e BRASIL (1997, p. 23) salientaram tal importância. Além disso, pôde-se criar uma situação na qual o “modelo bancário” (FREIRE, 1987) citado anteriormente foi contornado, isso porque as SDA fizeram sentido e tiveram, de fato, um significado para os participantes. Tal núcleo pôde-se confirmar nas falas contidas no Quadro 27, registradas ao final do desenvolvimento das SDA.

Quadro 27 – Transcrição do áudio com o diálogo que ocorreu após a realização das SDA.

- | | |
|-----|--|
| E1: | Eu achei <i>ótimo essas aulas</i> pelo fato de apresentar a importância da Trigonometria, nos mostrando toda sua história e onde podemos aplicar essa história. Assim, de modo geral, você, PP, deu um sentido para <i>nós estudarmos</i> a Trigonometria. |
| E2: | Foi incrível descobrir como a Matemática que conhecemos hoje foi criada, ou pelo menos parte dela. |
| E3: | Achei maravilhoso. Eu nunca tinha entendido pra que eu ia usar isso [Trigonometria], ou o porquê de terem criado, e com a experiência fez muito sentido. Além disso, a aula foi super dinâmica, e não chata como a maioria das aulas de exatas. |
| E8: | Achei muito legal, gostei principalmente do <i>software Stellarium</i> , porque amo coisas relacionadas à tecnologia e à astronomia. E no final, acabou me instigando a querer saber mais sobre o assunto, Trigonometria, porque é muito legal entender pra que servem os ângulos. Deu pra entender, pela primeira vez, pra que serve os ângulos que a gente estuda. |

Fonte: Registros da aula de 25 de maio de 2018.

Como mencionado, os quatro núcleos de significação surgiram após a organização cuidadosa das transcrições dos áudios. Entretanto, algumas falas (conjunto de indicadores) que compõe cada um desses núcleos não foram citadas neste documento, visto que o autor optou por registrar somente aquelas que descrevessem de forma mais clara ao leitor a proposta dos núcleos.

Além disso, todas as transcrições foram analisadas pautando-se em Vigotski e, tendo-se, portanto, a noção de que a fala revela o sujeito e que ele é um todo, e que a fala dele como um todo tem que ser compreendida. Desse modo, como previsto, não foi possível seguir simplesmente a ordem cronológica dos áudios. Isto é, percebeu-se que os participantes têm contradições no discurso, mas contradições que eles demonstram ser de cunhos sociais. Um mesmo estudante dizia: “não, não é possível medir algo abstrato” e, pouco depois, “com certeza

é possível medir algo abstrato”. Ou seja, só foi possível entender a fala de um participante ao buscar o processo constitutivo das significações.

Para isso, foram agrupadas as falas de acordo com a recorrência, ou pela igualdade ou diferença, ou pelo inusitado, pela surpresa *etc.*. O conjunto desses indicadores, neste movimento dialético, foi distanciando ou associando e, por fim, compondo cada um dos quatro núcleos de significação apresentados.

6 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Tendo em vista o objetivo da pesquisa de identificar, ao longo das Situações Desencadeadoras de Aprendizagem (SDA), os sentidos e significados atribuídos à Trigonometria, foi possível analisar o desenvolvimento do pensamento e, em uma perspectiva lógico-histórica, desenvolver SDA com mediação por tecnologias digitais, de modo a identificar quais as possíveis elaborações conceituais os estudantes produziram ao desenvolvê-las.

Com isso, percebeu-se que os participantes não só entraram em atividade, mas foram além. Isso porque eles partiram de um pensamento empírico em que não havia, necessariamente, a pretensão de se chegar no teórico, até porque não existia tempo suficiente para isso. No entanto, foi exatamente o que aconteceu. Por exemplo, os participantes perceberam que Ângulos não se tratavam de um conteúdo para se memorizar, simplesmente, e esperar que fosse contemplado nas provas. Pelo contrário, entenderam a importância desse conceito e o quão significativo ele é para que se consiga medir distâncias inacessíveis. Ou seja, as SDA proporcionaram uma produção de sentidos e significados para os conteúdos estudados, uma vez que os participantes perceberam os conceitos que foram mobilizados pelo PP (Professor/ Pesquisador).

O mesmo se repetiu em relação ao conteúdo Tempo, visto que os participantes trabalhavam no empírico, mas, ao perceberem que o conceito tratava-se de uma grandeza, passaram a construir o pensamento teórico. Um outro exemplo, foi quando eles descobriram que nos triângulos semelhantes há regularidades que possibilitam a criação de relações (inclusive, tabelas) que permitem medir distâncias inacessíveis.

Um outro fato que também chamou a atenção, foi que embora a Trigonometria tenha tido um papel importante neste trabalho, percebeu-se que o destaque se deu na Tecnologia Digital. Isso porque, ao observar cada SDA e as SDA como um todo, foi notório que o uso dos recursos digitais foi indispensável. Isto é, o trabalho existiria sem o conteúdo Trigonometria, mas poderia ser improdutivo sem as mídias e recursos digitais utilizados, os quais foram valiosos.

Desse modo, foi possível, em uma perspectiva lógico-histórica, desenvolver SDA com mediação por tecnologias digitais, de modo a identificar quais as possíveis elaborações conceituais os estudantes produziram ao desenvolvê-las. Com isso, os participantes encontraram os sentidos e significados que o autor deste trabalho não havia conseguido ao longo de sua formação nos ensinos fundamental e médio.

Quebrando o estilo gramatical trazido durante todo o texto em terceira pessoa do singular, deixo aqui as minhas sinceras conclusões acerca deste trabalho. Enquanto professor, ficou evidente a relevância de trazer para a sala de aula muito mais do que aquilo proposto nos sistemas apostilados. Os participantes deixaram claro nesta pesquisa o quão significativo é entender o conteúdo, trabalhando-se uma perspectiva lógico-histórica. Por isso, quero sempre abordar os conteúdos nessa perspectiva.

Enquanto pesquisador, passei a entender melhor que os estudantes nem sempre que estão conversando uns com os outros e, portanto, “atrapalhando” a aula de um professor, eles estão de fato “atrapalhando”. Eles sentem falta de fazer esses comentários: “vi um relógio lindíssimo em Tiradentes”, e, muitas vezes, os professores, por coibirem essas falas, acabam privando o desenvolvimento de seus pensamentos. Sendo assim, percebi que é extremamente importante que o professor entenda que ele não deve ser o dono das falas. Afinal de contas, o aprender vem de dentro pra fora, e não de fora pra dentro (modelo bancário).

Espero que as SDA desenvolvidas neste trabalho possam estimular nos colegas de profissão um interesse em desenvolver situações similares em todos os outros conceitos estudados em sala de aula. Afinal de contas, se esses conceitos estão presentes no material didático disponibilizado, ou, mais que isso, se eles existem, então em algum momento da história eles foram desenvolvidos por alguma necessidade lógica e, certamente, social. Concluo, afirmando que é fundamental que os estudantes entendam os sentidos e significados para que o pensamento empírico tenha a ascensão para o teórico, como mencionado ao longo do texto.

Minha expectativa, portanto, é dar continuidade a este trabalho, desenvolvendo novas SDA que possam auxiliar colegas de profissão em suas práticas em sala de aula.

REFERÊNCIAS

AGUIAR, Wanda Maria Junqueira; OZELLA, Sergio. **Núcleos de significação como instrumento para a apreensão da constituição dos sentidos**. *Psicol Cienc Prof* [online], Brasília, 26(2):222-45, jun. 2006. Disponível em: <http://pepsic.bvs-psi.org.br/sci_arttext&pid=S1414-98932006000200006&lng=pt&nrm=iso>.

Arterburn, Stephen. **Bíblia de estudo: desafios de todo homem** / editor executivo Stephen Arterburn; editor geral Dean Merrill; traduzido por Emerson Justino. São Paulo: Mundo Cristão, 2012.

BLOGUEIRO, Antônio. **O segredo do papiro de Rhind**. Disponível em: <<http://matematica-na-veia.blogspot.com.br/2011/06/o-segredo-do-papiro-de-rhind.html>>, publicado em 2011, acesso em: 23 abr. 2018.

BORBA, Marcelo de Carvalho. **Fases das tecnologias digitais em Educação Matemática: sala de aula e a internet em movimento**/ Marcelo de Carvalho Borba, Ricardo Scucuglia R. da Silva, George Gadanidis. – 1. Ed. – Belo Horizonte: Autêntica Editora, 2014. –(Coleção Tendências em Educação Matemática).

BRASIL. **Base Nacional Comum Curricular** (BNCC). Educação é a Base. Brasília, MEC/CONSED/UNDIME, 2017, p. 271. Disponível em: <<http://basenacionalcomum.mec.gov.br/wp-content/uploads/2018/02/bncc-20dez-site.pdf>>. Acesso em: 25 fev. 2019.

_____. Ministério da Educação. **Orientações Curriculares para o Ensino Médio: ciências da natureza, matemática e suas tecnologias**, p. 74. Brasília: MEC/SEB, 2006.

_____. Secretaria de Educação Fundamental. **Parâmetros curriculares nacionais: Matemática** / Secretaria de Educação Fundamental. Brasília: MEC/SEF, 1998.

_____. Secretaria de Educação Fundamental. **Parâmetros curriculares nacionais: matemática** / Secretaria de Educação Fundamental, p. 23. – Brasília : MEC/SEF, 1997.

Costa, José Roberto V. **Hiparco e a distância da Lua**. *Astronomia no Zênite*, jul. 2000. Disponível em: <<http://www.zenite.nu/hiparco-e-a-distancia-da-lua>>. Acesso em: 15 fev. 2019.

CRESTANI, Sandra. **Organização do ensino de matemática na perspectiva do desenvolvimento do pensamento teórico: uma reflexão a partir do conceito de divisão**. Orientadora: Josélia Euzébio da Rosa. Dissertação (mestrado)–Universidade do Sul de Santa Catarina, Tubarão, 2016.

CUNHA, Micheline Rizcallah Kanaan da. **Estudo das elaborações dos professores sobre o conceito de medida em atividades de ensino**. Micheline Rizcallah Kanaan da Cunha, UNICAMP, Campinas, SP. 2008.

D'AMBROSIO, U. **História da Matemática e Educação**. In: Cadernos CEDES 40. História e Educação Matemática. 1a ed. Campinas, SP: Papirus, 1996, p.7-17.

DAVÍDOV, Vasili. **Análisis de los principios didácticos de la escuela tradicional y posibles principios de enseñanza en el futuro próximo**. In: SHUARE, M. (Org.). La Psicología evolutiva y pedagógica em la URSS: antologia. Moscou: Progeso, 1987. p. 143-142

DAVYDOV, Vasili. V. **La enseñanza escolar y el desarrollo psíquico**. Moscou: Progreso, 1988.

DIONIZIO, Fátima Queiroz; BRANDT, Célia Finck. **Análise das dificuldades apresentandas pelos alunos do Ensino Médio em Trigonometria**. X Congresso Nacional de Educação - EDUCERE. I Seminário Internacional de Representações Sociais, Subjetividade e Educação - SIRSSE. Pontifícia Universidade Católica do Paraná, Curitiba, 7 a 10 de novembro de 2011.

FACCI, M. G. D. **Valorização ou esvaziamento do trabalho do professor: um estudo crítico-comparativo da teoria do professor reflexivo, do construtivismo e da psicologia vigotskiana**. Campinas, SP: Autores Associados, 2004.

FELDMANN, M. G. **Formação de Professores e escola na contemporaneidade**. São Paulo: SENAC São Paulo, 2000.

FREIRE, Paulo. **Pedagogia do Oprimido**. 11ª ed. Rio de Janeiro: Paz e Terra, 1987.

GARBI, Gilberto Geraldo. **A rainha das ciências: um passeio histórico pelo maravilhoso mundo da Matemática**. 3 ed. revista e ampliada. São Paulo, SP. Editora Livraria da Física, 2009.

GIARDINETTO, José Roberto Boettger. **Matemática escolar e matemática da vida cotidiana**. Campinas, SP: Autores Associados, 1999. (Coleção polêmicas do nosso tempo, v. 65)

GUERRA, Pedro Paulo. **Relógios de Sol no Brasil**. Disponível em: <<http://relogiosdesolnobrasil.blogspot.com/>>, publicação em 11 nov. 2012. Acesso em 03 jun. 2018.

HEGEL, Georg Wilhelm Friedrich. **Werke**. Auf der Grundlage der Werke von 1832 – 1845 neu edierte Ausgabe. Frankfurt am Main: Suhrkamp, 1986.

HOGBEN, Lancelot. **Maravilhas da Matemática: Influência e Função da Matemática nos Conhecimentos Humanos**. 2ª edição. Porto Alegre: Editora Globo, 1970. v.1, 762 p.

JUNQUEIRA, Rafael Fernandes. **Quando inventaram o relógio, como sabiam que horas eram?** Mundo estranho. Por Fernando Badô. Disponível em: <<https://mundoestranho.abril.com.br/geografia/quando-inventaram-o-relogio-como-sabiam-que-horas-eram/>>. Publicado em 18 abr. 2011. Acesso em 26 set. 2017.

KENNEDY, Edward S. **Trigonometria: tópicos de história da Matemática para uso em sala de aula**. Trad. Hygino H. Domingues. São Paulo: Atual, 1992; v. 5.

KOPNIN, P. V. **A dialética como lógica e teoria do conhecimento**. Trad. por Paulo Bezerra. Ed. Civilização Brasileira S.A., coleção Perspectivas do Homem, vol. 123, 1978.

KOSIK, K. **Dialética do concreto**. 2. ed. Rio de Janeiro: Paz e Terra, 1976.

LANNER DE MOURA, A.R.. **Movimento Conceitual em sala de aula**. In: Anais da XI Conferência Interamericana de Educação Matemática. CIAEM, Blumenau/SC, 13-17 de julho de 2003.

LEACH, Edmund Ronald. **Primitive time reckoning**, in Singer *et al.* A history of technology (Vol. 1), 110-27. Oxford: Clarendon Press, 1954.

LEITE, S. A. S. **Afetividade e Práticas Pedagógicas**. São Paulo: Casa do Psicólogo, 2006.

LEONTIEV, Alexei N. **Uma contribuição à teoria do desenvolvimento da psique infantil**. Em L. S. Vigotskii, A. R. Luria & A. N. Leontiev. Linguagem, desenvolvimento e aprendizagem (9ª ed.). São Paulo: Ícone, 2001.

LÉVY, Pierre. **CIBERCULTURA**. São Paulo: Editora 34 Ltda., 1999.

LIMA, T. C. S. de; MIOTO, R. C. T.; PRÁ, K. R. D. **A documentação no cotidiano da intervenção dos assistentes sociais: algumas considerações acerca do diário de campo**. Textos & Contextos (Porto Alegre), vol. 6, p. 93-104, 2007.

MARTINS, Juliana. **O livro que divulgou o papiro Rhind no Brasil: algumas considerações**. GD5º – História da Matemática e Cultura. 2015. Disponível em: <http://www.ufjf.br/ebapem2015/files/2015/10/GD5_Juliana_martins.pdf>, acesso em: 25 set. 2017.

_____. **OS “PROBLEMAS DIVERSÃO” DO PAPIRO MATEMÁTICO RHIND: UMA ANÁLISE DO TEXTO DE ROBINS & SHUTE**. VII CIBEM, Montevideo, Uruguay. Publicação em 20 set. 2013. Disponível em: <<http://www.cibem7.semur.edu.uy/7/actas/pdfs/698.pdf>>, acesso em: 23 abr. 2018.

MARX, Karl. Divisão do trabalho e manufatura. **O capital**. Rio de Janeiro: Bertrand Brasil, 1989.

_____. **O Capital: crítica da economia política**. Tradução de Reginaldo Sant’Anna. Rio de Janeiro: Civilização Brasileira, 2002. (Livro 1, Volume I).

_____. **Contribuição à crítica da economia política**. São Paulo. Martins Fontes, 1983.

MATHGROUND. **Rhind Mathematical Papyrus**. Publicado em 2013. Disponível em: <<http://mathground.net/rhind-mathematical-papyrus/>>, acesso em 17 out. 2017.

MÉSZÁROS, István. **A educação para além do capital**. 2. ed. São Paulo: Boitempo, 2008.

MONTEIRO, Amanda. **Sistemas de numeração:** números egípcios. Disponível em: <<http://amandamonteiro04.blogspot.com.br/2015/06/sistemas-de-numeracao.html>>, acesso em 23 abr. 2018.

MORETTI, V. D.; MOURA, M. O. **A formação docente na perspectiva Histórico-Cultural:** em busca da superação da competência individual. Revista Psicologia Política, v. 10, n. 20, p. 345-361, jul./dez. 2010.

MORI, Katia Gonçalves. **A mediação pedagógica e o uso das tecnologias da informação e da comunicação na escola.** XI Encontro de Pesquisadores do Programa de Pós-Graduação em Educação: Currículo. Outubro de 2013.

MOURA, M. O de. A atividade de ensino como ação formadora, In: CASTRO, A. D.; CARVALHO, A. M. P. de (org.) **Ensinar a ensinar: didática para a escola fundamental e média.** 1ª ed. São Paulo: Pioneira, 2001. cap. 8, p. 143-162

NEVES, J. L. **Pesquisa Qualitativa:** Características, usos e possibilidades, In Caderno de Pesquisas em Administração. São Paulo. V. 1, N° 3, 2° Sem., 1996. Disponível em: <http://ucbweb.castelobranco.br/webcaf/arquivos/15482/2195/artigo_sobre_pesquisa_qualitativa.pdf>. Acesso em: 30 jul. 2017.

PEIXOTO, Joana; ARAUJO, Cláudia Helena dos Santos. **Tecnologia e educação:** algumas considerações sobre o discurso pedagógico contemporâneo. Educ. Soc. [online]. 2012, vol.33, n.118, pp.253-268. ISSN 0101-7330. Disponível em: <<http://dx.doi.org/10.1590/S0101-73302012000100016>>, acesso em: 28 abr. 2019.

PIAGET, Jean. **A formação do símbolo na criança.** Imitação, jogo e sonho, imagem e representação. Rio de Janeiro: Guanabara/Koogan, 1978.

_____. **A linguagem e o pensamento da criança/** Riétch i michliêníya rebiónka. Ed. em russo, Ed. Gosizdat, 1932.

PIRES, Marília Freitas de Campos. **O materialismo histórico-dialético e a Educação.** Texto apresentado na mesa-redonda Paradigmas de Interpretação da Realidade e Projetos Pedagógicos organizada pelas disciplinas de Pedagogia Médica e Didática Especial dos Cursos de Pós-graduação da Faculdade de Medicina da UNESP, campus de Botucatu, em agosto de 1996. Disponível em: <https://www.scielo.org/scielo.php?pid=S1414-32831997000200006&script=sci_abstract>, acesso em 25 fev. 2019.

PONTE, J. P.; BOAVIDA, A.; GRAÇA, M.; ABRANTES, P. **Didáctica da Matemática.** Lisboa: DES do ME, 1997.

PRESTES, Zoia. **Quando não é quase a mesma coisa:** traduções de Lev Semionovitch Vigotski no Brasil. Campinas, SP: Autores Associados, 2012.

SEVERINO, Antônio Joaquim. **Formação docente:** rupturas e possibilidades. Campinas: Papirus, 2002.

SOARES, Magda. **Novas práticas de leitura e escrita: letramento na cibercultura.** Educação e Sociedade, Campinas, v. 23, n. 81, p. 143-160, Dez. 2002. Disponível em:

<<http://dx.doi.org/10.1590/S0101-73302002008100008>>. Acesso em: 17 fev. 2019.

SOUSA, M. d. C. d. **O Ensino de Álgebra numa Perspectiva Lógico-histórica**: um Estudo das Elaboraões Correlatas de Professores do Ensino Fundamental. Tese (Doutorado), 2004.

TAHAN, Malba. (Julio César de Mello e Souza). **As Maravilhas da Matemática**. 5ª ed. Rio de Janeiro: Bloch, 1983.

VIEIRA JUNIOR, N.; COLVARA, L. D. **A importância do professor conforme estilos de aprendizagem e modelos mentais**. In: CONGRESSO BRASILEIRO DE ENSINO DE ENGENHARIA, 34, 2006, Passo Fundo, Anais... Passo Fundo, 2006, ABENGE.

VIGOTSKI, Lev Semenovich. **Obras escogidas IV**: Incluye Paidologia del Adolescente, Problemas de la Psicología Infantil. Madrid: Visor Distribuciones, 1996.

_____. **A construção do pensamento e da linguagem**. 2ª ed. São Paulo: WMF Martins Fontes, 2009.

_____. **A formação social da mente**. 6ª ed. São Paulo: Martins Fontes, 2002.

ANEXO 1



UNIVERSIDADE FEDERAL DE LAVRAS
PRÓ-REITORIA DE PESQUISA
COMITÊ DE ÉTICA EM PESQUISA COM SERES HUMANOS-COEP
Termo de Consentimento Livre e Esclarecido aos Responsáveis

O menor de idade pelo qual o(a) senhor(a) é responsável, o(a) estudante _____ está convidado(a) a participar da pesquisa “Trigonometria: atividade tecnológica e elaborações conceituais desenvolvidas numa perspectiva lógico-histórica”.

Os objetivos deste estudo consistem em analisar como as elaborações conceituais produzidas contribuem para o desenvolvimento do pensamento teórico dos estudantes em Trigonometria a partir de uma percepção lógico-histórica. Caso você autorize, seu(sua) filho(a) irá participar de situações desencadeadoras de aprendizagem na sala de aula, as quais ocorrerão durante a aula de Matemática do professor/ pesquisador. A participação dele(a) não é obrigatória e, a qualquer momento, ele(a) poderá desistir da participação, de modo que tal recusa não trará prejuízos em sua relação com o professor/ pesquisador ou com a instituição em que ele(a) estuda. Tudo foi planejado para minimizar os riscos da participação dele(a), porém, se ele(a) sentir desconforto, dificuldade ou desinteresse poderá interromper a qualquer momento a participação.

O(A) senhor(a) e o menor de idade pelo qual é responsável não receberão remuneração pela participação. A participação dele(a) poderá contribuir para garantir uma validação da nossa hipótese, de modo que teremos possibilidades de identificar quais as elaborações conceituais os estudantes produzem ao desenvolverem situações desencadeadoras de aprendizagem acerca da Trigonometria numa perspectiva lógico-histórica. Desse modo, poderemos contribuir de alguma forma para que outros professores utilizem essas situações desencadeadoras de aprendizagem como forma de oferecer significados e sentidos para o uso da Trigonometria, conteúdo esse que “merece ser priorizado na escola” (BRASIL, 2006, p. 74). Além disso, esperamos um redimensionamento dos cursos de formação de professores, uma vez que metodologias foram implementadas em uma perspectiva reflexiva, com análise dos resultados e principais problemas. As suas respostas não serão divulgadas de forma a possibilitar a identificação. Além disso, o(a) senhor(a) ficará com uma cópia deste termo onde consta o telefone do pesquisador principal, podendo tirar dúvidas agora ou a qualquer momento.

A participação na pesquisa não gerará gastos para o voluntário, portanto não há previsão de ressarcimento. Entretanto, no caso de algum dano não previsto que possa ocorrer, o

pesquisador assumirá os custos de indenização e/ou reparação de dano, conforme previsão legal, ficando responsável por depósito bancário identificado ao indenizado; neste caso, caberá ao pesquisador se informar sobre a conta bancária para depósito.

O professor pesquisador Gustavo Venâncio Pimenta, (35) 3822 4737, gustavo.venancio@hotmail.com, informa que o projeto foi aprovado pelo Comitê de Ética em Pesquisa em Seres Humanos da UFLA (Universidade Federal de Lavras). Se necessário, pode-se entrar em contato com esse Comitê, o qual tem como objetivo assegurar a ética na realização das pesquisas com seres humanos.

Campus Universitário/ Fone 35 3829 5182/ Caixa Postal 3037/ Sítio: http://www.prp.ufla.br/site/?page_id=440 / E-mail coep@nintec.ufla.br / 37200-000 Lavras-MG – Brasil – CNPJ: 22.078.679/0001-74

REFERÊNCIA

BRASIL. Ministério da Educação. Orientações Curriculares para o Ensino Médio: ciências da natureza, matemática e suas tecnologias. Brasília: MEC/SEB, 2006. p.74

CONSENTIMENTO

Eu, _____ (colocar o nome legível do pai/mãe/responsável/cuidador) declaro que entendi os objetivos, riscos e benefícios da participação do menor de idade pelo qual sou responsável, _____ (colocar o nome do menor), sendo que:

() aceito que ele(a) participe () não aceito que ele(a) participe
da pesquisa “TRIGONOMETRIA: ATIVIDADE TECNOLÓGICA E ELABORAÇÕES CONCEITUAIS DESENVOLVIDAS NUMA PERSPECTIVA LÓGICO-HISTÓRICA”.

Lavras, de de 2018.

Assinatura do(a) responsável

Assinatura do pesquisador principal

Campus Universitário Fone 35 3829 5182 - Caixa Postal 3037
Sítio: http://www.prp.ufla.br/site/?page_id=440
E-mail coep@nintec.ufla.br
37200-000 Lavras-MG – Brasil – CNPJ: 22.078.679/0001-74