



ISOLINA APARECIDA VILAS BÔAS

**EXPERIMENTO EM PARCELAS SUBDIVIDIDAS COM
TRATAMENTOS SECUNDÁRIOS EM BLOCOS
INCOMPLETOS BALANCEADOS**

LAVRAS – MG

2018

ISOLINA APARECIDA VILAS BÔAS

**EXPERIMENTO EM PARCELAS SUBDIVIDIDAS COM TRATAMENTOS
SECUNDÁRIOS EM BLOCOS INCOMPLETOS BALANCEADOS**

Dissertação apresentada à Universidade Federal de Lavras, como parte das exigências do Programa de Pós-Graduação em Estatística e Experimentação Agropecuária, para a obtenção do título de Mestre.

Prof. Dr. Augusto Ramalho de Moraes

Orientador

LAVRAS – MG

2018

**Ficha catalográfica elaborada pelo Sistema de Geração de Ficha Catalográfica da Biblioteca
Universitária da UFLA, com dados informados pelo(a) próprio(a) autor(a).**

Vilas Bôas, Isolina Aparecida.

Experimentos em parcelas subdivididas com tratamentos secundários em blocos incompletos balanceados. / Isolina Aparecida Vilas Bôas. - 2018.

100 p.

Orientador(a): Augusto Ramalho de Moraes.

Dissertação (mestrado acadêmico) - Universidade Federal de Lavras, 2018.

Bibliografia.

1. Análise de variância. 2. Sistema de equação normal. 3. Análise intrabloco. I. Moraes, Augusto Ramalho de. II. Título.

ISOLINA APARECIDA VILAS BÔAS

**EXPERIMENTO EM PARCELAS SUBDIVIDIDAS COM TRATAMENTOS
SECUNDÁRIOS EM BLOCOS INCOMPLETOS BALANCEADOS**

Dissertação apresentada à Universidade Federal de Lavras, como parte das exigências do Programa de Pós-Graduação em Estatística e Experimentação Agropecuária, para a obtenção do título de Mestre.

APROVADA em 20 de Dezembro de 2018.

Prof. Dr. Paulo Henrique Sales Guimarães UFLA
Profa. Dra. Isabel de Souza Amorim UFLA
Profa. Dra. Alessandra Querino da Silva UFGD-MS

Prof. Dr. Augusto Ramalho de Morais
Orientador

**LAVRAS – MG
2018**

*Dedico este trabalho primeiramente a Deus por ser essencial em minha vida e aos meus pais, pelo amor incondicional. Mãe, o que seria de mim sem as suas orações, obrigada por interceder por mim. Pai, quantas saudades! Como eu queria sentir o seu abraço, e ouvi-lo dizer como sempre disse: “filhinha o papai te ama”. Essa vitória é mais de vocês do que minha.
Amo Vocês!*

AGRADECIMENTOS

Primeiramente gratidão a Deus, por tanto amor! Só mesmo esse amor verdadeiro me daria tanta força para seguir em frente. Obrigada Senhor, por me carregar no colo quando o cansaço tomava conta de mim. A realização desse trabalho é uma das provas do seu amor incondicional por mim.

Ao meu amado pai Geraldo (sempre presente), por me dedicar tanto amor. Por me preparar para a vida, me ensinando valores que hoje estão cravados em mim. E é assim que eu quero ser, pai, exatamente igualzinha a você. Obrigada papai por dedicar sua vida a mim e aos meus irmãos. A sua ausência dói em mim todos os dias.

Gratidão a minha mãe Tereza por acreditar em mim, por interceder por mim em suas orações, por me ajudar, no qual, foi possível, eu concluir esse trabalho. Amo você!

Ao meu noivo, Thiago, gratidão pelo companheirismo, o amor, o conhecimento dividido. Meu Peto, sem você eu não conseguiria chegar até aqui. São por essas e outras que eu amo muito você.

À minha amada Alice, minha melhor amiga, minha maior e verdadeira companheira. É muito amor envolvido, só nós duas sabemos o quanto.

Aos meus irmãos Erika e Magno, por me incentivarem e acreditar que realizaria esse sonho.

Ao orientador Professor Dr. Augusto, gratidão por aceitar me orientar.

Gratidão aos meus amigos, Adriane, Isabel, Kelly, Mariana, Nádia, Thaís, Édipo, Paulo e Roberto; posso dizer que se cheguei até aqui, foi porque vim sobre asas de anjos. Vocês são anjos que Deus colocou em minha vida, não consigo imaginar como seria essa caminhada sem a generosidade de vocês. Andrezza, obrigada por tanto carinho na hora do desespero. Vocês são prova de que pessoas boas ainda existem nesse mundo. Espero um dia conseguir retribuir tanto carinho. Amizade para vida toda!

Às amigas Allana, Elianara e Marcela, a caminhada foi mais alegre com a amizade de vocês. Gratidão pelo conhecimento compartilhado e pela amizade que continua. Amo vocês!

À todos os professores do programa de pós-graduação em Estatística e Experimentação Agropecuária, gratidão pela oportunidade e todo conhecimento compartilhado durante o mestrado.

À Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (CAPES) pelo suporte financeiro para a realização desse projeto.

Gratidão!

*Bem-aventurado o homem que acha sabedoria, e o homem que adquire conhecimento
(Provérbios de Salomão 3:13)*

RESUMO

Este estudo objetivou desenvolver uma metodologia para análise de variância de experimentos em parcelas subdivididas com tratamentos secundários dispostos segundo uma estrutura de blocos incompletos balanceados, bem como propor um modelo linear e desenvolver os procedimentos para realização da análise de variância, apresentar as expressões para comparações de média e ilustrar a aplicação da metodologia por meio de um exemplo de avaliação de cultivares de milho. No desenvolvimento da metodologia, supôs-se um ensaio com parcelas subdivididas no qual u tratamentos secundários estivessem presentes em s dos b blocos incompletos balanceados ($s < b$) em que cada bloco apresentasse k parcelas e cada par de tratamentos secundários ocorresse em λ blocos. Utilizando o método dos mínimos quadrados, foram determinados, o sistema de equações normais, as soluções para os efeitos de tratamentos principais, os efeitos ajustados para tratamento secundário e interação e os critérios para comparações múltiplas pelo teste de Tukey baseados nas variâncias das funções lineares estimáveis. Verificou-se que duas situações ficaram caracterizadas: os efeitos dos tratamentos primários são determinados de forma análoga àquelas encontradas na literatura para ensaios em blocos casualizados completos, e os efeitos referentes aos tratamentos secundários e a interação foram semelhantes aquelas encontradas para os experimentos com blocos incompletos. Como ilustração da metodologia esta foi aplicada a um conjunto de dados, os quais foram analisados por três modelos e usando os programas estatísticos R e SAS.

Palavras-chave: Análise de Variância. Planejamento de Experimento. Delineamento Experimental. Sistema de Equação Normal. Análise Intrabloco.

ABSTRACT

This study aimed to develop a methodology for analysis of variance of experiments in subdivided plots with secondary treatments arranged according to a structure of incomplete balanced blocks, as well as to propose a linear model and to develop the procedures to perform the analysis of variance, present the expressions for comparisons of and illustrate the application of the methodology by means of an example of cultivar of corn. In the development of the methodology, it was assumed an experiment with split plots in which u secondary treatments were present in s the incomplete balanced b blocks ($s < b$) where each block had k plots and each pair of secondary treatments occurred in λ blocks. Using the least squares method, the system of normal equations, solutions to the effects of major treatments, the effects adjusted for secondary treatment and interaction and the criteria for multiple comparisons by the Tukey test based on the variances of the linear functions estimated. Checked that two situations were characterized: the effects of the primary treatments are determined by similar to those found in the literature for complete randomized blocks, and effects related to secondary treatments and interaction were similar to those found for incomplete block experiments. As an illustration of the methodology was applied to a set of data, which were analyzed by three models and using the statistical programs R and SAS.

Keywords: Analysis of Variance. Experimental planning. Experimental Desing. Sistem of Normal Equation. Intrablock analysis

LISTA DE FIGURAS

Figura 2.1 – Esboço de uma parcela subdividida em quatro subparcelas.	15
Figura 3.1 – Esquema de distribuição dos tratamentos secundários em blocos incompletos balanceados segundo um esquema em parcelas divididas para avaliar três tratamentos principais (N_0, N_1, N_2) e quatro tratamentos secundários(A, B, C, D).	40

LISTA DE TABELAS

Tabela 2.1 – Tipos de comparações entre contrastes de duas médias e seus respectivos estimadores nos experimentos em parcelas subdivididas.	21
Tabela 2.2 – Funções lineares estimáveis nos experimentos em esquema de parcelas subdivididas, melhor estimador não tendencioso(BLUE) e respectivas variâncias.	21
Tabela 2.3 – Representação de um delineamento em blocos incompletos balanceados tipo I, com seis tratamentos em quinze blocos de duas parcelas	27
Tabela 2.4 – Análise de variância para delineamento de blocos incompletos balanceados que podem ser dispostos em grupos com uma repetição com seis tratamentos em quinze blocos de duas parcelas	27
Tabela 2.5 – Representação de um delineamento em blocos incompletos balanceados tipo II, com cinco tratamentos em dez blocos de duas parcelas	28
Tabela 2.6 – Análise de variância para delineamento de blocos incompletos balanceados que podem ser dispostos em grupos com mais de uma repetição com cinco tratamentos em dez blocos de duas parcelas	28
Tabela 2.7 – Representação de um delineamento em blocos incompletos balanceados do tipo III, com seis tratamentos em dez blocos	29
Tabela 2.8 – Esquema para análise de variância para delineamento de blocos incompletos balanceados do tipo III, os blocos não podem ser agrupados em repetição.	29
Tabela 2.9 – Análise de variância intrabloco para BIB	32
Tabela 2.10 – Esquema para análise de variância considerando as esperanças dos quadrados médios para experimentos em parcelas subdivididas em blocos incompletos	37
Tabela 2.11 – Correlação constantes entre quaisquer duas subparcelas de uma mesma parcela	38
Tabela 3.1 – Quadro a ANOVA	71
Tabela 4.1 – Produção de grãos de cultivares de milho, em Kg/ha na repetição 1	82
Tabela 4.2 – Produção de grãos de cultivares de milho, em Kg/ha na repetição 2	82
Tabela 4.3 – Análise de variância considerando o modelo 4.1, realizada no SAS	83
Tabela 4.4 – Análise de variância considerando o modelo 4.1, realizada no SAS	83
Tabela 4.5 – Análise de variância considerando o 4.2, realizada no R	84
Tabela 4.6 – Análise de variância considerando o modelo 4.2, realizada no SAS	84

Tabela 4.7 – Análise de variância considerando o modelo 4.3, realizada no R.	84
Tabela 4.8 – Análise de variância considerando o modelo 4.3, realizada no SAS	85

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	12
2	REFERENCIAL TEÓRICO	14
2.1	Experimentos em parcelas subdivididas	14
2.1.1	Natureza do erro experimental	18
2.1.2	Estimabilidade	20
2.2	Experimentos em blocos incompletos	23
2.2.1	Experimentos em blocos incompletos balanceados (BIB)	23
2.2.1.1	Condições de Existência de BIB	26
2.2.1.2	Matriz de variâncias e covariâncias	29
2.2.1.3	Variância da função linear estimável	30
2.2.1.4	Análise de variância para BIB	31
2.2.1.5	Análise de Variância Intrablocos	31
2.3	Experimentos com parcelas divididas em blocos incompletos	33
3	MATERIAL E MÉTODOS	40
3.1	Sistema de Equações Normais	44
3.2	Solução do Sistema de Equações Normais	53
3.2.1	Estimação dos efeitos dos parâmetros	55
3.3	Dispersão	60
3.3.1	Dispersão para tratamentos primários	61
3.3.2	Dispersão para tratamentos secundários: $D(\hat{t}^*)$	62
3.3.3	Dispersão para a interação: $D(\hat{tt}^*)$	64
3.3.4	Análise de variância	65
3.3.5	Soma de quadrados	69
3.3.6	Testes de hipótese e quadros de análise de variância	71
3.3.7	Comparações múltiplas	72
3.3.7.1	Comparações entre efeitos estimados de tratamento primários	72
3.3.8	Comparação entre efeitos estimados de tratamentos secundários	72
3.3.9	Comparação entre efeitos estimados de tratamentos secundários dentro do i-ésimo tratamento primário	73
3.3.10	Comparações entre efeitos estimados de tratamentos primários dentro de i-ésimo tratamento secundário	73

3.4	Demonstração do método proposto	73
3.4.1	Solução do sistema de equações normais	80
4	Exemplos Ilustrativos	82
5	CONSIDERAÇÕES FINAIS	86
	REFERÊNCIAS	87
	APENDICE A – Comando R e SAS	91

1 INTRODUÇÃO

Em experimentos agrícolas as análises dos dados têm por finalidade apresentar a maior quantidade de informações possíveis no que diz respeito à maneira como as unidades experimentais respondem aos tratamentos aplicados. Para obter essas informações é comum submeter os dados a uma análise de variância. Esta análise testa se a hipótese dos tratamentos de duas ou mais populações são iguais e, também, de um ou mais fatores, comparando variáveis respostas em diferentes níveis dos fatores.

Devido aos diferentes tipos de experimentos que podem ser realizados, existem também vários tipos de análises de variância as quais irão depender do planejamento e do delineamento experimental utilizados. Assim sendo, é de essencial importância para a pesquisa, a escolha adequada desse delineamento.

O delineamento experimental consiste em uma estrutura de planejamento realizado de tal modo que as variações perturbadoras presentes na área experimental, sejam minimizados o máximo possível de modo a possibilitar que os tratamentos reflitam seus efeitos sem a influência de fatores aleatórios sistemáticos prejudiciais.

No caso específico dos experimentos conduzidos no esquema de parcelas divididas, espera-se que as variações entre as subparcelas sejam menores do que as variações entre as parcelas. Desta forma, o fator que deverá casualizar nas subparcelas será aquele que requer menor quantidade de material experimental, ou então o de maior importância, aquele que necessite de menores diferenças a ser detectadas ou ainda, para o fator para que se deseja maior precisão.

As grandes vantagens dos experimentos em parcelas subdivididas são a possibilidade do estudo das interações e sua grande versatilidade, uma vez que podem ser utilizados em vários delineamentos experimentais. Em determinadas situações, apresentar maiores facilidades operacionais e nessas condições podem ficar mais econômicos para serem executados do que experimentos completamente aleatorizados em esquema fatorial e geralmente, são mais eficientes estatisticamente.

Um caso bem particular dos experimentos em parcelas subdivididas é quando os tratamentos estão dispostos na estrutura de delineamento em blocos incompletos. No caso dos tratamentos secundários sejam dispostos em blocos incompletos, não se encontrou na literatura informações sobre os tipos e como seriam realizadas as análises da variância, bem como, a aplicação dos testes estatísticos.

Diante do exposto, têm-se o objetivo propor uma metodologia para análise de experimentos em parcelas subdivididas no caso em que os tratamentos secundários estão dispostos segundo uma estrutura de blocos incompletos balanceados.

2 REFERENCIAL TEÓRICO

Este capítulo trata-se da revisão bibliográfica, contemplando as principais abordagens referentes aos experimentos em parcelas subdivididas, natureza do erro experimental, estimabilidade, experimentos em blocos incompletos e balanceados (BIB), condições de existências, matriz de variâncias e covariâncias, variância da função linear estimável, análise de variância para BIB e uma análise intrablocos, as quais servirão de subsídios para a discussão dos capítulos subsequentes, bem como da metodologia empregada no experimento.

2.1 Experimentos em parcelas subdivididas

Segundo Jones e Nachtsheim (2009) os experimentos em parcelas subdivididas, que também são conhecidos como “*split-plot*”; foram proposto por Fisher. Mbegbu e Francis (2012) destacam que, a importância desse tipo de experimento na experimentação industrial, para maiores discussão ver Yates (1936).

De acordo com Smucker, Castillo e Rosenberger (2012) os experimentos em parcelas subdivididas passaram por uma espécie de renascimento na literatura experimental ao longo dos últimos vinte anos, devido ao avanço computacional.

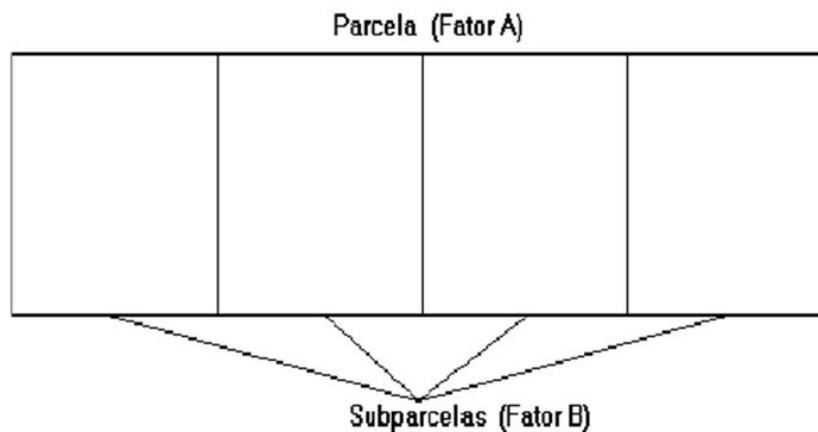
Ledolter (2010) ressalta que Fisher (1925) introduziu esquemas de parcelas subdivididas ao trabalho de irrigação e fertilização em rendimentos agrícolas. Ele atribuiu os métodos de irrigação, estudou os lotes de terra, enquanto atribuiu os diferentes fertilizantes para os substratos do campo que receberam o mesmo tratamento de irrigação.

No experimento em parcelas subdivididas, as parcelas recebem os níveis de um ou mais fatores principais e são divididas em subparcelas que recebem níveis de um ou mais fatores secundário. A casualização é feita em dois estágios: primeiro casualiza os níveis do fator A nas parcelas e em seguida, os níveis do fator B nas subparcelas de cada parcela. Desta forma, cada parcela pode ser considerada como um bloco na medida em que somente o fator B é considerado e como um bloco incompleto na medida em que todos os tratamentos são considerados. Assim, diferenças entre blocos incompletos são confundidas com as diferenças entre os níveis do fator A. Por essa razão, pode-se dizer que os efeitos principais ficam confundidos nesse delineamento e devido isso, menor precisão é associada aos efeitos do fator primário A (RIBOLDI, 1995 b; BANZATTO; KRONKA, 2006).

De acordo com Milliken e Johnson (2009) e Oehlert (2010), o experimento em parcelas divididas, envolve uma estrutura de tratamentos com dois ou mais fatores e uma estrutura de

delineamento em blocos incompletos apresentando, pelo menos, dois tamanhos diferentes de unidades experimentais; as unidades experimentais maiores, chamadas de parcelas primárias ou parcelas e as unidades menores, chamadas de subparcelas. Nas parcelas são casualizados o nível do tratamento primário e nas subparcelas o nível do tratamento secundário. Conforme mostra na Figura 2.1, é ilustrado o esboço de uma parcela, a qual é subdividida em quatro subparcelas ou unidades experimentais.

Figura 2.1 – Esboço de uma parcela subdividida em quatro subparcelas.



Nos ensaios em parcelas subdivididas os tratamentos são constituídos pela combinação dos níveis do fator primário com os níveis do fator secundário.

Esse tipo de experimento é muito utilizado nas pesquisas agrícolas, industriais e biológicas. De acordo com Cochran e Cox (1992), Pimentel-Gomes (2009) este procedimento se torna útil nas seguintes situações:

- Os tratamentos associados com os níveis de um dos fatores exigem grandes porções do material experimental. Isto é comum na experimentação conduzida em campo, indústrias etc. Por exemplo, um experimento de campo, os fatores podem ser métodos de preparo de solo ou aplicação de fertilizantes, ambos normalmente requerem grandes parcelas. O outro fator pode ser cultivares, que podem ser comparadas usando parcelas pequenas;
- Quando um fator adicional é introduzido no experimento para aumentar sua precisão. Neste caso, suponha que o objetivo principal de um experimento é comparar o efeito de vários fungicidas no controle de certa doença, para aumentar o objetivo, podem-se incluir diversas variedades que se sabe, diferem em sua resistência à doença. Aqui as variedades estariam nas parcelas e os fungicidas nas subparcelas;

- Quando se sabe que maiores diferenças podem ser esperadas entre os níveis de certos fatores do que entre os níveis de outro fator é aconselhável colocar o fator com maior variabilidade nas parcelas e o menos variável nas subparcelas;
- É recomendável quando se existe a necessidade de uma maior precisão de um fator em relação ao outro;
- Nas situações práticas no qual é difícil a instalação do experimento no esquema fatorial.

Pimentel-Gomes (2009) sugeriu o uso de experimentos em parcelas subdivididas em alguns dos casos em que se estudam dois tipos diferentes de tratamentos. Dentre suas múltiplas aplicações, destacam como exemplo, as variedades e espaçamento. Nesse caso, cada parcela contendo certo espaçamento, é dividida em subparcelas, cada uma com uma das variedades.

Dentre suas múltiplas aplicações, Jones e Nachtsheim (2009) destacam que, em experimentos industriais, os fatores são frequentemente diferenciados com respeito à facilidade com que eles podem ser alterados de um nível para outro do mesmo fator ou entre fatores. Isto pode ser devido ao fato de que um determinado tratamento é caro ou demorado para mudar de parcela para subparcela (ou vice-versa), ou pode ser devido ao fato de que o experimento é para ser executado em grandes lotes e estes podem ser subdivididos nos níveis de outro fator o qual é caracterizado por lotes menores, obtendo informações adicionais.

Box, Hunter e Hunter (2005) descrevem um experimento realizado no esquema em parcelas subdivididas que foi planejado para estudar a resistência à corrosão de barras de aço tratadas com quatro revestimentos em cada forno (C1, C2, C3 e C4) e em três temperaturas (360°C, 370°C e 380°C). A temperatura do forno é o fator difícil de mudar porque o forno leva tempo para atingir uma nova temperatura de equilíbrio.

De acordo com Campos (1984) existem dois tipos de experimentos referentes o esquema de parcelas subdivididas:

- a) no espaço, quando em cada parcela existe uma divisão em diversas partes, cada uma delas constituindo as subparcelas, que serão casualizadas dentro de cada parcela;

Neste caso, o esquema em parcelas subdivididas é mais apropriado que o esquema fatorial em que os fatores envolvidos, geralmente em número de dois apresentam características diferentes. Os fatores podem, por exemplo, exigir tamanhos distintos de parcelas. Como é o caso de: tipos de preparo de solo (fator A), que exigem parcelas grandes; e variedades (fator

B), que podem ser testadas em parcelas menores. Assim, aplicam-se os diferentes métodos de preparo do solo as parcelas de tamanho apropriado, dividindo cada uma delas em tantas subparcelas quantos forem as cultivares.

- b) no tempo, quando as subparcelas são constituídas pelas amostras tomadas periodicamente em cada parcela, sendo cada amostra uma parcela.

Em certos experimentos, as parcelas são submetidas às medições em épocas, anos ou intervalos de tempo diferentes. Assim, ao considerar a tratamentos relativos a um fator A e r repetições, obtêm-se, $a \times r$ dados para cada época em que foram tomadas as observações. Pode-se considerar essa situação como divisões das parcelas experimentais, no tempo, em que o tempo ou época passa a representar o fator B.

De acordo com Littell et al. (1996) e Xavier (2000), existem semelhanças entre os experimentos com medidas repetidas e experimentos em parcelas subdivididas, nos quais os fatores tratamento e tempo correspondem, respectivamente, à parcela e à subparcela. A diferença entre eles é que, nos experimentos em parcelas subdivididas, os níveis da subparcela são aleatoriamente atribuídos às unidades de subparcela dentro das unidades de parcelas. Ainda de acordo com os autores, as respostas de diferentes subparcelas, na mesma parcela, são igualmente correlacionadas. Em experimentos com medidas repetidas, as respostas de tempos mais próximos são, em geral, mais fortemente correlacionadas que as de tempos mais distantes.

Os experimentos com medidas repetidas, quando analisados sob o aspecto de parcela subdividida, violam duas pressuposições básicas requeridas pela análise de variância, sendo a falta de casualização entre os tratamentos e as épocas de avaliação (tempo) e a dependência de erros, pelo fato de as medidas serem tomadas sobre as mesmas unidades experimentais ao longo do tempo, ocasionando a correlação entre os dados (ROSARIO et al., 2005).

Por sua vez, Freitas et al. (2008) destacam que, devido à facilidade na análise e à interpretação dos resultados, experimentos em parcelas subdivididas no tempo, têm sido muito utilizados na análise de dados com medidas repetidas. Os autores ainda ressaltam que, para que os resultados referentes à subparcela tempo e à interação (tempo \times tratamento) sejam válidos, é necessário que as pressuposições da análise usual sejam atendidas, ou seja, que os erros da subparcela apresentem distribuição normal, sejam independentes e identicamente distribuídos e com variâncias constantes.

2.1.1 Natureza do erro experimental

Devido a variação não controlada pelo pesquisador, o erro experimental é constituído e ocorre de maneira aleatória entre as unidades experimentais que receberam o mesmo tratamento. Assim, a variância entre as unidades experimentais é uma estimativa do erro experimental (STORCK et al., 2016; RAMALHO, 2000), cuja interferência direta na análise dos dados ocorre nos testes de hipótese e nos procedimentos para comparações múltiplas de médias. Nesse tipo de situação, quanto maior for o erro, menor será a probabilidade de se obterem diferenças significativas entre as médias dos tratamentos. A qualidade de um experimento é avaliada pela magnitude do erro experimental e pelo atendimento às pressuposições do modelo matemático, tais como a aleatoriedade dos erros estimados, a homogeneidade da variância dos erros estimados, a aditividade do modelo matemático, e a normalidade da distribuição dos erros estimados (STORCK et al., 2016). O uso dos princípios básicos da experimentação (repetição, casualização e controle local) no planejamento, condução e análise de experimentos é fundamental para se manter o erro experimental em níveis aceitáveis (STEEL; TORRIE, 1997; BANZATTO; KRONKA, 2006; STORCK et al., 2016).

Para reduzir o efeito do erro experimental e obter melhor precisão (ou melhor erro) para detectar as diferenças entre os tratamentos, tem-se o uso de unidades experimentais homogêneas, a realização, o mais uniforme possível, dos tratamentos culturais característicos da cultura, no decorrer do experimento (LOPES; STORCK, 1995; LUCIO, 1997) e a utilização de um maior número de repetições, juntamente com parcelas menores (PIMENTEL-GOMES, 2009; CONAGIN; IGUE; NAGAI, 1995; STORCK et al., 2016).

Os ensaios em parcelas subdivididas apresentam uma menor precisão na estimação dos efeitos do fator primário, embora, geralmente aumenta a precisão para comparar os efeitos do fator secundário e os efeitos da interação. Isso se deve ao fato de que há dois tamanhos de parcelas e dois erros experimentais, um para cada tamanho de parcela, em geral, o erro das subparcelas é menor que o das parcelas. Portanto, é muito importante a atribuição correta e conveniente dos fatores como primário e secundário (ESCOBAR; TRAPERO; DOMINGUEZ, 2010).

Vários autores discutiram sobre a análise de variância de experimento em parcelas divididas, dentre eles, Federer (1955), Harter (1961), Campos (1984) e Nogueira (1991), os quais apresentaram exemplos práticos do uso desses experimentos nos delineamentos: inteiramente

ao acaso e em blocos casualizados, considerando independência entre os erros em nível de subparcelas e de parcelas.

Segundo Cochran e Cox (1992), na análise estatística dos experimentos em parcelas subdivididas, considera-se também o fato de que as observações das diferentes subparcelas de uma mesma parcela podem estar correlacionadas e esta correlação é constante.

De acordo com Chakrabarti (1962), Leal (1979), Diniz (1980), Cochran e Cox (1992), consideram que em nível de subparcela, os erros do tipo e_{ijs} (para uma subparcela) e $e_{ijs'}$ (para outra subparcela) para quaisquer duas subparcelas de uma mesma parcela, existe uma correlação constante ρ , e que os erros entre subparcelas em diferentes parcelas não são correlacionados.

Ainda de acordo com os autores, para esses experimentos tem-se:

$$E(e_{ijs}) = 0 \quad e \quad Var(e_{ijs}) = Var(y_{ijs}) = \sigma^2$$

$$Cov(e_{ijs}, e_{i'j's'}) = \begin{cases} \rho\sigma^2 & \text{se } i = i', j = j', s = s' \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases}$$

em que i refere-se ao i -ésimo tratamento principal, j é j -ésimo bloco, s é uma subparcela e s' é uma outra subparcela qualquer.

Desse modo, explicam que para duas subparcelas de uma mesma parcela, a variância do erro de uma parcela total é:

$$E(e_{ij1} + e_{ij2})^2 = \sigma^2 + \sigma^2 + 2\rho\sigma^2 = 2(1 + \rho)\sigma^2$$

Por outro lado, mostram que para o tratamento principal, a variância é do tipo:

$$[1 + (\beta - 1)\rho]\sigma^2$$

em que β é o número de tratamento principal.

No que se refere à eficiência dos testes para tratamentos primários e secundários, Taylor et al. (1950), Hinkelman e Kempthorne (2007), Federer (1955) e Pimentel-Gomes (2009), corroboram ao afirmarem que a maior precisão existente é para comparação entre tratamentos secundários. Sob essa concepção, Pimentel-Gomes (2009) salienta que essa diferença de eficiências pode ser usada como uma vantagem adicional.

Cochran e Cox (1992) ressaltaram que a maior precisão obtida no teste de tratamentos secundários pode ser justificada pelo coeficiente de correlação ρ que, na prática, é quase sempre positivo.

Este fato pode ser melhor interpretado quando se toma o estimador não tendencioso para ρ , descrito em Leal (1979), como:

$$\hat{\rho} = \frac{QMErro(a)}{QMErro(a) + QMErro(b)}$$

em que, $QMErro(a)$ é o quadrado médio do resíduo a e $QMErro(b)$ é o quadrado médio do resíduo b.

2.1.2 Estimabilidade

Para a análise de variância e o estudo da estimabilidade nos experimentos em esquema de parcelas subdivididas, um modelo linear (SEARLE; GRUBER, 1971; MISCHAN; PINHO, 1996) pode ser representado por:

$$Y_{ijk} = \mu + \alpha_i + \gamma_j + \tau_K + e_{ij} + \delta_{ik} + \varepsilon_{ijk}$$

em que,

Y_{ijk} é a j-ésima observação no i-ésimo nível do fator α e k-ésimo nível do fator τ ;

μ é uma constante, no modelo sob restrição é a média geral;

α_i é o efeito devido ao i-ésimo nível do fator α ;

γ_j é o efeito devido ao j-ésimo bloco;

τ_K é o efeito devido ok-ésimo nível do fator τ ;

e_{ij} é o erro devido a j-ésima parcela, também conhecido como erro 1 ou erro a;

δ_{ik} é o efeito da interação devido ao i-ésimo nível do fator α e k-ésimo nível do fator τ

ε_{ijk} é o erro relativo a subparcela.

Pimentel-Gomes (2009) considerou a existência quatro casos para comparações de médias de tratamentos que podem ser resumidos na Tabela 2.1. Nesta, indicam as comparações entre contrastes de duas médias entre os níveis de tratamentos primários, de tratamentos secundários, entre tratamentos secundários dado um tratamento primário e entre um tratamento primário em cada tratamento secundário e seus respectivos estimadores.

Tabela 2.1 – Tipos de comparações entre contrastes de duas médias e seus respectivos estimadores nos experimentos em parcelas subdivididas.

Tipos de comparação	Estimador da variâncias
Entre tratamentos nas parcelas (T)	$2E_a/KR$
Entre tratamentos nas subparcelas (T')	$2E_b/IR$
Entre tratamento T' num mesmo nível de T	$2E_b/R$
Entre tratamentos T num mesmo nível de T'	$2[E_a + (k - 1)E_b]/KR$

em que: I = números de tratamentos primários;

K= número de tratamento secundários;

R = número de repetições;

E_a = QMErro (a), erro a nível das parcelas;

E_b = QMErro (b), erro a nível das subparcelas.

Com relação as funções estimáveis nos experimentos em esquema de parcelas subdivididas, Chakrabartiu (1962) destacou cinco tipos, as quais podem ser vistas na Tabela 2.2:

Tabela 2.2 – Funções lineares estimáveis nos experimentos em esquema de parcelas subdivididas, melhor estimador não tendencioso(BLUE) e respectivas variâncias.

Função linear	Melhor Estimador	Variância
$\alpha_i - \alpha_{i'}$	$y_{i..} - y_{i'..}$	$2\sigma_2^2/r\beta$
$\nu_j - \nu_{j'}$	$y_{.j.} - y_{.j'}$	$2\sigma_2^2/\alpha\beta$
$\tau_k - \tau_{k'}$	$y_{..k} - y_{..k'}$	$2\sigma_2^2/r\alpha$
$\delta_{jk} - \delta_{jk'}$	$y_{.jk} - y_{.jk'} - y_{.j.} + y_{.j'}$	$\frac{2\sigma_1^2}{r}(1 - \frac{1}{\beta})$
$\delta_{jk} - \delta_{j'k}$	$y_{.jk} - y_{.j'k} - y_{..k} + y_{..k'}$	$\frac{2\sigma_1^2}{r}(1 - \frac{1}{\alpha})$

em que,

$$\sigma_1^2 = (1 - \rho)\sigma^2;$$

$$\sigma_2^2 = [1 + (\beta - 1)\rho]\sigma^2;$$

r é o número de blocos;

α é o número dos tratamentos primários;

β é o número dos tratamentos secundários;

ν_i é o efeito de bloco;

α_i é o efeito de tratamentos primários;

τ_k é o efeito de tratamentos secundários;

δ_{jk} é o efeito da interação;

$\bar{y}_{j..}$ é a média do j-ésimo bloco;

$\bar{y}_{i..}$ é a média do i-ésimo tratamento primário;

$\bar{y}_{..k}$ é a média do k-ésimo tratamento secundário;

$\bar{y}_{j.k}$ é a média da interação.

Federer (1955) propôs em algumas situações que, se os níveis do fator A são comparados em um delineamento em blocos casualizados, o resíduo (a) (QM interação repetição \times A) é o erro apropriado para comparação do efeito A, enquanto o resíduo (b), que é composto pelas interações de repetições \times fator B mais repetição \times A \times B é o erro apropriado para testar a interação A \times B e para testar o efeito de B.

A eficiência dos experimentos em parcelas subdivididas em relação ao delineamento em blocos incompletos casualizados sobre comparações do fator B e interação A \times B para o estimador.

$$E = \frac{(v-1)E_a + v(u-1)E_b}{(vu-1)E_b}$$

em que:

v é o número de tratamentos primários;

u é o número de tratamentos secundários;

$E_a = \text{QMerro}(a)$;

$E_b = \text{QMerro}(b)$.

De Campos (1984), Steel e Torrie (1997) e Cochran e Cox (1992), apresentam um estudo detalhado de experimentos em parcelas subdivididas onde indicam a maneira de obter as somas de quadrados das diferentes causas de variação, incluindo as interações de interesse, esperanças dos quadrados médios, análise de variância e os estimadores das variâncias dos diferentes contrastes, necessários para realizar múltiplas comparações.

Os experimentos em parcelas divididas também podem ser instalados em outros delineamentos, como o caso em que os tratamentos principais estão dispostos na estrutura de delineamento em blocos incompletos balanceados (IEMMA, 1987) e blocos incompletos parcialmente balanceados (MORAIS; NOGUEIRA, 1996).

2.2 Experimentos em blocos incompletos

O delineamento em blocos incompletos é aplicado na experimentação quando se tem um número elevado de tratamentos a serem testados, ou seja, quando o número de unidades experimentais ou parcelas em cada bloco é inferior ao número de tratamentos.

Conforme Taylor et al. (1950), Pearce et al. (1983) e Cochran e Cox (1992), os delineamentos em blocos incompletos foram introduzidos por Frank Yates, com a finalidade de eliminar a heterogeneidade intrabloco, com a diminuição do número de parcelas por bloco.

De acordo com Riboldi (1995 b), Cochran e Cox (1992), Montgomery (2009) e Pimentel-Gomes (2009), esse delineamento está dividido em: blocos incompletos balanceados (ou equilibrados) e blocos incompletos parcialmente balanceados. Nesse trabalho será dado enfoque apenas ao delineamento em blocos incompletos balanceados (BIB).

Leeuwen e Neto (2014) ressaltam que, mesmo nos dias de hoje em que dados de qualquer delineamento podem ser analisados, usando um programa de computação adequado, o delineamento em blocos incompletos ainda é pouco utilizado, o que resulta em menor eficiência na comparação de tratamentos. Uma das razões destes delineamentos serem poucos utilizados é o não entendimento da distribuição dos tratamentos entre os blocos. Os mesmos elaboraram um programa para ensinar, construir e comparar delineamentos em blocos incompletos, o *concurrency table* (CT), o qual é uma ferramenta simples que esclarece a estrutura de blocos incompletos, visualizando para todos os pares de tratamentos quantas vezes os dois tratamentos de um par ocorrem juntos num bloco. Enfatizam que o uso do CT é útil para conhecer as características do delineamento em blocos incompletos balanceados e em blocos incompletos parcialmente balanceados, para averiguar se um delineamento é conectado e para comparar delineamentos de blocos incompletos.

2.2.1 Experimentos em blocos incompletos balanceados (BIB)

Zimmermann (2014) destaca que experimentos em blocos incompletos balanceados, apresentam uma análise de variância mais difícil do que aqueles dos blocos completos balanceados, além de uma redução no número de graus de liberdade do erro. Porém, esses problemas são compensados por uma redução na estimativa do erro experimental, devido ao maior controle ambiental que introduzem pela utilização de blocos de tamanhos reduzidos.

De acordo com Elyıldırım et al. (2013), o BIB é amplamente utilizado em muitos dos problemas aplicados, como a análise sensorial, pesquisa de mercado, comparação de produ-

tos etc. Os autores utilizaram delineamentos de blocos incompletos balanceados para realizar análises estatísticas dos dados de análise sensorial.

Meilgaard, Carr e Civille (1999) salientam que, na análise sensorial, geralmente, o avaliador não pode avaliar mais de quatro a seis amostras em uma única sessão. Se o número de amostras (tratamentos) a serem comparadas for maior, por exemplo de 7 a 12, um planejamento de bloco incompleto balanceado (BIB) pode ser usado. No planejamento de um bloco incompleto a distribuição de t tratamentos em vez de apresentar todas as t amostras em um grande bloco, o pesquisador as apresenta em blocos menores, cada um contém $k < t$ amostras. As k amostras que formam cada bloco devem ser selecionadas para que todas as amostras sejam avaliadas um número igual de vezes e assim todos os pares de amostras aparecem juntos nos blocos b o mesmo número de vezes.

Por sua vez, Kitzberger et al. (2011) utilizaram o delineamento em blocos incompletos balanceados com o objetivo de avaliar a influência da variabilidade genética sobre as características das bebidas de cafés arábica de diferentes cultivares produzidos nas mesmas condições edafoclimáticas. No experimento, foram avaliados sete tratamentos constituídos pelas cultivares tradicionais (Bourbon vermelho, Catuaí vermelho, Icatu amarelo) e os desenvolvidos pelo Instituto Agrônomo do Paraná (IAPAR 59, IPR 98, IPR 99 e IPR 103). Os cafés, coletados em estágio cereja e secos ao sol, foram beneficiados e, após eliminação de defeitos, torrados (8 a 11 min, 200 a 210°C com luminosidade de 28). Foram utilizados 15 provadores e cada tratamento teve três repetições.

Silva et al. (2014) utilizaram o delineamento em bloco incompletos como alternativa para coleta de dados no perfil descritivo otimizado (PDO) e consideraram que este delineamento permite a coleta de dados no PDO sem perda na qualidade dos resultados. O PDO pode ser visto como uma nova metodologia descritiva que propõe uma avaliação amostral otimizada por avaliadores não treinados.

Fernandes et al. (2000) utilizaram delineamento em blocos incompleto com o objetivo de verificar a influência de procedências e progênies na taxa de mortalidade das plantas (erva-mate) aos quatro e doze meses após o plantio e estimar componentes de média e de variância genética para o caráter altura de planta aos doze meses após o plantio. O autor utilizou germoplasma de oito municípios num experimento em blocos incompletos balanceados, com nove repetições e seis plantas por parcela.

Dentre suas múltiplas aplicações Bekman (2001), aponta os blocos incompletos balanceados como uma possível solução para o problema de como se distribuir um grande número de questões em cadernos de prova com poucas questões adequadas aos alunos. O autor remete que a forma de se distribuir as questões em blocos incompletos balanceados é especialmente útil no uso conjunto com análises à luz da teoria das respostas ao item (TRI) como maneira de uniformizar a exposição das questões, visando a obtenção de resultados mais precisos.

Conde e Laros (2007) destacam que o Sistema Nacional de Avaliação da Educação Básica (SAEB) adotou uma metodologia baseada na amostragem matricial de itens, que utiliza o esquema de montagem e aplicação de testes por blocos incompletos balanceados (BIB). Sob esse delineamento são montados, primeiramente, treze blocos de itens, em seguida são montados vinte e seis cadernos a partir da combinação, três a três desses blocos de itens, por meio da orientação fornecida pela delineamento do BIB. De acordo com o esquema amostral e o delineamento BIB adotado, consegue-se uma aplicação em que os estudantes que respondem a um determinado caderno apresentem, proporcionalmente, características semelhantes aos grupos que responderam aos outros cadernos, visto que a alocação dos cadernos aos alunos é aleatória.

Com relação as análises da variância para os BIBs existem dois tipos bem diferentes de análises dos experimentos: a análise intrablocos e a análise com recuperação da informação interblocos.

Na análise intrablocos os efeitos dos tratamentos são ajustados para efeitos de blocos em que se alocam, sendo sempre independentes e baseiam-se em métodos estatísticos exatos e que ser usada para qualquer experimento em blocos incompletos. A análise com recuperação da informação interblocos, por sua vez, permite aproveitar melhor os dados, mas, usa métodos estatísticos apenas aproximados e só deve ser usada para experimentos com número de graus de liberdade relativamente grande para blocos e para o resíduo (PIMENTEL-GOMES, 2009).

De acordo com Yates (1939, 1940) os experimentos em blocos incompletos balanceados, a recuperação da informação interbloco pode ser agregada com a análise intrabloco, com o intuito de obter estimadores mais eficientes na comparação dos tratamentos. Estes resultados servem também para experimentos em blocos incompletos parcialmente balanceados.

Na análise intrabloco o efeito dos blocos pode ser visto como fixo ou aleatório, dependendo do que vai ser examinado. Desta forma, ao considerar o modelo de efeitos fixos,

o método dos mínimos quadrados permitirá determinar o melhor estimador intrabloco para a comparação dos tratamentos.

É sempre importante ressaltar que a utilização da análise de variância para realizar testes e fazer estimações, requer que se assumam os usuais pressupostos de normalidade, independência e homoscedasticidade dos erros experimentais.

2.2.1.1 Condições de Existência de BIB

Os blocos incompletos são considerados balanceados quando cada tratamento é agrupado um número igual de vezes com os demais tratamentos em um mesmo bloco, considerando todos os blocos do experimento.

Um BIB é caracterizado por cinco parâmetros b, v, r, k e λ , não independentes, que são números inteiros, que verificam as seguintes restrições:

$$n = rv = bk$$

em que:

n é o número total de observações;

r é o número de repetições;

v é o número de tratamentos;

b é o número de blocos;

k é o número de tratamentos por bloco (número de parcelas em cada bloco).

Considerando que um delineamento de blocos incompletos possui r repetições de v tratamentos em b blocos de k parcelas com $k < v$, então, o número de blocos nos quais ocorre cada par de tratamentos é $\lambda = r(k-1)/(v-1)$, com $\lambda < k < b$, a qual é conhecida como propriedade fundamental para os blocos incompletos balanceados.

De acordo com Chakrabarti (1962), Raghavarão (1988), Dey (1988) e Pimentel-Gomes (2009), os ensaios em blocos incompletos balanceados são classificados em três tipos, os quais são descritos a seguir:

Os blocos incompletos balanceados do tipo I, são aqueles nos quais podem ser agrupados em repetições. Como o que acontece no exemplo apresentado na Tabela 2.3, em que, se tem $v = 6$ tratamentos em $b = 15$ blocos de $k = 2$ parcelas, com $r = 5$ repetições e $\lambda = 1$.

Tabela 2.3 – Representação de um delineamento em blocos incompletos balanceados tipo I, com seis tratamentos em quinze blocos de duas parcelas

Repetição	Bloco	Cultivares	
1	1	A	B
	2	C	D
	3	E	F
2	4	A	C
	5	B	E
	6	D	F
3	7	A	D
	8	B	F
	9	C	E
4	10	A	E
	11	B	D
	12	C	F
5	13	A	F
	14	B	C
	15	D	E

Deste modo, o esquema de análise de variância pode ser modificado, como mostra a Tabela 2.4:

Tabela 2.4 – Análise de variância para delineamento de blocos incompletos balanceados que podem ser dispostos em grupos com uma repetição com seis tratamentos em quinze blocos de duas parcelas

Causa da variação	GL
Repetições	$r - 1 = 4$
Blocos dentro de repetições	$b - r = 10$
Tratamentos	$v - 1 = 5$
Erro	$(vr - 1) - (r - 1) - (b - r) - (v - 1) = 10$
Total	$vr - 1 = 29$

Os blocos incompletos balanceados do tipo II, são aqueles em que os blocos não podem ser agrupado em repetições, mas podem ser dispostos em grupos de repetições. A Tabela 2.5 está apresentando um exemplo com $g = 2$ grupos, $v = 5$ tratamentos em $b = 10$ blocos de $k = 2$ parcelas, com $r = 4$ repetições (duas em cada grupo) e $\lambda = 1$.

Tabela 2.5 – Representação de um delineamento em blocos incompletos balanceados tipo II, com cinco tratamentos em dez blocos de duas parcelas

Grupo I	Blocos	Cultivares	
Repetições I e II	1	A	B
	2	C	D
	3	B	E
	4	A	C
	5	D	E
Grupo II	Blocos	Cultivares	
Repetições II e III	6	A	D
	7	B	C
	8	C	E
	9	A	E
	10	B	D

O esquema de análise de variância segue apresentado na Tabela 2.6:

Tabela 2.6 – Análise de variância para delineamento de blocos incompletos balanceados que podem ser dispostos em grupos com mais de uma repetição com cinco tratamentos em dez blocos de duas parcelas

Causa da variação	GL
Grupos	$g - 1 = 1$
Blocos dentro dos grupos	$b - g = 8$
Tratamentos	$v - 1 = 4$
Erro	$(vr - 1) - (g - 1) - (b - g) - (v - 1) = 6$
Total	$vr - 1 = 19$

Os blocos incompletos balanceados do tipo III, são aqueles nos quais os blocos não podem ser arranjados em repetições e nem em grupos de repetições. Considerando, por exemplo, um experimento com $v = 6$ tratamentos em $B = 10$ blocos de $k = 3$ parcelas, com a seguinte disposição apresentada na Tabela 2.7:

Tabela 2.7 – Representação de um delineamento em blocos incompletos balanceados do tipo III, com seis tratamentos em dez blocos

Blocos	Cultivares		
1	A	B	E
2	A	B	F
3	A	C	D
4	A	C	F
5	A	D	E
6	B	C	D
7	B	C	E
8	B	D	F
9	C	E	F
10	D	E	F

Nesse caso, qualquer tratamento aparece duas vezes no mesmo bloco junto com cada um dos outros tratamentos. Por exemplo, o par (A, B) aparece no bloco 1 (A, B, E) e no bloco 2 (A, B, F). Dessa forma, tem-se $\lambda = 2$ e cada tratamento aparece em cinco blocos. O esquema para análise de variância para esse caso é apresentada a seguir na Tabela 2.8:

Tabela 2.8 – Esquema para análise de variância para delineamento de blocos incompletos balanceados do tipo III, os blocos não podem ser agrupados em repetição.

Causa da variação	GL
Blocos	$b - 1 = 9$
Tratamentos	$v - 1 = 5$
Erro	$(vr - 1) - (b - 1) - (v - 1) = 15$
Total	$vr - 1 = 29$

Conforme Cochran e Cox (1992), dentre outros autores, acrescentaram mais dois tipos de blocos incompletos balanceados: os blocos incompletos balanceados do tipo IV, para casos no qual o tratamento é igual ao número de blocos e, os blocos incompletos balanceados do tipo V, para pequenos experimentos.

De acordo com Zimmermann (2014), os experimentos de tipo IV e V são empregados rariíssimas vezes, portanto, não serão demonstrados neste trabalho. Sugere-se a leitura da literatura referenciada ao neles interessados.

2.2.1.2 Matriz de variâncias e covariâncias

Conforme Pimentel-Gomes (2009), a matriz de dispersão para tratamentos é dada por:

$$D(\hat{\tau}) = \mathbf{M}^{-1} \mathbf{C} \mathbf{M}^{-1} \sigma^2$$

em que,

\mathbf{M}^{-1} uma matriz diagonal com elementos $m_{ii} = \frac{k}{\lambda v}$ de dimensões $v \times v$ ($v =$ números de tratamentos);

\mathbf{C} é uma matriz singular, de característica igual a $(v-1)$, e com elementos;

$$c_{ii'} = \begin{cases} r(1 - \frac{1}{k}), & \text{se } i = i' \\ \frac{-\lambda}{k} & \text{se } i \neq i' \end{cases}$$

Desse modo, $D(\hat{\tau})$ é constituída dos seguintes elementos:

$$d_{ii'} = \begin{cases} k \frac{(v-1)}{\lambda v^2}, & \text{se } i = i' \\ \frac{-k}{\lambda v^2} & \text{se } i \neq i' \end{cases}$$

A variância da diferença entre os efeitos estimados de um par qualquer de tratamentos, é obtida de:

$$V(\hat{\tau}_i - \hat{\tau}_{i'}) = \frac{2k}{\lambda v} \sigma^2,$$

que é um resultado análogo àquele obtido por Chakrabarti (1962).

2.2.1.3 Variância da função linear estimável

Pimentel-Gomes (2009) salienta que, dada a função linear estimável dos parâmetros, $(\mathbf{P}' \hat{\tau})$, então $V = (\mathbf{P}' \hat{\tau})$ pode ser obtida diretamente da matriz \mathbf{M}^{-1} :

$$V(\mathbf{P}' \hat{\tau}) = \mathbf{P}' \mathbf{M}^{-1} \mathbf{P} \sigma^2$$

Assim, por exemplo, se a função linear estimável é um contraste do tipo $\hat{\tau}_1 - \hat{\tau}_2$, obtém-se:

$$V(\mathbf{P}' \hat{\tau}) = \begin{bmatrix} 1, -1, 0, \dots, 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k/\lambda v & 0 & \dots & 0 \\ 0 & k/\lambda v & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & k/\lambda v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \sigma^2$$

o que resulta

$$V(\mathbf{P}'\hat{\tau}) = V(\hat{t}_1 - \hat{t}_2) - \frac{2k}{\lambda v} \sigma^2$$

Resultado idêntico ao obtido em subsubseção 2.2.1.2 para estimadores de variância mínima.

2.2.1.4 Análise de variância para BIB

Com relação a construção da análise da variância, os autores citados anteriormente estão de acordo no que diz respeito à decomposição da soma de quadrados de total, a qual, é realizada da mesma forma como é feita para blocos completos, com a diferença de que a soma de quadrados dos tratamentos é ajustada para blocos e, ainda para os BIB tipo I e BIB tipo II ocorre a decomposição da soma de quadrados de blocos.

De acordo com Pimentel-Gomes (2009), esse ajuste para as soma de quadrados de tratamentos é obtido por:

$$SQ(aj) = \hat{\tau}'Q$$

no qual,

$$\hat{\tau} = \mathbf{M}^{-1}\mathbf{Q} \quad e \quad \mathbf{Q} = \mathbf{T} - \mathbf{N}\mathbf{A}^{-1}\mathbf{B},$$

sendo \mathbf{T} e \mathbf{B} os vetores dos totais observados para tratamentos e blocos, respectivamente;

\mathbf{A} , matriz dos “tamanhos” dos blocos;

\mathbf{N} , matriz de incidência dos tratamentos nos blocos (maiores detalhes ver em Pimentel-Gomes (2009)).

A análise em delineamentos de blocos incompletos se difere da análise de delineamentos em blocos completos, uma vez que, nas comparações entre efeitos de tratamentos e nas comparações entre efeitos dos blocos a ortogonalidade não se verifica, tratamentos e blocos são não ortogonais.

2.2.1.5 Análise de Variância Intrabloco

Tendo em consideração um total de N observações dispostas em b blocos, divididos em k_1, k_2, \dots, k_b unidades experimentais, conforme os v tratamentos, que ocorrem em r_1, r_2, \dots, r_v

vezes, verifica-se que

$$\sum_{i=1}^v r_i = \sum_{j=1}^b k_j = N$$

Segundo Oehlert (2010) um modelo estatístico geral para um BIB a ser analisado é

$$y_{ij} = \mu + \alpha_i + \beta_j + \varepsilon_{ij}$$

em que:

y_{ij} representa a i -ésima observação, do i -ésimo tratamento, no j -ésimo bloco;

μ é a média geral;

α_i o efeito do i -ésimo tratamento;

β_j representa o efeito do j -ésimo bloco;

ε_{ij} componente aleatória do erro, obedecendo as restrições usuais de normalidade, independência e homocedasticidade, $\varepsilon_{ij} \stackrel{iid}{\sim} N(0, \sigma^2)$.

Na Tabela 2.9 é apresentado uma análise de variância intrabloco para BIB.

Tabela 2.9 – Análise de variância intrabloco para BIB

Causa de variação	GL	SQ	QM	Razão de variância
Blocos	$b - 1$	$\sum_{j=1}^b \frac{y_{0j}^2}{k} - \frac{y_{00}^2}{N}$	$\frac{SQb}{b-1}$	$F_1 = \frac{QMb}{QMe}$
Trat(aj)	$v - 1$	$\frac{k}{\lambda v} \sum_{i=1}^v Q_i^2$	$\frac{SQtrat_{aj}}{v-1}$	$F_0 = \frac{QMtrat_{aj}}{QMe}$
Erro	$N - v - b + 1$	$SQt - SQtrat_{aj} - SQb$	$\frac{SQe}{N-v-b+1}$	
Total	$N - 1$	$\sum_{i=1}^v \sum_{j=1}^b (y_{ij})^2 - \frac{y_{00}^2}{N}$		

A hipótese nula H_0 similar a de um delineamento em blocos casualizados, será rejeitada ao nível de significância α , se e somente se $F_{(0)} > F_{(1-\alpha, v-1, N-v-b+1)}$.

Em certos ensaios de BIB pode-se desejar também aprofundar os estudos dos efeitos dos blocos e para isso impõe-se fazer uma diferente soma de quadrados total, ou seja:

$$SQt = SQe + SQtrat + SQb_{aj}$$

sendo que,

$$SQb_{aj} = k \sum_{i=1}^v \frac{Q_i^2}{\lambda v} + \frac{y_{0j}^2}{k} + \frac{y_{i0}^2}{r}$$

No tocante à eficiência de um ensaio em blocos incompletos balanceados em relação em blocos casualizados, Chakrabarti (1962), Cochran e Cox (1992), Pimentel-Gomes (2009) dentre outros, afirmam que:

$$E = \frac{\lambda v}{rk} < 1.$$

2.3 Experimentos com parcelas divididas em blocos incompletos

De modo geral existem poucos estudos sobre ensaios em parcelas divididas em blocos incompletos, dentre os quais podem se destacar Iemma (1987). Considerou um esquema em parcelas subdivididas no qual os v tratamentos principais estiverem presentes em r dos a blocos incompletos balanceados ($r < a$); cada bloco apresentasse k parcelas e cada par de tratamento principais ocorresse em λ blocos.

Já Robinson (1967), propôs em seu estudo um ensaio envolvendo t níveis do tratamento principal A e s níveis do tratamento secundário B . Então os s níveis do tratamento secundário são distribuídos em k subparcelas ($k < s$) de cada parcela, segundo um esquema de blocos incompletos balanceados, considerando cada parcela como bloco incompleto para tratamentos secundários. Sob essas condições, mostra que:

$$\lambda = \frac{R(k-1)}{s-1},$$

no qual $R = rk/s$ e r representa o número de parcelas que receberam o tratamento A . Nesse estudo levanta-se a hipótese de estudar o caso em que os tratamentos principais estão dispostos em blocos incompletos, mas não apresenta a discussão do problema.

Rees (1969) utilizando ensaios baseados no produto de Kronecker, destacou que o problema do confundimento nos ensaios em parcelas subdivididas e mencionando como precursores do processo Finney (1946) e Kempthorne (1947), ressaltam que, sob certas condições, a análise de ensaios com essa característica muito se assemelha à análise de ensaios com parcelas divididas em blocos incompletos.

Por sua vez, Gill (1978) destacou exemplos nos quais, animais são distribuídos aleatoriamente aos níveis de um tratamento principal, A , ou à combinação de dois ou mais tratamentos. Sob essas circunstâncias, ressalta que cada animal poderia constituir um bloco incompleto, pois como é esperado, nesse tipo de experimento, um único animal não recebe todos os tratamentos, mas apenas alguns deles.

Mejza e Mejza (1984) propuseram um delineamento incompleto em parcelas subdivididas onde os níveis de um fator A são aplicados ao total de parcelas e níveis do outro fator B para subparcelas, e onde o número de subparcelas em cada parcela inteira pode ser menor que o número de níveis de fator B . Os níveis do fator A estão dispostos em um delineamento inteiramente casualizado. Os níveis s do fator B estão dispostos em um desenho de bloco incompleto adequado dentro de cada nível de fator A , considerando as parcelas completas como blocos.

Os autores apresentaram um exemplo, onde se compara alguns níveis de alimentação (hormônios, drogas, etc.) no caso seria o fator B , dentro de algumas raças de suínos que seria o fator A . O número de animais dentro de um instalador determina o tamanho dos blocos. Se o número de níveis de fator B é maior que o número de animais em uma ninhada, podemos usar o delineamento de “split-plot” incompleto como um plano de experimentos.

Levando em conta o caso em que os animais são todos considerados como blocos incompletos, Gill (1978) propôs o seguinte modelo estatístico para análise de variância:

$$y_{ijk} = \mu + \alpha_i + D_{(i)j} + \beta_k + (\alpha\beta)_{(ik)} + (D\beta)_{(i)jk} + \varepsilon_{ijk} \quad (2.1)$$

para $i = 1, 2, \dots, a$; $j = 1, 2, \dots, r$ (por i); $k = 1, 2, \dots, b$ e $n = arb$;

sendo que

α_i efeito do i -ésimo nível do tratamento A ao qual os animais são designados;

$D_{(i)j}$ é o efeito aleatório dos indivíduos dentro de A , que corresponde ao erro (a);

β_k o efeito do k -ésimo nível do tratamento B , nos animais;

$(\alpha\beta)_{ik}$ é o efeito da interação entre o i -ésimo nível do tratamento A e o k -ésimo nível do tratamento B , sobre os animais;

$(D\beta)_{(i)jk}$ é o efeito da interação entre animais e níveis do tratamento B , que segundo o autor deve ser isolado do erro (b);

ε_{ijk} é o erro experimental atribuído à observação y_{ijk} , ou erro (b).

Sendo assim Gill (1978), corrobora com Chakrabartiu (1962), Cochran e Cox (1992) que desenvolveram estudos para ensaios em “split-plot” com blocos incompletos, defendendo a hipótese de que o erro experimental para parcelas é do tipo:

$$(1 - \rho)\sigma^2$$

e para subparcelas tem-se a forma:

$$[1 + (b - 1)\rho]\sigma^2$$

Com base no desenvolvimento do modelo 2.1:

$$y_{ij} = n_{ij}^l [\mu + \alpha_i + e_{ij} + \beta_l + (\alpha\beta)_{il} + \delta_{ijl}]$$

no qual para $i = 1, \dots, t$; $j = 1, \dots, r$; $l = 1, \dots, s$.

em que:

y_{ij} é o valor observado na subparcela que recebeu o l -ésimo nível do tratamento;

μ é o efeito médio;

α_i é o efeito do i -ésimo nível de A ;

β_l é o efeito do l -ésimo nível de B ;

$(\alpha\beta)_{il}$ é o efeito da interação do i -ésimo nível de A com o l -ésimo nível de B ;

e_{ij} e δ_{ijl} são variáveis aleatórias não correlacionadas, ambas com médias zero e variâncias constantes σ_e^2 e σ_δ^2 , respectivamente:

$$n_{ij}^l = \begin{cases} 1 & \text{se o } l\text{-ésimo nível de } B \text{ ocorre na } j\text{-ésima repetição do } i\text{-ésimo nível de } A \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases}$$

Tem-se de acordo com Robinson (1967) as diferenças entre médias estimadas para efeitos de tratamentos, envolvem quantidades do tipo:

$$\bar{z}_{il} = \frac{y_{..}}{rk} + \frac{WQ_{il} + \frac{W'}{k}(T_{il} - \frac{R}{r}Y_{i..})}{REW + \frac{R-\lambda}{k}W'}$$

com

$$Q_{il} = y_{i..} - \frac{1}{k} \sum_j n_{ij}^l y_{ij}$$

$$T_{il} = \sum_j n_{ij}^l y_{ij}$$

$$RE = R - \frac{R}{K} + \frac{\lambda}{k}$$

sendo, $W = \frac{1}{\sigma_\delta^2}$ e $W' = \frac{1}{\sigma_\delta^2 + k\sigma_\varepsilon^2}$ e R, r, K, s e λ já definido.

Sob essa concepção, Robinson (1967), destacou que a variância para a diferença entre tratamentos é dada por:

$$V(\bar{z}_{il} - \bar{z}_{i'l'}) = \begin{cases} \frac{2}{REW + \frac{R-\lambda}{k}W'} & \text{se } i = i' \\ \frac{2}{rkW'} + \frac{2(s-1)}{s(REW + \frac{R-\lambda}{k}W')} & \text{se } i \neq i' \end{cases}$$

Salienta ainda, que para as diferenças marginais entre médias, as variâncias são obtidas de:

$$V(\bar{z}_{i.} - \bar{z}_{i'}) \quad i \neq i'$$

$$V(\bar{z}_{.l} - \bar{z}_{.l'}) \quad l \neq l'$$

Para Gill (1978), as estimativas dos erros-padrão para as médias dos tratamentos A, B e interação AB , são dadas respectivamente por:

$$s(\bar{y}_{i..}) = [(QM_{D/A})/(br)]^{1/2}$$

$$s(\bar{y}_{..k}) = [(QM_\varepsilon)/(ar)]^{1/2}$$

$$s(\bar{y}_{i.k}) = [(QM_\varepsilon)/r]^{1/2}$$

sendo que

$$QM_{D/A} = \bar{s}_k^2 + (b-1)\bar{s}_{kk'};$$

$$QM_\varepsilon = \bar{s}_k^2 - \bar{s}_{kk'}$$

e,

\bar{s}_k^2 é a variância média amostral entre indivíduos para um dado grupo de tratamentos principais (A);

$\bar{s}_{kk'}$ é a covariância média amostral dentro do grupo de tratamentos B , ($k \neq k'$).

Dessa forma, o erro padrão adequado para testar a diferença entre duas médias de tratamentos principais é:

$$[(2QM_\varepsilon)/r]^{1/2}.$$

e para tratamentos secundários

$$[(2QM_{D/A})/r]^{1/2}.$$

Com relação a análise de variância Robinson (1967) apresentou o esquema apontado na Tabela 2.10, considerando as esperanças matemática dos quadrados médios.

Tabela 2.10 – Esquema para análise de variância considerando as esperanças dos quadrados médios para experimentos em parcelas subdivididas em blocos incompletos

Causas de variação	QM	GL	E(QM)	Causas de variação
A	$\sigma_{\delta}^2 + k\sigma_e^2 + \frac{rk}{t-1} \sum_i \alpha_i^2$	t - 1	$\sigma_{\delta}^2 + k\sigma_e^2 + \frac{k}{t-1} \sum_i \alpha_i^2$	A
Parcelas eliminando-se A	$\sigma_{\delta}^2 + k\sigma_e^2 + \frac{R-\lambda}{k} \sum_{i\ell} (\alpha\beta)_{i\ell}^2$	t(r - 1)	$\sigma_{\delta}^2 + \frac{s(R-1)}{r-1} \sigma_e^2$	Parcelas eliminando-se Tratamento
B eliminando-se	$\sigma_{\delta}^2 + \frac{tRE}{s-1} \sum_{\ell} \beta_{\ell}^2$	s - 1	$\sigma_{\delta}^2 + \frac{s-k}{s-1} \sigma_e^2 + \frac{Rt}{s-1} \sum_{\ell} \beta_{\ell}^2$	B
Parcelas				
A × B	$\sigma_{\delta}^2 + \frac{RE}{(r-1)(s-1)} \sum_{i\ell} (\alpha\beta)_{i\ell}^2$	(s - 1)(t - 1)	$\sigma_{\delta}^2 + \frac{s-k}{s-1} \sigma_e^2 + \frac{R}{(t-1)(s-1)} \sum_{i\ell} (\alpha\beta)_{i\ell}^2$	A × B
eliminando-se Parcelas				
Dentro de Parcelas	σ_{δ}^2	t(Rs-s-r+1)	σ_{δ}^2	Dentro de Parcelas

Robinson (1967) destacou que existem testes F exatos para avaliar as hipóteses $\beta_l = 0$, $\forall l$ e $\alpha\beta_{il} = 0$, para todo i, l , com base no erro experimental existente “dentro de parcelas.”

Entretanto, não existe um teste F exato para avaliar a hipótese $\alpha_i = 0$, para todo i , a menos que o experimento seja repetido. Assim, a soma de quadrados para “parcelas eliminando-se A” pode ser repartida em dois componentes, que podem ser calculados para soma de quadrados da diferença entre totais de parcelas correspondentes em duas ou mais repetições do experimento.

Gill (1978) apresenta a Tabela 2.11, a seguir, refletindo a correlação constantes entre quaisquer duas subparcelas de uma mesma parcela.

Tabela 2.11 – Correlação constantes entre quaisquer duas subparcelas de uma mesma parcela

Causas de variação	GL	QM
(Entre indivíduos)	(ar - 1)	
Tratamento (A)	a - 1	$[1 + (b - 1)\rho] \sigma^2 + \left(\sum_{i=1}^a \alpha_i^2 / \gamma_A \right)$
Erro (a)	a (r - 1)	$[1 + (b - 1)\rho] \sigma^2$
(Entre indivíduos)	ar (b - 1)	
Tratamento (B)	b - 1	$(1 - \rho)\sigma^2 + \sigma_{DB}^2 + \left(ar \sum_{k=1}^b \beta_k^2 \right) / \gamma_B$
A × B	(a - 1)(b - 1)	$(1 - \rho)\sigma^2 + \sigma_{DB}^2 + \left[r \sum_{i=1}^a \sum_{k=1}^b (\alpha\beta)_{ik}^2 \right] / \gamma_{AB}$
Erro (a)	a (r - 1)(b - 1)	$(1 - \rho)\sigma^2 + \sigma_{DB}^2$

Fonte: Retirado de Robinson (1967)

Tal como destacado por Cochran e Cox (1992), Gill (1978) enfatiza que essa correlação constante é geralmente positiva e, sob essa condição, o erro (b) é considerado menor que o erro (a).

Desta maneira, inferências sobre o fator B ou tratamento secundário e a interação $A \times B$ podem ser realizadas com maior precisão, do que sobre efeitos médios do fator A ou tratamentos primários.

Sobre à hipótese de nulidade para a interação $H_0 : (\alpha\beta)_{ik} = 0$, Gill (1978) aconselha o teste estatístico:

$$F = \frac{QM_{AB}}{QMErro}$$

em que QM_{AB} é o quadrado médio da interação $A \times B$, $QMErro$ é o quadrado médio do Erro. Comparado com o valor crítico $F_{\alpha\%;(b-1);[a(r-1)(b-1)]}$

Se a matriz de variâncias e covariâncias é uniforme para todos os níveis de A , mas não é homogênea para os níveis de B , a validade do teste para $H_0 : \alpha_i = 0, \forall i$ não é afetada, mas o teste estatístico para $H_0 : \beta_k = 0, \forall k$ deve ser comparado com o valor crítico:

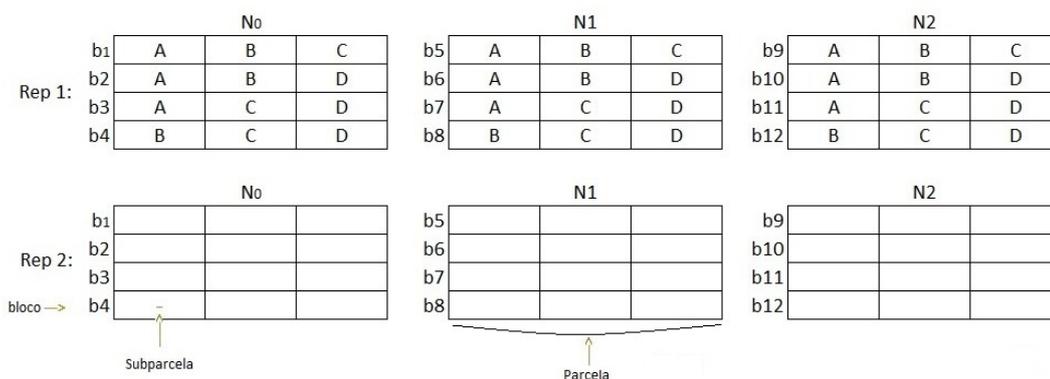
$$F_{\alpha\%;1;[a(r-1)]}$$

para um teste conservativo, ou, então seguir os procedimentos usuais da análise multivariada.

3 MATERIAL E MÉTODOS

Para exemplificar o método proposto considere um experimento com três tratamentos primários (N_0, N_1, N_2), quatro tratamentos secundários (A, B, C, D) dispostos na estrutura de delineamento em blocos incompletos do tipo III, em quatro blocos (b1, b2, b3, b4) em cada parcela ou tratamento primário, sem sorteio, tem-se o seguinte esboço.

Figura 3.1 – Esquema de distribuição dos tratamentos secundários em blocos incompletos balanceados segundo um esquema em parcelas divididas para avaliar três tratamentos principais (N_0, N_1, N_2) e quatro tratamentos secundários (A, B, C, D).



Cada bloco contém três subparcelas e estão dentro de cada tratamento primário em cada repetição. Em cada subparcela (ou bloquinho) de cada parcela estão distribuídos três dos quatro tratamentos secundários.

A apresentação dos tratamentos, blocos e repetição tem apenas a finalidade didática de caracterizar o exemplo e melhor visualização do esquema experimental. Na realidade todos eles devem ser casualizados, por exemplo, blocos dentro de cada parcela e tratamentos secundários dentro de cada bloco. No exemplo tem-se:

$v = 3$ número de tratamentos primários;

$r = 2$ número de repetições para tratamentos primários.

$b = 4$ número de blocos em cada parcela ou tratamento primário;

$k = 3$ número de subparcelas ou tratamentos secundários em cada bloco;

$u = 4$ número de tratamentos secundários;

$s = 3$ número de repetições para cada tratamento secundário em cada parcela;

$\lambda = 2$ número de ocorrência em que dois tratamentos secundários ocorrem juntos no mesmo bloco, em cada parcela.

Assim, pode definir,

$v \times r = 3 \times (2) = 6$ número de parcelas;

$b \times v \times r = 4 \times (3) \times 2 = 24$ blocos;

$b \times k = 4 \times (3) = 12$ número de unidades experimentais em cada parcela;

$n = b \times k \times v \times r = 4 \times (3) \times (3) \times 2 = 72$ número total de unidades experimentais;

$n = v \times r \times s \times u = 3 \times (2) \times (3) \times 4 = 72$ número total de unidades experimentais.

Verifica-se ainda que

$$(u - 1)\lambda = s(k - 1) = (4 - 1)2 = 3(3 - 1) = 6 \quad (3.1)$$

que é a propriedade fundamental dos blocos incompletos balanceados. Sem perda de generalidades, um modelo linear adotado para esta caracterização é dada por :

$$Y_{ijkl} = \mu + r_k + \tau_i + e_{ik} + b_{j(i)} + \tau'_l + \tau\tau'_{il} + e_{ijkl} \quad (3.2)$$

para $i = 1, 2, \dots, v$; $j = 1, 2, \dots, a$; $s = 1, 2, \dots, u$,

sendo que,

y_{ijkl} é o valor observado relativo ao i -ésimo tratamento primário e l -ésimo tratamento secundário no j -ésimo bloco da k -ésima repetição;

μ é a constante inerente a todos os valores observados;

r_k é o efeito da k -ésima repetição;

τ_i é o efeito do i -ésimo tratamento principal;

e_{ik} é o erro experimental a nível de parcelas;

$b_{j(i)}$ é o efeito do j -ésimo bloco dentro o i -ésimo tratamento primário;

τ'_l é o efeito do l -ésimo tratamento secundário;

$\tau\tau'_{il}$ é o efeito da interação do o i -ésimo tratamento primário com o l -ésimo tratamento secundário;

e_{ijkl} é o erro experimental associado à observação y_{ijkl}

O modelo linear de 3.2 pode ser representado na forma matricial por:

Tomando –se o modelo linear de 3.2, na forma matricial é representado por:

$$\mathbf{Y} = \mathbf{X}\boldsymbol{\theta} + \boldsymbol{\varepsilon} \quad (3.3)$$

em que:

\mathbf{Y} é o vetor de valores observados $(vrsu) \times 1$;

\mathbf{X} é uma matriz dos coeficientes dos parâmetros do modelo, com dimensões $(vrsu) \times p$;

$\boldsymbol{\theta}$ é o vetor de parâmetros desconhecidos do modelo, com dimensões $p \times 1$;

$\boldsymbol{\varepsilon}$ é um vetor de variações aleatórias não observáveis, com dimensões $(vrsu) \times 1$

$p = 1 + r + v + b + u + vu$ é o número de parâmetros.

Desse modo, efetuando-se a partição da matriz \mathbf{X} , conforme (PIMENTEL-GOMES, 2009), resultou

$$\mathbf{X} = [\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2, \mathbf{X}_3, \mathbf{X}_4, \mathbf{X}_5, \mathbf{X}_6]$$

onde,

\mathbf{X}_1 é o vetor que envolve a média geral, com dimensões $(vrsu) \times (1)$;

\mathbf{X}_2 é o matriz dos coeficientes associados as repetições, com dimensões $(surv) \times (r)$;

\mathbf{X}_3 é o matriz dos coeficientes associados aos tratamentos primários, com dimensões $(surv) \times (v)$;

\mathbf{X}_4 é o matriz do coeficientes associados aos blocos, com dimensões $(surv) \times (b)$;

\mathbf{X}_5 é o matriz do coeficientes associados aos tratamentos secundários, com dimensões $(surv) \times (u)$;

\mathbf{X}_6 é o matriz do coeficientes associados às interações $(tt')_{il}$, com dimensões $(surv) \times (uv)$;

A partição do vetor de parâmetros $\boldsymbol{\theta}$ correspondente á partição da matriz \mathbf{X} é dada por:
em que:

$$\boldsymbol{\theta} = [\mu : r' : t' : \beta' : t'^* : tt'^*] \quad (3.4)$$

em que:

$$\hat{\boldsymbol{r}} = \begin{bmatrix} \hat{r}_1 \\ \hat{r}_2 \\ \vdots \\ \hat{r}_r \end{bmatrix}_{(r \times 1)} \quad \text{é o vetor dos efeitos estimados para a repetição dos tratamentos principais}$$

$$\hat{\mathbf{t}} = \begin{bmatrix} \hat{t}_1 \\ \hat{t}_2 \\ \vdots \\ \hat{t}_r \end{bmatrix}_{(v \times 1)} \quad \text{é o vetor dos efeitos estimados para os tratamentos principais;}$$

$$\hat{\boldsymbol{\beta}} = \begin{bmatrix} \hat{b}_1 \\ \hat{b}_2 \\ \vdots \\ \hat{b}_b \end{bmatrix}_{(b \times 1)} \quad \text{é o vetor dos efeitos estimados para blocos;}$$

$$\hat{\mathbf{t}}^* = \begin{bmatrix} \hat{t}'_1 \\ \hat{t}'_2 \\ \vdots \\ \hat{t}'_u \end{bmatrix}_{(u \times 1)} \quad \text{é o vetor dos efeitos estimados para os tratamentos secundários;}$$

$$\hat{\mathbf{t}}^* = \begin{bmatrix} \hat{t}'_{11} \\ \hat{t}'_{12} \\ \vdots \\ \hat{t}'_{iu} \\ \hat{t}'_{21} \\ \hat{t}'_{22} \\ \hat{t}'_{2u} \\ \vdots \\ \hat{t}'_{v1} \\ \hat{t}'_{v2} \\ \vdots \\ \hat{t}'_{vu} \end{bmatrix}_{(vu \times 1)} \quad \text{é o vetor dos efeitos estimados para a interação } (tt')_{il};$$

3.1 Sistema de Equações Normais

Aplicando o método de mínimos quadrados ao modelo de 3.3, determina-se o seguinte sistema de equações normais:

$$\mathbf{X}'\mathbf{X}\hat{\boldsymbol{\theta}}^0 = \mathbf{X}'\mathbf{Y} \quad (3.5)$$

o qual resultou em

$$\underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{X}'_1\mathbf{X}_1 & \mathbf{X}'_1\mathbf{X}_2 & \mathbf{X}'_1\mathbf{X}_3 & \mathbf{X}'_1\mathbf{X}_4 & \mathbf{X}'_1\mathbf{X}_5 & \mathbf{X}'_1\mathbf{X}_6 \\ \mathbf{X}'_2\mathbf{X}_1 & \mathbf{X}'_2\mathbf{X}_2 & \mathbf{X}'_2\mathbf{X}_3 & \mathbf{X}'_2\mathbf{X}_4 & \mathbf{X}'_2\mathbf{X}_5 & \mathbf{X}'_2\mathbf{X}_6 \\ \mathbf{X}'_3\mathbf{X}_1 & \mathbf{X}'_3\mathbf{X}_2 & \mathbf{X}'_3\mathbf{X}_3 & \mathbf{X}'_3\mathbf{X}_4 & \mathbf{X}'_3\mathbf{X}_5 & \mathbf{X}'_3\mathbf{X}_6 \\ \mathbf{X}'_4\mathbf{X}_1 & \mathbf{X}'_4\mathbf{X}_2 & \mathbf{X}'_4\mathbf{X}_3 & \mathbf{X}'_4\mathbf{X}_4 & \mathbf{X}'_4\mathbf{X}_5 & \mathbf{X}'_4\mathbf{X}_6 \\ \mathbf{X}'_5\mathbf{X}_1 & \mathbf{X}'_5\mathbf{X}_2 & \mathbf{X}'_5\mathbf{X}_3 & \mathbf{X}'_5\mathbf{X}_4 & \mathbf{X}'_5\mathbf{X}_5 & \mathbf{X}'_5\mathbf{X}_6 \\ \mathbf{X}'_6\mathbf{X}_1 & \mathbf{X}'_6\mathbf{X}_2 & \mathbf{X}'_6\mathbf{X}_3 & \mathbf{X}'_6\mathbf{X}_4 & \mathbf{X}'_6\mathbf{X}_5 & \mathbf{X}'_6\mathbf{X}_6 \end{bmatrix}}_{\mathbf{X}'\mathbf{X}}}_{p \times p} \underbrace{\begin{bmatrix} \hat{\mu}^0 \\ \hat{r}^0 \\ \hat{t}^0 \\ \hat{\beta}^0 \\ \hat{t}^{*0} \\ \hat{t}^{*0} \end{bmatrix}}_{\hat{\boldsymbol{\theta}}^0}}_{p \times 1} = \underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{X}'_1\mathbf{Y} \\ \mathbf{X}'_2\mathbf{Y} \\ \mathbf{X}'_3\mathbf{Y} \\ \mathbf{X}'_4\mathbf{Y} \\ \mathbf{X}'_5\mathbf{Y} \\ \mathbf{X}'_6\mathbf{Y} \end{bmatrix}}_{\mathbf{X}'\mathbf{Y}}}_{p \times 1} \quad (3.6)$$

e suas submatrizes foram designadas por:

$\mathbf{X}'_1\mathbf{X}_1 = \mathbf{n}$ é uma submatriz de dimensões $(1) \times (1)$, constituída por $\text{surv} = n$ que é o número total de unidades experimentais ou de subparcelas. Considerando o exemplo usado em questão obteve-se os seguintes valores:

$$n = [72]$$

$\mathbf{X}'_1\mathbf{X}_2$ é uma submatriz de dimensões $(1) \times (r)$, representada por $a = \text{bkv} \times \mathbf{E}_{1 \times r}$ correspondente ao vetor associado ao mínimo de subparcelas em cada repetição, cujo \mathbf{E} é um vetor de uns.

$$a = 4 \times 3 \times 3 \times [1, 1]_{1 \times 2} = [36, 36]_{1 \times 2}$$

$\mathbf{X}'_1\mathbf{X}_3$ é uma submatriz de dimensões $(1) \times (v)$, representada por $b = \text{bkr} \times \mathbf{E}_{1 \times v}$ correspondente ao vetor associado ao mínimo de repetições dos tratamentos principais, cujo \mathbf{E} é um vetor de uns.

$$b = 4 \times 3 \times 2 \times [1, 1, 1]_{1 \times 3} = [24, 24, 24]_{1 \times 3}$$

$\mathbf{X}'_1 \mathbf{X}_4$ é uma submatriz de dimensões $(1) \times (rvu)$, representada por $d = k \mathbf{E}_{1 \times rvu}$ correspondente ao vetor associado ao número de subparcelas em cada bloco, cujo \mathbf{E} é um vetor de uns.

$$d = k \times \mathbf{E}_{1 \times 24} = 3 \times [1, 1, 1, \dots, 1]_{1 \times 24} = [3, 3, 3, \dots, 3]_{1 \times 24}$$

$\mathbf{X}'_1 \mathbf{X}_5$ é uma submatriz de dimensões $(1) \times (u)$, representada por $e = r v s \times \mathbf{E}_{1 \times u}$ correspondente ao vetor associado ao número de repetições dos tratamentos secundários, cujo \mathbf{E} é um vetor de uns.

$$e = rvs \times \mathbf{E}_{1 \times 4} = 2 \times 3 \times 3 \times [1, 1, 1, 1]_{1 \times 4} = [18, 18, 18, 18]_{1 \times 4}$$

$\mathbf{X}'_1 \mathbf{X}_6$ é uma submatriz de dimensões $(1) \times (vu)$, representada por $f = r \times s \times \mathbf{E}_{1 \times uv}$ correspondente ao vetor associado ao mínimo de repetições das interações dos tratamentos primários com os tratamentos secundários, cujo \mathbf{E} é um vetor de uns.

$$f = rs \times \mathbf{E}_{1 \times 12} = 2 \times 3 \times [1, 1, 1, \dots, 1]_{1 \times 12} = [6, 6, 6, \dots, 6]_{1 \times 12}$$

$$\mathbf{X}'_2 \mathbf{X}_2 = \mathbf{J} = \begin{bmatrix} vbk & 0 & \dots & 0 \\ 0 & vbk & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & vbk \end{bmatrix}_{(r \times r)} = vbk \times \mathbf{I}_r$$

em que \mathbf{I}_r é uma matriz identidade de dimensões $r \times r$ (matriz do número de unidades experimentais em cada repetição).

$$\mathbf{J} = 3 \times 4 \times 3 \times \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}_{(2 \times 2)} = \begin{bmatrix} 36 & 0 \\ 0 & 36 \end{bmatrix}_{(2 \times 2)}$$

$$\mathbf{X}'_2 \mathbf{X}_3 = \mathbf{G} = \begin{bmatrix} bk & bk & \dots & \dots & bk \\ bk & bk & \dots & \dots & bk \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ bk & bk & \dots & \dots & bk \end{bmatrix}_{(r \times v)} = bk \times \mathbf{E}_{r \times v}$$

em que $\mathbf{E}_{(r \times v)}$ é uma matriz cujos elementos são todos iguais a unidade e \mathbf{G} é matriz do número de subparcelas em cada tratamento principal.

$$\mathbf{G} = 4 \times 3 \times \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}_{(r \times v)} = \begin{bmatrix} 12 & 12 & 12 \\ 12 & 12 & 12 \end{bmatrix}_{(r \times v)}$$

$$\mathbf{X}'_2 \mathbf{X}_4 = \mathbf{C} = \begin{bmatrix} k & \dots & k & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & \dots & 0 & k & \dots & k & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots \\ 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & k & \dots & k \end{bmatrix}_{(r \times b)}$$

é a matriz de incidência dos blocos $(b)_j$ em cada repetição

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} 3 & 3 & 3 & \dots & 3 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 3 & 3 & 3 & \dots & 3 \end{bmatrix}_{(2 \times 24)}$$

$$\mathbf{X}'_2 \mathbf{X}_5 = \mathbf{M} = \begin{bmatrix} sv & sv & \dots & sv \\ sv & sv & \dots & sv \\ \dots & \dots & \ddots & \dots \\ sv & sv & \dots & sv \end{bmatrix}_{(r \times u)} = sv \times \mathbf{E}_{(r \times u)}$$

em que $\mathbf{E}_{(r \times u)}$ é uma matriz cujos elementos são todos iguais à unidade e \mathbf{M} é a matriz do número de tratamentos secundários nas repetições $(r)_k$ ou matriz de incidência dos tratamentos secundários nas repetições.

$$\mathbf{M} = 3 \times 3 \times \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}_{(2 \times 4)} = \begin{bmatrix} 9 & 9 & 9 & 9 \\ 9 & 9 & 9 & 9 \end{bmatrix}_{(2 \times 4)}$$

$$\mathbf{X}'_2 \mathbf{X}_6 = \mathbf{N} = \begin{bmatrix} s & s & \dots & s \\ s & s & \dots & s \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ s & s & \dots & s \end{bmatrix}_{(r \times uv)} = s \times \mathbf{E}_{(r \times uv)}$$

\mathbf{N} é a matriz de incidência do número de interações $(tt')_{(il)}$ nas repetições $(r)_k$.

$$\mathbf{N} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1 & \dots & 1 \end{bmatrix}_{(1 \times 12)} = \begin{bmatrix} 3 & 3 & \dots & 3 \\ 3 & 3 & \dots & 3 \end{bmatrix}_{(1 \times 12)}$$

$$\mathbf{X}_3' \mathbf{X}_3 = \mathbf{K} = \begin{bmatrix} bkr & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & bkr & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & bkr \end{bmatrix}_{(v \times v)} = bkr \times \mathbf{I}_v$$

em que \mathbf{K} é a matriz diagonal de dimensões $v \times v$, correspondente ao número de repetição de cada tratamentos primário

$$\mathbf{K} = 2 \times 4 \times 3 \times \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}_{(3 \times 3)} = \begin{bmatrix} 24 & 0 & 0 \\ 0 & 24 & 0 \\ 0 & 0 & 24 \end{bmatrix}_{(3 \times 3)}$$

$\mathbf{X}_3' \mathbf{X}_4 = \mathbf{P}$, de dimensões $(v) \times (b)$, no qual

$$P_{ij} = \begin{cases} k, & \text{se o tratamento primário } i \text{ ocorrer com o bloco } j \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$$

\mathbf{P} é uma matriz de incidência do i -ésimo tratamento principal no j -ésimo bloco.

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} k & k & k & k & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & k & k & k & k & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & k & k & k & k & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & k & k & k & k & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & k & k & k & k & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & k & k & k & k & 0 \end{bmatrix}_{(v \times rvb)}$$

$$\mathbf{X}_3' \mathbf{X}_5 = \mathbf{Q} = \begin{bmatrix} rs & rs & \dots & rs \\ rs & rs & \dots & rs \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ rs & rs & \dots & rs \end{bmatrix}_{(v \times u)} = rs \times \mathbf{E}_{(v \times u)}$$

\mathbf{Q} é uma matriz de dimensões $(v \times u)$, correspondente ao número de repetições de cada tratamento secundário em cada tratamento primário.

$$\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} 6 & 6 & \dots & 6 \\ 6 & 6 & \dots & 6 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 6 & 6 & \dots & 6 \end{bmatrix}_{(3 \times 4)}$$

$$\mathbf{X}'_3 \mathbf{X}_6 = \mathbf{F} = \begin{bmatrix} rs & \dots & rs & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & rs & \dots & rs & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & rs & \dots & rs \end{bmatrix}_{(r \times uv)}$$

é uma matriz de dimensões $v \times uv$, correspondente a incidência dos tratamentos principais nos pares $(tt')_{(i\ell)}$.

$$\mathbf{F} = \begin{bmatrix} 6 & 6 & 6 & 6 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 6 & 6 & 6 & 6 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 6 & 6 & 6 & 6 & 0 & 0 & 0 & 0 & 6 & 6 & 6 & 6 \end{bmatrix}_{(3 \times 12)}$$

$$\mathbf{X}'_4 \mathbf{X}_4 = \mathbf{X} = \begin{bmatrix} k & 0 & \dots & 0 \\ 0 & k & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & k \end{bmatrix}_{(b \times b)} = k\mathbf{I}_{(b)}$$

\mathbf{X} é uma matriz diagonal de dimensões $b \times b$ associado ao número de unidades experimentais em cada bloco

$$\mathbf{X} = \begin{bmatrix} 3 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 3 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 3 \end{bmatrix}_{(24 \times 24)} = 3\mathbf{I}_{(24)}$$

$\mathbf{X}'_4 \mathbf{X}_5 = \mathbf{V}$, de dimensão $(b) \times (u)$

$$\mathbf{V}_{(\ell,j)} = \begin{cases} 1, & \text{se } t'_\ell \text{ ocorre no bloco } j \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases}$$

\mathbf{V} é a matriz de incidência do tratamento secundário, no bloco j .

$$\mathbf{V} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}_{(24 \times 4)}$$

$\mathbf{X}'_4 \mathbf{X}_6 = \mathbf{W}$ de dimensão $(b) \times (uv)$

$$\mathbf{W}_{(i\ell, j)} = \begin{cases} 1, & \text{se } (tt')_{i\ell} \text{ ocorre no bloco } j \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases}$$

\mathbf{W} é a matriz de incidência da interação $(tt')_{i\ell}$, no bloco j .

$$\mathbf{W} = \begin{bmatrix}
 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\
 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1
 \end{bmatrix} \quad (24 \times 12)$$

$$\mathbf{X}'_5 \mathbf{X}_5 = \mathbf{Y} = \begin{bmatrix}
 rvs & 0 & 0 & \dots & 0 \\
 0 & rvs & 0 & \dots & 0 \\
 \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\
 0 & 0 & 0 & \dots & rvs
 \end{bmatrix} \quad (u \times u) = rvs \mathbf{I}_u$$

\mathbf{Y} é a matriz diagonal associado ao mínimo de repetições dos tratamentos secundários.

$$\mathbf{Y} = \begin{bmatrix} 18 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 18 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 18 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 18 \end{bmatrix}_{(4 \times 4)}$$

$\mathbf{X}'_5 \mathbf{X}_6 = \mathbf{D} = [rs \times I_{(u)} : rs \times I_{(u)} : \dots : rs \times I_{(u)}]_{(u \times uv)}$ é a matriz de incidência dos tratamentos secundários nos pares $(tt')_{(i\ell)}$.

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} 6 & 0 & 0 & 0 & 6 & 0 & 0 & 0 & 6 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 & 0 & 0 & 6 & 0 & 0 & 0 & 6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 6 & 0 & 0 & 0 & 6 & 0 & 0 & 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 6 & 0 & 0 & 0 & 6 & 0 & 0 & 0 & 6 \end{bmatrix}_{(4 \times 12)}$$

$$\mathbf{X}'_6 \mathbf{X}_6 = \mathbf{Z} = \begin{bmatrix} rs & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & rs & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & rs \end{bmatrix}_{(uv \times uv)} = rs \times \mathbf{I}_{(uv)}$$

\mathbf{Z} é uma matriz diagonal de dimensões $(vu \times vu)$, associada ao número de repetições dos pares $(tt')_{i\ell}$.

$$\mathbf{Z} = \begin{bmatrix} 6 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 6 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 6 \end{bmatrix}_{(12 \times 12)} = 6\mathbf{I}_{(12)}$$

Assim, o sistema de equações normais pode ser escrito como:

$$\begin{bmatrix} n & a & b & d & e & f \\ d' & J & G & C & M & N \\ b' & G' & K & P & Q & F \\ d' & C' & p' & X & V & W \\ e' & M' & Q' & V' & Y & D \\ f' & N' & F' & W' & D' & Z \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \hat{m} \\ \hat{r} \\ \hat{i} \\ \hat{\beta} \\ \hat{t}^* \\ \hat{t}^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{X}'_1 \mathbf{Y} \\ \mathbf{X}'_2 \mathbf{Y} \\ \mathbf{X}'_3 \mathbf{Y} \\ \mathbf{X}'_4 \mathbf{Y} \\ \mathbf{X}'_5 \mathbf{Y} \\ \mathbf{X}'_6 \mathbf{Y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{G} \\ \mathbf{R} \\ \mathbf{T} \\ \mathbf{B} \\ \mathbf{T}^* \\ \boldsymbol{\delta} \end{bmatrix} \quad (3.7)$$

\hat{m} = efeito estimado da média geral

\hat{G} = total geral observado

$$\mathbf{X}'_1\mathbf{Y} = \mathbf{G}$$

$$\mathbf{X}'_2\mathbf{Y} = \mathbf{R} = \begin{bmatrix} R_1 \\ R_2 \\ \vdots \\ R_r \end{bmatrix} \quad \text{é um vetor com os totais observados para as repetições dos tratamentos}$$

$(r \times 1)$

primários;

$$\mathbf{X}'_3\mathbf{Y} = \mathbf{T} = \begin{bmatrix} T_1 \\ T_2 \\ \vdots \\ T_v \end{bmatrix} \quad \text{é um vetor com os totais observados para os tratamentos primários;}$$

$(v \times 1)$

$$\mathbf{X}'_4\mathbf{Y} = \mathbf{B} = \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \\ \vdots \\ B_b \end{bmatrix} \quad \text{é um vetor com os totais para blocos;}$$

$(b \times 1)$

$$\mathbf{X}'_5\mathbf{Y} = \mathbf{T}^* = \begin{bmatrix} T'_1 \\ T'_2 \\ \vdots \\ T'_u \end{bmatrix} \quad \text{é um vetor com os totais observados para os tratamentos secundários;}$$

$(u \times 1)$

$$\mathbf{X}'_6\mathbf{Y} = \boldsymbol{\delta} = \begin{bmatrix} TT'_{11} \\ TT'_{12} \\ \vdots \\ TT'_{iu} \\ TT'_{21} \\ TT'_{22} \\ TT'_{2u} \\ \vdots \\ TT'_{v1} \\ TT'_{v2} \\ \vdots \\ TT'_{vu} \end{bmatrix} \quad \text{é um vetor com os totais observados para interação } (tt')_{il};$$

(vu×1)

Efetuando as multiplicações sugeridas em 3.7 forma obtidas as equações

$$n\hat{m} + a\hat{r} + b\hat{t} + d\hat{\beta} + e\hat{t}^* + f\hat{t}^* = \mathbf{G} \quad (3.8)$$

$$a'\hat{m} + J\hat{r} + G\hat{t} + C\hat{\beta} + M\hat{t}^* + N\hat{t}^* = \mathbf{R} \quad (3.9)$$

$$b'\hat{m} + G'\hat{r} + K\hat{t} + P\hat{\beta} + Q\hat{t}^* + F\hat{t}^* = \mathbf{T} \quad (3.10)$$

$$d'\hat{m} + C'\hat{r} + P'\hat{t} + X\hat{\beta} + V\hat{t}^* + W\hat{t}^* = \mathbf{B} \quad (3.11)$$

$$e'\hat{m} + M'\hat{r} + Q'\hat{t} + V'\hat{\beta} + Y\hat{t}^* + D\hat{t}^* = \mathbf{T}^* \quad (3.12)$$

$$f'\hat{m} + N'\hat{r} + F'\hat{t} + W'\hat{\beta} + D'\hat{t}^* + Z\hat{t}^* = \boldsymbol{\delta} \quad (3.13)$$

3.2 Solução do Sistema de Equações Normais

O sistema de equações normais (SEN) como apresentado possui $1 + r + v + rv + b + u + vu$ equações. Mas, verifica-se que várias delas são dependentes, como por exemplo, a soma das equações de t , a soma das equações de r e a soma das equações t^* , que são idênticas à equação de μ , implicando em três relações linearmente dependentes entre as linhas de $\mathbf{X}'\mathbf{X}$.

Nas equações de tt' , as somas em relação a i , são iguais às equações de t , para $i = 1, 2, \dots, v$, representando outras v relações lineares entre as linhas de $\mathbf{X}'\mathbf{X}$. De modo semelhante, as somas em relação a l , são iguais as equações de t' para $l = 1, 2, \dots, u$; no entanto, dessas

u soluções lineares representadas agora, somente $u - 1$ delas são linearmente independentes daquelas já descritas.

Assim, o número de relações lineares dependentes é $3 + v + u - 1 + 1 = v + u + 3$. Portanto, o posto de $\mathbf{X}'\mathbf{X}$ é $r(x) = vu + b + r - 1$ que é menor que o $\min(n; p)$, sendo p o número de parâmetros. Este fato caracteriza que o sistema de equações normais não possui solução única, pois a matriz $\mathbf{X}'\mathbf{X}$ é singular e, assim, não existe uma inversa $(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}$, logo o sistema de equações normais é indeterminado, mas é sempre consistente (IEMMA, 1987).

Uma maneira de se obter a solução de um sistema de equações indeterminado, mas, consistente, é a utilização de restrições nas soluções. A restrição tem como finalidade completar o posto da matriz $\mathbf{X}'\mathbf{X}$, tornando se a invertível.

Completando-se o posto da matriz \mathbf{X} , com $p - r(x) = v + u + 2$ linhas linearmente independentes das linhas da matriz \mathbf{X} e que constituem um conjunto de funções paramétricas conjuntamente não estimáveis e independentes entre si.

De acordo com Chakrabartiu (1962), Cochran e Cox (1992) e Pimentel-Gomes (2009) um conjunto de restrições nas soluções é constituído pelas funções lineares não estimáveis.

$$\sum_{b=1}^r \hat{r}_{\ell_2} = \sum_{i=1}^v \hat{t}_i = \sum_{p=1}^{\mu} \hat{t}'_{\ell} = \sum_{j=1}^{bvr} \hat{b}_j = \sum_{i=1}^v tt'_{i\ell} = \sum_{\ell=1}^u tt'_{i\ell} = 0 \quad (3.14)$$

Aplicando as restrições de 3.14 ao sistemas de equações normais de 3.6 e de acordo com as matrizes envolvidas, o SEN pode ser escrito como:

$$n\hat{m} = \mathbf{G} \quad (3.15)$$

$$d'\hat{m} + J\hat{r} = \mathbf{R} \quad (3.16)$$

$$b'm + k\hat{t} = \mathbf{T} \quad (3.17)$$

$$d'\hat{m} + \mathbf{C}'\hat{r} + \mathbf{P}'\hat{t} + \mathbf{X}\hat{\beta} + \mathbf{V}'\hat{t}^* + \mathbf{W}\hat{t}^* = \mathbf{B} \quad (3.18)$$

$$e'\hat{m} + \mathbf{V}'\hat{\beta} + \mathbf{Y}\hat{t}^* = \mathbf{T}^* \quad (3.19)$$

$$f'\hat{m} + \mathbf{F}'\hat{t} + \mathbf{W}'\hat{\beta} + \mathbf{D}'\hat{t}^* + \mathbf{Z}\hat{t}^* = \boldsymbol{\delta} \quad (3.20)$$

3.2.1 Estimação dos efeitos dos parâmetros

Então da Equação (3.15) tem-se

$$\begin{aligned} n\hat{m} &= G = \mathbf{X}_1\mathbf{Y} \\ \hat{m} &= \frac{G}{n} = \frac{G}{surv} \end{aligned}$$

Logo, \hat{m} refere-se a média geral do experimento, este fato sempre ocorre quando se impõe restrições do tipo soma dos efeitos iguais a zero (IEMMA,1981; SEARLE,1971).

Na Equação (3.16) obteve-se

$$\begin{aligned} a'\hat{m} + \mathbf{J}\hat{t} &= R \\ \hat{t} &= \mathbf{J}^{-1}\mathbf{R} - \mathbf{J}^{-1}a'\hat{m} = \frac{1}{vbr}\mathbf{R} - \mathbf{E}_{r \times 1}\hat{m} \end{aligned}$$

Logo,

$$\hat{t}_k = \frac{1}{vbk}R(k) - \hat{m}$$

que é uma solução igual aquelas obtidas para repetição nos ensaios em parcelas divididas com delineamentos inteiramente casualizados.

Para determinação dos efeitos estimados dos tratamentos primários toma-se a equação 3.17.

$$b'\hat{m} + \mathbf{K}\hat{t} = \mathbf{T} = \mathbf{X}'_3\mathbf{Y}$$

E isolando o efeito dos tratamentos primários, obtêm-se

$$\hat{t} = \mathbf{K}^{-1}\mathbf{T} - \mathbf{K}^{-1}b'\hat{m} = \frac{1}{bkr}\mathbf{T} - \mathbf{E}_{v \times 1}\hat{m}$$

o que resulta em

$$\hat{t}_i = \frac{1}{bkr} \mathbf{T}_i - \hat{m}$$

que é uma solução idêntica à aquelas obtidas para tratamento primários nos ensaios em parcelas subdivididas com delineamentos em bloco (completos) casualizados.

Na Equação (3.18) do sistema de equações normais, tem-se os efeitos dos blocos, a qual foi escrita como:

$$d'\hat{m} + \mathbf{C}'\hat{r} + \mathbf{P}'\hat{t} + \mathbf{X}\hat{\beta} + \mathbf{V}\hat{t}^* + \mathbf{W}\hat{t}^* = \mathbf{B} = \mathbf{X}'_4\mathbf{Y}$$

E os efeitos dos blocos são estimados por

$$\hat{\beta} = \mathbf{X}^{-1} (\mathbf{B} - d'\hat{m} - \mathbf{C}'\hat{r} - \mathbf{P}'\hat{t} - \mathbf{V}\hat{t}^* - \mathbf{W}\hat{t}^*)$$

cujo o estimador depende dos demais parâmetros, fato que não ocorre quando o uso do delineamento em blocos casualizados completos.

E substituindo $\hat{\beta}$ na Equação (3.19) tem-se

$$e'\hat{m} + \mathbf{V}'\hat{\beta} + \mathbf{Y}\hat{t}^* = \mathbf{T}^* = \mathbf{X}'_5\mathbf{Y}$$

em que

$$pmb\mathbf{Y}\hat{t}^* = \mathbf{T}^* - \mathbf{V}'\hat{\beta} - e'\hat{m}$$

Substituindo $\hat{\beta}$, tem-se

$$\mathbf{Y}\hat{t}^* = \mathbf{T}^* - \mathbf{V}'(\mathbf{X}^{-1}\mathbf{B} - \mathbf{X}^{-1}d'\hat{m} - \mathbf{X}^{-1}\mathbf{C}'\hat{r} - \mathbf{X}^{-1}\mathbf{P}'\hat{t} - \mathbf{X}^{-1}\mathbf{V}\hat{t}^* - \mathbf{X}^{-1}\mathbf{W}\hat{t}^*) - e'\hat{m}$$

$$\mathbf{Y}\hat{t}^* = \mathbf{T}^* - \mathbf{V}'\mathbf{X}^{-1}\mathbf{B} + \mathbf{V}'\mathbf{X}^{-1}d'\hat{m} + \mathbf{V}'\mathbf{X}^{-1}\mathbf{C}'\hat{r} + \mathbf{V}'\mathbf{X}^{-1}\mathbf{P}'\hat{t} + \mathbf{V}'\mathbf{X}^{-1}\mathbf{V}\hat{t}^* + \mathbf{V}'\mathbf{X}^{-1}\mathbf{W}\hat{t}^* - e'\hat{m}$$

Substituindo \hat{r} , \hat{t} , \hat{t}^* , obtêm-se

$$Y\hat{t}^* = T^* - V'X^{-1}B + V'X^{-1}d'\hat{m} + V'X^{-1}C'(J^{-1}R - J^{-1}d'\hat{m}) + V'X^{-1}P'(K^{-1}T - K^{-1}b'\hat{m}) \\ + V'X^{-1}V\hat{t}^* + V'X^{-1}W(Z_1^- \delta - Z_1^- D'Y^{-1}T^* - Z_1^- (WX^{-1} - D'Y^{-1}V'X^{-1})B) - e'\hat{m}$$

$$(Y - V'X^{-1}V)\hat{t}^* = T^* - V'X^{-1}B + V'X^{-1}d'\hat{m} + V'X^{-1}CJ^{-1}R - V'X^{-1}CJ^{-1}d'\hat{m} + \\ V'X^{-1}P'K^{-1}T - V'X^{-1}P'K^{-1}b'\frac{G}{n} + V'X^{-1}WZ_1^- \delta - V'X^{-1}WZ_1^- D'Y^{-1}T^* - \\ - V'X^{-1}WZ_1^- W'X^{-1}B + V'X^{-1}WZ_1^- D'Y^{-1}V'X^{-1}B - e'\frac{G}{n}$$

$$\therefore V'X^{-1}d' = V'X^{-1}CJ^{-1}d'$$

$$\therefore V'X^{-1}CJ^{-1}R = e'\frac{G}{n}$$

$$\therefore V'X^{-1}P'K^{-1}T = V'X^{-1}P'K^{-1}b'\frac{G}{n}$$

$$\therefore V'X^{-1}W'Z_1^- \delta = V'X^{-1}WZ_1^- D'Y^{-1}T^*$$

$$\therefore V'X^{-1}W'Z_1^- W'X^{-1}B = V'X^{-1}WZ_1^- D'Y^{-1}V'X^{-1}B$$

Resulta em

$$(Y - V'X^{-1}V)\hat{t}^* = T^* - V'X^{-1}B$$

cujo resultado está coerente com os experimentos em blocos incompletos nas quais os tratamentos dependem dos blocos (FEDERER, 1955). Resultando então, o sistema de equações normais para os efeitos estimados dos tratamento secundários, ajustados para efeitos de blocos.

Fazendo-se como Pimentel-Gomes (2009), Raghavarão (1988) e Iemma (1987)

$$Y - V'X^{-1}V = C \text{ e } T^* - V'X^{-1}B = Q$$

em que C tem dimensão $(u) \times (u)$ e tal que

$$C_{\ell\ell'} = \begin{cases} vrs\left(\frac{k-1}{k}\right) & \text{se } \ell = \ell' \\ -\frac{\lambda vr}{k} & \text{se } \ell \neq \ell' \end{cases}$$

em que \mathbf{Q} é um vetor de dimensão $(u) \times (1)$, tal que

$$\mathbf{Q}_\ell = \mathbf{T}_\ell - \frac{1}{k} j_\ell$$

com j_ℓ sendo a soma dos totais de blocos que contém o ℓ -ésimo tratamento secundário, obteve-se o sistema de equações normais como de modo usual na teoria de blocos incompletos. \mathbf{C} é uma matriz singular de característica $\ell = u - 1$. Dessa forma adotou-se uma matriz \mathbf{Z} , de restrições, conforme Pimentel Gomes (1967), tal que:

$$\mathbf{Z}\hat{t}^* = 0 \quad e \quad \mathbf{Z} = \frac{-\lambda vr}{k} \mathbf{E}_{u \times u}$$

e obteve-se o sistema $\mathbf{M}\hat{t}^* = \mathbf{Q}$ em que $\mathbf{M} = \mathbf{C} - \mathbf{Z}$ é do tipo

$$m_{\ell\ell'} = \begin{cases} \frac{vr\lambda u}{k} & \text{se } \ell = \ell' \\ 0 & \text{se } \ell \neq \ell' \end{cases}$$

pois

$$\ell = \ell' \Rightarrow m_{\ell\ell} = vs\left(1 - \frac{1}{k}\right) + \frac{\lambda v}{k} = \frac{vsk - vs}{k} + \frac{\lambda v}{k} = \frac{vs(k-1)}{k} + \frac{\lambda v}{k}$$

Porém, nos blocos incompletos balanceados $s(k-1) = \lambda(u-1)$

$$m_{\ell\ell} = \frac{vr\lambda u - ur\lambda + vr\lambda}{k} \quad m_{\ell\ell'} = \frac{\lambda uv}{k}$$

$$\ell \neq \ell' \Rightarrow m_{\ell\ell'} = \frac{-vr\lambda}{k} + \frac{vr\lambda}{k} = 0$$

então

$$m = \frac{vr\lambda u}{k} I_{(u)}$$

Assim uma solução para $\mathbf{C}\hat{t}^*$ pode ser obtida de

$$\hat{t}^* = \mathbf{M}^{-1} \mathbf{Q}$$

Para a determinação dos efeitos estimados da interação ou pares tt_{il} reportando-se a equação 3.20 do sistema de equações normais tem-se

$$f'\hat{m} + \mathbf{F}'\hat{t} + \mathbf{W}'\hat{\beta} + \mathbf{D}'\hat{t}^* + \mathbf{Z}\hat{t}^* = \boldsymbol{\delta} = \mathbf{X}'_6\mathbf{Y}$$

em que

$$\hat{t} = \mathbf{K}^{-1}\mathbf{T} - \mathbf{K}^{-1}\mathbf{b}'\hat{m}$$

$$\hat{\beta} = \mathbf{X}^{-1}\mathbf{B} - \mathbf{X}^{-1}\mathbf{d}'\hat{m} - \mathbf{X}^{-1}\mathbf{C}' - \hat{t}\mathbf{X}^{-1}\mathbf{P}\hat{t} - \mathbf{X}^{-1}\mathbf{V}\hat{t}^* - \mathbf{X}^{-1}\mathbf{W}\hat{t}^*$$

$$\begin{aligned} \hat{t}^* &= \mathbf{Y}^{-1}\mathbf{T} - \mathbf{Y}^{-1}\mathbf{V}'\mathbf{X}^{-1}\mathbf{B} + \mathbf{Y}^{-1}\mathbf{V}'\mathbf{X}^{-1}\mathbf{d}'\hat{m} + \mathbf{Y}^{-1}\mathbf{V}'\mathbf{X}^{-1}\mathbf{C}'\hat{t} \\ &\quad + \mathbf{Y}^{-1}\mathbf{V}'\mathbf{X}^{-1}\mathbf{P}\hat{t} + \mathbf{Y}^{-1}\mathbf{V}'\mathbf{X}^{-1}\mathbf{V}\hat{t}^* + \mathbf{Y}^{-1}\mathbf{V}'\mathbf{X}^{-1}\mathbf{W}\hat{t}^* \end{aligned}$$

obteve-se

$$\begin{aligned} \mathbf{Z}\hat{t}^* &= \boldsymbol{\delta} - \mathbf{D}'\mathbf{Y}^{-1}\mathbf{T}^* + \mathbf{D}'\mathbf{Y}^{-1}\mathbf{V}'\mathbf{X}^{-1}\mathbf{B} - \mathbf{W}\mathbf{X}^{-1}\mathbf{B} - \\ &\quad - \mathbf{D}'\mathbf{Y}^{-1}\mathbf{V}'\mathbf{X}^{-1}\mathbf{C}'\hat{t} + \mathbf{W}'\mathbf{X}^{-1}\mathbf{C}'\hat{t} \\ &\quad - \mathbf{D}'\mathbf{Y}^{-1}\mathbf{V}'\mathbf{X}^{-1}\mathbf{P}\hat{t} - \mathbf{F}'\hat{t} - \mathbf{D}'\mathbf{Y}^{-1}\mathbf{V}'\mathbf{X}^{-1}\mathbf{V}\hat{t}^* \\ &\quad + \mathbf{W}'\mathbf{X}^{-1}\mathbf{V}\hat{t}^* - \mathbf{D}'\mathbf{Y}^{-1}\mathbf{V}'\mathbf{X}^{-1}\mathbf{W}\hat{t}^* \\ &\quad + \mathbf{W}'\mathbf{X}^{-1}\mathbf{W}\hat{t}^* - \mathbf{D}'\mathbf{Y}^{-1}\mathbf{V}'\mathbf{X}^{-1}\mathbf{d}'\hat{m} \\ &\quad + \mathbf{D}'\mathbf{Y}^{-1}\mathbf{e}'\hat{m} + \mathbf{W}'\mathbf{X}^{-1}\mathbf{d}'\hat{m} - f'\hat{m} \end{aligned}$$

Têm-se que

$$\therefore \mathbf{D}'\mathbf{Y}^{-1}\mathbf{V}'\mathbf{X}^{-1}\mathbf{C}' = \mathbf{W}'\mathbf{X}^{-1}\mathbf{C}'$$

$$\therefore \mathbf{W}'\mathbf{X}^{-1}\mathbf{P}' = \mathbf{F}'$$

$$\therefore \mathbf{D}'\mathbf{Y}^{-1}\mathbf{V}'\mathbf{X}^{-1}\mathbf{d}' = \mathbf{W}'\mathbf{X}^{-1}\mathbf{V}$$

$$\therefore \mathbf{D}'\mathbf{Y}^{-1}\mathbf{V}'\mathbf{X}^{-1}\mathbf{d}' = \mathbf{D}'\mathbf{Y}^{-1}\mathbf{e}' = \mathbf{W}'\mathbf{X}^{-1}\mathbf{d}' = f'$$

Então

$$\begin{aligned} (Z - W'X^{-1}W + D'X^{-1}V'X^{-1}W) \hat{t}^* &= \delta - W'X^{-1}B \\ &+ D'Y^{-1}V'X^{-1}B - D'X^{-1}V'X^{-1}P'K^{-1}T + \\ &+ D'Y^{-1}V'X^{-1}P'K^{-1}b'\hat{m} - D'Y^{-1}T^* \end{aligned}$$

$$\therefore D'Y^{-1}V'X^{-1}P'K^{-1}T = D'Y^{-1}V'X^{-1}P'X^{-1}b'\hat{m}$$

Logo

$$(Z - W'X^{-1}W + D'X^{-1}V'X^{-1}W) \hat{t}^* = \delta - (W' - D'Y^{-1}V')X^{-1}B - D'Y^{-1}T^*$$

Fazendo

$$(Z + D'Y^{-1}V'X^{-1}W - W'X^{-1}W) = Z_{112 \times 12}$$

Tem-se

$$Z_1 \hat{t}^* = I - D'Y^{-1}T^* - (W'X^{-1} - D'Y^{-1}V'X^{-1})$$

Porém

Z_1 tem o posto $r(z_1) = 10$ que é menor que o $\min(12,12)$, portanto para realizar os cálculos foi utilizado a inversa generalizada que denominamos por Z_1^- .

Logo

$$\hat{t}^* = Z_1^- \delta - Z_1^- (W - D'Y^{-1}V')X^{-1}B - Z_1^- D'Y^{-1}T^* \quad (3.21)$$

Cujo estimador depende dos efeitos dos blocos incompletos. Este fato não ocorre no caso de blocos completos balanceados, nos quais os efeitos da interação não depende ou são ortogonais aos efeitos de blocos.

3.3 Dispersão

Considerando-se as pressuposições do modelo 3.2 com base em estudos desenvolvidos por Chakrabartiu (1962), Gill (1978), Leal (1979) e Diniz (1980), obteve-se

$$D(\hat{t}) = k^{-1} \mathbf{X}'_3 E(\boldsymbol{\varepsilon} \boldsymbol{\varepsilon}') \mathbf{X}_3 k^{-1} \quad (3.22)$$

$$D(\hat{t}) = \frac{1}{urk} \mathbf{X}'_3 E(\boldsymbol{\varepsilon} \boldsymbol{\varepsilon}') \mathbf{X}_3 \quad (3.23)$$

$$\mathbf{X}'_3 = \begin{bmatrix} 1 & \dots & 1 & \emptyset, & \dots & \emptyset, & \emptyset, & \dots & \emptyset, & 1 & \dots & 1 & \emptyset, & \dots & \emptyset, & \emptyset, & \dots & \emptyset, \\ \emptyset, & \dots & \emptyset, & 1 & \dots & 1 & \emptyset, & \dots & \emptyset, & \emptyset, & \dots & \emptyset, & 1 & \dots & 1 & \emptyset, & \dots & \emptyset, \\ \emptyset, & \dots & \emptyset, & \emptyset, & \dots & \emptyset, & 1 & \dots & 1 & \emptyset, & \dots & \emptyset, & \emptyset, & \dots & \emptyset, & 1 & \dots & 1 \end{bmatrix} \quad (3 \times 72)$$

$$\mathbf{X}'_3 E(\boldsymbol{\varepsilon} \boldsymbol{\varepsilon}') \mathbf{X}_3 = bkr = \begin{bmatrix} \sigma^2 & p\sigma^2 & p\sigma^2 \\ p\sigma^2 & \sigma^2 & p\sigma^2 \\ p\sigma^2 & p\sigma^2 & \sigma^2 \end{bmatrix} \quad (3 \times 3)$$

ou por

$$\mathbf{X}'_3 E(\boldsymbol{\varepsilon} \boldsymbol{\varepsilon}') \mathbf{X}_3 = bkr \times \mathbf{W}_{v \times v}$$

Obteve-se assim de 3.23

$$D(\hat{t}^*) = \frac{1}{ruk} \mathbf{W}_{(v \times v)}$$

3.3.2 Dispersão para tratamentos secundários: $D(\hat{t}^*)$

Para determinação da matriz de dispersão para tratamentos secundários, considerou-se como de modo usual.

$$D(\hat{t}^*) = E\{[\hat{t}^* - E(\hat{t}^*)] - [\hat{t}^* - E(\hat{t}^*)]'\}$$

em que

$$\hat{t}^* = \mathbf{M}^{-1} \mathbf{Q} \quad e \quad \mathbf{Q} = \mathbf{T}^* - \mathbf{V}' \mathbf{X}^{-1} \mathbf{B}$$

$$\hat{t}^* = \mathbf{M}^{-1} (\mathbf{T}^* - \mathbf{V}' \mathbf{X}^{-1} \mathbf{B})$$

mas

$$\mathbf{T}^* = \mathbf{X}'_5 \mathbf{Y} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{T}^* = \mathbf{X}'_5 (\mathbf{X}_0 + \boldsymbol{\varepsilon})$$

$$B = \mathbf{X}'_4 \mathbf{Y} \Rightarrow T^* = \mathbf{X}'_4 (\mathbf{X}_0 + \boldsymbol{\varepsilon})$$

então

$$\hat{t}^* = \mathbf{M}^{-1} \mathbf{X}'_5 \mathbf{X}_0 + \mathbf{M}^{-1} \mathbf{X}'_5 \boldsymbol{\varepsilon} - \mathbf{M}^{-1} \mathbf{V}' \mathbf{X}^{-1} \mathbf{X}'_4 \mathbf{X}_0 - \mathbf{V}' \mathbf{X}^{-1} \mathbf{X}'_4 \boldsymbol{\varepsilon}$$

desse modo

$$\begin{aligned} E(\hat{t}^*) &= \mathbf{M}^{-1} \mathbf{X}'_5 \mathbf{X}_0 - \mathbf{M}^{-1} \mathbf{V}' \mathbf{X}^{-1} \mathbf{X}'_4 \mathbf{X}_0 \\ \hat{t}^* - E(\hat{t}^*) &= \mathbf{M}^{-1} \mathbf{X}'_5 \boldsymbol{\varepsilon} - \mathbf{M}^{-1} \mathbf{V}' \mathbf{X}^{-1} \mathbf{X}'_4 \boldsymbol{\varepsilon} \end{aligned}$$

E fazendo-se $\mathbf{H} = \mathbf{X}_5 - \mathbf{V}' \mathbf{X}^{-1} \mathbf{X}'_4$, obteve-se

$$\hat{t}^* - E(\hat{t}^*) = \mathbf{M}^{-1} \mathbf{H} \boldsymbol{\varepsilon} \Rightarrow D(\hat{t}^*) = \mathbf{M}^{-1} \mathbf{H} E(\boldsymbol{\varepsilon} \boldsymbol{\varepsilon}') \mathbf{H}' \mathbf{M}^{-1}$$

mas

$$\mathbf{M}^{-1} = \frac{k}{\lambda_{uv}} \mathbf{I}_u \Rightarrow D(\hat{t}^*) = \frac{k^2}{\lambda^2 u^2 v^2} \mathbf{H} E(\boldsymbol{\varepsilon} \boldsymbol{\varepsilon}') \mathbf{H}'$$

Efetuando-se então o produto $E(\boldsymbol{\varepsilon} \boldsymbol{\varepsilon}') \mathbf{H}$, obteve-se a própria matriz \mathbf{H} a menos de uma constante.

$$E(\boldsymbol{\varepsilon} \boldsymbol{\varepsilon}') \mathbf{H} = [1 + (u-1)p] \sigma^2 \mathbf{H}$$

então

$$D(\hat{t}^*) = \frac{k^2}{\lambda^2 u^2 v^2} \sigma^2 \mathbf{H} \mathbf{H}'$$

$$\begin{aligned} \mathbf{H} \mathbf{H}' &= (\mathbf{X}'_5 - \mathbf{V}' \mathbf{X}^{-1} \mathbf{X}'_4) (\mathbf{X}_5 - \mathbf{X}_4 \mathbf{X}^{-1} \mathbf{V}) \\ &= \mathbf{X}'_5 \mathbf{X}_5 - \mathbf{X}'_5 \mathbf{X}_4 \mathbf{X}^{-1} \mathbf{X}_4 \mathbf{X}_5 + \mathbf{V}' \mathbf{X}^{-1} \mathbf{X}'_4 \mathbf{X}^{-1} \mathbf{V} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
X_4'X_4 &= X \\
X_4'X_5 &= V \\
X_5'X_4 &= V' \\
X_5'X_5 &= Y \\
(X_5'X_6)' &= X_5'X_6 = V'
\end{aligned}$$

$$\text{então } \mathbf{H}\mathbf{H}' = \mathbf{Y} - \mathbf{V}'\mathbf{X}^{-1}\mathbf{V} - \mathbf{V}'\mathbf{X}^{-1}\mathbf{V} + \mathbf{V}'\mathbf{X}^{-1}\mathbf{X}\mathbf{V} \Rightarrow \mathbf{H}\mathbf{H}' = \mathbf{Y} - \mathbf{V}'\mathbf{X}^{-1}\mathbf{V} = \mathbf{C}$$

Desse modo

$$\begin{aligned}
D(\hat{t}^*) &= \frac{k^2}{\lambda^2 u^2 v^2} [1 + (u-1)p] \sigma^2 (\mathbf{Y} - \mathbf{V}'\mathbf{X}^{-1}\mathbf{V}) \\
D(\hat{t}^*) &= \mathbf{M}^{-1} (\mathbf{Y} - \mathbf{V}'\mathbf{X}^{-1}\mathbf{V}) \mathbf{M}^{-1} [1 + (u-1)p] \sigma^2 \\
D(\hat{t}^*) &= \mathbf{M}^{-1} \mathbf{C} \mathbf{M}^{-1} [1 + (u-1)p] \sigma^2
\end{aligned}$$

Resultado idêntico aquele obtido por Lemma (1987), para matriz de dispersão dos tratamentos em delineamentos com blocos incompletos

3.3.3 Dispersão para a interação: $D(\hat{t}\hat{t}^*)$

Tomando-se

$$D(\hat{t}\hat{t}^*) = E\{[\hat{t}\hat{t}^* - E(\hat{t}\hat{t}^*)][\hat{t}\hat{t}^* - E(\hat{t}\hat{t}^*)]\}$$

Em que,

$$\begin{aligned}
\hat{t}\hat{t}^* &= \mathbf{Z}_1^- (\boldsymbol{\delta} - \mathbf{D}'\mathbf{k}^{-1}\mathbf{T}^* - \mathbf{W}\mathbf{X}^{-1}\mathbf{B} + \mathbf{D}\mathbf{Y}^{-1}\mathbf{V}'\mathbf{X}^{-1}\mathbf{B}) \\
&= \mathbf{Z}_1^- \left(\boldsymbol{\delta} - \frac{1}{rbk} \mathbf{D}'\mathbf{T}^* - \frac{1}{k} \mathbf{V}\mathbf{B} + \frac{1}{surv} \mathbf{D}'\mathbf{V}'\mathbf{B} \right)
\end{aligned}$$

e como

$$\begin{aligned}\delta &= X_6'Y \\ T^* &= X_5'Y \\ B &= X_4'Y\end{aligned}$$

Então

$$\hat{t}t^* = Z_1^- \left(X_6 - \frac{1}{krs}DX_5 - \frac{1}{k}W'X_7 + \frac{1}{krsv}D'V'X_4 \right) Y$$

$$\hat{t}t^* - E(\hat{t}t^*) = Z_1^- \left(X_6' - \frac{1}{rbk}D'X_5' - \frac{1}{k}WX_4' + \frac{1}{krv}D'V'X_4' \right) \boldsymbol{\varepsilon}$$

e fazendo

$$\Gamma = X_6' - \frac{1}{rvs}D'X_5' - \frac{1}{k}W'D_4' + \frac{1}{krvs}D'V'V_4'$$

Resulta em

$$D(\hat{t}t^*) = Z_1^- \Gamma E(\boldsymbol{\varepsilon}\boldsymbol{\varepsilon}') \Gamma' Z_1^- \Rightarrow D(\hat{t}t^*) = (Z_1^-)^2 \Gamma E(\boldsymbol{\varepsilon}\boldsymbol{\varepsilon}') \Gamma'$$

3.3.4 Análise de variância

De $Y = X\theta + \boldsymbol{\varepsilon}$, obteve-se

$$\boldsymbol{\varepsilon}'\boldsymbol{\varepsilon} = Y'Y - \hat{\theta}'X'Y$$

então, $SQ_{res} = SQ_{Total} - SQ_{Parâmetros}$,

$$SQ_{res} = SQT - SQP$$

Por outro lado, $X'Y = X'X\hat{\theta}$, ficou

$$SQ_{res} = Y'Y - \hat{\theta}'X'Y \quad (3.24)$$

em que,

$$\hat{\boldsymbol{\theta}}' \mathbf{X}' \mathbf{X} \hat{\boldsymbol{\theta}} = [\hat{m}, \hat{r}, \hat{t} : \hat{\beta}', \hat{t}^*, \hat{t}^*] \begin{bmatrix} n & a & b & \vdots & d & e & f \\ d' & \mathbf{J} & \mathbf{G} & \vdots & \mathbf{C} & \mathbf{M} & \mathbf{N} \\ b' & \mathbf{G}' & \mathbf{K} & \vdots & \mathbf{P} & \mathbf{Q} & \mathbf{F} \\ \dots & \dots & \dots & \vdots & \dots & \dots & \dots \\ d' & \mathbf{C}' & \mathbf{P}' & \vdots & \mathbf{X} & \mathbf{V} & \mathbf{W} \\ e' & \mathbf{M}' & \mathbf{Q}' & \vdots & \mathbf{V}' & \mathbf{Y} & \mathbf{D} \\ f' & \mathbf{N}' & \mathbf{F}' & \vdots & \mathbf{W}' & \mathbf{D}' & \mathbf{Z} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{m} \\ \hat{r} \\ \hat{t} \\ \dots \\ \hat{\beta} \\ \hat{t}^* \\ \hat{t}^* \end{bmatrix}$$

a partição efetuada se difere das duas partes encontradas nos esquemas usuais de análise de variância para ensaios com parcelas subdivididas com blocos casualizados, pois nesse caso os blocos se encontram na parte inferior da tabela de análise de variância.

$$\hat{\boldsymbol{\theta}}_1 = \begin{bmatrix} \hat{m} \\ \hat{r} \\ \hat{t} \end{bmatrix} \quad \hat{\boldsymbol{\theta}}_2 = \begin{bmatrix} \hat{\beta} \\ \hat{t} \\ \hat{t}^* \end{bmatrix} \quad (\mathbf{X}'\mathbf{X})_a = \begin{bmatrix} n & a & b \\ d' & \mathbf{J} & \mathbf{G} \\ b' & \mathbf{G}' & \mathbf{K} \end{bmatrix} \quad (\mathbf{X}'\mathbf{X})_c = \begin{bmatrix} d & e & f \\ \mathbf{C} & \mathbf{M} & \mathbf{N} \\ \mathbf{P} & \mathbf{Q} & \mathbf{F} \end{bmatrix}$$

$$(\mathbf{X}'\mathbf{X})_d = \begin{bmatrix} d' & \mathbf{C}' & \mathbf{P}' \\ e' & \mathbf{M}' & \mathbf{Q}' \\ f' & \mathbf{N}' & \mathbf{F}' \end{bmatrix} \quad (\mathbf{X}'\mathbf{X})_b = \begin{bmatrix} \mathbf{X} & \mathbf{V} & \mathbf{W} \\ \mathbf{V}' & \mathbf{Y} & \mathbf{D} \\ \mathbf{W}' & \mathbf{D}' & \mathbf{Z} \end{bmatrix}$$

que resultou

$$\begin{aligned} \hat{\boldsymbol{\theta}}' \mathbf{X}' \mathbf{X} \hat{\boldsymbol{\theta}} &= \begin{bmatrix} \hat{\boldsymbol{\theta}}_1 & \vdots & \hat{\boldsymbol{\theta}}_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} (\mathbf{X}'\mathbf{X})_a & \vdots & (\mathbf{X}'\mathbf{X})_c \\ \dots & \dots & \dots \\ (\mathbf{X}'\mathbf{X})_d & \vdots & (\mathbf{X}'\mathbf{X})_d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{\boldsymbol{\theta}}_1 \\ \dots \\ \hat{\boldsymbol{\theta}}_2 \end{bmatrix} \\ &= \hat{\boldsymbol{\theta}}_1' (\mathbf{X}'\mathbf{X})_a \hat{\boldsymbol{\theta}}_1 + \dots + \hat{\boldsymbol{\theta}}_1' (\mathbf{X}'\mathbf{X})_c \hat{\boldsymbol{\theta}}_2 \end{aligned}$$

em que

$$\hat{\boldsymbol{\theta}}_2' (\mathbf{X}'\mathbf{X})_d \hat{\boldsymbol{\theta}}_1 = \hat{\boldsymbol{\theta}}_1' (\mathbf{X}'\mathbf{X})_c \hat{\boldsymbol{\theta}}_2 = 0$$

$$\begin{bmatrix} \hat{\beta}' & \hat{t}'^* & \hat{t}'^* \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d' & \mathbf{C}' & \mathbf{P}' \\ e' & \mathbf{M}' & \mathbf{Q}' \\ f' & \mathbf{N}' & \mathbf{F}' \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{m} \\ \hat{r} \\ \hat{t} \end{bmatrix} =$$

$$= \left(\hat{\beta}' d' + \hat{t}'^* e' + \hat{t}'^* f' \right) \hat{m} + \left(\hat{\beta}' \mathbf{C}' + \hat{t}'^* \mathbf{M}' + \hat{t}'^* \mathbf{N}' \right) \hat{r} + \left(\hat{\beta}' \mathbf{P}' + \hat{t}'^* \mathbf{Q}' + \hat{t}'^* \mathbf{F}' \right) \hat{t}$$

e desde que

$$\begin{aligned} \hat{\beta}' d' &= k \sum_j \hat{\beta}'_j = 0 \\ \hat{t}'^* e' &= rk v \sum_\ell \hat{t}'^*_\ell = 0 \\ \hat{t}'^* f' &= rk \sum_{i\ell} (\hat{t}'^*)_{i\ell} = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \hat{\beta}' \mathbf{C}' &= \mathbf{0}_{(1 \times v)} \Rightarrow \hat{\beta}' \mathbf{C}' \hat{r} = 0 \\ \hat{t}'^* \mathbf{M}' &= \mathbf{0}_{(1 \times v)} \Rightarrow \hat{t}'^* \mathbf{M}' \hat{r} = 0 \\ \hat{t}'^* \mathbf{N}' &= \mathbf{0}_{(1 \times v)} \Rightarrow \hat{t}'^* \mathbf{N}' \hat{r} = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \hat{\beta}' \mathbf{P}' &= \mathbf{0}_{(1 \times v)} \Rightarrow \hat{\beta}' \mathbf{P}' \hat{t} = 0 \\ \hat{t}'^* \mathbf{Q}' &= \mathbf{0}_{(1 \times v)} \Rightarrow \hat{t}'^* \mathbf{Q}' \hat{t} = 0 \\ \hat{t}'^* \mathbf{F}' &= \mathbf{0}_{(1 \times v)} \Rightarrow \hat{t}'^* \mathbf{F}' \hat{t} = 0 \end{aligned}$$

e de modo análogo para transposta

$$\hat{\theta}'_1 (\mathbf{X}' \mathbf{X})_c \hat{\theta}_2 = 0$$

desse modo obteve-se

$$\hat{\theta}'(\mathbf{X}'\mathbf{X})\hat{\theta} = \hat{\theta}'_1(\mathbf{X}'\mathbf{X})_a\hat{\theta}'_1 + \hat{\theta}'_2(\mathbf{X}'\mathbf{X})_b\hat{\theta}'_2$$

ou

$$SQParmetros = \begin{bmatrix} \hat{m} & \hat{r} & \hat{t}' \end{bmatrix} \begin{bmatrix} n & a & b \\ a & \mathbf{J} & \mathbf{G} \\ b & \mathbf{G} & \mathbf{K} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \hat{m} \\ \hat{r} \\ \hat{t} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \hat{\beta}' & \hat{t}'^* & \hat{t}'^* \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{X} & \mathbf{V} & \mathbf{W} \\ \mathbf{V}' & \mathbf{Y} & \mathbf{D} \\ \mathbf{W}' & \mathbf{D}' & \mathbf{Z} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{\beta} \\ \hat{t}^* \\ \hat{t}'^* \end{bmatrix}$$

que por consenso é chamada por

$$SQParâmetro = SQParâmetro_{(a)} + SQParâmetro_{(b)}$$

assim de 3.24, resultou

$$\begin{aligned} SQres &= SQT - SQP_{(a)} - SQP_{(b)} \Rightarrow \\ \Rightarrow SQres &= \{SQParcelas - SQP_{(a)}\} + \{SQT - SQParcelas - SQP_{(b)}\} \end{aligned}$$

onde, SQParcelas foi definida por

$$QParcela = \frac{1}{su} \mathbf{Y}'\mathbf{\Theta}\mathbf{Y} - c_0$$

$$\mathbf{\Theta} = \begin{bmatrix} \mathbf{E}_{(u \times u)} & \mathbf{\emptyset} & \dots & \mathbf{\emptyset} \\ \mathbf{\emptyset} & \mathbf{E}_{(u \times u)} & \dots & \mathbf{\emptyset} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{\emptyset} & \mathbf{\emptyset} & \dots & \mathbf{E}_{(u \times u)} \end{bmatrix}_{(surv \times surm)}$$

ou como é usualmente encontrado na literatura

$$SQParcelas = \frac{1}{su} \sum_{i\ell} y_{i\ell}^2 - c_0 \quad (3.25)$$

Assim, obteve-se, de acordo com a terminologia tradicional dos experimentos em parcelas subdivididas:

$$SQres = SQres(a) + SQres(b)$$

3.3.5 Soma de quadrados

Retomando a $SQ_{res} = Y'Y - \hat{\theta}'X'Y$, obteve

$$SQ_{\text{Parâmetros}} = \begin{bmatrix} \hat{m} & \hat{r} & \hat{t}' & \hat{\beta}' & \hat{t}'^* & \hat{t}\hat{t}'^* \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{G} \\ \mathbf{R} \\ \mathbf{T} \\ \mathbf{B} \\ \mathbf{T}^* \\ \boldsymbol{\delta} \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow SQ_{\text{Parâmetros}} = \hat{m}\mathbf{G} + \hat{r}\mathbf{R} + \hat{t}'\mathbf{T} + \hat{\beta}'\mathbf{B} + \hat{t}'^*\mathbf{T}^* + \hat{t}\hat{t}'^*\boldsymbol{\delta}$$

substituindo, obteve

$$SQ_{\text{Parâmetros}} = \hat{m}\mathbf{G} + \mathbf{R}'\mathbf{J}^{-1}\mathbf{R} + \hat{m}a\mathbf{J}^{-1}\mathbf{R} + \mathbf{T}'\mathbf{K}^{-1}\mathbf{T} + \mathbf{B}'\mathbf{X}^{-1}\mathbf{B} - \hat{m}d\mathbf{X}^{-1}\mathbf{B} - \hat{r}c\mathbf{X}^{-1}\mathbf{B} - \hat{t}'^*\mathbf{P}\mathbf{X}^{-1}\mathbf{B} \\ - \hat{t}'^*\mathbf{V}\mathbf{X}^{-1}\mathbf{B} - \hat{m}d\mathbf{X}^{-1}\mathbf{B} - \hat{r}c\mathbf{X}^{-1}\mathbf{B} - \hat{t}'\mathbf{P}^{-1}\mathbf{B} - \hat{t}'^*\mathbf{V}'^{-1}\mathbf{B} - \hat{t}\hat{t}'^*\mathbf{W}'^{-1}\mathbf{B} + \hat{t}'^*\mathbf{T}^* + \hat{t}\hat{t}'^*\boldsymbol{\delta}$$

Agrupando os termos em \hat{t}'^* e usando o fato de que

$$\hat{m}a\mathbf{J}^{-1}\mathbf{R} = \hat{m}b\mathbf{K}^{-1}\mathbf{T} = \hat{m}d\mathbf{X}^{-1}\mathbf{B} = \hat{m}\mathbf{G}$$

$$SQ_{\text{Parâmetros}} = \hat{m}\mathbf{G} + \mathbf{R}'\mathbf{J}^{-1}\mathbf{R} - \hat{m}\mathbf{G} + \mathbf{B}'\mathbf{X}^{-1}\mathbf{B} - \hat{m}\mathbf{G} + \\ \mathbf{T}'\mathbf{K}^{-1}\mathbf{T} - \hat{m}\mathbf{G} + \hat{r}c\mathbf{X}^{-1}\mathbf{B} + \hat{t}'\mathbf{P}\mathbf{X}^{-1}\mathbf{B} + \\ \hat{t}'^* (\mathbf{T}^* - \mathbf{V}'\mathbf{X}\mathbf{B}) + \hat{t}\hat{t}'^* (\boldsymbol{\delta} - \mathbf{W}'\mathbf{X}^{-1}\mathbf{B})$$

E, desde que $\hat{m}\mathbf{G} = c_0$ correção resultou

$$SQ_{\text{Parâmetros}} = \{\mathbf{C}_0\} + \{\mathbf{R}'\mathbf{J}^{-1}\mathbf{R} - \mathbf{C}_0\} \{\mathbf{T}'\mathbf{K}^{-1}\mathbf{T} - \mathbf{C}_0\} + \{\mathbf{B}'\mathbf{X}^{-1}\mathbf{B} - \mathbf{C}_0 + \hat{r}c\mathbf{X}^{-1}\mathbf{B} + \hat{t}'\mathbf{P}\mathbf{X}^{-1}\mathbf{B}\} + \\ \{\hat{t}'\mathbf{Q}\} + \{\hat{t}\hat{t}'^* (\boldsymbol{\delta}\mathbf{W}'\mathbf{X}^{-1}\mathbf{B})\}$$

Porém

$$\hat{r}'\mathbf{C}\mathbf{X}^{-1}\mathbf{B} = \mathbf{R}'\mathbf{J}^{-1}\mathbf{R} - \mathbf{C}_0$$

$$\hat{t}'\mathbf{P}\mathbf{X}^{-1}\mathbf{B} = \mathbf{T}'\mathbf{K}^{-1}\mathbf{T} - \mathbf{C}_0$$

Então SQParâmetros = $\{\mathbf{C}_0\} + \{\mathbf{R}'\mathbf{J}^{-1}\mathbf{R} - \mathbf{C}_0\} + \{\mathbf{T}'\mathbf{K}^{-1}\mathbf{T} - \mathbf{C}_0\} + \{\mathbf{B}'\mathbf{X}^{-1}\mathbf{B} - \mathbf{C}_0 + \mathbf{R}\mathbf{J}^{-1}\mathbf{R} - \mathbf{C}_0 + \mathbf{T}'\mathbf{K}^{-1}\mathbf{T} - \mathbf{C}_0\} + \{\hat{t}'\mathbf{Q}\} + \{\hat{t}'^*(\delta\mathbf{W}'\mathbf{X}^{-1}\mathbf{B})\}$

$SQ\hat{m} = \hat{m}\mathbf{G} = c_0 = \frac{G^2}{surv}$ = soma de quadrados devido ao efeito da média geral.

$\mathbf{R}'\mathbf{J}^{-1}\mathbf{R} - \mathbf{C}_0$ = soma de quadrados devido as repetições obtidas de modo usual.

$$\mathbf{R}'\mathbf{J}^{-1}\mathbf{R} - \mathbf{C}_0 = \frac{1}{vbk} \sum_{k=1}^r \mathbf{R}_k - \mathbf{C}_0 = SQr.$$

$\mathbf{T}'\mathbf{K}^{-1}\mathbf{T} - c_0$ = soma dos quadrados devido aos tratamentos primários obtida de modo usual.

$$\mathbf{T}'\mathbf{K}^{-1}\mathbf{T} - c_0 = \frac{1}{bkr} \sum_{i=1}^v \mathbf{T}_i^2 - c_0 = SQ\hat{t}$$

$\mathbf{B}'\mathbf{X}^{-1}\mathbf{B} - c_0 + \mathbf{R}'\mathbf{J}^{-1}\mathbf{R} - \mathbf{C}_0 + \mathbf{T}'\mathbf{K}^{-1}\mathbf{T} - c_0$ = soma dos quadrados devido os efeitos de blocos.

$$\mathbf{B}'\mathbf{X}^{-1}\mathbf{B} - c_0 = \frac{1}{k} \sum_{j=1}^u \mathbf{B}_j^2 - c_0$$

$$\text{Logo, } \frac{1}{k} \sum_{j=1}^u \mathbf{B}_j^2 - c_0 + \frac{1}{vbk} \sum_{k=1}^r \mathbf{R}_k^2 - c_0 + \frac{1}{bkr} \sum_{i=1}^v \mathbf{T}_i^2 - c_0 = SQb$$

$\hat{t}'^*\mathbf{Q}$ = soma de quadrados devido aos efeitos dos tratamentos secundários, ajustado para efeito

de blocos.

$$\hat{t}^* \mathbf{Q} = SQ\hat{t}_{aj}^*$$

$\hat{t}\hat{t}'^*(\delta\mathbf{W}'\mathbf{X}^{-1}\mathbf{B})$ = soma de quadrados devido aos efeitos da interação, ajustada para efeitos de blocos.

$$\hat{t}\hat{t}'^*(\delta\mathbf{W}'\mathbf{X}^{-1}\mathbf{B}) = SQ\hat{t}\hat{t}'^*_{(aj)}$$

3.3.6 Testes de hipótese e quadros de análise de variância

Nos ensaios em parcelas subdivididas geralmente existe interesse em se testar as três hipóteses básicas;

- Hipótese de nulidade para efeitos de tratamento principal.

$$H_0(1) : t_i = 0; \quad i = 1, 2, \dots, v.$$

- Hipótese de nulidade para efeitos dos tratamentos secundários.

$$H_0(2) : t'_\ell = 0; \quad \ell = 1, 2, \dots, u.$$

- Hipótese de nulidade para efeitos de interação.

$$H_0(3) : tt_{i\ell} = 0; \quad i = 1, 2, \dots, v, \ell = 1, 2, \dots, u.$$

Tabela 3.1 – Quadro a ANOVA

Causas de variação	Graus de Liberdade	Soma de Quadrados
Repetição	r-1	$\mathbf{R}'\mathbf{J}^{-1}\mathbf{R} - c_0$
Trat.(t)	v-1	$\mathbf{T}'\mathbf{K}^{-1}\mathbf{T} - c_0$
Resíduo(a)	rv-v-r+1	Diferença
Parcelas	rv-1	$\frac{1}{su}\mathbf{Y}'\mathbf{O}\mathbf{Y} - c_{-0}$
Bloco dentro Trat.(t)	v(b-1)	$\mathbf{B}'\mathbf{X}^{-1}\mathbf{B} - c_0 + \mathbf{R}'\mathbf{J}^{-1}\mathbf{R} - \mathbf{C}_0 + \mathbf{T}'\mathbf{K}^{-1}\mathbf{T} - c_0$
Trat.(t' _{aj})	u-1	$\hat{t}^* \mathbf{Q}$
t × t' _(aj)	(u-1)(v-1)	$\hat{t}\hat{t}'^*(\delta\mathbf{W}'\mathbf{X}^{-1}\mathbf{B})$
Resíduo(b)	Diferença	Diferença
Total	sr - 1	

Assim no que se refere às três hipóteses básicas, o experimento com parcelas subdivididas, com tratamentos secundários dispostos em blocos incompletos balanceados, comportou-se de modo análogo ao seu equivalente em blocos completos casualizados.

Então, ficaram determinados os critérios para os respectivos teste

Hipóteses	F(observado)
$H_0(1)$	QMt/QMres(a)
$H_0(2)$	$QMt'_{(aj)}/QMres(b)$
$H_0(3)$	$QM\hat{t}'_{(aj)}/QMres(b)$

3.3.7 Comparações múltiplas

3.3.7.1 Comparações entre efeitos estimados de tratamento primários

Considerou o critério do teste do teste de Tukey, citado em Pimentel-Gomes (2009).

$$DMS = q\sqrt{Y_2\hat{v}(\hat{\gamma})}$$

em que,

DMS é a diferença mínima significativa

q é o valor da amplitude total estudentizado

$\hat{v}(\hat{\gamma})$ é a variância estimada do contraste estimado $\hat{\gamma}$, entre os efeitos médios.

Assim, para um contraste $\hat{\gamma}_1(i, i') = \hat{m}_i - \hat{m}'_i$, resultou

$$DMS = q\sqrt{\frac{1}{rvk}QMRes(a)}; \quad q_{\alpha, v, rv-v-r+1}$$

que é um resultado análogo aqueles encontrados na literatura para a diferença mínima significativa entre os efeitos de tratamentos primários em ensaios com parcelas subdividida em blocos completos casualizados.

3.3.8 Comparação entre efeitos estimados de tratamentos secundários

Para $\hat{\gamma}_2 = \hat{m}_\ell - \hat{m}_{\ell'}$, obteve

$$DMS = q\sqrt{\frac{k}{\lambda_{uv}}QMRes(b)}; \quad q_{\alpha, u, glres(b)}$$

que é um resultado análogo aqueles encontrados na literatura para a diferença mínima significativa entre os efeitos de tratamentos em ensaios com bloco incompletos.

3.3.9 Comparação entre efeitos estimados de tratamentos secundários dentro do i-ésimo tratamento primário

Tomando o contraste $\hat{\gamma}_{3,i}(\ell, \ell') = \hat{m}_{\ell} - \hat{m}_{\ell'}$

Obteve

$$DMS = q \sqrt{\frac{1}{rs} \left(1 - \frac{1}{v}\right) QMRes(b)}; \quad q_{\alpha, v, glres(b)}$$

que é um resultado análogo ao encontrado por Iemma (1987) que demonstra que a variância para contraste do tipo $\hat{\gamma}_3$ para parcelas subdividida com tratamentos primários em blocos incompletos é análoga ao encontrado neste estudo.

Chakrabarti (1962) recomenda que para o teste de tais contraste seja usado o quadrado médio do erro (b).

3.3.10 Comparações entre efeitos estimados de tratamentos primários dentro de i-ésimo tratamento secundário

Tomando o contraste $\hat{\gamma}_{4,\ell}(i, i') = \hat{m}_{i\ell} - \hat{m}_{i'\ell}$

Obteve

$$DMS = q \sqrt{\frac{1}{rs} \left(1 - \frac{1}{u}\right) QMRes(b)}; \quad q_{\alpha, u, glres(b)}$$

Este resultado é contrário aquele apresentado por Pimentel-Gomes (2009). O autor apresenta como variância para esse tipo de contraste, uma combinação linear entre resíduos (a) e (b) quando o experimento em parcelas subdivididas é delineado em bloco completos casualizado. O autor apresenta um valor aproximado, n' , derivado da fórmula de Satterthwaite, para graus de liberdade referente à combinação linear dos resíduos.

3.4 Demonstração do método proposto

Determinou-se o sistema de equações normais,

$$\begin{bmatrix} n & a & b & d & e & f \\ d' & \mathbf{J} & \mathbf{G} & \mathbf{C} & \mathbf{M} & \mathbf{N} \\ b' & \mathbf{G}' & \mathbf{K} & \mathbf{P} & \mathbf{Q} & \mathbf{F} \\ d' & \mathbf{C}' & \mathbf{P}' & \mathbf{X} & \mathbf{V} & \mathbf{W} \\ e' & \mathbf{M}' & \mathbf{Q}' & \mathbf{V}' & \mathbf{Y} & \mathbf{D} \\ f' & \mathbf{N}' & \mathbf{F}' & \mathbf{W}' & \mathbf{D}' & \mathbf{Z} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \hat{\mu} \\ \hat{\tau} \\ \hat{\tau} \\ \hat{\beta} \\ \hat{\tau}^* \\ \hat{\tau}^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{G} \\ \mathbf{R} \\ \mathbf{T} \\ \mathbf{B} \\ \mathbf{T}^* \\ \boldsymbol{\delta} \end{bmatrix}$$

em que,

$i = 1, \dots, v = 3$ tratamentos primários

$j = 1, \dots, a = 24$ blocos

$\ell = 1, \dots, u = 4$ tratamentos secundários

$r = 2$ repetições por tratamento primário

$s = 3$ repetições por tratamento secundário

$k = 3$ parcelas por bloco

$b = 4$ bloco por parcela

$n = sruv = 72$.

$a = 36 \times \mathbf{E}_{(1 \times 6)}$ $b = 24 \times \mathbf{E}_{(1 \times 3)}$ $c = 36 \times \mathbf{E}_{(1 \times 6)}$

$d = 3 \times \mathbf{E}_{(1 \times 24)}$ $e = 18 \times \mathbf{E}_{(1 \times 4)}$ $f = 6 \times \mathbf{E}_{(1 \times 12)}$

$\mathbf{J} = 36 \times \mathbf{I}_{(2)}$ $\mathbf{G} = 12 \times \mathbf{E}_{(1 \times 3)}$ $\mathbf{H} = \begin{bmatrix} 12 & 12 & 12 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 12 & 12 & 12 \end{bmatrix}_{(2 \times 6)}$

$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} 3 & 3 & \dots & 3 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 3 & \dots & 3 \end{bmatrix}_{(2 \times 24)}$

$\mathbf{M} = 9 \times \mathbf{E}_{(2 \times 4)}$ $\mathbf{N} = 3 \times \mathbf{E}_{(1 \times 12)}$ $\mathbf{K} = 24 \times \mathbf{I}_{(3)}$ $\mathbf{O} = \begin{bmatrix} 12\mathbf{I}_{(3)} & \vdots & 12\mathbf{I}_{(3)} \end{bmatrix}_{(3 \times 6)}$

$\boldsymbol{\sigma}_{(3 \times 24)} = \begin{cases} 3, & \text{se o tratamento } i \text{ ocorre com o bloco } j \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases}$

$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} 3 & 3 & 3 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 3 & 3 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 3 & 3 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 3 & 3 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 3 & 3 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 3 & 3 & 3 \end{bmatrix}_{(3 \times 24)}$

$$\mathbf{W} = \begin{bmatrix}
1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\
1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1
\end{bmatrix} \quad (24 \times 12)$$

$$\mathbf{Y} = 18\mathbf{I}_{(12)}$$

$$\mathbf{D} = \left[\mathbf{6I}_{(4)} \quad \vdots \quad \mathbf{6I}_{(4)} \quad \vdots \quad \mathbf{6I}_{(4)} \right]$$

$$\mathbf{Z} = \mathbf{6I}_{(12)}$$

$$\hat{r} = \begin{bmatrix} \hat{r}_1 \\ \hat{r}_2 \end{bmatrix} \quad \hat{t} = \begin{bmatrix} \hat{t}_1 \\ \hat{t}_2 \\ \hat{t}_3 \end{bmatrix} \quad \hat{\beta} = \begin{bmatrix} \hat{b}_1 \\ \hat{b}_2 \\ \vdots \\ \hat{b}_{24} \end{bmatrix} \quad \hat{t}^* = \begin{bmatrix} \hat{t}_1^* \\ \hat{t}_2^* \\ \hat{t}_3^* \\ \hat{t}_4^* \end{bmatrix} \quad \hat{t}\hat{t}^* = \begin{bmatrix} \hat{t}\hat{t}_{11}^* \\ \hat{t}\hat{t}_{12}^* \\ \hat{t}\hat{t}_{13}^* \\ \hat{t}\hat{t}_{14}^* \\ \hat{t}\hat{t}_{21}^* \\ \hat{t}\hat{t}_{22}^* \\ \vdots \\ \hat{t}\hat{t}_{34}^* \end{bmatrix}$$

$$G = 3928,40$$

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} 2055,90 \\ 1872,50 \end{bmatrix} \quad \mathbf{T} = \begin{bmatrix} 1429,20 \\ 1269,50 \\ 129,70 \end{bmatrix} \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 201,90 \\ 201,50 \\ 159,70 \\ 177,10 \\ 148,60 \\ 188,60 \\ 167,30 \\ 155,40 \\ 167,00 \\ 151,60 \\ 174,90 \\ 162,30 \\ 168,20 \\ 157,30 \\ 173,70 \\ 189,80 \\ 138,60 \\ 180,50 \\ 152,80 \\ 137,70 \\ 158,80 \\ 144,10 \\ 119,40 \\ 151,60 \end{bmatrix} \quad \mathbf{T}^* = \begin{bmatrix} 1018,60 \\ 1021,70 \\ 896,00 \\ 992,10 \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{\delta} = \begin{bmatrix} 340,90 \\ 375,10 \\ 343,00 \\ 370,20 \\ 338,00 \\ 320,20 \\ 280,20 \\ 331,10 \\ 339,70 \\ 326,40 \\ 272,80 \\ 290,80 \end{bmatrix}$$

3.4.1 Solução do sistema de equações normais

Efeitos estimados das repetições.

$$\hat{m} = 54,54111$$

$$\hat{\boldsymbol{r}} = \begin{bmatrix} 2,5472 \\ -2,5472 \end{bmatrix}$$

Efeitos estimados de tratamentos primários

$$\hat{\boldsymbol{t}} = \begin{bmatrix} 4,989 \\ -1,665 \\ -3,324 \end{bmatrix}; \quad \sum_{i=1}^3 \hat{t}_i^* = 0$$

Efeitos estimados de tratamentos secundários

$$\boldsymbol{M}^{-1} = \frac{3}{3 \times 2 \times 2 \times 4} \quad I_{(4)} = \frac{3}{48} \quad I_{(4)} = \frac{1}{16} I_{(4)} \quad e \quad \boldsymbol{Q} = \begin{bmatrix} 33,767 \\ 28,167 \\ -72,227 \\ 10,333 \end{bmatrix}; \quad \sum_{i=1}^4 \boldsymbol{Q}_i = 0$$

$$\hat{\boldsymbol{t}}^* = \begin{bmatrix} 2,1104 \\ 1,7604 \\ -4,5167 \\ 0,6458 \end{bmatrix}; \quad \sum_{\ell=1}^4 \hat{t}_\ell = 0$$

nos pares estimados dos $(tt')_{il}$

$$\hat{t}_{11} = -4,402 \quad \hat{t}_{21} = 0,230 \quad \hat{t}_{31} = 4,172$$

$$\hat{t}_{12} = 0,080 \quad \hat{t}_{22} = -1,018 \quad \hat{t}_{32} = 0,938$$

$$\hat{t}_{13} = 1,852 \quad \hat{t}_{23} = 0,748 \quad \hat{t}_{33} = -2,600$$

$$\hat{t}_{14} = 2,470 \quad \hat{t}_{24} = 0,040 \quad \hat{t}_{34} = -2,510$$

em que obteve-se

$$\sum_i (\hat{t})_{il} \quad \forall \ell$$

$$\sum_\ell (\hat{t})_{il} \quad \forall i$$

$$\sum_{i,\ell} (\hat{t})_{il} \quad \forall i, \ell$$

4 EXEMPLOS ILUSTRATIVOS

Como forma de ilustração do exemplo abordado em 3.1, apresentamos o seguinte exemplo ilustrativo:

Os dados apresentados nas Tabelas 4.1 e 4.2, referem-se a produção de grãos de cultivares de milho, em Kg/ha, obtidas de um experimento instalado em parcelas subdivididas, com as cultivares, a nível de parcelas dispostas em BIB, onde em cada cultivar foram testadas três níveis de endogamia [Dados adaptados de GAMA et al, 1985]

Tabela 4.1 – Produção de grãos de cultivares de milho, em Kg/ha na repetição 1

Bloco	Cultivar	Nível de endogamia		
		N_0	N_1	N_2
1	A	69,6	57,7	65,0
	B	76,3	50,2	56,3
	C	56,0	40,7	45,7
2	A	61,3	69,3	51,2
	B	78,2	55,5	49,7
	D	62,0	63,8	50,7
3	A	57,3	56,8	65,0
	C	52,2	63,0	51,5
	D	50,2	57,5	58,4
4	B	67,9	62,5	62,0
	C	47,8	42,4	54,3
	D	61,4	50,5	46,0

Tabela 4.2 – Produção de grãos de cultivares de milho, em Kg/ha na repetição 2

Bloco	Cultivar	Nível de endogamia		
		N_0	N_1	N_2
1	A	56,7	47,7	59,8
	B	57,6	47,5	59,8
	C	53,0	43,4	39,2
2	A	49,2	59,7	52,0
	B	49,2	59,7	47,7
	D	58,9	61,1	44,4
3	A	45,9	46,8	46,7
	C	63,0	56,2	34,2
	D	64,8	49,8	38,5
4	B	45,9	44,8	50,9
	C	71,0	44,5	47,9
	D	42,9	48,4	52,8

Apresentamos a seguir três opções de análises de variância, realizada em dois softwares distintos, R e SAS, conforme mostram as figuras:

A primeira análise foi realizada considerando o modelo,

$$Y_{ijkl} = \mu + r_k + t_i + e_{ik} + b_j + \tau'_l + \tau\tau'_{il} + e_{ijkl} \quad (4.1)$$

Tabela 4.3 – Análise de variância considerando o modelo 4.1, realizada no SAS

	GL	SQ	QM	Fcal	valor-p
Repetição	1	467,16	467,16	48,83	<,0001
Trat. primário	2	929,01	464,50	48,55	<,0001
Erro 1	2	26,97	13,48		
Blocos2	23	3121,58	135,72	14,19	<,0001
Trat. secundário _(aj)	3	578,53	192,84	20,16	<,0001
Tratp*Tratse _(aj)	6	394,37	65,72	6,87	<,0001
Erro 2	34	325,26	9,56		

Tabela 4.4 – Análise de variância considerando o modelo 4.1, realizada no SAS

	GL	SQ	QM	Fcal	valor-p
Repetição	1	467,16	467,16	48,83	<,0001
Trat. primário	2	929,01	464,50	48,55	<,0001
Erro 1	2	26,97	13,48		
Blocos2	23	3121,58	135,72	14,19	<,0001
Trat. secundário _(aj)	3	578,53	192,84	20,16	<,0001
Tratp*Tratse _(aj)	6	394,37	65,72	6,87	<,0001
Erro 2	34	325,26	9,56		

Observa-se que existem evidências de que há ao menos uma diferença significativa a nível de 5% de significância, em todos os elementos avaliados na análise de variância, pois, em todos os casos obteve-se valor-p < 0.05. Portanto, existe interação entre Tratamento secundário_(aj) e Tratamento primário usando ambos os *softwares* R e SAS.

Como houve efeito significativo na interação na análise realizada, é aconselhável analisar um fator dentro dos níveis do outro fator. Esta análise é feita de modo análogo a de parcelas subdividas com blocos completos, porém usando os valores ajustados.

Uma segunda análise foi realizada considerando o modelo,

$$Y_{ijkl} = \mu + r_k + t_i + e_{ik} + b_{j(ki)} + \tau'_l + \tau\tau'_{il} + e_{ijkl} \quad (4.2)$$

Tabela 4.5 – Análise de variância considerando o 4.2, realizada no R

	GL	SQ	QM	Fcal	valor-p
Repetição	1	467,16	467,16	9,54	0,0037
Trat.primário	2	929,01	464,51	9,49	0,0004
Erro 1	2	26,97	13,49		
Blocos(Trat. primário*Repetição)	18	1698,45	94,36	1,93	0,0430
Trat. secundário _(aj)	3	453,92	151,31	3,09	0,3171
Tratp*Tratse _(aj)	6	358,28	59,71	1,22	0,3171
Erro 2	39	1909,10	48,95		

Tabela 4.6 – Análise de variância considerando o modelo 4.2, realizada no SAS

	GL	SQ	QM	Fcal	valor-p
Repetição	1	467,16	467,16	10,42	0,0025
Trat. primário	2	929,01	464,51	10,36	0,0002
Erro 1	2	26,97	13,49		
Blocos(Trat.primário*Repetição)	18	1698,45	94,36	2,10	0,0259
Trat. secundário _(aj)	3	578,53	192,84	4,30	0,0103
Tratp*Tratse _(aj)	6	394,37	65,73	1,47	0,2152
Erro 2	39	1748,40	44,83		

Observa-se que existem evidências de que há ao menos uma diferença significativa a nível de 5% de significância, em todos os elementos avaliados na análise de variância, pois, em todos os casos obteve-se valor-p < 0.05, exceto na interação Tratp*Tratse_(aj). Portanto, não há interação entre tratamento secundário_(aj) e Tratamento primário, mas, houve diferenças nos outros fatores analisados.

Por fim, uma terceira análise foi realizada considerando o modelo,

$$Y_{ijkl} = \mu + r_k + t_i + e_{ik} + b_{j(i)} + \tau'_l + \tau\tau'_{il} + e_{ijkl} \quad (4.3)$$

Tabela 4.7 – Análise de variância considerando o modelo 4.3, realizada no R.

	GL	SQ	QM	Fcal	valor-p
Repetição	1	467,16	467,16	8,44	0,0055
Trat. primário	2	929,01	464,51	8,39	0,0007
Erro 1	2	26,97	13,49		
Bloco	9	950,25	105,58	1,91	0,0735
Trat. secundário	3	453,92	151,31	2,73	0,0539
Tratp*Tratse _(aj)	6	358,28	59,71	1,08	0,3885
Erro 2	48	2657,31	55,36		

Tabela 4.8 – Análise de variância considerando o modelo 4.3, realizada no SAS

	GL	SQ	QM	Fcal	valor-p
Repetição	1	467,16	467,16	8,98	0,0043
Trat. primário	2	929,01	464,51	8,93	0,0005
Erro 1	2	26,97	13,49		
Bloco	9	950,25	105,58	2,03	0,0561
Trat. secundário	3	578,53	192,84	3,71	0,0177
Tratp*Tratse _(aj)	6	394,37	65,73	1,26	0,2918
Erro 2	48	2496,60	52,01		

Observa-se que existem evidências de que há ao menos uma diferença significativa a nível de 5% de significância, em todos os elementos avaliados na análise de variância, pois, em todos os casos obteve-se valor-p < 0.05, exceto nos Blocos e na interação Tratp*Tratsec_(aj). Portanto, não há interação entre os Blocos e entre Tratamento secundário_(aj) e Tratamento primário, mas, houve diferenças nos outros fatores analisados.

5 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Diante do estudo realizado, verificou-se como é realizada a análise de variância para experimentos em parcelas subdivididas com tratamentos secundários dispostos em blocos incompletos balanceados.

Os efeitos do tratamentos primários, foram estimados de modo análogo àqueles com parcelas subdivididas em blocos (completos) casualizados, e os efeitos estimados de tratamentos secundários e interação foram obtidos como àqueles em blocos incompletos, ou seja, ajustados para os efeitos de blocos.

Por fim, a análise de variância para experimentos como, o proposto no estudo, mostrou-se que a primeira parte da análise de variância envolvendo repetição, tratamento primário e resíduo (a), é semelhante às análises com parcelas subdivididas em blocos (completos) casualizados e a segunda parte, envolvendo blocos, tratamentos secundários, interação e resíduo (b) é semelhante às análises em blocos incompletos.

REFERÊNCIAS

- BANZATTO, D. A.; KRONKA, S. N. **Experimentação agrícola**. 3. ed. Jaboticabal: Funep, 2006. 266 p.
- BEKMAN, R. M. Aplicação dos blocos incompletos balanceados na teoria de resposta ao item. **Estudos em avaliação educacional**, n. 24, p. 119–136, 2001.
- BOX, G. E. P.; HUNTER, J. S.; HUNTER, W. G. **Statistics for experimenters: design, innovation, and discovery**. 2. ed. Hoboken: John Wiley, 2005.
- CAMPOS, H. **Estatística aplicada à experimentação com cana-de-açúcar**. São Paulo: FEALQ, 1984. 292 p.
- CHAKRABARTIU, W. C. **Mathematics of design and analysis of experiments**. London: Asie Publishing House, 1962. 120 p.
- COCHRAN, W.; COX, G. **Experimental design**. 2. ed. New York: John Wiley, 1992. 640 p.
- CONAGIN, A.; IGUE, T.; NAGAI, V. Tabelas para determinação do número de repetições no planejamento de experimentos. **Instituto Agrônomo de Capinas**, p. 34, 1995. Boletim estatístico.
- CONDE, N. F.; LAROS, J. A. Unidimensionalidade e a propriedade de invariância das estimativas da habilidade pela tri. **Avaliação Psicológica**, v. 6, n. 2, 2007.
- DEY, A. **A note on balanced designs**. Calcutá: Sankhya, 1988. 50:90-94 p.
- DINIZ, U. D. **Análise de experimentos com parcelas medidas sucessivamente no tempo**. 1980. 104 p. Tese — ESALQ/USP, Piracicaba, 1980.
- ELYILDIRIM et al. Dengeli tamamlanmamış blok tasarımı için duyuşsal analiz verilerinin istatistiksel analizi. **Gıda Dergisi**, v. 38, n. 6, 2013.
- ESCOBAR, R. F.; TRAPERO, A.; DOMINGUEZ, J. **Experimentación en agricultura**. Sevilha: Consejería de Agricultura y Pesca, Serviço de publicações e divulgação, 2010. 350 p.
- FEDERER, W. T. **Experimental design: theory and application**. New York: Consejería de Agricultura y Pesca, Serviço de publicações e divulgação, 1955. 544 p.
- FERNANDES, J. S. C. et al. Genetic breeding and its related traits estimation in juvenile age in erva-mate. **Scientia Agrária**, v. 1, n. 1, p. 45–53, 2000.
- FREITAS, E. G. et al. Modelo univariado aplicado a dados longitudinais de cana de açúcar. **Brasileira de Biometria**, São Paulo, v. 26, n. 2, p. 93–106, 2008.
- GILL, L. G. **Design and analysis of experiments in the animal and medical sciences**. 1. ed. Ames: The Iowa State University press, 1978. v. 26. 882 p.
- HARTER, H. L. On the analysis of split-plot experiments. **Biometrics**, Raleigh, v. 17, p. 144–149, 1961.
- HINKELMAN, K.; KEMPTHORNE, O. **The Design and Analysis of Experiments**. 2. ed. New York: John Wiley, 2007. 631 p. VI. Introduction to experimental design.

IEMMA, A. F. **Modelos lineares: uma introdução para profissionais da pesquisa agropecuária**. Londrina: UEL/ Departamento de Matemática Aplicada, 1987. 263 p.

JONES, B.; NACHTSHEIM, C. 'split-plot designs: what, why, and how'. **Journal of Quality Technology**, v. 41, p. 340–361, 2009.

KEMPTHORNE, O. Recent developments in the design of field experiments. iv. lattice squares with split plots. **The Journal of Agricultural Science**, Cambridge University Press, v. 37, n. 2, p. 156–162, 1947.

KITZBERGER, C. S. G. et al. Caracterização sensorial de cafés arábica de diferentes cultivares produzidos nas mesmas condições edafoclimáticas. **Brazilian Journal of Food Technology**, Campinas, v. 14, p. 39–48, 2011.

LEAL, M. L. S. **P Análise de dados experimentais com medidas repetidas**. 1997. 99 p. Dissertação — Universidade Federal de Brasília, Brasília, 1979.

LEDOLTER, J. Split-plot designs: discussion and examples. **International Journal of Quality Engineering and Technology**, Iwoa City, v. 1, n. 4, p. 441–457, 2010.

LEEuwEN, J. V.; NETO, V. Uma ferramenta para ensinar, construir e comparar delineamentos em blocos incompletos. **Revista Brasileira de Biometria**, São Paulo, v. 32, n. 3, p. 323–333, 2014.

LITTELL, R. C. et al. **SAS System for Mixed Models**. Cary: Statistical Analysis System Institute, 1996. 633 p.

LOPES, S. J.; STORCK, L. A precisão experimental para diferentes manejos na cultura do milho. **Ciências Rural**, Santa Maria, v. 25, n. 1, p. 49–53, 1995.

LUCIO, A. D. **Parâmetros da precisão experimental das principais culturas anuais do Estado do Rio Grande do Sul**. 1997. 64 p. Dissertação (Mestrado em Agronomia) — Programa de Pós-graduação em Agronomia, Universidade Federal de Santa Maria, Santa Maria, 1997.

MBEGBU, J.; FRANCIS, O. Comparison of the optimal design: Split-plot experiments. **Mathematical Theory and Modeling**, Nigéria, v. 2, n. 7, p. 23–31, 2012.

MEILGAARD, M. C.; CARR, B. T.; CIVILLE, G. V. **Sensory evaluation techniques**. 4. ed. Boca Raton: CRC Press, 1999. 416 p.

MEJZA, I.; MEJZA, S. Incomplete split plot designs. **Statistics & probability letters**, Elsevier, v. 2, n. 6, p. 327–332, 1984.

MILLIKEN, G. A.; JOHNSON, D. E. . **Analysis of messy data: design experiments**. New York: Van Nostrand Reinhold, 2009. 350 p. Volume III: analysis of covariance.

MISCHAN, M.; PINHO, S. Z. **Experimentação agrônômica: dados não balanceados**. Botucatu: Fundibio, 1996. 456 p.

MONTGOMERY, D. **Design and analysis of experiments**. 7. ed. New York: John Wiley, 2009. 680 p.

MORAIS, A. R.; NOGUEIRA, M. C. S. Experimentos em parcelas subdivididas com tratamentos primários em blocos incompletos parcialmente balanceados ii:: análise intrablocos. **Scientia agrícola**, Piracicaba, v. 53, n. 1, p. 138–145, 7 1996.

NOGUEIRA, M. C. S. **Curso de estatística experimental aplicada a experimentação agrícola**. Piracicaba: ESALQ-DME, 1991. 168 p.

OEHLERT, G. W. **A first course in design and analysis of experiments**. Freeman: Minnesota, 2010. 659 p.

PEARCE, S. C. et al. **The agricultural field experiment**. New York: John Wiley, 1983. 335 p. A statistical examination of theory and practice.

PIMENTEL-GOMES, F. **Curso de estatística experimental**. 15. ed. Piracicaba: FEALQ, 2009. 451 p.

RAGHAVARÃO, D. **Constructions and problems in design of experiments**. 1. ed. New York: Dover Publications, 1988. 386 p.

RAMALHO, M. A. P. **Experimentação em genética e melhoramento de plantas**. 3. ed. Lavras: UFLA, 2000. 326 p.

REES, D. The analysis of variance of some non-orthogonal designs with split plots. **Biometrika**, v. 56, n. 1, p. 43–54, 1969.

RIBOLDI, J. Planejamento e análise de experimentos. **Parte 2, Série B**, Porto Alegre, UFRG/Instituto de Matemática., v. 2, n. 29, p. 37–49, 1995 b.

ROBINSON, J. Incomplete split plot designs. **Biometrics**, Raleigh, v. 23, p. 793–802, 1967.

ROSARIO, M. F. et al. Avaliação do desempenho zootécnico de genótipo de frango de corte utilizando-se a análise de métodos repetidos. **Revista Brasileira de Zootecnia**, Viçosa, v. 34, p. . 2253–2261, 2005.

SEARLE, S. R.; GRUBER, M. H. **Linear models**. 1. ed. New York: John Wiley, 1971. 386 p.

SILVA, R. C. S. N. et al. Balanced incomplete block design: An alternative for data collection in the optimized descriptive profile. **Food Research International**, v. 64, p. 289–297, 2014.

SMUCKER, B.; CASTILLO, R. D.; ROSENBERGER, J. Model-robust designs for split-plot experiments. **Computational Statistics e Data Analysis**, v. 56, n. 12, p. 4111–4121, 2012.

STEEL, R.; TORRIE, J. **Principles and procedures of statistics: a biometrical approach**. Boston: WCB/McGraw-Hill, 1997. 666 p.

STORCK, L. et al. **Experimentação vegetal**. 3. ed. Santa Maria: UFSM, 2016. 198 p.

TAYLOR, J. et al. The comparison of pairs of treatments in split-plot experiments. **Biometrika**, Londres, v. 37, p. 443–444, 1950.

XAVIER, L. H. **Modelos univariado e multivariado para análise de medidas repetidas e verificação da acurácia do modelo univariado por meio de simulação**. 2000. 91 p. Dissertação (Mestrado em Estatística e experimentação agrônômica) — Escola Superior de Agricultura “Luiz de Queiroz”, Universidade de São Paulo, Piracicaba, 2000.

YATES, F. Incomplete randomized blocks. **Annals of eugenics**, v. 7, n. 2, p. 121–140, 1936.

ZIMMERMANN, F. J. P. **Estatística aplicada à pesquisa agrícola**. 2. ed. Santo Antônio de Goiás: Embrapa Arroz e Feijão, 2014. 582 p.

APÊNDICE A – Comando R e SAS

```
rm(list=ls(all=T))
Data = read.csv2("bd_lina_ex1.csv", head=T)
# ordena por blocos usado em dados desbalanceados
Data <- Data[order(Data$bloco2),]
Vlr <- Data$Valores
Blc <- Data$bloco2
Cul <- Data$Cultivar
Rep <- Data$Repeticao
Niv <- Data$Nivel
Num_k <- 3 # numero de parcelas por bloco

# identifica a coluna com os valores
observadoscolVlr <- which(Vlr[1] == Data[1,])

NomesBlocos <- levels(factor(Blc))
NomesCultiv <- levels(factor(Cul))
NomesRepeti <- levels(factor(Rep))
NomesNive <- levels(factor(Niv))

# numero de blocos
NumBlocos <- length(NomesBlocos)
# numero de cultivares
NumCultiv <- length(NomesCultiv)
# numero de repeticoes dos blocos
NumRepeti <- length(NomesRepeti)
# numero de repeticoes dos blocos
NumNiv <- length(NomesNive)

Correcao <- sum(Vlr)^2 / nrow(Data)

### Soma do quadrado total
```

```

SQTotal <- sum(Vlr^2) - Correcao

### Soma do quadrado da repeticao
SQR <- NULL
for (i in 1:NumRepeti) {
  SQR[i] <- sum(Data[Data$Repeticao==NomesRepeti[i], colVlr])
}
SQRepeti <- sum(SQR^2) / (nrow(Data)/2) - Correcao

### Soma do quadrado dos Nivel
SQN <- NULL
for (i in 1:NumNiv) {
  SQN[i] <- sum(Data[Data$Niv==NomesNive[i], colVlr])
}
# Calculo blocos balanceados

SQNivel <- sum(SQN^2) / (nrow(Data)/NumNiv) - Correcao
### Soma do quadrado das parcelas
SQP <- matrix(NA, nrow=NumNiv, ncol=NumRepeti)
for (i in 1:NumNiv) {
  for (j in 1:NumRepeti) {
    SQP[i,j] <-
      sum(Data[Data$Niv==NomesNive[i]
& Data$Repeticao==NomesRepeti[j], colVlr])
  }
}
# Calculo blocos desbalanceados
SQParcelas <- sum(SQP^2) / (4*Num_k) - Correcao

### Soma do quadrado do Erro_a
SQErro_a <- SQParcelas - SQNivel - SQRepeti

### Soma do quadrado dos Blocos
SQB <- NULL

```

```

for (i in 1:NumBlocos) {
  SQB[i] <- sum(Data[Data$Blocos==NomesBlocos[i], colVlr])
}
# Calculo blocos desbalanceados
SQBlocos <- sum(SQB^2) / Num_k - Correcao; SQBlocos

### Soma do quadrado dos Cultivares
SQC <- NULL
for (i in 1:NumCultiv) {
  SQC[i] <-
  sum(Data[Data$Cultivar==NomesCultiv[i], colVlr])
}
# Calculo blocos desbalanceados
SQCultivares <- sum(SQC^2) / (nrow(Data)/NumCultiv) - Correcao

### Soma do quadrado das interacoes
SQI <- matrix(NA, nrow=NumNiv, ncol=NumCultiv)
for (i in 1:NumNiv) {
  for (j in 1:NumCultiv) {
    SQI[i,j] <-
sum(Data[Data$Niv==NomesNive[i] & Data$Cultivar==NomesCultiv[j], colVlr])
  }
}
SQInteracoes <-
(sum(SQI^2) / (Num_k*NumRepeti) - Correcao) -
SQNivel - SQCultivares

### Soma quadrado do Erro_b
SQErro_b = SQTotal -
SQParcelas - SQCultivares
- SQInteracoes - SQBlocos

### INICIO - ANOVA ###
ANOVA <- as.data.frame(matrix(NA, nrow=8, ncol=5))

```

```

rownames(ANOVA) <- c("Repeticao", "Trat primario",
"Erro 1", "Bloco", "Trat Secundario",
"Tratp X Tratse", "Erro 2", "Total")
colnames(ANOVA) <- c("G.L.", "Soma Quadrados",
"Quadrados Medios", "F.calc.", "Valor-p")

## Graus de liberdade
GLRepeti <- NumRepeti - 1
GLBloco <- NumBlocos - 1
GLCultivares <- NumCultiv - 1
GLNivel <- NumNiv - 1
GLEerro_a <- GLNivel * GLRepeti
GLIntetacoes <- GLNivel * GLCultivares
GLTotal <- nrow(Data) - 1
GLEerro_b <- GLTotal - GLRepeti -
  GLNivel - GLEerro_a -
  GLBloco - GLCultivares -
  GLIntetacoes

ANOVA[, "G.L."] <- c(GLRepeti, GLNivel,
GLEerro_a, GLBloco,
                                GLCultivares, GLIntetacoes,
GLEerro_b, GLTotal)

ANOVA[, "Soma Quadrados"] <- c(round(SQRepeti, 2), round(SQNivel, 2),
round(SQErro_a, 2),
round(SQBlocos, 2),
round(SQCultivares, 2),
round(SQInteracoes, 2),
round(SQErro_b, 2),
round(SQTotal, 2))
QMEa <- SQErro_a / GLEerro_a

QMEb <- SQErro_b / GLEerro_b

```

```

ANOVA[, "Quadrados Medios"] <- c(round(SQRepeti/GLRepeti, 2),
round(SQNivel /GLNivel, 2), round(QMEa, 2),
round(SQBlocos/GLBloco, 2),
round(SQCultivares/GLCultivares, 2),
round(SQInteracoes/GLIntetacoes, 2),
round(QMEb, 2), "-")

FC <- c(as.numeric(ANOVA[1:2, 3])/QMEa, as.numeric(ANOVA[4:6, 3])/QMEb)
FCalc <- c(round(FC[1:2], 2), "-", round(FC[3:5], 2), "-", "-")

# F Tabelado
#FTab <- c(round(qf(0.05, GLRepeti, GLErro_a, lower.tail = FALSE), 2),
#          round(qf(0.05, GLNivel, GLErro_a, lower.tail = FALSE), 2), "-",
#          round(qf(0.05, GLBloco, GLErro_b, lower.tail = FALSE), 2), #
#          round(qf(0.05, GLCultivares, GLErro_b, lower.tail = FALSE), 2),
#          round(qf(0.05, GLIntetacoes, GLErro_b, lower.tail = FALSE), 2), "-")

# Valor-p
Vlrp <- c(round(pf(FC[1], GLRepeti, GLErro_a, lower.tail = FALSE), 5),
          round(pf(FC[2], GLBloco, GLErro_a, lower.tail = FALSE), 5), "-",
          round(pf(FC[3], GLBloco, GLErro_b, lower.tail = FALSE), 5),
          round(pf(FC[4], GLCultivares, GLErro_b, lower.tail = FALSE), 5),
          round(pf(FC[4], GLIntetacoes, GLErro_b, lower.tail = FALSE), 5), "-")

ANOVA[, "F.calc."] <- FCalc
#ANOVA[, "F.tab.(5%)"] <- FTab
ANOVA[, "Valor-p"] <- Vlrp

ANOVA

# Modelo 4.2

md_42 <- aov(Pro ~ Rep + Adu + Rep/Blo +

```

```
Cul + Adu:Cul + Error(Adu/Rep), data=Data)
summary(md_42)
```

```
# Modelos 4.3
```

```
mod_43 <- aov(Pro ~ Rep + Adu+ Blo+
Cul + Adu:Cul + Error(Adu/Rep),
data=Data)
summary(mod_43)
```

```
# Usando o SAS
```

```
proc anova data=lina;
class repet bloco2  bloco cultivar nivel;
model prod= repet nivel repet*nivel bloco2  cultivar cultivar*nivel ;
*test h=cultivar nivel e=cultivar*nivel;
*means cultivar*nivel /tukey ;
title 'Primeira Tabela';
run;
quit;

proc glm data=lina;
class repet bloco2  bloco cultivar nivel;
model prod= repet nivel nivel*repet bloco2 cultivar cultivar*nivel / ss1;
lsmeans cultivar;
title 'Segunda Tabela';
run;
quit;
```

```
proc anova data=lina2;  
class repet bloco cultivar nivel;  
model prod= repet nivel nivel*repet bloco(nivel) cultivar cultivar*nivel;  
run;  
quit
```