



**VINICIUS LOPES ALVARENGA**

**IDENTIFICAÇÃO DE UMA PLATAFORMA DE  
UM PÊNULO INVERTIDO E SIMULAÇÃO DE  
TÉCNICAS DE CONTROLE**

**LAVRAS - MG**

**2013**

**VINICIUS LOPES ALVARENGA**

**IDENTIFICAÇÃO DE UMA PLATAFORMA DE UM PÊNDULO  
INVERTIDO E SIMULAÇÃO DE TÉCNICAS DE CONTROLE**

Dissertação apresentada à Universidade Federal de Lavras, como parte das exigências do Programa de Pós-Graduação em Engenharia de Sistemas, área de concentração em Modelagem de Sistemas Fuzzy, para a obtenção do título de Mestre.

Orientador

Dr. Giovanni Francisco Rabelo

Coorientador

Dr. Bruno Henrique Groenner Barbosa

**LAVRAS - MG**

**2013**

**Ficha Catalográfica Elaborada pela Coordenadoria de Produtos e  
Serviços da Biblioteca Universitária da UFLA**

**Alvarenga, Vinicius Lopes.**

**Identificação de uma plataforma de um pêndulo invertido e  
simulação de técnicas de controle / Vinicius Lopes Alvarenga. –  
Lavras : UFLA, 2013.**

**79 p. : il.**

**Dissertação (mestrado) – Universidade Federal de Lavras, 2013.**

**Orientador: Giovanni Francisco Rabelo.**

**Bibliografia.**

**1. Controle. 2. Pêndulo invertido. 3. PID. 4. Fuzzy. 5. Algoritmo  
Genético. I. Universidade Federal de Lavras. II. Título.**

**CDD – 620.00113**

**VINICIUS LOPES ALVARENGA**

**IDENTIFICAÇÃO DE UMA PLATAFORMA DE UM PÊNULO  
INVERTIDO E SIMULAÇÃO DE TÉCNICAS DE CONTROLE**

Dissertação apresentada à Universidade Federal de Lavras, como parte das exigências do Programa de Pós-Graduação em Engenharia de Sistemas, área de concentração em Modelagem de Sistemas Fuzzy, para a obtenção do título de Mestre.

APROVADA em 1 de agosto de 2013.

Dr. Bruno Henrique Groenner Barbosa    UFLA  
Dr. Wilian Soares Lacerda                UFLA  
Dr. Paulo Henrique Cruz Pereira        CEFET/MG



Dr. Giovanni Francisco Rabelo  
Orientador

**LAVRAS - MG**

**2013**

## AGRADECIMENTOS

À Universidade Federal de Lavras (UFLA) e ao Departamento de Engenharia (DEG), pela Oportunidade concedida para realização do mestrado.

À Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (CAPES) pela concessão da bolsa de estudos.

Aos professores da UFLA, pelos ensinamentos transmitidos.

Aos professores Drs. Giovanni Francisco Rabelo e Bruno Henrique Groenner Barbosa pela orientação, paciência e seus ensinamentos que foram de grande relevância para a realização deste trabalho e meu crescimento profissional.

Ao Dr. Jean Ribeiro e ao Me. Leonardo Paiva pela amizade e ensinamentos, que também foram de grande valia para a realização deste trabalho.

Ao professor Dr. Willian Soares Lacerda, pelos conhecimentos repassados nas disciplinas de Redes Neurais Artificiais e Introdução aos Sistemas Embarcados e Microcontroladores e claro, por se dispor a participar como membro na banca examinadora.

Ao Dr. Paulo Henrique Cruz Pereira por se dispor a participar como membro na banca examinadora.

À minha família pela confiança e apoio e à minha namorada Lívia, pela preciosa ajuda na verificação ortográfica deste trabalho e por estar sempre presente.

## **RESUMO**

O presente estudo trata do desenvolvimento e comparação de três técnicas de controle aplicadas ao Pêndulo Invertido, um problema clássico de sistema físico instável. Para tanto, o modelo matemático foi obtido através da identificação do sistema em uma planta real. As três técnicas de controle selecionadas e desenvolvidas são Fuzzy, PID e PID gerado por Algoritmos Genéticos. Técnicas escolhidas em razão dos seguintes fatores: os bons resultados obtidos pelo controlador Fuzzy, confiabilidade e robustez exibidas pelo controlador PID na literatura disponível e adaptabilidade dos Algoritmos Genéticos. Os resultados simulados obtidos se mostraram satisfatórios para o controle do Pêndulo Invertido.

**Palavras-chave:** Controle. Pêndulo Invertido. PID. Fuzzy. Algoritmo Genético.

## **ABSTRACT**

The present study deals with the development and comparison of three control techniques applied to the Inverted Pendulum, a classic problem of unstable physical system. Therefore, the mathematic model was obtained through the system identification in a real plant. The three control techniques selected and developed are Fuzzy, PID and PID developed through Genetic algorithms. Techniques chosen due to the following factors: the good results obtained by the Fuzzy controller, reliability and robustness exhibited by the PID controller in the available literature and adaptability of the Genetic Algorithms. The simulated results obtained proved satisfactory for the inverted pendulum control.

**Keywords:** Control. Inverted Pendulum. PID. Fuzzy. Genetic Algorithms.

## LISTA DE SIGLAS

$a$  = constante

$A$  = amplitude do sinal senoidal aplicado ao amplificador

$B$  = amortecimento combinado do motor e do carro

$Bc$  = constante de amortecimento viscoso do carro

$Bm$  = constante de amortecimento viscoso do motor

$Br$  = constante de amortecimento viscoso do eixo do encoder.

$cg$  = centro de gravidade

$dXp$  = primeira derivada de  $Xp$

$d2Xp$  = segunda derivada de  $Xp$

$dYp$  = primeira derivada de  $Yp$

$d2Yp$  = segunda derivada de  $Yp$

$dXcg$  = primeira derivada de  $Xcg$

$d2Xcg$  = segunda derivada de  $Xcg$

$dYcg$  = primeira derivada de  $Ycg$

$d2Ycg$  = segunda derivada de  $Ycg$

$E$  = força contra-eletromotriz no motor

$e$  = erro

$ess$  = erro de estado estacionário

$F$  = força transmitida a correia de transmissão

$g$  = aceleração da gravidade

$H$  = força na direção horizontal

$I$  = momento de inércia do pêndulo ( $m\ell^2/3$  para uma haste uniforme)

$Ia$  = corrente de armadura do motor

$Im$  = momento de inércia do motor

$J$  = Inércia combinada do motor e do carro



$K$  = Amplitude máxima do sinal senoidal amortecido obtido no ensaio do pêndulo

$K_a$  = ganho constante do amplificador

$K_c$  = constante de amortecimento viscoso

$K_d$  = ganho derivativo

$K_i$  = ganho integral

$K_m$  = constante de tensão induzida no motor

$K_p$  = ganho proporcional

$K_t$  = constante de torque do motor

$K_x$  = constante do transdutor de posição utilizado no ensaio (Volts/m)

$\ell$  = metade do comprimento do pêndulo

$M$  = massa do carro

$M_p$  = máximo pico da variável a ser controlada

$m$  = massa do pêndulo

$p$  = ponto de pivotamento do eixo do pêndulo

$r$  = raio efetivo do eixo do motor

$R_a$  = resistência de armadura do motor

$t_a$  = tempo de amostragem do sistema de controle

$t_s$  = tempo de acomodação da variável a ser controlada

$T_d$  = torque requerido do motor

$T_r$  = torque resistente no eixo do motor

$T_t$  = torque total requerido do motor

$V$  = força na direção vertical

$V_i$  = tensão de entrada do amplificador

$V_o$  = tensão de saída do amplificador

$X_{cg}$  = coordenada no eixo  $X$  do centro de gravidade

$X_p$  = coordenada no eixo  $X$  do ponto de pivotamento

$Y_{cg}$  = coordenada no eixo  $Y$  do centro de gravidade

$Y_p$  = coordenada no eixo  $Y$  do ponto de pivotamento

$\Phi$  = ângulo do eixo do motor

$\Theta$  = ângulo do pêndulo com relação à linha vertical

## LISTA DE FIGURAS

Figura 1	Esquema do pêndulo invertido.....	15
Figura 2	Exemplo de utilização de pêndulo .....	18
Figura 3	Sistema de coordenadas do pêndulo invertido.....	21
Figura 4	Controle em malha fechada .....	28
Figura 5	Modelo de um sistema Fuzzy .....	32
Figura 6	(a) função de pertinência da variável posição angular. (b) função de pertinência da variável velocidade .....	34
Figura 7	Função de pertinência da saída do motor.....	35
Figura 8	Representação do modelo do pêndulo simples .....	41
Figura 9	Ensaio do modelo para obtenção dos parâmetros da haste .....	43
Figura 10	Dados do ensaio do pêndulo .....	43
Figura 11	Dados obtidos no <i>Curve Fitting</i> .....	44
Figura 12	Aproximação dos pontos de pico por uma função exponencial.....	44
Figura 13	Frequência fundamental.....	45
Figura 14	Ensaio do conjunto carrinho-amplificador-motor.....	47
Figura 15	Derivadas .....	50
Figura 16	Validação dos dados 1 .....	51
Figura 17	Validação dos dados 2 .....	52
Figura 18	Modelo da planta identificada.....	52
Figura 19	Função de pertinência da entrada posição.....	56
Figura 20	Função de pertinência da entrada velocidade .....	57
Figura 21	Função de pertinência da saída tensão .....	57
Figura 22	Distúrbio aplicado aos controladores.....	61
Figura 23	Malha de controle com controlador PID.....	62
Figura 24	Simulação do modelo durante a aplicação do distúrbio.....	62
Figura 25	Otimização a malha de controle PID .....	63

Figura 26	Gráfico gerado pelos índices de desempenho .....	64
Figura 27	Ampliação do gráfico dos índices de desempenho .....	64
Figura 28	Malha de controle Fuzzy.....	65
Figura 29	Comparação de técnicas Fuzzy .....	66
Figura 30	Desempenho do controlador Fuzzy deste estudo.....	66
Figura 31	Desempenho dos três controladores.....	67

## LISTA DE TABELAS

Tabela 1	Variáveis de entrada/Saída do controlador Fuzzy.....	33
Tabela 2	(a) Conjunto de regras Fuzzy; (b) Conjunto de regras.....	36
Tabela 3	Conversão de nomenclaturas .....	37
Tabela 4	Ganhos K para cada entrada de amplitude.....	48
Tabela 5	Valores de $\tau_{aw}$ para cada entrada de amplitude.....	50
Tabela 6	Variáveis de entrada-saída do controlador Fuzzy .....	56
Tabela 7	Regras do Sistema Fuzzy Aplicado .....	58
Tabela 8	Parâmetros e especificações das respostas do sistema.....	63

## SUMÁRIO

<b>1</b>	<b>INTRODUÇÃO</b> .....	14
<b>1.1</b>	<b>Motivação</b> .....	15
<b>2</b>	<b>OBJETIVOS</b> .....	17
<b>2.1</b>	<b>Objetivo Geral</b> .....	17
<b>2.2</b>	<b>Objetivos Específicos</b> .....	17
<b>3</b>	<b>REVISÃO DE LITERATURA</b> .....	18
<b>3.1</b>	<b>Modelagem do sistema do pêndulo invertido</b> .....	20
<b>3.1.1</b>	<b>Modelagem do pêndulo</b> .....	20
<b>3.1.2</b>	<b>Modelagem do conjunto Amplificador- Motor- Carro</b> .....	25
<b>3.2</b>	<b>Sistema de Controle do Pêndulo</b> .....	28
<b>3.3</b>	<b>Controle Proporcional Integral Derivativo – PID</b> .....	29
<b>3.4</b>	<b>Fuzzy</b> .....	31
<b>3.5</b>	<b>Algoritmo Genético</b> .....	37
<b>4</b>	<b>IDENTIFICAÇÃO E CONTROLE</b> .....	41
<b>4.1</b>	<b>Estimação dos parâmetros do modelo do pêndulo</b> .....	41
<b>4.2</b>	<b>Estimação dos parâmetros do conjunto Amplificador-Carro- Motor</b> .....	46
<b>4.3</b>	<b>Implementação do Controlador PID</b> .....	53
<b>4.4</b>	<b>Controlador Fuzzy</b> .....	55
<b>4.5</b>	<b>Ajuste do controlador PID via Algoritmos Genéticos</b> .....	58
<b>5</b>	<b>COMPARAÇÃO DA SIMULAÇÃO DAS TÉCNICAS DE CONTROLE</b> .....	61
<b>6</b>	<b>CONCLUSÃO</b> .....	68
	<b>REFERÊNCIAS</b> .....	69
	<b>ANEXOS</b> .....	73

## 1 INTRODUÇÃO

Cada vez mais as teorias de controle se integram a área de computação. A cada instante novos recursos computacionais são utilizados na solução de problemas de controle. Não só melhorando as respostas de controle dos sistemas como facilitando o estudo das mesmas.

A engenharia de controle se encontra presente em diversas áreas da indústria, tais como controle de ferramentas, linha de montagem, controle de qualidade, robótica, dentre outras. Seu objetivo se resume na busca pela maximização da eficiência dos projetos.

Este estudo visa a identificação do modelo do pendulo invertido e a simulação do controle, onde será feita a comparação dos controladores Fuzzy, PID e PID otimizado.

O pêndulo invertido é um sistema mecânico muito utilizado no estudo de controle de sistemas instáveis, como o controle de lançamento de veículos espaciais e o controle da postura ereta. O sistema idealizado consiste em um pêndulo invertido preso a um carrinho motorizado com um grau de liberdade que se movimenta sobre um trilho. O objetivo do controle é manter o pêndulo equilibrado na posição vertical, mesmo quando perturbações são aplicadas ao sistema. A Figura 1 mostra o esquema do pêndulo invertido.

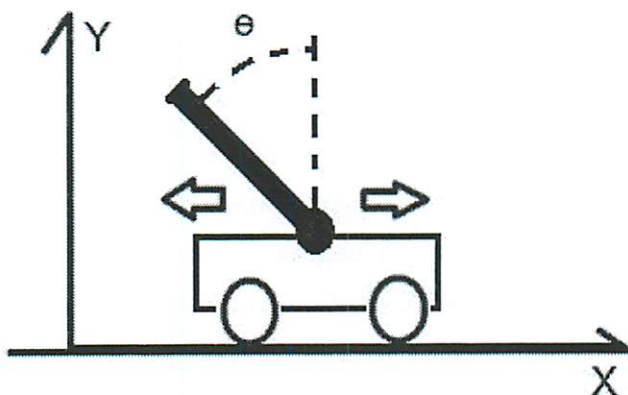


Figura 1 Esquema do pêndulo invertido

## 1.1 Motivação

Já existe uma compreensão e domínio consideráveis acerca dos sistemas complexos lineares, algo não observado no campo não linear, dada a sua maior complexidade. Além do sistema do Pêndulo Invertido, existe uma variedade considerável de sistemas complexos com características não lineares, com comportamentos variados e difíceis de serem controlados. Por exemplo, a bolsa de valores, a dinâmica de populações, a meteorologia, entre outros.

Dessa forma, para que o campo não linear seja melhor compreendido e previsto, é importante que sejam testadas e comparadas, técnicas de controle capazes de mostrar resultados satisfatórios. Há uma enorme quantidade de aplicações para as técnicas de controle que podem ser utilizadas nesses tipos de sistemas. Dentre as diversas técnicas, foram destacadas: o Controle Fuzzy, que se baseia em regras condicionadas que relacionam as entradas com uma determinada ação de saída; O Controle Proporcional Integral Derivativo (PID), que se baseia no conceito de realimentação e trata-se de um controle de



três termos, proporcionando estabilidade ao sistema através do cálculo e correção do valor do erro. Estas técnicas foram escolhidas em razão dos seguintes fatores: os bons resultados obtidos pelo controlador Fuzzy e a confiabilidade e robustez exibidas pelo controlador PID na literatura disponível.

Será utilizado também o Algoritmo Evolucionário, um método de busca e otimização mais recente. Ele será aplicado ao controlador PID, por sua vez dando origem a uma nova forma de controle.

O desempenho dos três controles será testado e seus resultados comparados.

## **2 OBJETIVOS**

### **2.1 Objetivo Geral**

Identificação do modelo do pêndulo inverso e simulação de técnicas de controle.

### **2.2 Objetivos Específicos**

Testar e comparar a eficácia das técnicas de controle Fuzzy, Proporcional Integral Derivativo (PID) e controlador PID gerado pela técnica de Algoritmo Genético.

Obter dados que justifiquem ou não a utilização de abordagens como Fuzzy ou Algoritmos Genéticos.

### 3 REVISÃO DE LITERATURA

Sistemas complexos como o pêndulo invertido apresentam fatores desconhecidos e de difícil manipulação. Dessa forma, para que haja sua compreensão, é necessária a obtenção de modelos quantitativos.

Segundo Vendramini (2010), esse sistema ilustra as dificuldades práticas associadas com aplicações de sistemas de controle no mundo real, sendo portanto, de interesse para os estudos em tecnologia de controle .

O sistema de pêndulo invertido trata-se de um mecanismo não linear e instável muito utilizado em testes de controle.

Existem inúmeras utilizações práticas para os conceitos de pêndulo invertido. Pode-se citar como exemplos: o controle de oscilações de arranha-céus; o conceito contra abalos sísmicos desenvolvido por Zayas (1985) e a moto de uma roda só, como demonstrado na Figura 2.



Figura 2 Exemplo de utilização de pêndulo

Fonte: Mobilidade... (2013)

Um trabalho significativo a respeito do controle do pêndulo invertido foi apresentado por Carvalho (1999). Nele é utilizada uma técnica de redes neurais otimizadas por meio de algoritmos evolucionários onde são apresentados tantos os dados de simulações como os experimentais, sendo a capacidade de controle da rede demonstrada.

Uma proposta mais elaborada sobre o controle do pêndulo é apresentada por Ribeiro (2006). O trabalho teve como foco principal o Controle Discreto com Modos Deslizantes (CDMD) aplicados em sistemas que possuem atraso no processamento do sinal de controle. Suas novas estratégias de controle objetivaram a elaboração de leis de prática de fácil entendimento e aplicação que ao mesmo tempo sejam robustas com relação às incertezas da planta. No trabalho são apresentadas simulações e resultados de implementações práticas sobre um pêndulo invertido.

Vasconcelos et al. (2012) apresentam simulações de um estudo comparativo de métodos de controle avançados para sintonizar um controlador PID, aplicado ao pêndulo invertido. As técnicas de sintonia utilizadas foram a lógica Fuzzy, o Neuro-Fuzzy e os Algoritmos Genéticos.

Bugeja (2003) também apresenta a implementação de um sistema de controle de oscilação para estabilização do pêndulo invertido. Porém, ele descreve o método de auto ereção da haste, com base na linearização da realimentação e considerações de energia. O mesmo utiliza modernas técnicas de espaço de estados para análise e controle de estabilização do pêndulo. Um controle em cascata também é utilizado para reduzir a complexidade do controlador, dividindo-o em duas malhas de controle.

Cunha e Nascimento (2009) mostraram como seria o funcionamento do módulo de controle de motores e os sensores de navegação inercial, para um pêndulo invertido que poderá ser acessado remotamente. Fornecendo

ferramentas para instituições que não tenham recursos suficientes para adquirir, desenvolver ou utilizar laboratórios de engenharia de controle.

### **3.1 Modelagem do sistema do pêndulo invertido**

Segundo Ribeiro (2007) as etapas do processo de modelagem de um sistema dinâmico podem ser listadas como:

- a) Definir o escopo do sistema e dos seus componentes essenciais;
- b) Formular o modelo matemático e listar as hipóteses necessárias;
- c) Escrever as equações diferenciais que descrevem o modelo;
- d) Resolver as equações em função das variáveis de saída de interesse;
- e) Examinar as soluções e as hipóteses;
- f) Se necessário aprimorar o modelo do sistema.

Ribeiro (2007) mostra que a modelagem do pêndulo invertido pode ser decomposto em duas fases, sendo feita a modelagem do conjunto da haste e a modelagem do conjunto carrinho motor separadamente. A equação final do sistema do pêndulo é resultado da multiplicação das duas modelagens.

#### **3.1.1 Modelagem do pêndulo**

A Figura 3 mostra as forças atuantes sobre o pendulo invertido. Ela servirá de base para o seu equacionamento.

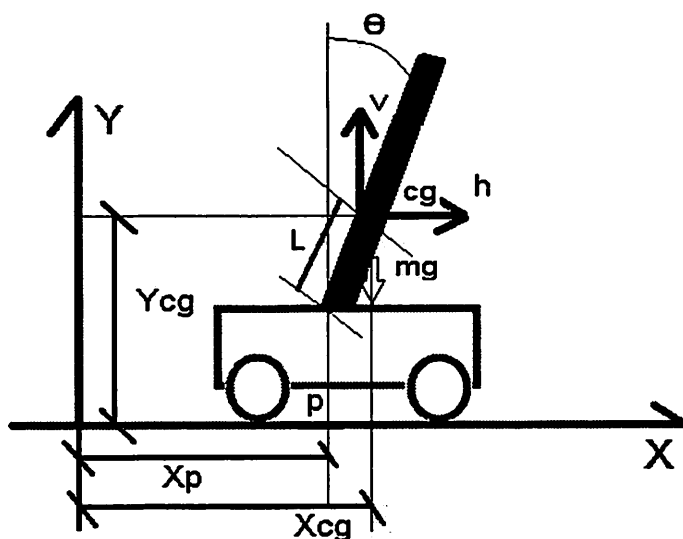


Figura 3 Sistema de coordenadas do pêndulo invertido

Onde:

$p$  = ponto de pivotamento do eixo do pêndulo

$X_{cg}$  = coordenada no eixo  $X$  do centro de gravidade

$X_p$  = coordenada no eixo  $X$  do ponto de pivotamento

$Y_{cg}$  = coordenada no eixo  $Y$  do centro de gravidade

$Y_p$  = coordenada no eixo  $Y$  do ponto de pivotamento

$\Theta$  = ângulo do pêndulo com relação à linha vertical

$cg$  = centro de gravidade

$g$  = aceleração da gravidade

$m$  = massa do pêndulo

$H$  = força na direção horizontal

$V$  = força na direção vertical

$l$  = metade do comprimento do pêndulo

A partir da Figura (3) Ribeiro (2007) define as equações que regem o movimento do pêndulo. Sendo obtidas as equações de deslocamento velocidade e aceleração.

$$X_{cg} = X_p + l \sin \theta \quad (1)$$

$$\dot{X}_{cg} = \dot{X}_p + l \cos(\theta) \dot{\theta} \quad (2)$$

$$\ddot{X}_{cg} = \ddot{X}_p + l \cos(\theta) \ddot{\theta} - l \sin(\theta) \dot{\theta}^2 \quad (3)$$

$$Y_{cg} = Y_p + l \cos \theta \quad (4)$$

$$\dot{Y}_{cg} = \dot{Y}_p - \sin(\theta) \dot{\theta}; \quad \dot{Y}_p = 0; \quad (5)$$

$$\ddot{Y}_{cg} = -l \sin(\theta) \ddot{\theta} - l \cos(\theta) \dot{\theta}^2 \quad (6)$$

A somatória das forças na direção  $X$ , denominada como  $H$  é dada por (7) e (9).

$$\sum F_x = m \ddot{X}_{cg} \quad (7)$$

Onde  $m$  representa a massa do carrinho.

$$H = m[\ddot{X}_p + l \cos(\theta) \ddot{\theta} - l \sin(\theta) \dot{\theta}^2] \quad (8)$$

$$H = m \ddot{X}_p + ml \cos(\theta) \ddot{\theta} - ml \sin(\theta) \dot{\theta}^2 \quad (9)$$

A somatória das forças na direção  $Y$ , denominada como  $V$  é expressa por (10) e (12).

$$\sum F_y = m\ddot{Y}_{cg} \quad (10)$$

$$V - mg = m[-l \sin(\theta)\ddot{\theta} - l \cos(\theta)\dot{\theta}^2] \quad (11)$$

$$V = ml \sin(\theta)\ddot{\theta} - ml \cos(\theta)\dot{\theta}^2 + mg \quad (12)$$

A somatória dos momentos de inércia é modelada por (13) e (14), em que  $I$  é o momento de inércia e  $B_r$ , o coeficiente de amortecimento.

$$\sum M_{cg} = I\ddot{\theta} + B_r\dot{\theta} \quad (13)$$

$$Vl \sin(\theta) - Hl \cos(\theta) = I\ddot{\theta} + B_r\dot{\theta} \quad (14)$$

Combinando as equações anteriores vem:

$$I\ddot{\theta} + B_r\dot{\theta} = Vl \sin(\theta) - Hl \cos \theta \quad (15)$$

$$I\ddot{\theta} + B_r\dot{\theta} = [-ml \sin(\theta)\ddot{\theta} - ml \cos(\theta)\dot{\theta}^2 + mg]l \sin(\theta) - [m\ddot{X}_p + ml \cos(\theta)\ddot{\theta} - ml \sin(\theta)\dot{\theta}^2]l \cos(\theta) \quad (16)$$

$$I\ddot{\theta} + B_r\dot{\theta} - ml^2 \sin^2(\theta)\ddot{\theta} - ml^2 \sin(\theta) \cos(\theta)\dot{\theta}^2 - mgl \sin(\theta) - ml\ddot{X}_p \cos(\theta) - ml^2 \cos^2(\theta)\ddot{\theta} + ml^2 \sin(\theta) \cos(\theta)\dot{\theta}^2 \quad (17)$$

$$I\ddot{\theta} + B_r\dot{\theta} = -ml^2\ddot{\theta} + mgl \sin(\theta) - ml\ddot{X}_p \cos(\theta) \quad (18)$$



$$(I + ml^2)\ddot{\theta} + B_r\dot{\theta} - mgl \sin(\theta) = -ml\ddot{X}_p \cos(\theta) \quad (19)$$

Sendo a haste uniforme, possuindo momento de inércia  $\frac{ml^2}{3}$  e também considerando que  $\theta$  é pequeno o suficiente para admitir que  $\sin \theta \approx \theta$ , tem-se:

$$\frac{4}{3}ml^2\ddot{\theta}(t) + B_r\dot{\theta}(t) - mgl\theta(t) = ml\ddot{X}_p(t) \quad (20)$$

$$\ddot{\theta} + \frac{3B_r}{4ml^2}\dot{\theta} - \frac{3g}{4l}\theta = \frac{3}{4l}\ddot{X}_p \quad (21)$$

Para uma representação padrão, os parâmetros em (22, 23 e 24) são definidos, gerando a equação (25), onde é aplicada a transformada de Laplace que resulta na equação (26), função de transferência típica de um sistema de pêndulo invertido.

$$2\xi\omega_n = \frac{3B_r}{4ml^2} \quad (22)$$

$$\omega_n^2 = \frac{3g}{4l} \quad (23)$$

$$K_h = \frac{3}{4l} \quad (24)$$

$$\ddot{\theta}(t) + 2\xi\omega_n\dot{\theta}(t) - \omega_n^2\theta(t) = -K_h\ddot{X}_p(t) \quad (25)$$

$$\frac{\theta(s)}{X(s)} = \frac{-K_h s^2}{s^2 + 2\xi\omega_n s - \omega_n^2} \quad (26)$$

### 3.1.2 Modelagem do conjunto Amplificador- Motor- Carro

Para a modelagem do conjunto Amplificador-Motor-Carro do pêndulo invertido, parte-se das equações (27, 28, 29 e 30). A equação (27) representa a relação entre o amplificador e o motor de corrente contínua acoplado ao carrinho, a equação (28), representa a equação do motor de corrente contínua, onde a representação da tensão induzida do seu circuito de armadura é dado pela equação (29), por ultimo a equação (30) mostra a relação entre a corrente de armadura e o torque resultante.

$$V_i = \frac{1}{K_a} V_o \quad (27)$$

$$V_o = E + i_a R_a \quad (28)$$

$$E = K_m \Phi \quad (29)$$

$$i_a = \frac{1}{K_t} T_d \quad (30)$$

Relacionando as equações acima tem-se:

$$V_i = \frac{R_a}{K_a K_t r} \left[ \frac{K_m K_t}{R_a} r \Phi + r T_d \right] \quad (31)$$

Equacionando o torque total requerido do motor tem-se:

$$T_t = I_m \Phi + B_m \Phi + T_r \quad (32)$$

O torque resistente no motor pode ser expresso por:

$$T_r = rF \quad (33)$$

A força ( $F$ ) exercida na correia de transmissão do carro é:

$$F = M\ddot{X}_p + B_c\dot{X}_p + H \quad (34)$$

$$H = m\ddot{X}_{cg} \quad (35)$$

Assumindo que  $m \ll M$  implica que  $\ddot{X}_{cg} \approx \ddot{X}_p$ , sendo assim  $H \ll M\ddot{X}_p + B_c\dot{X}_p$ , tem-se:

$$F = M\ddot{X}_p + B_c\dot{X}_p \quad (36)$$

$$T_t = I_m\phi + B_m\phi + r(M\ddot{X}_p + B_c\dot{X}_p) \quad (37)$$

Substituindo na equação (31) tem-se:

$$V_i = \frac{R_a}{K_a K_t r} \left[ \frac{K_m K_t}{R_a} r\phi + r(I_m\phi + B_m\phi + M_r\ddot{X}_p + B_c r\dot{X}_p) \right] \quad (38)$$

$$V_i = \frac{R_a}{K_a K_t r} \left[ \frac{K_m K_t}{R_a} r\phi + I_m r\phi + B_m r\phi + M r^2 \ddot{X}_p + B_c r^2 \dot{X}_p \right] \quad (39)$$

$$V_i = \frac{R_a}{K_a K_t r} \left[ I_m r\phi + \left( \frac{K_m K_t}{R_a} + B_m \right) r\phi + M r^2 \ddot{X}_p + B_c r^2 \dot{X}_p \right] \quad (40)$$

As seguintes relações são conhecidas:

$$\Delta X_p = r\Delta\phi \quad (41)$$

$$\dot{X}_p = r\dot{\phi} \quad (42)$$

$$\ddot{X}_p = r\ddot{\phi} \quad (43)$$

Substituindo na equação (40) tem-se:

$$V_i = \frac{R_a}{K_a K_t r} [I_m \ddot{X}_p + \left(\frac{K_m K_t}{R_a} + B_m\right) r\dot{\phi} + Mr^2 \ddot{X}_p + B_c r^2 \dot{X}_p] \quad (44)$$

$$V_i = \frac{R_a}{K_a K_t r} [(I_m + Mr^2) \ddot{X}_p + \left(\frac{K_m K_t}{R_a} + B_m + B_c r^2\right) \dot{X}_p] \quad (45)$$

Fazendo  $J = I_m + Mr^2$  tem-se:

$$B = \frac{1}{J} \left(\frac{K_m K_t}{R_a} + B_m + B_c r^2\right) \quad (46)$$

$$\frac{1}{K_c} = \frac{R_a J}{K_a K_t r} \quad (47)$$

$$V_i = \frac{1}{K_c} [\ddot{X}_p + B\dot{X}_p] \quad (48)$$

A equação (50) representa a função de transferência do sistema amplificador-motor-carro, do pêndulo invertido.

$$X_p(s) = V_i(s) \frac{K_c}{s(s+B)} \quad (49)$$

$$\frac{X_p(s)}{V_i(s)} = \frac{K_c}{s(s+B)} \quad (50)$$

### 3.2 Sistema de Controle do Pêndulo

Segundo Tavares et al. (2006), para controle do pêndulo é necessário que haja um sistema de controle com realimentação, isto é, um sistema que estabelece uma relação de comparação entre a saída e a entrada de referência utilizando a diferença como meio de controle. De acordo com Ogata (2008) os sistemas de controle com realimentação também são denominados como sistema de controle em malha fechada. Em um sistema de controle de malha fechada, o sinal do erro que atuará na correção do processo é a diferença entre o sinal de entrada e o sinal de realimentação, que tanto pode ser o próprio sinal de saída como alguma função que o relaciona. Esse sinal de erro realimenta o controlador de forma a minimizar o erro do sistema para que a saída possa ser a mais próxima do valor desejado. A Figura 4 mostra um exemplo de controle em malha fechada.

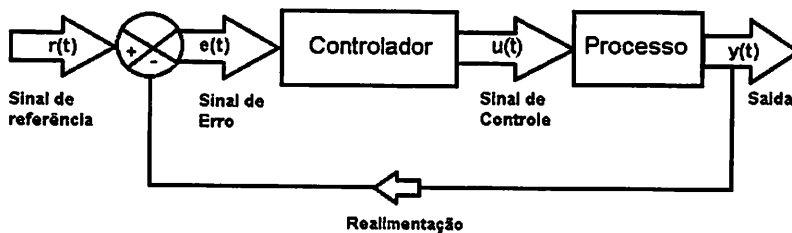


Figura 4 Controle em malha fechada

A utilização do controle em malha fechada neste projeto é obrigatória pelo fato do sistema em estudo ser instável em malha aberta.

### 3.3 Controle Proporcional Integral Derivativo – PID

O controle PID é obtido calculando-se um valor de atuação sobre um processo. Este valor é obtido a partir de informações como o valor desejado e o valor obtido através de algum sensor. Com estes valores é possível calcular um sinal de atuação para o sistema, para que dessa forma seja obtido o controle do mesmo.

Pode-se dividir o controle PID em suas três ações distintas de controle, são elas: ação proporcional, ação integral e ação derivativa.

A ação proporcional, como o nome já diz, realiza uma correção proporcional ao erro, ou seja, ela realiza a correção à medida que o valor do erro aumenta ou diminui. A equação que a representa é:

$$P_{out} = K_p e(t) \quad (51)$$

Onde  $K_p$  é o ganho proporcional e  $e(t)$  é o erro.

Mesmo a ação proporcional sendo capaz de eliminar oscilações no sistema, ela não elimina o erro em estado estacionário. Para isso utilizamos a ação integral, que age ao longo do tempo eliminando o erro em estado estacionário para uma entrada do tipo degrau.

$$I_{out} = K_i \int_0^t e(\tau) d\tau \quad (52)$$

Onde  $K_i$  é o ganho integral e  $e(\tau)$  é o erro.

A ação derivativa atua corrigindo o valor do desvio antes que ele aconteça, sendo denominada muitas vezes como uma ação preditiva. Esta prevenção difere de outros tipos de ações, que atuam somente quando o desvio acontece.

A equação que a caracteriza é:

$$D_{out} = K_d \frac{d}{dt} e(t) \quad (53)$$

Onde  $K_d$  é o ganho derivativo.

Como a ação derivativa se baseia na derivada da função, ela não atua caso o desvio seja constante, sua atuação acontece quando a mudança do valor do desvio ocorre de forma rápida e freqüente.

A combinação das ações de controle proporcional, integral e derivativo, resulta em uma ação de controle mais efetiva e robusta no que diz respeito a eliminação de erros, sendo que cada uma delas tem uma propriedade diferente e atua de forma ímpar no sistema.

$$u(t) = K_p e(t) + K_i \int_0^t e(\tau) d\tau + K_d \frac{d}{dt} e(t) \quad (54)$$

Para o bom funcionamento deste tipo de sistema, é necessária a definição e ajuste dos parâmetros  $k_p$ ,  $k_i$  e  $k_d$ . De acordo com Dorf e Bishop (1998), a escolha destes trata-se basicamente de um problema de procura em um espaço tridimensional, em que pontos no espaço de busca correspondem a diferentes escolhas dos três parâmetros PID.

### 3.4 Fuzzy

A teoria de conjuntos Fuzzy foi introduzida em 1930, pelo polonês Jan Lukasiewicz. Em 1937, o filósofo Max Black descreveu o primeiro conjunto Fuzzy e algumas idéias básicas de operações com conjuntos Fuzzy. Em 1965, Lofti Zadeh publicou o artigo Fuzzy Sets, que mais tarde tornou-se conhecido como a origem da Lógica Fuzzy. Nesse mesmo trabalho, Zadeh reintroduziu a idéia de fuzzyficação e explorou tal conceito. Dessa forma, Zadeh recebeu o título de pai da Lógica Fuzzy.

Baseada na teoria dos conjuntos Fuzzy, a lógica Fuzzy ou difusa difere do sistema tradicional booleano, onde o valor verdade pode somente caracterizar-se por verdadeiro (1) ou falso (0). Segundo a lógica Fuzzy o valor expresso em um problema é um elemento de um conjunto finito, dentro de um intervalo. Os conjuntos de valores na lógica Fuzzy são expressos linguisticamente, como: verdade, muito verdade, não verdade, falso, muito falso, etc, onde cada termo lingüístico é interpretado como um subconjunto Fuzzy de um intervalo unitário.

De acordo com Spina (2010) a lógica Fuzzy é utilizada quando um humano soluciona problemas onde primeiro ele estrutura o problema em conceitos gerais e depois estuda a relação entre estes conceitos. Este tipo de resolução geralmente não permite a solução do problema em números exatos, mas leva a uma classificação geral de categorias ou conjuntos de possíveis soluções.

Segundo Morais, Muralikrishna e Guimarães (2013), projetos de controle Fuzzy são baseados em métodos empíricos de tentativa e erro, onde geralmente a criação do controlador segue os seguintes passos:

- a) Especificam-se as variáveis de entrada e saída utilizadas;
- b) Define-se o conjunto de regras;



- c) Determina-se o método de defuzzificação;
- d) Testa-se o sistema, ajustando os detalhes conforme o propósito inicial.

A Figura 5 representa um controlador Fuzzy onde as entradas passam por um processo de fuzzyficação para que possam ser representadas por variáveis Fuzzy. Através de um sistema de inferência e uma base de regras, um valor de saída Fuzzy é produzido. Este valor passa então por um processo de defuzzificação para que seja obtido um valor preciso a ser fornecido para o ambiente.

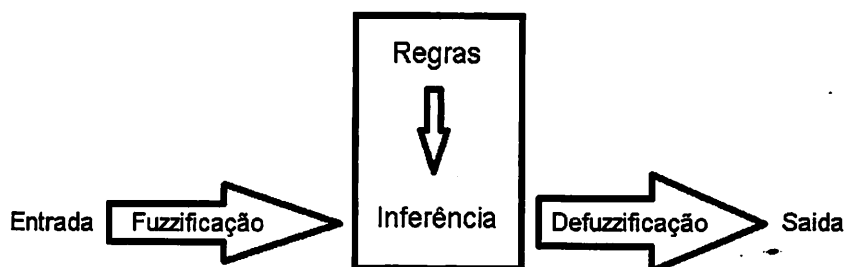


Figura 5 Modelo de um sistema Fuzzy

Quando um controlador Fuzzy é utilizado, é necessário que se estabeleça um conjunto de funções de pertinência para cada variável de entrada/saída. Através dessas funções são geradas regras a serem seguidas pelo controlador, estas regras são estabelecidas de forma empírica sendo, portanto, geradas e adaptadas a cada projeto.

É possível citar projetos como os de Dietrich e Silva (2008) e Silva (2009), que realizam simulações com o controlador Fuzzy direcionadas ao pêndulo invertido. É importante lembrar que Silva (2009) utilizou o trabalho de

Dietrich e Silva (2008) como referência e apesar de ambos terem utilizado os mesmos valores para entrada e saída e as mesmas funções de pertinência, se originaram dos trabalhos de ambos, regras singulares.

Os seguintes gráficos e tabelas foram apresentadas nos trabalhos de Dietrich e Silva (2008) e Silva (2009):

Tabela 1 Variáveis de entrada/Saída do controlador Fuzzy

	Variável	Range
<b>Entradas</b>	Posição	[-0.8 0.8 rad]
	Velocidade Angular	[-2 2 rad/s]
<b>Saída</b>	Tensão aplicada ao Motor	[-20 20 V]

Na Tabela 1 são apresentados os dados de posição da haste, onde esta pode mover-se entre os ângulos de -0.8 a 0.8 rad. Com velocidade angular, na faixa de -2 a 2 rad/s, representando a velocidade máxima alcançada pelo carrinho dada a deflexão da haste, e uma Tensão aplicada ao motor, que se apresenta na faixa de -20v a 20v.

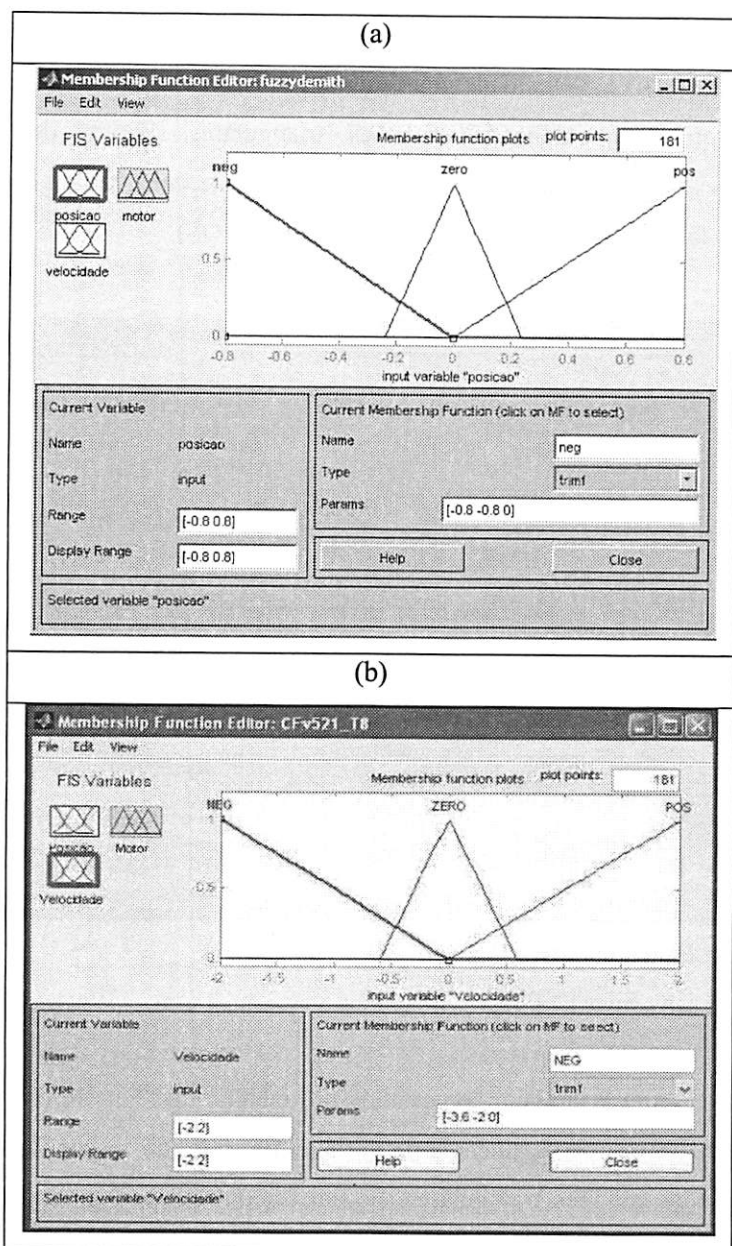


Figura 6 (a) função de pertinência da variável posição angular. (b) função de pertinência da variável velocidade

Fonte: Dietrich e Silva (2008)

A Figura 6 mostra as funções de pertinência das variáveis de entrada, posição angular e velocidade apresentadas no trabalho de Dietrich e Silva (2008), onde são utilizadas funções triangulares. Foram definidas três graduações para a função de pertinência, onde os intervalos foram divididos nas seguintes faixas: negativo (NEG), zero e positivo (POS).

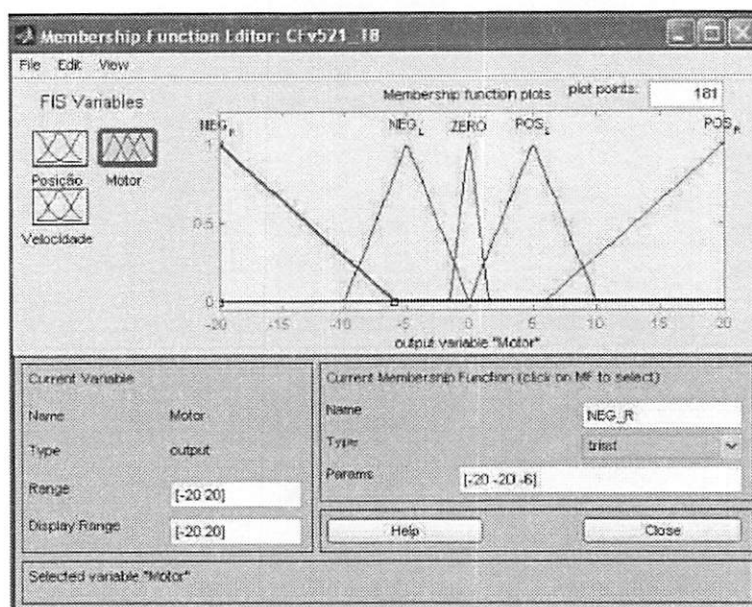


Figura 7 Função de pertinência da saída do motor

Fonte: Dietrich e Silva (2008)

A Figura 7 também apresentada no trabalho de Dietrich e Silva (2008) mostra as funções de pertinência da variável de saída do motor, onde também são utilizadas funções triangulares. Foram definidas cinco graduações para a função de pertinência, onde os intervalos foram divididos nas seguintes faixas: negativo rápido (NEGr), negativo lento (NEGl), zero, positivo lento (POSl) e positivo rápido (POSr).

Mesmo fazendo uso dos mesmos mecanismos de inferência, Dietrich e Silva (2008) e Silva (2009) definem conjuntos de regras singulares dada a compreensão de cada um do problema.

A Tabela 2 mostra o conjunto de regras definidas por Dietrich e Silva (2008) e Silva (2009).

Tabela 2 (a) Conjunto de regras Fuzzy; (b) Conjunto de regras

		<b>(a) Velocidade Angular</b>		
		<b>N</b>	<b>Z</b>	<b>P</b>
Posição Angular	<b>N</b>	NEG_R	NEG_L	ZERO
	<b>Z</b>	NEG_L	ZERO	POS_L
	<b>P</b>	ZERO	POS_L	POS_R

		<b>(b) Velocidade Angular</b>		
		<b>N</b>	<b>ZERO</b>	<b>P</b>
Posição Angular	<b>N</b>	MN	MN	PN
	<b>ZERO</b>	PN	ZERO	PP
	<b>P</b>	PP	MP	MP

Fonte: (a) Dietrich e Silva (2008); (b) Silva (2009).

Para melhor compreensão, destaca-se que a nomenclatura utilizada nas tabelas dos dois trabalhos difere. Dessa forma, foi elaborada a tabela 3 que mostra as siglas utilizadas na tabela 2 (a) e suas siglas correspondentes na tabela 2 (b).

Tabela 3 Conversão de nomenclaturas

	Tabela 2 (a)	Tabela 2 (b)
SIGLA	NEG_R (Negativo rápido)	MN (Muito negativo)
	NEG_L (Negativo lento)	PN (Pouco negativo)
	POS_R (Positivo rápido)	MP (Muito positivo)
	POS_L (Positivo lento)	PP (pouco positivo)
	ZERO	ZERO

### 3.5 Algoritmo Genético

Baseados nos mecanismos de seleção natural e da genética, os Algoritmos Genéticos trabalham com uma estratégia de busca aleatória, contudo estruturada, que busca os pontos de minimização ou maximização das suas funções de avaliação. Nessa área, é possível destacar os trabalhos de Ferneda, Alsina e Cavalcanti (1999) e Paiva (2010). Ferneda, Alsina e Cavalcanti (1999) também utilizaram Algoritmos Genéticos direcionados ao pêndulo invertido, enquanto Paiva (2010) utilizou os Algoritmos Genéticos para a sintonia de controladores PID.

Apresentado pela primeira vez por Holland (1992), os Algoritmos Genéticos (AG) são algoritmos de otimização global.

A idéia de base dos Algoritmos Genéticos é a evolução de uma determinada população de indivíduos, de forma que no final do processo a população esteja melhor adaptada ao problema. Todo o processo acontece de forma semelhante à seleção natural descrita pelo cientista Charles Darwin.

Os algoritmos funcionam explorando as informações prévias de um problema para encontrar novos espaços de busca de onde poderão ser obtidos melhores desempenhos na resolução do problema original. Isto ocorre através de

processos interativos, onde cada interação é conhecida como geração. Durante cada geração são aplicados princípios de seleção como seleção natural, mutação, hereditariedade, e recombinação. Segundo Barone (2003), apenas alguns indivíduos conseguirão sobreviver às mudanças produzidas pelo meio, gerando descendentes para a próxima geração dependendo de seu índice de aptidão gerado pela função de avaliação em vigor. A nova população será portanto, melhor adaptada ao problema.

As principais características dos algoritmos genéticos segundo Mitchell (1996), são:

- a) Manter um conjunto de soluções para um determinado problema;
- b) Possuir um processo de seleção com base no grau de adaptação de cada indivíduo;
- c) Possuir operadores genéticos, que gerarão novos indivíduos para a população.

Segundo Ferneda, Alsina e Cavalcanti (1999), Nagai (2002) e Paiva (2010) alguns dos parâmetros levados em consideração para a criação de um Algoritmo Genético são:

- a) **Cruzamento:** o cruzamento consiste na combinação entre dois indivíduos dentro da mesma população, que dão origem a um novo indivíduo que por sua vez será recombinado. A taxa de cruzamento deve ser adequada, pois com o valor ideal rapidamente novas estruturas serão inseridas na população base, acelerando o processo de seleção. Porém, com uma taxa de cruzamento muito alta, estruturas com boas aptidões podem ser perdidas na renovação populacional, contrariando o objetivo final. Caso o valor da taxa de

cruzamento seja muito baixo, o algoritmo pode demorar a convergir. Este processo é aleatório, mas ocorre com probabilidade fixa que deve ser especificada anteriormente.

- b) **Mutação:** A mutação consiste na geração de um novo indivíduo através da sua própria replicação. Um ou mais de seus componentes são modificados de forma arbitrária. Assim como nos outros parâmetros é importante que seja definido um valor médio adequado ao problema, pois quando a taxa de mutação é excessivamente baixa, o algoritmo pode estagnar-se, gerando poucos resultados e levando um maior período de tempo. Já quando a taxa de mutação é alta, a busca torna-se demasiadamente aleatória.
- c) **Geração:** Cada geração consiste em um ciclo no qual são aplicados os parâmetros já explicados. Os ciclos acontecem até que um determinado critério de parada seja satisfeito. O ideal seria que o algoritmo parasse assim que descobrisse um ponto ótimo, mas como na maior parte dos casos isso é inviável, utiliza-se o critério de um número máximo de gerações. Caso sejam definidas poucas gerações, o algoritmo pode não chegar ao resultado desejado. Caso sejam definidas muitas gerações, o resultado tende a um melhor resultado, porém o peso computacional será maior e portanto, o processo será mais lento.
- d) **População:** O tamanho nada mais é do que a quantidade de indivíduos que são parte da população. Este parâmetro afeta a eficiência global dos algoritmos genéticos porque quando em tamanho pequeno, pode não oferecer uma busca de qualidade no espaço de soluções. Quando em tamanho maior, oferece uma boa cobertura do problema, apenas exigindo mais dos recursos



computacionais disponíveis e levando mais tempo para concluir o trabalho.

## 4 IDENTIFICAÇÃO E CONTROLE

### 4.1 Estimação dos parâmetros do modelo do pêndulo

Segundo Ribeiro (2007) para estimação dos parâmetros do sistema do pêndulo invertido o modelo pode ser ensaiado como um pêndulo convencional. Estratégia adotada neste trabalho em razão de sua praticidade.

A Figura 8 representa o do pêndulo simples.

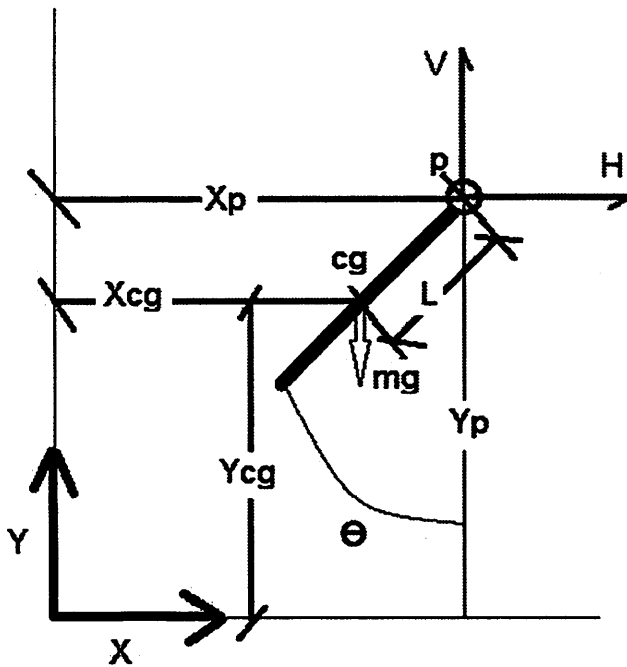


Figura 8 Representação do modelo do pêndulo simples

Lembrando que não existe movimento no eixo X no sistema do pêndulo simples, parte-se de:  $X_P=0$ , obtém-se a equação (55) equivalente a eq (19).

$$\ddot{\theta}(t) + 2\xi\omega_n\dot{\theta}(t) - \omega_n^2\theta(t) = 0 \quad (55)$$

Sendo os autovalores da função dado por:

$$\lambda = -\xi\omega_n \pm j\omega_n\sqrt{1 - \xi^2} \quad (56)$$

Sendo

$$\omega_d = \omega_n\sqrt{1 - \xi^2} \quad (57)$$

Obtemos a solução apresentada em (58).

$$\Theta(t) = Ke^{-\xi\omega_n t} \sin(\omega_d t + \alpha) \quad (58)$$

Em geral  $\Theta(t)$  apresenta uma resposta senoidal de frequência do tipo amortecida  $\frac{\omega_d}{2\pi}$  com um envelope exponencial do tipo  $e^{-\xi\omega_n t}$ .

Para obtenção do modelo, os ensaios foram realizados posicionando a haste como um pêndulo simples e soltando. Nesse intervalo o sinal é coletado com um tempo de amostragem de 9 ms por meio do equipamento da National Instruments NI USB 6251 conectado a um encoder (NATIONAL INSTRUMENTS, 2013). A Figura 9 mostra a realização do experimento, enquanto a Figura 10 mostra os dados obtidos no ensaio.

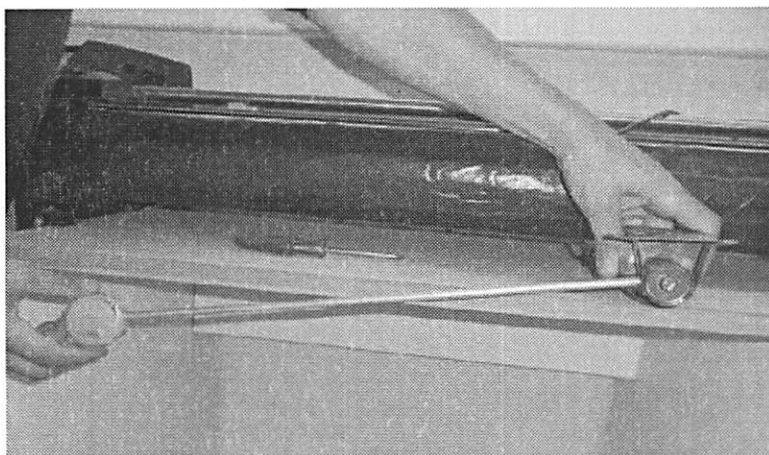


Figura 9 Ensaio do modelo para obtenção dos parâmetros da haste

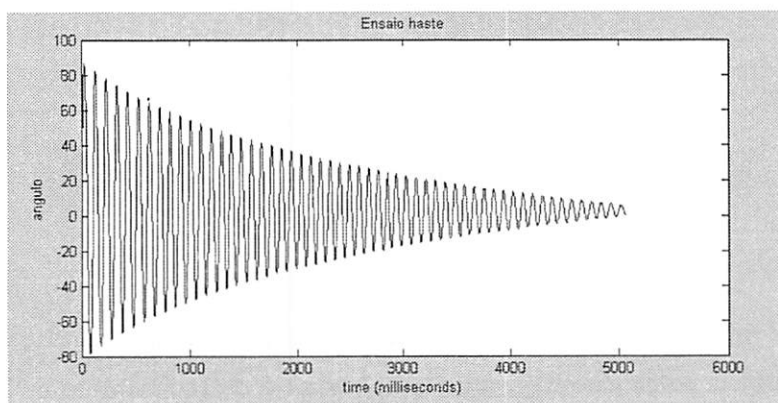


Figura 10 Dados do ensaio do pêndulo

Após a coleta dos dados é possível identificar os parâmetros do modelo. Primeiro a onda foi dividida em períodos onde através da função máximo do Excel foram coletados seus pontos de pico. De posse desses valores foram determinados os coeficientes da função exponencial através do toolbox do *Matlab Curve Fitting*, como mostrado nas Figuras 11 e 12.

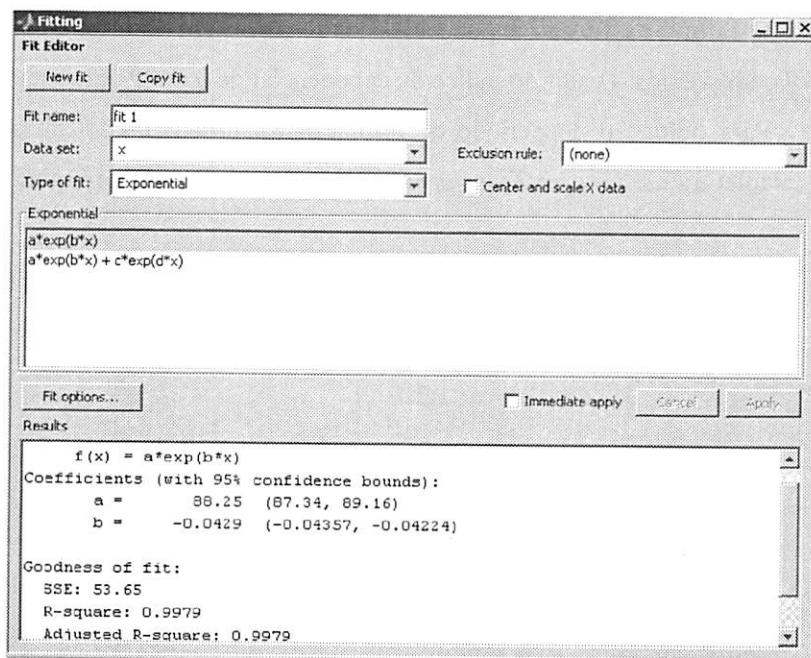


Figura 11 Dados obtidos no *Curve Fitting*

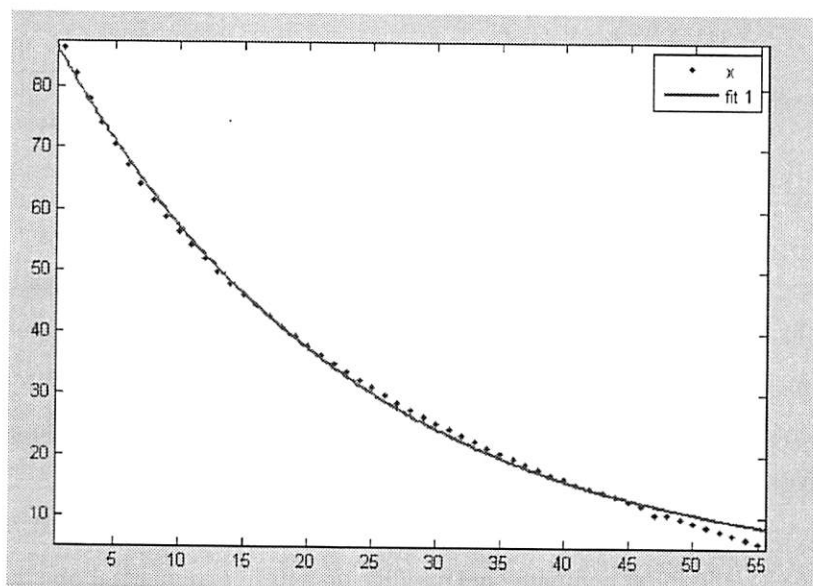


Figura 12 Aproximação dos pontos de pico por uma função exponencial

O Fitting da função exponencial nos retornou um valor R-quadrado de 0.9979 e obtivemos o valor do índice da exponencial de 0,0429 para o modelo.

Para obtenção do período de oscilação foi desenvolvido um software para calcular a *Fast Fourier Transform* (FFT). Como mostrado na Figura 13.

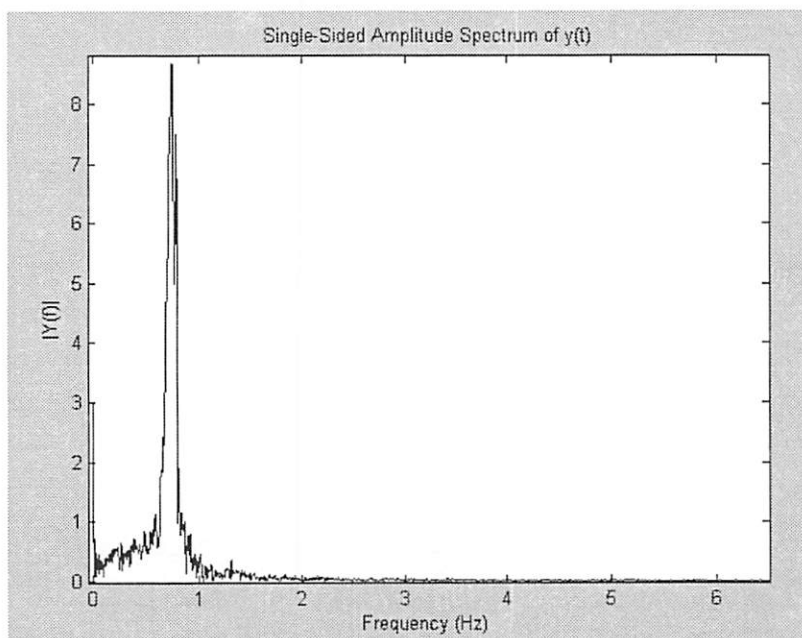


Figura 13 Frequência fundamental

A transformada rápida de Fourier é um método computacional para o cálculo da transformada de Fourier que mostra como funções não periódicas podem ser expressas por integrais de funções senoidais de frequências diferentes, cada uma multiplicada por um coeficiente próprio, sendo possível assim conhecer a frequência fundamental do sistema.

A Figura 13 mostra a frequência fundamental do sistema de 0.7455 Hz ou 4,6817 [rd/s]. Em conjunto com o índice da função exponencial obtemos:

$$\xi\omega_n = 0.0429 \quad (59)$$

$$\omega_d = 4.6817 \quad (60)$$

$$\omega_d^2 = \omega_n^2 - \xi^2\omega_n^2 \quad (61)$$

Substituindo os valores nas equações obtemos:

$$\xi = 0,0092 \quad (62)$$

$$\omega_n = 4.6815 \quad (63)$$

Do comprimento da haste temos  $Kh = 2.5$ , conforme mostrado na Equação (24). Substituindo os valores na equação 26 obtemos:

$$\frac{\theta(s)}{X(s)} = \frac{-2.5s^2}{s^2 + 0,0858s - 21.916} \quad (64)$$

## 4.2 Estimação dos parâmetros do conjunto Amplificador-Carro-Motor

Para determinar os parâmetros do modelo amplificador-motor-carro do sistema do pêndulo invertido aplicaremos uma identificação caixa-preta, onde são aplicadas funções degraus em tensão com duração igual a 0,3 segundos e amplitude A variável. Sendo assim:

$$Vi(s) = \frac{A}{s} \quad (65)$$

Substituindo na equação 50 temos:

$$X_p(s) = \frac{A}{S} \frac{K_c}{s(s+B)} \quad (66)$$

Este é um modelo de equação de segunda ordem auto ajustável com integrador, onde podemos obter um ganho  $K$  através da inclinação da reta tangente. A Figura 14 mostra os dados obtidos pelo ensaio para os diferentes valores de amplitude, onde as retas contínuas representam os ensaios no sentido direita-esquerda e as retas pontilhadas, os ensaios no sentido contrário.

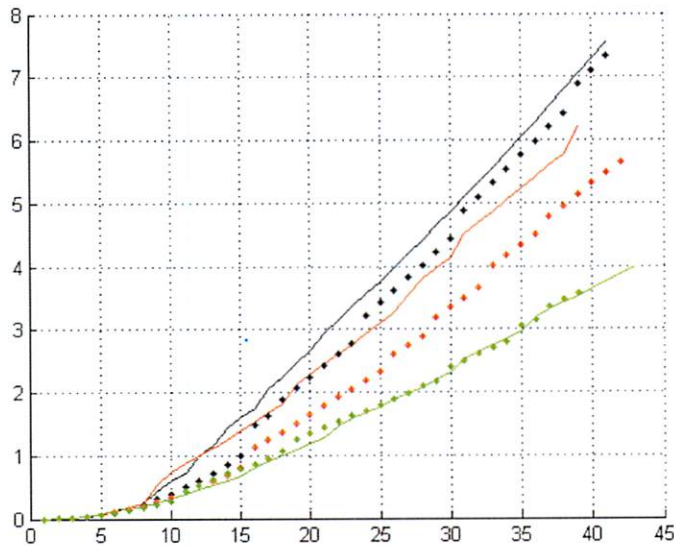


Figura 14 Ensaio do conjunto carrinho-amplificador-motor

Sendo:

$$K = \lim_{S \rightarrow 0} S \frac{K_c}{s(s+B)} \quad (67)$$



$$AK = \lim_{s \rightarrow 0} s^2 \frac{A}{s} \frac{K_c}{s(s+B)} \quad (68)$$

A Tabela 4 apresenta os ganhos K para cada reta com seus respectivos valores de amplitude.

Tabela 4 Ganhos K para cada entrada de amplitude

Sentido Direita-Esquerda	K
A=24V Potencia (100%)	1.45
A=18V Potencia (75%)	1.41
A=12V Potencia( 50%)	1.39
Sentido Esquerda-Direita	
A=24V Potencia (100%)	1.42
A=18V Potencia(75%)	1.39
A=12V Potencia (50%)	1.36

Calculando a media simples dos ganhos, temos:

$$K = 1,403 \quad (69)$$

Derivando o sistema obtemos um modelo de primeira ordem do tipo:

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{K}{(\tau s + 1)} \quad (70)$$

Onde:

$$B = \frac{1}{\tau} \quad (71)$$

$$K_C = \frac{K}{\tau} \quad (72)$$

Para encontrar o valor de  $\tau$ , podemos aplicar o método das integrais sobre o sinal, onde:

$$\theta - \tau = \int_0^{\infty} (u(t) - y(t)) dt \quad (73)$$

Neste caso específico, foi mostrado na modelagem do carrinho que o modelo não leva em consideração o atraso, pois se trata de um motor de corrente contínua com resposta quase que imediata, sendo assim:

$$\tau = \int_0^{\infty} (u(t) - y(t)) dt \quad (74)$$

A Figura 15 mostra a derivada dos sinais e a tabela 5 apresenta o valor de  $\tau$  para cada onda.

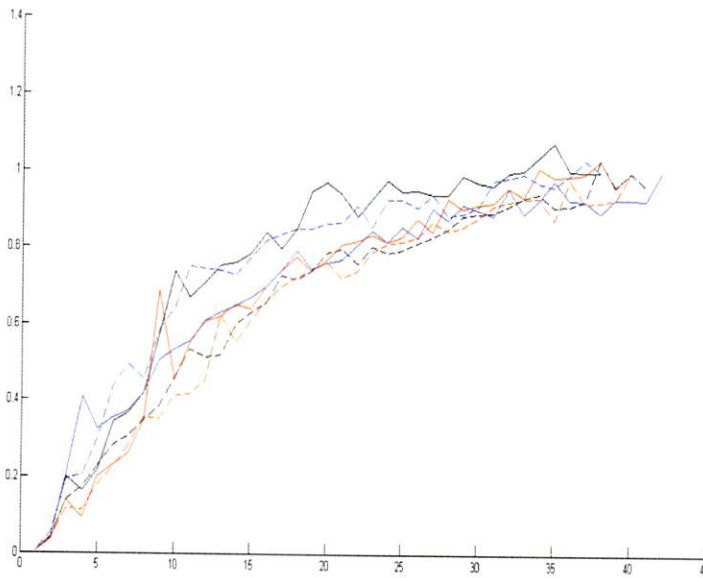


Figura 15 Derivadas

Tabela 5 Valores de  $\tau$  para cada entrada de amplitude

Sentido Direita-Esquerda	$\tau$
A=24V Potencia (100%)	0.0862
A=18V Potencia (75%)	0.0796
A=12V Potencia (50%)	0.0833
Sentido Esquerda-Direita	
A=24V Potencia (100%)	0.1017
A=18V Potencia (75%)	0.0979
A=12V Potencia (50%)	0.0791

Calculando o valor médio temos:

$$\tau = 0.0878 \quad (75)$$

A função de transferência do modelo e representada na equação (8).

$$\frac{X_p(s)}{V_i(s)} = \frac{15,97}{s(s+11.38)} \quad (76)$$

As Figuras 16 e 17 apresentam a validação do modelo:

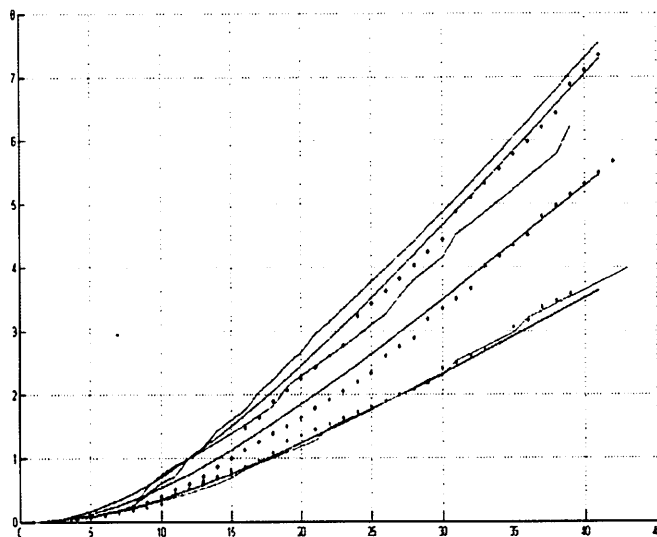


Figura 16 Validação dos dados 1

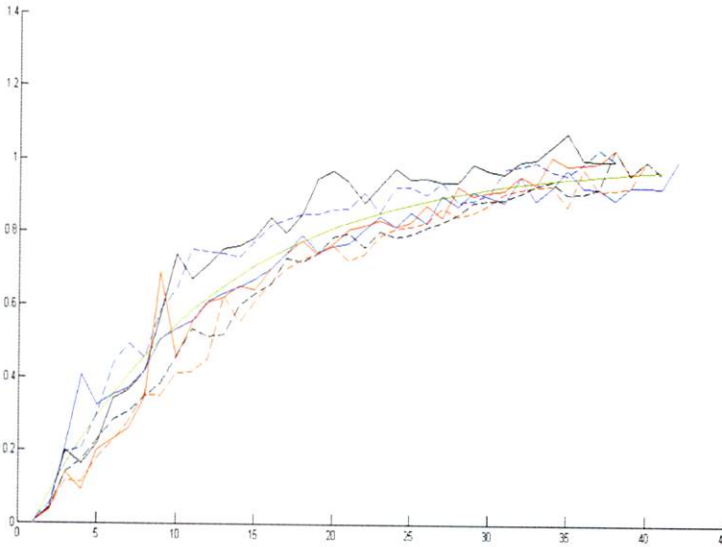


Figura 17 Validação dos dados 2

A equação 45 apresenta a função de transferência da planta e a Figura 18 mostra o modelo da planta identificada.

$$G(s) = \frac{\theta(s)}{V_i(s)} = \frac{15,97}{S(S+11.389)} \times \frac{-2.5S^2}{S^2+0.0858S-21.916} \quad (77)$$

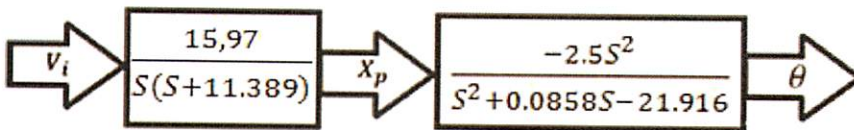


Figura 18 Modelo da planta identificada

### 4.3 Implementação do Controlador PID

Com base em Ribeiro (2007) para a malha de controle foram definidas as seguintes especificações: tempo de acomodação ( $t_s$ ) em torno de 0,2 segundos, erro em regime permanente ( $ess$ ) próximo de 0,5%, máximo pico ( $M_p$ ) menor ou igual a 5%.

Para sistemas de segunda ordem estáveis existe uma relação entre o máximo pico e o fator de amortecimento ( $\xi$ ) aproximados por raízes expressas em (78). As equações (79) e (80) em par com a frequência do sistema ( $\omega_n$ ), se relacionam com a expressão (81) com relação ao tempo de acomodação.

$$S_{1,2} = -\xi\omega_n \pm j\omega_n\sqrt{1-\xi^2} \quad (78)$$

$$M_p = e^{-\frac{\pi\xi}{\sqrt{1-\xi^2}}} \quad (79)$$

$$\xi = \sqrt{\frac{\ln^2(M_p)}{\pi^2 + \ln^2(M_p)}} \quad (80)$$

$$t_s = \frac{4}{\xi\omega_n} \quad (81)$$

Substituindo o valor de máximo pico ( $M_p=0,05$ ) na equação (80), temos:

$$\xi = 0.6901 \quad (82)$$

Sabendo que o tempo de acomodação desejado é de ( $t_s=0,2$ ) na equação (81), encontramos:

$$\omega_n = 28.98 \frac{rd}{s} \quad (83)$$

Quando se tem a função de transferência do processo, Phillips e Harbor (1997) apresentam um método para os ganhos típicos de um controlador PID expressos nas equações (84), (85) e (86).

$$K_X \lim_{s \rightarrow 0} S^n G(S)H(S) = \frac{1}{e_{ss}} \quad (84)$$

$$K_P = \frac{-\sin(\angle S_1 + \angle G(S_1)H(S_1))}{|G(S_1)H(S_1)|\sin(\angle S_1)} - \frac{2K_I \cos(\angle S_1)}{|S_1|} \quad (85)$$

$$K_d = \frac{\sin(\angle G(S_1)H(S_1))}{|S_1||G(S_1)H(S_1)|\sin(\angle S_1)} + \frac{K_I}{|S_1|^2} \quad (86)$$

Para efetuar o cálculo do controlador PID utilizado as equações de Phillips e Harbor (1997), é necessário que o ganho integral seja estimado ou adotado, onde após alguns testes o valor do ganho integral foi definido em (87).

$$K_i = 600 \quad (87)$$

Da equação (78) obtemos as equações (88) e (89), onde o argumento está em radianos.

$$S_{1,2} = -20 \pm j20,97 \quad (88)$$

$$S_1 = 28,98 \angle 2,3324 \quad (89)$$

Substituindo os valores obtidos em (89) na função de transferência da planta em (45) obtemos (90) e (91).

$$G(S_1) = 0,0263 - j0,0548 \quad (90)$$

$$G(S_1) = 0.0608\angle - 1.1233 \quad (91)$$

Substituindo os valores dos parâmetros (87), (88), (89), (90) e (91) nas equações (85) e (86) obtemos os parâmetros  $K_p$  e  $K_d$  em (92) e (93).

$$K_p = 28,56 \quad (92)$$

$$K_d = 0.714 \quad (93)$$

#### 4.4 Controlador Fuzzy

Neste trabalho, criaram-se dois conjuntos de dados de entradas que são a posição angular do pêndulo e velocidade angular e um sinal de saída, que é a força aplicado ao carrinho. O sinal de saída atuará no controle do pêndulo, sendo a tensão aplicada ao motor do carrinho.

Na tabela 6 encontram-se as variáveis de entrada e saída usada no controlador assim como sua escala:



Tabela 6 Variáveis de entrada-saída do controlador Fuzzy

	Variáveis	Escala
Entrada 1	Posição Angular	[-0.26 0.26 rad]
Entrada 2	Velocidade Angular	[-2 2 rad/s]
Saída	Tensão	[-24 24 v]

Como mostra a tabela 6 a faixa de tensão está entre -24V e 24V, que é a tensão de entrada do motor, a posição angular esta na faixa entre -0,26 rad e 0,26rad que equivalem a faixa de mais ou menos 15 graus, e a faixa da velocidade angular ficou definida entre -2rad/s e 2 rad/s. O controlador foi desenvolvido no ambiente Fuzzy Logic do matlab onde foi utilizada uma arquitetura do tipo Mamdani, com duas entradas e uma saída, o método de defuzzyficação utilizado foi do tipo centróide. As Figuras 19 20 e 21 mostram as funções de pertinência das entradas e da saída.

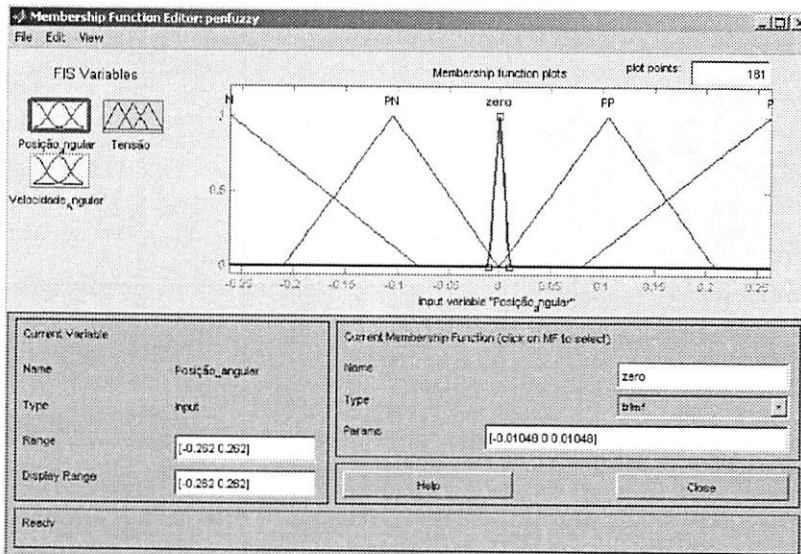


Figura 19 Função de pertinência da entrada posição

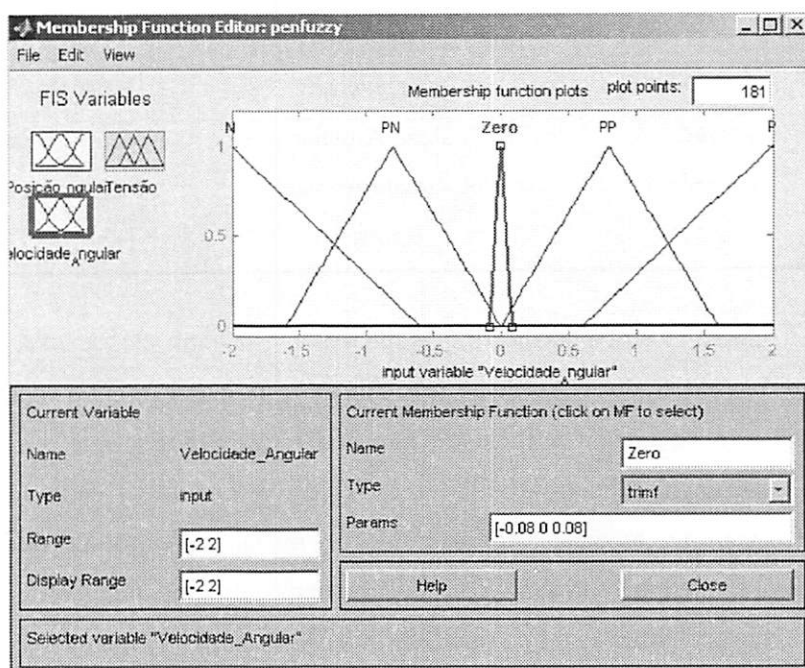


Figura 20 Função de pertinência da entrada velocidade

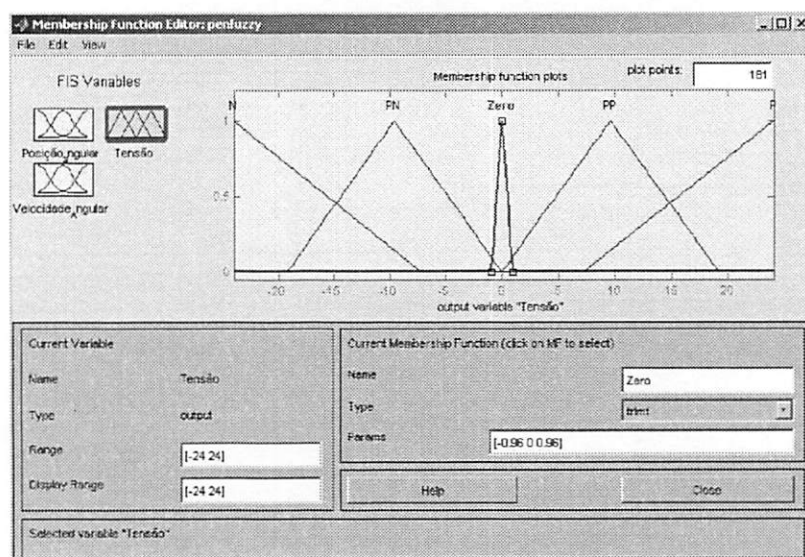


Figura 21 Função de pertinência da saída tensão

Foram definidas para o sistema cinco gradações para as funções de pertinência, do sistema onde os intervalos foram divididos nas seguintes faixas: Negativo (N), Pouco Negativo (PN), Zero, Pouco Positivo (PP) e Positivo (P).

Gerou-se um total de 25 regras que foram organizadas como mostrada na tabela 7. Em todas as regras foi usado o operador lógico “e” sendo que as operações lógicas foram realizadas através da definição de intersecção e união de conjuntos nebulosos.

**Tabela 7 Regras do Sistema Fuzzy Aplicado**

	N	PN	Zero	PP	P
N	N	N	PN	Zero	Zero
PN	N	PN	PN	Zero	Zero
Zero	PN	PN	Zero	PP	PP
PP	Zero	Zero	PP	PP	P
P	Zero	Zero	PP	P	P

#### **4.5 Ajuste do controlador PID via Algoritmos Genéticos**

De acordo com Paiva (2010), para a construção do algoritmo genético é necessária a definição de alguns parâmetros para quantificar e qualificar a classe de indivíduos que representará um conjunto de soluções.

Durante a geração de população deste trabalho definiu-se que a população teria no total 100 indivíduos distribuídos num espaço de busca global compreendido de 0 a 800. Também foi definida uma taxa de mutação de 0.05 e uma taxa de cruzamento de 0.9 com número total de gerações igual a 20.

Também foi implementado um critério de parada adicional onde caso não ocorra a melhora na função objetiva durante um número de interações igual a 5, a otimização é finalizada.

Foram utilizados quatro índices de desempenho para a otimização do controlador PID, são eles:

**IAE (Integral of the Absolute magnitude of the Error)** - Integral do valor Absoluto do Erro.

A equação (94) representa o cálculo do índice IAE. Este defini-se pela soma das áreas acima e abaixo do valor de referência.

$$I_{IAE} = \int_0^{\infty} |e(t)| dt \quad (94)$$

**ITAE (Integral of Time multiplied by Absolute of the Error)** – Integral do Tempo multiplicado pelo valor Absoluto do Erro.

Sendo uma extensão do índice IAE e tendo como definição a equação (95), o índice ITAE penaliza erros que se mantêm ao longo do tempo.

$$I_{ITAE} = \int_0^{\infty} t|e(t)| dt \quad (95)$$

**ISE (Integral of the Square of the Error)** – Integral do Quadrado do Erro.

O ISE trata-se do índice que calcula o erro médio quadrado. A equação (96) o representa.

$$I_{ISE} = \int_0^{\infty} [e(t)]^2 dt \quad (96)$$

**ITSE (*Integral of the Time multiplied by the Squared Error*)** – Integral do Tempo multiplicado pelo Quadrado do Erro.

Este índice de desempenho avalia a influência do tempo sobre o valor do erro penalizando os erros que persistem no tempo. Ele é definido pela equação (97).

$$I_{ITSE} = \int_0^{\infty} t[e(t)]^2 dt \quad (97)$$

## 5 COMPARAÇÃO DA SIMULAÇÃO DAS TÉCNICAS DE CONTROLE

Para realização dos testes de controle, foi definido um distúrbio padrão em forma de pulso com amplitude de 1rad e um período de 4 segundos, com 50% do tempo ON e 50% OFF, como mostrado na Figura 22. O distúrbio foi aplicado ao sistema tendo como objetivo a observação da resposta do sistema e sua estabilidade. O software utilizado na implementação de todos os algoritmos foi o Matlab/Simulink.

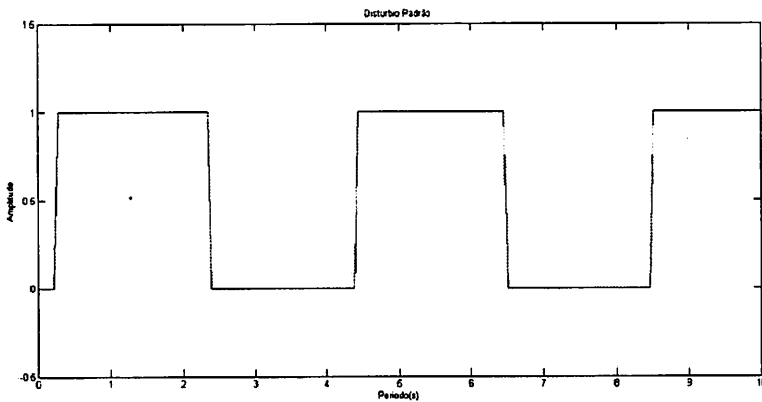


Figura 22 Distúrbio aplicado aos controladores

A Figura 23 ilustra o programa de controle do PID calculado (Equações (87), (92) e (93)). No bloco PID são implementados os ganhos proporcional, integral e derivativo e um filtro de ordem N (100). Esse filtro por sua vez, implementa um passa-baixas que minimiza os efeitos de ampliações da ação derivativa em eventuais ruídos do sistema, uma vez que esta apresenta um comportamento passa-altas. Na saída do controlador foi implementado um saturador com os limites de tensão aplicados ao motor.

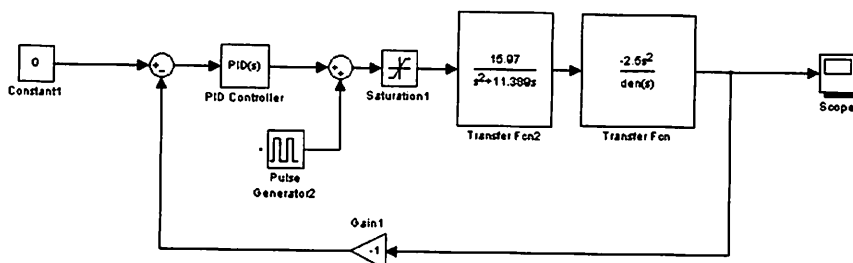


Figura 23 Malha de controle com controlador PID

A malha de controle implementada foi capaz de estabilizar o pêndulo na posição vertical, corrigindo os sinais inseridos em forma de perturbação. A Figura 24 mostra a simulação do modelo durante a aplicação do distúrbio.

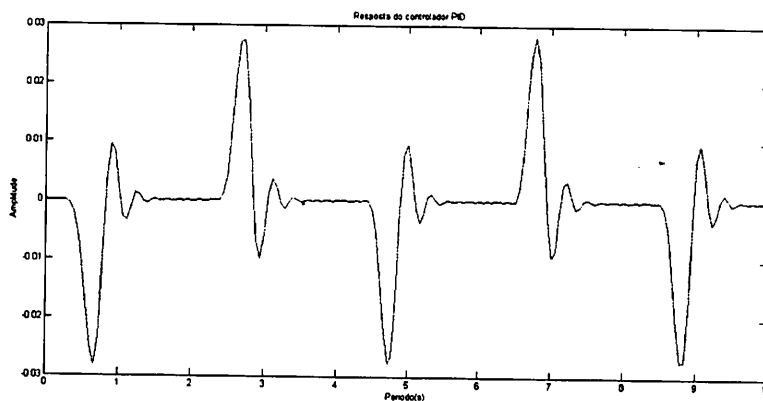


Figura 24 Simulação do modelo durante a aplicação do distúrbio

A Figura 25 apresenta a implementação da malha de controle para otimização do controlador PID por meio dos Algoritmos Genéticos. No bloco PID são identificadas as variáveis de busca a serem encontradas, nesse caso os ganhos proporcional, integral e derivativo. Foi implementado também um filtro

de ordem N (100). A otimização do controlador PID consiste na busca por soluções que minimizem índices de desempenho comumente utilizados na literatura para avaliação e comparação de controladores.

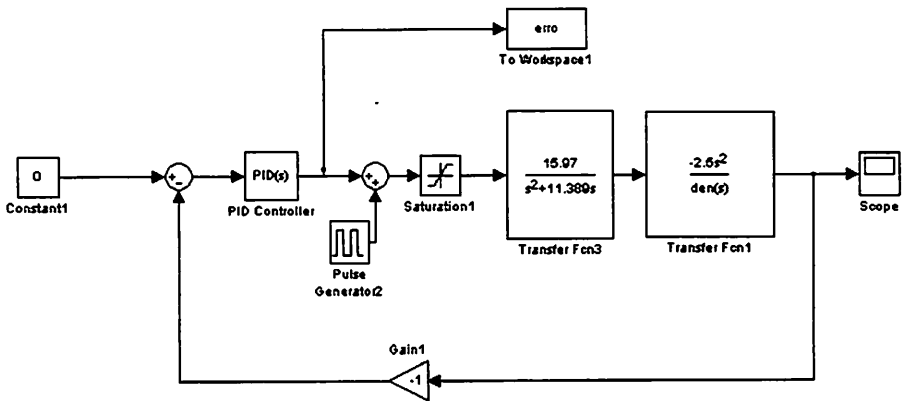


Figura 25 Otimização a malha de controle PID

Na Tabela 8 são mostrados os ganhos Integral, Proporcional e Derivativo otimizados encontrados por cada índice, assim como os tempos de subida( $T_s$ ), acomodação( $T_r$ ) e o *overshoot* percentual (MP%) de cada controlador.

Tabela 8 Parâmetros e especificações das respostas do sistema

	P	I	D	$T_s$ (ms)	$T_r$ (ms)	MP%
ITAE	121,91	1011,5	3,69	14.2	17.4	$2.34 \times 10^{-5}$
ITSE	122,45	1035,9	3,244	14.2	17.4	$3.54 \times 10^{-5}$
IAE	115,13	1016,1	3,54	14.2	17.4	$4.43 \times 10^{-5}$
ISE	111,19	1023,6	4,46	14.2	17.4	$3.81 \times 10^{-5}$



A Figura 26 mostra o gráfico de desempenho dos quatro índices, onde a cor verde representa o desempenho do índice ISE, a azul clara representa o desempenho do índice ITAE, a azul escura o desempenho do índice ITSE e a vermelha o desempenho do índice IAE. A Figura 27 mostra o mesmo gráfico ampliado para melhor visualização.

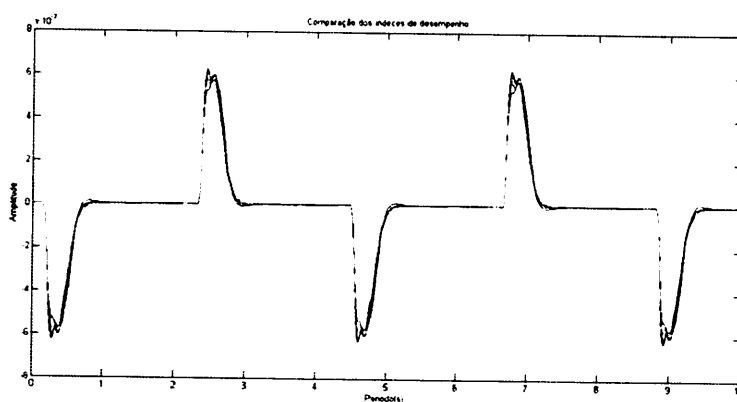


Figura 26 Gráfico gerado pelos índices de desempenho

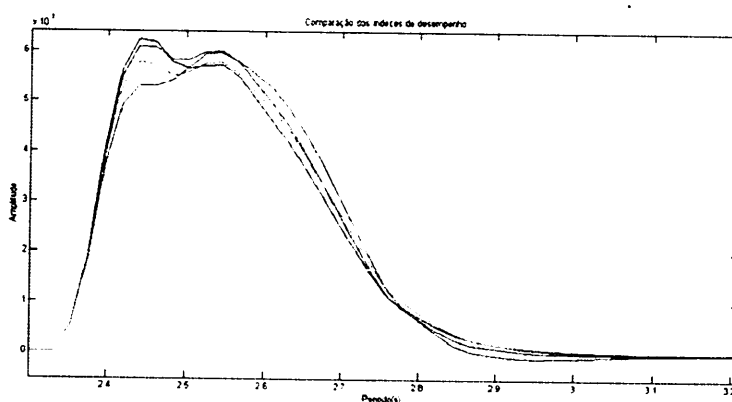


Figura 27 Ampliação do gráfico dos índices de desempenho

Comparando os controles gerados por cada índice de desempenho através dos algoritmos genéticos, é possível notar que apesar do índice ITAE ter alcançado melhor resultado, houve pouca discrepância entre todos.

De acordo com a Tabela 8, os tempos de subida ( $t_s$ ) e tempos de acomodação ( $t_r$ ) foram os mesmos em todos os índices, havendo variação apenas no valor percentual de *overshoot*.

A Figura 28 apresenta a malha de controle implementada para o controlador Fuzzy:

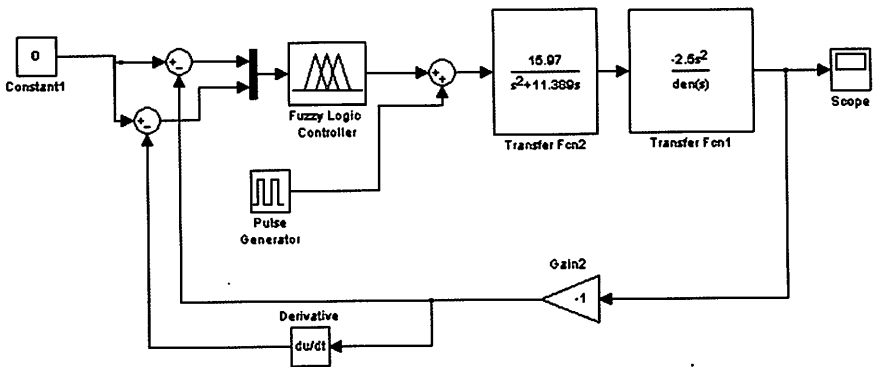


Figura 28 Malha de controle Fuzzy

Os modelos de controlador Fuzzy de Dietrich e Silva (2008) e Silva (2009) foram adaptados e aplicados ao modelo matemático do pêndulo invertido deste trabalho. O que possibilitou a comparação final dos controladores. A Figura 29 exibe um gráfico de comparação destes resultados, onde a cor azul representa este estudo, a cor vermelha representa Silva (2009) e a cor verde representa Dietrich e Silva (2008). É possível notar que a ação de controle realizada pelo controlador Fuzzy deste estudo apresentou melhor resposta em comparação aos outros.

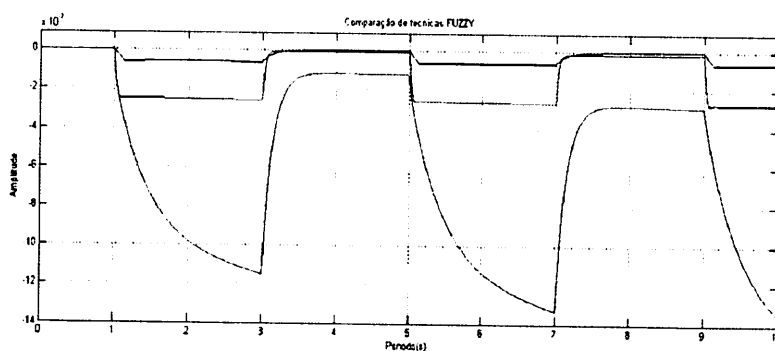


Figura 29 Comparação de técnicas Fuzzy

Mesmo que o controlador Fuzzy deste estudo tenha obtido uma melhor resposta em comparação aos outros estudos citados, este ainda apresenta um erro de regime estacionário que se propaga ao longo do tempo, como mostrado na Figura 30.

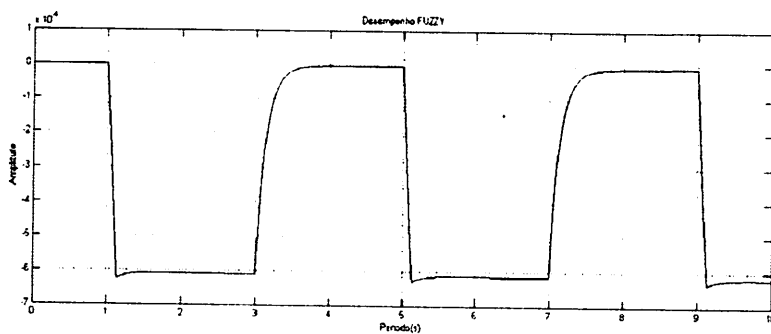


Figura 30 Desempenho do controlador Fuzzy deste estudo

O erro de regime estacionário ocorre devido ao controlador Fuzzy possuir apenas as características Proporcional e Derivativa. A Figura 31 apresenta o desempenho dos três controladores, onde a cor verde representa o

controlador PID, a cor azul representa o controlador Fuzzy e a cor vermelha representa o controlador produzido pelos Algoritmos Genéticos.

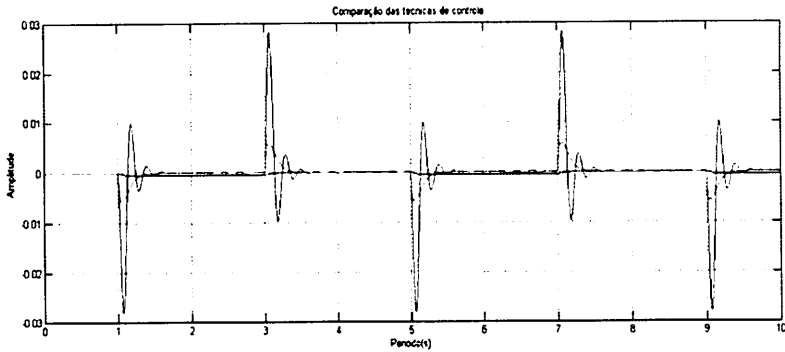


Figura 31 Desempenho dos três controladores

A análise da Figura 31 mostra que todas as técnicas obtiveram sucesso na estabilização do pêndulo invertido, contudo estas ainda são passíveis de melhoramentos. Lembrando disto, também é recomendado que estes dados sejam confirmados através de aplicação prática, pois durante este estudo foram feitas apenas as simulações computacionais.

## 6 CONCLUSÃO

Grande parte dos estudos disponíveis sobre o sistema instável do Pêndulo Invertido dão maior ênfase aos conceitos teóricos, fazendo pouca referência a parte prática envolvida. Este estudo se deparou com as dificuldades oriundas dessa prática e buscou detalhar os processos computacionais envolvidos na tentativa de tornar mais claro o desenvolvimento do projeto.

Os resultados obtidos através deste estudo indicam que as três técnicas desenvolvidas são viáveis e apresentam bom desempenho. Contudo, cada uma apresenta singularidades que devem ser levadas em conta antes de seu desenvolvimento em determinados projetos.

Foi notado a partir dos resultados que o controlador PID apesar de apresentar bom desempenho, em comparação com as outras duas técnicas, exhibe valores de *overshooting* mais altos, algo que pode se tornar prejudicial a estabilização de um sistema. Em contrapartida, o controlador Fuzzy em relação as outras técnicas, demanda mais tempo de processamento. Apresenta também o erro de regime permanente por possuir apenas características proporcionais e derivativas. O erro de regime permanente impede a estabilização completa do sistema, mas por tratar-se de um método de controle relativamente recente, espera-se que esse problema seja aprimorado futuramente.

Já o controlador otimizado pelo Algoritmo Genético mostra desempenho excelente em buscas globais, mas sempre que houver um modelo matemático preexistente para o cálculo em questão, sua eficácia torna-se nula.

Sugere-se que em estudos futuros, os dados computacionais obtidos nestas simulações sejam comprovados através de aplicações práticas em planta mecânica.

## REFERÊNCIAS

BARONE, D. **Sociedades artificiais**. 2. ed. Porto Alegre: Bookman, 2003. 332 p.

BUGEJA, M. Non-linear swing-up and stabilizing control of an inverted pendulum system. In: EUROCON, 13., 2003, Malta. **Proceedings...** Malta: University of Malta, 2003. v. 2, p. 437-441.

CARVALHO, D. B. **Controle de um pêndulo invertido real utilizando-se uma RNA treinada por algoritmos de otimização**. 1999. 99 p. Dissertação (Mestrado em Engenharia Elétrica) - Universidade Federal de Minas Gerais, Belo Horizonte, 1999.

CUNHA, A. F.; NACIMENTO, J. C. L. **Acionamento de motores para o  $\pi$ bot: pêndulo invertido robotizado weblab sobre rede KyaTera experimentos de robótica móvel**. 2009. 11 p. Monografia (Pós-Graduação em Projetos em Eletrônica Aplicada) - Instituto Tecnológico de Aeronáutica, São José dos Campos, 2009.

DIETRICH, J. V.; SILVA, Y. G. **Modelagem de um controlador fuzzy para pêndulo invertido utilizando a Fuzzy Logic Toolbox**. Florianópolis: UFSC, 2008. 8 p.

DORF, R. C.; BISHOP, R. H. **Sistemas de controle modernos**. 8 ed. Rio de Janeiro: LTC, 1998. 838 p.

FERNEDA, E.; ALSINA, P. J.; CAVALCANTI, J. H. F. Posicionamento de um pêndulo invertido usando algoritmos genéticos. **SBA Controle e Automação**, Campinas, v. 10, n. 1, p. 31-39, jan./abr. 1999.

HOLLAND, J. H. **Adaptation in natural and artificial systems**. Boston: MIT, 1992. 183 p.

MITCHELL, M. **An introduction to genetic algorithms**. Cambridge: MIT, 1996. 209 p.

MOBILIDADE urbana: a moto tipo scooter com uma roda só. Disponível em: <<http://www.materiaincognita.com.br/mobilidade-urbana-a-moto-tipo-scooter-com-uma-roda-so/#axzz1cy7EH78U>>. Acesso em: 5 out. 2011.

MORAIS, M. H. E.; MURALIKRISHNA, A.; GUIMARÃES, L. N. F. **Sistema de controle PID e nebuloso aplicado ao problema do pêndulo invertido**. Disponível em: <[http://mtc-m18.sid.inpe.br/col/dpi.inpe.br/hermes2@1905/2005/10.03.18.34/doc/V\\_WORCAP.pdf](http://mtc-m18.sid.inpe.br/col/dpi.inpe.br/hermes2@1905/2005/10.03.18.34/doc/V_WORCAP.pdf)>. Acesso em: 10 mar. 2013.

NAGAI, E. Y. **Métodos de identificação de modelos fuzzy a partir de dados numéricos**. 2002. 122 p. Dissertação (Mestrado em Engenharia Elétrica e Informática Industrial) - Centro de Educação Tecnológica do Paraná, Curitiba, 2002.

NATIONAL INSTRUMENTS. **USB6151 BNC Datasheet**. Disponível em: <<http://sine.ni.com/ds/app/doc/p/id/ds-21/lang/pt>>. Acesso em: 10 mar. 2013.

OGATA, K. **Engenharia de controle moderno**. 4. ed. São Paulo: Pearson Education Brasil, 2003. 800 p.

PAIVA, L. S. **Aplicação de algoritmos genéticos para sintonia de controladores**. 2010. 136 p. Dissertação (Mestrado em Engenharia de Controle e Automação) - Instituto Superior de Engenharia do Porto, Porto, 2010.

**PHILLIPS, C. L.; HARBOR, R. D. Sistemas de controle e realimentação.** São Paulo: Makron Books do Brasil, 1997. 658 p.

**RIBEIRO, J. M. S. Controle discreto com modos deslizantes em sistemas incertos com atraso no sinal de controle.** 2006. 126 p. Tese (Doutorado em Engenharia Elétrica) - Universidade Estadual Paulista, Ilha Solteira, 2006.

**RIBEIRO, R. Implementação de um sistema de controle de um pêndulo invertido.** 2007. 85 p. Dissertação (Mestrado em Engenharia Elétrica) - Universidade Federal de Itajubá, Itajubá, 2007.

**SILVA, M. A. O. Estudo de técnicas de controle aplicada ao sistema pêndulo invertido.** 2009. 58 p. Monografia (Graduação em Engenharia de Controle e Automação) - Universidade Federal de Ouro Preto, Ouro Preto, 2009.

**SPINA, C. O. C. Lógica fuzzy: reflexões que contribuem para a questão da subjetividade na construção do conhecimento matemático.** 2010. 165 p. Tese (Doutorado em Educação) - Universidade de São Paulo, São Paulo, 2010.

**TAVARES, M. A. et al. Controle de um pêndulo invertido utilizando o modelo fuzzy takagi-sugeno: 16 POSMEC.** Uberlândia: UFU, 2006. 11 p.

**VASCONCELOS, V. B. et al. Controle de um sistema pêndulo invertido usando controladores inteligentes.** In: CONGRESSO BRASILEIRO DE EDUCAÇÃO EM ENGENHARIA, 40., 2012, Belém. *Anais...* Belém: COBENGE, 2012. 1 CD-ROM.

**VENDRAMINI, G.; SILVA, P. S. Controle de um pêndulo invertido sobre uma plataforma móvel utilizando PID e MFAC.** In: BRAZILIAN CONFERENCE ON DYNAMICS, CONTROL AND THEIR APPLICATIONS, 9., 2010, Serra Negra. *Anais...* São Paulo: DINCON, 2010. 1 CD-ROM.



**ZAYAS, H. Earthquake protection systems: technical characteristics of friction pendulum. Berkeley: University of California, 1985. 6 p.**

## ANEXOS

### ANEXO A – Programas

#### A.1 Programa de obtenção da frequência fundamental

```

cons=92,16;
x=x-cons;
T = 0.008;
Fs = 1/T;           % Sampling frequency           % Sample
time
L = 2142;           % Length of signal
t = (0:L-1)*T;     % Time vector
% Sum of a 50 Hz sinusoid and a 120 Hz sinusoid
%x = 0.7*sin(2*pi*50*t) + sin(2*pi*120*t);
%y = x + 2*randn(size(t)); % Sinusoids plus noise
%plot(Fs*t(1:50),y(1:50))
figure(1)
plot(x)
title('Signal Corrupted with Zero-Mean Random Noise')
xlabel('time (milliseconds)')
NFFT = 2^nextpow2(L); % Next power of 2 from length of y
Y = fft(x,NFFT)/L;
f = Fs/2*linspace(0,1,NFFT/2+1);

% Plot single-sided amplitude spectrum.
figure(2)
plot(f,2*abs(Y(1:NFFT/2+1)))
title('Single-Sided Amplitude Spectrum of y(t)')
xlabel('Frequency (Hz)')
ylabel('|Y(f)|')

```

#### A.2 Programa de obtenção das variáveis Taw e K.

```

h=tf([16.3],[1 11.642 0 0])
h100=h*24
h75=h*18
h50=h*12
t=0:0.0075:0.3;
yh100=impulse(h100,t);
yh75=impulse(h75,t);
yh50=impulse(h50,t);

```

```
figure
grid on
hold on
plot(yh100,'b')
plot(yh75,'b')
plot(yh50,'b')
plot(hora100,'k')
plot(hora75,'r')
plot(hora50,'g')
%plot(hora25,'b')
plot(anti100,'k.')
plot(anti75,'r.')
plot(anti50,'g.')
%plot(anti25,'b.')

dh100=hora100(2:end)-hora100(1:end-1)
dh75=hora75(2:end)-hora75(1:end-1)
dh50=hora50(2:end)-hora50(1:end-1)
dh25=hora25(2:end)-hora25(1:end-1)
da100=anti100(2:end)-anti100(1:end-1)
da75=anti75(2:end)-anti75(1:end-1)
da50=anti50(2:end)-anti50(1:end-1)
da25=anti25(2:end)-anti25(1:end-1)
figure(2)

ho1=dh100(end);

ho2=dh75(end-1);

ho3=dh50(end);

ho4=dh25(end-1);
an1=da100(end);

an2=da75(end-1);

an3=da50(end);

an4=da25(end-1);

dh100=dh100/ho1;
dh75=dh75/ho2;
dh50=dh50/ho3;
```

```

dh25=dh25/ho4;
da100=da100/an1;
da75=da75/an2;
da50=da50/an3;
da25=da25/an4;

fim=length(dh100)-1;
for i=2:fim

% dhmax100=max(dh100);
% while dh100(n)~=dhmax100;
%   n=n+1;
% end
dhmax100=(dh100(i+1)+dh100(i-1)+dh100(i))/3;
dh100(i+1)=dhmax100;
end
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
fim=length(dh75)-1;
for i=2:fim
dhmax75=(dh75(i+1)+dh75(i-1)+dh75(i))/3;
dh75(i+1)=dhmax75;
end
fim=length(dh50)-1;
for i=2:fim
dhmax50=(dh50(i+1)+dh50(i-1)+dh50(i))/3;
dh50(i+1)=dhmax50;
end
fim=length(dh25)-1;
for i=2:fim
dhmax25=(dh25(i+1)+dh25(i-1)+dh25(i))/3;
dh25(i+1)=dhmax25;
end
fim=length(da100)-1;
for i=2:fim
damax100=(da100(i+1)+da100(i-1)+da100(i))/3;
da100(i+1)=damax100;
end
fim=length(da75)-1;
for i=2:fim
damax75=(da75(i+1)+da75(i-1)+da75(i))/3;
da75(i+1)=damax75;
end
fim=length(da50)-1;
for i=2:fim
damax50=(da50(i+1)+da50(i-1)+da50(i))/3;
da50(i+1)=damax50;

```

```

end
fim=length(da25)-1;
for i=2:fim
damax25=(da25(i+1)+da25(i-1)+da25(i))/3;
da25(i+1)=damax25;
end
figure(3)

grid on
hold on
plot(dh100,'k')
  plot(dh75,'r')
  plot(dh50,'g')
plot(dh25,'b')
plot(da100,'k')
plot(da75,'r')
plot(da50,'g')
plot(da25,'b')

tetatawdh100=trapz(1-dh100)*(0.3/length(dh100))
tetatawdh75=trapz(1-dh75)*(0.3/length(dh75))
tetatawdh50=trapz(1-dh50)*(0.3/length(dh50))
tetatawdh25=trapz(1-dh25)*(0.3/length(dh25));
tetatawda100=trapz(1-da100)*(0.3/length(da100))
tetatawda75=trapz(1-da75)*(0.3/length(da75))
tetatawda50=trapz(1-da50)*(0.3/length(da50))
tetatawda25=trapz(1-da25)*(0.3/length(da25));

tetatawh=(tetatawdh100+tetatawdh75+tetatawdh50)/3

tetatawa=(tetatawda100+tetatawda75+tetatawda50)/3

tetataw=(tetatawh+tetatawa)/2

tanghorra100=(hora100(end-15:end)-hora100(end-16:end-1))/length(hora100(end-15))*0.0075

```

### A.3 Programa para calculo dos indices de desempenho.

```
function itae = custo(x)
global P I D erro Y T X
P=x(1);
I=x(2);
D=x(3);
timer=0:0.1:50;
[T X Y]=sim('malha',timer);
error=(abs(erro).*T);%somatorio do tempo vezes absoluto do
erro itae
itae=sum(error)
```

```
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
```

```
function itse = custo(x)
global P I D erro Y T X
P=x(1);
I=x(2);
D=x(3);
timer=0:0.1:50;
[T X Y]=sim('malha',timer);
error=((erro.^2).*T);%somatorio do tempo vezes quadrado do
erro itse
itse=sum(error)
```

```
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
```

```
function iae = custo(x)
global P I D erro Y T X
P=x(1);
I=x(2);
D=x(3);
timer=0:0.1:50;
[T X Y]=sim('malha',timer);
error=abs(erro);%somatorio do valor absoluto do erro iae
iae=sum(error)
```

```
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
```

```
%
function ise = custo(x)
global P I D erro Y T X
```

```

P=x(1);
I=x(2);
D=x(3);
timer=0:0.1:50;
[T X Y]=sim('malha',timer);
error=(erro.^2); % somatorio quadratico do erro ise
ise=sum(error)

```

#### A.4 Programa para calculo do PID otimizado.

```

clear all
close all
warning off
% Fitness function
fitnessFunction = @custo;
% Number of Variables
nvars = 3;
global P I D erro Y T X
% Start with default options
options = gaoptimset;
% Modify some parameters
options = gaoptimset(options,'PopInitRange' ,[0;700]);
options = gaoptimset(options,'PopulationSize' ,100);
options = gaoptimset(options,'EliteCount' ,30);
options = gaoptimset(options,'CrossoverFraction' ,0.9);
options = gaoptimset(options,'MigrationInterval' ,100);
options = gaoptimset(options,'MigrationFraction' ,0);
options = gaoptimset(options,'Generations' ,5);
% options = gaoptimset(options,'StallGenLimit' ,50);
% options = gaoptimset(options,'StallTimeLimit' ,200);
options = gaoptimset(options,'InitialPopulation' , []);
options = gaoptimset(options,'InitialScores' , []);
% options = gaoptimset(options,'FitnessScalingFcn' ,
@fitscalingrank);
% options = gaoptimset(options,'SelectionFcn'
,@selectionstochunif);
% options = gaoptimset(options,'CrossoverFcn'
,{@crossoverintermediate 0.2});
options = gaoptimset(options,'CrossoverFcn' ,{
@crossoverheuristic 1.2});
options = gaoptimset(options,'MutationFcn' ,{
@mutationgaussian 0.05 0});
% options = gaoptimset(options,'Display' , 'off');
% %options = gaoptimset(options,'PlotFcns' , []);

```

```

% options = gaoptimset(options,'PlotFcns' ,{ @gaplotbestf
@gaplotbestindiv });
% options = gaoptimset(options,'HybridFcn' ,{[@fminsearch
]});
% x =
ga(fitnessfcn,nvars,A,b,Aeq,beq,LB,UB,nonlcon,options)
lb = [0; 0; 0];
ub = [100; 700; 5];
%=====
=====
% Run GA 1
% [X(kk,:),FVAL(kk),REASON,OUTPUT,POPULATION,SCORES] =
ga(fitnessFunction,nvars,options);
[x,fval] =
ga(fitnessFunction,nvars,[],[],[],[],lb,ub,[],options);

```