O PROBLEMA DAS TRÊS PORTAS E UMA VARIAÇÃO DO PROBLEMA DA SECRETÁRIA VIA TEORIA DOS JOGOS

MELISSA DE CARVALHO

2007

Ficha Catalográfica Preparada pela Divisão de Processos Técnicos da Biblioteca Central da UFLA

Carvalho, Melissa de

O problema das três portas e uma variação do problema da secretária via teoria dos jogos / Melissa de Carvalho. – Lavras : UFLA, 2007. - Lavras: UFLA, 2007.

72 p. : il.

Orientador: Lucas Monteiro Chaves.

Dissertação (Mestrado) - UFLA.

Bibliografia.

1. Probabilidade. 2. Teoria dos jogos. 3. Otimização estocástica. I. Universidade Federal de Lavras. II.Título.

CDD-519.3

MELISSA DE CARVALHO

O PROBLEMA DAS TRÊS PORTAS E UMA VARIAÇÃO DO PROBLEMA DA SECRETÁRIA VIA TEORIA DOS JOGOS

Dissertação apresentada à Universidade Federal de Lavras como parte das exigências do Programa de Pós-graduação em Agronomia, área de concentração em Estatística e Experimentação Agropecuária, para a obtenção do título de "Mestre".

Orientador Prof. Dr. Lucas Monteiro Chaves

LAVRAS
MINAS GERAIS - BRASIL
2007

MELISSA DE CARVALHO

O PROBLEMA DAS TRÊS PORTAS E UMA VARIAÇÃO DO PROBLEMA DA SECRETÁRIA VIA TEORIA DOS JOGOS

Dissertação apresentada à Universidade Federal de Lavras como parte das exigências do Programa de Pós-graduação em Agronomia, área de concentração em Estatística e Experimentação Agropecuária, para a obtenção do título de "Mestre".

APROVADA em 15 de fevereiro de 2007

Prof. Dr. Geraldo Robson Mateus	UFMG
Prof. Dr. Osnel Broche Cristo	UFLA
Prof. Dr. Ricardo Martins de Abreu Silva	UFLA

Prof. Dr. Lucas Monteiro Chaves
UFLA
(Orientador)

LAVRAS

MINAS GERAIS-BRASIL

"Tudo é do Pai;
é dele a vitória alcançada em minha vida!"

Aos meus amados pais Vitor e Lourdes que sempre estiveram ao meu lado me apoiando com muito amor.

Aos meus irmãos Douglas e Dalton, que eu amo infinitamente.

AGRADECIMENTOS

A Deus, meu Tudo, Senhor da minha vida e das minhas coisas, que sempre esteve ao meu lado e me concedeu uma família maravilhosa.

À minha família, pelo apoio incondicional. Meus pais maravilhosos que cuidaram com muito zelo e carinho da minha educação, aos meus irmãos pelo apoio e carinho, e também à minha cunhada, pelas orações e pelos votos de sucesso.

À Universidade Federal de Lavras (UFLA), ao Departamento de Ciências Exatas (DEX) e em especial ao Programa de Pós-Graduação em Agronomia/Estatística e Experimentação Agropecuária, pela oportunidade de realização do curso de mestrado e também pelos conhecimentos.

Aos professores do DEX pelos ensinamentos, de um modo especial ao professor Lucas Monteiro Chaves, pela orientação deste trabalho.

Aos funcionários do DEX pela disponibilidade e colaboração durante o curso.

À Fundação de Amparo à Pesquisa do Estado de Minas Gerais (FAPEMIG), pelo apoio financeiro.

A todos os colegas das turmas de 2004, 2005 e 2006 do Programa de Pós-Graduação em Agronomia/Estatística e Experimentação Agropecuária, que compartilharam comigo alegrias, tristezas, dificuldades e conquistas.

Aos amigos Luciene e Osvaldo, pelo apoio e amizade.

A todos que, de uma forma ou de outra, contribuíram para a conclusão deste trabalho. Muito obrigada!

SUMÁRIO

LISTA DE FIGURAS

RESUMO

CARVALHO, Melissa de. **O problema das três portas e uma variação do problema da secretária via teoria dos jogos**. 2007. 72p. Dissertação - (Mestrado em Estatística e Experimentação Agropecuária) - Universidade Federal de Lavras, Lavras, MG.*

O problema das três portas é muito utilizado como um exemplo didático uma vez que ilustra o conceito de probabilidade condicional. Neste trabalho este problema é formalizado e resolvido usando-se os conceitos básicos da teoria dos jogos. A árvore de Kuhn é obtida e as várias estratégias possíveis explicitadas na forma matricial do jogo. O outro problema também formalizado e resolvido pela teoria dos jogos é uma variante de um problema clássico de otimização estocástica conhecido como o problema da secretária. Nessa variante o problema é considerado como um jogo entre duas pessoas, em que o oponente tem a liberdade de escolher a ordem em que as candidatas são entrevistadas e o observador possui como estratégias obter a melhor candidata ou maximizar a probabilidade de se obter pelo menos uma boa candidata.

*Comitê orientador: Lucas Monteiro Chaves - UFLA (Orientador).

ABSTRACT

CARVALHO, Melissa de.**Three Door Game Show Problem and a Variant of the Secretary Problem via Game Theory**. 2007. 72p. Dissertation - (Master Program in Statistics and Agricultural Experimentation) - Federal University of Lavras, Lavras, Minas Gerais, Brazil.*

Three door game show problem is a very commonly used example since it illustrates the concept of the conditional probability. In this work that problem is formalized and solved using basic concepts of game theory. Kuhn tree is obtained and the several possible strategies are displayed in the matricial form of the game. Another problem stated and solved by game theory is a variant of a classical stochastic optimization problem known as the secretary problem. In this variant, the problem is seen as a two people game where the opponent has the freedom to choose in which order the candidates are supposed to be interviewed and the observer has as strategy to choose the better candidate or, at least, maximize the probability of choosing a good one.

*Guidance committee: Lucas Monteiro Chaves - UFLA (Advisor).

1 INTRODUÇÃO

Desde a formação das primeiras civilizações os jogos de salão (jogos de tabuleiro, cartas, dados) divertem a humanidade. Em escavações realizadas em sítios arqueológicos da Mesopotamia, região do Oriente Médio, foi encontrado, em túmulos de nobres e membros da família real da antiga cidade de Ur, um jogo de tabuleiro que passou a ser conhecido por Jogo Real de Ur. Segundo as lendas indianas, as atividades lúdicas, além de entreter seus praticantes, também serviriam como simbólica simulação de batalhas ou resoluções que as pessoas têm de tomar ao longo de suas vidas cotidianas. O xadrez seria um exemplo disso. Por colocar as pessoas em situações nas quais vencer ou perder dependem das escolhas feitas adequadamente logo no início das partidas, os jogos se mostraram como excelente ferramenta para o desenvolvimento da personalidade e da inteligência das crianças.

Além dos jogos de azar - dados e roleta -, que foram categóricos para o desenvolvimento da teoria da probabilidade, jogos estratégicos, aqueles que não dependem apenas da sorte, mas da escolha por parte dos jogadores sobre a melhor linha de ação que deve ser tomada, a propósito das alternativas fornecidas pelo jogo - pôquer, damas -, também são passíveis de formalização matemática, a qual permite a simulação de cada tipo de jogo, constituído por regras bem definidas. A teoria dos jogos trata, portanto, de sistematizar matematicamente, por meio dos modelos de jogos, situações que envolvam duas ou mais pessoas e cujas decisões por uma estratégia adequada influenciarão o resultado da interação e do comportamento imediato das partes envolvidas.

Por volta de 1730, o suíço Daniel Bernoulli (1700-1782), membro de uma ilustre família de matemáticos, idealizou a noção de utilidade como um acréscimo inversamente proporcional ao valor inicial. Isto é, tendo em vista o comportamento dos jogadores, haveria uma medida que explicaria a reação das pessoas em situações de risco, ao maximizar suas utilidades. Tal circunstância receberia, após dois séculos, uma formulação moderna pelo matemático francês Émile Borel (1871-1956), na forma do teorema *minimax*. Usando a noção de estratégias mistas, que aplicam as estratégias puras a uma taxa de variação proporcional aos ganhos, em 1927, Borel conseguiu resolver jogos com duas pessoas que tivessem até cinco opções de estratégias para serem escolhidas. Entretanto, uma solução geral só viria a ser alcançada em 1928, pelo matemático húngaro John von Neumann (1903-1957) consolidando a base de uma moderna teoria dos jogos.

Outro aspecto dessa teoria começou a ser estudado pelo filósofo e economista francês Antoine Augustin Cournot (1801-1877). Cournot formalizou uma versão restrita do conceito de equilíbrio, que seria generalizada, no século seguinte, por John Forbes Nash Jr.[†], em trabalhos que tornaram a teoria dos jogos conexa a situações em que um lado pode vencer, sem precisar, necessariamente, derrotar o adversário.

A teoria dos jogos tornou-se um ramo proeminente da matemática na década de 1940, principalmente após a publicação do livro *Theory of Games and Economic Behavior*, de John von Neumann e Oskar Morgenstern, em 1944. O grande impacto desse livro deveu-se, especialmente, à Segunda Guerra Mundial, pois a maioria dos problemas militares pode ser modelada como jogos com dois jogadores do tipo soma zero, que são aqueles em que a vitória de um significa, necessariamente, a derrota de outro, e também para os quais a teoria pode fornecer uma solução específica.

[†]Matemático estadunidense que conquistou o prêmio Nobel de economia em 1994. Um dos nomes principais da história da Teoria dos Jogos. Formado pela Universidade de Princeton, em 1950, com a tese Non-Cooperative Games (Jogos Não-Cooperativos, publicada em 1951) que lhe valeu mais tarde a indicação para o Nobel. Nesta tese, Nash provou a existência de ao menos um ponto de equilíbrio em jogos de estratégias para múltiplos jogadores.

Nos anos seguintes à II Guerra Mundial, os modelos matemáticos de jogos serviram de orientação para o desenvolvimento e o teste de estratégias militares empregadas durante a Guerra Fria. O apelo anti-militarista da maioria da população mundial, naquela época, somado aos problemas inerentes à teoria emergente, mas incompleta, lançou uma sombra sobre os propósitos dos pesquisadores desta área. Apesar disso, diversos novos conceitos foram criados, no sentido de aproximar a teoria da realidade vivida pelas pessoas nos seus conflitos cotidianos. Estudos de jogos repetitivos, com várias rodadas seguidas; estocásticos, cujos pagamentos sofrem variação numa porcentagem fixa; novos modelos de jogos e as representações de jogos na forma extensiva, de árvores com nós (vértices) e ramos que esquematizam os movimentos tomados, e estratégica, com matrizes nas quais figuram a lista de estratégias de cada jogador e seus resultados cruzados, são alguns exemplos dos muitos aspectos desenvolvidos depois de 1950.

Devido à grande diversidade de aplicações da teoria dos jogos, o assunto tratado por este trabalho é impedido de adotar uma gama tão ampla da maneira detalhada que mereceria o fenômeno interdisciplinar da teoria. Para os propósitos deste trabalho, pretende-se focar a apresentação nos conceitos e princípios básicos da teoria dos jogos. Nesse âmbito, serão apresentadas, no referencial teórico, duas formas nas quais os jogos podem ser apresentados: a forma estratégica, também conhecida por forma normal, que trata da estrutura matemática do jogo e a forma extensiva, que trata da estrutura do jogo como uma árvore. Além disso, tratou-se também da teoria dos jogos, interligada à teoria da decisão, apresentando as vantagens de basear a teoria estatística na teoria dos jogos.

O objetivo deste trabalho foi, então, tomar dois problemas clássicos envolvendo estratégias e trabalhá-los à luz da teoria dos jogos, definindo os aspectos apresentados por esta teoria e sugerindo soluções trazidas por ela.

2 REFERENCIAL TEÓRICO

2.1 Como analisar um jogo

Quando um jogo qualquer é proposto, surgem duas questões fundamentais, cuja resposta se faz necessária:

- Como os jogadores podem se comportar?
- Quais são os possíveis resultados do jogo?

Responder a uma dessas perguntas, ou ambas significa, por vezes, encontrar o que será definido como a solução do jogo. O termo solução não apresenta um sentido universal dentro da teoria dos jogos, mas assume diferentes significados em diferentes contextos.

Outras questões surgem a partir das questões acima: Até onde um jogador determina o resultado de um jogo? Ou, ainda, qual o mínimo que um jogador pode assegurar para si? Será razoável supor a hostilidade dos demais jogadores?

Para responder a essas perguntas e a outras que, naturalmente, surgirão, é necessário dispor de certas informações acerca do jogo e, antes de tudo, conhecer suas regras, as quais devem esclarecer:

1. até que ponto os jogadores podem se comunicar entre si;
2. se os jogadores podem estabelecer acordos entre si;
3. como os prêmios obtidos são partilhados com outros jogadores;
4. qual a relação entre as ações dos jogadores e o resultado do jogo;
5. quais informações podem estar disponíveis para os jogadores.

Além disso, as personalidades dos jogadores, bem como suas preferências subjetivas, têm efeito sobre o resultado do jogo.

Para a teoria dos jogos, um jogo é definido por um conjunto de regras que estabelecem seus cinco elementos constitutivos: (1) o número de participantes, (2) as ações ou estratégias possíveis, (3) os resultados de cada jogador, (4) a função que permite a cada parte combinar suas estratégias e (5) a relação de preferências de cada um diante dos resultados.

Além disso, as regras delimitam o grau de informação permitido aos jogadores. Os jogos são representações simplificadas de situações nas quais pelo menos uma pessoa age no sentido de maximizar a utilidade de suas ações, levando em conta as reações dos outros jogadores. Trata-se, portanto, da descrição formal de uma situação interativa estratégica, em que as partes devem resolver qual a melhor decisão a ser tomada. Dessa forma, um jogador possui como requisito mínimo uma racionalidade estratégica.

Uma característica bastante significativa de um jogo vem a ser o seu tamanho, determinado pelo número de participantes. De maneira geral, quanto menor for o número de jogadores, mais simples é o jogo.

Um jogo não pode arquitetar-se num modelo universal; um jogo singular é inadequado até mesmo para representar um grupo de jogos. Em razão disso, existem categorias nas quais os jogos são divididos. Essas categorias não apenas distinguem os tipos de jogos existentes, mas também a forma como devem ser conduzidos. Três importantes categorias estão listadas abaixo:

- Jogos de informação perfeita: são aqueles em que todas as jogadas são conhecidas pelos participantes envolvidos. O xadrez, por exemplo, é um jogo que assim se classifica;

- Jogos de soma zero: são jogos de tudo ou nada: se um jogador ganha, os outros jogadores necessariamente perdem;
- Jogos de soma não-zero: ao contrário dos jogos de soma zero, neste tipo de jogo, os jogadores não são completamente adversários uns dos outros, ou seja, o que um jogador ganha não é necessariamente igual ao que os outros jogadores perdem.

Jogos com apenas uma pessoa são considerados jogos contra a natureza (ou sorte), um único jogador considerado não-racional, mas que pode gerar indeterminação aos resultados, passando a ser influenciados pela lei da probabilidade. A rigor, não há obstáculos formais para o estudo de jogos com um número infinito de participantes, apesar da pesquisa de casos que envolvem duas partes ser mais freqüente. Este trabalho trata de jogos em que o número de jogadores é dois e estes receberão a seguinte identificação: um dos jogadores será tratado por jogador I e o outro por jogador II.

2.2 A forma estratégica de um jogo

A descrição matemática de um jogo pode ser feita por meio da forma estratégica, também conhecida por forma normal. Antes de aprofundar no assunto, será introduzido o conceito de estratégia, fundamental na teoria dos jogos.

A origem desse conceito é militar, sendo amplamente empregado também na área de finanças. Na perspectiva da teoria dos jogos, podem-se citar Simonsen (1994): "Para cada jogador, uma estratégia é um plano completo de jogo. Esse plano deve indicar como o jogador escolherá cada um dos seus lances, conforme a evolução do jogo" e também McDonald (1991): *"Em suma, a teoria dos jogos diz, portanto, o seguinte: os jogos estratégicos dão a um jogador uma escolha de ação* *numa situação em que todos os jogadores são interdependentes. A incerteza num jogo pode derivar meramente de uma limitação prática na antevisão dos lances, como no xadrez. Mas é mais freqüente* [esta incerteza] *derivar de um elemento aleatório (controlável pela teoria da probabilidade) e de uma informação imperfeita por parte de um jogador a respeito do que seus adversários podem fazer* (...). *A estratégia é um plano de ação criado para reduzir e controlar essas incertezas".*

Sumariamente, uma estratégia é uma lista de escolhas ótimas para um jogador. Nesta lista já estão previstas todas as situações que o jogador poderá enfrentar. A estratégia descreve completamente como um jogador deverá agir, sob quaisquer circunstâncias possíveis. Como exemplo, no jogo da velha, Davis (1973) sugere a estratégia de, em cada lance, buscar a coluna mais distante, à direita e, nos quadrados desocupados dessa coluna, buscar o que esteja na posição mais alta.

O número de estratégias que um jogador pode adotar é finito, segundo presunções já estabelecidas, o que torna possível enumerá-las.

Quando um jogo está codificado de forma que a única coisa a ser feita é a escolha de uma estratégia no conjunto de todas as estratégias possíveis, diz-se que o jogo está na *forma normal* (ou forma estratégica). Como a forma normal é particularmente simples na descrição de um jogo, ela se reveste de uma importância teórica.

Em um jogo representado na sua forma normal, cada jogador escolhe simultaneamente uma estratégia, e a combinação das estratégias escolhidas pelos jogadores determinam um *payoff* (prêmio cujo valor pode ser associado ao montante que foi ganho ou perdido por cada jogador) para cada um deles. A representação de um jogo na sua forma estratégica, ou forma normal, especifica: (1) os jogadores, (2) as estratégias úteis para cada jogador e (3) o *payoff* recebido por jogador para cada combinação das estratégias que podem ser escolhidas por ele (Gibbons, 1992).

Matematicamente, um jogo de duas pessoas com soma zero é definido por uma tripla (X, Y, A), em que:

1. X é um conjunto não vazio, o conjunto das estratégias do jogador I;

2. Y é um conjunto não vazio, o conjunto das estratégias do jogador II;

3. A é uma função assumindo valores reais definida no produto cartesiano de X e Y ($X \times Y$), conhecida por função *payoff* (Assim, $A(x, y)$ é um número real para todo $x \in X$ e todo $y \in Y$.).

A interpretação é como segue. Simultaneamente, o jogador I escolhe uma estratégia $x \in X$ e o jogador II escolhe $y \in Y$, cada um sem conhecer a escolha do adversário. São, então, confrontadas as duas escolhas e o resultado (ou *payoff*) é dado por $A(x, y)$ *. A notação aqui utilizada segue Ferguson (2007).

Os elementos dos conjuntos X e Y são referidos como estratégias puras. Como o jogo é, geralmente, jogado repetidas vezes, o jogador pode escolher estratégias diferentes para cada realização particular do jogo, o que consiste na utilização de estratégias mistas. Uma **estratégia mista** consiste em escolher, aleatoriamente, uma estratégia pura a ser usada a cada nova etapa do jogo. Para isso pode ser usado um experimento aleatório, como o lançamento de uma moeda. Uma estratégia pura não envolve um experimento aleatório.

Seja um jogo, no qual o jogador I tem m estratégias puras e o jogador II tem n estratégias puras. Uma estratégia mista para o jogador I pode ser representada por um vetor coluna, $(p_1, p_2, ..., p_m)^T$ de probabilidades. Similarmente, uma estratégia mista para o jogador II é uma n-upla $\mathbf{q} = (q_1, q_2, ..., q_n)^T$. Os conjuntos das

*Para jogos de duas pessoas e soma geral, ou soma não zero, a forma estratégica é dada por dois conjuntos X e Y de estratégias puras dos jogadores I e II, e duas funções de valores reais $u_1(x, y)$ e $u_2(x, y)$ definidas em $X \times Y$, representando os *payoffs* para os jogadores. Se o jogador I escolhe $x \in X$ e o jogador II escolhe $y \in Y$, então, I recebe $u_1(x, y)$ e II recebe $u_2(x, y)$.

estratégias mistas dos jogadores I e II serão denotados, respectivamente, por X^* e Y^*, e dados por:

$X^* = \{\mathbf{p} = (p_1, p_2, ..., p_m)^T : p_i \geq 0$, para $i = 1, ..., m$ e $\sum_{i=1}^m p_i = 1\}$

$Y^* = \{\mathbf{q} = (q_1, q_2, ..., q_n)^T : q_j \geq 0$, para $j = 1, ..., n$ e $\sum_{j=1}^n q_j = 1\}$

Um jogo finito de duas pessoas com soma zero na forma estratégica, (X, Y, A), é também conhecido por jogo matricial, pois a função *payoff* A pode ser representada por uma matriz. Assim, se $X = \{x_1, ..., x_m\}$ e $Y = \{y_1, ..., y_n\}$, a matriz do jogo ou matriz *payoff* é:

$$A = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} y_1 & y_2 & y_3 \end{array} \\ \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{c} \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{array}$$

em que $a_{ij} = A(x_i, y_j)$

Nesta forma, o jogador I escolhe uma linha, o jogador II escolhe uma coluna, e II paga a I a entrada da matriz que corresponde à linha e coluna escolhidas. Assim, as entradas da matriz correspondem ao ganho da linha escolhida e à perda da coluna escolhida[†].

Se I usa a estratégia mista $\mathbf{p} = (p_1, p_2, ..., p_m)$ e II escolhe a coluna j, então, em média, o *payoff* para I é $\sum_{i=1}^m p_i a_{ij}$. Similarmente, se II usa $\mathbf{q} = (q_1, q_2, ..., q_n)$ e I joga com a linha i, o *payoff* para I é $\sum_{j=1}^n a_{ij} q_j$. De forma mais geral, se I usa a estratégia mista $\mathbf{p}$ e II usa a estratégia mista $\mathbf{q}$, em média, o *payoff* para I é $A(\mathbf{p}, \mathbf{q}) = \mathbf{p}^T A \mathbf{q} = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n p_i a_{ij} q_j$.

Note que uma estratégia pura para o jogador I, escolher a linha i, pode ser

[†]Um jogo finito de duas pessoas com soma não zero pode ser representado por uma matriz de pares ordenados, também chamada de bimatriz, em que a primeira componente do par representa o *payoff* do jogador I e a segunda componente representa o *payoff* do jogador II.

apresentada como uma estratégia mista $\mathbf{e}_i$, o vetor unitário com um 1 na i-ésima posição e 0's nas demais. Da mesma forma, a estratégia pura do jogador II, escolher a coluna j, pode ser representada por $\mathbf{e}_j$.

Exemplo. Pedra, Papel ou Tesoura. O tradicional Pedra, Papel ou Tesoura (originário do Japão) é um típico jogo simultâneo de soma zero. Os jogadores I e II escolhem entre as estratégias "pedra", "papel" ou "tesoura". Quem escolhe a estratégia "pedra" (mão fechada) quebra "tesoura" (dedos indicador e médio abertos), empata com "pedra" e perde de "papel" (mão aberta). "Papel" cobre a "pedra", empata com "papel" e perde de "tesoura". Esta, por fim, corta "papel", empata com "tesoura" e perde de "pedra" (Figura 2.1). Para colocar este jogo na

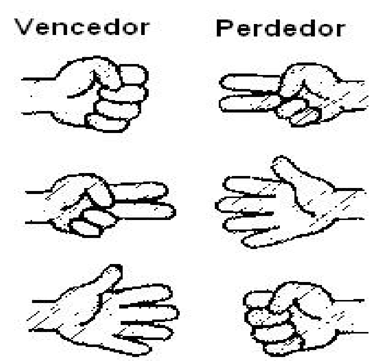

FIGURA 2.1: Esquema do jogo Pedra, Papel ou Tesoura.

forma estratégica, é necessário especificar os conjuntos X, Y e a função A. Assim, os conjuntos X e Y são as escolhas X={Pedra, Papel, Tesoura} e Y={Pedra, Papel, Tesoura$\}$, e A é dada pela matriz:

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{ccc} pedra & papel & tesoura \end{array} \\ \begin{array}{c} pedra \\ papel \\ tesoura \end{array} & \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \end{array}$$

$A(x, y)$ = ganho de I = perda de II

Em um jogo, os jogadores estão interessados em maximizar seus ganhos (minimizar suas perdas). Se o jogador I tem um procedimento que lhe assegura um ganho médio de, pelo menos, V e II tem um procedimento que mantém sua perda média em torno de V, este valor V é chamado **valor do jogo** e os procedimentos utilizados por jogador, que lhes asseguram esse retorno, são chamadas **estratégias ótimas**.

Se V é zero, o jogo é justo. Se V é positivo, o jogo é favorável ao jogador I, e se V é negativo, o jogo é favorável ao jogador II.

2.2.1 Solução de jogos finitos

Resolver um jogo significa encontrar o seu valor e pelo menos uma estratégia ótima para cada jogador. Ocasionalmente, pode haver o interesse de encontrar todas as estratégias ótimas para um jogador.

2.2.2 Melhor resposta

Supõe-se que o jogador II escolhe uma coluna aleatoriamente, usando $\mathbf{q} \in Y^*$. Se o jogador I escolhe a linha i, o *payoff* médio para I é:

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} q_j = (A\mathbf{q})_i, \tag{2.1}$$

a i-ésima componente do vetor $A\mathbf{q}$. Similarmente, se o jogador I usa $\mathbf{p} \in X^*$ e o jogador II escolhe a coluna j, então, o *payoff* médio para I é:

$$\sum_{i=1}^{m} p_i a_{ij} = (\mathbf{p}^T A)_j, \tag{2.2}$$

a j-ésima componente do vetor $\mathbf{p}^T A$. De maneira mais geral, se I usa $\mathbf{p} \in X^*$ e II usa $\mathbf{q} \in Y^*$, o *payoff* médio para I será:

$$\sum_{i=1}^{m} \left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij} q_j \right) p_i = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} p_i a_{ij} q_j = \mathbf{p}^T A\mathbf{q}. \tag{2.3}$$

Supõe-se ser conhecido que o jogador II irá usar uma estratégia particular $\mathbf{q} \in Y^*$. Então, o jogador I pode escolher a linha i, que maximize (2.1) ou, de forma equivalente, ele pode escolher $\mathbf{p} \in X^*$, que maximize (2.3). Seu *payoff* médio será:

$$\max_{1 \le i \le m} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} q_j = \max_{\mathbf{p} \in X^*} \mathbf{p}^T A\mathbf{q}. \tag{2.4}$$

Todo $\mathbf{p} \in X^*$ que encontra o máximo em (2.3) é chamado **melhor resposta** ou uma **estratégia de Bayes** contra $\mathbf{q}$. Em particular, toda linha i que encontra o máximo em (2.1) é uma estratégia de Bayes (pura) contra $\mathbf{q}$. Sempre existe uma estratégia de Bayes pura contra $\mathbf{q}$ para todo $\mathbf{q} \in Y^*$, em jogos finitos.

Similarmente, se é conhecido que o jogador I irá usar uma estratégia particular $\mathbf{p} \in X^*$, então, o jogador II pode escolher a coluna j que minimiza (2.2) ou, de forma equivalente, $\mathbf{q} \in Y^*$ que minimiza (2.3). Seu *payoff* médio será:

$$\min_{1 \leq j \leq n} \sum_{i=1}^{m} p_i a_{ij} = \min_{\mathbf{q} \in Y^*} \mathbf{p}^T A \mathbf{q}. \tag{2.5}$$

Todo $\mathbf{q} \in Y^*$ que encontrar o mínimo em (2.5) é chamado **melhor resposta** ou **estratégia de Bayes** para o jogador II contra $\mathbf{p}$.

2.2.3 Valores superior e inferior de um jogo

Supõe-se, agora, que o jogador II deseja anunciar sua escolha de uma estratégia mista $\mathbf{q} \in Y^*$, antes que I faça sua escolha. Aparentemente, esta etapa do jogo está favorável ao jogador I. Se II anuncia $\mathbf{q}$, então, certamente I irá usar a estratégia de Bayes contra $\mathbf{q}$ e II perde, em média, a quantidade dada em (2.4). Porém, II pode escolher para anunciar a estratégia $\mathbf{q}$, que minimiza (2.4). O mínimo de (2.4) para todo $\mathbf{q} \in Y^*$ é denotado por $\overline{V}$ e chamado **valor superior do jogo** (X, Y, A).

$$\overline{V} = \min_{\mathbf{q} \in Y^*} \max_{1 \leq i \leq m} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} q_j = \min_{\mathbf{q} \in Y^*} \max_{\mathbf{p} \in X^*} \mathbf{p}^T A \mathbf{q}. \tag{2.6}$$

Todo $\mathbf{q} \in Y^*$ que encontra o mínimo em (2.6) é chamado **estratégia minimax para II**. Ele minimiza a perda máxima para o jogador II. Sempre existem estratégias minimax em jogos finitos.

$\overline{V}$ garante a menor perda média que o jogador II pode assegurar para si, não importa o que I faça.

Uma análise similar pode ser feita assumindo agora que I deve anunciar sua escolha de uma estratégia mista $\mathbf{p} \in X^*$, antes que II faça sua escolha. Se I anuncia $\mathbf{p}$, então, II faz a escolha da coluna que minimiza a perda média ou, similarmente, $\mathbf{q} \in Y^*$, que minimiza o *payoff* médio (2.5). Dado que (2.5) é o *payoff* médio para I, se seu anúncio for $\mathbf{p}$, ele, então, escolhe $\mathbf{p}$ para maximizar (2.5) e obter, em média:

$$\underline{V} = \max_{\mathbf{p} \in X^*} \min_{1 \leq j \leq n} \sum_{i=1}^{m} p_i a_{ij} = \max_{\mathbf{p} \in X^*} \min_{\mathbf{q} \in Y^*} \mathbf{p}^T A \mathbf{q}. \tag{2.7}$$

A quantidade $\underline{V}$ é chamada de **valor inferior do jogo**. É a quantia máxima que I pode garantir a si mesmo, em média, não importa o que II faça. Todo $\mathbf{p} \in X^*$ que encontra o máximo em (2.7) é chamado **estratégia maximin para I** (por simetria, será adotado apenas o termo estratégia minimax para I ou para II). A existência de estratégias minimax em jogos matriciais é indicada no lema a seguir.

Lema 1. Em jogos finitos, ambos os jogadores têm estratégias minimax.

É fácil argumentar que o valor inferior é menor ou igual ao valor superior. De fato, se $\overline{V} < \underline{V}$ e se I puder assegurar a si ganhar pelo menos $\underline{V}$, então, o jogador II não pode assegurar para si não perder mais que $\overline{V}$, uma contradição óbvia.

Lema 2. O valor inferior é menor ou igual ao valor superior:

$$\underline{V} \leq \overline{V}.$$

Este lema também vem do fato de que, para toda função de valores reais, $f(x, y)$, e todos os conjuntos, X^* e Y^*:

$$\max_{x \in X^*} \min_{y \in Y^*} f(x, y) \leq \min_{y \in Y^*} \max_{x \in X^*} f(x, y).$$

Para ver este princípio geral, nota-se que $min_{y'} f(x, y') \leq f(x, y) \leq max_{x'} f(x', y)$

para todo x e y fixados. Então, tomando max_x, na esquerda não altera a desigualdade, nem tomando min_y na direita, o que confere o resultado.

Se $\underline{V} \leq \overline{V}$, o *payoff* médio deve estar entre $\underline{V}$ e $\overline{V}$.

Se $\underline{V} = \overline{V}$, o valor do jogo existe e é igual ao valor comum de $\underline{V}$ e $\overline{V}$, denotado simplesmente por V. Se o valor do jogo existe, as estratégias minimax são estratégias ótimas.

Os conceitos e resultados apresentados anteriormente conduzem a um importantíssimo e fundamental teorema da teoria dos jogos: o teorema minimax de Von Neumann[‡].

O teorema minimax assegura a atribuição de um valor V a cada jogo finito, de duas pessoas, soma zero; este valor diz respeito à quantia média que o jogador I pode esperar ganhar do jogador II, quando ambos atuam sensatamente. Von Neumann julga plausível esse resultado previsto, baseado em três razões:

1. existe uma estratégia que o jogador I pode adotar, que lhe assegura a vantagem referida e, sobre essa estratégia, nada que o jogador II possa fazer impedirá ao jogador I um ganho médio igual a V. Conseqüentemente, o jogador I não se contentará com nada menos que V;

2. existe uma estratégia que o jogador II pode adotar, que lhe assegura não perder mais que a quantia média V. Em outras palavras, o jogador I pode ser impedido de ganhar mais do que V;

3. o jogador II deseja reduzir ao mínimo as suas perdas, logo, ele está motivado a fazer com que o ganho médio do jogador I se limite a V.[§]

[‡]John Von Neumann, húngaro naturalizado americano, foi o primeiro a fornecer a descrição matemática completa de um jogo. Em 1928, publicou a prova do teorema minimax.

[§]Nos jogos de soma não zero essa citação não cabe, o que impede concluir que, por ter a possibilidade de limitar os ganhos do jogador I, o jogador II assim agirá necessariamente.

Com a introdução do teorema minimax, podem-se tratar todos os jogos de duas pessoas com soma zero como se eles tivessem pontos de equilíbrio. O jogo tem valor claro e cada um dos jogadores pode alcançar esse valor por meio de escolha da estratégia apropriada.

O Teorema Minimax. Todo jogo finito tem um valor e ambos os jogadores têm estratégias minimax.*

Nota-se um corolário evidente deste teorema. Se as regras do jogo estiverem alteradas, de modo que o jogador II deva anunciar sua escolha de uma estratégia mista antes que o jogador I faça sua escolha, então, a aparente vantagem dada ao jogador I é apenas ilusória. O jogador II pode simplesmente anunciar sua estratégia minimax.

2.2.4 Pontos de sela

Se uma entrada a_{ij} da matriz do jogo A tem a seguinte propriedade:

1. a_{ij} é o valor mínimo da i-ésima linha, e

2. a_{ij} é o valor máximo da j-ésima coluna,

então, a_{ij} é um ponto de sela. Se a_{ij} é um ponto de sela, então, o jogador I pode ganhar pelo menos a_{ij} quando escolher a linha i, e o jogador II paga ao jogador I no máximo a_{ij}, escolhendo a coluna j. Logo, a_{ij} é o valor do jogo.

*Esse teorema inicialmente demonstrado por Von Neumann em 1928, pode ser facilmente demonstrado por meio da Teoria da Dualidade Linear. Em Ferguson (2007), há uma prova baseada na programação linear.

Seja um jogo cuja matriz é dada por:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -2 \\ 2 & 2 & 4 \\ -1 & 0 & 5 \end{pmatrix}$$

O elemento $a_{22} = 2$ é um ponto de sela, pois é o mínimo da sua linha e o máximo da sua coluna. Assim, o valor do jogo é 2.

Se, na matriz de um jogo, há um ponto de sela, seu valor é único, ou seja, não existem dois pontos de sela distintos.

Para a verificação de tal afirmação, será considerada a matriz de um jogo $A_{m\times n} = (a_{rs})$. Seja a_{ij} o ponto de sela da matriz A; logo, a_{ij} é o menor valor da linha i e o maior valor da coluna j. Supõe-se que a_{kl}, $k \neq i$ ou $l \neq j$, também seja um ponto de sela. Sendo assim, a_{kl} é o menor valor da linha k e o maior valor da coluna l. Como a_{ij} é ponto de sela, então, $a_{ij} \geq a_{kj}$. Mas a_{kl} também é ponto de sela, logo $a_{kl} \leq a_{kj}$. Além disso, como a_{ij} é ponto de sela, $a_{ij} \leq a_{il}$ e, como a_{kl} também é ponto de sela, $a_{kl} \geq a_{il}$. Assim, $a_{ij} \leq a_{il} \leq a_{kl} \leq a_{kj} \leq a_{ij}$, o que é um absurdo. Portanto, $a_{kl} = a_{ij}$.

2.2.5 Solução de todos os jogos matriciais 2 por 2

Para encontrar uma solução geral para todos os jogos matriciais 2 por 2, será considerada, de maneira geral, a seguinte matriz do jogo:

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ d & c \end{pmatrix}$$

Para resolver este jogo (isto é, encontrar o valor e pelo menos uma estratégia ótima para cada jogador), seja o seguinte procedimento.

1. testar se há ponto de sela;
2. se não houver ponto de sela, resolver equalizando-se as estratégias (procedimento que iguala o ganho médio, não importa o que o oponente faça).

O método de equalizar as estratégias sempre que não haja nenhum ponto de sela consiste no seguinte.

Como não há ponto de sela, se $a \geq b$, então $b < c$, caso contrário, b seria um ponto de sela. Se $b < c$, então $c > d$, caso contrário c seria um ponto de sela. Continuando o raciocínio, $d < a$ e $a > b$. Em outras palavras, se $a \geq b$ e, nesse jogo não há pontos de sela, então, $a > b < c > d < a$. Por simetria, se $a \leq b$, então, $a < b > c < d > a$. Isso mostra que

Se não há ponto de sela, então $a > b$, $b < c$, $c > d$ e $d < a$, ou $a < b$, $b > c$, $c < d$ e $d > a$.

Agora serão desenvolvidas as fórmulas para as estratégias ótimas e valor do jogo geral 2×2. Se I escolhe a primeira linha com probabilidade p (isto é, usa a estratégia mista $(p, 1-p)$), igualando seu retorno médio quando II usa as colunas 1 e 2, obtém-se:

$$ap + d(1-p) = bp + c(1-p).$$

Resolvendo para p:

$$p = \frac{c-d}{(a-b)+(c-d)}.$$

Como não há ponto de sela, $(a - b)$ e $(c - d)$ são ambos positivos ou ambos negativos, então $0 < p < 1$. O ganho médio do jogador I usando essa estratégia é

$$v = ap + d(1 - p) = \frac{ac - bd}{(a - b) + (c - d)}.$$

Se II escolhe a primeira coluna com probabilidade q (isto é, usa a estratégia mista $(q, 1 - q)$), igualando sua perda média quando I usa as linhas 1 e 2, obtém-se

$$aq + b(1 - q) = dq + c(1 - q).$$

Resolvendo para q:

$$q = \frac{c - b}{(a - b) + (c - d)}.$$

Assim, como não há ponto de sela, $0 < q < 1$. A perda média do jogador II usando esta estratégia é

$$aq + b(1 - q) = \frac{ac - bd}{(a - b) + (c - d)} = v,$$

o mesmo valor encontrado para I. Isso mostra que todo jogo 2×2 tem um valor (v) e que ambos os jogadores têm estratégias ótimas (p e q).

Os seguintes exemplos ilustram tal situação.

Exemplo 1.

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 5 \\ 3 & -5 \end{pmatrix}$$

$$p = \frac{-5-3}{-1-5-5-3} = \frac{-7}{-14} = 1/2$$

$$q = \frac{-5-5}{-1-5-5-3} = \frac{-10}{-14} = 5/7$$

$$v = \frac{5-15}{-1-5-5-3} = \frac{-10}{-14} = 5/7$$

O valor do jogo é $V = 5/7$ e $(1/2, 1/2)$ é uma estratégia mista ótima para I e $(5/7, 2/7)$ é uma estratégia mista ótima para II.

Exemplo 2.

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -5 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$$

$$p = \frac{3-1}{0+5+3-1} = 2/7$$

$$q = \frac{3+5}{0+5+3-1} = 8/7$$

Mas, q deveria estar entre zero e um. O que houve? Ocorreu que esqueceu-se de testar a existência do ponto de sela na matriz e, é claro, há um ponto de sela. Dessa forma, $(0, 1)$ e $(1, 0)$ são estratégias ótimas para os jogadores I e II, respectivamente, e $V = 1$ (o ponto de sela) é o valor do jogo.

2.2.6 Remoção de estratégias dominantes

Às vezes, é possível reduzir o tamanho da matriz de um jogo "deletando-se" linhas e colunas que sejam obviamente não vantajosas para os jogadores ao usá-las.

Definição. A i-ésima linha de uma matriz $A = (a_{ij})$ domina a k-ésima linha, se $a_{ij} \geq a_{kj}$ para todo j. A i-ésima linha de A domina estritamente a k-ésima linha, se $a_{ij} > a_{kj}$ para todo j. Similarmente, a j-ésima coluna de A domina (domina estritamente) a k-ésima coluna, se $a_{ij} \leq a_{ik}$ (respectivamente $a_{ij} < a_{ik}$) para todo i.

Qualquer quantia que o jogador I pode conseguir usando uma linha dominada, pode ser conquistada usando a linha que a domina. Assim, linhas dominadas podem ser eliminadas da matriz. Um argumento similar mostra que colunas dominadas podem ser removidas. Para ser mais preciso, a remoção de uma linha dominada ou uma coluna não muda o valor do jogo. Entretanto, pode existir uma estratégia ótima que utilize uma linha ou uma coluna dominada. Se isso ocorrer, a remoção dessa linha ou coluna removerá também o uso dessa estratégia ótima (embora haja, ainda, pelo menos uma outra estratégia ótima). Contudo, no caso da remoção de uma linha ou uma coluna estritamente dominada, o conjunto das estratégias ótimas não muda.

Seja o seguinte jogo (Ferguson, 2007):

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 4 \\ 1 & 2 & 3 \\ 4 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Observando-se as colunas 2 e 3, nota-se que, independente da escolha do jogador I, os resultados obtidos ao confrontar-se a coluna 2 são sempre menores aos obtidos pelo confronto com a coluna 3. Assim, o jogador II sempre optará por jogar com a coluna 2 do que jogar com a coluna 3. Logo, a coluna 2 domina a coluna 3. Eliminando-se, pois, a coluna dominada, chega-se à seguinte matriz:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 2 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$$

Agora, independente da escolha de II, os resultados obtidos ao se confrontar a linha 3 são sempre maiores que os obtidos confrontando-se a linha 1. Assim, o jogador I fará sempre a escolha pela linha 3. Logo, a linha 3 domina a linha 1. Eliminando-se a linha dominada, o jogo foi reduzido a:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$$

uma matriz 2×2. Como esta matriz não tem ponto de sela, este jogo foi resolvido de uma forma geral, obtendo-se $p = 3/4$, $q = 1/4$ e $v = 7/4$. Assim, as estratégias ótimas no jogo original são $(0, 3/4, 1/4)$, para o jogador I e $(1/4, 3/4, 0)$, para o jogador II.

Uma linha (coluna) também pode ser removida se for dominada por uma combinação de probabilidades de outras linhas (colunas). Para uma melhor compreensão deste aspecto, pode-se observar o seguinte exemplo (Ferguson, 2007):

Considere a matriz:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 4 & 6 \\ 5 & 7 & 4 \\ 9 & 6 & 3 \end{pmatrix}.$$

A coluna do meio é dominada pelas outras colunas, tomando-se cada uma com probabilidade igual a $1/2$. Então a coluna central pode ser eliminada, reduzindo-se o jogo a:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 6 \\ 5 & 4 \\ 9 & 3 \end{pmatrix}.$$

Agora, a linha do meio é dominada pela linha superior, tomada com probabilidade igual a $1/3$ e pela linha inferior, tomada com probabilidade igual a $2/3$. A matriz do jogo reduzida, $\begin{pmatrix} 0 & 6 \\ 9 & 3 \end{pmatrix}$, é fácil de ser resolvida. O valor é $V = 9/2$.

2.2.7 Solução de jogos $2 \times n$ e $m \times 2$

Jogos cujas matrizes são de tamanho $2 \times n$ ou $m \times 2$ podem ser resolvidos com a ajuda de uma interpretação gráfica. Seja o seguinte exemplo (Ferguson, 2007):

$$\begin{array}{c} p \\ 1-p \end{array} \quad \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 & 5 \\ 4 & 1 & 6 & 0 \end{pmatrix}$$

Supõe-se que o jogador I escolha a primeira linha com probabilidade p e a segunda linha com probabilidade $1 - p$. Se o jogador II escolhe a coluna 1, o *payoff* médio para I é $2p + 4(1 - p)$. Similarmente, a escolha das colunas 2, 3 e 4 pelo jogador II resulta nos respectivos *payoffs* médios para I: $3p + (1 - p)$, $p + 6(1 - p)$ e $5p$. É traçado, então, o gráfico dessas quatro funções lineares de p para $0 \leq p \leq 1$. Para um valor de p fixado, o jogador I pode assegurar que seu ganho médio é pelo menos o mínimo dessas quatro funções estimadas para p. Isto é conhecido como envelope inferior dessas funções. Como I deseja maximizar sua garantia média de lucro, ele deve encontrar p, que determina o máximo do envelope inferior. De acordo com a Figura 2.2, isso ocorre na interseção das linhas que correspondem às colunas 2 e 3. Assim, o valor do jogo é $V = 17/7$, $(5/7, 2/7)$ é a estratégia ótima para I e $(0, 5/7, 2/7, 0)$ é estratégia ótima para II.

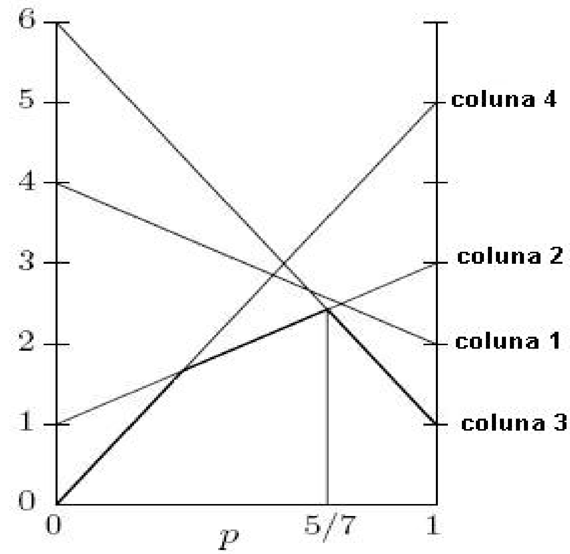

FIGURA 2.2: Gráfico das funções lineares de p para $0 \leq p \leq 1$.

Dada a suposta solução do jogo, basta testar se tal suposição está correta, como se segue. Se I usa a estratégia $(5/7, 2/7)$, seu *payoff* médio se II usa as colunas 1, 2, 3 e 4 é $18/7$, $17/7$, $17/7$ e $25/7$, respectivamente. Desse modo, seu *payoff* médio é pelo menos $17/7$, não importa o que o jogador II faça. Similarmente, se II usa $(0, 5/7, 2/7, 0)$, sua perda média, se I utiliza as linhas 1 e 2, é (não mais que) $17/7$. Portanto, $17/7$ é o valor e tais estratégias são ótimas.

Nota-se que a linha relacionada à coluna 1 não se envolve no envelope inferior. Isso se deve ao fato de a coluna 1 ser dominada pelas colunas 2 e 3, com probabilidade $1/2$ cada. A linha que corresponde à coluna 4 aparece no envelope inferior e, então, a coluna 4 pode não ser dominada.

Como exemplo de um jogo $m \times 2$, será considerada a matriz abaixo.

$$\begin{array}{cc} q & 1-q \\ \multicolumn{2}{c}{\begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 4 & 4 \\ 6 & 2 \end{pmatrix}} \end{array}$$

Se q é a probabilidade de que II escolhe a coluna 1, então, a perda média de II para as três possíveis escolhas de linhas para I é dada (Figura 2.3). Aqui, o jogador II verifica as maiores perdas médias para um dado q. Este é o envelope superior das funções. Assim, II deseja encontrar q que minimize o envelope superior. Pelo gráfico, observa-se que qualquer valor de q entre $1/4$ e $1/2$, inclusive, fornece o mínimo. O valor do jogo é 4, e I tem uma estratégia ótima pura: linha 2.

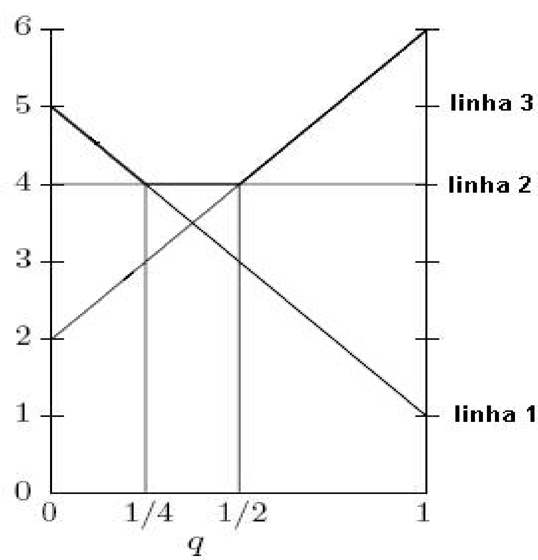

FIGURA 2.3: Gráfico das funções lineares de q para $0 \leq q \leq 1$.

2.3 A forma extensiva de um jogo

A forma estratégica de um jogo é uma maneira compacta de descrever os aspectos matemáticos do jogo. Além disso, permite um método de análise direto, pelo menos em princípio. Entretanto, a modelagem de um jogo na forma estratégica não deixa claro todos os aspectos do jogo. Um outro modelo matemático para jogos é o chamado **forma extensiva**. É construído com base nas noções de posição e movimento, conceitos estes que não aparecem explicitamente na forma estratégica. Na forma extensiva, podem-se ainda modelar outras características, como o blefe, a sinalização, e assim por diante.

A representação de um jogo na sua forma extensiva especifica: (1) os jogadores, (2) quando é a vez de um jogador jogar, (3) quais são as ações possíveis de cada jogador quando é a sua vez de jogar, (4) o que o jogador sabe quando é a sua vez de jogar, (5) o *payoff* que cada jogador recebe para qualquer seqüência de ações escolhida pelos jogadores (Gibbons, 1992.)

Três novos conceitos surgem na forma extensiva de um jogo: árvore do jogo, movimentos de chance e conjuntos de informação.

2.3.1 A árvore do jogo

Um grafo direcionado é um par (T, F), em que T é um conjunto não vazio de vértices e F é uma função que fornece, a cada $x \in T$, um subconjunto $F(x)$ de T chamado seguidores de x (ramos). Quando um grafo direcionado é usado para representar um jogo, os vértices representam posições do jogo. Os ramos, $F(x)$, de uma posição, x, são as posições que podem ser atingidas a partir de x, em um movimento.

Um caminho de um vértice t_0 para um vértice t_1 é uma seqüência, $x_0, x_1, ..., x_n$ de vértices, tais que $x_0 = t_0, x_n = t_1$ e x_i é o seguidor de x_{i-1} para $i = 1, ..., n$.

Um tipo particular de grafo direcionado, chamado árvore, constitui a forma extensiva de um jogo.

Definição. Uma árvore com raiz é um grafo direcionado (T, F) em que há um vértice especial, t_0, chamado origem ou vértice inicial, tal que, para qualquer outro vértice $t \in T$, existe um único caminho com início em t_0 e término em t.

A existência e a unicidade desse caminho implicam que uma árvore é conectada, tem um único vértice inicial e não há circuitos fechados (*loops*).

Um jogo, na sua forma extensiva, tem início no vértice inicial (raiz) e continua ao longo de um caminho até alcançar eventualmente um dos vértices terminais (folhas). A cada vértice terminal, um *payoff* é especificado pelas regras do jogo. Para jogos de n-pessoas, os vértices terminais recebem as n-uplas dos *payoffs*. Quando tratam-se de jogos de duas pessoas com soma zero, cada vértice terminal recebe apenas um valor para o *payoff*, que corresponde ao ganho do jogador I. Existem três possibilidades para os vértices não terminais. Alguns desses vértices não terminais são atribuídos ao jogador I, caracterizando a escolha do seu movimento e a sua posição no jogo. Outros são atribuídos ao jogador II. Entretanto, alguns vértices podem estar relacionados com possíveis movimentos de chance.

2.3.2 Movimentos de chance

Muitos jogos envolvem movimentos de chance. Os exemplos incluem o lançamento de dados em jogos de tabuleiro, a retirada de uma carta do baralho, como no jogo de pôquer, girar da roda da fortuna, dentre outros. Nestes jogos, o movimento de chance exerce um papel importante. Mesmo no jogo de xadrez, geralmente há um movimento de chance para determinar qual jogador começará com as peças brancas (presume-se uma certa vantagem para o primeiro movimento). Supõe-se que os jogadores estão ciente das probabilidades dos vários resultados provenientes de um movimento de chance.

2.3.3 Conjuntos de informação

Um outro aspecto importante que deve ser considerado é a quantidade de informação disponível aos jogadores, logo após cada movimento. No truco, por exemplo, o primeiro movimento é o movimento de chance de embaralhar e distribuir as cartas. Cada jogador está ciente de determinados aspectos do resultado deste movimento (as cartas recebidas), mas não é informado do resultado completo (as cartas recebidas pelos outros jogadores). Isto conduz à possibilidade de blefar.

Definição. Um conjunto de informação é uma coleção de vértices não terminais que satisfazem às seguintes condições:

1. o jogador possui o movimento para todo vértice no conjunto de informação, e

2. quando o jogador alcança um vértice no conjunto de informação, ele não sabe qual vértice no conjunto de informação foi alcançado.

A parte 2 desta definição implica que o jogador deve ter o mesmo conjunto de ações praticáveis em cada vértice do conjunto de informação. Além disso, o jogador deve inferir do conjunto das ações disponíveis que algum(ns) vértice(s) foi(foram) ou não foi(foram) alcançado(s).

O conjunto de informação de cada jogador é limitado, em cada rodada, por uma linha que circunda os vértices de decisão. Quando o jogador tem certeza em qual vértice se encontra, este conjunto de informação é unitário. Cada vértice e conjunto de informação são rotulados com o número ou a letra de cada jogador, enquanto os ramos são rotulados com as alternativas de ação que partem de cada vértice.

Um exemplo clássico na teoria dos jogos é o pôquer. Aqui será tratado um exemplo simplificado (Ferguson, 2007). O pôquer simplificado é jogado como segue. Ambos os jogadores depositam 1 real no centro da mesa. O jogador I retira, então, uma carta do baralho. É uma carta vencedora, com probabilidade $1/4$ ou uma carta perdedora com probabilidade $3/4$. O jogador I vê esta carta, mas a mantém escondida do jogador II (o jogador II não toma conhecimento desta carta). Então, o jogador I recua ou aposta. Se recuar, sua carta será inspecionada; se for uma carta vencedora, ele toma o dinheiro sobre a mesa e assim ganha 1 real de II; caso contrário, perde 1 real para II. Se I apostar, coloca mais 2 reais sobre a mesa. Então, o jogador II - sem conhecer a carta que I tem - deve desistir ou aceitar. Se ele desiste, perde 1 real para I, não importa qual carta I possui. Se II aceita, ele adiciona 2 reais ao monte sobre a mesa. A carta do jogador I é, então, exposta e ele ganha 3 reais de II se tiver uma carta vencedora, e perde 3 reais para II, em caso contrário.
Ao extrair a árvore para este jogo, verifica-se que há três movimentos: (1) o movimento de chance que escolhe uma carta para I, (2) o movimento de I, no qual ele recua ou aposta e (3) o movimento de II, o qual ele desiste ou aceita. Para cada vértice da árvore do jogo, há um "rótulo" (*label*) indicando que jogador deve se mover dessa posição. Movimentos de chance são geralmente referidos como movimentos feitos pela natureza, usando-se o rótulo N (Figura 2.4).

Cada aresta é rotulada para identificar o movimento. Os movimentos conduzidos do vértice relacionado ao movimento da natureza são rotulados com as probabilidades com que ocorrem. Em cada vértice terminal, é escrito o valor numérico do ganho de I (perda de II).

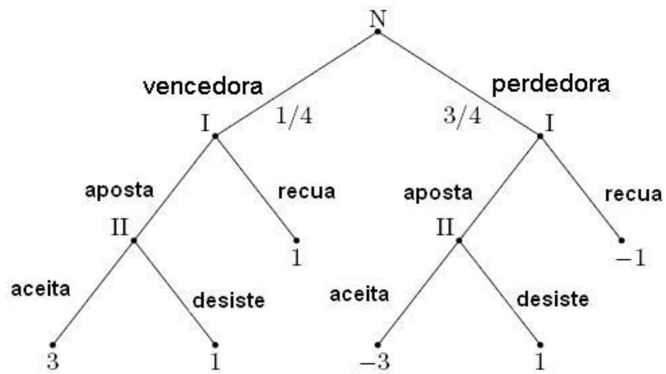

FIGURA 2.4: Árvore do jogo pôquer simplificado.

Quando é a vez do jogador II tomar sua decisão, ele não sabe qual carta I recebeu, ou seja, não sabe em qual posição (vértice) do jogo se encontra. Isso é indicado no diagrama circulando-se duas posições em uma curva fechada e, assim, estes dois vértices constituem um conjunto de informação. Os dois vértices que representam os movimentos de I constituem dois conjuntos de informação separados, desde que o resultado do movimento de chance seja conhecido. Para estar completo, isto é indicado no diagrama com círculos pequenos sobre estes vértices. Um dos rótulos que indica o vértice de II pode ser suprimido desde que pertença ao mesmo conjunto de informação. É exatamente o conjunto de informação que deve ser rotulado. A árvore do jogo é mostrada na Figura 2.5.

2.3.4 A árvore de Kuhn

A árvore do jogo com todos os *payoffs*, conjuntos de informação e rótulos para as arestas e vértices incluídos, é conhecida como a árvore de Kuhn*. Nem todo

*A definição mais geral da forma extensiva para jogos com n-pessoas foi estabelecida por Harold W. Kuhn, em 1953, no artigo "Extensive Games and the Problem of Information", ampliando a

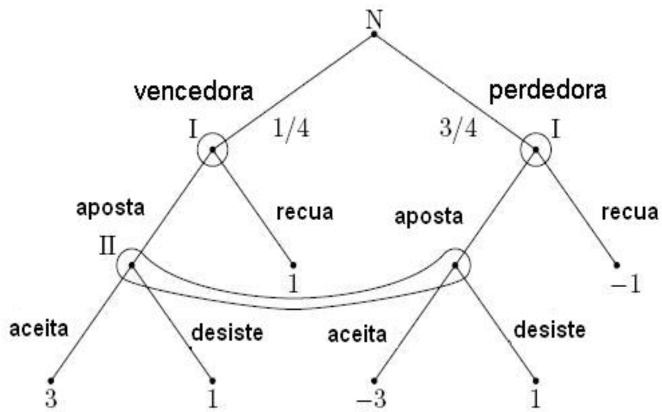

FIGURA 2.5: Árvore do jogo pôquer simplificado com seus respectivos conjuntos de informação.

conjunto de vértices pode formar um conjunto de informação. Para um jogador não estar ciente de qual vértice de um dado conjunto de informação veio, cada vértice no conjunto de informação deve ter o mesmo número de arestas partindo dele. Além disso, é importante que as arestas de cada vértice de um conjunto de informação tenha o mesmo conjunto de rótulos. O jogador, ao mover-se de um conjunto de informação, realmente escolhe um rótulo. O jogador faz apenas uma escolha em cada conjunto de informação.

Definição. Um jogo finito de duas pessoas, soma zero, na forma extensiva, é dado por:

- uma árvore finita com vértices T;
- uma função *payoff* que designa um número real para cada vértice terminal;
- um conjunto T_0 de vértices não terminais (representando posições nas quais movimentos de chance ocorrem) e, para cada $t \in T_0$, uma distribuição de

versão apresentada por John von Neumann, em 1928.

probabilidade nas extremidades conduzidas de t;

- uma partição dos vértices restantes (não terminais e não em T_0) em dois grupos de conjuntos de informação $T_{11}, T_{12}, ..., T_{1k_1}$ (para o jogador I) e $T_{21}, T_{22}, ..., T_{2k_2}$ (para o jogador II), e
- para cada conjunto de informação T_{jk}, um conjunto de rótulos L_{jk} e, para cada $t \in T_{jk}$, um mapeamento um-a-um de L_{jk}, para o conjunto das arestas vindas de t.

A informação estruturada em um jogo, na sua forma extensiva, pode ser bastante complexa. Pode envolver falta de conhecimento do movimento do outro jogador ou de algum movimento de chance. Também é possível descrever situações em que um jogador tenha esquecido seu movimento passado, chamada de **memória imperfeita** (Figura 2.6). Jogos em que os jogadores se lembram de todas as informações passadas, uma vez por eles conhecidas e todos os movimentos que fizeram no passado são chamados jogos de **memória perfeita**.

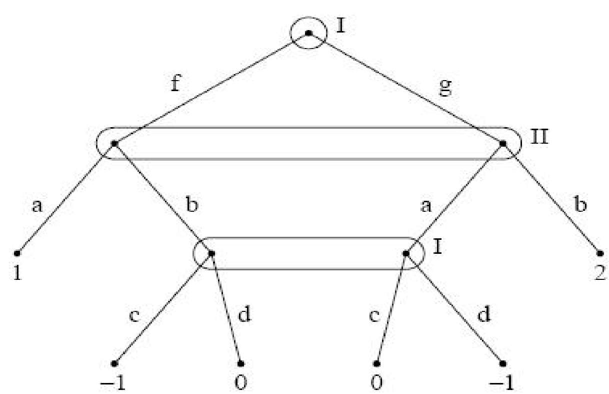

FIGURA 2.6: Árvore do jogo que descreve esquecimento do jogador I.

Jogos em que ambos os jogadores conhecem a árvore de Kuhn do jogo são chamados de **informação completa**. Jogos em que um ou ambos os jogadores não conhecem algum dos *payoffs*, ou alguma probabilidade do movimento de chance, ou algum conjunto de informação, ou todos os ramos da árvore, são chamados jogos com **informação incompleta**. Nos jogos de **informação perfeita**, os jogadores podem conhecer toda história do jogo antes mesmo de tomarem suas decisões. Todos os conjuntos de informação de uma árvore de jogo de informação perfeita são unitários, o que equivale a dizer que cada parte sabe em qual vértice de um jogo seqüencial está. Um exemplo clássico para este tipo de jogo é o xadrez. Caso contrário, o jogo é chamado de **informação imperfeita** (Figura 2.7).

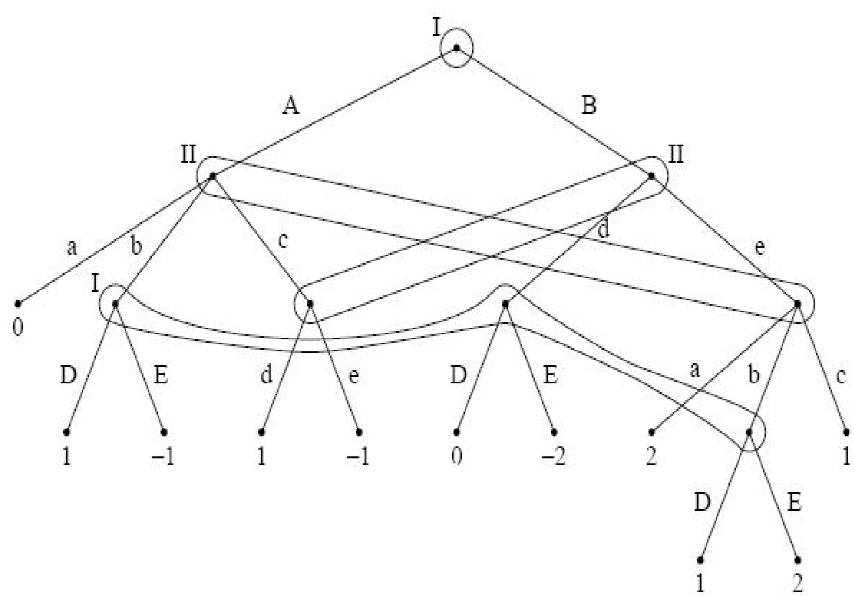

FIGURA 2.7: Árvore do jogo que descreve falta de conhecimento do jogador II.

2.3.5 A representação de um jogo na forma estratégica para a forma extensiva

A noção de um jogo de duas pessoas na forma estratégica é bastante simples. É descrita por uma tripla (X, Y, A). A forma extensiva de um jogo, por outro lado, é bastante complexa. É descrita pela árvore do jogo com cada vértice não-terminal etiquetado como um movimento de chance ou com um movimento de um dos jogadores, com todos os conjuntos de informação especificados, com distribuições de probabilidade dadas para todos os movimentos de chance, e com um *payoff* unido a cada vértice terminal. A teoria dos jogos na forma extensiva é muito mais detalhada do que a teoria dos jogos na forma estratégica. Entretanto, examinando-se um jogo na forma extensiva e considerando-se somente as estratégias e os *payoffs* médios, pode-se reduzir o jogo à forma estratégica.

Primeiramente, certifica-se de que um jogo na forma estratégica pode ser colocado na forma extensiva. Na forma estratégica de um jogo, os jogadores fazem suas escolhas simultaneamente; na forma extensiva de um jogo, os movimentos simultâneos não são permitidos. Entretanto, os movimentos simultâneos podem ser feitos seqüencialmente, como segue. Considera-se que um dos jogadores, o jogador I, movimenta primeiramente e, então, o jogador II realiza seu movimento sem conhecer o resultado do movimento do I. Esta falta de conhecimento pode ser descrita pelo uso de um conjunto de informação apropriado. O seguinte exemplo ilustra isso.

Seja a matriz A a forma estratégica (forma matricial) de um jogo:

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 3 & 0 \\ 2 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

O jogador I tem duas estratégias puras e o jogador II tem três. Atribuiu-se ao jogador I o primeiro movimento, que é escolher entre as linhas 1 e 2. Então, o jogador II movimenta-se, sem conhecer a escolha do jogador I. Isto é indicado por um conjunto de informação para o jogador II. Então, II movimenta, escolhendo entre as colunas 1, 2 ou 3, e o *payoff* apropriado é indicado (Figura 2.8).

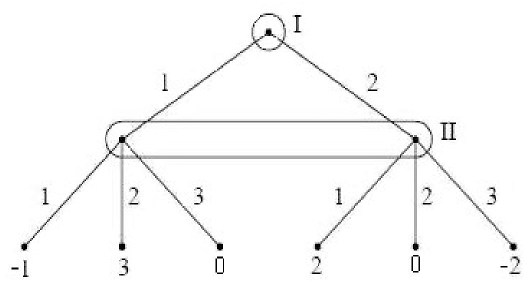

FIGURA 2.8: Forma extensiva equivalente ao jogo matricial dado.

2.3.6 A redução de um jogo na forma extensiva para a forma estratégica

Para ir em sentido contrário, da forma extensiva de um jogo à forma estratégica, é necessário considerar as estratégias puras e a convenção usual a respeito dos *payoffs* aleatórios.

Estratégias puras. Dado um jogo na forma extensiva, é necessário encontrar primeiramente X e Y, os conjuntos das estratégias puras dos jogadores a serem usados na forma estratégica. Uma estratégia pura para o jogador I é uma regra que lhe diz exatamente qual movimento fazer em cada um de seus conjuntos de informação. Sejam $T_{11}, ..., T_{1k_1}$ os conjuntos de informação do jogador I e $L_{11}, ..., L_{1k_1}$ seus correspondentes conjuntos de rótulos. Uma estratégia pura para I é uma k_1-upla $x = (x_l, ..., x_{k_1})$, em que para cada i, x_i é um dos elementos de L_{1i}. Se houver m_i elementos em L_{1i}, o número de tais k_1-uplas e, então, o número de estratégias puras de I é o produto $m_1 m_2 ... m_k$. O conjunto de todas essas estratégias é X. Similarmente, se $T_{21}, ..., T_{2k_2}$ corresponde aos conjuntos de informação de II e $L_{21}, ..., L_{2k_2}$ os correspondentes conjuntos de rótulos, uma estratégia pura para II é uma k_2-upla, $y = (y_1, ..., y_k)$, em que $y_j \in L_{2j}$ para cada j. O jogador II tem $n_1 n_2 ... n_k$ estratégias puras se houverem n_j elementos em L_{2j}. Y denota o conjunto destas estratégias.

Payoffs aleatórios. Num jogo de duas pessoas, dados $x \in X$ e $y \in Y$, deve-se jogar apropriadamente o movimento x sempre que o jogo entra num conjunto de informação de I, jogar apropriadamente o movimento y sempre que o jogo entra num conjunto de informação de II e jogar os movimentos aleatórios com as probabilidades indicadas em cada movimento de chance. O resultado real do jogo, para dados $x \in X$ e $y \in Y$, depende dos movimentos de chance selecionados, que é, conseqüentemente, uma quantidade aleatória. Estritamente falando, os *payoffs* aleatórios não foram definidos para jogos na forma normal. Entretanto, usa-se a substituição completa dos *payoffs* aleatórios por seus valores médios (valores esperados) quando a aleatorização for devido ao uso de estratégias mistas pelos jogadores ou aos movimentos de chance.

Convenção. Se, para estratégias puras fixadas $x \in X$ e $y \in Y$, o *payoff* é uma quantidade aleatória, então, o *payoff* é substituído pelo seu valor médio, denotado por $A(x, y)$.

Por exemplo, se para estratégias dadas $x \in X$ e $y \in Y$, o jogador I ganha 2 com probabilidade $1/4$, ganha 3 com probabilidade $1/4$ e perde 1 com probabilidade $1/2$, então, seu *payoff* médio é $\frac{1}{4}(2) + \frac{1}{4}(3) + \frac{1}{2}(-1) = 3/4$ e assim $A(x, y) = 3/4$.

Conseqüentemente, dado um jogo na forma extensiva, (X, Y, A) é a forma estratégica equivalente do jogo, se X e Y forem os espaços das estratégias puras dos jogadores I e II, respectivamente, e se $A(x, y)$ for o *payoff* médio para $x \in X$

e $y \in Y$.

Exemplo. Seja a árvore do jogo dada pela Figura 2.9.

O jogador I tem dois conjuntos de informação. Em cada conjunto ele pode fazer uma escolha entre duas opções. Ele possui, portanto, $2 \times 2 = 4$ estratégias puras, que podem ser denotadas por:

(A, C): jogar A com $1/2$ de probabilidade ou jogar C com $1/2$ de probabilidade.

(A, D): jogar A com $1/2$ de probabilidade ou jogar D com $1/2$ de probabilidade.

(B, C): jogar B com $1/2$ de probabilidade ou jogar C com $1/2$ de probabilidade.

(B, D): jogar B com $1/2$ de probabilidade ou jogar D com $1/2$ de probabilidade.

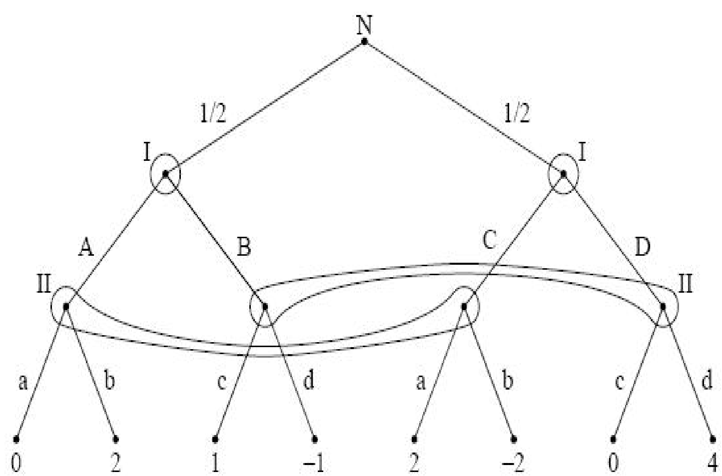

FIGURA 2.9: Forma extensiva do jogo.

Logo, $X = \{(A, C), (A, D), (B, C), (B, D)\}$, o conjunto de todas as estratégias puras do jogador I.

O jogador II também possui dois conjuntos de informação, cada um com duas opções. Ele possui, portanto, $2 \times 2 = 4$ estratégias puras, que podem ser denotadas por:

(a, c): jogar a ou jogar c.

(a, d): jogar a ou jogar d.

(b, c): jogar b ou jogar c.

(b, d): jogar b ou jogar d.

Assim, $Y = \{(a, c), (a, d), (b, c), (b, d)\}$ é o conjunto de todas as estratégias puras do jogador II.

Agora, será encontrada a matriz *payoff*. Supõe-se que I use (A, C) e II use (a, c). Então, se I joga A com probabilidade $1/2$ e II joga a, o *payoff* é 0 (zero). Agora, se I joga C com probabilidade $1/2$ e II joga a, I ganha 2. O ganho médio esperado para I é:

$$A((A, C), (a, c)) = \frac{1}{2}(0) + \frac{1}{2}(2) = 1.$$

Supõe-se, agora, que I use (B, D) e II use (a, c). Então se I joga B com probabilidade $1/2$ e II joga c, o *payoff* é 1. Agora, se I joga D com probabilidade $1/2$ e II joga c, o *payoff* é 0 (zero). O ganho médio esperado para I é:

$$A((B, D), (a, c)) = \frac{1}{2}(1) + \frac{1}{2}(0) = \frac{1}{2}.$$

As demais entradas da matriz podem ser computadas similarmente. Portanto, a matriz do jogo ou matriz *payoff* é:

$$\begin{array}{c c}
 & \begin{array}{cccc} (a,c) & (a,d) & (b,c) & (b,d) \end{array} \\
\begin{array}{c} (A,C) \\ (A,D) \\ (B,C) \\ (B,D) \end{array} & \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 3 \\ 3/2 & 1/2 & -1/2 & -3/2 \\ 1/2 & 3/2 & 1/2 & 3/2 \end{pmatrix}
\end{array}$$

a forma estratégica do jogo.

2.4 Teoria dos jogos e teoria da decisão

Abraham Wald é considerado o primeiro a notar a conexão entre a teoria dos jogos e a teoria estatística de Neyman e Pearson, e quem reconheceu as vantagens de basear a teoria estatística na teoria dos jogos.

"A teoria da decisão pode ser considerada como a teoria do jogo de duas pessoas, onde a natureza faz o papel de um dos jogadores" (Ferguson, 1967).

Os elementos da teoria da decisão são similares aos da teoria dos jogos:

1. um conjunto não vazio, Θ, dos estados possíveis da natureza, referido como espaço paramétrico;

2. um conjunto não vazio, $\mathfrak{a}$, das ações disponíveis para o estatístico;

3. uma função perda, $L(\theta, a)$, função de valores reais definida em $\Theta \times \mathfrak{a}$.

A natureza escolhe um ponto θ em Θ e o estatístico, desinformado de tal escolha, escolhe, após observar uma amostra, uma ação a em $\mathfrak{a}$. Como conseqüência dessas duas escolhas, o estatístico perde uma quantia $L(\theta, a)$ (que representa a perda do estatístico se ele toma a ação a quando θ é o verdadeiro estado da natureza) (Ferguson, 1967).

2.4.1 Função decisão - função risco

Para dar uma estrutura matemática ao processo de reunião de informação, supõe-se que seja permitido ao estatístico, antes de tomar uma decisão, observar o valor de uma variável aleatória ou vetor, X, cuja distribuição dependa do verdadeiro estado da natureza, θ. O espaço amostral foi denotado por $\mathfrak{X}$. Assim, para cada $\theta \in \Theta$, há uma probabilidade medida P_θ e uma correspondente função de distribuição acumulada $F_X(x|\theta)$, que representa a distribuição de X quando θ é o verdadeiro valor do parâmetro.

Um problema de decisão estatística ou um jogo estatístico é um jogo (Θ, $\mathfrak{a}$, L) emparelhado com um experimento envolvendo uma observação aleatória X, em que a distribuição P_θ depende do estado $\theta \in \Theta$ escolhido naturalmente.

Baseado no resultado do experimento $X = x$ (x é o valor observado de X), o estatístico escolhe uma ação $d(x) \in \mathfrak{a}$. Tal função d, que vai do espaço amostral $\mathfrak{X}$ em $\mathfrak{a}$, é uma estratégia elementar para o estatístico nesta situação. A perda é, agora, a quantidade aleatória $L(\theta, d(X))$. O valor esperado de $L(\theta, d(X))$, em que θ é o verdadeiro estado da natureza é chamado **função risco**:

$$R(\theta, d) = E_\theta L(\theta, d(X)) \tag{2.8}$$

e representa a perda média para o estatístico, quando o verdadeiro estado da natureza é θ e o estatístico usa a função d. Nota-se que, para algumas escolhas da função d e alguns valores do parâmetro θ, o valor esperado em (2.8) pode ser $\pm\infty$ ou, pior, pode nem mesmo existir. Conforme indica a seguinte definição, não tem por quê se preocupar com tais funções.

Definição. Toda função $d(x)$ que vai do espaço amostral $\mathfrak{X}$ em $\mathfrak{a}$ é chamada regra de decisão não aleatória ou uma função de decisão não aleatória, desde que a função risco $R(\theta, d)$ exista e seja finita para todo $\theta \in \Theta$. A classe de toda regra de decisão não aleatória é denotada por D.

Observa-se, aqui, que o jogo original (Θ, $\mathfrak{a}$, L) está sendo substituído por um novo jogo, (Θ, D, R), em que o espaço D e a função R têm uma estrutura básica, dependendo de $\mathfrak{a}$, L, e da distribuição de X, cuja exploração deve ser o objetivo principal da teoria da decisão.

Naturalmente, somente uma pequena parte dos estatísticos pode ser contida dentro de uma estrutura tão simples. Nenhum espaço foi feito para tópicos vastos como a experimentação ou a análise seqüencial. Em cada caso, uma estrutura nova poderia ser adicionada para incluir estes tópicos e o problema seria reduzido a um jogo simples. Por exemplo, na análise seqüencial, o estatístico pode tomar observações, uma de cada vez, pagando c unidades cada vez que assim fizer. Conseqüentemente, uma regra de decisão terá que dizer-lhe quando parar de fazer observações e que ação tomar, uma vez que ele parou. Ele tentará escolher uma regra de decisão que minimize, em algum sentido, seu novo risco, que é definido, agora, como o valor esperado da perda mais o custo.

Os principais aspectos de três importantes categorias do que pode ser chamada estatística matemática clássica segue abaixo.

1. $\mathfrak{a}$ consiste de dois pontos, $\mathfrak{a} = \{a_1, a_2\}$. Problemas da teoria da decisão em que $\mathfrak{a}$ consiste de exatamente dois pontos são chamados problemas de testes de hipóteses. Considere o caso especial em que Θ é a reta real e suponha que a função perda está para algum número fixado θ_0 dada por:

$$L(\theta, a_1) = \begin{cases} l_1 & \text{se} \quad \theta > \theta_0 \\ 0 & \text{se} \quad \theta \leq \theta_0 \end{cases}$$

e

$$L(\theta, a_2) = \begin{cases} 0 & \text{se} \quad \theta > \theta_0 \\ l_2 & \text{se} \quad \theta \leq \theta_0 \end{cases}$$

em que l_1 e l_2 são números positivos. Assim, toma-se a ação a_1, se $\theta \leq \theta_0$ e a ação a_2, se $\theta > \theta_0$. O espaço D das regras de decisão consiste nas funções d do espaço amostral em $\{a_1, a_2\}$ com a propriedade $P_\theta\{d(X) = a_1\}$ é bem definida para todo valor de $\theta \in \Theta$. A função risco neste caso é fácil de ser calculada:

$$R(\theta, d) = \begin{cases} l_1 P_\theta\{d(X) = a_1\} & \text{se} \quad \theta > \theta_0 \\ l_2 P_\theta\{d(X) = a_2\} & \text{se} \quad \theta \leq \theta_0 \end{cases}$$

Nestas probabilidades, dois tipos de erro são envolvidos. Para $\theta > \theta_0$, $P_\theta\{d(X) = a_1\}$ é a probabilidade de cometer o erro de tomar da ação a_1 quando se deve tomar a ação a_2 e θ é o verdadeiro estado da natureza. Similarmente, para $\theta \leq \theta_0$, $P_\theta\{d(X) = a_2\} = 1 - P_\theta\{d(X) = a_1\}$ é a probabilidade de cometer o erro de tomar a ação a_2 quando se deve tomar a ação a_1 e θ é o verdadeiro estado da natureza.

2. $\mathfrak{a}$ consiste de k pontos, $\{a_1, a_2, ..., a_k\}$, $k \geq 3$. Estes problemas de teoria de decisão são chamados problemas de decisão múltipla. Um exemplo típico ocorre quando um experimentador deve julgar qual de dois tratamentos tem um maior rendimento baseado num experimento. Ele pode (a) decidir que o tratamento 1 é melhor, (b) decidir-se que o tratamento 2 é melhor ou (c) reter o julgamento até que mais dados estejam disponíveis. Neste exemplo, $k = 3$.

3. $\mathfrak{a}$ consiste da reta real, $\mathfrak{a} = (-\infty, +\infty)$. Tais problemas da teoria da decisão são referidos num sentido amplo como pontos de estimação de um parâmetro real. Seja o caso especial em que Θ é também a reta real e que a função perda é dada

por

$$L(\theta, a) = c(\theta - a)^2,$$

em que c é uma constante positiva. Uma função de decisão, d, neste caso uma função real definida no espaço amostral, pode ser considerada como um estimador do verdadeiro estado da natureza θ. O estatístico deseja escolher a função d que minimize a função risco

$$R(\theta, d) = cE_\theta(\theta - d(X))^2,$$

em que c é o erro quadrático médio da estimativa $d(X)$. Note que este critério - de escolher uma estimativa com um erro quadrático médio pequeno em algum sentido - é exatamente o critério usado mais freqüentemente na estatística clássica.

2.4.2 Uma comparação entre teoria dos jogos e teoria da decisão

Há certas diferenças entre teoria dos jogos e teoria da decisão que surgem da interpretação filosófica dos elementos Θ, $\mathfrak{a}$ e L. São duas as principais diferenças. **1.** Num jogo entre duas pessoas, os dois jogadores tentam simultaneamente maximizar seus ganhos (ou minimizar suas perdas), ao passo que, na teoria da decisão, a natureza escolhe um estado sem esta finalidade. É natural que o comportamento de um jogador dependa da inteligência do oponente para comportar-se racionalmente, ou seja, de uma forma útil para ele. De qualquer modo, um critério de conduta racional para a natureza pode não existir, ou se existir, o estatístico pode não ter tal conhecimento. Não é assumido que a natureza ganha a quantia $L(\theta, a)$ quando θ e a são pontos escolhidos pelos jogadores.

2. É assumido que a natureza escolha o verdadeiro estado uma vez e para tudo e que o estatístico tenha disponível a possibilidade de reunir informação nas suas escolhas por amostragem ou pela realização de um experimento. Esta diferença entre teoria dos jogos e teoria da decisão é mais aparente que real; para uma pode-se imaginar um jogo entre dois adversários inteligentes em que um dos jogadores possui uma vantagem dada a ele pelas regras do jogo. Vê-se, ainda, que todo problema que permite ao estatístico ganhar informação pela amostragem pode simplesmente ser visto como um jogo mais complexo. Entretanto, todos os jogos estatísticos têm este aspecto característico e é a exploração desta estrutura que tal reunião de informação fornece para um jogo a distinção da teoria da decisão e da teoria do jogo apropriada.

3 METODOLOGIA

Dado que o objetivo desta trabalho consiste no desenvolvimento e na obtenção de soluções ótimas para dois problemas clássicos envolvendo estratégias, que são os conhecidos problema das três portas e problema da secretária, via teoria dos jogos, tem-se a seguinte metodologia a ser seguida: no problema das três portas, obteve-se a forma extensiva do jogo por meio da construção da árvore de Kuhn, descrevendo-se todas as etapas do jogo. A partir daí, foi necessário a redução da forma extensiva do jogo para a forma estratégica, obtendo-se a matriz do jogo, a fim de solucionar o problema, encontrando as soluções ótimas.

No problema da secretária, foram estudadas duas variações como jogo entre duas pessoas, definindo as matrizes do jogo de tais variações, de acordo com as estratégias descritas para cada uma delas e, assim, obtendo-se suas soluções.

4 RESULTADOS E DISCUSSÃO

4.1 O problema das três portas

O problema das três portas também conhecido por problema dos dois bodes, foi apresentado pelo Professor Augusto C. Morgado no número 33 da Revista do Professor de Matemática (RPM) (Morgado, 1997) e deu origem a muitas (e interessantes) discussões.

Este jogo se reveste de importância didática, uma vez que coloca em conflito as noções intuitivas usuais do conceito de probabilidade.

O jogo das portas. Em um programa de televisão, um candidato é solicitado escolher uma entre três portas fechadas, uma das quais esconde um automóvel e as outras duas dois bodes. Tal quadro ocorreu de fato em um programa da televisão italiana. Depois que o candidato escolhe uma das três portas, o apresentador, conhecendo o que há por trás das portas, escolhe uma das duas portas restantes mostrando um bode. O apresentador, então, pergunta ao candidato se ele deseja trocar a porta que havia escolhido pela outra porta que ainda permanece fechada. O problema consiste na seguinte indagação: é vantajoso para o candidato fazê-lo? O que o candidato deve fazer, visando maximizar a probabilidade de ganhar o carro? Permanecer com a porta escolhida inicialmente, trocar de porta, ou tanto faz?

4.1.1 Jogando o jogo das três portas

Para colocar o jogo das três portas na sua forma extensiva, considerou-se o candidato na posição do jogador I e o apresentador na posição do jogador II. As portas foram numeradas como porta 1, porta 2 e porta 3.

Verifica-se que há quatro movimentos neste jogo: (1) o movimento de chance que escolhe em qual porta estará o carro, (2) o movimento do jogador I, no qual ele escolhe uma das três portas, (3) o movimento do jogador II no qual ele abre uma das duas portas restantes e (4) o movimento de I, em que ele decide se troca ou não troca de porta.

O movimento de chance no início do jogo foi rotulado com a letra N. Os movimentos conduzidos do vértice relacionado ao movimento de chance são rotulados com as probabilidades com que ocorrem, ou seja, $1/3$.

Foram considerados também os conjuntos de rótulos para cada um dos jogadores. O jogador I possui dois conjuntos de rótulos, caracterizados por L_{11} e L_{12}, em que $L_{11} = \{1, 2, 3\}$ e $L_{12} = \{T, NT\}$ e que correspondem às seguintes ações:

1 : escolhe a porta 1

2 : escolhe a porta 2

3 : escolhe a porta 3

T : troca de porta

NT : não troca de porta

São nove os conjuntos dos rótulos para o jogador II;
$L_{21} = \{[2, \{1, 1\}], [3, \{1, 1\}]\}$, $L_{22} = \{[3, \{1, 2\}]\}$, $L_{23} = \{[2, \{1, 3\}]\}$,
$L_{24} = \{[3, \{2, 1\}]\}$, $L_{25} = \{[1, \{2, 2\}], [3, \{2, 2\}]\}$, $L_{26} = \{[1, \{2, 3\}]\}$,
$L_{27} = \{[2, \{3, 1\}]\}$, $L_{28} = \{[1, \{3, 2\}]\}$ e $L_{29} = \{[1, \{3, 3\}], [2, \{3, 3\}]\}$,
em que:

[i, {j,k}]: abre a porta **i**, estando o carro na porta **j** e I escolheu a porta **k**.

Em cada vértice terminal, é escrito o valor numérico do ganho do jogador I (*payoff*): 1, caso I abra a porta que contém o carro e 0, caso I abra uma porta que contém um bode.

O jogo se inicia. Quando o jogador I deve escolher uma de três portas, ele não sabe atrás de qual porta o carro se encontra, ou seja, ele não sabe em qual posição (vértice) do jogo está. Isso é indicado no diagrama circulando-se três posições em uma curva fechada e, assim, estes três vértices constituem um conjunto de informação. O próximo movimento corresponde ao jogador II, que conhece onde está o carro. Assim, os nove vértices que representam os movimentos de II constituem nove conjuntos de informação separados, pois o resultado do movimento de chance é conhecido e é indicado no diagrama com círculos pequenos sobre estes vértices. Agora é a vez do jogador I realizar o próximo movimento, que é o de decidir entre trocar ou não trocar de porta. Mesmo com uma das portas abertas, mostrando-lhe um bode, o jogador I continua sem a informação da porta em que o carro se encontra. Assim, ele continua sem saber em qual posição do jogo está, o que é indicado no diagrama circulando-se 12 posições em uma curva fechada. Esses 12 vértices constituem um outro conjunto de informação para I.

A forma extensiva do jogo das portas pode ser observada na Figura 4.1.

Obtido o jogo na sua forma extensiva, há a necessidade de passá-lo para a forma estratégica, a fim de encontrar os resultados almejados.

Para reduzir o jogo da sua forma extensiva para a forma estratégica, primeiramente, devem-se encontrar os conjuntos X e Y, ou seja, os conjuntos das estratégias puras para os jogadores I e II, respectivamente.

O número de elementos do conjunto X é dado multiplicando-se o número de elementos de cada conjunto de rótulos do jogador I. Como são dois conjuntos de rótulos, um com três elementos e o outro com dois elementos, o número de

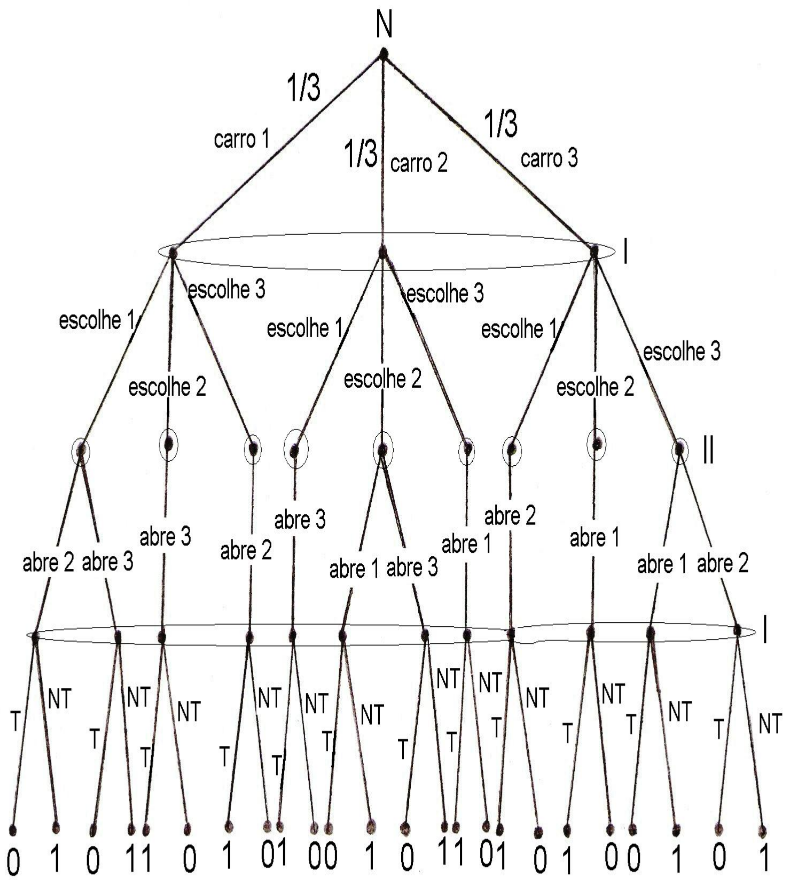

FIGURA 4.1: Árvore do jogo das portas.

estratégias puras para I é o produto $2 \times 3 = 6$. Assim, X possui seis elementos, que são:

1T : escolhe a porta 1 e troca;

2T : escolhe a porta 2 e troca;

3T : escolhe a porta 3 e troca;

1NT : escolhe a porta 1 e não troca;

2NT : escolhe a porta 2 e não troca;

3NT : escolhe a porta 3 e não troca.

O número de elementos do conjunto Y é dado pelo produto do número de elementos de cada conjunto de rótulos do jogador II. Como II possui nove conjuntos de rótulos, três com dois elementos e seis com apenas um elemento, o número de estratégias puras para II é o produto $2 \times 1 \times 1 \times 1 \times 2 \times 1 \times 1 \times 1 \times 2 = 8$. Assim, Y possui oito elementos, que são:

i : abre a porta 2 (carro 1), abre a porta 3 (carro 2), abre a porta 2 (carro 3) quando I escolhe a porta 1 **ou** abre a porta 3 (carro 1), abre a porta 1 (carro 2), abre a porta 1 (carro 3) quando I escolhe a porta 2 **ou** abre a porta 2 (carro 1), abre a porta 1 (carro 2), abre a porta 1 (carro 3) quando I escolhe a porta 3;

ii : abre a porta 2 (carro 1), abre a porta 3 (carro 2), abre a porta 2 (carro 3) quando I escolhe a porta 1 **ou** abre a porta 3 (carro 1), abre a porta 1 (carro 2), abre a porta 1 (carro 3) quando I escolhe a porta 2 **ou** abre a porta 2 (carro 1), abre a porta 1 (carro 2), abre a porta 2 (carro 3) quando I escolhe a porta 3;

iii : abre a porta 2 (carro 1), abre a porta 3 (carro 2), abre a porta 2 (carro 3) quando I escolhe a porta 1 **ou** abre a porta 3 (carro 1), abre a porta 3 (carro

2), abre a porta 1 (carro 3) quando I escolhe a porta 2 **ou** abre a porta 2 (carro 1), abre a porta 1 (carro 2), abre a porta 1 (carro 3) quando I escolhe a porta 3;

iv : abre a porta 2 (carro 1), abre a porta 3 (carro 2), abre a porta 2 (carro 3) quando I escolhe a porta 1 **ou** abre a porta 3 (carro 1), abre a porta 3 (carro 2), abre a porta 1 (carro 3) quando I escolhe a porta 2 **ou** abre a porta 2 (carro 1), abre a porta 1 (carro 2), abre a porta 2 (carro 3) quando I escolhe a porta 3;

v : abre a porta 3 (carro 1), abre a porta 3 (carro 2), abre a porta 2 (carro 3) quando I escolhe a porta 1 **ou** abre a porta 3 (carro 1), abre a porta 1 (carro 2), abre a porta 1 (carro 3) quando I escolhe a porta 2 **ou** abre a porta 2 (carro 1), abre a porta 1 (carro 2), abre a porta 1 (carro 3) quando I escolhe a porta 3;

vi : abre a porta 3 (carro 1), abre a porta 3 (carro 2), abre a porta 2 (carro 3) quando I escolhe a porta 1 **ou** abre a porta 3 (carro 1), abre a porta 1 (carro 2), abre a porta 1 (carro 3) quando I escolhe a porta 2 **ou** abre a porta 2 (carro 1), abre a porta 1 (carro 2), abre a porta 2 (carro 3) quando I escolhe a porta 3;

vii : abre a porta 3 (carro 1), abre a porta 3 (carro 2), abre a porta 2 (carro 3) quando I escolhe a porta 1 **ou** abre a porta 3 (carro 1), abre a porta 3 (carro 2), abre a porta 1 (carro 3) quando I escolhe a porta 2 **ou** abre a porta 2 (carro 1), abre a porta 1 (carro 2), abre a porta 1 (carro 3) quando I escolhe a porta 3;

$viii$: abre a porta 3 (carro 1), abre a porta 3 (carro 2), abre a porta 2 (carro 3) quando I escolhe a porta 1 **ou** abre a porta 3 (carro 1), abre a porta 3 (carro 2), abre a porta 1 (carro 3) quando I escolhe a porta 2 **ou** abre a porta 2 (carro

1), abre a porta 1 (carro 2), abre a porta 2 (carro 3) quando I escolhe a porta 3.

Os conjuntos X e Y ficam assim constituídos: $X = \{1T, 2T, 3T, 1NT, 2NT, 3NT\}$ e $Y = \{i, ii, iii, iv, v, vi, vii, viii\}$. Sendo seis estratégias puras para o jogador I e oito estratégias puras para o jogador II, logo, a matriz do jogo é uma matriz de ordem 6×8.

Como, neste jogo, o *payoff* é uma quantidade aleatória (há movimento de chance envolvendo uma distribuição de probabilidade), as entradas na matriz do jogo devem ser encontradas pelo cálculo do *payoff* médio por meio do uso de uma convenção. A matriz do jogo é uma matriz 6×8, logo, são 48 *payoffs* médios a serem calculados. Abaixo estão relatados os cálculos de dois desses *payoffs* médios. Os demais foram obtidos de maneira similar.

Supõe-se que I usa a estratégia $1T$ e II usa i. Então, I escolhe a porta 1; II abre a porta 2, se o carro estiver na porta 1, com $1/3$ de probabilidade; abre a porta 3, se o carro estiver na porta 2, com $1/3$ de probabilidade; abre a porta 2, se o carro estiver na porta 3, com $1/3$ de probabilidade e, por fim, I escolhe trocar de porta. Neste caso, o ganho médio esperado pelo jogador I é:

$$A(1T, i) = \frac{1}{3} \cdot (0) + \frac{1}{3} \cdot (1) + \frac{1}{3} \cdot (1) = \frac{2}{3}.$$

Supõe-se, agora, que I usa a estratégia $1NT$ e II usa i. Então, I escolhe a porta 1; II abre a porta 2, se o carro estiver na porta 1, com $1/3$ de probabilidade; abre a porta 3, se o carro estiver na porta 2, com $1/3$ de probabilidade; abre a porta 2, se o carro estiver na porta 3, com $1/3$ de probabilidade e, por fim, I escolhe não trocar de porta. Aqui, o ganho médio esperado pelo jogador I é:

$$A(1T, i) = \frac{1}{3} \cdot (1) + \frac{1}{3} \cdot (0) + \frac{1}{3} \cdot (0) = \frac{1}{3}.$$

A matriz do jogo é, então:

$$A = \begin{array}{c c} \begin{array}{cccccccc} i & ii & iii & iv & v & vi & vii & viii \end{array} & \\ \begin{pmatrix} 2/3 & 2/3 & 2/3 & 2/3 & 2/3 & 2/3 & 2/3 & 2/3 \\ 2/3 & 2/3 & 2/3 & 2/3 & 2/3 & 2/3 & 2/3 & 2/3 \\ 2/3 & 2/3 & 2/3 & 2/3 & 2/3 & 2/3 & 2/3 & 2/3 \\ 1/3 & 1/3 & 1/3 & 1/3 & 1/3 & 1/3 & 1/3 & 1/3 \\ 1/3 & 1/3 & 1/3 & 1/3 & 1/3 & 1/3 & 1/3 & 1/3 \\ 1/3 & 1/3 & 1/3 & 1/3 & 1/3 & 1/3 & 1/3 & 1/3 \end{pmatrix} & \begin{array}{c} 1T \\ 2T \\ 3T \\ 1NT \\ 2NT \\ 3NT \end{array} \end{array}$$

Assim obteve-se a forma estratégica do jogo das portas (X, Y, A), com $X = \{1T, 2T, 3T, 1NT, 2NT, 3NT\}$, $Y = \{i, ii, iii, iv, v, vi, vii, viii\}$ e A a matriz acima.

Tendo o jogo na sua forma estratégica, podem-se fazer algumas considerações e encontrarem-se, assim, as estratégias ótimas. A grande questão desse problema é analisar as vantagens, para o jogador I, em trocar ou não trocar de porta. Como o jogador II, que aqui representa o apresentador do programa, não tem maiores interesses em maximizar ou minimizar as chances do candidato, o jogador I, ele joga com uma estratégia uniforme, ou seja, atribui uma mesma probabilidade para suas estratégias puras, usando, assim, a seguinte estratégia mista:

$$\mathbf{q}^T = \begin{pmatrix} 1/8 & 1/8 & 1/8 & 1/8 & 1/8 & 1/8 & 1/8 & 1/8 \end{pmatrix}.$$

O produto da matriz A pelo vetor $\mathbf{q}$ é:

$$A\mathbf{q} = 1/8 \begin{pmatrix} 16/3 \\ 16/3 \\ 16/3 \\ 8/3 \\ 8/3 \\ 8/3 \end{pmatrix}.$$

Será estudado agora o jogo, sob o ponto de vista do jogador I. Primeiramente, será analisada a ação sempre trocar de porta. Como as três primeiras linhas da matriz do jogo correspondem às estratégias puras para o jogador I escolher uma porta e trocá-la, I pode atribuir uma distribuição de probabilidade sobre essas estratégias e fazer uso da seguinte estratégia mista:

$$\mathbf{p}^T = \begin{pmatrix} p_1 & p_2 & p_3 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

em que $p_1 + p_2 + p_3 = 1$.

O *payoff* médio para o jogador I é, portanto:

$$\mathbf{p}^T A\mathbf{q} = \frac{1}{8} \cdot \frac{16}{3} \cdot (\underbrace{p_1 + p_2 + p_3}_{1}) = 2/3$$

o que implica que o jogador I ganha, em média, $2/3$ das vezes quando utiliza a estratégia de sempre mudar de porta.

Agora será analisada a ação de sempre permanecer com a mesma porta escolhida a princípio. Como as três últimas linhas da matriz do jogo correspondem às estratégias puras de escolher uma porta e não trocá-la, o jogador I pode atribuir uma distribuição de probabilidades a essas estratégias, utilizando a seguinte estratégia mista:

$$\mathbf{p}^T = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & p_1 & p_2 & p_3 \end{pmatrix}$$

em que $p_1 + p_2 + p_3 = 1$.

O *payoff* médio para o jogador I é calculado da seguinte forma:

$$\mathbf{p}^T A\mathbf{q} = \frac{1}{8} \cdot \frac{8}{3} \cdot (\underbrace{p_1 + p_2 + p_3}_{1}) = 1/3.$$

Portanto, o jogador I ganha, em média, $1/3$ das vezes quando utiliza a estratégia de sempre permanecer com a mesma porta.

Deve-se considerar também uma possível indiferença por parte do jogador I, ou seja, quando ele não faz distinção entre suas estratégias puras, trocando ou não de porta uma quantidade uniforme de vezes. Nesse caso, a estratégia mista que ele utiliza é:

$$\mathbf{p}^T = \begin{pmatrix} 1/6 & 1/6 & 1/6 & 1/6 & 1/6 & 1/6 \end{pmatrix}.$$

O *payoff* médio para o jogador I é, então:

$$\mathbf{p}^T A\mathbf{q} = \frac{1}{8} \cdot \frac{1}{6} \cdot \left(\frac{16}{3} \cdot (3) + \frac{8}{3} \cdot (3) \right) = 1/2$$

o que implica que o jogador I ganha, em média, $1/2$ das vezes quando é indiferente com relação à mudança da porta.

Eis aí, portanto, a solução deste problema: I deve utilizar a estratégia de sempre trocar de porta.

Segundo Rodrigues (1998) , esse problema já causara uma grande celeuma nos Estados Unidos, envolvendo revistas técnicas e de divulgação, que só terminou em novembro de 1991, com a publicação do artigo de Morgan et al (1991) : *Let's Make a Deal: The Player's Dilemma*.

4.2 O problema da secretária

Este problema ficou amplamente conhecido ao ser abordado na coluna de Jogos Matemáticos de Martin Gardner, na edição de 1960 do periódico *Scientific American* (Ferguson, 1989).

O problema é como se segue: são apresentadas n candidatas interessadas em ocupar uma única vaga de secretária. São realizadas entrevistas com as candidatas, seguindo-se uma ordem aleatória, porém, imediatamente após cada entrevista, decide-se por aceitar ou rejeitar a candidata. Ao decidir rejeitar uma candidata, não se pode mais aceitá-la posteriormente e, uma vez aceita, todas as outras são rejeitadas. E, se as $n-1$ primeiras candidatas foram rejeitadas, automaticamente deverá ser aceita a n-ésima candidata (Freeman, 1983). Apresentado o problema, surge a necessidade de responder à seguinte questão: Que estratégia deve ser adotada visando maximizar a probabilidade de contratar a melhor candidata? Ou, pelo menos, uma suficientemente qualificada?

Este problema também é tratado como o problema do matrimônio ou problema da princesa (Landim, 1983 citado por Brighenti, 2003), em que uma princesa deseja selecionar, entre seus pretendentes, o mais qualificado. Aqui, o número de candidatos pode não ser verossímil, porém, a hipótese que estabelece a impossibilidade de reconsiderar um objeto anteriormente rejeitado parece bastante plausível.

Davis (1973) apresenta uma outra versão para o problema da secretária, que é a seguinte. Cinco pessoas suspeitas de crime mantêm um encontro secreto no porão de um edifício. Do lado de fora, um policial, com ordens para seguir o chefe do bando, aguarda a dispersão deles. O único meio de que o policial dispõe para distinguir o homem de seu interesse dos demais é a informação de que o mesmo é o mais alto do bando. Por medida de cautela, os homens reunidos abandonam o edifício um a um, dando um espaço de tempo entre as saídas tão grande que, se o policial esperar pelo próximo, antes de seguir qualquer um deles, perderá a oportunidade de acompanhá-lo. Se os suspeitos deixam o encontro em ordem aleatória, qual a melhor estratégia a ser adotada pelo policial? Se adotar a melhor estratégia, qual a possibilidade de ser efetivamente o chefe a pessoa que ele vier a seguir?

4.2.1 Jogando contra um oponente

Existem muitas variações do problema da secretária, podendo-se distinguir os casos em que o observador (quem deseja contratar a secretária) joga contra um oponente. Nestes casos, o observador deseja contratar a melhor secretária (menor posto) ou, pelo menos, uma suficientemente qualificada (posto baixo). O papel do oponente é escolher a ordem de apresentação das candidatas, visando maximizar o posto da candidata aceita pelo observador. Dessa forma, ele minimiza a probabilidade de sucesso do observador.

4.2.2 Solucionando o problema

Serão agora consideradas três situações seguidas de suas soluções.

Primeira situação. Se o oponente possui uma escolha completamente livre da ordem dos postos das candidatas a ser apresentada ao observador, ele pode escolher qualquer linha ao acaso do quadrado latino cíclico $n \times n$, o que reduz a probabilidade de sucesso para o valor mínimo possível de $1/n$, qualquer estratégia que o observador use.

Para as n candidatas a serem ordenadas pelo oponente, o quadrado latino cíclico é apresentado como se segue:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n-1 & n \\ n & 1 & 2 & \cdots & n-2 & n-1 \\ n-1 & n & 1 & \cdots & n-3 & n-2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 2 & 3 & 4 & \cdots & n & 1 \end{pmatrix}$$

O observador alcança êxito quando contrata a melhor secretária. Assim, para a obtenção da matriz *payoff*, atribuiu o valor 1 quando o observador contrata a melhor secretária e 0 quando ele contrata qualquer outra que não seja a melhor. O conjunto das estratégias puras para o observador é dado por $X = \{\mathbf{1}, \mathbf{2}, \ldots, \mathbf{n}\}$, em que $\mathbf{1}$ significa contratar a primeira entrevistada, $\mathbf{2}$ significa contratar a segunda entrevistada e assim sucessivamente. Já o conjunto das estratégias puras para o oponente é $Y = \{L_1, L_2, \ldots, L_n\}$, em que L_1= escolher a primeira linha do quadrado latino, L_2= escolher a segunda linha do quadrado latino e assim por diante. A matriz do jogo é, então:

$$\begin{array}{c c} & \begin{array}{ccccc} L_1 & L_2 & L_3 & \cdots & L_n \end{array} \\ \begin{array}{c} \mathbf{1} \\ \mathbf{2} \\ \mathbf{3} \\ \vdots \\ \mathbf{n} \end{array} & \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix} \end{array}$$

Seja $\mathbf{p}^T = (p_1 \ p_2 \ \ldots \ p_n)$ uma estratégia mista qualquer para o observador. O oponente usa, então, uma estratégia mista uniforme, $\mathbf{q}^T = (1/n \ 1/n \ \ldots \ 1/n)$, já que sua intenção é escolher qualquer linha ao acaso do quadrado latino cíclico

$n \times n$. O *payoff* médio é, então:

$$\mathbf{p}^T A\mathbf{q} = \begin{pmatrix} p_1 & p_2 & \cdots & p_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/n \\ 1/n \\ \vdots \\ 1/n \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{p}^T A\mathbf{q} = \begin{pmatrix} p_1 & p_2 & \cdots & p_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/n \\ 1/n \\ \vdots \\ 1/n \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{p}^T A\mathbf{q} = \frac{1}{n}(\underbrace{p_1 + p_2 + \ldots + p_n}_{1})$$

$$\therefore \mathbf{p}^T A\mathbf{q} = \frac{1}{n}$$

O que fornece o resultado esperado.

Segunda situação. Será considerado aqui o caso no qual o oponente escolhe apenas a posição da melhor candidata. Dessa forma, as demais candidatas têm a mesma probabilidade de estarem nas outras $(n-1)!$ ordens possíveis. Se a melhor candidata é colocada na posição r, tal estratégia recebe o nome de T_r e T representa a estratégia mista que escolhe T_r com probabilidade p_r. Supõe-se, ainda, que o observador utilize apenas estratégias S_i: ignorar as primeiras i candidatas e escolher a primeira candidata relativamente melhor que as anteriores. Denotou-se por S a estratégia mista que escolhe S_i com probabilidade π_i. Agora, se o observador usar a estratégia S_i e o oponente usar T_r, a probabilidade de ganhar é 0 se $i \geq r$ (ou seja, se a melhor candidata estiver entre as i-ésimas ignoradas pelo observador) e $i/(r-1)$ se $i < r$.

Assim, sempre que os jogadores utilizarem suas estratégias puras, ou seja, o observador usar a estratégia S_i e o oponente usar a estratégia T_r, o *payoff* médio será $i/(r-1)$ quando $i < r$. O observador obterá sucesso com sua estratégia S_i se a melhor candidata entre as primeiras $r-1$ candidatas estiver entre as primeiras i candidatas (Figura 4.2).

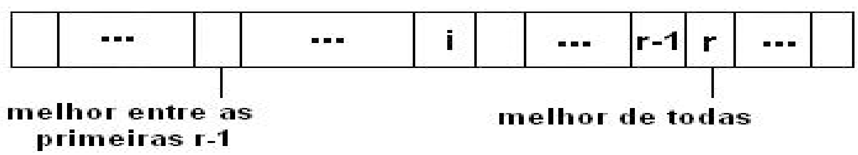

FIGURA 4.2: Esquema de posições relativas das candidatas, considerando $i < r$.

Para ilustrar este fato e assim obter sua verificação, considerou-se um conjunto com $r-1$ bolas distintas, dentre as quais há uma bola considerada a melhor (Figura 4.3).

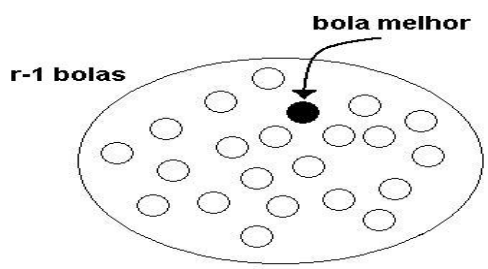

FIGURA 4.3: Conjunto com $r-1$ bolas em que uma é melhor que as demais.

São colocadas i bolas desse conjunto dentro de uma caixa. O número total de maneiras possíveis de colocar essas i bolas dentro da caixa é igual à combinação das $r - 1$ bolas i a i:

$$C_i^{r-1} = \left(\begin{array}{c} r-1 \\ i \end{array} \right).$$

Agora, dentre as i bolas colocadas na caixa, deseja-se que a melhor bola esteja entre elas (Figura 4.4).

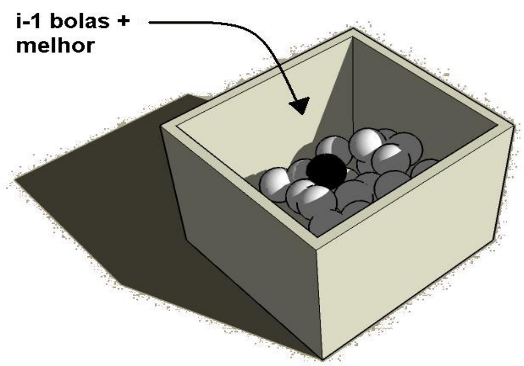

FIGURA 4.4: Caixa com $i - 1$ bolas e a melhor bola entre as $r - 1$ bolas do conjunto.

O número total de maneiras possíveis de colocar $i - 1$ bolas mais a melhor bola de $r - 1$ bolas distintas numa caixa é a combinação de $r - 2$ bolas $i - 1$ a $i - 1$:

$$C_{i-1}^{r-2} = \left(\begin{array}{c} r-2 \\ i-1 \end{array} \right).$$

Dessa forma, a probabilidade de sucesso, ou seja, a probabilidade de a melhor bola estar entre as i bolas na caixa é

$$P_{[sucesso]} = \frac{\begin{pmatrix} r-2 \\ i-1 \end{pmatrix}}{\begin{pmatrix} r-1 \\ i \end{pmatrix}} = \frac{\frac{(r-2)!}{(i-1)!(r-i-1)!}}{\frac{(r-1)!}{i!(r-i-1)!}}$$

$$P_{[sucesso]} = \frac{(r-2)!}{(i-1)!(r-i-1)!} \cdot \frac{i!(r-i-1)!}{(r-1)!}$$

$$\therefore P_{[sucesso]} = \frac{i}{r-1}$$

Portanto, quando $i < r$, a probabilidade do observador contratar a melhor secretária é $i/(r-1)$.

A matriz do jogo para o observador é, então:

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{ccccccc} T_1 & T_2 & T_3 & T_4 & \cdots & T_{n-1} & T_n \end{array} \\ \begin{array}{c} S_1 \\ S_2 \\ S_3 \\ \vdots \\ S_{n-1} \end{array} & \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1/2 & 1/3 & \cdots & 1/(n-2) & 1/(n-1) \\ 0 & 0 & 1 & 2/3 & \cdots & 2/(n-2) & 2/(n-1) \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \cdots & 3/(n-2) & 3/(n-1) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{array}$$

A probabilidade de o observador contratar a melhor candidata usando a estratégia S_i e o oponente usando a estratégia mista $T = (p_1, p_2, \ldots, p_n)$ é, conseqüentemente

$$\sum_{r=i+1}^{n} p_r \frac{i}{r-1}.$$

O oponente deseja, naturalmente, escolher uma estratégia mista T que lhe assegure minimizar o sucesso do observador.

Para a obtenção de tal estratégia, fez-se necessário o uso de um procedimento que iguala o ganho médio, ou seja, a equalização das estratégias. Daí, se o oponente usa a estratégia T, igualando seu retorno médio quando o observador escolhe as linhas i e $i+1$, obtém-se:

$$\sum_{j=i+1}^{n} p_j \frac{i}{j-1} = \sum_{j=i+2}^{n} p_j \frac{i+1}{j-1}$$

que pode ser resolvido por recorrência, como segue.
Para $i = n-2$, tem-se:

$$\sum_{j=n-1}^{n} p_j \frac{n-2}{j-1} = \sum_{j=n}^{n} p_j \frac{n-1}{j-1}$$

$$p_{n-1} + p_n \frac{n-2}{n-1} = p_n$$

$$p_{n-1} = p_n \left(1 - \frac{n-2}{n-1}\right)$$

$$p_{n-1} = p_n \cdot \frac{1}{n-1}$$

Para $i = n-3$, tem-se:

$$\sum_{j=n-2}^{n} p_j \frac{n-3}{j-1} = \sum_{j=n-1}^{n} p_j \frac{n-2}{j-1}$$

$$p_{n-2} + p_{n-1}\frac{n-3}{n-2} + p_n\frac{n-3}{n-1} = p_{n-1} + p_n\frac{n-2}{n-1}$$

$$p_{n-2} = p_n\left(\frac{1}{(n-1)(n-2)} + \frac{1}{n-1}\right)$$

$$p_{n-2} = p_n \cdot \frac{1}{n-2}$$

E assim sucessivamente, de onde se retira a seguinte generalização:

$$p_j = p_n \cdot \frac{1}{j}.$$

Como $\displaystyle\sum_{j=1}^{n} p_j = 1$, segue que

$$p_1 + p_2 + \ldots + p_{n-1} + p_n = 1$$

$$p_n \cdot 1 + p_n \cdot \frac{1}{2} + \ldots + p_n \cdot \frac{1}{n-1} + p_n = 1$$

$$\left(1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{n-1} + 1\right) \cdot p_n = 1$$

$$\therefore p_n = \left(1 + \sum_{i=1}^{n-1} \frac{1}{i}\right)^{-1}$$

Pode-se, então, tomar $p_j = K/j$ e $p_n = K$, em que:

$$K = \left(1 + \sum_{i=1}^{n-1} \frac{1}{i}\right)^{-1}.$$

A probabilidade de sucesso é, então, K.

Similarmente, se o oponente usa a estratégia T_r e o observador faz uso de uma estratégia mista $S = \{\pi_1, \pi_2, \ldots, \pi_{n-1}\}$, a probabilidade de o observador contratar a melhor candidata é:

$$\sum_{i=1}^{r-1} \pi_i \frac{i}{r-1}.$$

O observador deseja, naturalmente, escolher uma estratégia mista S que lhe assegure maximizar o seu sucesso.

Utilizando o mesmo raciocínio anterior, tem-se $\pi_i = K/i$, para $i = 1, 2, \ldots, n-1$. O retorno médio do observador usando essa estratégia é, então, K.

Essa é, portanto, a verdadeira solução minimax desse jogo de duas pessoas.

Terceira situação. O observador utiliza estratégias que visam garantir a contratação de uma boa secretária (com posto baixo). Supondo que o oponente tem total liberdade de escolher a ordem de apresentação das candidatas, este possui uma estratégia que impede o observador de obter, em média, uma candidata com posto $\dfrac{(n+1)}{2}$. Tal estratégia consiste em apresentar, sempre com probabilidade igual a $1/2$, a melhor ou a pior secretária, entre aquelas que ainda não foram entrevistadas. A Figura 4.5 ilustra a situação, em que os números representam o posto das candidatas e os caminhos no grafo (sempre para a direita) representam todas as seqüências possíveis de apresentação das candidatas. De fato, o observador não pode fazer mais do que o alcançado com a estratégia mais simples, que corresponde a escolher um número j sorteado entre 1 e n e contratar a j-ésima candidata. Se a ordem é aleatória, a esperança do posto da contratada é $\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} j = \frac{1}{2}(n+1)$.

Em termos de estratégias puras, o observador possui n estratégias puras (contratar a primeira candidata, a segunda, ..., a n-ésima) e o oponente possui 2^{n-1} estratégias puras (o número de caminhos que podem ser percorridos no diagrama de árvore da figura 4.5).

A matriz do jogo pode ser representada da seguinte forma, em que cada entrada é o posto relativo de cada secretária contratada (ou seja, 1 = contratar a melhor

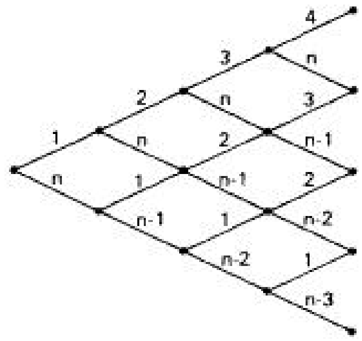

FIGURA 4.5: Grafo representando todas as seqüências possíveis utilizando a estratégia do oponente.

secretária, 2 = contratar a segunda melhor e assim sucessivamente):

$$\begin{pmatrix}
1 & 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & n & \dots & n & n & n & n \\
2 & \dots & 2 & n & \dots & n & 1 & \dots & 1 & n-1 & \dots & n-1 \\
\vdots & & & & & \ddots & & & & & & \vdots \\
n-1 & n & \dots & & & \dots & & & & & \dots & 2 \\
n & n-1 & \dots & & & \dots & & & & & \dots & 1
\end{pmatrix}$$

A primeira linha da matriz indica que o observador contrata a primeira candidata entrevistada; assim, ele contrata a melhor candidata (representada na matriz pelo número 1), com probabilidade igual a $1/2$ ou contrata a pior candidata, n, também com probabilidade igual a $1/2$. Já na segunda linha, o observador contrata a segunda candidata entrevistada, ou seja, ele contrata a melhor candidata (1), ou a segunda melhor (2), ou a pior (n) ou, ainda, a segunda pior ($n-1$) todas com probabilidade igual a $1/4$. De maneira geral, na k-ésima linha, o observador contrata a k-ésima candidata entrevistada; ele contrata a melhor (1), ou a segunda melhor (2), ..., ou a k-ésima melhor, ou a pior (n), ou a segunda pior ($n-1$), ..., ou, ainda, a k-ésima pior ($n-(k-1)$), todas com probabilidade igual a $1/2^k$. As colunas da matriz apresentam todas as permutações possíveis (caminhos no grafo).

Pode-se, ainda, observar, nesta matriz, o número de vezes que cada posto distinto aparece. A primeira linha da matriz significa que o observador contratou na primeira entrevista, ou seja, ele se encontra no primeiro vértice do diagrama de árvore apresentado na Figura 4.5. Nesta posição, ele possui apenas duas chances: ou contrata a pior ou a melhor candidata com probabilidade igual a $1/2$. Assim, a pior candidata (n) é apresentada C_0^1 vezes e a melhor candidata (1) é apresentada C_1^1 vezes. Como o oponente possui 2^{n-1} estratégias puras, ou, ainda, 2^{n-1} maneiras de ordenar as candidatas que serão apresentadas ao observador, os postos 1 e n aparecem na primeira linha da matriz $1/2 \cdot 2^{n-1} \cdot C_0^1$ e $1/2 \cdot 2^{n-1} \cdot C_1^1$ vezes, respectivamente.

De forma genérica, considerando-se a k-ésima linha da matriz, a pior candidata (n) e a k-ésima melhor candidata (k) são apresentadas C_0^{k-1} vezes; a segunda pior ($n-1$) e a ($k-1$)-ésima melhor ($k-1$) são apresentadas C_1^{k-1} vezes, ...; a ($k-1$)-ésima pior ($n-(k-2)$) e a segunda melhor (2) são apresentadas C_{k-2}^{k-1} vezes e, por fim, a (k)-ésima pior ($n-(k-1)$) e a melhor (1) são apresentadas C_{k-1}^{k-1} vezes. (Conforme os caminhos percorridos no diagrama da Figura 4.5 quando o observador se encontra no k-ésimo conjunto de vértices.) Dessa forma, os postos

$$1, 2, \ldots, k, (n-(k-1)), \ldots, (n-1), n$$

aparecem na k-ésima linha da matriz

$$1/2^k \cdot 2^{n-1} \cdot C_{k-1}^{k-1},\ 1/2^k \cdot 2^{n-1} \cdot C_{k-2}^{k-1},\ \ldots,\ 1/2^k \cdot 2^{n-1} \cdot C_0^{k-1},$$
$$1/2^k \cdot 2^{n-1} \cdot C_{k-1}^{k-1}, \ldots, 1/2^k \cdot 2^{n-1} \cdot C_1^{k-1} \text{ e } 1/2^k \cdot 2^{n-1} \cdot C_0^{k-1}$$

vezes, respectivamente.

Outro ponto que deve ser ressaltado é o fato de a soma dos elementos em cada linha da matriz ser constante. Considerando-se a forma genérica apresentada acima, pode-se verificar essa afirmação. Somando-se os elementos da k-ésima linha da matriz, tem-se:

$$1\left[2^{n-(k+1)}C_{k-1}^{k-1}\right]+2\left[2^{n-(k+1)}C_{k-2}^{k-1}\right]+\ldots+(k-1)\left[2^{n-(k+1)}C_{1}^{k-1}\right]+$$

$$+k\left[2^{n-(k+1)}C_{0}^{k-1}\right]+(n-(k-1))\left[2^{n-(k+1)}C_{k-1}^{k-1}\right]+$$

$$+(n-(k-2))\left[2^{n-(k+1)}C_{k-2}^{k-1}\right]+\ldots+(n-1)\left[2^{n-(k+1)}C_{1}^{k-1}\right]+$$

$$n\left[2^{n-(k+1)}C_{0}^{k-1}\right].$$

Fatorando-se essa expressão, obtém-se:

$$\begin{aligned}2^{n-(k+1)}\Bigg[n\sum_{i=0}^{k-1}C_i^{k-1}+kC_0^{k-1}+(k-2)C_1^{k-1}+\ldots\\ \ldots+(-k+4)C_{k-2}^{k-1}+(-k+2)C_{k-1}^{k-1}\Bigg].\end{aligned} \tag{4.1}$$

A partir daqui, é conveniente fazer as seguintes observações:

✓ $\displaystyle\sum_{i=0}^{k-1}C_i^{k-1}=2^{k-1}$.

✓ $C_0^{k-1}=C_{k-1}^{k-1};\ C_1^{k-1}=C_{k-2}^{k-1}$ e assim por diante.

Dessa forma, pode-se fazer o seguinte agrupamento:

$$kC_0^{k-1}+(-k+2)C_{k-1}^{k-1}=2C_0^{k-1}=C_0^{k-1}+C_{k-1}^{k-1}$$

$$(k-2)C_1^{k-1} + (-k+4)C_{k-2}^{k-1} = 2C_1^{k-1} = C_1^{k-1} + C_{k-2}^{k-1}$$

e assim sucessivamente, obtendo-se:

$$C_0^{k-1} + C_1^{k-1} + \cdots + C_{k-2}^{k-1} + C_{k-1}^{k-1} = \sum_{i=0}^{k-1} C_i^{k-1} = 2^{k-1}.$$

Retomando-se a expressão (4.1) e considerando-se as observações que foram feitas, segue que:

$$2^{n-(k+1)}\left[n \underbrace{\sum_{i=0}^{k-1} C_i^{k-1}}_{2^{k-1}} + \underbrace{C_0^{k-1} + C_1^{k-1} + \cdots + C_{k-2}^{k-1} + C_{k-1}^{k-1}}_{2^{k-1}} \right] =$$

$$2^{n-(k+1)}\left[n(2^{k-1}) + 2^{k-1} \right] = 2^{n-2}(n+1).$$

Assim, fica demonstrado que a soma dos elementos de uma linha da matriz é constante e igual a $2^{n-2}(n+1)$.

Agora, será feita a verificação de que tal estratégia usada pelo oponente inibe o observador de tomar qualquer estratégia que lhe traga alguma vantagem, ou seja, não importa qual estratégia o observador utilize, ele sempre obterá um posto médio $\frac{1}{2}(n+1)$, independente da ordem escolhida pelo oponente.

Se o observador usa uma estratégia mista qualquer

$$\mathbf{p}^T = \begin{pmatrix} \pi_1 & \pi_2 & \dots & \pi_n \end{pmatrix}$$

em que $\pi_i \geq 0$, para $i = 1, \dots, n$ e $\sum_{i=1}^{n} \pi_i = 1$

e o oponente usa a estratégia mista uniforme:

$$\mathbf{q}^T = \begin{pmatrix} 1/2^{n-1} & 1/2^{n-1} & \dots & 1/2^{n-1} \end{pmatrix}$$

o *payoff* médio para o observador é dado por:

$$\mathbf{p}^T A\mathbf{q} = \begin{pmatrix} \pi_1 & \pi_2 & \dots & \pi_n \end{pmatrix}_{1\times n} \left(\frac{1}{2^{n-1}}\right) \begin{pmatrix} 2^{n-2}(n+1) \\ 2^{n-2}(n+1) \\ \vdots \\ 2^{n-2}(n+1) \end{pmatrix}_{n\times 1}$$

$$\mathbf{p}^T A\mathbf{q} = \left(\frac{1}{2^{n-1}}\right) 2^{n-2}(n+1)[\underbrace{\pi_1 + \pi_2 + \dots + \pi_n}_{1}]$$

$$\therefore \mathbf{p}^T A\mathbf{q} = \frac{n+1}{2}$$

de onde segue o resultado.

Este resultado é demonstrado em Chow et al.,* utilizando a sofisticada teoria de Martingales.

*(Chow *et al.*, 1964 citado por Freeman, 1983)

5 CONCLUSÃO

A utilização do formalismo básico da teoria dos jogos apresentada permite a solução do jogo de forma simples e eficiente, comparada à abordagem usual, que é o cálculo de probabilidades de alguns movimentos dos jogos.

Em razão desse fato, é viável, sempre que possível, que, didaticamente, os jogos sejam abordados, de uma maneira geral, por meio de sua árvore de Kuhn, no lugar de serem apresentados essencialmente como um problema de probabilidade.

Ao se abordar um jogo, é importante utilizar seu formalismo apresentado, escrevendo-o tanto na sua forma extensiva quanto na sua forma normal.

A teoria dos jogos pode ser aplicada a diversos problemas reais tomados como jogos entre duas ou mais pessoas.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

BRIGHENTI, C. R. G. **Um método de seleção por quantil em problemas de inspeção seqüencial**. 2003. 60 p. Dissertação (Mestrado) - Universidade Federal de Lavras, Lavras, MG.

DAVIS DAVIS, M. D. **Teoria dos jogos:** uma introdução não técnica. São Paulo: Cultrix, 1973. 214 p.

FERGUSON, T. S. **Mathematical statistics:** a decision theoretic approach. New York: Academic Press, 1967. 396p.

FERGUSON, T. S. Who solved the secretary problem. **Statistical Science**, Beachwood, v. 4, n.3, p. 282-289, 1989.

FERGUSON, T. S. **Game theory.** California: University of California at Los Angeles, 2007. 81 p. Disponível em: <http://www.math.ucla.edu/tom/GameTheory/ mat.pdf>. Acesso em: 19 jan. 2007.

FREEMAN, P. R. The secretary problem and its extensions: a review. **International Statistical Review**, Essex, v. 51, n. 2, p. 189-206, 1983.

GIBBONS, R. **Game theory for applied economists**. Princeton: Princeton University Press, 1992. 267p.

McDONALD, J. **Estratégia no Pôquer nos Negócios e na Guerra**. Rio de Janeiro: Fundação Getúlio Vargas, 1991. 72p.

MORGADO, C. M. Os dois bodes. **Revista do Professor de Matemática**, São Paulo, v.33, p. 26-29, 1997.

MORGAN, J. P.; CHAGANTY, N. R.; DAHIYA, R. C.; DOVIAK, M. J. Let's make a deal: The player's dilemma. **The American Statistician**, Washington, v.45, n. 4, p. 284-287, 1991.

RODRIGUES, F. W. Sobre o problema dos bodes. **Revista do Professor de Matemática**, São Paulo, v.36, p. 29-30, 1998.

SIMONSEN, M. H. **Ensaios Analíticos**. Rio de janeiro: Fundação Getúlio Vargas, 1994. 409p.