

**CURVAS DE CRESCIMENTO DIFÁSICAS DE
FÊMEAS HEREFORD COM ERROS AUTO-
REGRESSIVOS E HETEROGENEIDADE DE
VARIÂNCIAS**

PATRÍCIA NEVES MENDES

2007

PATRÍCIA NEVES MENDES

**CURVAS DE CRESCIMENTO DIFÁSICAS DE FÊMEAS HEREFORD
COM ERROS AUTO-REGRESSIVOS E HETEROGENEIDADE DE
VARIÂNCIAS**

Dissertação apresentada à Universidade Federal de Lavras como parte das exigências do curso de Mestrado em Agronomia, área de concentração em Estatística e Experimentação Agropecuária, para a obtenção do título de "Mestre".

Orientador

Prof. Dr. Joel Augusto Muniz

LAVRAS
MINAS GERAIS – BRASIL
2007

**Ficha Catalográfica Preparada pela Divisão de Processos Técnicos da
Biblioteca Central da UFLA**

Mendes, Patrícia Neves

Curvas de crescimento difásicas de fêmeas Hereford com erros auto-regressivos e heterogeneidade de variâncias / Patrícia Neves Mendes.

– Lavras : UFLA, 2007.

84 p. : il.

Orientador: Joel Augusto Muniz.

Dissertação (Mestrado) – UFLA.

Bibliografia.

1. Curvas de crescimento difásicas. 2. Erros auto-regressivos. 3. Modelos não-lineares. 4. Raça Hereford. 5. Heterogeneidade de variâncias. I. Universidade Federal de Lavras. II. Título.

CDD-519.5

PATRÍCIA NEVES MENDES

**CURVAS DE CRESCIMENTO DIFÁSICAS DE FÊMEAS HEREFORD
COM ERROS AUTO-REGRESSIVOS E HETEROGENEIDADE DE
VARIÂNCIAS**

Dissertação apresentada à Universidade Federal de Lavras, como parte das exigências do Curso de Mestrado em Agronomia, área de concentração em Estatística e Experimentação Agropecuária, para obtenção do título de "Mestre".

APROVADA em 09 de fevereiro de 2007

Prof. Augusto Ramalho de Moraes

UFLA

Dr. João Vieira Neto

EPAMIG

Prof. Ruben Delly Veiga

UFLA

Prof. Dr. Joel Augusto Muniz
UFLA
(Orientador)

LAVRAS
MINAS GERAIS – BRASIL

AGRADECIMENTOS

A Deus pela vida e família maravilhosas que tenho.

À Universidade Federal de Lavras, especialmente ao Departamento de Ciências Exatas pela oportunidade de realizar este curso.

Ao Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico (CNPq) pela concessão da bolsa de estudos.

Ao meu orientador, professor Joel Augusto Muniz, pela orientação, amizade, ensinamentos e apoio durante todo o curso.

Ao professor e amigo Fabyano Fonseca e Silva, por toda a dedicação e auxílio em todas as horas.

Ao professor Hilário Antônio de Castro e sua família pelo apoio e incentivo no decorrer dessa caminhada.

Ao tio Morel, por todos os conselhos e portas abertas que iluminam meu caminho.

A todos professores do curso de Pós-graduação do DEX, pela amizade e ensinamentos transmitidos durante o curso.

A Ana Rita de Assumpção Mazzini, ex-aluna do curso de Estatística, pelo fornecimento dos dados.

A todos os funcionários do DEX pelo sorriso amigo e boa vontade em todos os momentos, em especial a Selminha e Edila.

Aos meus amigos incondicionais, pelas horas e horas de estudo, e também pelas festas e risadas que juntos me ajudaram a chegar ao final deste trabalho.

Ao amigo e professor Mário Vivanco pelos ensinamentos e amizade consolidada durante este período.

A todos os meus tios, tias e primos que tanto rezaram e torceram por mim. Muito obrigada.

Ao meu namorado Paulo Henrique (PH) pelo amor, carinho, companheirismo e paciência, principalmente nas horas mais difíceis.

Aos meus queridos avós Elba e José Belchior pelo amor e compreensão, nas muitas vezes em que estive ausente devido aos estudos.

Ao meu irmão, Talles, pelo exemplo de força e perseverança em todos os seguimentos da vida, além é claro, dos momentos divertidos e engraçados que nos proporciona.

Aos meus pais, Mara e Bolivar, aos quais não tenho palavras para agradecer todo o suporte, carinho, força, compreensão e amor oferecidos durante a minha vida.

SUMÁRIO

RESUMO.....	i
ABSTRACT.....	ii
1 INTRODUÇÃO.....	1
2 REFERENCIAL TEÓRICO	3
2.1 A raça Hereford	3
2.2 Curvas de crescimento.....	4
2.3 Curvas de crescimento multifásicas	9
2.4 Modelos não-lineares	14
2.5 Autocorrelação	18
3 METODOLOGIA.....	20
3.1 Dados e modelos estudados	20
3.2 Estimção dos parâmetros de modelos não-lineares	22
3.2.1 Método dos Quadrados Mínimos Ordinários.....	22
3.2.2 Método dos Quadrados Mínimos Ponderados	23
3.2.3 Método dos Quadrados Mínimos Generalizados	25
3.3 Processo Iterativo.....	27
3.3.1 Método de Gauss-Newton	27
3.3.2 Método de Marquardt	28
3.4 Recursos Computacionais	29
3.5 Comparação entre os modelos	29
3.5.1 Coeficiente de Determinação Ajustado.....	30
3.5.2 Desvio Padrão Residual.....	30
3.5.3 Teste de Durbin-Watson	30
3.5.4 Critério de Informação de Akaike (AIC).....	31
3.5.5 Teste F para comparação de modelos	31
4 RESULTADOS E DISCUSSÃO.....	33
4.1 Derivadas parciais e elementos da matriz $X'X$ para as funções em estudo	33
4.1.1 Função logística.....	33
4.1.2 Função de Gompertz	37
4.2 Considerações iniciais.....	41
4.3 Ajuste das curvas médias para o modelo logístico difásico.....	43
4.4 Ajuste das curvas médias para o modelo Gompertz difásico.....	48
4.5 Ajuste das curvas individuais para o modelo logístico	53
4.6 Ajuste das curvas individuais para o modelo Gompertz.....	56
4.7 Avaliadores da qualidade para o ajuste das curvas individuais.....	58
4.8 Gráficos do modelo logístico considerando o ajuste das curvas médias	61

4.9 Gráficos do modelo Gompertz considerando o ajuste das curvas médias	
.....	66
5 CONCLUSÕES	73
REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS	74
ANEXOS	81

LISTA DE TABELAS

TABELA 1 - Equações para os casos especiais da função de Richards.....	6
TABELA 2 - Estimativas dos parâmetros com seus respectivos erros padrões e intervalos de confiança assintóticos de 95%, para o modelo logístico difásico, com erros independentes.....	43
TABELA 3 - Estimativas dos parâmetros com seus respectivos erros padrões e intervalos de confiança assintótico de 95%, para o modelo logístico difásico, com erros autorregressivos de ordem 1.....	44
TABELA 4 - Estimativas dos parâmetros com seus respectivos erros padrões e intervalos de confiança assintótico de 95%, para o modelo logístico difásico, com erros autorregressivos de ordem 2.....	45
TABELA 5 – Estimativas das assintotas de cada modelo estudado e seus respectivos intervalos de confiança assintótico de 95%.....	46
TABELA 6 – Avaliadores da qualidade do ajuste considerados: número de parâmetros (N° parms.), coeficiente de determinação ajustado (R^2_a), desvio padrão residual (DPR), teste de Durbin–Watson (DW), número de iterações (N° iter.), critério de informação de Akaike (AIC) e teste F.....	47
TABELA 7 - Estimativas dos parâmetros com seus respectivos erros padrões e intervalos de confiança assintóticos de 95%, para o modelo Gompertz difásico, com erros independentes.....	48
TABELA 8 - Estimativas dos parâmetros com seus respectivos erros padrões e intervalos de confiança assintóticos de 95%, para o modelo Gompertz difásico, com erros autorregressivos de ordem 1.....	49
TABELA 9 - Estimativas dos parâmetros com seus respectivos erros padrões e intervalos de confiança assintótico de 95%, para o modelo Gompertz difásico, com erros autorregressivos de ordem 2.....	50

TABELA 10 - Estimativas das assíntotas de cada modelo estudado e seus respectivos intervalos de confiança assintótico de 95%.....	51
TABELA 11 - Avaliadores da qualidade do ajuste considerados: número de parâmetros (N° parms.), coeficiente de determinação ajustado (R^2_a), desvio padrão residual (DPR), teste de Durbin–Watson (DW), número de iterações (N° iter.), critério de informação de Akaike (AIC) e teste F.....	52
TABELA 12 – Estimativas dos parâmetros com seus respectivos erros padrões e intervalos de confiança assintóticos de 95%, considerando o modelo logístico com erros independentes.....	53
TABELA 13 – Estimativas dos parâmetros com seus respectivos erros padrões e intervalos de confiança assintóticos de 95%, considerando o modelo logístico com erros autorregressivos de ordem 1.....	54
TABELA 14 – Estimativas dos parâmetros com seus respectivos erros padrões e intervalos de confiança assintóticos de 95%, considerando o modelo logístico com erros autorregressivos de ordem 2.....	55
TABELA 15 – Estimativas dos parâmetros com seus respectivos erros padrões e intervalos de confiança assintóticos de 95%, considerando o modelo Gompertz com erros independentes.....	56
TABELA 16 – Estimativas dos parâmetros com seus respectivos erros padrões e intervalos de confiança assintóticos de 95%, considerando o modelo Gompertz com erros autorregressivos de ordem 1.....	57
TABELA 17 – Estimativas dos parâmetros com seus respectivos erros padrões e intervalos de confiança assintóticos de 95%, considerando o modelo Gompertz com erros autorregressivos de ordem 2.....	58
TABELA 18 – Percentual de convergência para os diferentes modelos, no ajuste das curvas individuais.....	59
TABELA 19 – Quadrado médio do erro (QME), para os diferentes modelos, no ajuste das curvas individuais.....	59

TABELA 20 – Coeficiente de determinação ajustado (R^2_a), para os diferentes modelos, no ajuste das curvas individuais.....	60
---	----

LISTA DE FIGURAS

FIGURA 1: Dados médios e variância dos pesos observados, de fêmeas Hereford, no período de zero a 675 dias após o nascimento.....	42
FIGURA 2: Comportamento dos resíduos do modelo logístico difásico com estrutura de erros independentes.....	61
FIGURA 3: Comportamento dos resíduos do modelo logístico difásico com estrutura de erros auto-regressiva de ordem 1.....	62
FIGURA 4: Comportamento dos resíduos do modelo logístico difásico com estrutura de erros auto-regressiva de ordem 2.....	63
FIGURA 5: Ajuste da função logística difásica com erros independentes.	64
FIGURA 6: Ajuste da função logística difásica com erros auto-regressivos de ordem 1.....	65
FIGURA 7: Ajuste da função logística difásica com erros auto-regressivos de ordem 2.....	66
FIGURA 8: Comportamento dos resíduos do modelo Gompertz difásico com estrutura de erros independentes.....	67
FIGURA 9: Comportamento dos resíduos do modelo Gompertz difásico com estrutura de erros auto-regressiva de ordem 1.....	68
FIGURA 10: Comportamento dos resíduos do modelo Gompertz difásico com estrutura de erros auto-regressiva de ordem 2.....	69
FIGURA 11: Ajuste da função Gompertz difásica com estrutura de erros independentes.....	70
FIGURA 12: Ajuste da função Gompertz difásica com estrutura de erros auto-regressiva de ordem 1.....	71
FIGURA 13: Ajuste da função Gompertz difásica com estrutura de erros auto-regressiva de ordem 2.....	72

RESUMO

MENDES, Patrícia Neves. **Curvas de crescimento difásicas de fêmeas Hereford com erros auto-regressivos e heterogeneidade de variâncias**. 2007. 84 p. Dissertação (Mestrado em Estatística e Experimentação Agropecuária) – Universidade Federal de Lavras, Lavras, MG.*

No presente estudo foram ajustados os modelos de crescimento não-linear logístico difásico e Gompertz difásico, ambos ponderados pelo inverso da variância, com três diferentes estruturas de erros: erros independentes (EI), auto-regressivos de primeira ordem (AR (1)) e auto-regressivo de segunda ordem (AR (2)) a dados de peso-idade de 55 fêmeas da raça Hereford, criadas na região de Bagé, RS, avaliadas desde o nascimento até 675 dias de idade. O objetivo do estudo é comparar estas funções e modelar a estrutura de erros inerente a cada ajuste. A estimação dos parâmetros para modelos de regressão não-linear foi feita pelo processo iterativo de Gauss-Newton, utilizando-se o procedimento *model* do Software Statistical Analysis System (SAS). Foram obtidos ajustes médios e individuais para os animais em estudo. A comparação entre os modelos foi realizada com base na interpretação biológica dos parâmetros e nos avaliadores de qualidade de ajuste (coeficiente de determinação ajustado, teste de Durbin-Watson, desvio padrão residual, número de iterações), além do critério de informação de Akaike (AIC) e do teste F para comparação de modelos. Ambas as funções estudadas, embora tenham mostrado um bom ajuste aos dados, tendem a subestimar o peso adulto do animal, exceto quando se considera a estrutura de erros AR (2). Os ajustes individuais foram mais precisos que os ajustes médios, embora os últimos tenham necessitado de um número menor de iterações até alcançarem a convergência.

* Comitê Orientador: Joel Augusto Muniz – UFLA (Orientador)

ABSTRACT

MENDES, Patrícia Neves. **Difasic growth curves of Hereford females with auto-regressive errors and heterogeneity of variances.** 2007. 84 p. Dissertation (Master Program in Statistics and Agricultural Experimentation) – Federal University of Lavras, Lavras, Minas Gerais, Brazil*

In the present study, the models of non-linear Difasic Logistic and Difasic Gompertz were adjusted, both weighed by the inverse of the variance with three different errors structures: independent errors (IE), first-class auto-regressive (AR (1)) and second-class auto-regressive (AR (2)) to weight-age data of 55 females of the Hereford race, raised in the Bagé region, RS, Brazil, evaluated since birth till 675 days old. The study objective is to compare these functions and shape the errors structure inherent to each adjustment. The Gauss-Newton interactive process made the esteem of the parameters to non-linear regression models. For this, it was used the *model* procedure of the Software Statistical Analysis System (SAS). Average and individual adjustments had been gotten for the animals in study. The comparison between the models was carried out through on the biological interpretation basis of the parameters and in the adjustment of quality appraisers (adjusted determination coefficient, Durbin-Watson test, residual standard desviation, iterations number), beyond the Akaike information criteria (AIC) and the F test to model comparison. Both studied functions, although showed good data adjustment, tend to sub estimate the adult animal weight, except when the errors structure AR (2) is considered. The individual adjustments were more accurate then the average adjustments, although the last ones needed less number of iterations till they reach convergence.

* Guidance Committee: Joel Augusto Muniz – UFLA (Major Professor)

1 INTRODUÇÃO

Atualmente, uma forma prática e consistente de analisar a eficiência produtiva de raças de bovinos de corte é por meio do estudo de curvas de crescimento, pois estas representam uma trajetória longitudinal dos pesos apresentados pelos animais em função do tempo. Raças zebuínas, como Nelore e Guzará, as quais são tradicionalmente criadas em praticamente todas as regiões brasileiras, já tiveram suas curvas de crescimentos reportadas em inúmeras literaturas. Porém, raças européias, que, recentemente, vêm apresentando grande potencial produtivo, ainda são carentes de pesquisa em relação à identificação de seus padrões de crescimento.

Dentre as raças de gado de corte européias criadas no Brasil, destaca-se a raça Hereford, originária da Inglaterra. Suas principais vantagens são a adaptação aos mais diversos ambientes e sistemas de produção, alto índice de fertilidade, bom ganho de peso a pasto, alto índice de rendimento de carcaça e precocidade dos animais.

No estudo de curvas de crescimento, geralmente, são realizados ajustes de modelos não-lineares a dados de peso-idade dos animais. Esses modelos apresentam parâmetros que são interpretáveis biologicamente, o que facilita o entendimento a respeito do processo de crescimento.

Em geral, ajustam-se modelos não-lineares a um conjunto de dados com a finalidade de predizer a variável dependente para valores da variável independente e, principalmente, a possibilidade que eles oferecem para a interpretação prática ou biológica das estimativas dos parâmetros.

Quando o crescimento apresenta um comportamento característico de forma a identificar ciclos, os quais permitem dividir a curva em várias fases,

torna-se necessário adotar modelos de crescimento multifásicos, por contemplarem parâmetros exclusivos para cada fase. Esta situação é muito comum quando se tem um efeito sazonal, o qual, em estudos de curvas de crescimento de bovinos, pode ser caracterizado pela época seca. A ausência de chuvas, com impacto nas pastagens, restringe o crescimento por algum período de tempo, porém, este volta a seguir sua trajetória com a mudança de estação. Na realidade, o que se faz é considerar, em um único modelo, dois ou mais submodelos, cada um com o objetivo de explicar uma determinada fase do crescimento.

A heterogeneidade das variâncias pode estar presente em estudos de curva de crescimento, uma vez que a variância tende a acompanhar a média dos pesos por idade. Além disso, os erros, geralmente, não são independentes, uma vez que observações longitudinais são tomadas no mesmo indivíduo, necessitando, assim, de procedimentos alternativos, como a modelagem da estrutura de erros por meio de processos auto-regressivos.

O objetivo deste trabalho foi comparar modelos não-lineares multifásicos ponderados aplicados ao estudo de curvas de crescimento de fêmeas Hereford e modelar a estrutura de erros inerente a cada ajuste.

2 REFERENCIAL TEÓRICO

2.1 A raça Hereford

A raça Hereford, originária da Inglaterra e introduzida no Brasil no início do século XX, através dos países do Prata, pelo estado do Rio Grande do Sul, apresenta, em nosso meio, um biótipo variante, em resposta à necessidade de adaptação à realidade climática subtropical brasileira.

Os animais da raça Hereford se caracterizam por ter um esqueleto forte e boa massa muscular. Quando mantidos em boas condições alimentares, chegam ao peso ideal de abate com idade entre 20 e 26 meses, em média. A fêmea é precoce e produz terneiros fortes e saudáveis, entrando em ciclo reprodutivo, em média, aos 20 meses, até mesmo em regimes de baixa qualidade alimentar. A busca de mais terneiro (bezerro) com menos touro e mais peso em novilho jovem, passa, inquestionavelmente, pelo Hereford (Associação Brasileira de Hereford e Braford, 2006).

De acordo com Mazzini (2001), entre as principais habilidades, quase que exclusivas, que comprovam a versatilidade e eficiência da raça Hereford destacam-se:

- adaptação aos mais diversos ambientes e sistemas de produção devido à docilidade e rusticidade;
- índice de fertilidade dos mais altos da espécie, quando favorecido com manejo e alimentação adequados;
- excepcional ganho de peso a pasto, não sendo raros novilhos de 450 kg aos 18-24 meses;
- nos cruzamentos com outras raças, especialmente as zebuínas, é preponderante;

- a raça mais cosmopolita do mundo, o que facilita genética abundante e qualificada;

- altamente lucrativa para criadores, invernadores e frigoríficos, graças ao insuperável índice de carcaça, entre as raças européias.

Segundo a Associação Brasileira de Hereford e Braford, responsável pela seleção e registro dos produtos desta raça, o peso mínimo das novilhas com idade de 2 a 2 anos e meio é de 320 kg de peso vivo.

2.2 Curvas de crescimento

Segundo Fitzhugh Jr. (1976), uma curva sigmóide descrevendo uma seqüência de medidas de tamanho, freqüentemente peso corporal, sugere o termo “curva de crescimento” ou “curvas tamanho-idade”. Este tipo de dado pode ser caracterizado de três formas: estático, seccional-cruzado e longitudinal. No tipo estático, para um determinado grupo de animais com mesma idade ou estágio de desenvolvimento, o tamanho é observado uma única vez em cada animal. No tipo seccional-cruzado, embora cada indivíduo seja pesado apenas uma vez, assim como no tipo estático, as mesmas medidas são feitas em outras idades em outros indivíduos vindos de amostras da mesma população. Por fim, no tipo longitudinal, todas as medidas utilizadas são obtidas do mesmo animal, em todas as idades avaliadas. Este último tipo de dados abrange todas as informações contidas nos dois primeiros tipos.

O mesmo autor destaca que os principais objetivos no ajuste de curvas de crescimento são descritivos, de modo que a informação contida numa seqüência de pontos tamanho-idade é reduzida em relativamente poucos parâmetros que tenham interpretação biológica e preditivos, pois os parâmetros da curva de crescimento são utilizados para predizer taxas de crescimento, necessidades alimentares, respostas à seleção, peso à maturidade e graus de

maturidade. Nesse sentido, as curvas de crescimento refletem a relação entre a idade do animal e o seu impulso de crescimento e maturidade, sendo importantes para pesquisas e recomendações sobre eficiência de produção, contribuindo, dessa maneira, para aumentar o lucro do produtor.

As funções de crescimento são capazes de condensar informações de dados de peso - idade de todo o período de vida de um animal em um conjunto de parâmetros biologicamente interpretáveis (Laird & Howard, 1967). Este fato, associado às características produtivas dos animais, pode ser uma alternativa para programas de seleção, visando à precocidade com maior peso e melhor qualidade de carcaça (Souza & Bianchini Sobrinho, 1994).

O interesse pelas curvas de crescimento vem aumentando nos últimos anos, principalmente pelo desenvolvimento de novas técnicas computacionais que permitem maior rapidez e precisão das análises e também de maior necessidade de se prever informações sobre um rebanho (Silva et al., 2001).

É cada vez mais comum o uso de modelos não-lineares em seus parâmetros para ajustar relações de peso-idade durante a vida. A função de Richards pode ser vista como uma forma geral indeterminada, pois representa um número infinito de casos específicos determinados (Tabela 1). Dentre eles, têm-se: Brody (Brody, 1945), Logística, Gompertz (Laird & Howard, 1967) e Bertalanffy (Bertalanffy, 1957). Em ambientes de clima temperado, o uso desses modelos é eficiente para descrever o crescimento de fêmeas de algumas raças taurinas (Brown et al., 1976; Perotto et al., 1992).

De acordo com Silva et al. (2001), esses modelos não-lineares apresentam dois parâmetros interpretáveis biologicamente e um outro que se identifica como uma constante matemática. O parâmetro A, definido como peso assintótico ou peso adulto, representa a estimativa de peso à maturidade, independente de flutuações de pesos devido a efeitos genéticos e ambientais. Um outro parâmetro, k, corresponde ao índice de maturidade ou à estimativa de

precocidade de maturidade e determina a eficiência do crescimento de um animal. Quanto maior for o valor desse parâmetro, mais precoce é o animal e vice-versa. O parâmetro B é denominado de parâmetro de integração ou interceptação com o eixo y, não possui significado biológico e é utilizado apenas para adequar o valor inicial do peso vivo, fazendo com que a curva passe pela origem quando $y \neq 0$ e/ou $t \neq 0$. Do ponto de vista biológico, o produto entre os parâmetros “B” e “k” pode ser interpretado biologicamente como índice de maturidade (Koenen & Groen, 1996).

TABELA 1 – Equações para os casos especiais da função de Richards.

Função	Equações	M
Brody	$A(1-Be^{-kt})$	1
Von Bertalanffy	$A(1-Be^{-kt})^3$	3
Logística	$A(1+Be^{-kt})^{-1}$	-1
Gompertz	$Aexp(-Be^{-kt})$	∞
Richards	$A(1-Be^{-kt})^M$	Variável

Fonte: Fitzhugh Jr. (1976) citado por Mazzini (2001).

O modelo Richards apresenta um parâmetro a mais que os outros. Esse parâmetro “M” refere-se ao ponto de inflexão da curva e determina o grau de maturidade no ponto de inflexão. Freitas & Costa (1983), citados por Rodrigues et al. (1992), explicam que o ponto de inflexão ocorre quando a alteração no crescimento é máxima, ou seja, quando os acréscimos da taxa de crescimento diário, em função da idade, passam de crescentes para decrescentes.

Comparando curvas de crescimento, Vieira & Mischon (1976) ressaltaram a importância das funções logística e de Gompertz em várias

aplicações biológicas. Disseram, ainda, que, mesmo tendo características interessantes, a função de Gompertz não é tão conhecida como a logística.

Brown et al. (1972), citados por Mazzini (2001), utilizaram a função Brody para obter estimativas do peso assintótico e da taxa de maturidade em animais Hereford e Angus, encontrando uma correlação negativa entre os dois parâmetros (A e k). Os animais da raça Hereford apresentaram maior estimativa do peso adulto (A), acompanhada de menor estimativa da taxa de maturidade (k), do que os animais da raça Angus.

Denise & Brinks (1985), analisando as mesmas raças acima, compararam as funções de Brody e Richards em relação à qualidade do ajuste dos parâmetros da curva de crescimento e obtiveram um melhor resultado para a função de Richards, embora a de Brody tenha sido mais rápida e mais barata computacionalmente. Os autores ainda relataram que a baixa qualidade no ajuste das curvas se deve ao fato de que algumas fêmeas não tiveram seu peso ao nascer mensurado.

O estudo realizado por Bergamasco et al. (2001), que comparou os modelos logístico, Brody e Gompertz, para a descrição de fêmeas da raça Holandesa do nascimento aos 2 anos de idade, demonstrou que, apesar de todos os modelos terem se ajustado bem aos dados, o logístico apresentou melhor qualidade de ajustamento, enquanto que os outros dois superestimaram o valor do peso assintótico.

Em estudos de crescimento de fêmeas Holandesas e seus cruzamentos, Perotto et al. (1992) concluíram que a função logística subestima o parâmetro peso adulto, a função Brody superestima e as funções Gompertz e Richards apresentam estimativas mais realistas.

O modelo de Richards ajustou-se muito bem aos dados num trabalho realizado por Perotto et al. (1997), em que foram avaliadas as curvas de

crescimento de fêmeas Guzerá, Gir e mestiças Holandês x Guzerá e Holandês x Gir.

Nobre et al. (1987) compararam os intervalos entre as pesagens de animais Nelores em relação ao ajuste das funções de crescimento e observaram não haver diferenças significativas no ajuste quando utilizadas pesagens mensais, bimestrais e trimestrais.

Quaas (1983) estudou o crescimento de 906 vacas Hereford por 5 anos e concluiu que pesagens semestrais apresentavam uma variação significativa para a taxa de maturidade, se comparadas com pesagens mensais.

Na maioria dos estudos de curvas de crescimento, algumas considerações estatísticas importantes não são levadas em consideração, tais como a heterogeneidade de variância dos pesos no tempo, decorrentes do aumento da idade, o que alguns autores definiram como “distúrbios de regressão” e a existência de autocorrelação entre os resíduos do ajuste, tendo em vista que os dados são tomados longitudinalmente em cada animal (Mazzini et al., 2005). Caso estas estatísticas sejam ignoradas, pode ocorrer a obtenção de estimativas viesadas (Pasternak & Shalev, 1994) e a subestimação das variâncias dos parâmetros, respectivamente (Souza, 1998).

Em estudo de curvas de crescimento de raças zebuínas, Elias (1998) comparou cinco funções diferentes, ajustando-as com e sem ponderação pelo inverso da variância dos pesos. Ao final do estudo, concluiu que a utilização da ponderação promoveu uma considerável redução na variabilidade das estimativas dos parâmetros.

Braccini Neto et al. (1996) constataram o crescimento da variância exponencialmente com a média dos pesos por idade, indicando, como uma possível solução, a transformação logarítmica nos dados.

Diversos trabalhos estudam curvas de crescimento com outras espécies, destacando-se: McManus (2003), no estudo de ovinos Bergamácia; Dutra Jr. et

al. (2001), estudando fêmeas suínas; Guedes et al. (2004), no estudo das curvas de crescimento de cordeiros das raças Santa Inês e Bergamácia.

Pode acontecer de algumas funções serem ajustadas, mas seus parâmetros não apresentarem interpretação biológica. Para Koops (1986), existe uma clara inadequabilidade no uso de um modelo “sigmóide” simples para descrever o crescimento corporal e altura para humanos, uma vez que, aos dois anos de idade, por exemplo, já se atingiu metade da idade adulta.

A necessidade de “fases” na curva total de crescimento deu-se a partir do fato de que diferentes partes ou componentes do corpo têm diferentes razões de crescimento (Palsson, 1955). Para ele, a ordem em que essas partes ou componentes atingem o crescimento máximo é: primeiro os sistemas nervosos, seguidos do esqueleto ósseo, músculos e, por último, os depósitos de gordura. Para analisar a composição do corpo por meio da função multifásica, deve-se assumir que diferentes componentes do corpo têm ganho máximo em diferentes idades.

Peil & Helwin (1981) propuseram uma função de crescimento na qual cada ciclo era baseado em uma curva logística. Bock et al. (1973) combinaram duas funções logísticas em um “modelo logístico duplo”, no intuito de modelar o crescimento humano individual, em altura, desde o nascimento à idade adulta.

2.3 Curvas de crescimento multifásicas

Muitos modelos são utilizados para descrever as relações peso-idade dos animais. As funções mais utilizadas para realizar esse ajuste são as funções não-lineares, pois seus parâmetros apresentam interpretação biológica. Dentre essas funções não-lineares, a mais usada na literatura de curva de crescimento é a “função logística”, que pode ser expressa por:

$$Y_t = A(1 + B \exp(-Kt))^{-1} + e_t$$

em que:

Y_t : valor da variável dependente no tempo t ;

A: valor assintótico ou peso adulto;

B: constante de integração;

K: taxa de maturidade;

e_t : erro aleatório, iid $N(0, \sigma^2)$.

Em estudos de crescimento animal, as curvas de crescimento de ciclo único são as mais utilizadas (Koops, 1986). Porém, há dificuldade em se explicar o crescimento de um ser vivo por meio de equações com poucos parâmetros, pois existe uma inadequabilidade de um simples modelo “sigmóide”.

Primeiramente, a função logística foi indicada para o estudo do crescimento de populações humanas por Verhulst (1838), conforme Hoffmann & Vieira (1998), o qual a denominou de “curva logística”. Mais tarde, Pearl & Reed utilizaram a mesma curva para descrever o crescimento da população americana, de 1870 a 1910.

Com o objetivo de ajustar muitos ciclos simultaneamente, foi feita a combinação de duas funções logísticas em um “modelo logístico duplo”.

A função logística multifásica pode ser representada por:

$$Y(t) = \frac{\sum_{i=1}^k \alpha_i}{\{1 + \exp[-\gamma_i(t - d_i)]\}} + \varepsilon_t \quad (\text{Tornero, 1996}).$$

com $\alpha > 0$, $\gamma > 0$, $t = 0, 1, \dots$

e o estimador da assíntota é dado por: $\hat{\alpha} = \sum_{i=1}^k \hat{\alpha}_i$.

em que a interpretação dos parâmetros é a mesma do modelo monofásico, porém, o parâmetro A do modelo anterior é representado por α , o parâmetro B é dado por $\exp\{\gamma * d\}$, com $\gamma = k$. O parâmetro d representa a abscissa do ponto de inflexão da curva.

Outra função não-linear também utilizada para descrever a relação peso-idade dos animais é a função Gompertz, que é dada por:

$$Y = \exp(\alpha - \beta\gamma^t)$$

com $\alpha > 0$, $\beta > 0$, $0 < \gamma < 1$, $t \geq 0$

sendo α , β e γ parâmetros, em que e^α é o valor assintótico ou peso adulto de

Y, γ o parâmetro de crescimento e $-\frac{\ln(\beta)}{\ln(\gamma)}$ é a abscissa do ponto de inflexão.

Segundo Mazzini (2001), a função de Gompertz foi estudada por Gompertz, Winsor e Laird para descrever a taxa de mortalidade numa população. A aplicação em modelos sigmodais de crescimento foi sugerida por Wright, citado por Duarte (1975).

O modelo gompertz multifásico é expresso por:

$$Y(t) = \sum_{i=1}^k \exp(\alpha - \beta\gamma^t) + \varepsilon \quad (\text{Tornero, 1996}).$$

com $\beta > 0$, $0 < \gamma < 1$, $t = 0, 1, \dots$

e o estimador da assíntota dado por: $\hat{\phi} = \sum_{i=1}^k \exp(\alpha_i)$

Koops (1986) considerou a existência de fases, gerou modelos multifásicos e estimou os parâmetros simultaneamente. Mostrou, ainda, a sua aplicação em diferentes espécies, embora essa teoria seja completamente aceita apenas na espécie humana. O mais usual em outras espécies é ajustar modelos de crescimento de fase única.

Robison (1976), num estudo de curvas de crescimento com suínos, cita argumentos biológicos para a existência de fases. Considera o crescimento como uma combinação de processos físicos como hiperplasia e hipertrofia, os quais são responsáveis pela maturidade fisiológica, pois induzem o desenvolvimento volumétrico e as mudanças químicas.

A fim de descrever as curvas de ganho médio de peso corporal de quatro linhagens e estimar o número de fases, bem como os valores dos parâmetros em cada fase, Grossman & Koops (1988) examinaram o crescimento de galinhas utilizando uma função multifásica.

Segundo Koops & Grossman (1991), no estudo da função multifásica, os parâmetros podem ser agrupados ou substituídos por constantes, uma vez que se deseja um modelo o mais parcimonioso possível e um melhor ajuste. Neste caso, tem-se a função multifásica modificada. Estes autores mostraram que uma função de múltiplas fases é uma boa alternativa à função de fase única e uma vantagem importante é a de não ter que selecionar a “melhor” função de fase única. Além disso, a função multifásica pode ser utilizada em quase todos os casos, mesmo contendo um maior número de parâmetros, pois este problema pode ser superado pelo fato de as estimativas desses parâmetros serem menos correlacionadas do que aquelas para uma função de fase única. Dentre as funções estatísticas que podem ser usadas para descrever fases de crescimento, os mesmos autores citam as funções multifásicas aditivas e indicam como tais as funções de Gompertz e logística, tendo a primeira sido usada somente por Courtis, em 1937, enquanto que a logística vem sendo usada por vários autores.

Weigel et al. (1991) utilizaram modelos difásicos, trifásicos e difásicos modificados, sem e com estrutura de erros autocorrelacionados, em curvas de lactação para vacas leiteiras. Concluíram que a modificação melhorou o ajuste no início da lactação e que o modelo difásico modificado foi superior ao modelo trifásico, em relação à magnitude e correlação dos resíduos. Observaram, ainda, que a introdução da estrutura de erros autocorrelacionados pode ser útil em curvas de lactação.

Abordagem diferente foi feita por Adams & Bell (1980) que, ao contrário dos modelos multifásicos já citados, os quais usam sempre a mesma função em todas as fases, apresentaram um modelo para a produção de ovos em galinhas poedeiras, composto da adição de uma função assintótica e outra linear.

Para selecionar o modelo mais adequado dentre os modelos monofásico, difásico e outros, os artigos que tratam de ajustes de funções multifásicas para dados de crescimento têm apresentado a estatística de Durbin-Watson. Seguindo essa linha, tem sido escolhido o modelo que gera resíduos menos autocorrelacionados (Durbin-Watson próximo de 2,0).

No estudo de crescimento de vacas Holandesas e outros animais, Tornero (1996) trabalhou com modelos multifásicos, com estrutura de erros EI e AR (1). Ao final do estudo, a autora optou pelo modelo logístico difásico para descrever o crescimento dos animais. Na comparação entre os modelos logísticos mono e difásicos, o segundo foi mais eficiente, de acordo com as estimativas das variâncias dos erros. A autora verificou, ainda, que o modelo monofásico com estrutura de erros EI superestimou os pesos ao nascer, em média, 40 kg, enquanto que, no modelo difásico AR (1), essa superestimação foi de 3 kg. Sendo assim, concluiu que o modelo logístico difásico com estrutura de erros AR (1) é suficiente em termos de ajuste e tem as qualidades necessárias para fazer inferências de “parâmetros zootécnicos”.

2.4 Modelos não-lineares

Uma atividade muito comum em análises estatísticas é a avaliação da relação entre uma variável dependente e uma ou mais variáveis independentes. Essa análise pode ser feita por meio dos modelos de regressão, os quais se dividem em duas classes distintas: os lineares e os não lineares.

Draper & Smith (1998) classificam os modelos como:

- A) modelos lineares: aqueles que são lineares em relação aos parâmetros, isto é, as derivadas parciais não dependem de parâmetros, logo:

$$\frac{\partial}{\partial \theta_j} f_i(X, \theta) = g(X)$$

com $i=1, 2, \dots, n$ e $j=1, 2, \dots, p$;

em que n é o número de observações e p o número de parâmetros do modelo;

- B) modelos linearizáveis: aqueles que podem ser transformados em lineares por meio de alguma transformação. Para o modelo

$$Y = a^X \cdot e$$

no qual o erro é dito multiplicativo, aplicando-se logaritmo à igualdade, tem-se:

$$\ln Y = \ln(a^X \cdot e)$$

$$\ln Y = \ln a^X + \ln e$$

$$\ln Y = X \ln a + \ln e$$

sendo $Z = \ln Y$; $b = \ln a$; $e^* = \ln e$ o modelo fica:

$$Z = bX + e^* \text{ que é linear, pois}$$

$$\frac{\partial f}{\partial b} = X = g(X), \text{ logo o modelo é dito linearizável;}$$

- C) modelos não lineares: aqueles que não se enquadram nos casos A e B

$$Y = a^X + e$$

no qual o erro é dito aditivo e não existe transformação capaz de tornar o modelo linear, e as derivadas parciais dependem de parâmetros:

$$\frac{\partial f}{\partial a} = Xa^{X-1} = g(X, a), \text{ portanto, o modelo é dito não linear.}$$

No ajuste de um modelo, seja ele linear ou não-linear, a um conjunto de dados, deseja-se um dos propósitos: 1) obter um “bom ajuste” para fins de representação, 2) prever os valores da variável resposta Y para valores fixos da variável independente x e estabelecer intervalos de confiança e 3) comparar os resultados de diferentes condições experimentais usando, e ou interpretando, os parâmetros (Tornero, 1996).

Em um modelo linear, a estimação dos parâmetros pode ser feita pelo método dos mínimos quadrados, cujo objetivo é tomar como valores dos parâmetros aqueles que tornam mínima a soma dos quadrados dos desvios entre cada valor observado de Y e sua estimativa.

Podem ocorrer alguns problemas que compliquem a estimação dos parâmetros. Um deles é a heterocedasticidade dos erros, ou seja, quando a parte aleatória do modelo não tem variância constante. Diante deste fato, ou se procede a uma transformação com a finalidade de estabilização da variância ou emprega-se o método dos mínimos quadrados ponderados para a estimação dos parâmetros, uma vez que, para cada valor da variável independente, a precisão é diferente.

Um outro problema ocorre quando os erros não são independentes, mas, sim, autocorrelacionados. Neste caso, é necessário utilizar o método dos mínimos quadrados generalizados. O que ocorre, na verdade, é que os métodos dos mínimos quadrados, ordinários e ponderados, são casos particulares dos mínimos quadrados generalizados. Estes métodos estão descritos na seção 3.2.

Segundo Tornero (1996), os modelos intrinsecamente não-lineares - os quais nenhuma transformação é capaz de tornar lineares – trazem dificuldades por necessitar do método de mínimos quadrados iterativo para a estimação dos parâmetros; mesmo assim, em média, os estima por excesso ou por falta, isto é, com vício.

Nos modelos não-lineares, as qualidades existentes nos estimadores lineares são alcançadas assintoticamente, isto é, com o aumento do tamanho da amostra. Para amostras finitas, o emprego do método dos mínimos quadrados gera estimadores dos parâmetros que não são combinações lineares da variável dependente (Y), tendenciosos, sem variância mínima e apresentam propriedades desconhecidas. Mesmo que os erros no modelo tenham distribuição normal, os estimadores, que nesse caso também são de máxima verossimilhança, não têm distribuição normal. A teoria assintótica demonstra que os estimadores de máxima verossimilhança tornam-se menos tendenciosos e aproximam-se da distribuição normal com variância mínima à medida que a amostra aumenta.

Para alguns modelos não-lineares, mesmo para amostras pequenas, as propriedades assintóticas são quase que alcançadas e, para outros, mesmo com amostras muito grandes, em termos práticos, essas propriedades estão longe de serem alcançadas.

A literatura propõe vários métodos iterativos para a obtenção das estimativas de mínimos quadrados dos parâmetros de um modelo de regressão não-linear. Os mais utilizados são: o método de Gauss-Newton, o método “Steepest-Descent” ou método do Gradiente e o método de Marquardt, os quais fazem uso das derivadas parciais da função esperança $f(x_i; \theta)$ com relação a cada parâmetro. Há também outro método, bastante similar ao de Gauss-Newton, exceto pelo fato de não exigir a especificação das derivadas parciais da função esperança, o qual é chamado método de DUD, do inglês *doesn't use derivatives* (Mazuchelli & Achcar, 1997). Um outro método iterativo bastante

utilizado é o de Gauss-Newton modificado ou método de linearização, que usa o resultado de mínimos quadrados lineares em uma sucessão de passos, convertendo o problema de uma regressão não-linear para uma série de regressões lineares. Para isso faz uma expansão em série de Taylor até 1º grau e, depois, minimiza a soma de quadrados residual (Ogliari, 1998).

Usando médias de dados de crescimento ponderal, Machado (1980) estimou os parâmetros da função Logística utilizando o método dos mínimos quadrados ordinários para chegar às equações normais e, em seguida, obteve a solução do sistema por meio do processo iterativo de Newton.

Num estudo sobre curvas de crescimento de vacas zebuínas, Elias (1998) comparou quatro processos iterativos de estimação de parâmetros de modelos não-lineares: Gauss-Newton, Marquardt, DUD e Newton e chegou à conclusão de que todos apresentam alta taxa de convergência, com resultados semelhantes para cada modelo; as diferenças nas estimativas ocorrem, principalmente, no início e no final da vida do animal. Ao final do estudo, os métodos de Marquardt e Gauss-Newton forneceram resultados quase idênticos, apresentando alta taxa de convergência e rapidez no processamento dos dados em todos os modelos estudados.

Segundo Mazuchelli & Achcar (1997), a rapidez na convergência depende de dois fatores básicos: da complexidade do modelo em estudo e, principalmente, da qualidade dos valores iniciais, necessários em qualquer método iterativo.

Podem-se estimar os valores iniciais utilizados no estudo por meio de vários procedimentos. Dentre eles destacam-se: regressão linear via método dos mínimos quadrados ordinários; análise da função esperada e de suas derivadas com respeito aos parâmetros; transformação da variável resposta e ou da variável tempo, tentando transformar a função original em função mais simples; redução da dimensão do vetor de parâmetros por imposição de valores para

alguns deles e estimação dos demais. A escolha do procedimento a ser adotado será de acordo com a combinação função esperada e dados (Torner, 1996).

Silveira Jr. & Machado (1990), Silveira Jr. et al. (1993) e Silveira Jr. et al. (1990), em trabalhos com curvas de crescimento, tomaram as diferenças entre as raízes cúbicas de dois períodos consecutivos como valores iniciais das estimativas no processo iterativo.

Os modelos não-lineares possuem uma grande vantagem: geralmente seus parâmetros têm significado. Esta é uma maneira de conferir a adequação dos valores iniciais propostos, ou seja, analisando o significado zootécnico desses parâmetros pode-se eliminar uma proposta de valor inicial.

2.5 Autocorrelação

Geralmente, os modelos básicos de regressão assumem que os erros são independentes. Em curvas de crescimento, em que o mesmo animal é pesado em vários tempos diferentes, a hipótese de independência dos erros não é apropriada. Essa dependência é caracterizada pela correlação entre o erro relativo a um período e o erro da observação anterior.

Segundo Mazzini (2001), o uso do método dos quadrados mínimos ordinário, nos casos de regressão com erros autocorrelacionados positivamente têm importantes conseqüências, como: os estimadores dos coeficientes não são tendenciosos, apesar de levarem à subestimação da variância, podendo ser completamente ineficientes; o quadrado médio do resíduo pode subestimar a variância dos erros; em conseqüência, o desvio padrão calculado de acordo com o método dos mínimos quadrados ordinários pode subestimar o verdadeiro desvio padrão do coeficiente de regressão estimado, invalidando os intervalos de confiança e testes usando as distribuições t e F.

A fim de avaliar a qualidade e as características do ajuste da função logística monofásica e difásica, com estrutura de erros independentes e autorregressivos de primeira e segunda ordem, AR (1) e AR (2), em dados simulados e reais de vacas leiteiras, Medeiros et al. (2000) verificaram que a introdução da estrutura de autocorrelação nos erros melhorou o ajuste, minimizando o problema das medidas repetidas.

Analisando dados de crescimento ponderal de vacas leiteiras, Kroll & Tornero (1994) ajustaram o modelo Gompertz e concluíram que o ajuste, sem considerar a autocorrelação, explicou até 25% a mais da variação total do que o modelo com erros autocorrelacionados.

Num estudo de crescimento de vacas leiteiras, comparando os modelos Mitscherlich, Gompertz e logístico com estruturas de erros independentes e auto-regressivos de primeira ordem, Kroll (1990) verificou que o processo autorregressivo deve ser preferido em estudos dessa natureza.

Elias (1998) concluiu que, embora a ponderação pelo inverso da variância melhore a qualidade das estimativas, não atende a todas as especificações, inclusive a condição de independência dos erros, o que implica na necessidade de utilização de procedimentos alternativos.

Mazzini et al. (2003) e Silva et al. (2002) utilizaram a ponderação pelo inverso da variância dos pesos, juntamente com a estrutura de erros autorregressivos, verificando que houve melhor qualidade de ajuste para as funções de crescimento nas raças Hereford e Nelore, respectivamente.

3 METODOLOGIA

3.1 Dados e modelos estudados

Os dados utilizados neste trabalho provêm de animais da raça Hereford, fêmeas, nascidos nos anos de 1999 a 2001, na Agropecuária Recreio, situada no município de Bagé, estado do Rio Grande do Sul. As pesagens consideradas neste estudo foram coletadas de 55 animais, pesados de 15 em 15 dias e medidos em quilograma por animal, desde o nascimento até, aproximadamente, 675 dias de idade.

Os modelos utilizados foram o logístico difásico com estrutura de erros independentes, logístico difásico com estrutura de erros AR (1) e logístico difásico com estrutura de erros AR (2), os quais são dados respectivamente por:

$$Y_t = \frac{a_1}{(1+\exp\{-k_1*(t-d_1)\})} + \frac{a_2}{(1+\exp\{-k_2*(t-d_2)\})} + e_t ;$$

$$Y_t = \frac{a_1}{(1+\exp\{-k_1*(t-d_1)\})} + \frac{a_2}{(1+\exp\{-k_2*(t-d_2)\})} + e_t + \phi_1 e_{t-1} ;$$

$$Y_t = \frac{a_1}{(1+\exp\{-k_1*(t-d_1)\})} + \frac{a_2}{(1+\exp\{-k_2*(t-d_2)\})} + e_t + \phi_1 e_{t-1} + \phi_2 e_{t-2}$$

sendo:

Y_t : o peso corporal, em kg;

t : o tempo, em dias;

a : a estimativa do peso à maturidade;

k : a taxa de maturidade;

d : a abscissa do ponto de inflexão da curva;

e_t : o resíduo no tempo t;

e_{t-1} : o resíduo no tempo t-1;

e_{t-2} : o resíduo no tempo t-2.

Além dos modelos logísticos, utilizaram-se os modelos Gompertz difásico com estrutura de erros independentes, Gompertz difásico com estrutura de erros AR (1) e Gompertz difásico, com estrutura de erros AR (2), os quais são dados por:

$$Y_t = \exp(a_1 - B_1 K_1^t) + \exp(a_2 - B_2 K_2^t) + e_t;$$

$$Y_t = \exp(a_1 - B_1 K_1^t) + \exp(a_2 - B_2 K_2^t) + e_t + \phi_1 e_{t-1};$$

$$Y_t = \exp(a_1 - B_1 K_1^t) + \exp(a_2 - B_2 K_2^t) + e_t + \phi_1 e_{t-1} + \phi_2 e_{t-2}.$$

sendo:

Y_t : o peso, em kg;

t : o tempo, em dias;

e^a : o valor assintótico de Y;

K : o parâmetro de crescimento;

$-\frac{\ln(B)}{\ln(K)}$: a abscissa do ponto de inflexão;

e_t : o resíduo no tempo t;

e_{t-1} : o resíduo no tempo t-1;

e_{t-2} : o resíduo no tempo t-2.

3.2 Estimação dos parâmetros de modelos não-lineares

3.2.1 Método dos quadrados mínimos ordinários

Gallant (1987) afirma que o método dos quadrados mínimos é utilizado na estimação dos parâmetros em modelos não-lineares, da mesma maneira que em modelos lineares. Seja uma equação de regressão não-linear

$$Y_t = f(X_t, \theta) + e_t$$

em que $t = 1, 2, 3, \dots, n$.

Assumindo-se que $E(e_t) = 0$, $\text{Var}(e_t) = \sigma^2$ e $e_t \sim N(0, \sigma^2)$, esta função pode ser reescrita na forma matricial

$$Y = f(\theta) + e,$$

$$\text{em que: } Y = \begin{bmatrix} Y_1 \\ Y_2 \\ \cdot \\ Y_n \end{bmatrix}; f(\theta) = \begin{bmatrix} f(X_1, \theta) \\ f(X_2, \theta) \\ \cdot \\ f(X_n, \theta) \end{bmatrix}; e = \begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \\ \cdot \\ e_n \end{bmatrix}.$$

A estimativa para θ é dada pelo vetor $\hat{\theta}$ que minimiza a soma de quadrados do resíduo,

$$S(\theta) = \sum_{t=1}^n [Y_t - f(X_t; \theta)]^2$$

Escrevendo-se $S(\theta)$ na forma matricial, tem-se:

$$S(\theta) = [Y - f(\theta)]' [Y - f(\theta)]$$

Derivando a $S(\theta)$ em relação à θ , tem-se:

$$\frac{\partial S(\theta)}{\partial \theta'} = \frac{\partial}{\partial \theta'} [Y - f(\theta)]' [Y - f(\theta)]$$

Fazendo

$$\frac{\partial}{\partial \theta'} f(\theta) = F(\theta),$$

tem-se

$$\frac{\partial S(\theta)}{\partial \theta'} = -2[Y - f(\theta)]' F(\theta)$$

Igualando-se a equação acima a zero, obtém-se:

$$-2[Y - f(\hat{\theta})]' F(\hat{\theta}) = 0$$

$$[Y - f(\hat{\theta})]' F(\hat{\theta}) = 0$$

$F'(\hat{\theta})[Y - f(\hat{\theta})] = 0$, sistema de equações normais (SEN) não-linear.

Substituindo-se $F(\hat{\theta})$ por X, a equação fica

$$X'[Y - f(\hat{\theta})] = 0$$

$$X'Y - X'f(\hat{\theta}) = 0$$

$$X'f(\hat{\theta}) = X'Y \quad (SEN) \text{ não-linear.}$$

Fazendo-se no SEN $[Y - f(\hat{\theta})] = \hat{e}$, tem-se

$$X'\hat{e} = 0.$$

Em regressão linear, o erro é ortogonal às colunas da matriz X; no caso da regressão não-linear, o erro é ortogonal às colunas do jacobiano de $f(\theta)$, estimado em $\theta = \hat{\theta}$.

Não existe uma solução explícita para o SEN não-linear; as soluções são obtidas por métodos iterativos.

3.2.2 Método dos quadrados mínimos ponderados

Segundo Hoffman & Vieira (1998), em presença de heterogeneidade de variâncias, o método dos quadrados mínimos ponderados é mais adequado por fornecer estimadores não tendenciosos e de mínima variância.

Seja o modelo linear

$$Y = X\beta + u,$$

supondo-se que $\varepsilon \sim N(0; V\sigma^2)$, em que \mathbf{V} é uma matriz diagonal, positiva definida, que representa as variâncias associadas a cada u_i , com $E(\mathbf{u}) = 0$ e

$$E(u'u) = V\sigma^2 = \begin{bmatrix} V_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & V_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & V_n \end{bmatrix} \sigma^2$$

O fato de serem nulos os elementos fora da diagonal principal da matriz \mathbf{V} significa que é válida a pressuposição de independência das várias observações, isto é, $E(u_j u_h) = 0$ para $j \neq h$.

Define-se uma matriz diagonal Λ , cujos elementos são dados por

$$\lambda_j = \frac{1}{\sqrt{V_j}} \text{ ou seja,}$$

$$\Lambda = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{bmatrix}$$

Dessa forma, tem-se que

$$\Lambda\Lambda = V^{-1} \quad e \quad V = \Lambda^{-1}\Lambda^{-1}$$

Pré-multiplicando cada um dos termos de $Y = X\beta + u$ por Λ , obtém-se o modelo:

$$\Lambda Y = \Lambda X\beta + \Lambda u$$

Portanto, percebe-se que, no modelo $Y = X\beta + u$, o vetor de erros é dado por $\varepsilon = \Lambda u$. Assim, uma vez que $E(u) = 0$, tem-se que $E(\varepsilon) = 0$ e, ainda,

$$E(\varepsilon\varepsilon') = E(\Lambda u u' \Lambda) = \Lambda V \Lambda \sigma^2$$

de acordo com

$$V = \Lambda^{-1} \Lambda^{-1},$$

$$E(\varepsilon \varepsilon') = \Lambda \Lambda^{-1} \Lambda^{-1} \Lambda \sigma^2 = I \sigma^2$$

O modelo $\Lambda Y = \Lambda X \beta + \Lambda u$ é homocedástico. O método dos quadrados mínimos ponderados fornece o SEN dado por

$$X' V^{-1} X \hat{\beta} = X' V^{-1} Y$$

A solução do SEN leva ao estimador

$$\hat{\beta} = (X' V^{-1} X)^{-1} X' V^{-1} Y.$$

3.2.3 Método dos quadrados mínimos generalizados

Para Crocci (1984) e Hoffman & Vieira (1998), o método dos quadrados mínimos generalizados é mais eficiente do que o método dos quadrados mínimos ponderados e ordinários, na presença de heterogeneidade de variâncias e autocorrelação residual.

Seja o modelo linear

$$Y = X \beta + u$$

supondo-se que $\varepsilon \sim N(0; W \sigma^2)$, em que W é uma matriz simétrica, positiva definida, que representa as variâncias e covariâncias dos erros. Admitindo-se que os erros são autocorrelacionados na forma de um processo auto-regressivo estacionário de primeira ordem AR (1),

$$u_t = \phi_1 u_{t-1} + \varepsilon_t$$

em que $E(\varepsilon_t) = 0, E(\varepsilon_t^2) = \sigma_\varepsilon^2, E(\varepsilon_t \varepsilon_{t-h}) = 0$ se $h \neq 0$.

O modelo u_t será estacionário se

$$-1 \leq \phi_1 \leq +1$$

para $t = 1, 2, \dots, n$.

$$\text{Nessas condições, } \sigma_u^2 = \frac{\sigma_\varepsilon^2}{1 - \phi_1^2} \text{ e } \text{Cov}_u = \frac{\sigma_\varepsilon^2}{1 - \phi_1^2} \cdot \phi_1^h = \sigma_u^2 \phi_1^h.$$

De maneira análoga ao método dos quadrados mínimos ponderados, encontra-se $\hat{\beta}$

$$\hat{\beta} = (X'W^{-1}X)^{-1}X'W^{-1}Y, \text{ em que}$$

$$W = \frac{\sigma_\varepsilon^2}{1 - \phi_1^2} \begin{bmatrix} 1 & \phi_1 & \phi_1^2 & \dots & \phi_1^{n-1} \\ \phi_1 & 1 & \phi_1 & \dots & \phi_1^{n-2} \\ \phi_1^2 & \phi_1 & 1 & \dots & \phi_1^{n-3} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \phi_1^{n-1} & \phi_1^{n-2} & \phi_1^{n-3} & \dots & 1 \end{bmatrix}$$

Se os erros forem autocorrelacionados na forma de um processo autorregressivo estacionário de segunda ordem AR (2) (Moretin & Toloí, 1987),

$$u_t = \phi_1 u_{t-1} + \phi_2 u_{t-2} + \varepsilon_t$$

em que u_t é estacionário se

$$\begin{aligned} \phi_1 + \phi_2 &< 1 \\ \phi_1 - \phi_2 &< 1 \\ -1 &< \phi_2 < 1 \end{aligned}$$

em que ϕ_1 e ϕ_2 são os parâmetros de autocorrelação.

Logo, temos que

$$\sigma_u^2 = \frac{\sigma_\varepsilon^2}{1 - \phi_1 \rho_1 - \phi_2 \rho_2},$$

enquanto as funções de autocorrelação são dadas por

$$\rho_j = \phi_1 \rho_{j-1} + \phi_2 \rho_{j-2}, \quad j > 0,$$

sendo

$$\rho_1 = \frac{\phi_1}{1-\phi_2} \quad e \quad \rho_2 = \frac{\phi_1^2}{1-\phi_2} + \phi_2$$

Outros métodos possíveis são o de médias móveis (MA) e o modelo misto, auto-regressivo e médias móveis (ARMA).

3.3 Processo iterativo

Como visto anteriormente, para o sistema de equações normais (SEN) não-linear não existe uma solução explícita, a qual deve ser obtida por meio de processos iterativos, usando um software estatístico. O procedimento *model* do sistema SAS (SAS/ETS, 1995) utiliza dois métodos iterativos: método de Gauss-Newton e Marquardt.

3.3.1 Método de Gauss-Newton

Considerando o modelo não-linear $Y_i = f(X_i; \theta) + e_i$, a expansão em série TAYLOR é dada por $f(\theta) = f(\theta^0) + F(\theta^0)(\theta - \theta^0)$. Assim, o SEN (não-linear) $X'f(\hat{\theta}) = X'Y$ pode ser escrito como $X'[f(\theta^0) + F(\theta^0)(\theta - \theta^0)] = X'Y$.

Mas, $F(\theta^0)$ é a matriz de derivadas parciais X . Logo, substituindo-se no SEN, obtém-se:

$$X'[f(\theta^0) + X(\theta - \theta^0)] = X'Y$$

Fazendo-se o produto matricial e reagrupando-se os termos semelhantes, encontra-se:

$$\theta - \theta^0 = (X'X)^{-1} X'e$$

Portanto, a fórmula iterativa conhecida como método de Gauss-Newton é dada por:

$$\theta^1 = \theta^0 + (X'X)^{-1}X'e$$

Este processo é repetido colocando-se θ^1 no lugar de θ^0 (vetor de estimativas iniciais) até que algum critério de convergência seja aceito, isto é,

$$\theta^n \rightarrow \hat{\theta}, \text{ em que } n \text{ é o número de vezes que o processo foi repetido.}$$

3.3.2 Método de Marquardt

Marquardt (1963), citado por Mazzini (2001), propõe um método baseado na interpolação entre os métodos de Gauss-Newton (ou “método da série de Taylor”) e o método do gradiente (ou “Steepest Descent”).

A estratégia utilizada consiste na interpolação dos parâmetros de correção δ_{GN} e δ_G , dados por:

$$\delta_{GN} = (X'X)^{-1}X'[Y - f(\theta^0)]$$

$$\delta_G = -X'[Y - f(\theta^0)]$$

Da interpolação entre δ_{GN} e δ_G , resulta:

$$\delta = (X'X + \lambda I)^{-1}X'[Y - f(\theta^0)]$$

em que λ é conhecida como constante de Marquardt. O autor demonstra que:

$$\delta \rightarrow \delta_{GN} \text{ se } \lambda \rightarrow \text{zero}$$

$$\delta \rightarrow \delta_G \text{ se } \lambda \rightarrow \infty$$

logo, o algoritmo de Marquardt é dado por:

$$\theta^1 = \theta^0 + (X'X + \lambda I)^{-1}X'[Y - f(\theta^0)]$$

No processo de estimação, deve-se estabelecer um valor de λ .

Maiores informações sobre a obtenção desta constante podem ser encontradas no SAS/ETS (1995).

3.4 Recursos computacionais

Os ajustes foram realizados por meio do sistema SAS[®] (1995), pelo procedimento *model*, utilizando-se os dados médios e os dados individuais de peso-idade. Utilizou-se este procedimento (proc model) pelo fato de ele permitir ajustar erros auto-regressivos, o que não é permitido no procedimento ‘proc nlin’, geralmente usado nestes casos.

Dentro do procedimento adotado, a macro utilizada para considerar os erros auto-regressivos é dada por:

$\%AR(y, p)$, em que p indica a ordem do modelo.

Como as variâncias dos pesos variam à medida que a idade aumenta, foi necessária a ponderação dos dados pelo inverso dessas variâncias, com o objetivo de considerar a heterogeneidade. Para este ajuste, utilizou-se a opção “weight” do Procedimento *model*.

As estimativas iniciais, necessárias para a obtenção das estimativas dos parâmetros por meio do processo iterativo, foram obtidas na literatura especializada (Mazzini, 2001).

3.5 Comparação entre os modelos

Foram utilizados os seguintes avaliadores de qualidade de ajuste: coeficiente de determinação ajustado (R^2_a), desvio padrão residual (DPR), teste de Durbin-Watson (DW), número de iterações, critério de informação de Akaike (AIC) e o teste F para a comparação de modelos.

3.5.1 Coeficiente de Determinação Ajustado

O coeficiente de determinação R^2 ajustado para o número de parâmetros da regressão foi calculado por:

$$R_{adj.}^2 = \frac{1 - (n - 1)}{(n - p) * (1 - R^2)}$$

em que:

$$R^2 = 1 - \frac{SQR}{SQT};$$

SQR = soma de quadrado do resíduo;

SQT = soma de quadrado total;

n = número de observações utilizadas para ajustar a curva;

p = número de parâmetros na função, incluindo o intercepto.

3.5.2 Desvio padrão residual

A estimativa do desvio padrão residual foi obtida pela expressão:

$$DPR = \sqrt{\frac{QME}{(n - p)}}$$

em que:

QME = quadrado médio do erro;

n = número de observações;

p = número de parâmetros do modelo.

3.5.3 Teste de Durbin-Watson

O teste de Durbin – Watson, o qual indica a autocorrelação de primeira ordem, foi calculado por:

$$DW = \frac{\sum_{t=2}^n (e_t - e_{t-1})^2}{\sum_{t=1}^n e_t^2}$$

sendo:

e_t : o resíduo no tempo t ;

e_{t-1} : o resíduo no tempo $t - 1$.

3.5.4 Critério de informação de Akaike (AIC)

O critério de informação de Akaike (AIC) pode ser representado pela seguinte expressão:

$$AIC = \ln(\hat{\sigma}_{k,l}^2) + \frac{2*(k+l)}{N}$$

sendo:

k : o número de parâmetros;

N : o número total de observações;

$\hat{\sigma}_{k,l}^2$: a variância dos resíduos.

O AIC é usado para comparar modelos não-aninhados ou quando estão sendo comparados três ou mais modelos.

3.5.5 Teste F para comparação de modelos

O Teste F para a comparação de modelos deve ser usado apenas para comparar dois modelos aninhados (encaixados). Se os dois modelos não são aninhados, usa-se o AIC para compará-los (Motulsky & Christopoulos, 2003).

A hipótese nula do teste F é a de que o modelo mais simples (com menos parâmetros) está correto. O aumento do modelo mais complicado (mais parâmetros) é quantificado pela diferença na soma de quadrados. Se o valor-p encontrado para o teste F for menor que 0,05, então, rejeita-se a hipótese nula e conclui-se que o ajuste do modelo mais complicado é significativamente melhor.

O resultado é expresso pela razão:

$$F = \frac{(SQR_{(menor)} - SQR_{(maior)}) / (gl_{(menor)} - gl_{(maior)})}{(SQR_{(maior)} / gl_{(maior)})}$$

em que:

$SQR_{(menor)}$ = soma de quadrados de resíduos do modelo com menor número de parâmetros;

$SQR_{(maior)}$ = soma de quadrados de resíduos do modelo com mais parâmetros;

$gl_{(menor)}$ = grau de liberdade do modelo com menor número de parâmetros;

$gl_{(maior)}$ = grau de liberdade do modelo com maior número de parâmetros;

4 RESULTADOS E DISCUSSÃO

4.1 Derivadas parciais e elementos da matriz $X'X$ para as funções em estudo

As derivadas parciais necessárias à obtenção das matrizes X e $X'X$, foram obtidas por meio do programa Maple 8 (2002).

4.1.1 Função logística

A função logística multifásica pode ser representada por:

$$Y_t = \frac{a_1}{(1+\exp\{-k_1 * (t - d_1)\})} + \frac{a_2}{(1+\exp\{-k_2 * (t - d_2)\})}$$

sendo:

Y : o peso, em kg;

t : o tempo, em dias;

a : a estimativa do peso à maturidade;

k : a taxa de maturidade;

d : a abscissa do ponto de inflexão da curva;

As derivadas parciais da função logística difásica são:

$$\begin{aligned}\frac{\partial Y}{\partial a_1} &= \frac{1}{1 + e^{(-k_1(t-d_1))}} \\ \frac{\partial Y}{\partial k_1} &= \frac{a_1(-t + d_1)e^{(-k_1(t-d_1))}}{\left(1 + e^{(-k_1(t-d_1))}\right)^2} \\ \frac{\partial Y}{\partial d_1} &= \frac{a_1 k_1 e^{(-k_1(t-d_1))}}{\left(1 + e^{(-k_1(t-d_1))}\right)^2} \\ \frac{\partial Y}{\partial a_2} &= \frac{1}{1 + e^{(-k_2(t-d_2))}} \\ \frac{\partial Y}{\partial k_2} &= \frac{a_2(-t + d_2)e^{(-k_2(t-d_2))}}{\left(1 + e^{(-k_2(t-d_2))}\right)^2} \\ \frac{\partial Y}{\partial d_2} &= \frac{a_2 k_2 e^{(-k_2(t-d_2))}}{\left(1 + e^{(-k_2(t-d_2))}\right)^2}\end{aligned}$$

Sendo assim, a matriz \mathbf{X} é uma matriz $n \times p$ de derivadas parciais, em que n é o número de pesagens e p o número de parâmetros da função. Portanto,

$$X = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{15} & a_{16} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & a_{25} & a_{26} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & a_{n4} & a_{n5} & a_{n6} \end{pmatrix}_{n \times 6}$$

em que cada termo da matriz pode ser escrito da seguinte forma:

$$\begin{aligned}
a_{i1} &= \frac{1}{1 + e^{(-k_1(t_i - d_1))}} \\
a_{i2} &= \frac{a_1(-t_i + d_1)e^{(-k_1(t_i - d_1))}}{(1 + e^{(-k_1(t_i - d_1))})^2} \\
a_{i3} &= \frac{a_1 k_1 e^{(-k_1(t_i - d_1))}}{(1 + e^{(-k_1(t_i - d_1))})^2} \\
a_{i4} &= \frac{1}{1 + e^{(-k_2(t_i - d_2))}} \\
a_{i5} &= \frac{a_2(-t_i + d_2)e^{(-k_2(t_i - d_2))}}{(1 + e^{(-k_2(t_i - d_2))})^2} \\
a_{i6} &= \frac{a_2 k_2 e^{(-k_2(t_i - d_2))}}{(1 + e^{(-k_2(t_i - d_2))})^2}
\end{aligned}$$

em que $i = 1, \dots, n$

Neste caso, a matriz $\mathbf{X}'\mathbf{X}$ é uma matriz (6x6) simétrica, a qual pode ser escrita como a seguir:

$$\begin{aligned}
a_{11} &= \sum_{i=1}^n \frac{1}{(1 + e^{(-k_1(t_i-d_1))})^2} \\
a_{12} = a_{21} &= a_1 \sum_{i=1}^n \frac{(-t_i + d_1)e^{(-k_1(t_i-d_1))}}{(1 + e^{(-k_1(t_i-d_1))})^3} \\
a_{13} = a_{31} &= a_1 k_1 \sum_{i=1}^n \frac{e^{(-k_1(t_i-d_1))}}{(1 + e^{(-k_1(t_i-d_1))})^3} \\
a_{14} = a_{41} &= \sum_{i=1}^n \frac{1}{(1 + e^{(-k_1(t_i-d_1))})(1 + e^{(-k_2(t_i-d_2))})} \\
a_{15} = a_{51} &= a_2 \sum_{i=1}^n \frac{(-t_i + d_2)e^{(-k_2(t_i-d_2))}}{(1 + e^{(-k_1(t_i-d_1))})(1 + e^{(-k_2(t_i-d_2))})^2} \\
a_{16} = a_{61} &= a_2 k_2 \sum_{i=1}^n \frac{e^{(-k_2(t_i-d_2))}}{(1 + e^{(-k_1(t_i-d_1))})(1 + e^{(-k_2(t_i-d_2))})^2} \\
a_{22} &= a_1^2 \sum_{i=1}^n \frac{(-t_i + d_1)^2 (e^{(-k_1(t_i-d_1))})^2}{(1 + e^{(-k_1(t_i-d_1))})^4} \\
a_{23} = a_{32} &= a_1^2 k_1 \sum_{i=1}^n \frac{(-t_i + d_1)(e^{(-k_1(t_i-d_1))})^2}{(1 + e^{(-k_1(t_i-d_1))})^4} \\
a_{24} = a_{42} &= a_1 \sum_{i=1}^n \frac{(-t_i + d_1)e^{(-k_1(t_i-d_1))}}{(1 + e^{(-k_1(t_i-d_1))})^2 (1 + e^{(-k_2(t_i-d_2))})} \\
a_{25} = a_{52} &= a_1 a_2 \sum_{i=1}^n \frac{(-t_i + d_1)e^{(-k_1(t_i-d_1))} (-t_i + d_2)e^{(-k_2(t_i-d_2))}}{(1 + e^{(-k_1(t_i-d_1))})^2 (1 + e^{(-k_2(t_i-d_2))})^2} \\
a_{26} = a_{62} &= a_1 a_2 k_2 \sum_{i=1}^n \frac{(-t_i + d_1)e^{(-k_1(t_i-d_1))} e^{(-k_2(t_i-d_2))}}{(1 + e^{(-k_1(t_i-d_1))})^2 (1 + e^{(-k_2(t_i-d_2))})^2} \\
a_{33} &= a_1^2 k_1^2 \sum_{i=1}^n \frac{(e^{(-k_1(t_i-d_1))})^2}{(1 + e^{(-k_1(t_i-d_1))})^4}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
a_{34} = a_{43} &= a_1 k_1 \sum_{i=1}^n \frac{e^{(-k_1(t_i-d_1))}}{(1+e^{(-k_1(t_i-d_1))})^2 (1+e^{(-k_2(t_i-d_2))})} \\
a_{35} = a_{53} &= a_1 k_1 a_2 \sum_{i=1}^n \frac{e^{(-k_1(t_i-d_1))} (-t_i + d_2) e^{(-k_2(t_i-d_2))}}{(1+e^{(-k_1(t_i-d_1))})^2 (1+e^{(-k_2(t_i-d_2))})^2} \\
a_{36} = a_{63} &= a_1 k_1 a_2 k_2 \sum_{i=1}^n \frac{e^{(-k_1(t_i-d_1))} e^{(-k_2(t_i-d_2))}}{(1+e^{(-k_1(t_i-d_1))})^2 (1+e^{(-k_2(t_i-d_2))})^2} \\
a_{44} &= \sum_{i=1}^n \frac{1}{(1+e^{(-k_2(t_i-d_2))})^2} \\
a_{45} = a_{54} &= a_2 \sum_{i=1}^n \frac{(-t_i + d_2) e^{(-k_2(t_i-d_2))}}{(1+e^{(-k_2(t_i-d_2))})^3} \\
a_{46} = a_{64} &= a_2 k_2 \sum_{i=1}^n \frac{e^{(-k_2(t_i-d_2))}}{(1+e^{(-k_2(t_i-d_2))})^3} \\
a_{55} &= a_2^2 \sum_{i=1}^n \frac{(-t_i + d_2)^2 (e^{(-k_2(t_i-d_2))})^2}{(1+e^{(-k_2(t_i-d_2))})^4} \\
a_{56} = a_{65} &= a_2^2 k_2 \sum_{i=1}^n \frac{(-t_i + d_2) (e^{(-k_2(t_i-d_2))})^2}{(1+e^{(-k_2(t_i-d_2))})^4} \\
a_{66} &= a_2^2 k_2^2 \sum_{i=1}^n \frac{(e^{(-k_2(t_i-d_2))})^2}{(1+e^{(-k_2(t_i-d_2))})^4}
\end{aligned}$$

4.1.2 Função de Gompertz

A função de Gompertz difásica pode ser escrita da seguinte maneira:

$$Y_t = \exp(a_1 - b_1 k_1^t) + \exp(a_2 - b_2 k_2^t)$$

sendo:

Y: o peso, em kg;

t : o tempo, em dias;

e^a : o valor assintótico de Y ;

k : o parâmetro de crescimento;

$-\frac{\ln(b)}{\ln(k)}$: a abscissa do ponto de inflexão;

M : o ponto de inflexão, sendo que M tende ao infinito.

As derivadas parciais da função de Gompertz difásica são:

$$\begin{aligned}\frac{\partial Y}{\partial a_1} &= e^{(a_1 - b_1 k_1^t)} \\ \frac{\partial Y}{\partial b_1} &= -k_1^t e^{(a_1 - b_1 k_1^t)} \\ \frac{\partial Y}{\partial k_1} &= \frac{b_1 k_1^t t e^{(a_1 - b_1 k_1^t)}}{k_1} \\ \frac{\partial Y}{\partial a_2} &= e^{(a_2 - b_2 k_2^t)} \\ \frac{\partial Y}{\partial b_2} &= -k_2^t e^{(a_2 - b_2 k_2^t)} \\ \frac{\partial Y}{\partial k_2} &= \frac{b_2 k_2^t t e^{(a_2 - b_2 k_2^t)}}{k_2}\end{aligned}$$

Sendo assim, a matriz \mathbf{X} é uma matriz $n \times p$ de derivadas parciais, em que n é o número de pesagens e p o número de parâmetros da função. Portanto,

$$X = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{15} & a_{16} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & a_{25} & a_{26} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & a_{n4} & a_{n5} & a_{n6} \end{pmatrix}_{n \times 6}$$

em que cada termo da matriz pode ser escrito da seguinte forma:

$$\begin{aligned} a_{i1} &= e^{(a_1 - b_1 k_1^{t_i})} \\ a_{i2} &= -k_1^{t_i} e^{(a_1 - b_1 k_1^{t_i})} \\ a_{i3} &= \frac{b_1 k_1^{t_i} t_i e^{(a_1 - b_1 k_1^{t_i})}}{k_1} \\ a_{i4} &= e^{(a_2 - b_2 k_2^{t_i})} \\ a_{i5} &= -k_2^{t_i} e^{(a_2 - b_2 k_2^{t_i})} \\ a_{i6} &= \frac{b_2 k_2^{t_i} t_i e^{(a_2 - b_2 k_2^{t_i})}}{k_2} \end{aligned}$$

para $i = 1, \dots, n$

Neste caso, a matriz $\mathbf{X}'\mathbf{X}$ é uma matriz (6x6) simétrica, a qual pode ser escrita como a seguir:

$$\begin{aligned}
a_{11} &= \sum_{i=1}^n (e^{(a_1 - b_1 k_1^{t_i})})^2 \\
a_{12} &= a_{21} = \sum_{i=1}^n -(e^{(a_1 - b_1 k_1^{t_i})})^2 k_1^{t_i} \\
a_{13} &= a_{31} = \sum_{i=1}^n -\frac{(e^{(a_1 - b_1 k_1^{t_i})})^2 b_1 k_1^{t_i} t_i}{k_1} \\
a_{14} &= a_{41} = \sum_{i=1}^n e^{(a_1 - b_1 k_1^{t_i})} e^{(a_2 - b_2 k_2^{t_i})} \\
a_{15} &= a_{51} = \sum_{i=1}^n -e^{(a_1 - b_1 k_1^{t_i})} k_2^{t_i} e^{(a_2 - b_2 k_2^{t_i})} \\
a_{16} &= a_{61} = \sum_{i=1}^n \frac{e^{(a_1 - b_1 k_1^{t_i})} b_2 k_2^{t_i} t_i e^{(a_2 - b_2 k_2^{t_i})}}{k_2} \\
a_{22} &= \sum_{i=1}^n (k_1^{t_i})^2 (e^{(a_1 - b_1 k_1^{t_i})})^2 \\
a_{23} &= a_{32} = \sum_{i=1}^n \frac{(k_1^{t_i})^2 (e^{(a_1 - b_1 k_1^{t_i})})^2 b_1 t_i}{k_1} \\
a_{24} &= a_{42} = \sum_{i=1}^n -k_1^{t_i} e^{(a_1 - b_1 k_1^{t_i})} e^{(a_2 - b_2 k_2^{t_i})} \\
a_{25} &= a_{52} = \sum_{i=1}^n k_1^{t_i} e^{(a_1 - b_1 k_1^{t_i})} k_2^{t_i} e^{(a_2 - b_2 k_2^{t_i})} \\
a_{26} &= a_{62} = \sum_{i=1}^n \frac{k_1^{t_i} e^{(a_1 - b_1 k_1^{t_i})} b_2 k_2^{t_i} t_i e^{(a_2 - b_2 k_2^{t_i})}}{k_2}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
a_{33} &= b_1^2 \sum_{i=1}^n \frac{(k_1^{t_i})^2 t_i^2 (e^{(a_1 - b_1 k_1^{t_i})})^2}{k_1^2} \\
a_{34} &= a_{43} = b_1 \sum_{i=1}^n \frac{k_1^{t_i} t_i e^{(a_1 - b_1 k_1^{t_i})} e^{(a_2 - b_2 k_2^{t_i})}}{k_1} \\
a_{35} &= a_{53} = b_1 \sum_{i=1}^n \frac{k_1^{t_i} t_i e^{(a_1 - b_1 k_1^{t_i})} k_2^{t_i} e^{(a_2 - b_2 k_2^{t_i})}}{k_1} \\
a_{36} &= a_{63} = b_1 b_2 \sum_{i=1}^n \frac{k_1^{t_i} t_i^2 e^{(a_1 - b_1 k_1^{t_i})} k_2^{t_i} e^{(a_2 - b_2 k_2^{t_i})}}{k_1 k_2} \\
a_{44} &= \sum_{i=1}^n (e^{(a_2 - b_2 k_2^{t_i})})^2 \\
a_{45} &= a_{54} = - \sum_{i=1}^n k_2^{t_i} (e^{(a_2 - b_2 k_2^{t_i})})^2 \\
a_{46} &= a_{64} = b_2 \sum_{i=1}^n \frac{(e^{(a_2 - b_2 k_2^{t_i})})^2 k_2^{t_i} t_i}{k_2} \\
a_{55} &= \sum_{i=1}^n (k_2^{t_i})^2 (e^{(a_2 - b_2 k_2^{t_i})})^2 \\
a_{56} &= a_{65} = b_2 \sum_{i=1}^n \frac{(k_2^{t_i})^2 t_i (e^{(a_2 - b_2 k_2^{t_i})})^2}{k_2} \\
a_{66} &= b_2^2 \sum_{i=1}^n \frac{(k_2^{t_i})^2 t_i^2 (e^{(a_2 - b_2 k_2^{t_i})})^2}{k_2^2}
\end{aligned}$$

4.2 Considerações iniciais

Na Figura 1 estão apresentados os valores dos pesos observados e suas respectivas variâncias, em função da idade, em dias, dos 55 animais estudados.

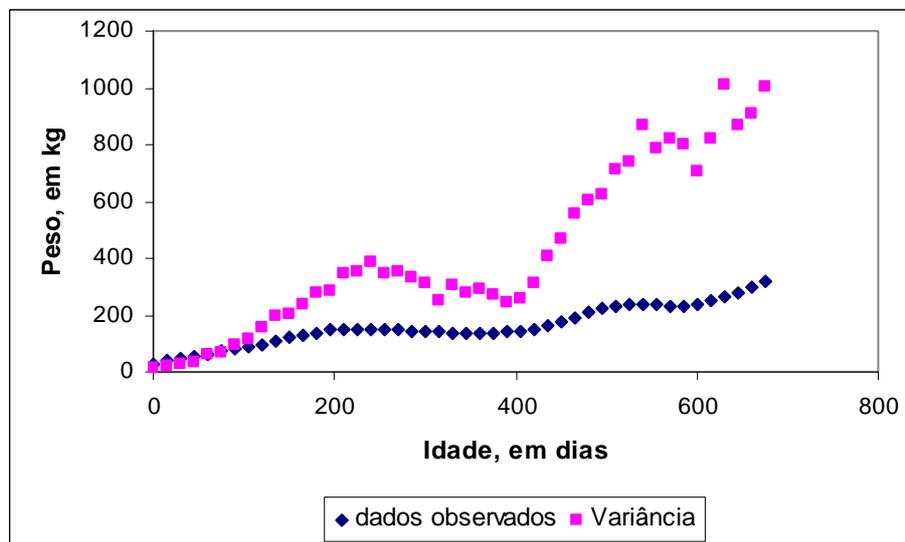


FIGURA 1: Dados médios e variância dos pesos observados, de fêmeas Hereford, no período de zero a 675 dias após o nascimento.

De acordo com o gráfico da Figura 1, pode-se visualizar o ganho médio de peso dos animais e também a grande variabilidade existente nos dados no decorrer do tempo, pois, à medida que a idade aumenta, as variâncias dos pesos corporais também aumentam. Pasternak & Shalev (1994) obtiveram resultados semelhantes e relataram que a variância dos pesos corporais aumenta com a idade, ocorrendo a heterocedasticidade, a qual denominaram de “distúrbios de regressão”. Mazzini et al. (2003 e 2005) constataram heterocedasticidade nas variâncias dos pesos, ao estudarem o crescimento de machos da raça Hereford. O mesmo foi constatado por Elias (1998), em estudos envolvendo as raças Gir, Guzerá e Nelore. Segundo a mesma autora, os modelos não-lineares devem atender às seguintes suposições: erros com média zero e distribuição normal, erros não correlacionados e variâncias homogêneas. Em se tratando de dados longitudinais, as últimas duas pressuposições não são atendidas.

4.3 Ajuste das curvas médias para o modelo logístico difásico

De acordo com os resultados apresentados na Tabela 2, percebe-se que todos os parâmetros da função foram significativos, pois se encontram dentro do intervalo de confiança assintótico de 95% e este, por sua vez, não inclui a constante zero, possuindo apenas valores positivos. Pela estimativa do peso assintótico (parâmetros A_1 e A_2), nota-se que o modelo logístico difásico com estrutura de erros independentes tende a subestimar o peso adulto das fêmeas Hereford, de acordo com os valores estabelecidos pela Associação Brasileira de criadores de Hereford e Braford (2006), que exige um peso mínimo de 320 kg de peso vivo. Resultado semelhante foi encontrado por Mazzini (2001) ao estudar os machos desta mesma raça, porém, considerando o modelo logístico monofásico. Em seu estudo, o valor encontrado para o peso adulto do animal foi de 704,67 kg, na idade de, aproximadamente, 790 dias, enquanto que o modelo difásico do presente estudo estimou o peso adulto em 259,7 kg, com 675 dias de idade.

TABELA 2 – Estimativas dos parâmetros com seus respectivos erros padrões e intervalos de confiança assintóticos de 95%, para o modelo logístico difásico com erros independentes.

Parâmetros	Estimativas	Erros padrões	Intervalo de confiança ¹	
			LI	LS
A_1	144,2000	3,7238	136,9000	151,5000
K_1	0,0188	0,0012	0,0163	0,0213
D_1	70,7585	4,5130	61,9131	79,6038
A_2	115,5000	8,2012	99,4102	131,6000
K_2	0,0365	0,0089	0,0190	0,0540
D_2	479,6000	8,2121	463,5000	495,7000

¹LI = limite inferior; LS = limite superior

Trabalhos de Goonewardene et al. (1991), os quais estudaram o crescimento de fêmeas da raça Hereford e seus cruzamentos, mostram que a função Logística superestimou o peso ao nascer e subestimou os pesos finais dos animais.

Observa-se, pelos dados da Tabela 3, que o modelo logístico difásico com estrutura de erros AR (1) também subestimou o peso adulto do animal (parâmetros A_1 e A_2), assim como foi verificado no modelo com erros independentes. Os erros padrões associados às estimativas dos parâmetros foram maiores para este modelo se comparados aos do modelo anterior. Este resultado está de acordo com Souza (1998) que afirma que a variância dos parâmetros é subestimada quando não se consideram estruturas auto-regressivas.

Os índices de maturidade (K_1 e K_2) não são muito diferentes numericamente. Desse modo, Tornero (1996) diz que se o índice de maturidade é menor na primeira fase do que na segunda, então, o peso à maturidade atingido na primeira fase é maior que na segunda.

TABELA 3 – Estimativas dos parâmetros com seus respectivos erros padrões e intervalos de confiança assintótico de 95%, para o modelo logístico difásico, com erros auto-regressivos de ordem 1.

Parâmetros	Estimativas	Erros padrões	Intervalo de confiança ¹	
			LI	LS
A_1	139,4000	8,3156	123,1000	155,7000
K_1	0,0196	0,0015	0,0167	0,0224
D_1	69,0544	7,6664	54,0284	84,0803
A_2	68,6594	22,6227	24,3198	113,0000
K_2	0,0536	0,0195	0,0153	0,0918
D_2	454,4000	9,1567	436,4000	472,3000
ϕ_1	1,1611	0,0825	0,9993	1,3228

¹LI = limite inferior; LS = limite superior

As estimativas encontradas para o modelo logístico difásico com estrutura de erros AR (2) e apresentadas na Tabela 4, ao contrário das anteriores, superestimaram o peso assintótico das fêmeas Hereford. O valor do peso adulto estimado (parâmetros A_1 e A_2) não está de acordo com as características do animal na idade estudada. Percebe-se também que, com exceção do parâmetro D_1 , todos os outros parâmetros são significativos. Vale lembrar que o parâmetro não significativo não tem uma interpretação biológica, ele é a abscissa do ponto de inflexão da curva. No estudo de Mazzini (2001), a função logística monofásica não apresentou estrutura de erros auto-regressivos de 1ª ou 2ª ordem.

Franzo et al. (2001), estudando o efeito do peso ao parto sobre a produção de leite e eficiência individual em novilhas primíparas Hereford e cruzas, na idade de 3 anos, encontraram o peso dessas fêmeas entre 324 e 360 kg.

TABELA 4 – Estimativas dos parâmetros com seus respectivos erros padrões e intervalos de confiança assintótico de 95%, para o modelo logístico difásico, com erros auto-regressivos de ordem 2.

Parâmetros	Estimativas	Erros padrões	Intervalo de confiança ¹	
			LI	LS
A_1	61,5833	5,8910	50,0372	73,1294
K_1	0,0444	0,0042	0,0361	0,0527
D_1	3,9882	3,9574	-3,7681	11,7445
A_2	410,4000	114,8000	185,4000	635,4000
K_2	0,0231	0,0041	0,0151	0,0311
D_2	458,8000	14,3103	430,8000	486,9000
ϕ_1	2,0599	0,0442	1,9733	2,1465
ϕ_2	-1,0804	0,0445	-1,1676	-0,9932

¹LI = limite inferior; LS = limite superior

Na Tabela 5 podem-se ver as estimativas das assíntotas, bem como seus intervalos de confiança, para os três tipos de erros estudados. Como visto, em se tratando de modelos multifásicos, o peso adulto do animal (A) é dado pela soma das assíntotas. No caso, como o modelo considerado possui duas fases, o peso adulto será dado pelo somatório de A_1 e A_2 . Sendo assim, percebe-se que, nos três modelos, a estimativa da assíntota foi significativa, isto é, encontra-se dentro do intervalo de confiança positivo.

TABELA 5 – Estimativas das assíntotas de cada modelo estudado e seus respectivos intervalos de confiança assintótico de 95%.

Modelos	Assíntota		A	Intervalo de confiança ¹	
	A ₁	A ₂		LI	LS
Erros independentes	144,20	115,50	259,70	248,55	270,82
Erros AR (1)	139,40	68,66	208,06	164,10	251,97
Erros AR (2)	61,58	410,40	472,00	283,83	660,20

¹LI = limite inferior; LS = limite superior

Os avaliadores da qualidade de ajuste (Tabela 6) indicam que o modelo logístico difásico AR (2) apresentou maior R_a^2 e menor DPR. Além disso, foi o único modelo que não apresentou significância na autocorrelação de primeira ordem. Em contrapartida, o ajuste do modelo exigiu maior número de iterações para encontrar a convergência. Quanto ao critério de informação de Akaike (AIC), que compara os modelos levando em conta o número de parâmetros envolvidos, sempre buscando o modelo que seja o mais parcimonioso possível, observa-se que, no modelo logístico difásico AR (2), apesar de apresentar maior número de parâmetros, suas estimativas são menos correlacionadas, sendo, portanto, o melhor modelo, segundo o AIC. O mesmo resultado foi obtido considerando-se o teste F para comparação de modelos, o qual rejeita a hipótese nula de que o modelo mais simples está correto.

TABELA 6 – Avaliadores da qualidade do ajuste considerados: número de parâmetros (Nº parms.), coeficiente de determinação ajustado (R^2_a), desvio padrão residual (DPR), teste de Durbin–Watson (DW), número de iterações (Nº iter.), critério de informação de Akaike (AIC) e teste F.

Modelos	Nº parms	R^2_a	DPR	DW	Nº iter.	AIC	F
Logístico Difásico	6	0,9851	0,6128	0,2452*	18	-37,483	-
Logístico difásico AR (1)	7	0,9973	0,2621	0,8347*	30	-114,76	179,5781**
Logístico difásico AR (2)	8	0,9992	0,1466	1,9311	35	-167,45	86,7627**

* Significativo, a 5% de probabilidade.

** Significativo, a 1% de probabilidade.

Os modelos com maior número de parâmetros apresentam menores quadrados médios de resíduo, explicando, dessa maneira, melhor o ajuste. Mazzini (2001) obteve resultados semelhantes ao estudar o ajuste de modelos não-lineares, considerando erros independentes e auto-regressivos de ordem 1 e 2 com machos Hereford.

Em relação ao coeficiente de determinação ajustado (R^2_a), os valores obtidos foram semelhantes àqueles apresentados na literatura. Elias (1998), estudando curvas de crescimento de vacas zebuínas, encontrou valores de R^2_a em torno de 0,999, para todas as funções, próximos aos obtidos por Ludwig et al. (1981), no estudo de gado Nelore. Silva et al. (2001), avaliando curvas de crescimento de gado Nelore, e com estrutura de erros auto-regressiva, também obtiveram resultados entre 0,98 e 0,99, para todas as funções estudadas.

Mazzini et al. (2003), no estudo de curvas de crescimento de machos Hereford, destacaram não ser avaliador útil na escolha da melhor função, uma vez que, em seus estudos, todas as funções apresentaram altos valores para o R^2_a .

4.4 Ajuste das curvas médias para o modelo Gompertz difásico

Antes da análise dos resultados do modelo Gompertz, chama-se a atenção para a interpretação de seu parâmetro “A”, correspondente ao peso adulto do animal. Para se obter o valor dessa estimativa é necessário calcular a exponencial do valor apresentado na tabela, conforme explicado na seção 2.3.

TABELA 7 – Estimativas dos parâmetros com seus respectivos erros padrões e intervalos de confiança assintóticos de 95%, para o modelo Gompertz difásico, com erros independentes.

Parâmetros	Estimativas	Erros padrões	Intervalo de confiança ¹	
			LI	LS
A₁	4,9990	0,0293	4,9424	5,0521
B₁	1,6633	0,0566	1,5524	1,7743
K₁	0,9876	0,0010	0,9858	0,9895
A₂	4,8628	0,1140	4,6394	5,0862
B₂	1,9459	0,1196	1,7115	2,1802
K₂	0,9839	0,0042	0,9756	0,9922

¹LI = limite inferior; LS = limite superior

De acordo com os resultados apresentados na Tabela 7, percebe-se a significância de todos os parâmetros envolvidos no modelo. Após os cálculos necessários para a obtenção do peso assintótico dos animais, nota-se, pelo valor encontrado (277,64 kg), que este modelo tende a subestimar o peso adulto das fêmeas em estudo, uma vez que a literatura exige o peso mínimo de 320 kg. Estudando os machos dessa mesma raça e trabalhando com o modelo Gompertz monofásico, Mazzini et al. (2003) obtiveram resultados satisfatórios para as estimativas dos parâmetros, ou seja, estimativas coerentes com a realidade da raça Hereford.

Brown et al. (1976) ajustaram cinco funções de crescimento a dados de vacas Hereford e seus cruzamentos com Brahman e observaram que a função

Gompertz superestimou o peso nas idades iniciais, enquanto que a logística subestimou o peso adulto.

TABELA 8 – Estimativas dos parâmetros com seus respectivos erros padrões e intervalos de confiança assintóticos de 95%, para o modelo Gompertz difásico, com erros auto-regressivos de ordem 1.

Parâmetros	Estimativas	Erros padrões	Intervalo de confiança ¹	
			LI	LS
A₁	4,4096	0,1613	4,0934	4,7258
B₁	1,0716	0,1587	0,7607	1,3826
K₁	0,9772	0,0055	0,9666	0,9880
A₂	3,9468	0,3476	3,2656	4,6280
B₂	1,5342	0,1557	1,2290	1,8394
K₂	0,9728	0,0092	0,9549	0,9908
ϕ_1	1,0932	0,0218	1,0505	1,1359

¹LI = limite inferior; LS = limite superior

Observando-se os resultados apresentados na Tabela 8, percebe-se a significância dos parâmetros envolvidos no modelo. Nota-se também que este modelo subestimou o peso adulto do animal (134 kg), não estando de acordo com a literatura. As estimativas encontradas na primeira fase foram maiores que as da segunda fase, discordando dos resultados obtidos por Tornero (1996) que, avaliando o crescimento ponderal de frango de corte e utilizando a função Gompertz para analisar os dados, observou que as estimativas da segunda fase foram maiores que a da primeira, tanto para o modelo com erros independentes, quanto para com erros auto-regressivos de primeira ordem.

TABELA 9 – Estimativas dos parâmetros com seus respectivos erros padrões e intervalos de confiança assintótico de 95%, para o modelo Gompertz difásico, com erros auto-regressivos de ordem 2.

Parâmetros	Estimativas	Erros padrões	Intervalo de confiança ¹	
			LI	LS
A₁	2,1060	0,3260	1,4672	2,7449
B₁	0,9935	0,1557	0,6884	1,2985
K₁	-0,7911	0,3598	-1,4963	-0,0858
A₂	5,6322	0,2502	5,1417	6,1226
B₂	2,2816	0,2522	1,7872	2,7760
K₂	0,9948	0,0014	0,9920	0,9976
ϕ_1	1,9888	0,0689	1,8537	2,1238
ϕ_2	-1,0194	0,0744	-1,1653	-0,8734

¹LI = limite inferior; LS = limite superior

Na Tabela 9 observa-se que este modelo, assim como os anteriores (Gompertz difásico com erros independentes e auto-regressivos de ordem 1), tende a subestimar o valor do peso adulto do animal (287,5 kg), ou seja, apresenta valores abaixo de 320 kg, recomendados pela literatura. Em parte, esse resultado pode ser explicado por dois fatores: a utilização de animais jovens para a convergência do peso assintótico e, também, pela metodologia aplicada, pois, segundo Elias (1998) e Mazzini (2001), a ponderação e a estrutura de erros auto-regressivos reduziram substancialmente os valores estimados para o parâmetro A.

TABELA 10 – Estimativas das assíntotas de cada modelo estudado e seus respectivos intervalos de confiança assintótico de 95%.

Modelos	Assíntota			Intervalo de confiança ¹	
	A ₁	A ₂	A	LI	LS
Erros independentes	4,99	4,86	9,85	9,69	10,03
Erros AR (1)	4,41	3,95	8,36	7,92	8,79
Erros AR (2)	2,11	5,63	7,74	6,95	8,54

¹LI = limite inferior; LS = limite superior

De acordo com os resultados apresentados na Tabela 10, percebe-se que para o modelo Gompertz, a estimação da assíntota, para as três estruturas de erros, é significativa. A assíntota dos modelos é dada pelo somatório de A₁ e A₂.

Na Tabela 11, estão apresentados os avaliadores da qualidade de ajuste utilizados na comparação dos modelos. O modelo Gompertz difásico AR (2) apresentou maior R²_a, e menor DPR. Além disso, foi o único modelo que não apresentou autocorrelação de primeira ordem significativa. Em contrapartida, foi o modelo que exigiu maior número de iterações para encontrar a convergência. O critério de informação de Akaike (AIC) mostrou que, embora o modelo logístico difásico AR (2) tenha um maior número de parâmetros, suas estimativas são menos correlacionadas sendo, portanto, o melhor modelo. Mesmo resultado foi obtido pelo teste F, na comparação dos modelos aninhados, sendo o maior modelo (mais parâmetros) o mais adequado.

TABELA 11 – Avaliadores da qualidade do ajuste considerados: número de parâmetros (Nº parms.), coeficiente de determinação ajustado (R^2_a), desvio padrão residual (DPR), teste de Durbin–Watson (DW), número de iterações (Nº iter.), critério de informação de Akaike (AIC) e teste F.

Modelos	Nº parms	R^2_a	DPR	DW	Nº Iter.	AIC	F
Gompertz Difásico	6	0,9851	0,6138	0,2105*	2179	44,54	-
Gompertz difásico AR (1)	7	0,9972	0,2651	0,3907*	36	-103,57	175,4466**
Gompertz difásico AR (2)	8	0,9993	0,1375	1,5367	20152	-112,00	106,9308**

* Significativo, a 5% de probabilidade.

** Significativo, a 1% de probabilidade.

Mazzini (2001), em análise de curva de crescimento de machos Hereford, obteve altos valores para o R^2_a , todos acima de 0,98. Observou também que a utilização da estrutura de erros auto-regressivos tende a um melhor ajuste do modelo.

Pode-se dizer que o modelo Gompertz AR (1) foi o mais rápido e eficiente, isto é, não apresentou problemas de convergência. Segundo Ratkowsky (1983) e Silva et al. (2002), a convergência mais rápida sempre irá indicar um modelo com comportamento próximo ao linear; já a convergência lenta pode significar que os estimadores são tendenciosos e não apresentam distribuição normal.

Apesar de o ajuste ser de boa qualidade para os três tipos de erros considerados, as estimativas dos parâmetros apresentaram valores incoerentes com a realidade das fêmeas Hereford. Segundo Bergamasco et al. (2001), para a obtenção de melhores estimativas deveriam ser feitas mais pesagens em idades acima de 24 meses. Há fatores que podem estar influenciando também essa falta

de coerência na interpretação biológica, tais como: irregularidades nas pesagens dos animais ou número de pesagens e ou animais insuficientes (Ludwig et al., 1981), gerando estimativas de parâmetros com valores irrealis pela falta de uniformidade do crescimento.

4.5 Ajuste das curvas individuais para o modelo logístico

Na Tabela 12 estão apresentadas as médias das estimativas utilizando o ajuste das curvas individuais. Pode-se notar o mesmo comportamento para as estimativas dos parâmetros daquele apresentado no ajuste das curvas médias, com valores estimados muito próximos. Novamente, a função logística difásica com erros independentes subestimou o peso do animal.

TABELA 12 – Estimativas dos parâmetros com seus respectivos erros padrões e intervalos de confiança assintóticos de 95%, considerando o modelo logístico com erros independentes.

Parâmetros	Estimativas	Erros padrões	Intervalo de confiança ¹	
			LI	LS
A₁	143,8130	2,3850	139,0320	148,5950
K₁	0,0210	0,0003	0,0210	0,0220
D₁	71,2000	1,2949	68,6030	73,7960
A₂	114,8920	2,7388	109,4010	120,3830
K₂	0,0380	0,0017	0,0350	0,0410
D₂	480,7510	3,1348	474,4660	487,0360

¹LI = limite inferior; LS = limite superior

Segundo Owens et al. (1995), citados por Silva et al. (2001), animais de menor peso adulto geralmente apresentam menor proporção de gordura, melhorando, assim, o rendimento de carcaça do animal. Um menor peso adulto

necessita de uma menor demanda energética, o que proporciona um menor gasto com alimentação para manutenção do animal.

Observando-se os resultados da Tabela 13, nota-se que as estimativas do parâmetro de crescimento (K) na segunda fase é maior que na primeira. Este fato está de acordo com Tornero (1996), ao trabalhar com modelo logístico difásico com estrutura de erros AR (1), para dados ponderais de 31 observações de vacas holandesas. As estimativas da taxa de maturidade (K) foram bem menores, se comparadas a outros estudos com gado Hereford, como o trabalho de Mazzini (2001) que encontrou o valor de 16,65.

TABELA 13 – Estimativas dos parâmetros com seus respectivos erros padrões e intervalos de confiança assintóticos de 95%, considerando o modelo logístico com erros auto-regressivos de ordem 1.

Parâmetros	Estimativas	Erros padrões	Intervalo de confiança ¹	
			LI	LS
A₁	138,4000	2,7400	132,9100	143,8900
K₁	0,0200	0,0053	0,0095	0,0300
D₁	72,2600	1,5800	69,1000	75,4300
A₂	87,7684	28,3253	31,1178	144,4190
K₂	0,1000	0,0400	0,0300	0,1800
D₂	643,4000	73,8700	495,3100	791,4900
φ₁	0,9200	0,0500	0,8300	1,0100

¹LI = limite inferior; LS = limite superior

É importante mencionar que, na estimativa das curvas individuais, nem todos os animais alcançaram a convergência e outros convergiram para valores absurdos, sendo, dessa maneira, retirados da análise.

Comparando este ajuste (Tabela 14) com o ajuste das curvas médias, nota-se grande variação nas estimativas dos parâmetros, não tendo o mesmo comportamento do obtido anteriormente. Esta função subestimou o peso assintótico do animal. Novamente, é importante salientar que a convergência não foi alcançada por todos os animais. Mazzini et al. (2005), no estudo de machos Hereford, também não atingiram a convergência para todos os animais, quando consideraram a estrutura de erros auto-regressiva de ordem 1 e 2. Além disso, a função logística subestimou o peso adulto do animal, principalmente no ajuste com AR (2).

TABELA 14 – Estimativas dos parâmetros com seus respectivos erros padrões e intervalos de confiança assintóticos de 95%, considerando o modelo logístico com erros auto-regressivos de ordem 2.

Parâmetros	Estimativas	Erros padrões	Intervalo de confiança ¹	
			LI	LS
A₁	137,2200	2,8100	131,6000	142,8500
K₁	0,0200	0,0071	0,0060	0,03416
D₁	68,9700	1,4600	66,0500	71,9000
A₂	122,8111	28,6559	65,4993	180,1229
K₂	0,0300	0,0141	0,0018	0,0582
D₂	403,4600	15,0400	373,3100	433,6100
ϕ_1	1,0000	0,0500	0,9000	1,1100
ϕ_2	-0,2600	0,0400	-0,3400	-0,1800

¹LI = limite inferior; LS = limite superior

4.6 Ajuste das curvas individuais para o modelo Gompertz

As Tabelas 15, 16 e 17 referem-se ao ajuste das curvas individuais para o modelo Gompertz com estrutura de erros independentes, AR (1) e AR (2), respectivamente.

Os resultados obtidos na Tabela 15 foram semelhantes aos encontrados no ajuste das curvas médias, subestimando o peso assintótico do animal. Mazzini (2001) obteve estimativas dentro do observado pela raça, ao trabalhar com curvas de crescimento de machos Hereford, utilizando funções monofásicas. Resultado discordante foi obtido por Freitas et al. (2005), num estudo com bovinos machos Canchim, no qual obtiveram estimativas superestimadas para o modelo Gompertz, na fase inicial.

TABELA 15 – Estimativas dos parâmetros com seus respectivos erros padrões e intervalos de confiança assintóticos de 95%, considerando o modelo Gompertz com erros independentes.

Parâmetros	Estimativas	Erros padrões	Intervalo de confiança ¹	
			LI	LS
A₁	4,1700	0,7900	2,5900	5,7400
B₁	1,9221	0,3068	1,3085	2,5357
K₁	0,9500	0,0400	0,8700	1,0200
A₂	4,8000	0,0300	4,7300	4,8600
B₂	1,9157	0,2907	1,3343	2,5271
K₂	0,9400	0,0300	0,8900	1,0000

¹LI = limite inferior; LS = limite superior

A Tabela 16 mostra as estimativas obtidas a partir do ajuste das curvas individuais. Pela primeira vez, a função Gompertz superestimou o peso adulto do animal, encontrando valores irrealis em sua estimativa. O resultado encontrado difere daquele obtido por Mendes et al. (2001), ao estudarem o

crescimento de fêmeas Nelore, em que se observou que o modelo Gompertz subestimou o peso assintótico do animal, não tendo, dessa forma, um bom desempenho para a descrição destes dados.

TABELA 16 – Estimativas dos parâmetros com seus respectivos erros padrões e intervalos de confiança assintóticos de 95%, considerando o modelo Gompertz com erros auto-regressivos de ordem 1.

Parâmetro	Estimativas	Erros-padrão	Intervalo de confiança ¹	
			LI	LS
A₁	44,6200	17,7300	9,0800	80,1700
B₁	1,3668	0,6084	0,1500	2,5836
K₁	1,0200	0,0400	0,9500	1,0900
A₂	4,0300	0,0800	3,8700	4,1900
B₂	1,8905	0,8543	0,1819	3,5991
K₂	0,9700	0,0100	0,9600	0,9700
ϕ_1	0,9600	0,0300	0,9000	1,0300

¹LI = limite inferior; LS = limite superior

Os resultados da Tabela 17 foram diferentes daqueles encontrados no ajuste das curvas médias, em que o peso adulto do animal foi subestimado. Neste caso, trabalhando com o ajuste individual e introduzindo a estrutura de erros auto-regressiva de ordem 2, a estimativa do peso assintótico é coerente com a realidade da raça Hereford, na idade analisada. Já no estudo de Mazzini (2001), a introdução da estrutura de erros auto-regressiva fez com que o modelo Gompertz subestimasse o peso adulto, principalmente no ajuste com AR (2).

TABELA 17 – Estimativas dos parâmetros com seus respectivos erros padrões e intervalos de confiança assintóticos de 95%, considerando o modelo Gompertz com erros auto-regressivos de ordem 2.

Parâmetros	Estimativas	Erros padrões	Intervalo de confiança ¹	
			LI	LS
A_1	5,7715	0,1176	6,1360	6,6073
B_1	2,9600	0,1184	2,7240	3,1982
K_1	0,9968	0,0004	0,9960	0,9977
A_2	3,8100	0,1100	3,6000	4,0200
B_2	2,0721	0,8144	0,4433	3,7009
K_2	0,9550	0,0171	0,9210	0,9894
ϕ_1	1,2465	0,0414	1,1630	1,3295
ϕ_2	- 0,3176	0,0373	-0,3920	- 0,2428

¹LI = limite inferior; LS = limite superior

4.7 Avaliadores da qualidade para o ajuste das curvas individuais

Na Tabela 18 estão apresentados os percentuais de convergência dos ajustes individuais para as duas funções estudadas, considerando os modelos com e sem estrutura de erros auto-regressivos. Por esta tabela, percebe-se que o modelo logístico apresenta maiores percentuais de convergência, independente da estrutura de erros utilizada. Nota-se também que a inclusão de estrutura de erros auto-regressivos dificulta a convergência do modelo. Em seu estudo com machos Hereford, Mazzini (2001) observou que o percentual de convergência também diminuiu nos modelos com AR (1) e AR (2), principalmente no modelo logístico, em que o percentual foi reduzido drasticamente. Essa queda no percentual de convergência após a introdução das estruturas de erros AR (1) e, principalmente, AR (2), foi devido ao fato de que muitos valores convergiram, porém, para valores fora da realidade, não tendo, dessa maneira, uma interpretação prática. Sendo assim, o animal é descartado do ajuste.

TABELA 18 – Percentual de convergência para os diferentes modelos, no ajuste das curvas individuais.

Estrutura de erros	Modelo	
	Logístico	Gompertz
EI	100,00	81,81
AR (1)	81,81	69,09
AR (2)	30,90	25,46

A Tabela 19 apresenta as médias dos QMEs para os dois modelos estudados, de acordo com os ajustes das curvas individuais. Observa-se que, à medida que incluímos uma estrutura de erros mais complexa, o QME diminui. Resultado semelhante foi obtido por Mazzini et al. (2003) ao estudarem as curvas de crescimento de machos Hereford. Este fato se deve, provavelmente, à inclusão de mais um parâmetro no processo de estimação. Observa-se, ainda, que o modelo logístico apresenta menores valores para o QME para os três tipos de erros estudados. Silva et al. (2001), estudando o crescimento de animais da raça Nelore, encontraram resultados contrários ao do presente estudo, ou seja, o QME do modelo Gompertz foi menor que o do modelo logístico.

TABELA 19 – Quadrado médio do erro (QME), para os diferentes modelos, no ajuste das curvas individuais.

Estrutura de erros	Modelo	
	Logístico	Gompertz
EI	181,68	539,2
AR (1)	84,84	104,06
AR (2)	77,84	103,25

As médias dos coeficientes de determinação ajustado (R^2_a) estão apresentadas na Tabela 20, que inclui apenas os animais que tiveram

convergência alcançada, a fim de permitir uma melhor comparação entre os modelos. Percebe-se que, com exceção do modelo Gompertz com estrutura de erros independentes, todos os outros modelos apresentaram um ajuste acima de 95%. Oliveira et al. (2000) encontraram resultados semelhantes ao estudarem curvas de crescimento de vacas da raça Guzerá. Segundo o autor, as diferenças entre os coeficientes de determinação foram irrisórias e sem significado prático. As funções logística e de Gompertz também se ajustaram bem aos dados de peso-idade de cordeiros da raça Santa Inês e Bergamácia, com valores para o R^2_a acima de 0,978, num estudo realizado por Guedes et al. (2004).

Nota-se, ainda, na Tabela 20, que a utilização da estrutura de erros auto-regressivos tendeu a um melhor ajuste nos dois modelos estudados. Este resultado é concordante com o obtido por Mazzini et al. (2005), porém, sem significado prático por apresentar diferenças insignificantes.

TABELA 20 – Coeficiente de determinação ajustado (R^2_a), para os diferentes modelos, no ajuste das curvas individuais.

Estrutura de erros	Modelo	
	Logístico	Gompertz
EI	0,9582	0,8791
AR (1)	0,9806	0,9763
AR (2)	0,9819	0,9757

Embora os ajustes individuais apresentem uma variabilidade dos dados bem mais elevada que os ajustes médios, os primeiros são realizados, neste tipo de estudo, no intuito de comparar a proximidade das estimativas dos parâmetros.

4.8 Gráficos do modelo logístico considerando o ajuste das curvas médias

Na Figura 2 é possível visualizar o comportamento dos resíduos ao longo do tempo. De acordo com o gráfico, percebe-se claramente que eles não estão dispostos de maneira aleatória em torno do zero, apresentando um comportamento cíclico. Este problema é causado pela autocorrelação existente.

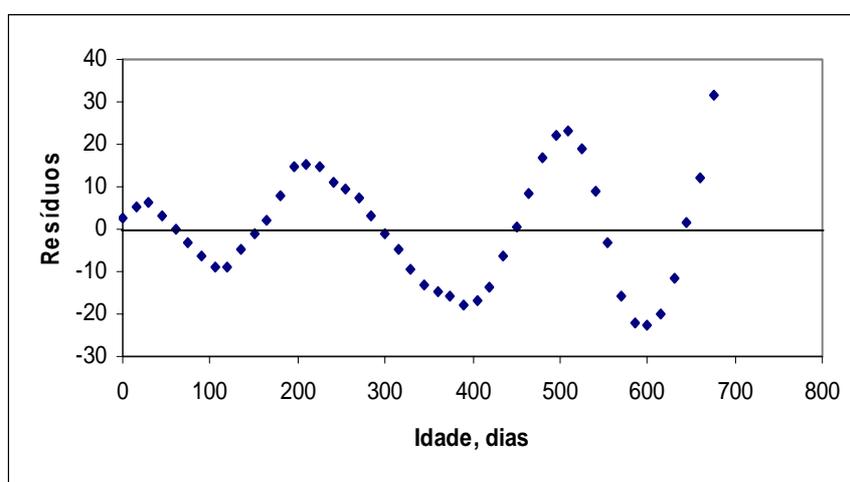


FIGURA 2: Comportamento dos resíduos do modelo logístico difásico com estrutura de erros independentes.

De acordo com o aspecto prático, os erros parecem acompanhar a variação do ganho de peso dos animais, isto é, em épocas chuvosas em que há mais disponibilidade de forragens, os animais “ganham” mais peso; em contrapartida, na época seca, quando há escassez de alimento e o frio é intenso por causa da região, os animais tendem a “perder” peso. Este comportamento se repete o ano todo, de acordo com as estações. O mesmo comportamento foi observado por Tornero (1996), ao estudar o crescimento de vacas holandesas.

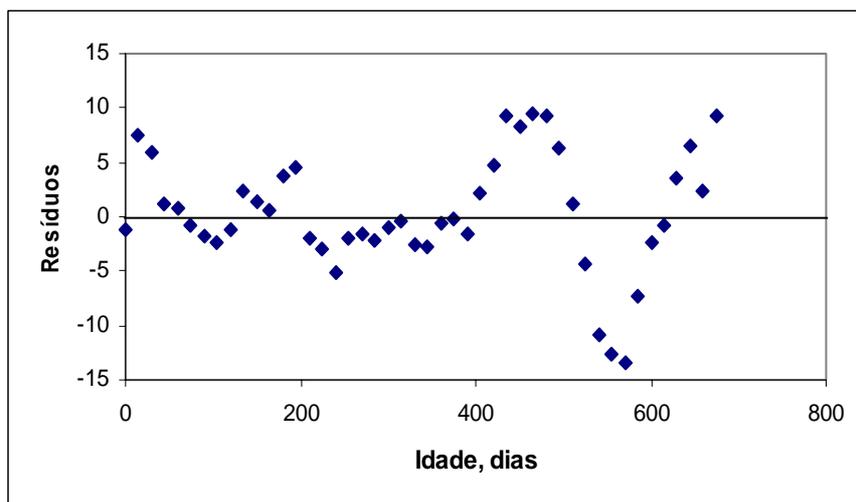


FIGURA 3: Comportamento dos resíduos do modelo logístico difásico com estrutura de erros auto-regressiva de ordem 1.

Comparando-se o comportamento dos resíduos da Figura 3 com os da Figura 2, percebe-se que os primeiros comportam-se de forma mais aleatória em torno do zero até, aproximadamente, os 400 dias. Após este período, eles ainda tendem a apresentar uma sazonalidade, ou seja, o comportamento dos resíduos volta a se repetir depois de certo período de tempo. Medeiros (1999), no estudo de crescimento de vacas, praticamente contornou o problema da autocorrelação quando levou em consideração o modelo com estrutura de erros AR (1).

Na Figura 4, observa-se que a introdução de erros autocorrelacionados de ordem 2 praticamente solucionou a questão da autocorrelação residual, apresentando um comportamento aleatório em torno da constante zero. Este fato foi comprovado pelo teste de Durbin-Watson não significativo (Tabela 7). No entanto, tem erros grandes (maior $|4|$).

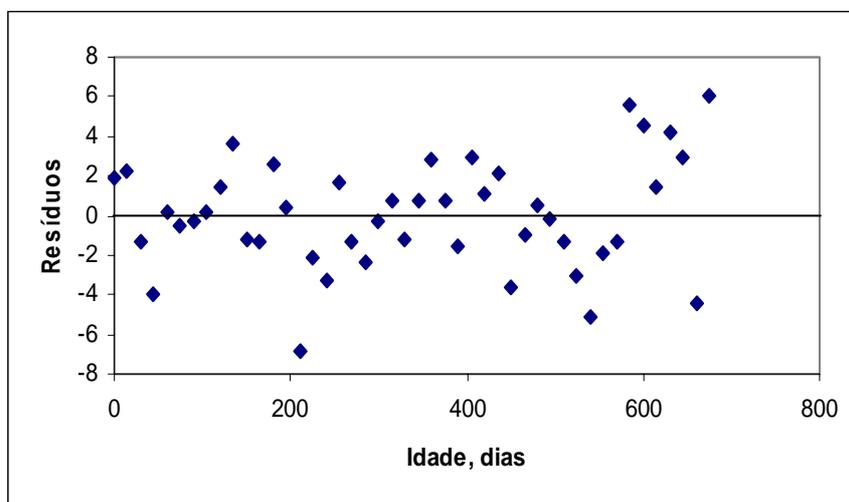


FIGURA 4: Comportamento dos resíduos do modelo logístico difásico com estrutura de erros auto-regressiva de ordem 2.

Na Figura 5, observa-se o ajuste da função logística em relação aos dados observados. Nota-se que a função apresentou um melhor ajuste nas observações iniciais. A partir do 180º dia, o ajuste da função oscilou em períodos de subestimação e superestimação, mostrando que esse período não está bem ajustado pelo modelo, concordando com Tornero (1996), que também tirou essas mesmas conclusões sobre a função logística difásica ajustada a dados de vacas Holandesas.

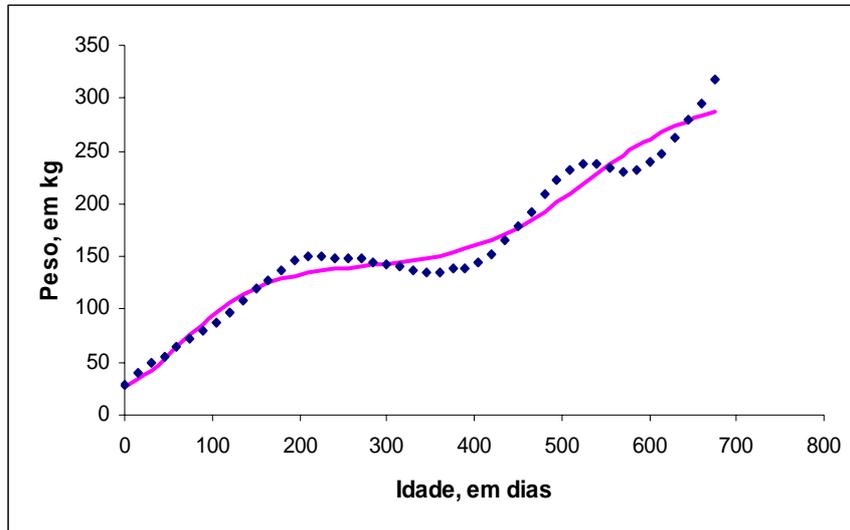


FIGURA 5: Ajuste da função logística difásica com erros independentes.

(◇ observado — estimado)

Nota-se, por meio do gráfico da Figura 6, um melhor ajustamento da função logística após ser considerada a estrutura de erros AR (1). Percebe-se também que a função tende a subestimar o peso final dos animais, como foi verificado na Tabela 4, a qual apresentou as estimativas dadas pelo modelo. Este resultado também foi obtido por Brown et al. (1976) e Mazzini (2001), ao trabalharem com a função logística ajustada a dados de machos Hereford e vacas de diversas raças, respectivamente.

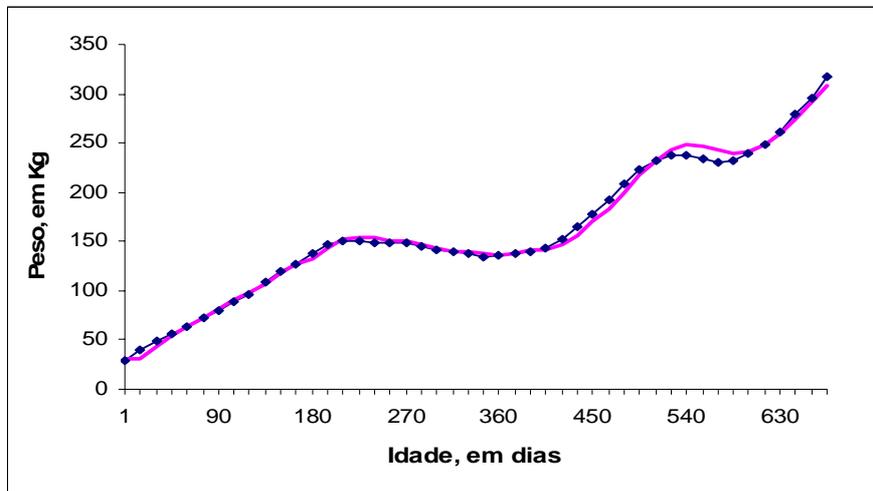


FIGURA 6: Ajuste da função logística difásica com erros auto-regressivos de ordem 1. (\diamond observado — estimado)

O gráfico da Figura 7 mostra o ajuste da função logística difásica com estrutura de erros AR (2). Nota-se que esta função apresenta um excelente ajuste em relação aos dados observados. Sendo assim, a mesma pode ser usada para modelar os dados de peso-idade de fêmeas da raça Hereford, atingindo um excelente ajuste.

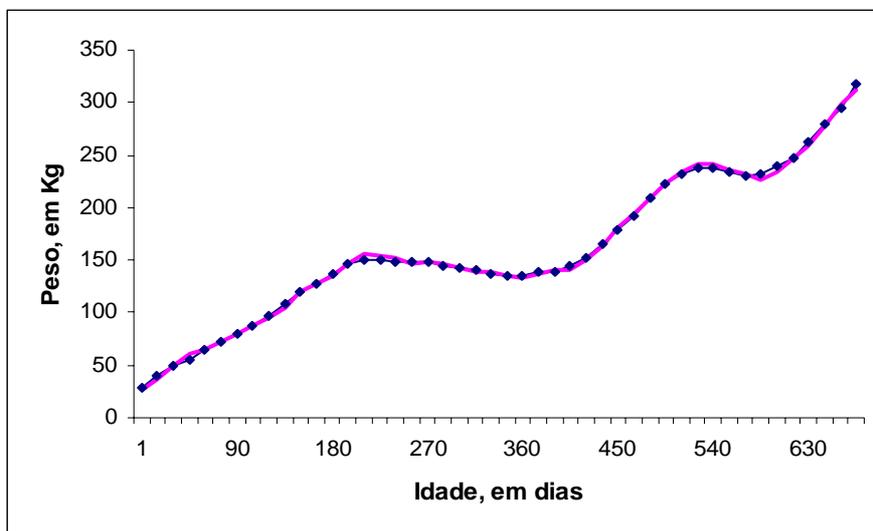


FIGURA 7: Ajuste da função logística difásica com erros auto-regressivos de ordem 2. (◇ observado — estimado)

4.9 Gráficos do modelo Gompertz considerando o ajuste das curvas médias

No gráfico da Figura 8, assim como no da Figura 2, observa-se a formação de ciclos no decorrer do tempo. Este comportamento, característico de modelos que apresentam autocorrelação residual, não é indicado para explicar tais dados, uma vez que ele não atende a uma das principais pressuposições dos modelos não-lineares.

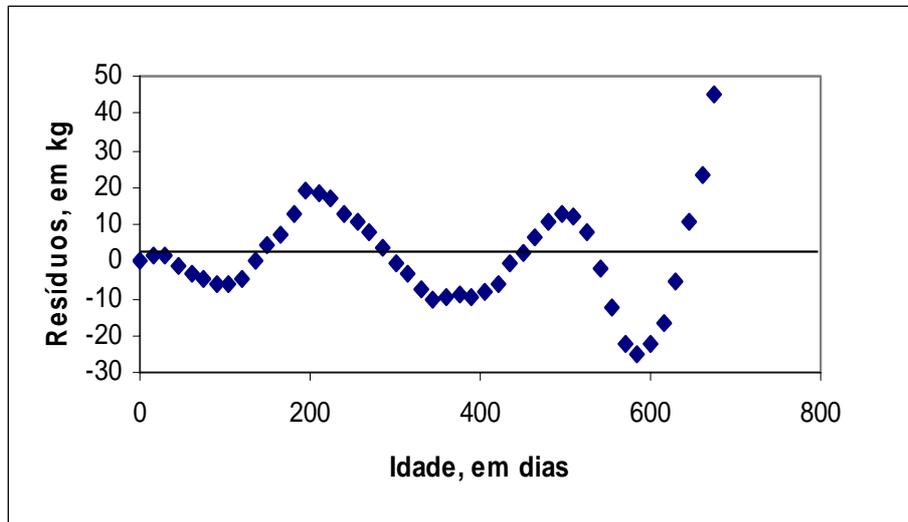


FIGURA 8: Comportamento dos resíduos do modelo Gompertz difásico com estrutura de erros independentes.

Por meio do gráfico da Figura 9 percebe-se que a introdução da estrutura de erros AR (1) não contornou o problema da autocorrelação, detectado anteriormente. Visualiza-se, ainda, um comportamento cíclico dos resíduos em torno da constante zero. Mendes et al. (2001) também obtiveram resultados indesejáveis para a distribuição dos resíduos da função Gompertz, ao estudarem a curva de crescimento de novilhas Nelore.

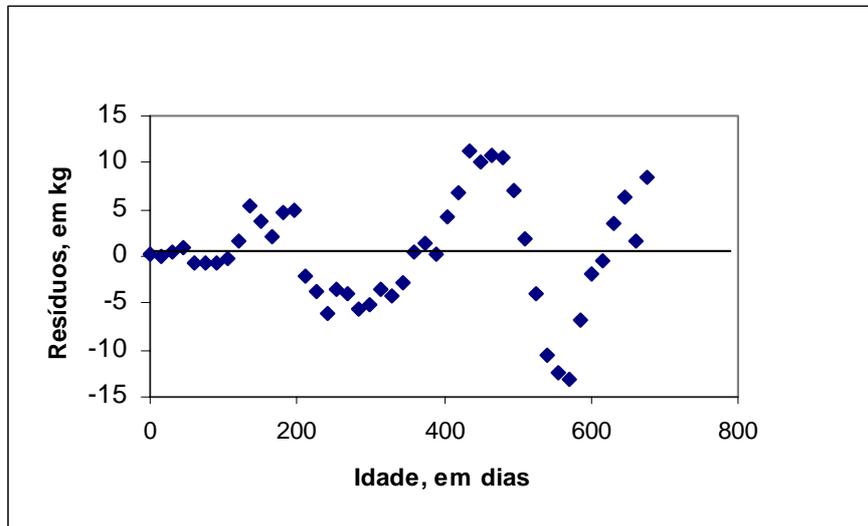


FIGURA 9: Comportamento dos resíduos do modelo Gompertz difásico com estrutura de erros auto-regressiva de ordem 1.

Pelo gráfico da Figura 10 percebe-se que os resíduos têm um comportamento mais aleatório em torno de zero. Assim, nota-se que a introdução da estrutura de autocorrelação nos erros produziu uma melhoria no comportamento dos resíduos.

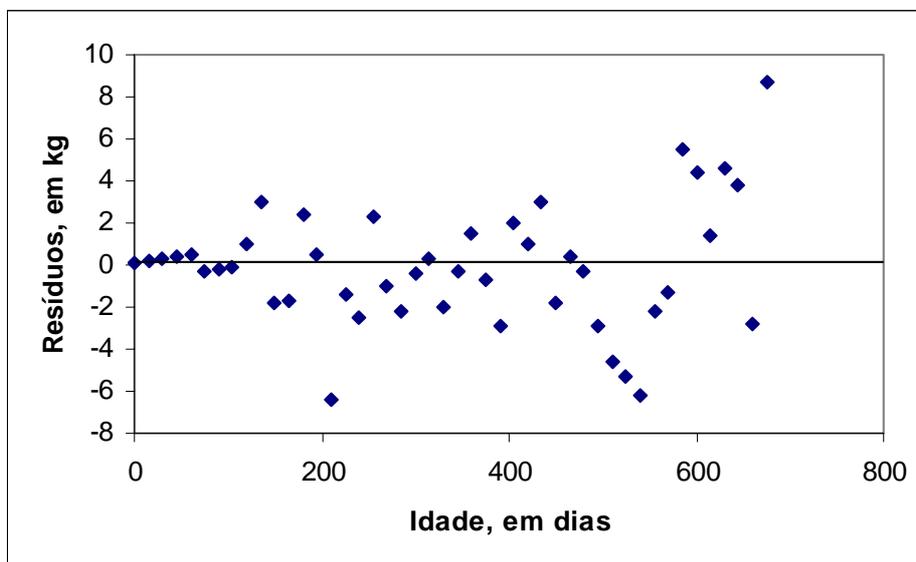


FIGURA 10: Comportamento dos resíduos do modelo Gompertz difásico com estrutura de erros auto-regressiva de ordem 2.

Pelo gráfico da Figura 11, percebe-se que a função Gompertz não se ajustou bem aos dados observados, como foi visto também por meio do coeficiente de determinação ajustado, que apresentou o valor de 87,91%. Resultado diferente foi obtido por Tornero (1996), que obteve um ajuste “perfeito” para a função Gompertz difásica, no estudo de crescimento de frangos de corte.

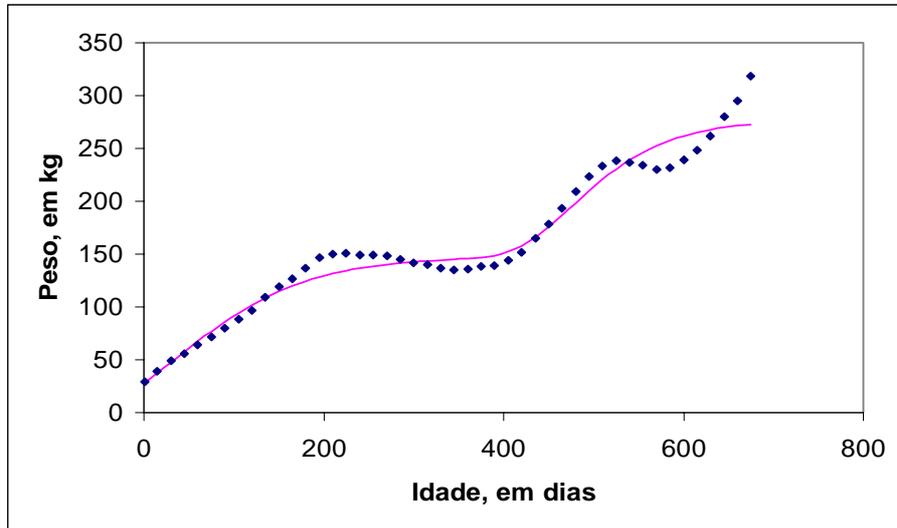


FIGURA 11: Ajuste da função Gompertz difásica com estrutura de erros independentes. (◇ observado — estimado)

Nota-se, por meio do gráfico da Figura 12, uma melhora no ajuste da função devido, provavelmente, à introdução da estrutura de erros AR (1). Novamente, observa-se que este modelo tende a subestimar o peso adulto do animal, o que foi mostrado também pelas estimativas obtidas para os parâmetros do peso assintótico.

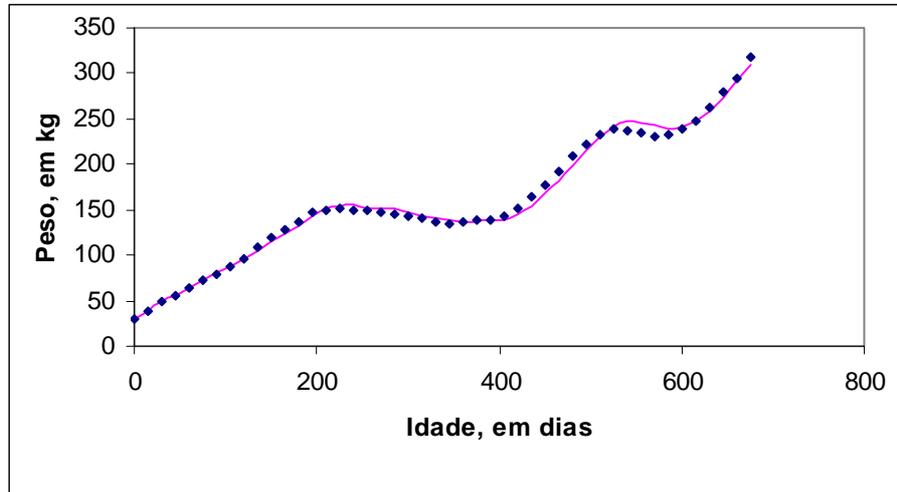


FIGURA 12: Ajuste da função Gompertz difásica com estrutura de erros autorregressiva de ordem 1. (◇ observado — estimado)

O gráfico da Figura 13 demonstra que, ao se considerar a estrutura de erros AR (2), a função Gompertz se ajustou muito bem aos dados de crescimento das fêmeas Hereford, realçando os resultados obtidos nas estimativas individuais dos parâmetros e nos avaliadores de qualidade de ajuste.

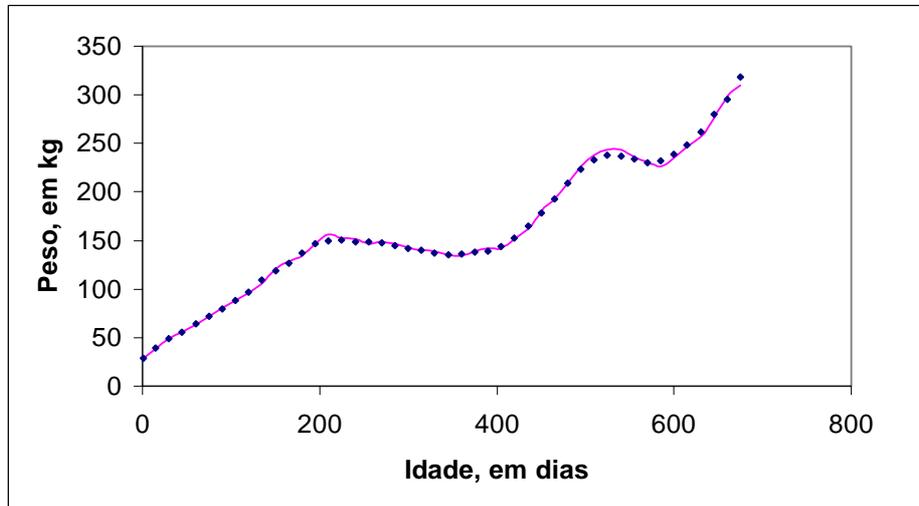


FIGURA 13: Ajuste da função Gompertz difásica com estrutura de erros auto-regressiva de ordem 2. (\diamond observado — estimado)

5 CONCLUSÕES

De acordo com os resultados obtidos neste estudo, pôde-se concluir que:

- dentre os modelos ajustados a dados médios, o modelo Logístico difásico com estrutura de erros AR (2) apresenta estimativas mais próximas da realidade da raça Hereford e melhor qualidade de ajuste;
- nos ajustes individuais, o modelo Gompertz difásico com estrutura de erros AR (2) foi o único que apresentou estimativas que estão de acordo com a literatura especializada, além de bons resultados para os avaliadores da qualidade de ajuste;
- os ajustes médios necessitaram de um número menor de iterações até alcançarem a convergência;
- ambas as funções estudadas, embora tenham mostrado um bom ajuste aos dados, tendem a subestimar o peso adulto do animal, exceto quando se considera a estrutura de erros AR (2);
- a função Logística difásica se ajusta melhor quando aplicada a dados médios; já a função Gompertz difásica apresenta estimativas mais precisas, quando aplicada a dados individuais.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

ADAMS, C. J.; BELL, D. D. Predicting poultry egg production. **Poultry Science**, Champaign, v. 59, n. 4, p. 937-38, 1980.

ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE HEREFORD & BRAFORD. **Hereford – carne de qualidade tipo exportação**. 2006. Disponível em: <<http://www.hereford.com.br/?bW9kdWxvPTEmbWVudT01NiZhcjFlaXZvPWNVbnRldWRvLnBocA>>. Acesso em: 10 set. 2006

BERGAMASCO, A. F.; AQUINO, L. H. de; MUNIZ, J. A.; SILVA, F. F. da. . Ajuste de modelos não-lineares a dados de crescimento de fêmeas da raça holandesa. **Ciência e Agrotecnologia**, Lavras, v. 25, n. 2, p. 235-241, abr./jun. 2001.

BERTALANFFY, L. Quantitative laws in metabolism and growth. **Quarterly Review Biology**, Chicago, v. 32, p. 217, 1957.

BOCK, R. D.; WAINER, H.; PETERSEN, A.; THISSEN, D.; MURRAY, J.; ROCHE, A. A parametrization for individual human growth curves. **Human Biology**, Detroit, v. 45, n. 1, p. 63-80, 1973.

BRACCINI NETO, J.; DIONELLO, N. J. L.; SILVEIRA Jr. , P.; BONGALHARDO, D. C.; XAVIER, E. G. Análise de curva de crescimento de aves de postura. **Revista Brasileira de Zootecnia**, Viçosa, v. 25, n. 6, p. 1062-1073, nov./dez. 1996.

BRODY, S. **Bioenergetics and Growth**. New York: Reinhold Publishing Corp, 1945.

BROWN, J. E.; BROWN, C. J.; BUTTS, W. T. A discussion of the genetic aspects of weight, mature weight and rate of maturing in Hereford and Angus cattle. **Journal of Animal Science**, Champaign, v. 34, n. 4, p. 525-537, Apr. 1972a.

BROWN, J. E.; BROWN, C. J.; BUTTS, W. T. Relationships among weights, gains and earliness of maturing in Hereford and Angus females. **Journal of Animal Science**, Champaign, v. 35, n. 3, p. 507-517, Sept. 1972b.

BROWN, J. E.; FITZHUGH Jr.; H. A.; CARTWRIGTH, T. C. A comparison of nonlinear models for describing weight-age relationships in cattle. **Journal of Animal Science**, Champaign, v. 42, n. 4, p. 810-818, Apr. 1976.

CROCCI, A. J. **Modelo autorregressivo para análise de experimentos com vacas em lactação**. 1984. 86 p. Tese (Doutorado) – Escola Superior de Agricultura Luiz de Queiroz, Universidade de São Paulo.

DENISE, R. S. K.; BRINKS, J. S. Genetic and Environmental Aspects of the Growth Curve parameters in beef cows. **Journal of Animal Science**, Champaign, v. 61, n. 6, p. 1431-1440, July 1985.

DRAPER, N. R.; SMITH, H. **Applied regression analysis**. 3. ed. New York: John Wiley, 1998. 706 p.

DUARTE, F. A. M. **Estudo da curva de crescimento de animais da raça “Nelore” (*Bos taurus indicus*) através de cinco modelos estocásticos**. 1975. 284 p. Tese (Livre Docência em Genética e Matemática aplicada à Biologia) - Universidade de São Paulo, Ribeirão Preto.

DUTRA JR., W. M.; FERREIRA, A. S.; DONZELE, J. L.; EUCLYDES, R. F.; TAROUCO, J. U.; CARDOSO, L. L. Predição de curvas de crescimento de tecidos de fêmeas suínas por intermédio da Função Alométrica estendida. **Revista brasileira de Zootecnia**, Viçosa, v. 30, n. 3, p. 1007-1014, maio/jun. 2001.

ELIAS, A. M. **Análise de curvas de crescimento de vacas das raças Nelore, Guzerá e Gir**. 1998. 128 p. Dissertação (Mestrado em Ciência Animal e Pastagens) – Escola Superior de Agricultura Luiz de Queiroz, Piracicaba.

EUCLIDES FILHO, K. **Produção de bovinos de corte e o trinômio genótipo-ambiente-mercado**. Campo Grande: Embrapa Gado de Corte, 2000.

FITZHUGH Jr., H. A. Analysis of growth curves and strategies for altering their shapes. **Journal of Animal Science**, Champaign, v. 42, n. 4, p. 1036 – 1051, Apr. 1976.

FRANZO, V.; PIMENTEL, M. A.; JARDIM, P. O. da C.; CARDELLINO, R. A.; MENDONÇA, G. de.; OSÓRIO, J. C. da S. Efeito do peso ao parto sobre a produção de leite e eficiência individual em novilhas primíparas Hereford e Cruzas. **Revista Brasileira de Agrociência**, Pelotas, v. 7, n. 3, p. 213-216, set./dez. 2001.

FREITAS, A. R. de. Curvas de crescimento na produção animal. **Revista Brasileira de Zootecnia**, Viçosa, v. 34, n. 3, p. 786-795, maio/jun. 2005.

FREITAS, A. R. de; COSTA, C. N. Ajustamento de modelos não-lineares a dados de crescimento com suínos. **Pesquisa Agropecuária Brasileira**, Brasília, v. 18, n. 10, p. 1147-1154, out. 1983.

GALLANT, A. R. **Nonlinear statistical models**. New York: John Wiley, 1987. 610 p.

GOONEWARDENE, L. A.; BERG, R. T.; HARDIN, R. . T. A growth study of beef cattle. **Canadian Journal of Animal Science**, Ottawa, v. 61, n. 4, p. 1041-1048, Dec. 1981.

GROSSMAN, M.; KOOPS, W. J. Multiphasic analysis of growth curves in chickens. **Poultry Science**, Champaign, v. 67, n. 1, p. 33-43, 1988.

GUEDES, M. H. P.; MUNIZ, J. A.; PEREZ, J. R. O.; SILVA, F. F.; AQUINO, L. H. de; SANTOS, C. L. dos. Estudo das curvas de crescimento de cordeiros das raças Santa Inês e Bergamácia considerando heterogeneidade de variâncias. **Ciência e Agrotecnologia**, Lavras, v. 28, n. 2, p. 381-388, mar./abr. 2004.

HOFFMAN, R.; VIEIRA, S. **Análise de regressão**: uma introdução à econometria. 3. ed. São Paulo: HUCITEC, 1998. 379 p.

KOENEN, E. P. C.; GROEN, A. F. Genetic analysis of growth patterns of black and white dairy heifers. **Journal of Dairy Science**, Champaign, v. 79, n. 3, p. 495-501, Mar. 1996.

KOOPS, W. J. Multiphasic Growth Curve Analysis. **Growth** 50, Bar Harbor, n. 2, p. 169-177, 1986.

KOOPS, W. J.; GROSSMAN, M. Multiphasic growth and allometry. **Growth Development Aging**, Bar Harbor, v. 55, n. 3, p. 203-212, 1991.

KROLL, L. B. **Estudo do crescimento de vacas leiteiras através de modelos com autocorrelação nos erros**. 1990. 96p. Tese (Doutorado em Energia na Agricultura) – Universidade Estadual Paulista, Botucatu.

KROLL, L. B.; TORNERO, M. T. T. Modelo de Gompertz com sazonalidade e autocorrelação nos erros para ajuste do crescimento ponderal em vaca leiteira.

Pesquisa Agropecuária Brasileira, Brasília, v. 29, n. 5, p. 707-711, maio 1994.

LAIRD, A. K.; HOWARD, A. Growth curves in inbred mice. **Nature**, London, v. 213, n. 5078, p. 786-788, 1967.

LUDWIG, A.; SILVA, M. de A.; OLIVEIRA, L. M. de. Ajustamento de modelos estatísticos exponenciais ao crescimento de gado Nelore. **Pesquisa Agropecuária Brasileira**, Brasília, v. 16, n. 2, p. 297-302, mar 1981.

MACHADO, M. A. F. T. A função logística e sua aplicação a dados de crescimento. In: SEMINÁRIOS DE PÓS-GRADUAÇÃO EM EXPERIMENTAÇÃO E ESTATÍSTICA, Piracicaba: ESALQ, 1980. 19 p.

MARQUARDT, D. W. Na algorithm for least squares estimation of nonlinear parameters. **Journal of the Society for Industrial and Applied Mathematics**, v. 11, n. 2, p. 431-41, 1963.

MAZUCHELI, J.; ACHCAR, J. A. **Modelos de Regressão não lineares**: Algumas considerações importantes. São Carlos: USP, 1997. p. 1-32 (Notas Didáticas do Instituto de Ciências Matemáticas de São Carlos).

MAZZINI, A. R. A. **Análise da curva de crescimento de machos Hereford considerando heterogeneidade de variâncias e autocorrelação dos erros**. 2001. 94 p Dissertação (Mestrado em Estatística e Experimentação Agropecuária) – Universidade Federal de Lavras, Lavras.

MAZZINI, A. R. A.; MUNIZ, J. A.; SILVA, F. F.; AQUINO, L. H. Análise da curva de crescimento de machos Hereford. **Ciência e Agrotecnologia**, Lavras, v. 27, n. 5, p. 1105-1112, set./out. 2003.

MAZZINI, A. R. A.; MUNIZ, J. A.; SILVA, F. F.; AQUINO, L. H. Curvas de crescimento de novilhos Hereford: heterocedasticidade e resíduos autorregressivos. **Ciência Rural**, Santa Maria, v. 35, n. 2, p. 422-427, mar./abr. 2005.

McMANUS, C.; EVANGELISTA, C.; FERNANDES, L. A. C.; MIRANDA, R. M. de.; MORENO-BERNAL, F. E.; SANTOS, N. R. dos. Curvas de Crescimento de Ovinos Bergamácia criados no Distrito Federal. **Revista Brasileira de Zootecnia**, Viçosa, v. 32, n. 5, p. 1207-1212. 2003.

MEDEIROS, H. A. **Qualidade do ajuste da função logística monofásica e difásica com estrutura de erros independentes e autorregressivos**. 1999. 73 p. Dissertação (Mestrado em Agronomia/ Estatística e Experimentação Agropecuária) – Universidade Federal de Lavras, Lavras, MG.

MENDES, P. R.; AQUINO, L. H. de; MUNIZ, J. A. Estudo da curva de crescimento de fêmeas da Raça Nelore. **Ciência e Agrotecnologia**, Lavras, v. 25, n. 4, p. 958-968, jul./ago. 2001.

MORETTIN, P. A.; TOLOI, C. M. de C. **Previsão de séries temporais**. 2. ed. São Paulo: Atual Editora, 1987. 436 p.

MOTULSKY, H.; CHRISTOPOULOS, A. **Fitting models to biological data using linear and nonlinear regression: a practical guide to curve fitting**. 4. ed. San Diego, CA: GraphPad Software, 2003. 351 p.

NOBRE, P. R. C.; ROSA A. do N.; SILVA, L. O. C. da; EVANGELISTA, S. R. M. Curvas de crescimento de gado Nelore ajustadas para diferentes frequências de pesagens. **Pesquisa Agropecuária Brasileira**, Brasília, v. 22, n. 9/10, p. 1027-1037, set./out. 1987.

OGLIARI, P. J. **Modelos não lineares para dados longitudinais provenientes de experimentos em blocos casualizados**. 1998. 156 p. Tese (Doutorado em Estatística e Experimentação Agrônômica) – Escola Superior de Agricultura Luiz de Queiroz, Piracicaba.

OLIVEIRA, H. N. de.; LÔBO, R. B.; PEREIRA, C. S. Comparação de modelos não-lineares para descrever o crescimento de fêmeas da Raça Guzerá. **Pesquisa Agropecuária Brasileira**, Brasília, v. 35, n. 9, p. 1843-1851, set. 2000.

OWENS, F. N.; GILL, D. R.; SECRIST, D. S.; COLEMAN, S. W. Review of some aspects of growth and development of feedlot cattle. **Journal of Animal Science**, Champaign, v. 73, n. 10, p. 3152-3172, Oct. 1995.

PALSSON, H. Conformation and body composition. In: HAMMOND, J. (Ed.). **Progress in the physiology of farm animals**. London: Butterworths Scientific Publications, 1955. v. 2.

PASTERNAK, H.; SHALEV, B. A. The effect of a feature of regression disturbance on the efficiency of fitting growth curves. **Growth, Development & Aging**, Bar Harbor, v. 58, n. 1, p. 33-39, 1994.

PEIL, J.; HELWIN, H. A phenomenologic-mathematical model of growth dynamics. **Biometrics**. Washington, v. 36, n. 1, p. 183, 1980.

PEROTTO, D.; CASTANHO, M. J. de P.; CUBAS, A. C.; ROCHA, J. L. da; PINTO, J. M. Efeitos genéticos sobre as estimativas dos parâmetros das curvas de crescimento de fêmeas bovinas Gir, Guzerá, Holandês x Gir e Holandês x Guzerá. **Revista Brasileira de Zootecnia**, Viçosa, v. 26, n. 4, p. 125-179, jul./ago. 1997.

PEROTTO, D.; CUE, R. I.; LEE, A. J. Comparison of nonlinear functions for describing the growth curve of three genotypes of dairy cattle. **Canadian Journal of Animal Science**, Ottawa, v. 72, n. 4, p. 773-782, Dec. 1992.

PROGRAMA *MAPLE 8*, Maplesoft Inc. USA, [2002].

QUAAS, R. L. Genetic variation in growth of Hereford females. **Dissertation Abstracts International**, v. 44, n. 4, p. 1006, 1983. Resumo em **CAB Abstracts on CD-ROM**, v. 0D, 1982-83.

RATKOWSKY, D. A. **Nonlinear regression modeling**: a unified practical approach. New York: Marcel Dekker, 1983. v. 48, 276 p.

ROBINSON, O. W. Growth patterns in swine. **Journal of Animal Science**, Champaign, v. 42, n. 4, p. 1024-35, Apr. 1976.

RODRIGUES, P. B.; MUNIZ, J. A.; PEREIRA, F. A. Estudo comparativo de curvas de crescimento em suínos. **Ciência e Prática**, Lavras, v. 16, n. 1, p. 151-157, jan./mar. 1992.

SAS INSTITUTE. **SAS/ETS User's Guide**. Version 6. 2 ed. Cary : SAS Institute, 1995.

SILVA, F. F.; AQUINO, L. H.; OLIVEIRA, A. I. G. Estimativas de parâmetros genéticos de curva de crescimento de gado Nelore (*Bos indicus*). **Ciência e Agrotecnologia**, Edição Especial, v. 26, p. 1562-1567, 2002.

SILVA, F. F.; AQUINO, L. H.; OLIVEIRA, A. I. G. Influência de fatores genéticos e ambientais sobre as estimativas dos parâmetros das funções de crescimento em gado nelore. **Ciência e Agrotecnologia**, Lavras, v. 25, n. 5, p. 1195-1205, set./out. 2001.

SILVEIRA Jr., P.; MACHADO, A. A. Adição de componentes sazonal em modelos de crescimento. **Pesquisa Agropecuária Brasileira**, Brasília, v. 25, n. 1, p. 67-75, jan. 1990.

SILVEIRA Jr., P.; MACHADO, A. A.; SILVA, M. A. da. Modelos exponenciais com componente sazonal ajustados ao crescimento de búfalos da Raça Murrah. **Ciência e Cultura**, São Paulo, v. 42, n. 1, p. 36-47, jan. 1990.

SILVEIRA Jr., P.; PINHEIRO, J. E. P.; ZONTA, E. P.; GONÇALVES, I. M. G. Modelo de crescimento sazonal em animais provenientes de testes de progênie. **Pesquisa Agropecuária Brasileira**, Brasília, v. 28, n. 9, p. 1065-1076, set. 1993.

SOUZA, G. da S. **Introdução aos modelos de regressão linear e não-linear**. Brasília: Embrapa-SPI/Embrapa-SEA, 1998. 489 p.

SOUZA, J. C. de; BIANCHINI SOBRINHO, E. Estimativa do peso de bovino de corte, aos 24 meses, da raça Nelore, usando curvas de crescimento. **Revista da Sociedade Brasileira de Zootecnia**, Viçosa, v. 23, n. 1, p. 85-91, jan./fev. 1994.

TORNERO, M. T. T. **Utilização de modelos assintóticos - sigmóides de crescimento multifásico com sazonalidade em estudos zootécnicos**. 1996. 131p. Tese (Doutorado em Zootecnia/ Nutrição e Produção Animal) – Faculdade de Medicina Veterinária e Zootecnia da Universidade Estadual Paulista, Botucatu.

VIEIRA, S.; MISCHAN, M. M. A Logística e a Gompertz: duas funções alternativas no estudo de dados de crescimento. **Ciência e Cultura**, São Paulo, v. 28, n. 8, p. 950-952, ago. 1976.

WEIGEL, K. A.; CRAIG, B. A.; BIDWELL, T. R.; BATES, M. Comparison of alternative difhasic lactation curve models under bovine somatotropin administration. **Journal of Dairy Science**, Champaign, v. 75, n. 2, p. 580-589, Feb. 1991.

ANEXOS

ANEXO A

TABELA 1A – Rotina SAS, programa utilizado para a obtenção das estimativas dos parâmetros dos modelos estudados, considerando o ajuste das curvas médias.....	82
TABELA 2A – Rotina SAS, programa utilizado para a obtenção das estimativas dos parâmetros dos modelos estudados, com estrutura de erros independentes, considerando o ajuste das curvas individuais.....	83
TABELA 3A – Rotina SAS, programa utilizado para a obtenção das estimativas dos parâmetros dos modelos estudados, com estrutura de erros auto-regressivos, considerando o ajuste das curvas individuais.....	84

TABELA 1A – Rotina SAS, programa utilizado para a obtenção das estimativas dos parâmetros dos modelos estudados, considerando o ajuste das curvas médias.

```

data teste1 ;
input y x var invar;
datalines;
29 1 14.646969 0.068273
39 15 18.587879 0.053798
49 30 24.583838 0.040677
...
;
/*sem erros autorregressivos*/
proc model data=teste1 maxiter=1000;
y= (escrever função);
parms a1=a0 k1=k0 d1=d0 a2=a0 k2=k0 d2=d0;
fit y/ outall out=saida dw prl=wald;
weight invar;
run;
/*com erros AR (1)*/
proc model data=teste1 maxiter=1000;
y= (escrever função);
parms a1=a0 k1=k0 d1=d0 a2=a0 k2=k0 d2=d0;
fit y/ outall out=saida dw prl=wald;
weight invar;
% ar (y,1);
run;
/*com erros AR (2)*/
proc model data=teste1 maxiter=1000;
y= (escrever função);
parms a1=a0 k1=k0 d1=d0 a2=a0 k2=k0 d2=d0;
fit y/ outall out=saida dw prl=wald;
weight invar;
% ar (y,2);
run;

```

TABELA 2A – Rotina SAS, programa utilizado para a obtenção das estimativas dos parâmetros dos modelos estudados, com estrutura de erros independentes, considerando o ajuste das curvas individuais.

```

data teste;
do animal=1 to 55;
do x=0 to 675 by 15;
output;
end;
end;
data teste1;
input y      animal;
datalines;
31.5  1
42    1
50    1
...
;

data uni;merge teste teste1;by animal;run;
proc sort;by animal;run;
run;
data uni;set uni;
proc model data=uni maxiter=1000;by animal;
y= (escrever função);
parms a1=a0 k1=k0 d1=d0 a2=a0 k2=k0 d2=d0;
fit y/ outest=saida ;
run;
proc print data=saida;run;
PROC SUMMARY DATA=saida;
VAR (escrever o nome de cada parâmetro);
OUTPUT OUT=saidint1 N=n MEAN=mean
STDERR=stderr LCLM=lclm UCLM=uclm;
RUN;
...
data finalint;set saidint1 saidint2 saidint3 saidint4 saidint5 saidint6;
run;
proc print data=finalint;
run;

```

TABELA 3A – Rotina SAS, programa utilizado para a obtenção das estimativas dos parâmetros dos modelos estudados, com estrutura de erros auto-regressivos, considerando o ajuste das curvas individuais.

```

data teste;
do animal=1 to 55;
do x=0 to 675 by 15;
output;
end;
end;
data teste1;
input y animal;
datalines;
31.5 1
42 1
50 1
...
;

data uni;merge teste teste1;by animal;run;
proc sort;by animal;run;
run;
data uni;set uni;
proc model data=uni maxiter=32000; by animal;
y= (escrever função);
parms a1=a0 k1=k0 d1=d0 a2=a0 k2=k0 d2=d0;
fit y/ outest=saida ;
% ar(y,p);
run;
proc print data=saida;run;
PROC SUMMARY DATA=saida;
VAR (escrever o nome de cada parâmetro) ;
OUTPUT OUT=saidint1 N=n MEAN=mean
STDERR=stderr LCLM=lclm UCLM=uclm;
RUN;
...
data finalint;set saidint1 saidint2 saidint3 saidint4 saidint5 saidint6 saidint7;
run;
proc print data=finalint; run;

```
