



**FABRÍCIA DE MATOS OLIVEIRA FERNANDES**

**PROPOSTA DE UM TESTE MONTE CARLO PARA  
UNIDIMENSIONALIDADE DE PAINÉIS SENSORIAIS**

**LAVRAS-MG  
2012**

**FABRÍCIA DE MATOS OLIVEIRA FERNANDES**

**PROPOSTA DE UM TESTE MONTE CARLO PARA  
UNIDIMENSIONALIDADE DE PAINÉIS SENSORIAIS**

Tese apresentada à Universidade Federal de Lavras, como parte das exigências do Programa de Pós-Graduação em Estatística e Experimentação Agropecuária, área de concentração em Estatística e Experimentação Agropecuária, para a obtenção do título de Doutor.

Orientador

Dr. Marcelo Silva de Oliveira

Coorientador

Dr. Eric Batista Ferreira

**LAVRAS-MG**

2012

**Ficha Catalográfica Elaborada pela Divisão de Processos Técnicos da  
Biblioteca da UFLA**

Fernandes, Fabrícia de Matos Oliveira.

Proposta de um Teste Monte Carlo para unidimensionalidade de painéis sensoriais / Fabrícia de Matos Oliveira Fernandes. – Lavras : UFLA, 2012.

80 p. : il.

Tese (doutorado) – Universidade Federal de Lavras, 2012.

Orientador: Marcelo Silva de Oliveira.

Bibliografia.

1. Sensometria. 2. Análise multivariada. 3. Métodos estatísticos. 4. Computação intensiva. 5. Avaliação sensorial. I. Universidade Federal de Lavras. II. Título.

CDD – 519.535

**FABRÍCIA DE MATOS OLIVEIRA FERNANDES**

**PROPOSTA DE UM TESTE MONTE CARLO PARA  
UNIDIMENSIONALIDADE DE PAINÉIS SENSORIAIS**

Tese apresentada à Universidade Federal de Lavras, como parte das exigências do Programa de Pós-Graduação em Estatística e Experimentação Agropecuária, área de concentração em Estatística e Experimentação Agropecuária, para a obtenção do título de Doutor.

APROVADA em 04 de maio de 2012.

Dr. Eric Batista Ferreira                      UNIFAL-MG

Dr. Daniel Furtado Ferreira                UFLA

Dr. João Domingos Scalon                 UFLA

Dr. Lucas Monteiro Chaves                UFLA

Dr. Luiz Alberto Beijo                        UNIFAL-MG

Dr. Marcelo Silva de Oliveira  
Orientador

Dr. Eric Batista Ferreira  
Coorientador

**LAVRAS-MG**  
2012

*Ao meu pai, Alberto (in memoriam).*

*A minha mãe, Lucrecia, exemplo de determinação,  
amor e coragem.*

*Aos meus irmãos, Édla e Sérgio,  
pelo amor e confiança.*

***Ofereço.***

*Aos meus filhos, Cláudio e Gabriel, companheiros de jornada e  
razão do meu viver;*

***Dedico.***

## **AGRADECIMENTOS**

Agradeço a Deus, pelo equilíbrio e força concedida nessa caminhada.

Aos meus filhos, Cláudio e Gabriel, por serem filhos maravilhosos, pela confiança e amor.

A minha mãe, Lucrécia, pela confiança, pelas orações e por ser exemplo de fé e amor.

A minha irmã, Édla, por você existir na minha vida, pelo amor e dedicação.

Ao meu irmão, Sérgio, pelo carinho, pela tranquilidade que tem passado e por acreditar em mim.

Aos meus sobrinhos, Fernanda, Vitor Hugo e Luisa, por estarem presentes e pela confiança.

Ao meu cunhado, Fernando, pelo carinho e confiança em mim depositados.

A minha cunhada, Ana Lúcia, pela torcida e pelas orações.

Ao tio José, pela torcida e carinho.

Ao professor Dr. Marcelo Silva de Oliveira, pela amizade, responsabilidade e profissionalismo com que orientou-me.

Ao Professor Dr. Eric Batista Ferreira, pela dedicação, amizade, confiança e responsabilidade com que me coorientou.

Ao Professor Dr. Daniel Furtado Ferreira, pela disponibilidade em me ajudar e pelos conselhos.

À Universidade Federal de Lavras (UFLA) e ao Departamento de Ciências Exatas (DEX), pela oportunidade concedida para a realização do doutorado.

À Elisa, companheira de estudos, pela amizade, companheirismo e torcida.

À minha amiga Maria Imaculada, pelos conselhos, disponibilidade, compreensão e preocupação comigo. Sinto sua falta.

Às minhas amigas, Graziela, Natascha, Gláucia, Karine e Líbia, pela amizade,

carinho e confiança.

A todos os meus familiares, que acreditaram e colaboraram pelo meu sucesso profissional.

A todos aqueles que, de forma direta ou indireta, contribuíram para a realização desta etapa difícil, mas importante de minha vida, o meu sincero agradecimento.

## RESUMO

Um painel é dito unidimensional quando todos os provadores pontuam um produto de maneira semelhante. O nível de unidimensionalidade reflete a qualidade do treinamento que os provadores receberam. A Análise de Componentes Principais (ACP) é uma técnica de análise multivariada utilizada para redução da dimensionalidade. Após a determinação dos componentes principais podem ser feitos testes para conhecer se a maior parte da variação total é explicada apenas pelo primeiro componente principal. Na literatura existem testes para verificar o número ideal de componentes principais que devem ser retidos. Como a maioria dos testes são gerais, ou seja, preocupam-se apenas com a quantidade de componentes que serão retidos, o objetivo da autora com este trabalho foi propor um novo teste para verificar a unidimensionalidade de painéis sensoriais. A avaliação das taxas de erro tipo I e poder do teste proposto foi feita por meio de simulação Monte Carlo. Tal teste foi comparado com os já existentes tais como: Autovalores assintótico (AVa), bootstrap paramétrico e não-paramétrico, Teste de Monte Carlo para unidimensionalidade (TMCU) e com o teste de Fujikoshi. Para a comparação, os testes que eram gerais foram traduzidos para o contexto de unidimensionalidade de painéis sensoriais. Sob normalidade multivariada, o teste proposto é recomendado, pois obteve poder alto e controlou a taxa de erro tipo I com eficácia, estando sempre próximo ou menor que o valor nominal.

Palavras-Chave: Computação intensiva, Análise Multivariada, Sensometria.



## ABSTRACT

A panel is said unidimensional when all the assessors score the products in a similar way. The level of unidimensionality reflects the quality of training the judges received. The Principal Component Analysis (PCA) is a multivariate technique used to reduce dimensionality. After determination of the principal components it can be tested if most of the total variation is explained only by the first dimension. In the literature there are tests to determine the optimal number of principal components that should be retained. Since most tests are general, ie, are only concerned with the amount of components to be retained, the objective of this study was to propose a new test to check the unidimensionality of sensory panels. The evaluation of type I error rates and power of the proposed test was performed using Monte Carlo simulation. This test was compared with existing ones, such as: asymptotic eigenvalues (AVa), parametric and nonparametric bootstrap tests, Monte Carlo test for unidimensionality (TMCU) and the Fujikoshi test. For comparison, the tests which were general have been translated into the context of unidimensionality of sensory panels. Under multivariate normality, the proposed test is recommended, since it has high power and controlled the type I error rate effectively, always close to or less than the nominal value.

Keywords: Intensive computing, Multivariate Analysis, Sensometrics.

## LISTA DE FIGURAS

Figura 1	Poder dos testes AVa e AVmc em função de ${}_0\rho_1^2 = 0,90$ , considerando $k = 1$ componentes, $p = 5$ e $n = 10$ . . . . .	52
Figura 2	Poder dos testes AVa e AVmc em função de ${}_0\rho_1^2 = 0,90$ , considerando $k = 1$ componentes, $p = 15$ e $n = 20$ . . . . .	53
Figura 3	Poder dos testes AVa e AVmc em função de ${}_0\rho_1^2 = 0,95$ , considerando $k = 1$ componentes, $p = 5$ e $n = 10$ . . . . .	53
Figura 4	Poder dos testes AVa e AVmc em função de ${}_0\rho_1^2 = 0,95$ , considerando $k = 1$ componentes, $p = 15$ e $n = 20$ . . . . .	55
Figura 5	Poder dos testes AVa e AVmc em função de ${}_0\rho_1^2 = 0,99$ , considerando $k = 1$ componentes, $p = 5$ e $n = 10$ . . . . .	55
Figura 6	Poder dos testes AVa e AVmc em função de ${}_0\rho_1^2 = 0,99$ , considerando $k = 1$ componentes, $p = 15$ e $n = 20$ . . . . .	56
Figura 7	Poder dos testes AVmc, Fj, BNP, BPRk, BPZc, TMCU em função de ${}_0\rho_1^2 = 0,90$ , considerando $k = 1$ componentes, $p = 5$ e $n = 10$	58
Figura 8	Poder dos testes AVmc, Fj, BNP, BPRk, BPZc, TMCU em função de ${}_0\rho_1^2 = 0,90$ , considerando $k = 1$ componentes, $p = 15$ e $n = 20$	59
Figura 9	Poder dos testes AVmc, Fj, BNP, BPRk, BPZc, TMCU em função de ${}_0\rho_1^2 = 0,95$ , considerando $k = 1$ componentes, $p = 5$ e $n = 10$	60
Figura 10	Poder dos testes AVmc, Fj, BNP, BPRk, BPZc, TMCU em função de ${}_0\rho_1^2 = 0,95$ , considerando $k = 1$ componentes, $p = 15$ e $n = 20$	61
Figura 11	Poder dos testes AVmc, Fj, BNP, BPRk, BPZc, TMCU em função de ${}_0\rho_1^2 = 0,99$ , considerando $k = 1$ componentes, $p = 5$ e $n = 10$	61
Figura 12	Poder dos testes AVmc, Fj, BNP, BPRk, BPZc, TMCU em função de ${}_0\rho_1^2 = 0,99$ , considerando $k = 1$ componentes, $p = 15$ e $n = 20$	62

## LISTA DE TABELAS

- Tabela 1 Resultados possíveis em um teste de hipóteses, e suas probabilidades de ocorrência. . . . . 40
- Tabela 2 Taxa de erro tipo I considerando painéis com  $p = 5, 10, 15$  provadores e  $n = 5, 10, 15, 20$  produtos, para dois valores de  ${}_0\rho_1^2 = (0, 90; 0, 95; 0, 99)$  com nível de significância fixado em  $\alpha = 5\%$ . . . . . 51
- Tabela 3 Taxa de erro tipo I considerando painéis com  $p = 5, 10, 15$  provadores e  $n = 5, 10, 15, 20$  produtos, para três valores de  ${}_0\rho_1^2 = (0, 90; 0, 95; 0, 99)$  com nível de significância fixado em  $\alpha = 5\%$ . . . . . 57

## SUMÁRIO

<b>1</b>	<b>INTRODUÇÃO</b>	13
<b>1.1</b>	<b>Objetivos</b>	14
<b>1.1.1</b>	<b>Objetivo geral</b>	14
<b>1.1.2</b>	<b>Objetivos específicos</b>	14
<b>2</b>	<b>REFERENCIAL TEÓRICO</b>	15
<b>2.1</b>	<b>Análise Sensorial</b>	15
<b>2.2</b>	<b>Sensometria</b>	15
<b>2.3</b>	<b>Painéis sensoriais</b>	16
<b>2.4</b>	<b>A Normal Multivariada</b>	18
<b>2.5</b>	<b>Análise de componentes principais</b>	20
<b>2.5.1</b>	<b>Obtenção de componentes principais</b>	20
<b>2.6</b>	<b><i>Bootstrap</i></b>	23
<b>2.7</b>	<b>Simulação Monte Carlo</b>	24
<b>2.8</b>	<b>Testes para a retenção de componentes principais</b>	25
<b>2.8.1</b>	<b>Teste AVa</b>	27
<b>2.8.2</b>	<b>Teste baseado nos resultados de Fujikoshi (1980)</b>	29
<b>2.8.3</b>	<b>Testes <i>bootstrap</i> paramétricos</b>	31
<b>2.8.4</b>	<b>Teste <i>bootstrap</i> não-paramétrico</b>	35
<b>2.8.5</b>	<b>Teste TMCU</b>	36
<b>2.9</b>	<b>Poder do teste e erro tipo I</b>	39
<b>3</b>	<b>METODOLOGIA</b>	41
<b>4</b>	<b>RESULTADOS E DISCUSSÃO</b>	45
<b>4.1</b>	<b>Resultados metodológicos</b>	45
<b>4.1.1</b>	<b>Interpretação sensométrica de testes</b>	45

<b>4.1.2</b>	<b>Proposição de teste . . . . .</b>	<b>48</b>
<b>4.2</b>	<b>Resultados experimentais . . . . .</b>	<b>50</b>
<b>4.2.1</b>	<b>Experimento computacional I . . . . .</b>	<b>50</b>
<b>4.2.2</b>	<b>Experimento computacional II . . . . .</b>	<b>55</b>
<b>5</b>	<b>CONCLUSÕES . . . . .</b>	<b>63</b>
	<b>REFERÊNCIAS . . . . .</b>	<b>64</b>
	<b>APÊNDICES . . . . .</b>	<b>68</b>

## 1 INTRODUÇÃO

Cada vez mais as indústrias estão desenvolvendo métodos que as auxiliam no desenvolvimento de produtos para atender as preferências e exigências dos consumidores. O uso da Sensometria está cada vez mais intenso e tem como a finalidade quantificar as reações a um determinado produto, por meio de estímulos externos percebidos pelos órgãos sensoriais humanos.

A avaliação sensorial pode ser aplicada para diferentes objetivos, como por exemplo, para a determinação de normas e estabelecimento de critérios e referências de qualidade, pelos quais a matéria prima, os ingredientes e o produto final podem ser classificados e avaliados. Outra importante aplicação é no controle de qualidade da produção industrial, que visa manter as características comerciais do produto, atendendo as exigências dos consumidores. A análise sensorial desempenha também papel de destaque no desenvolvimento de novos produtos.

Para a avaliação sensorial é utilizado um painel que consiste em um grupo de pessoas bem treinadas, também chamados de provadores ou juízes, com o objetivo de avaliar os atributos de um ou mais produtos.

Por sua vez, para avaliar o desempenho de um painel é essencial a utilização de métodos estatísticos, muitos desses, largamente discutidos na literatura. A maioria deles se baseia em técnicas multivariadas, como a Análise de Componentes Principais (ACP).

Dijksterhuis (1995) utilizou uma metodologia multivariada, baseada em ACP, para de estimar o grau de concordância de um painel ao pontuar um atributo sensorial. Quando o painel é composto de provadores bem treinados, espera-se que a maior parte da variabilidade seja explicada pelo primeiro componente principal, ou seja, em única dimensão. Logo, o painel é dito unidimensional para essa variável.

Na literatura, existem testes para avaliar a unidimensionalidade de um painel, como por exemplo o Teste de Monte Carlo para Unidimensionalidade (TMCU). Existem outros testes que são mais gerais, utilizados para decidir sobre a retenção de componentes principais, que podem ser utilizados no contexto de avaliação de painéis, com as devidas restrições.

Um desses testes se baseia nas propriedades assintóticas dos autovalores da matriz de covariância amostral. A hipótese é que ele possa ser adaptado para a avaliação da qualidade do treinamento de painéis sensoriais.

## **1.1 Objetivos**

### **1.1.1 Objetivo geral**

Propor uma versão Monte Carlo para o teste assintótico sobre autovalores descrito no tópico 2.8.1, afim de melhorar suas características para amostras pequenas, o que é comum no contexto sensorial.

### **1.1.2 Objetivos específicos**

1. Propor o teste Monte Carlo para avaliar a explicação do primeiro componente principal.
2. Avaliar suas características de poder e erro tipo I sob normalidade multivariada.
3. Comparar seu desempenho com o teste assintótico original, por meio de simulação computacional.
4. Comparar seu desempenho com outros testes 5 testes existentes na literatura, por meio de simulação computacional.
5. Fazer a interpretação sensométrica de todos os testes estudados.

## **2 REFERENCIAL TEÓRICO**

### **2.1 Análise Sensorial**

A Análise Sensorial é uma ciência que consiste na interpretação, medição e compreensão de respostas humanas a propriedades de produto que são percebidas pelos sentidos: visão, olfato, paladar, tato e audição (MARTENS, 1999).

Intensamente utilizada pelas indústrias de alimentos, bebidas, cosméticos, perfumes, produtos de limpeza, automóveis entre outros, auxiliam também na fase de desenvolvimento de produtos, programas de otimização de fórmula, qualidade e para entender a preferência do consumidor sobre um determinado produto ou alguma característica importante para o consumidor, em geral, na fase que antecede um lançamento do produto no mercado (FERREIRA; OLIVEIRA, 2007).

Embora a Análise Sensorial possa ser utilizada para investigar qualquer tipo de objeto que é percebido pelos sentidos humanos, seu uso é muito maior na Ciência dos Alimentos (AGUIAR, 1995; AQUINO, 1992; CARDOSO, 1994; CHAGAS, 1994; FERREIRA, 2004; JORGE, 1989; MAGALHÃES, 2002; MALVINO, 1994 citados por FERREIRA; OLIVEIRA, 2007).

### **2.2 Sensometria**

O ser humano é utilizado como instrumento de medida na Análise Sensorial, é necessário que haja confiabilidade nos resultados dados por pessoas treinadas, denominadas juízes ou provadores, que executam as medidas quando os produtos são testados em várias sessões, como na maioria dos casos (LATREILLE et al., 2006).

Mas para mensurar diferenças existentes entre produtos, diferenças entre



sujeitos percebendo produtos e interação produto vs sujeito é utilizada a Sensometria, que pode ser entendida como Estatística aplicada à Análise Sensorial. De acordo com Ferreira e Oliveira (2007, p. 10),

a Sensometria se refere a todo esforço feito no sentido de medir/quantificar estímulos sendo percebidos pelos sentidos humanos básicos. Esse processo de medição é considerado Sensometria independentemente de o foco estar na pessoa ou no objeto (estímulo), embora a maioria dos trabalhos em Sensometria se concentrem nos estímulos.

A Sensometria surgiu nos anos 1950, sendo usada como uma espécie de novo termo para designar *Estatística aplicada as Ciências Sensoriais* (HEYMANN, 2006). Uma de suas características marcantes reside no fato de, nas últimas décadas, a Estatística Multivariada ter sido a principal fonte de ferramentas para a Sensometria explorar as sensações (ALLCROFT; GLASBEY; PAULO, 2007; DAEMS; DELVAUX, 1997; HUMMER, 1998; SINESIO; MONETA; SABA, 1992; THYBO; MARTENS, 2000).

### **2.3 Painéis sensoriais**

A validade dos resultados na Análise Sensorial baseia-se na sensibilidade e capacidade dos juízes de reproduzirem seus julgamentos (FERREIRA; OLIVEIRA, 2007). Para avaliação sensorial é utilizado um painel que consiste num grupo de pessoas bem treinadas, também chamados de provadores ou juízes, com o objetivo de avaliar os atributos de um ou mais produtos.

Quando os produtos são avaliados por um painel bem treinado e utilizando metodologias sensoriais estabelecidas, espera-se obter informações confiáveis sobre os produtos submetidos ao estudo (CASTURA; FINDLAY; LESSCHAEVE,

2005). De acordo com Kermit e Lengard (2006), um bom painel sensorial fornece resultados com exatidão, discriminação e precisão. *Exatidão* é a capacidade do provador pontuar um atributo com uma nota muito parecida com o valor paramétrico. Por exemplo, em uma solução de sacarose e água destilada a 10%, provadores exatos atribuirão concentrações próximas de 10% para as amostras. *Discriminação* é a habilidade do provador detectar que dois produtos são diferentes, mesmo que possuam características sensoriais bastante parecidas. *Precisão* se traduz como baixa variância. Por exemplo, se um provador é solicitado a pontuar um atributo do mesmo alimento em três repetições (sem saber que são repetições), ele será tão mais preciso quanto mais parecidas forem suas notas.

O sucesso do uso de um painel sensorial depende do seu desempenho, isto é, sua capacidade de identificar pequenas diferenças entre os produtos com certa significância estatística. Um painel com bom desempenho é alcançado quando cada provador discrimina entre os produtos, repete as avaliações, pontua de forma semelhante produtos iguais e concorda com outros provadores sobre a sensação sensorial (DERNDOFER et al., 2005).

Os métodos estatísticos são essenciais para avaliar o desempenho de um painel e, conseqüentemente, esta avaliação requer confiabilidade nos resultados fornecidos por pessoas treinadas (LATREILLE et al., 2006). Carbonell, Izquierdo e Carbonell (2007) dizem que o desempenho do painel pode ser avaliado por uma análise de variância (ANAVA) convencional. Devido a sua versatilidade, a ANAVA tem sido umas das técnicas estatística mais utilizadas para avaliar as diferenças entre produtos (BROCKHOFF, 2003).

Segundo Dijksterhuis (1995), a consonância de um painel é definida como a concordância entre provadores quanto à utilização do vocabulário sensorial, que é composto pelos atributos que estão sendo avaliados nos produtos em estudo. Em

um painel consonante, espera-se que os provadores pontuem um atributo, para um produto, da mesma forma. A consonância entre os provadores indica o nível de *unidimensionalidade* do painel.

Dijksterhuis (1995) propôs uma forma de estimar a consonância de um painel, utilizando uma metodologia multivariada baseada em componentes principais (ACP) para detectar atributos pontuados consistentemente por todos os membros do painel. A ideia é simplesmente executar uma ACP nas matrizes que contêm, nas colunas, todos os provadores sobre a mesma variável. Se o painel é composto por provadores bem treinados, espera-se que a maior variabilidade seja explicada pela primeira dimensão, pois o painel será consonante, ou seja, os provadores estarão pontuando o mesmo atributo da mesma forma. Assim, toda a variabilidade das notas pode ser explicada em única dimensão, ou seja, o painel é unidimensional para essa variável.

A avaliação da unidimensionalidade é útil não só para análise sensorial de alimentos, mas para qualquer painel sensorial. No entanto, uma vez estimado, o nível de unidimensionalidade deve ser testado. Amorim et al. (2010) apresentam um teste baseado em computação intensiva para testar a hipótese nula de unidimensionalidade de um painel sensorial. Esse teste será apresentado em detalhes na seção 2.8.5.

## **2.4 A Normal Multivariada**

A distribuição normal é a distribuição de uma variável aleatória contínua mais importante no âmbito univariado. Na estatística multivariada não poderia ser diferente, sendo ela muito utilizada em pesquisas científicas. Muitas técnicas empregadas na estatística multivariada são baseadas nessa distribuição (RENCHE, 2002).

Um vetor  $p$ -dimensional segue uma distribuição normal multivariada se  $X_i \sim N_p(\mu, \Sigma)$ , com parâmetros  $\mu$  e  $\Sigma$ , tem sua função densidade de probabilidade dada por

$$f_{\mathbf{X}}(x) = (2\pi)^{-1/2} |\Sigma|^{-1/2} \exp \left\{ \frac{-1}{2} (x - \mu)^\top \Sigma^{-1} (x - \mu) \right\}$$

sendo  $\mu = [\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_p]^\top$  o vetor de médias e  $\Sigma_{p \times p}$  a matriz de covariâncias dada por

$$\Sigma = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \cdots & \sigma_{1p} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \sigma_{p1} & \cdots & \sigma_{pp} \end{bmatrix},$$

sendo  $\Sigma$  uma matriz positiva definida (ANDERSON, 1971).

Em muitos trabalhos científicos o pesquisador se depara com a necessidade de simular dados de alguma distribuição, geralmente com o intuito de validar modelos, comparar testes de hipóteses ou métodos de estimação. Para a geração de uma amostra aleatória de tamanho  $n$  com distribuição normal  $p$ -dimensional  $N_p(\mu; \Sigma)$ , pode-se utilizar o teorema fundamental da transformação de probabilidade (MAGALHÃES, 2006), que a partir de variáveis uniformes pode-se obter variáveis de qualquer outra distribuição, basta inverter a função de distribuição da variável que se deseja gerar. Por exemplo, suponha que se deseja gerar uma variável aleatória normal padrão. Primeiramente deve-se gerar uma realização  $u$  de uma variável aleatória uniforme  $U(0; 1)$ , em seguida obter  $z$  de forma que

$$u = \int_{-\infty}^z \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp \left\{ \frac{-y}{2} \right\} dy,$$

ou seja,  $z = \Phi^{-1}(u)$ . Deve-se repetir esse processo até se obter  $p$  elementos do

vetor  $Z$ .

A partir disso, para gerar uma variável aleatória com distribuição  $N_p(\mu; \Sigma)$ , deve-se aplicar a seguinte transformação linear no vetor  $Z$ ,  $\mathbf{X} = \Sigma^{1/2}Z + \mu$ , em que  $\Sigma^{1/2}$  é a matriz raiz quadrada de  $\Sigma$ . Segundo Ferreira (2008)  $\mathbf{X}$  possui distribuição normal multivariada com média  $\mu$  e matriz de covariâncias  $\Sigma$ . Esse processo deve ser repetido até se obter o tamanho de amostra  $n$  desejado.

## 2.5 Análise de componentes principais

É uma técnica estatística que transforma linearmente um conjunto de  $p$  variáveis quantitativas em um conjunto de fatores com um número menor, digamos  $q$ , variáveis não correlacionadas, que explicam uma parcela substancial da variabilidade do conjunto de informação disponível. As  $p$  variáveis originais  $(X_1, \dots, X_p)$  são transformadas em  $(Y_1, \dots, Y_p)$  denominadas componentes principais, de modo que  $Y_1$  é aquela que explica maior parcela de variabilidade total,  $Y_2$  explica a segunda maior parcela e assim por diante (BARROSO; ARTES, 2003).

A análise é feita com o propósito de resumir o padrão de correlação entre as variáveis e, muitas vezes, é possível chegar a conjuntos de variáveis que sejam não correlacionadas uns com os outros.

### 2.5.1 Obtenção de componentes principais

De uma forma geral para obter componentes principais, defini-se inicialmente um conjunto de  $p$  variáveis  $(X_1, \dots, X_p)$  com médias  $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_p$  e variâncias  $\sigma_1^2, \sigma_2^2, \dots, \sigma_p^2$  respectivamente. Essas variáveis não são independentes e, portanto, possuem covariância entre a  $i$ -ésima e  $k$ -ésima variável definida por  $\sigma_{ik}$  para  $i \neq k = 1, 2, \dots, p$ . Estas  $p$  variáveis podem ser representadas na forma ve-

torial por  $\mathbf{X} = [X_1, X_2, \dots, X_p]^T$ , com vetor de médias  $\boldsymbol{\mu} = [\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_p]^T$  e matriz de covariância  $\boldsymbol{\Sigma} p \times p$ .

Considere  $p$  combinações lineares  $(X_1, \dots, X_p)$

$$Y_1 = \mathbf{a}_1^T \mathbf{X} = a_{11}X_1 + a_{12}X_2 + \dots + a_{1p}X_p$$

$$Y_i = \mathbf{a}_i^T \mathbf{X} = a_{i1}X_1 + a_{i2}X_2 + \dots + a_{ip}X_p$$

$$Y_i = \mathbf{a}_i^T \mathbf{X} = a_{p1}X_1 + a_{p2}X_2 + \dots + a_{pp}X_p \quad (1)$$

em que o vetor desconhecido  $\mathbf{a}_i$  estabelece a  $i$ -ésima combinação linear, para  $i = 1, 2, \dots, p$ .

As componentes principais são as combinações lineares  $(Y_1, \dots, Y_p)$  não correlacionadas, cujas variâncias são as maiores possíveis.

A variância de  $Y_i$  é dada por:

$$Var(Y_i) = Var(\mathbf{a}_i^T \mathbf{X}) = \mathbf{a}_i^T (\boldsymbol{\Sigma}) \mathbf{a}_i$$

$$Var(Y_i) = \mathbf{a}_i^T \boldsymbol{\Sigma} \mathbf{a}_i$$

E, a covariância entre  $Y_i$  e  $Y_k$  ( $i \neq k$ ), por:

$$Cov(Y_i, Y_k) = Cov(\mathbf{a}_i^T \mathbf{X}, \mathbf{a}_k^T \mathbf{X}) = \mathbf{a}_i^T Var(\mathbf{X}) \mathbf{a}_k$$

De acordo com Ferreira (2008), a definição dos componentes principais é baseada na maximização de sua variância. No entanto, o máximo da variância do componente principal não existe, pois na medida que os componentes do vetor de

coeficientes  $\mathbf{e}_i$  crescem, a variância crescerá para infinito. Assim, deve-se impor a restrição de que a soma ao quadrado dos coeficientes do vetor que estabelece a combinação linear dos componentes principais, seja igual a unidade. Portanto, deve-se maximizar a variância  $Var(Y_i) = \mathbf{e}_i^T \Sigma \mathbf{e}_i$  com relação ao vetor  $\mathbf{e}_i$ , sujeito a restrição de  $\mathbf{e}_i^T \mathbf{e}_i = 1$ .

Uma forma para realizar a maximização consiste em impor a restrição dividindo a função original por  $\mathbf{a}_i^T \mathbf{a}_i = 1$ , que resulta numa função que deve ser maximizada como segue:

$$\lambda_i = \max_{a_i} \frac{\mathbf{a}_i^T \Sigma \mathbf{a}_i}{\mathbf{a}_i^T \mathbf{a}_i}.$$

Para se obter o máximo, em ambos os casos, deriva-se a função resultante em relação a  $a_i$  e iguala-se o sistema de equações a zero, que após sofrer algumas simplificações resulta em

$$(\Sigma - \lambda_i \mathbf{I}) \mathbf{a}_i = 0, \quad (2)$$

em que  $\mathbf{I}$  é uma matriz identidade  $p \times p$ .

Do sistema de equações 2 verifica-se a seguinte relação

$$\sum a_i = \lambda_i a_i, \quad (3)$$

Pode-se fazer

$$Var(Y_i) = \mathbf{a}_i^T \Sigma \mathbf{a}_i = \mathbf{a}_i^T \lambda_i \mathbf{a}_i = \lambda_i \mathbf{a}_i^T \mathbf{a}_i = \lambda_i,$$

e também que

$$Cov(Y_i, Y_k) = \mathbf{a}_i^T \Sigma \mathbf{a}_k = \mathbf{a}_i^T \lambda_k \mathbf{a}_k = \lambda_k \mathbf{a}_i^T \mathbf{a}_k = 0, i \neq k$$

uma vez que  $\mathbf{a}_i$  e  $\mathbf{a}_k$  são ortogonais.

Analisando a decomposição espectral da matriz  $\Sigma$ , dada por  $\Sigma = \mathbf{P}\Lambda\mathbf{P}^T$ , em que  $\mathbf{P}$  é a matriz composta pelos autovetores de  $\Sigma$  em suas colunas e  $\Lambda$ , a matriz diagonal de autovetores de  $\Sigma$ , tem-se que:

$$tr(\Sigma) = tr(\mathbf{P}\Lambda\mathbf{P}^T) = tr(\Lambda\mathbf{P}\mathbf{P}^T) = tr(\Lambda I) = tr(\Lambda) = \sum_{i=1}^p \lambda_i.$$

Por outro lado, o  $tr(\Sigma)$  é dado pela soma dos elementos da diagonal da matriz de covariâncias  $\Sigma$ , ou seja,  $tr(\Sigma) = \sum_{i=1}^p \sigma_{ii}$ , em que  $\sigma_{ii}$  são os elementos da diagonal da matriz de covariância. Conclui-se que  $\sum_{i=1}^p \sigma_{ii} = \sum_{i=1}^p \lambda_i$ , que significa que a variabilidade total contida nos componentes principais.

Retendo  $k < p$  componentes principais na tentativa de se gerar um modelo parcimonioso para a matriz de covariância populacional, deve-se basear em algum critério que informe quanto a variabilidade total foi explicada por ele.

## 2.6 *Bootstrap*

A determinação do estimador de um parâmetro de interesse e a avaliação de sua precisão, são dois problemas da estatística. Esses problemas motivaram Efron (1979), introduzir sua versão de bootstrap. Por causa de sua generalidade, técnicas de bootstrap têm sido aplicadas a uma classe de problemas muito maior do que apenas a estimativa de erros padrões e intervalos de confiança. Em várias disciplinas, como psicologia, geologia, econometria, biologia, engenharia, química, etc, empregam-se essas técnicas (CHERNICK, 2008).

Segundo Gebert (2010) esse método tem por alicerce o fato de que o pesquisador pode tratar sua amostra como se ela fosse a população que deu origem aos dados e usar amostragem com reposição da amostra original para gerar pseudo-



amostras. De maneira mais geral, seria determinar uma distribuição empírica (ou de bootstrap) para o parâmetro de interesse a partir da amostra inicial de tamanho  $n$ , considerando que cada unidade amostral tem probabilidade igual a  $1/n$  de ser sorteado.

O método de simulação de bootstrap tem como objetivo reamostrar um conjunto de dados, diretamente ou via um modelo ajustado, a fim de criar réplicas dos dados, a partir das quais pode-se avaliar a variabilidade de quantidades de interesse, sem usar cálculos analíticos. Segundo Chernick (2008), o número de reamostragens necessárias para se obter boas estimativas, em intervalos de confiança e problemas de testes de hipóteses seria de, pelo menos, 1000 repetições bootstrap.

As repetições são feitas de duas maneiras: uma paramétrica (quando os parâmetros que determinam totalmente a função de densidade ou de probabilidade) e a outra maneira é a não-paramétrica (quando nenhum modelo matemático é usado). Mesmo que exista um modelo paramétrico plausível para a situação, uma análise não-paramétrica pode ser usada para avaliar a robustez das conclusões de uma análise paramétrica (DAVISON; HINKLEY, 2008).

## 2.7 Simulação Monte Carlo

A simulação é um processo de planejamento de um modelo para um sistema real, onde é conduzido experimentos com este modelo, para um propósito qualquer de compreensão do comportamento do sistema (SHANNON, 1975).

O método de Monte Carlo é uma técnica estatística utilizada em simulações estocásticas. Tem sido utilizado há bastante tempo como forma de obter aproximações numéricas de funções complexas. Este método tipicamente envolve a geração de observações de alguma distribuição de probabilidades e o uso da

amostra obtida para aproximar a função de interesse. As aplicações mais comuns são em computação numérica para avaliar integrais definidas, sistemas de equações ou modelos matemáticos complexos.

Segundo Ramos (2009), o emprego de simulações é essencial para a avaliação de desempenho dos métodos devido às complexas operações matriciais envolvidas, dificultando o julgamento analítico comparativo desses métodos. O método de Monte Carlo é muito utilizado para se determinar propriedades de estimadores ou para se comparar métodos de testes estatísticos.

## 2.8 Testes para a retenção de componentes principais

Quando o objetivo é a redução da dimensionalidade do espaço amostral, isto é, a sumarização da informação das  $p$ -variáveis originais em  $k$  componentes principais,  $k < p$ , é necessário estabelecer-se critérios de escolha para o valor de componentes, que deverão ser mantidas no sistema (MINGOTI, 2005).

Reduzindo o número de variáveis transformadas, componentes principais, para  $k < p$ , tem-se o vetor  $\mathbf{Y} = [Y_1, \dots, Y_k]^T (k \times 1)$  e se assume-se que os  $k$  primeiros autovetores da matriz  $\mathbf{P}$  serão utilizados para compor a matriz  $\mathbf{P}_k (p \times k)$ , tem-se

$$\mathbf{Y} = \mathbf{P}_k^T \mathbf{X}.$$

Quando adota-se um modelo parcimonioso, com  $k < p$  componentes principais, tem-se que a covariância do vetor  $\mathbf{Y} (k \times 1)$  é:

$$\begin{aligned} Cov(\mathbf{Y}) &= Cov(\mathbf{P}_k^T \mathbf{X}) = \mathbf{P}_k^T Cov(\mathbf{X}) \mathbf{P}_k \\ &= \mathbf{P}_k^T \Sigma \mathbf{P}_k = \mathbf{P}_k^T \mathbf{P} \Lambda \mathbf{P} \mathbf{P}_k = \Lambda_k, \end{aligned}$$

em que

$$\mathbf{\Lambda}_k = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_k \end{bmatrix}$$

Portanto, a variância total do vetor  $\mathbf{Y}(k \times 1)$  é  $tr(\mathbf{\Lambda}_k) = \sum_{i=1}^P \lambda_i$ . Além disso, pode-se obter a explicação do modelo reduzido em relação ao modelo completo, a partir da relação das variâncias dos dois modelos, ou seja, quanto da variação total das variáveis originais é explicada pelo modelo de  $k$  componentes principais. Essa proporção acumulada da explicação da variação total, expressa em porcentagem, é formalmente dada por Ferreira (2008): como sendo

$$\rho_k^2 = \frac{\sum_{i=1}^k \lambda_i}{\sum_{i=1}^p \sigma_{ii}} \times 100. \quad (4)$$

A explicação individual de cada componente pode também ser considerada. Pode-se obter a proporção da explicação do  $k$ -ésimo componente principal por:

$$P_k^2 = \frac{\lambda_k}{\sum_{i=1}^p \sigma_{ii}} \times 100 \quad (5)$$

Com base na proporção de explicação da variância total (4), que o modelo de  $k$  componentes principais é responsável, pode-se determinar o número de componentes que deve ser retido. A dificuldade na aplicação deste método está no fato de que o próprio pesquisador deve determinar quanto o modelo reduzido

deve explicar da variação total. Em geral, a proporção ideal para essa explicação, segundo Timm (2002), deve estar entre 70% e 80%, já Jolliffe (2002) afirma estar entre 70% e 90%.

Segundo Mingoti (2005), um gráfico que pode auxiliar na escolha do valor  $k$  é o *scree-plot*, que mostra os valores numéricos dos autovalores  $\hat{\lambda}_k$  de acordo com respectiva ordem  $k$ . Basta observar no gráfico o ponto em que os valores de  $\hat{\lambda}_k$  tendem a estabilizar, pois, em geral, esse é o ponto a partir do qual os autovalores se aproximam de zero.

De acordo com Ferreira (2008), um outro critério para determinar o número de componentes principais a serem retidos é o teste de hipóteses de igualdade dos últimos autovalores. Neste critério almeja-se testar a hipótese:

$$H_0 : \lambda_{k+1} = \lambda_{k+2} = \dots = \lambda_p.$$

Se esta hipótese for rejeitada, deve-se adicionar um componente principal ao modelo reduzido escolhido e testar novamente a hipótese nula. Esse processo deve ser repetido até que seja obtido o menor valor de  $k$  para o qual  $H_0$  não seja mais rejeitada.

O processo exige que a distribuição dos dados seja normal multivariada, pois o teste de hipótese  $H_0$  é baseado em um teste de razão de verossimilhanças assumindo o modelo normal como verdadeiro.

### 2.8.1 Teste AVa

Este teste foi denominado AVa por ser um teste sobre autovalores e ser assintótico.

Sejam  $\hat{\lambda}_1 > \hat{\lambda}_2 > \dots > \hat{\lambda}_p$  e  $\hat{e}_1, \hat{e}_2, \dots, \hat{e}_p$  os autovalores e autovetores, respectivamente, de  $S$ , estimada a partir de uma amostra aleatória de uma população normal, com covariância  $\Sigma$  com autovalores  $\lambda_1 > \lambda_2 > \dots > \lambda_p$  e autovetores

$e_1, e_2, \dots, e_p$  com decomposições espectrais  $S = \hat{\mathbf{P}}\hat{\mathbf{\Lambda}}\hat{\mathbf{P}}^\top$  e  $\Sigma = \mathbf{P}\mathbf{\Lambda}\mathbf{P}^\top$ , então Anderson (1963), Girshick (1939) e Lawley (1956) demonstram as seguintes propriedades assintóticas

- a)  $\sqrt{n-1}(\hat{\lambda}-\lambda) \sim N_p(0, 2\mathbf{\Lambda}^2)$ , em que  $\hat{\lambda} = [\hat{\lambda}_1, \hat{\lambda}_2, \dots, \hat{\lambda}_p]^\top$  e  $\lambda = [\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_p]^\top$  são diagonais de  $\hat{\mathbf{\Lambda}}$  e  $\mathbf{\Lambda}$ , respectivamente;
- b)  $\sqrt{n-1}(\hat{e}_i - e_i) \sim N_{p-1}(0, \mathbf{\Upsilon}_i)$ , em que

$$\mathbf{\Upsilon}_i = \lambda_i \sum_{k=1}^p \frac{\lambda_k}{(\lambda_k - \lambda_i)^2} e_k e_k^\top = \lambda_i \mathbf{P}_i \mathbf{\Gamma}_i \mathbf{P}_i^\top,$$

sendo  $\mathbf{P}_i = [e_i, \dots, e_{i-1}, e_{i+1}, \dots, e_p]$  uma matriz  $p \times (p-1)$  formada em suas colunas pelos autovetores de  $\Sigma$ , exceto pelo  $i$ -ésimo autovetor e a matriz diagonal  $\mathbf{\Gamma}_i(p-1) \times (p-1)$  dada por

$$\mathbf{\Gamma}_i = \begin{bmatrix} \frac{\lambda_1}{(\lambda_1 - \lambda_i)^2} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \frac{\lambda_1}{(\lambda_1 - \lambda_i)^2} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \frac{\lambda_1}{(\lambda_1 - \lambda_i)^2} \end{bmatrix}$$

eliminando-se a  $i$ -ésima linha e  $i$ -ésima coluna correspondente ao autovetor  $\lambda_i$  da matriz de covariância  $\Sigma$ .

c) A covariância entre dois autovetores amostrais distintos é dada pela matriz

$$Cov(\hat{e}_i, \hat{e}_j) = \Upsilon_{ij} = \begin{bmatrix} \frac{\lambda_i \lambda_j e_{i1} e_{j1}}{(n-1)(\lambda_i - \lambda_j)^2} & \cdots & -\frac{\lambda_i \lambda_j e_{i1} e_{jp}}{(n-1)(\lambda_i - \lambda_j)^2} \\ \frac{\lambda_i \lambda_j e_{i2} e_{j1}}{(n-1)(\lambda_i - \lambda_j)^2} & \cdots & -\frac{\lambda_i \lambda_j e_{i2} e_{jp}}{(n-1)(\lambda_i - \lambda_j)^2} \\ \vdots & \vdots & \ddots \\ \frac{\lambda_i \lambda_j e_{ip} e_{j1}}{(n-1)(\lambda_i - \lambda_j)^2} & \cdots & -\frac{\lambda_i \lambda_j e_{ip} e_{jp}}{(n-1)(\lambda_i - \lambda_j)^2} \end{bmatrix}$$

d) Os elementos de  $\hat{\lambda}$  são assintoticamente independentes dos elementos de  $\hat{P}$ .

Segundo Ferreira (2008), essas propriedades assintóticas possibilitam realizar inferências a respeito dos autovalores da matriz de covariâncias populacional  $\Sigma$ .

Pela primeira propriedade, pode-se concluir que  $\hat{\lambda}_i$  possui distribuição assintoticamente  $N(\lambda_i, 2\lambda_i^2/(n-1))$ .

Então, pode ser derivado um teste para o seguinte par de hipóteses

$$\begin{cases} H_0 : \lambda_i = \lambda_{i0} \\ H_1 : \lambda_i \neq \lambda_{i0} \end{cases}$$

a estatística

$$Z_{ci} = \frac{\hat{\lambda}_i - \lambda_{i0}}{\lambda_{i0} \sqrt{\frac{2}{n-1}}} \quad (6)$$

pode ser utilizada, pois possui distribuição assintoticamente normal  $N(0, 1)$ .

### 2.8.2 Teste baseado nos resultados de Fujikoshi (1980)

Segundo Ferreira (2008), é possível conhecer a distribuição assintótica da proporção da variância explicada pelos  $k$  primeiros componentes principais, definida por

$$R_k^2 = \frac{\sum_{i=1}^k \hat{\lambda}_i}{\sum_{i=1}^p S_{ii}},$$

em que  $Im(R_k^2) \in [0, 1]$ .

Como a distribuição assintótica dos autovalores amostrais é conhecida (propriedade a do tópico 2.8.1), normal multivariada, e também que  $R_k^2$  é uma transformação não-linear de  $\hat{\lambda}$ , então pode-se determinar a distribuição assintótica de  $R_k^2$ . Assim, segundo Ferreira (2008), utilizando os resultados de Fujikoshi (1980), tem-se que

$$\sqrt{n(R_k^2 - \rho_k^2)} \sim N(0, \omega^2)$$

em que  $\rho_k^2 = \frac{\sum_{i=1}^k \lambda_i}{\sum_{i=1}^p \sigma_{ii}}$  é a proporção da variância total explicada pelos componentes principais populacionais e  $\omega^2$  é dado por

$$\omega^2 = \frac{2tr(\Sigma^2)}{tr(\Sigma)^2} [(\rho_k^2)^2 - 2\beta\rho_k^2 + \beta]$$

sendo

$$\beta = \frac{\sum_{i=1}^k \lambda_i^2}{\sum_{i=1}^p \lambda_i^2}.$$

Com base nesse resultado, Ferreira (2008) propõe um teste de hipótese para o parâmetro  $\rho_k^2$ . Tal teste é aproximado e assintoticamente válido. As inferências de interesse podem ser feitas a respeito da proporção de variância ( $\rho_k^2$ ) explicada pelos  $k$  primeiros componentes principais, com os seguinte par de hipóteses

$$\begin{cases} H_0 : \rho_k^2 \geq \rho_{k0}^2 \\ H_1 : \rho_k^2 < \rho_{k0}^2 \end{cases}$$

A estatística do teste é dada por

$$Z_c = \frac{R_k^2 - \rho_{k0}^2}{\frac{\omega_0}{\sqrt{n}}},$$

em que

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{2tr(\mathbf{S}^2)}{tr(\mathbf{S})^2} [(\rho_k^2)^2 - 2\hat{\beta}\hat{\rho}_k^2 + \hat{\beta}]}$$

e

$$\hat{\beta} = \frac{\sum_{i=1}^k \hat{\lambda}_i^2}{\sum_{i=1}^p \hat{\lambda}_i^2}$$

Desse ponto em diante esse teste será referido como *Fj*.

### 2.8.3 Testes *bootstrap* paramétricos

Nesta seção serão descritos os testes *bootstrap* paramétrico para retenção de componentes principais, propostos por Gebert (2010).

Dada uma amostra aleatória original obtida em  $\mathbb{R}^p$  estimada a matriz de covariâncias  $\Sigma$ , utilizando a expressão



$$S = \frac{1}{n-1} \left[ \sum_{j=1}^n Y_j Y_j^\top - \frac{\left( \sum_{j=1}^n Y_j \right) \left( \sum_{j=1}^n Y_j \right)^\top}{n} \right], \quad (7)$$

utilizando algum método numérico são obtidos os autovalores de  $S$  dados por  $\hat{\lambda}_1, \hat{\lambda}_2, \dots, \hat{\lambda}_p$ . Em seguida utilizando-se o estimador da proporção de explicação da variação total pelos  $k$  primeiros autovalores  $\rho_k^2$  dado por:

$$R_k^2 = \frac{\sum_{i=1}^k \hat{\lambda}_i}{\sum_{i=1}^p \hat{\lambda}_i}, \quad (8)$$

Para a construção dos testes de *bootstrap* paramétricos utilizou-se a distribuição normal  $p$ -variada como referência. A média  $\mu_b$  dessa distribuição foi considerada, sem perda de generalidade, igual ao vetor nulo  $0 = [0 \dots 0]^\top$ . A definição da matriz de covariâncias dessa distribuição  $\Sigma_b$  foi condicionada à imposição da hipótese nula como segue:

$$\begin{cases} H_0 : \rho_k^2 \geq \rho_{k0}^2 \\ H_1 : \rho_k^2 < \rho_{k0}^2, \end{cases} \quad (9)$$

Assim,  $B-1$  amostras de *bootstrap* de tamanho  $n$  no espaço  $p$ -dimensional são retiradas dessa distribuição. Retira-se essas amostras de uma população em que  $\rho_k^2 = \rho_{k0}^2$ , ou seja, estão sob  $H_0$ . O parâmetro de covariância da distribuição de *bootstrap*, a matriz  $\Sigma_b$ , é construído de forma a atender a condição imposta pela hipótese nula dada anteriormente. Inicialmente, considera-se a decomposição espectral de  $\Sigma_b$  por

$$\Sigma_b = \hat{P} \Lambda_b \hat{P}^\top, \quad (10)$$

em que  $\hat{\mathbf{P}}^\top$  é a matriz de autovetores de  $\mathbf{S}$  e  $\mathbf{\Lambda}_p$  uma matriz diagonal, definida de tal forma que a proporção explicada pelos  $k$  primeiros autovalores seja igual a  $\rho_{k0}^2$ .

Seja  $\hat{\mathbf{V}}_t = \sum_{i=1}^p \lambda_i$  a variação total contida em  $\mathbf{S}$ , então  $\rho_{k0}^2 \hat{\mathbf{V}}_t$  representa a proporção que deve ser explicada pelos  $k$  primeiros autovalores. Como  $\sum_{i=1}^k \lambda_i < \rho_{k0}^2 \hat{\mathbf{V}}_t$ , a quantidade  $\hat{\Delta} = \rho_{k0}^2 \hat{\mathbf{V}}_t - \sum_{i=1}^k \lambda_i$  é retirada dos últimos  $p - k$  autovalores de forma proporcional, e adicionada de forma também proporcional aos  $k$  primeiros autovalores. Assim, para os  $k$  últimos autovalores tem-se:

$$\lambda_{ib} = \hat{\lambda}_i - \frac{\hat{\lambda}_i}{\sum_{i=k+1}^p \hat{\lambda}_i} \hat{\Delta}$$

para  $i = k + 1, k + 2, \dots, p$ , em que  $\hat{\lambda}_{ib}$  é o  $i$ -ésimo elemento da diagonal de  $\mathbf{\Lambda}_b$  e  $\hat{\lambda}_i$  é o autovalor de  $S$ .

Os  $k$  primeiros autvalores de  $\mathbf{\Lambda}_b$  são definidos por:

$$\lambda_{ib} = \hat{\lambda}_i + \frac{\hat{\lambda}_i}{\sum_{i=k+1}^p \hat{\lambda}_i} \hat{\Delta}$$

para  $i = 1, 2, \dots, k$

A matriz  $\mathbf{\Sigma}_b$  pode ser construída utilizando-se a expressão (10). Definindo os parâmetros da distribuição  $p$ -variada  $\mu$  e  $\Sigma_b$ , são gerados  $B - 1$  amostras aleatórias de tamanho  $n$  no espaço  $p$ -dimensional dessa distribuição. Cada amostra gerada estará sob a hipótese nula 9. Considerando a  $\ell$ -ésima amostragem de *bootstrap*  $Y_{1\ell^*}, Y_{2\ell^*}, \dots, Y_{j\ell^*}, \dots, Y_{n\ell^*} \in \mathbb{R}^p$ , e  $\ell = 1, 2, \dots, B$  foram definidas as seguintes quantidades, que possibilitam a construção de dois diferentes testes.

A primeira delas é o teste *BPRK* (Teste *bootstrap* paramétrico baseado em  $R_{k\ell}^2$ ) definida por

$$R_{k\ell}^2 = \frac{\sum_{i=1}^k \lambda_i^*}{\sum_{i=1}^p \lambda_i^*}, \quad (11)$$

em que  $\lambda_i^*, i = 1, 2, \dots, p$  são autovalores da matriz de covariância  $S_\ell^*$  calculada a partir da  $\ell$ -ésima amostra *bootstrap*.

Assim, o  $p$ -valor de um teste de *bootstrap* paramétrico baseado nessa distribuição pode ser definido por

$$p\text{-valor} = \frac{\sum_{\ell=1}^B I(R_{k\ell}^2 \leq R_k^2)}{B}, \quad (12)$$

ou seja, será dado pela proporção de valores da explicação dos  $k$  primeiros autovalores da distribuição nula de *bootstrap* paramétrico que foram inferiores ao valor obtido na amostra original ( $R_{k\ell}^2$ ).

A segunda estatística, para a definição do segundo teste, BPZc (Teste *bootstrap* paramétrico baseado em (Zc), inspirada pelo trabalho de Fujikoshi (1980), definida por:

$$Z_{cl} = \frac{R_{k\ell}^2 - \rho_{k0}^2}{\frac{\omega_{0\ell}}{\sqrt{n}}}, \quad (13)$$

em que  $R_{k\ell}^2$  é dado em 11 e  $\omega_{0\ell}$  é obtido por

$$\omega_{0\ell} = \sqrt{\frac{2tr(s_\ell^{*2})}{tr(s_\ell^*)^2} [(\rho_{k0}^2)^2 - 2\hat{\beta}_\ell \rho_{k0}^2 + \hat{\beta}_\ell]}$$

sendo

$$\hat{\beta}_\ell = \frac{\sum_{i=1}^k \lambda_i^{*2}}{\sum_{i=1}^p \lambda_i^{*2}}. \quad (14)$$

O valor de  $Z_c$  da amostra original é computada pela expressão

$$Z_c = \frac{R_k^2 - \rho_{k0}^2}{\frac{\omega_0}{\sqrt{n}}}$$

Os valores de  $Z_{c\ell}$ , da expressão 13, para  $B - 1$  amostras de *bootstrap* consistem a distribuição nula de *bootstrap* paramétrico. O p-valor é computado por:

$$\text{p-valor} = \frac{\sum_{\ell=1}^B I(Z_{c\ell} \leq Z_c)}{B}.$$

#### 2.8.4 Teste *bootstrap* não-paramétrico

O *BNP* (Teste *bootstrap* não-paramétrico), proposto por Gebert e Ferreira (2010), parte-se da amostra original  $Y_1, Y_2, \dots, Y_n$  obtendo-se a matriz de covariância amostral utilizando-se a expressão 7 e a estimação de  $\rho_k^2$  utilizando-se a expressão 8 na amostra original, fixado o valor de  $k$  de interesse.

Na sequência são realizadas reamostragens com reposição (*bootstrap*) da amostra original, preservando seu tamanho e estrutura dos vetores  $Y_j, j = 1, 2, \dots, n$ . Como os vetores de observações multivariadas são intactos, a estrutura da covariação das variáveis não é alterada. Para a amostra são calculados a matriz  $S$  utilizando-se a expressão 7, os autovalores  $\lambda_i$ , e a porcentagem da explicação da variação total, utiliza-se a expressão 8, neste caso denotada por  $R_{k\ell}^2$  para indicar a estimativa na  $\ell$ -ésima amostra *bootstrap*. Esse processo é repetido  $B - 1$  vezes. O

valor original de  $R_{k\ell}^2$  e os  $B - 1$  valores de *bootstrap* são agrupados para formarem a distribuição de *bootstrap*.

O p-valor, evidência contrária ou a favor de  $H_0$  dada por 9, é determinado da seguinte forma:

$$\text{p-valor} = \frac{\sum_{\ell=1}^B (R_{k\ell} \leq \rho_{k0}^2)}{B}.$$

### 2.8.5 Teste TMCU

O Teste Monte Carlo para unidimensionalidade (TMCU) proposto por Amorim (2010), avalia um painel sensorial quanto a sua unidimensionalidade, ou seja, verifica quanto da variabilidade é explicada pelo primeiro componente principal.

Admite-se que a matriz de covariância  $\Sigma$  é igual a matriz de correlação  $\rho$  uma vez que  $\Sigma = \sigma^2 \rho$  e  $\sigma^2 = 1$ . A matriz de correlação  $\rho$  possui estrutura equicorrelacionada, ou seja, todas as correlações entre pares de variáveis diferentes é igual a  $\rho$ . De acordo com Ferreira (2008), nesse caso particular de estrutura, existe solução explícita para os componentes principais, ou seja, para os autovalores e autovetores de  $\Sigma$ . O primeiro componente principal é definido, segundo Morrison (1990), pelo par de autovalor e autovetor dado, respectivamente por:

$$\lambda_1 = \sigma^2[1 + (p - 1)\rho]$$

e

$$e_1 = \left[ \frac{1}{\sqrt{p}}, \frac{1}{\sqrt{p}}, \dots, \frac{1}{\sqrt{p}} \right]^T,$$

em que  $\lambda_1$  e  $e_1$  são o primeiro autovalor e o primeiro autovetor de  $\Sigma$ ;  $\sigma^2$  é a vari-

ância das notas dadas pelos  $p$  provadores;  $\rho$  é a correlação entre os  $p$  provadores.

De acordo com Amorim et al. (2010), considerando o  $H_0$ : o painel é unidimensional com  $R_{1\rho}^2 \geq R_{1\rho 0}^2$ , em que  $R_{1\rho}^2$  é a proporção de explicação feita pelo primeiro componente principal. Existe uma relação entre o  $R_{1\rho}^2$  e o coeficiente de correlação ( $\rho$ ), dada por

$$R_{1\rho}^2 = 100[1 + (p - 1)\rho]/p\%$$

em que  $\rho$  é a correlação dos avaliadores e  $p$  é o número de avaliadores. Assim  $\rho \leq \rho^2 \leq 1$ .

Isso é equivalente ao teste de porcentagem de explicação do primeiro componente principal, um valor crítico próximo de 100%, uma vez que este poder nunca poderá ser 100%, pois, para um conjunto de dados apresentar a porcentagem de explicação do primeiro componente principal igual a 100%, a matriz  $X'X$  teria suas colunas como combinações lineares uma das outras, ou seja, essa matriz seria singular. Neste caso, a matriz  $X'X$  não teria posto coluna completo e seu espaço multivariado se degeneraria (AMORIM, 2010).

Amorim (2010) utilizou o seguinte algoritmo pra o TMCU:

- i. estabelecer as hipóteses que se deseja testar, por exemplo:

$$\begin{cases} H_0 : \text{o painel é unidimensional, } R_{1\rho}^2 \geq R_{1\rho 0}^2 \\ H_1 : \text{o painel não é unidimensional, } R_{1\rho}^2 < R_{1\rho 0}^2 \end{cases}$$

- ii. gerar distribuição empírica, sob  $H_0$ , para a porcentagem da variância explicada pelo primeiro componente principal,  $(\rho_{1\rho}^2)$ , utilizando simulação Monte Carlo. Gerar sob  $H_0$ ,  $N = 1000$  amostras de uma variável aleatória  $X_{p \times 1}$  que tem distribuição normal multivariada, ou seja,  $X_{p \times 1} \sim N(\mu, \Sigma)$ , em que

$X_{p \times 1}$  são vetores com as notas dos  $n$  produtos avaliados e por  $p$  provadores, tal que  $\mu = [00\dots 0]^\top$ ,  $\Sigma = \sigma^2 \mathbf{R}$ , e

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} 1 & \rho & \cdots & \rho \\ \rho & 1 & \cdots & \rho \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \rho & \cdots & \rho & 1 \end{bmatrix},$$

em que  $\mathbf{R}$  representa uma estrutura equicorrelacionada e para compor a matriz  $\Sigma$ , considerou-se  $\sigma^2 = 1$ , sem perda de generalidade, ou seja,  $\Sigma = \mathbf{R}$ . O interesse encontra-se no estudo de covariâncias, ou seja, o quanto as notas de cada provador são correlacionadas com as notas dos demais.

- iii. efetuar a análise de componentes principais e determinar a porcentagem da variância explicada pelo primeiro componente principal, para cada uma das  $N = 1000$  amostras simuladas;
- iv. fixar um valor nominal de significância  $\alpha$  e determinar o valor crítico da distribuição empírica ( $R_{1\alpha}^2$ ), para um percentil  $\alpha$ ;
- v. calcular  $\hat{R}_{1\rho}^2$  considerando a matriz de dados observados, utilizando-se:

$$\hat{R}_{1\rho}^2 = \frac{\hat{\lambda}_1}{\sum_{i=1}^p \hat{\lambda}_i}$$

em que  $\lambda_i$  é o  $i$ -ésimo autovalor. Vale a pena lembrar que os componentes principais devem ser expressos em escalas padronizadas;

- vi. regra de decisão: a hipótese  $H_0$  de unidimensionalidade será rejeitada se  $\hat{R}_{1\rho}^2 < \hat{R}_{1\alpha}^2$ .

É importante ressaltar que o valor de unidimensionalidade,  $R_{1\rho 0}^2$ , deve ser escolhido de forma coerente para a hipótese nula.

## 2.9 Poder do teste e erro tipo I

Por meio da inferência estatística, informações acerca de uma população de interesse são obtidas, a partir de uma amostra. Algumas vezes, no entanto, o interesse do pesquisador reside na verificação de determinadas hipóteses, frequentemente para a tomada de alguma decisão acerca da população (OLIVEIRA et al., 2009). Ao testar as hipóteses, o pesquisador corre o risco de tomar decisões erradas, ou seja, de cometer erros. Esses erros são caracterizados por erro tipo I ou erro tipo II. O erro tipo I é aquele que se comete ao rejeitar uma hipótese nula, sendo essa verdadeira, a probabilidade de incorrer neste tipo de erro é apresentada pelo valor de significância  $\alpha$  (MOOD; GRAYBILL; BOES, 1974). Por outro lado, quando se aceita a hipótese nula quando ela é falsa, comete-se o erro tipo II e a probabilidade associada a esse erro é dada por  $\beta$ .

De acordo com Oliveira et al. (2009), quando se rejeita  $H_0$ , e ela de fato é falsa, isto consiste em uma decisão correta. Isto ocorre com probabilidade  $1 - \beta$ , valor esse que recebe o nome de Poder do Teste. Já a probabilidade de se aceitar  $H_0$ , quando ela é verdadeira, corresponde ao valor  $1 - \alpha$ , que por sua vez não recebe um nome especial. Esses conceitos estão ilustrados na Tabela 1.

Quando existem vários testes com mesma finalidade e deseja-se escolher o melhor, essa escolha é feita mediante alguns critérios. O poder do teste, controle do erro tipo I, robustez, poder-eficiência, eficiência assintótica, etc. Com relação a taxa de erro tipo I praticada, os testes podem ser classificados como *conservativos* (quando praticam uma taxa de erro tipo I menor que o nível nominal de significância), *liberais* (quando praticam uma taxa de erro tipo I maior que nível nominal



Tabela 1 Resultados possíveis em um teste de hipóteses, e suas probabilidades de ocorrência.

Decisão tomada	A verdade na população	
	$H_0$ é verdadeira	$H_0$ é falsa
$H_0$ é aceita	Decisão correta Probabilidade = $1 - \alpha$	Decisão errada (Erro Tipo II) Probabilidade = $\beta$
$H_0$ é rejeitada	Decisão errada (Erro Tipo I) Probabilidade = $\alpha$	Decisão correta Probabilidade = $1 - \beta$ Poder do teste
<b>PROBABILIDADE TOTAL</b>	$(1 - \alpha) + \alpha = 1$	$(1 - \beta) + \beta = 1$

Fonte: Oliveira et al. (2009).

de significância) e uma terceira classe de testes que são ditos apenas controladores do erro tipo I, ou seja, praticam a mesma taxa de erro tipo I e o nível nominal de significância.

Neste trabalho, foram utilizados o poder do teste e o controle do erro tipo I, para a escolha do melhor teste.

### 3 METODOLOGIA

Afim de atingir aos objetivos do presente trabalho, foram realizados dois experimentos computacionais.

O primeiro pretendeu avaliar o teste Monte Carlo proposto (AVmc - Teste sobre autovalores Monte Carlo, veja tópico 4.1.2) em termos de erro tipo I e poder, e ainda comparar seu desempenho com o teste original (AVa, veja tópico 4.1.1, item (a)). Para isso, foram feitas rotinas em código R (R DEVELOPMENT CORE TEAM, 2012), tanto com a implementação dos testes quanto para o estudo de simulação Monte Carlo. Foram considerados 18 cenários, sendo esses as combinações (com  $n > p$ ) do número de variáveis (provadores)  $p = 5, 10, 15$ , do número de repetições (produtos)  $n = 5, 10, 15, 20$  e proporções da variação total explicada pelo primeiro componente principal ( $H_0$ ),  $\rho_0^2 = 0, 90, 0, 95$  e  $0, 99$ . Para cada um dos cenários, foram simuladas  $N = 1000$  amostras de Monte Carlo.

O segundo experimento consistiu em confrontar o teste proposto (AVmc) com outros 5 testes encontrados na literatura, a saber: Fj, BNP, BPRk, BPZc e TCMU (descritos anteriormente). Essa comparação também se deu em termos de poder e erro tipo I, utilizando o software R e via simulação Monte Carlo. Foram considerados os mesmos cenários do experimento I, com 1000 amostras de Monte Carlo em cada.

Em ambos os experimentos, foram simuladas amostras de populações multivariadas com parâmetro  $\Sigma$  determinado de maneira que  $\rho_k^2$  variasse entre o intervalo 0 e 1. Se a amostra for proveniente de uma população em que  $\rho_k^2 < \rho_{k0}^2$ , a proporção de rejeições de  $H_0$  em  $N$  simulações Monte Carlo é uma estimativa do poder. Mas, se a amostra gerada for proveniente de uma população em que  $\rho_k^2 \geq \rho_{k0}^2$ , o par de hipóteses 9 é a verdadeira proporção de rejeições de  $H_0$  é uma

estimativa do erro tipo I com o valor nominal  $\alpha$  fixado em 5%.

A estrutura de  $\Sigma$  foi fixada de acordo com a seguinte matriz

$$\Sigma = \sigma^2 \begin{bmatrix} 1 & \rho & \cdots & \rho \\ \rho & 1 & \cdots & \rho \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \rho & \rho & \cdots & 1 \end{bmatrix}$$

em que  $\sigma^2$  foi fixado em 1 e  $\rho$  determinado de maneira que  $\rho_k^2$  fosse igual ao valor previamente escolhido. Para matrizes com essa estrutura os autovalores são:

$$\lambda_1 = \sigma^2[1 + (p - 1)\rho] \quad (15)$$

$$\lambda_i = \sigma^2(1 - \rho) \quad (16)$$

em que  $i = 2, 3, \dots, p$

Para que  $\Sigma$  seja uma matriz positiva definida, é necessário que todos os seus autovalores sejam maiores do que zero. Observando a equação 16 nota-se que  $\lambda_i$  sempre será positivo, pois  $\rho$  varia entre -1 a 1. Observando a equação 15 podem ocorrer valores negativos. Fazendo  $\lambda_1 > 0$  tem-se

$$\rho = \frac{-1}{(p - 1)} \quad (17)$$

O valor de  $\rho_k^2$ , deve estar entre 0 e 1, utilizando-se as expressões 15 e 16 obtém-se:

$$\rho_k^2 = \frac{\lambda_1 + \sum_{i=2}^k \lambda_i}{p} = \frac{k + (p - k)\rho}{p},$$

como também é necessário que  $\rho_k^2$  seja um valor maior que zero, tem-se:

$$\rho > \frac{-k}{(p-k)}. \quad (18)$$

Isolando  $\rho$  e expressando-o em função de  $\rho_k^2$  chega-se a:

$$\rho = \frac{p\rho_k^2 - k}{(p-k)}. \quad (19)$$

Dependendo do valor fixado para  $p$  em 15 e usando as restrições 17 e 18, podem ainda ocorrer valores negativos para o primeiro autovalor ( $\lambda_1$ ). A fim de evitar esses valores negativos é necessário impor a condição  $\rho > 1$ . Dentre as três condições necessárias para que  $\Sigma$  seja positiva definida, a mais forte é  $\rho > 0$ , então usando a expressão 19 tem-se:

$$\rho_k^2 = \frac{k}{p}. \quad (20)$$

Dessa forma, imposta a condição 20 para os valores de  $\rho_k^2$ , os valores de  $\rho$  foram determinados por 19. Construída a matriz  $\Sigma$ , amostras aleatórias  $\mathbf{Y}_1, \mathbf{Y}_2, \dots, \mathbf{Y}_n$  em que  $\mathbf{Y}_j \in \mathbb{R}^p$  foram geradas da distribuição normal  $p$ -variada por

$$\mathbf{Y}_j = \Sigma^{1/2} \mathbf{Z}_j + \mu. \quad (21)$$

em que  $\Sigma^{1/2}$  é a matriz quadrada de  $\Sigma$ ,  $\mu \in \mathbb{R}^p$  foi fixada como o vetor nulo  $\mathbf{0}(p \times 1)$  e  $\mathbf{Z}_j \in \mathbb{R}^p$ , é um vetor de variáveis normais padrão independentemente distribuídas, geradas pelo método polar Box-Müller (PRESS et al., 1992), para  $j = 1, 2, \dots, n$ .

Simuladas as amostras de diferentes  $n$  diferentes dimensões  $p$  e fixando o valor de  $k = 1$ , explicando a variação total  $\rho_k^2$ , foram aplicados aos sete testes e

computadas as proporções de rejeições da hipótese nula ao longo da  $N = 1000$  simulações de Monte Carlo para o nível nominal de significância ( $\alpha$ ) = 5% dado por

$$\% \text{ rejeições} = \frac{\sum_{\ell=1}^N (p\text{-valor} \leq \alpha)}{N} \quad (22)$$

em que o  $p_{\ell}$ -valor é o p-valor da  $\ell$ -ésima amostra Monte Carlo simulada e  $I(p\text{-valor} \leq \alpha)$  é a função indicadora que retorna 1 se a condição for verdadeira ou 0 se for falsa na  $\ell$ -ésima simulação.

Por fim, cada taxa de erro tipo I praticada foi testada segundo um teste binomial exato, a 1% de significância, para verificar se essa era igual ao nível nominal de significância adotado.

## 4 RESULTADOS E DISCUSSÃO

### 4.1 Resultados metodológicos

#### 4.1.1 Interpretação sensométrica de testes

Esta seção é composta dos testes AVa, Fj, BNP, BPRk e BPZc traduzidos para o contexto de avaliação de painéis sensoriais.

No contexto de Sensometria, mais especificamente na avaliação da unidimensionalidade de painéis sensoriais, tem-se interesse em conhecer a proporção da variação explicada apenas pelo primeiro componente principal. Portanto, os testes para a determinação do número de componentes principais que devem ser retidos, aqui foram interpretados utilizando-se  $k = 1$ .

Além disso, seguindo o mesmo raciocínio de Dijksterhuis (1995), nas matrizes de observações amostrais multivariadas (que são argumentos desse tipo de teste), as colunas se referem aos provadores (e não a diferentes variáveis) e as linhas se referem aos produtos avaliados (e não às repetições).

Portanto, os testes avaliados neste trabalho, que estavam num contexto mais geral, restringindo  $k = 1$  ficam como segue:

##### a) Teste AVa

O par de hipóteses para o teste AVa no contexto de unidimensionalidade de painéis, fica: de acordo com a propriedade 1 da seção 2.8.1  $\hat{\lambda}_i$  possui distribuição assintoticamente  $N(\lambda_i, 2\lambda_i^2/(n - 1))$ . Então, pode ser derivado um

teste para o seguinte par de hipóteses

$$\begin{cases} H_0 : \lambda_1 = 0\rho_1^2 \sum_{i=1}^p \lambda_i \\ H_1 : \lambda_1 < 0\rho_1^2 \sum_{i=1}^p \lambda_i \end{cases}$$

Assim, a estatística do teste fica

$$Z_{ci} = \frac{\hat{\lambda}_1 - 0\rho_1^2 \sum_{i=1}^p \lambda_i}{0\rho_1^2 \sum_{i=1}^p \lambda_i \sqrt{\frac{2}{n-1}}} \quad (23)$$

como os  $\lambda_{is}$  são desconhecidos, o estimador apropriado é  $\sum_{i=1}^p \hat{\lambda}_i = \sum_{i=1}^p \hat{\lambda}_i$ .

Substituindo-se esse estimador na estatística do teste, tem-se

$$Z_{ci} = \frac{\hat{\lambda}_1 - 0\rho_1^2 \sum_{i=1}^p \hat{\lambda}_i}{0\rho_1^2 \sum_{i=1}^p \hat{\lambda}_i \sqrt{\frac{2}{n-1}}} \quad (24)$$

que sob  $H_0$  segue uma distribuição normal padrão assintótica. Assim, se  $Z_c \leq Z_\alpha$ ,  $H_0$  pode ser rejeitada no nível nominal de significância  $100\alpha\%$ .

#### b) Teste Fj

O par de hipóteses para o teste Fj no contexto de unidimensionalidade de painéis, é:

$$\begin{cases} H_0 : \rho_1^2 \geq 0\rho_1^2 \\ H_1 : \rho_1^2 < 0\rho_1^2 \end{cases}$$

A estatística de teste neste caso fica:

$$Z_c = \frac{R_1^2 - \rho_1^2}{\frac{\omega_0}{\sqrt{n}}}$$

c) Testes paramétricos

O par de hipóteses para os testes seguintes é o mesmo do teste Fj. No entanto a estatística do teste BPRk é dada por

$$R_{1\ell}^2 = \frac{\lambda_1^*}{\sum_{i=1}^p \lambda_i^*}$$

e a regra de decisão é uma função do número de vezes que  $R_{1\ell}^2 \leq R_1^2$ , enquanto que a estatística do teste BPZc é dada por

$$Z_{cl} = \frac{R_{1\ell}^2 - \rho_1^2}{\frac{\omega_{0\ell}}{\sqrt{n}}}$$

em que o índice zero subscrito à esquerda indica o valor hipotético para  $\rho_1^2$ . A regra de decisão é uma função do número de vezes que  $Z_{cl} \leq Z_c$ .

d) Teste BNP

O par de hipóteses para este teste é o mesmo do teste Fj. A estatística de teste é a mesma do teste BPRk. Porém, a regra de decisão é uma função do número de vezes que  $R_{1\ell}^2 \geq \rho_1^2$ .

Esta seção está descrito o teste de Monte Carlo proposto nesse trabalho.



### 4.1.2 Proposição de teste

O teste proposto neste trabalho é uma versão Monte Carlo do teste AVa original. O objetivo de tal proposição foi a tentativa de conseguir boas taxas de erro tipo I e poder para amostras pequenas (comuns no contexto sensorial). A seguir será descrito o algoritmo do teste.

i. Estabelecer as hipóteses:

$$\begin{cases} H_0 : \lambda_2 = \lambda_3 = \dots = \lambda_p = 0 \\ H_1 : \text{ao menos } \lambda_i, i > 1, \text{ é diferente de zero} \end{cases}$$

Alternativamente a Hipótese nula pode ser escrita por  $H_0 : \lambda_1 = \lambda_{1,0}$ , com  $\lambda_{1,0} = \sum_{i=1}^p \sigma_{ii} = \sum_{i=1}^p \lambda_i$ . Isso significa que toda variação está contida no primeiro componente principal (primeiro autovalor). Assim, a estatística do teste

$$Z_c = \frac{\hat{\lambda}_1 - \lambda_{1,0}}{\lambda_{1,0} \sqrt{\frac{2}{n-1}}} \quad (25)$$

pode ser reestruturada usando o fato de que  $\lambda_{1,0} = \sum_{i=1}^p \lambda_i = \lambda_1$ . Logo,

$$Z_c = \frac{\hat{\lambda}_1 - \sum_{i=1}^p \lambda_i}{\sum_{i=1}^p \lambda_i \sqrt{\frac{2}{n-1}}} = \frac{\hat{\lambda}_1 - \lambda_1}{\lambda_1 \sqrt{\frac{2}{n-1}}}. \quad (26)$$

Como os parâmetros são desconhecidos, pode-se usar o seguinte estimador para  $\lambda_1$  dado por:  $\hat{\lambda}_1 = \sum_{i=1}^p \hat{\lambda}_i$ .

Assim,

$$Z_c = \frac{\hat{\lambda}_1 - \sum_{i=1}^p \hat{\lambda}_i}{\sum_{i=1}^p \hat{\lambda}_i \sqrt{\frac{2}{n-1}}} = \frac{\hat{\lambda}_1 - \lambda_1}{\lambda_1 \sqrt{\frac{2}{n-1}}}.$$

$$Z_c = \frac{-\sum_{i=1}^p \hat{\lambda}_i}{\hat{\lambda}_i \sqrt{\frac{2}{n-1}}}. \quad (27)$$

- ii. Sob  $H_0$ , gerar  $B = 1000$  amostras de uma variável aleatória  $X_{p \times 1}$  da distribuição normal multivariada com vetor de médias nulo e estrutura de covariância equicorrelacionada  $0\rho_1^2$ , ou seja,  $X_{p \times 1} \sim N(\mathbf{0}, \Sigma)$ , em que  $X_{p \times 1}$  são vetores com as notas para os  $n$  produtos avaliados por  $p$  provedores.
- iii. Efetuar a análise de componentes principais e determinar o primeiro autovalor, para cada uma das  $B = 1000$  amostras simuladas ( $\hat{\lambda}_{1\ell}$ );
- iv. Computar a estatística de teste (27) para cada  $\hat{\lambda}_{1\ell}$ ,  $\ell = 1, 2, \dots, B$ , e ordenar os  $Z_{c\ell}$ .
- v. Fixar um valor nominal de significância  $\alpha$ .
- vi. Calcular  $\hat{\lambda}_1$  a partir da matriz de dados observados e obter  $Z_c$  amostral.
- vii. Calcular o  $p$ -valor como sendo

$$\text{p-valor} = \frac{\sum_{\ell=1}^B I(Z_{c\ell} \leq Z_c)}{B}.$$

- viii. Regra de decisão: a hipótese  $H_0$  de unidimensionalidade será rejeitada se  $\text{p-valor} < \alpha$ .

É importante ressaltar que o valor de  ${}_0\rho_1^2$ , deve ser escolhido arbitrariamente para a hipótese nula (e deve ser próximo de 1).

Note que no passo (ii), fazendo  ${}_0\rho_1^2 \rightarrow 1$  é equivalente a  $\lambda_1 \rightarrow \sum_{i=1}^p \lambda_i$ .

De fato, passando o limite com  $\rho \rightarrow 1$  nas expressões (15) e (16), tem-se

$$\lim_{\rho \rightarrow 1} \lambda_1 = \lim_{\rho \rightarrow 1} \sigma^2[1 + (p-1)\rho] = \sigma^2 p \quad (28)$$

e

$$\lim_{\rho \rightarrow 1} \lambda_i = \lim_{\rho \rightarrow 1} \sigma^2(1 - \rho) = 0 \quad (29)$$

Como  $p \in \mathbb{N}$  e  $\sigma^2 < \infty$ , de (28) e (29), tem-se que  $\lambda_1 \rightarrow \sum_{i=1}^p \lambda_i$ . Portanto, atribuir um valor próximo de 1 a  ${}_0\rho_1^2$  é equivalente a impor  $H_0$ .

## 4.2 Resultados experimentais

Nas subseções a seguir estão apresentados os resultados dos experimentos computacionais. No primeiro experimento computacional, estão os gráficos do teste Monte Carlo proposto nesse trabalho comparado com o teste já existente AVa e a tabela contendo as taxas referentes a ocorrência do erro tipo I. No segundo experimento computacional, foram comparados os testes AVmc, Fj, BNP, BPRk, BPZc e MTCU no contexto de avaliação de painéis sensorais e também uma tabela contendo as taxas referentes a ocorrência do erro tipo I.

### 4.2.1 Experimento computacional I

Na Tabela 2, são apresentadas as taxas referentes a ocorrência do erro tipo I, obtidas pelo experimento computacional I.

Tabela 2 Taxa de erro tipo I considerando painéis com  $p = 5, 10, 15$  provedores e  $n = 5, 10, 15, 20$  produtos, para dois valores de  ${}_0\rho_1^2 = (0, 90; 0, 95; 0, 99)$  com nível de significância fixado em  $\alpha = 5\%$ .

		Taxa de erro tipo I		
	p	n	AVmc	AVa
$\rho = 0, 90$	5	10	0, 039	0, 000*
		15	0, 034	0, 000*
		20	0, 038	0, 000*
	10	15	0, 056	0, 000*
		20	0, 041	0, 000*
		15	20	0, 024*
$\rho = 0, 95$	5	10	0, 056	0, 000*
		15	0, 052	0, 000*
		20	0, 055	0, 000*
	10	15	0, 054	0, 000*
		20	0, 057	0, 000*
		15	20	0, 039
$\rho = 0, 99$	5	10	0, 047	0, 000*
		15	0, 039	0, 000*
		20	0, 054	0, 000*
	10	15	0, 044	0, 000*
		20	0, 054	0, 000*
		15	20	0, 055

\* Taxas menores que 5%, segundo o teste binomial exato a 1% de significância.

+ Taxas maiores que 5%, segundo o teste binomial exato a 1% de significância.

Fonte: Própria autora.

Pode-se observar na tabela 2, considerando  ${}_0\rho_1^2 = 0, 90$ ,  $n = 5$  e  $p = 10$ , que o teste AVmc foi superior ao teste AVa. O AVmc foi eficiente no controle do nível nominal de significância, pois, os valores das frequências relativas de rejeição de  $H_0$ , quando esta é verdadeira, encontram-se próximos de 5%. Isso não ocorreu com o teste AVa, que se mostrou conservativo.

Na Figura 1, está apresentado o gráfico do teste proposto (AVmc) e do assintótico (AVa), considerando  ${}_0\rho_1^2 = 0, 90$ ,  $p = 5$  produtos e  $n = 10$  provedores.

A linha vertical representa a separação das regiões sob  $H_0$  e sob  $H_1$ . A curva do poder do teste AVa, considerando é uma linha que praticamente coincide com o eixo da abcissa. Já a curva do poder do teste AVmc, mostrou-se com poder alto, iniciando em um valor próximo de de 1,00 para  $\rho_1^2 = 0,0$  e decaindo até aproximadamente 0,05, quando do valor de  $\rho_1^2$  se aproxima de 0,90. A linha horizontal indica o nível de significância  $\alpha$  adotado.

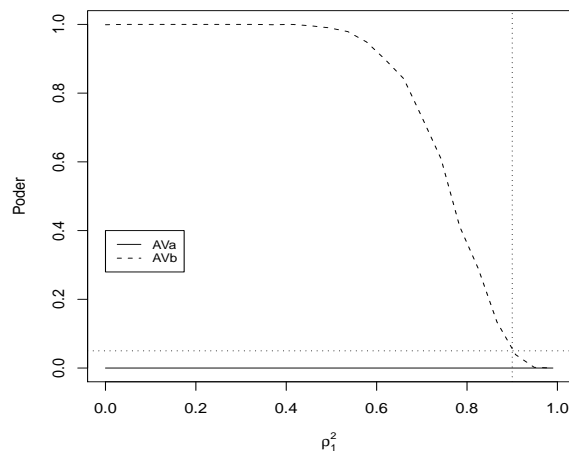


Figura 1 Poder dos testes AVa e AVmc em função de  $\rho_1^2 = 0,90$ , considerando  $k = 1$  componentes,  $p = 5$  e  $n = 10$

Na curva do poder do teste da Figura 2, com o aumento de variável, observa-se que o AVa inicia-se próximo de 1,00 para  $\rho = 0,0$ , mas decai para um valor próximo de 0,60, mostrando ser um teste conservativo. Já o teste AVmc, mostrou uma curva de poder alto e com controle da taxa de erro tipo I de forma adequada.

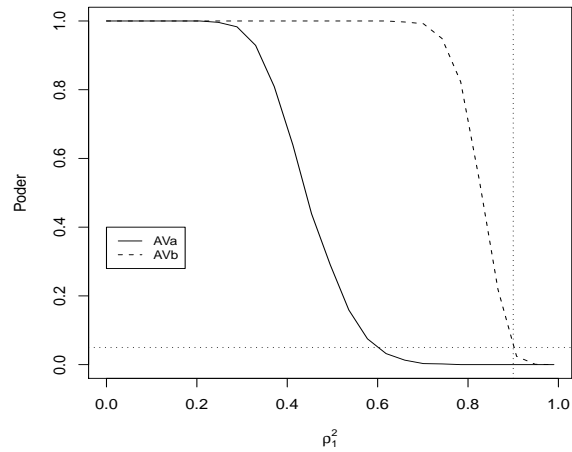


Figura 2 Poder dos testes AVa e AVmc em função de  ${}_0\rho_1^2 = 0,90$ , considerando  $k = 1$  componentes,  $p = 15$  e  $n = 20$

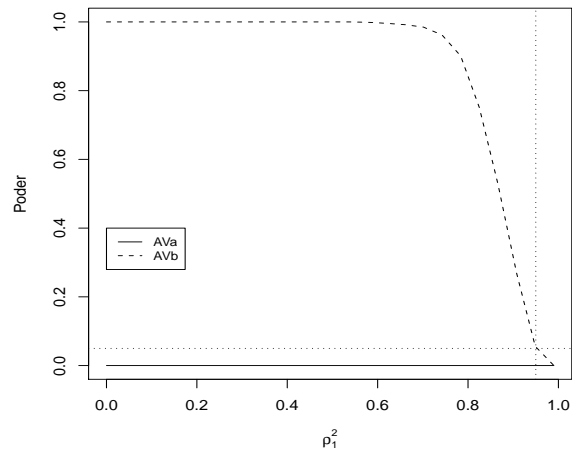


Figura 3 Poder dos testes AVa e AVmc em função de  ${}_0\rho_1^2 = 0,95$ , considerando  $k = 1$  componentes,  $p = 5$  e  $n = 10$

Na Figura 3 está apresentado o gráfico do poder para  ${}_0\rho_1^2 = 0,95$ ,  $p = 5$  e  $n = 10$ , pode-se observar que o resultado é similar à curva do poder da Figura 1, a curva

do teste AVa praticamente coincide com o eixo da abcissa enquanto que o poder do teste AVmc é alto e controla o erro tipo I de forma eficiente.

Adotando  ${}_0\rho_1^2 = 0,95$  e  $p = 15$  e  $n = 20$ , o poder do teste AVa é semelhante ao resultado da Figura 2, ou seja, o teste AVa se inicia em 1,00 para  ${}_0\rho_1^2 = 0,0$  e decai próximo de 0,60 Figura 4. Já o teste AVmc, se inicia em 1,00 quando  ${}_0\rho_1^2 = 0,0$  e decai próximo de 0,05. Pode-se observar que quando há um aumento do número de variáveis, o poder do teste AVa melhora mas continua sendo um teste conservativo. O teste AVmc continua sendo um teste que controla o erro tipo I de forma eficiente, mesmo para o número de variáveis menor.

Observe na Figura 4, a curva do poder do teste AVmc continua mostrando um poder alto e decai para um valor nominal próximo do adotado. O teste AVa continua sem poder para variáveis menores, mesmo com o valor sendo  ${}_0\rho_1^2 = 0,95$ .

Considerando agora  ${}_0\rho_1^2 = 0,99$ , pode-se observar que a curva do teste AVa está idêntica às curvas da Figura 1 e Figura 2, para variáveis menores o poder é nulo e quando há um aumento de variáveis o poder melhora mas o teste é conservativo. Para o teste AVmc, os resultados também são análogos ao que já foi discutido anteriormente.

Nos Apêndices A,B e C estão ilustrados as curvas do poder dos testes AVa e AVmc para os mesmos casos de  ${}_0\rho_1^2$  visto anteriormente. A diferença está no número de  $p$  (providores) e  $n$  (produtos). Observa-se que mesmo mantendo o número de provedores pequeno e aumentando o número de produto o teste AVa se mantém com poder baixo e com valor nominal abaixo do valor fixado ( $\alpha$ ). O teste AVmc se mantém com alto poder e com a taxa de erro tipo I eficiente para qualquer situação.

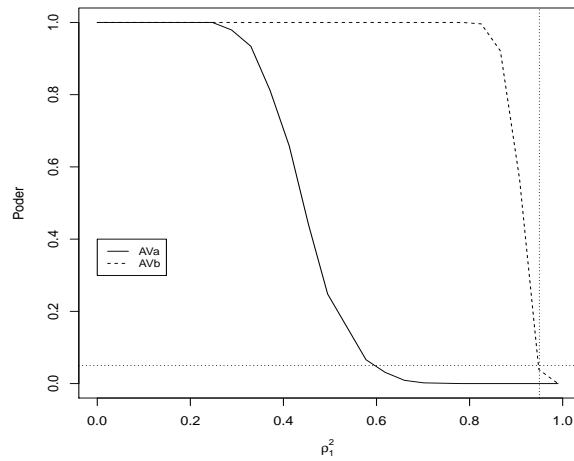


Figura 4 Poder dos testes AVa e AVmc em função de  $\rho_1^2 = 0,95$ , considerando  $k = 1$  componentes,  $p = 15$  e  $n = 20$

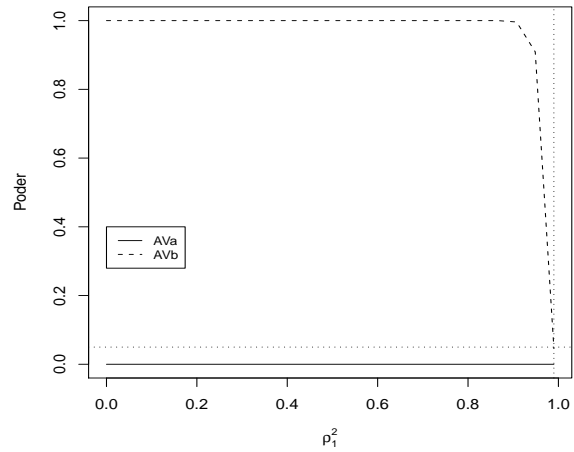


Figura 5 Poder dos testes AVa e AVmc em função de  $\rho_1^2 = 0,99$ , considerando  $k = 1$  componentes,  $p = 5$  e  $n = 10$

#### 4.2.2 Experimento computacional II

Na Tabela 3, são apresentadas as taxas referentes a ocorrência do erro tipo I, obtidas pelo experimento computacional II.



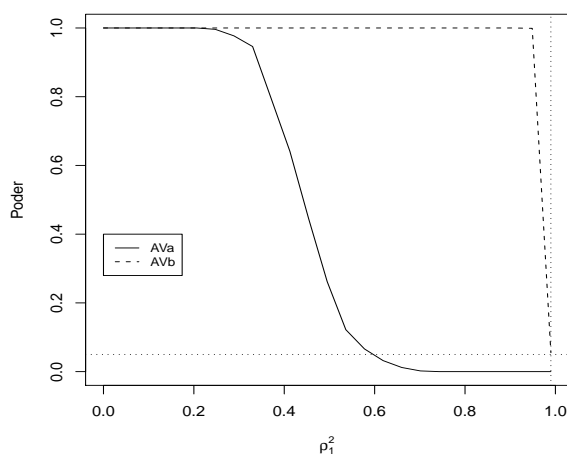


Figura 6 Poder dos testes AVa e AVmc em função de  $\rho_1^2 = 0,99$ , considerando  $k = 1$  componentes,  $p = 15$  e  $n = 20$

Pode-se observar na Tabela 3 que o teste AVmc foi o mais eficiente seguido do BNP, BPZc e BPRk, respectivamente. O teste de Fj e TMCU, mostraram-se ser liberais. Mesmo com o aumento de  $\rho_1^2$  e do número de variáveis, o TMCU e o Fj obtiveram valores mais afastados do valor de significância adotado, mostrando que são testes mais liberais.

Na Figura 7 estão apresentadas as curvas do poder dos testes AVmc, Fj, BNP, BPRk, BPZc e MTCU e considerando  $\rho_k^2 \geq 0,90$ ,  $p = 5$  produtos e  $n = 10$  provadores. Observa-se que o Teste MTCU, obteve um poder superior aos demais, porém, não controla a taxa de erro tipo I próximo ao valor nominal se significância com eficiência em comparação com os demais. A taxa de erro tipo I e o poder dos demais testes foram praticamente iguais, iniciando em um valor próximo de de 1,00 para  $\rho_1^2 = 0,0$  e decaindo até aproximadamente 0,05, quando o valor hipotético se aproxima de 0,90. As curvas do poder do teste da Figura 8 com o aumento de provadores e de produtos ficaram mais próximas, todas com poder

Tabela 3 Taxa de erro tipo I considerando painéis com  $p = 5, 10, 15$  provedores e  $n = 5, 10, 15, 20$  produtos, para três valores de  ${}_0\rho_1^2 = (0, 90; 0, 95; 0, 99)$  com nível de significância fixado em  $\alpha = 5\%$ .

	p	n	AVmc	Fj	BNP	BPRk	BPZc	TMCU
$\rho = 0, 90$	5	10	0,039	0,050	0,036	0,039	0,052	0,075
		15	0,034	0,048	0,038	0,033*	0,040	0,095 <sup>+</sup>
		20	0,038	0,030*	0,032*	0,034	0,030*	0,109 <sup>+</sup>
	10	15	0,056	0,044	0,029*	0,037	0,028*	0,057
		20	0,041	0,066	0,043	0,041	0,049	0,073
	15	20	0,024*	0,055	0,038	0,021*	0,026*	0,047
$\rho = 0, 95$	5	10	0,056	0,074	0,055	0,055	0,070	0,107 <sup>+</sup>
		15	0,052	0,073	0,059	0,049	0,061	0,127 <sup>+</sup>
		20	0,055	0,082 <sup>+</sup>	0,059	0,046	0,060	0,153 <sup>+</sup>
	10	15	0,054	0,093 <sup>+</sup>	0,072	0,051	0,063	0,081 <sup>+</sup>
		20	0,057	0,093 <sup>+</sup>	0,080 <sup>+</sup>	0,052	0,063	0,093 <sup>+</sup>
	15	20	0,039	0,087 <sup>+</sup>	0,063	0,045	0,051	0,063
$\rho = 0, 99$	5	10	0,047	0,063	0,048	0,046	0,058	0,084 <sup>+</sup>
		15	0,039	0,062	0,055	0,042	0,050	0,104 <sup>+</sup>
		20	0,054	0,073	0,067	0,052	0,060	0,138 <sup>+</sup>
	10	15	0,044	0,073	0,056	0,042	0,051	0,058
		20	0,054	0,095 <sup>+</sup>	0,072	0,047	0,063	0,096 <sup>+</sup>
	15	20	0,055	0,092 <sup>+</sup>	0,074	0,047	0,056	0,077 <sup>+</sup>

\* Taxas menores que 5%, segundo o teste binomial exato a 1% de significância.

<sup>+</sup> Taxas maiores que 5%, segundo o teste binomial exato a 1% de significância.

Fonte: Própria autora.

alto, ressaltando que o Fj e TMCU ainda continuam testes liberais com aumento de variáveis.

Para  ${}_0\rho_1^2 = 0, 95$  Figura 9, observa-se que o TMCU é superior no poder, seguido do Fj e do BPZc, para variáveis menores, os demais tem poder de teste um pouco inferior, mas controla o erro tipo I de forma mais eficiente. Quando há um aumento do número de variáveis, os testes se confundem no poder, Figura 10.

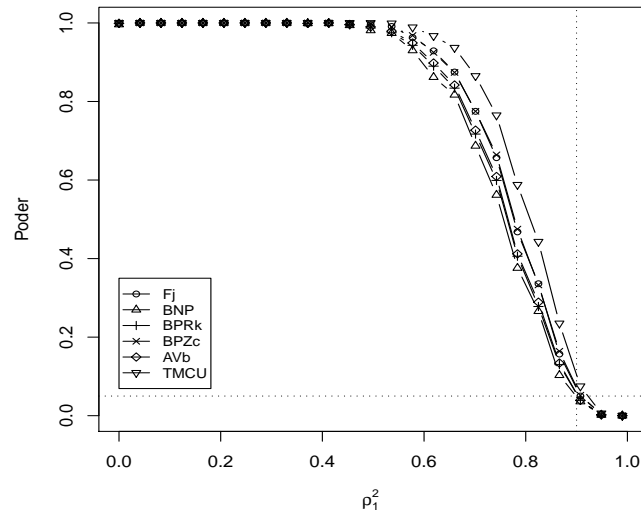


Figura 7 Poder dos testes AVmc, Fj, BNP, BPRk, BPZc, TMCU em função de  $0\rho_1^2 = 0,90$ , considerando  $k = 1$  componentes,  $p = 5$  e  $n = 10$

As curvas do poder dos testes da Figura 10, são bastante semelhantes, O TMCU continua um pouco superior com os demais testes bem próximos. Quanto ao erro tipo I, nota-se que o Fj e o TMCU são liberais, pois não controla a taxa de erro tipo com eficiência.

Na comparação dos testes pode-se observar que quando  $0\rho_1^2 = 0,90$  e  $0\rho_1^2 = 0,95$  e tem-se o número de variáveis menor, ou seja,  $p = 5$  e  $n = 10$  o TMCU proposto por Amorim et al. (2010), obteve um poder superior seguido do Fj e do BPZc, os demais se confundem no poder. O teste AVmc proposto neste trabalho foi mais eficiente que os demais no controle do erro tipo I seguido do BNP, BPZc e BPRk propostos por Gebert (2010). Para  $0\rho_1^2 = 0,90$ ,  $p = 5$  e  $n = 20$ , o teste BNP obteve menor poder, os testes AVmc, BPZc e BPRk são semelhantes, ver anexos E e F. Os testes são idênticos quando o número de variáveis aumenta, que pode ser visto tanto nos resultados do texto como no anexos D,E e F. Pode-se

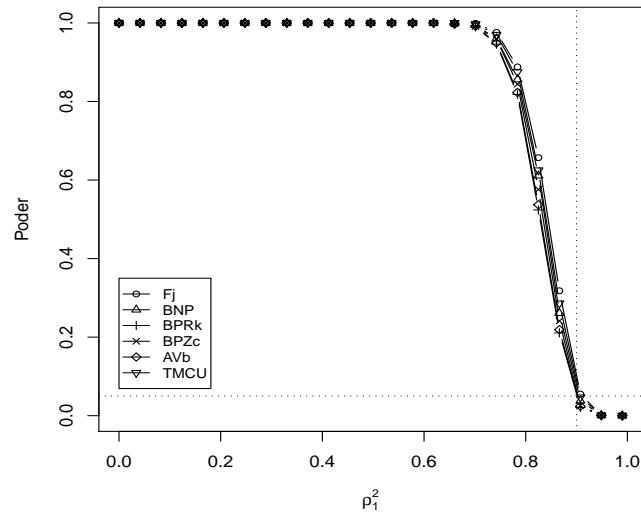


Figura 8 Poder dos testes AVmc, Fj, BNP, BPRk, BPZc, TMCU em função de  ${}_0\rho_1^2 = 0, 90$ , considerando  $k = 1$  componentes,  $p = 15$  e  $n = 20$

observar que para  ${}_0\rho_1^2 = 0, 99$  todos os testes estão com resultados idênticos para o poder, quanto ao controle de erro tipo I, o AVmc novamente foi mais adequado seguido dos testes BNP, BPZc e BPRk, nessa ordem. O AVmc mostrou-se equivalente pois tem poder e o controle da taxa de erro tipo I semelhante aos melhores.

Dessas observações pode-se notar que o aumento do número de provadores e de amostras, teve um efeito benéfico para todos os testes, inclusive para o AVmc, pois os valores de poder foram superiores e as curvas de rejeições de  $H_0$  apresentaram um comportamento mais adequado em relação ao que se espera, pela teoria, de uma curva de poder. Quanto ao controle da taxa de erro tipo I, sob normalidade multivariada, o teste TMCU e o Fj tiveram um padrão de comportamento semelhantes, ou seja, se mostraram testes liberais. Os testes BPZc, BPRk e o AVmc, controlam a taxa de erro tipo I mais adequadamente, sob normalidade multivariada.

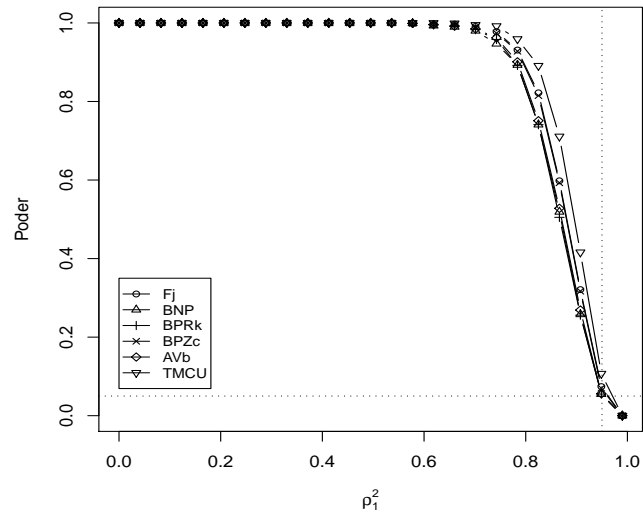


Figura 9 Poder dos testes AVmc, Fj, BNP, BPRk, BPZc, TMCU em função de  $\rho_1^2 = 0,95$ , considerando  $k = 1$  componentes,  $p = 5$  e  $n = 10$

O teste BNP também teve um controle da taxa de erro tipo I adequada mas sem a pressuposição de normalidade multivariada. Mesmo o TMCU se mostrando mais poderoso, não é considerado o melhor devido ao fato de ser o mais liberal entre todos comparados. Do ponto de vista do controle do erro tipo I, exceto o TMCU e o Fj, todos eles apresentaram desempenho adequado.

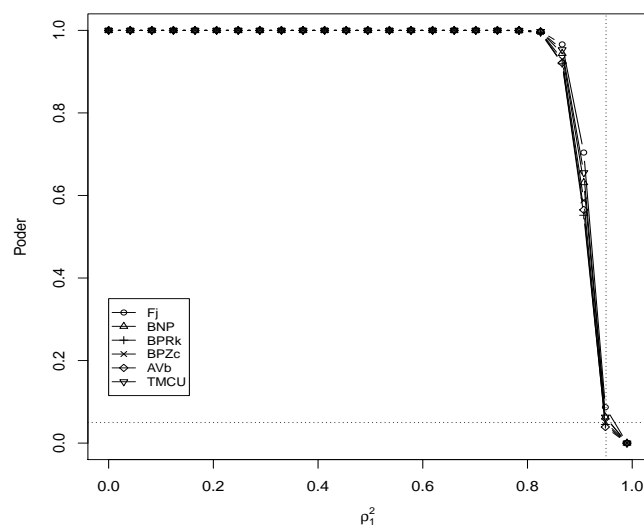


Figura 10 Poder dos testes AVmc, Fj, BNP, BPRk, BPZc, TMCU em função de  $\rho_1^2 = 0,95$ , considerando  $k = 1$  componentes,  $p = 15$  e  $n = 20$

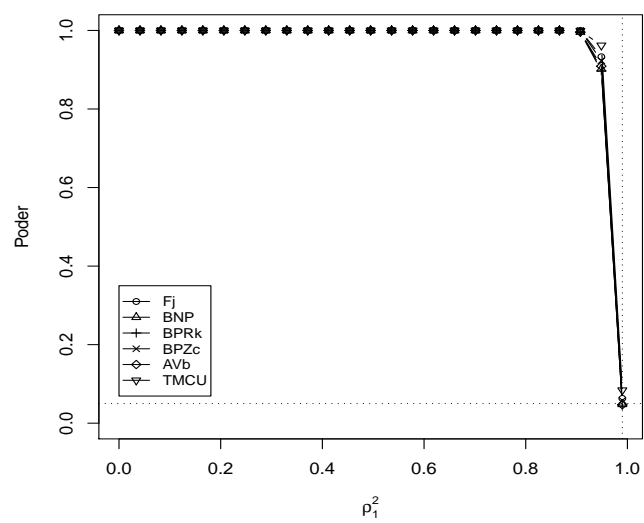


Figura 11 Poder dos testes AVmc, Fj, BNP, BPRk, BPZc, TMCU em função de  $\rho_1^2 = 0,99$ , considerando  $k = 1$  componentes,  $p = 5$  e  $n = 10$

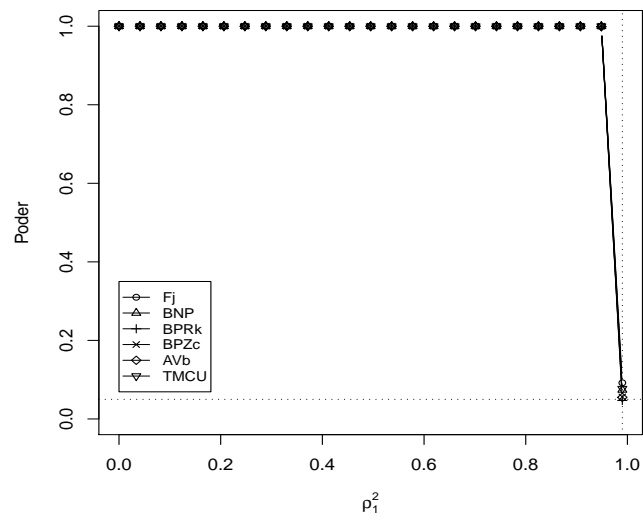


Figura 12 Poder dos testes AVmc, Fj, BNP, BPRk, BPZc, TMCU em função de  ${}_{0}\rho_1^2 = 0, 99$ , considerando  $k = 1$  componentes,  $p = 15$  e  $n = 20$

## 5 CONCLUSÕES

1. O teste AVmc, foi superior ao AVa em todos os casos, além de ter maior poder controla as taxas de erro tipo I eficientemente.
2. Sob normalidade multivariada o teste proposto é recomendado, pois obteve poder alto e controlou a taxa de erro tipo I.
3. Por simulação intensiva, o teste AVmc, mostrou-se com desempenho superior ao teste AVa.
4. Quando comparado com os demais testes o teste proposto neste trabalho, mostrou-se com poder semelhante e desempenho do controle do erro tipo I mais eficaz que os demais, por simulação intensiva.
5. Conclui-se que para  $k = 1$  (interpretação sensométrica), o teste AVmc é semelhante aos demais.

Para trabalhos futuros, pode-se avaliar a robustez do teste AVmc proposto e também um estudo para um número menor de variáveis. Uma aplicação possível do teste proposto foi na avaliação da unidimensionalidade de painéis, mas outras aplicações podem ser desenvolvidas em trabalhos futuros.



## REFERÊNCIAS

ALLCROFT, D. J.; GLASBEY, C. A.; PAULO, M. J. A latent gaussian model for multivariate consumption data. **Food Quality and Preference**, Barking, v. 18, n. 3, p. 508-516, June 2007.

AMORIM, I. S. **Teste Monte Carlo na avaliação da unidimensionalidade de painéis sensoriais para uma variável**. 2010. 62 p. Dissertação (Mestrado em Estatística e Experimentação Agropecuária) - Universidade Federal de Lavras, Lavras, 2010.

AMORIM, I. S. et al. Monte Carlo based test for inferring about the unidimensionality of a brazilian coffee sensory panel. **Food Quality and Preference**, Barking, v. 21, n. 3, p. 319-323, Sept. 2010.

ANDERSON, T. W. **An introduction to multivariate statistical analysis**. New York: J. Wiley, 1971. 675 p.

\_\_\_\_\_. Asymptotic theory for principal components. **Annal of Mathematical Statistic**, Ann Arbor, v. 34, p. 122-148, 1963.

BARROSO, L. e ARTES, R. **Tópicos de análise multivariada**. Lavras: UFLA, 2003. 156 p.

BROCKHOFF, P. B. Statistical testing of individual differences in sensory profiling. **Food Quality and Preference**, Barking, v. 14, p. 424-434, Sept. 2004.

CARBONELL, L.; IZQUIERDO, L.; CARBONELL, I. Sensory analysis of Spanish mandarin juices: selection of attributes and panel performance. **Food Quality and Preference**, Barking, v. 18, p. 329-341, May 2007.

CASTURA, J. C.; FINDLAY, C. J.; LESSCHAEVE, I. Monitoring calibration for descriptive sensory panels using distance from target measurements. **Food Quality and Preference**, Barking, v. 16, p. 682-690, May 2005.

CHERNICK, M. R. **Bootstrap methods: a guide for practitioners and researchers**. 2<sup>nd</sup> ed. Newtown: Wiley-Interscience, 2008. 369 p.

DAEMS, V.; DELVAUX, F. Multivariate analysis of descriptive sensory data on 40 commercial beers. **Food Quality and Preference**, Barking, v. 8, n. 5/6, p. 373-380, Dec. 1997.

DAVISON, A. C.; HINKLEY, D. V. **Bootstrap methods and their application**. Cambridge: Cambridge University, 2008. 582 p.

DERNDORFER, E. et al. A panel performance procedure implemented in R. **Journal of Sensory Studies**, Westport, v. 20, n. 2, p. 217-227, Apr. 2005.

DIJKSTERHUIS, G. Assessing panel consonance. **Food Quality and Preference**, Barking, v. 6, n. 1, p. 7-14, Feb. 1995.

EFRON, B. Bootstrap methods: another look at the jackknife. **Annals of Statistics**, Hayward, v. 7, n. 1, p. 1-26, Jan. 1979.

FERREIRA, D. F. **Estatística multivariada**. Lavras: UFLA, 2008. 662 p.

FERREIRA, E. B.; OLIVEIRA, M. S. **Sensometria: uma abordagem com ênfase em Procrustes**. Santa Maria: UFSM, 2007. 71 p. Apostila.

FUJIKOSHI, Y. Asymptotic expansions for the distributions of the sample roots under nonnormality. **Biometrika**, London, v. 67, n. 1, p. 45-51, 1980.

GEBERT, D. M. P. **Proposta de testes bootstrap para inferir sobre o número de componentes principais retidos**. 2010. 75 p. Dissertação (Mestrado em Estatística e Experimentação Agropecuária) - Universidade Federal de Lavras, Lavras, 2010.

GEBERT, D. M. P.; FERREIRA, D. F. Proposta de teste bootstrap não paramétrico de retenção de componentes principais. **Revista Brasileira de Biometria**, São Paulo, v. 28, n. 2, p. 116-136, 2010.

GIRSHICK, M. A. On the sampling theory of roots of determinantal equations. **The Annals of Mathematical Statistics**, Ann Arbor, v. 10, p. 203-224, 1939.

HEYMANN, H. Sensory science and sensometrics yesterday, today and tomorrow. In: SENSOMETRICS MEETING IMAGINE THE SENSES, 8., 2006, Norway. **Proceedings...** Norway: SMI, 2006. 1 CD-ROM.

HUMMER, S. Application of multivariate analysis of variance. **Food Quality and Preference**, Barking, v. 9, n. 3, p. 83-85, June 1998.

JOLLIFFE, I. T. **Principal components analysis**. 2<sup>nd</sup> ed. New York: Springer Verlag, 2002. 487 p.

KERMIT, M.; LENGARD, V. Assessing the performance of a sensory panel: panelist monitoring and tracking. **Nedre Vollgate**, v. 8, p. 185, July 2006.

LATREILLE, J. et al. Measurement of the reliability of sensory panel performances. **Food Quality and Preference**, Barking, v. 17, p. 369-375, 2006.

LAWLEY, D. N. Tests of significance of the latent roots of covariance and correlation matrices. **Biometrika**, London, v. 43, p. 128-136, 1956.

MAGALHÃES, M. N. **Probabilidade e variáveis aleatórias**. 2. ed. São Paulo: EDUSP, 2006. 428 p.

MARTENS, M. A. A philosophy for sensory science. **Food Quality and Preference**, Barking, v. 10, p. 233-244, 1999.

MINGOTI, S. A. **Análise de dados através de métodos de estatística multivariada**: uma abordagem aplicada. Belo Horizonte: UFMG, 2005. 297 p.

MOOD, A. M.; GRAYBILL, F. A.; BOES, D. C. **Introduction to the theory of statistics**. 3<sup>rd</sup> ed. Singapore: McGraw-Hill, 1974. 564 p.

MORRISON, D. F. **Multivariate statistical methods**. 3<sup>rd</sup> ed. New York: McGraw-Hill, 1990. 495 p.

OLIVEIRA, M. S. et al. **Introdução à estatística**. Lavras: UFLA, 2009. 334 p.

PRESS, W. H. et al. **Numerical recipes in fortran**: the art of scientific computing. Cambridge: Cambridge University, 1992. 994 p.

R DEVELOPMENT CORE TEAM. **R: a language and environment for statistical computing**. Vienna: R Foundation for Statistical Computing, 2012. Software.

RAMOS, P. S. **Proposta e avaliação de uma solução Bayesiana para o problema de Behrens-Fisher multivariado**. 2009. 76 p. Tese (Doutorado em Estatística e Experimentação Agropecuária) - Universidade Federal de Lavras, Lavras, 2009.

RENCHER, A. C. **Methods of multivariate analysis**. 2<sup>nd</sup> ed. New York: J. Wiley, 2002. 708 p.

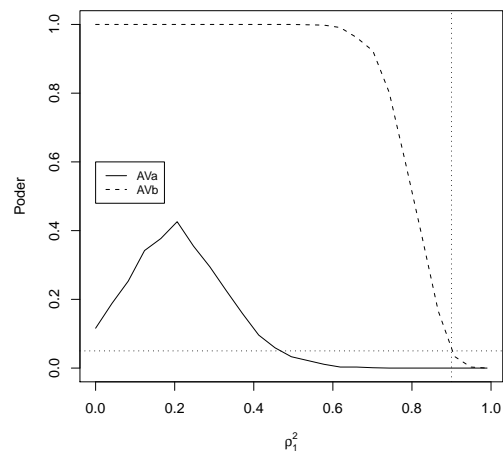
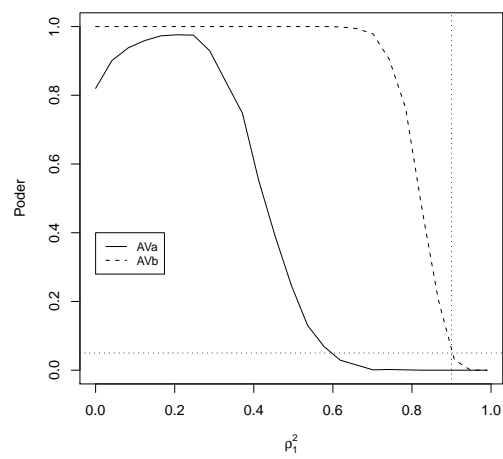
SHANNON, R. E. **Systems simulation**. New Jersey: Prentice-Hall, 1975. 387 p.

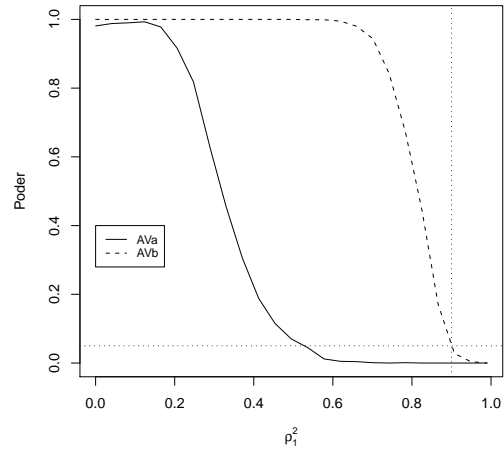
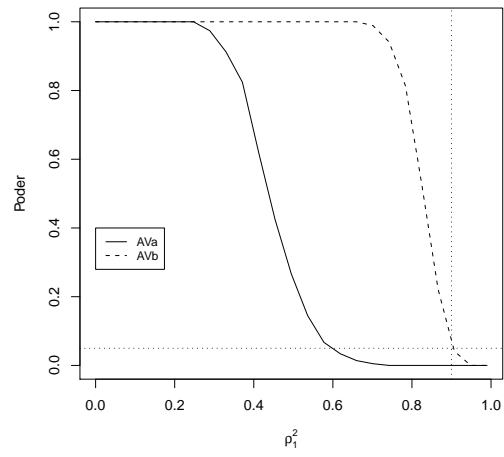
SINESIO, F.; MONETA, E.; SABA, A. Comparison of multivariate methods of analysis to evaluate panellists performance. **Food Quality and Preference**, Barking, v. 3, n. 4, p. 201-208, 1992.

THYBO, A. K.; MARTENS, M. Analysis of sensory assessors in texture profiling of potatoes by multivariate modelling. **Food Quality and Preference**, Barking, v. 11, n. 4, p. 283-288, Aug. 2000.

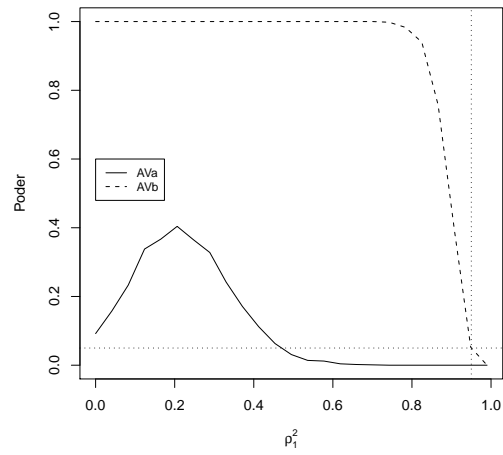
TIMM, N. H. **Applied multivariate analysis**. New York: Springer Verlag, 2002. 693 p.

## APÊNDICE

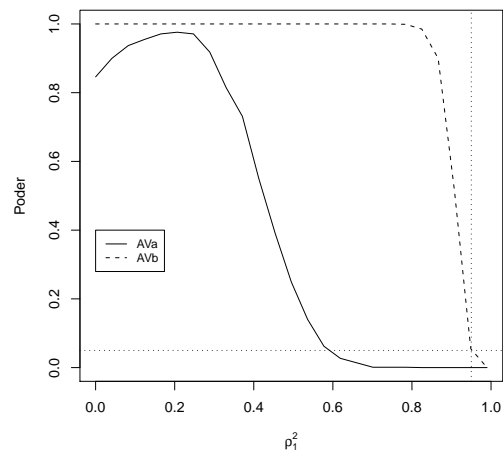
APÊNDICE A: Poder dos testes AVa e AVmc em função de  $0\rho_1^2 = 0, 90$ . $(p = 5 \text{ e } n = 15)$ 

$(p = 5 \text{ e } n = 20)$  $(p = 10 \text{ e } n = 15)$  $(p = 5 \text{ e } n = 20)$

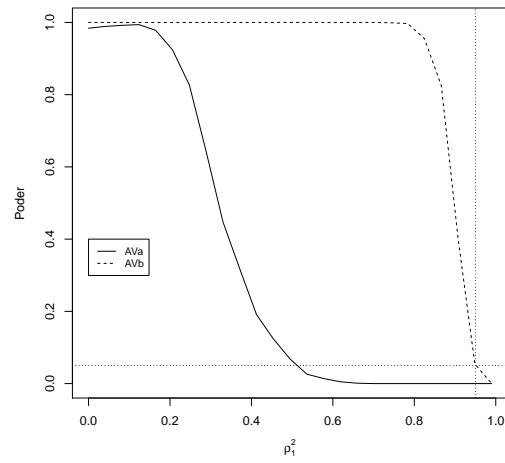
APÊNDICE B: Poder dos testes AVa e AVb em função de  $0\rho_1^2 = 0,95$ .



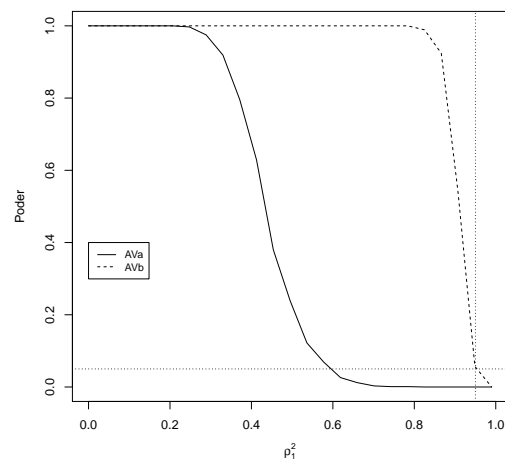
( $p = 5$  e  $n = 15$ )



( $p = 5$  e  $n = 20$ )



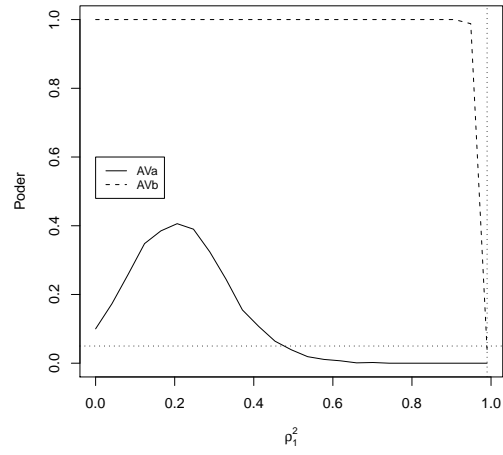
( $p = 10$  e  $n = 15$ )



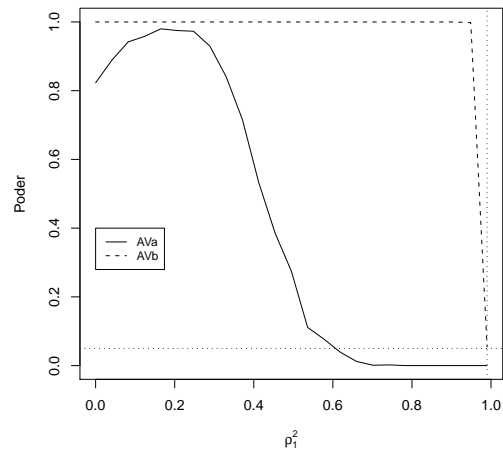
( $p = 10$  e  $n = 20$ )



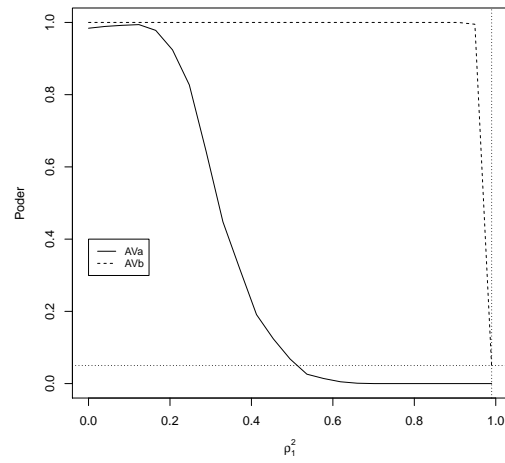
APÊNDICE C: Poder dos testes AVa e AVb em função de  ${}_0\rho_1^2 = 0,99$ .



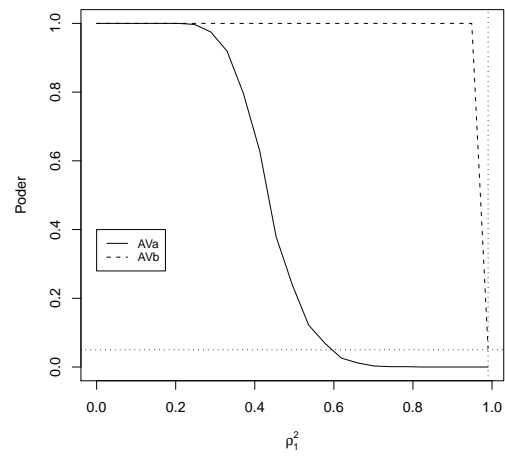
( $p = 5$  e  $n = 15$ )



( $p = 5$  e  $n = 20$ )

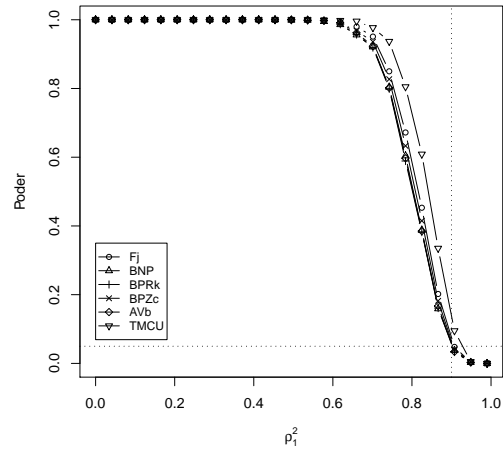


( $p = 10$  e  $n = 15$ )

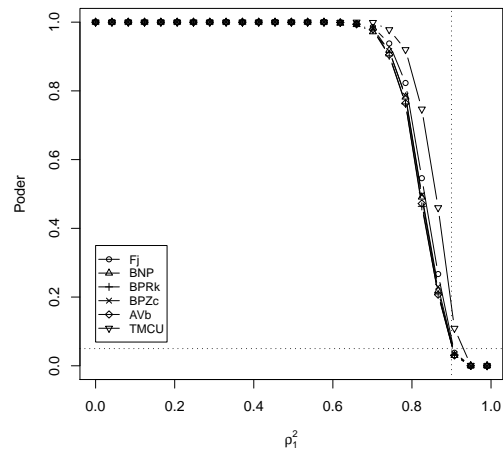


( $p = 10$  e  $n = 20$ )

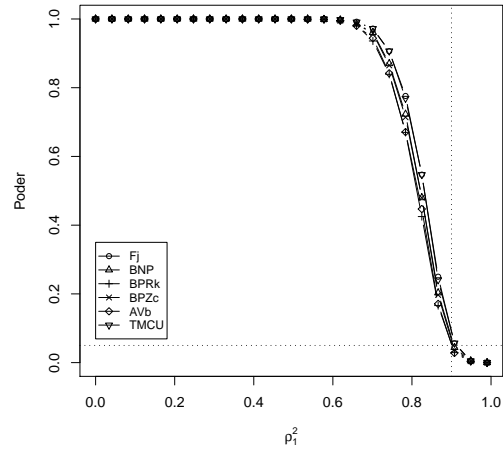
APÊNDICE D: Poder dos testes AVmc, Fj, BNP, BPRk, BPZc, TMCU em função de  $\rho_1^2 = 0,90$ .



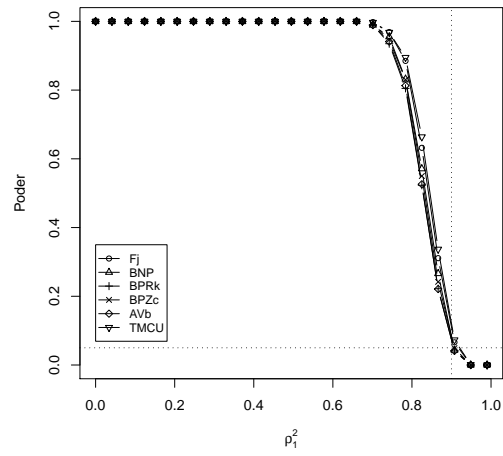
( $p = 5$  e  $n = 15$ )



( $p = 5$  e  $n = 20$ )

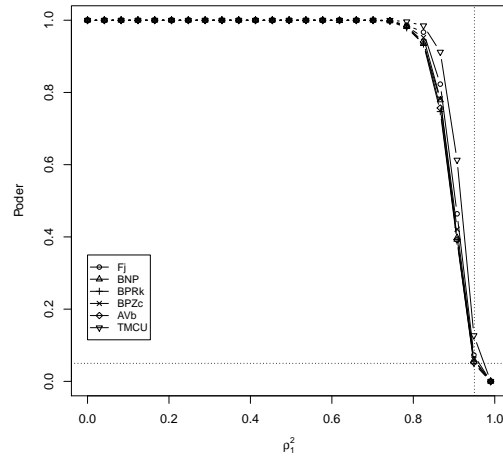


( $p = 10$  e  $n = 15$ )

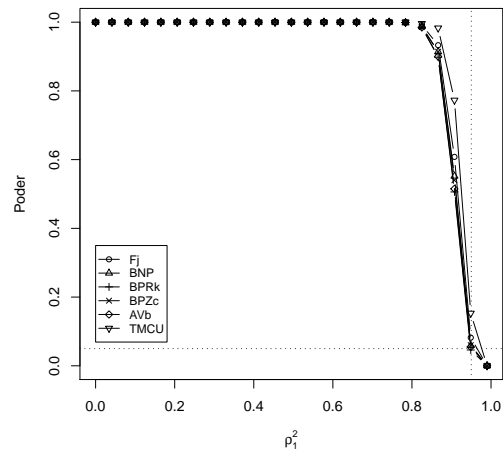


( $p = 10$  e  $n = 20$ )

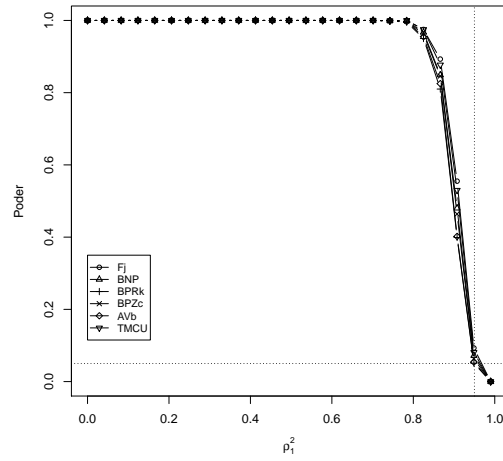
APÊNDICE E: Poder dos testes AVmc, Fj, BNP, BPRk, BPZc, TMCU em função de  $\rho_1^2 = 0,95$ .



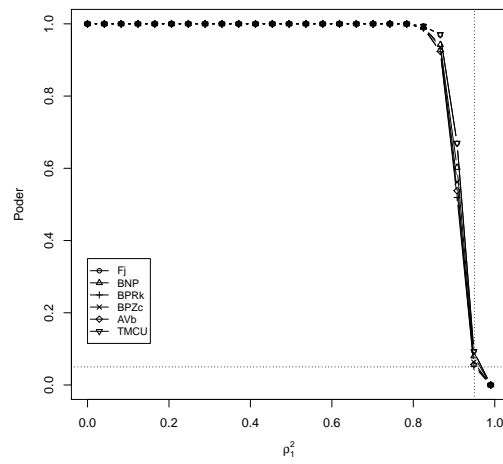
$(p = 5 \text{ e } n = 15)$



$(p = 5 \text{ e } n = 20)$

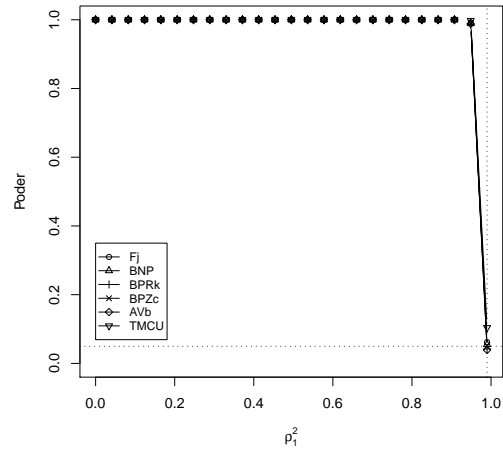


( $p = 10$  e  $n = 15$ )

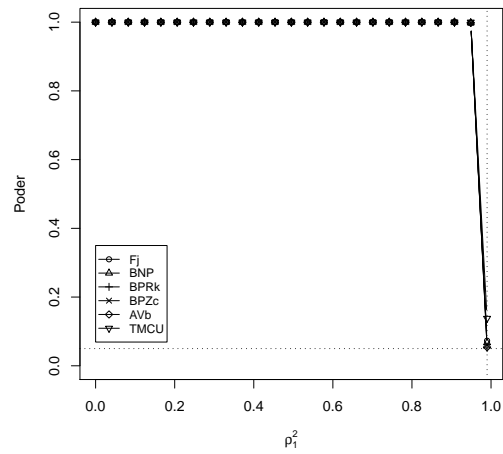


( $p = 10$  e  $n = 20$ )

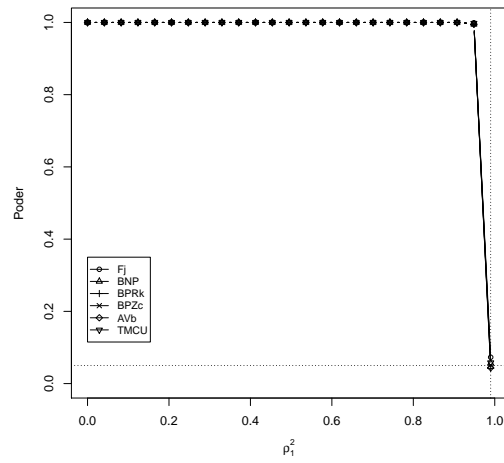
APÊNDICE F: Poder dos testes AVmc, Fj, BNP, BPRk, BPZc, TMCU em função de  $0\rho_1^2 = 0,99$ .



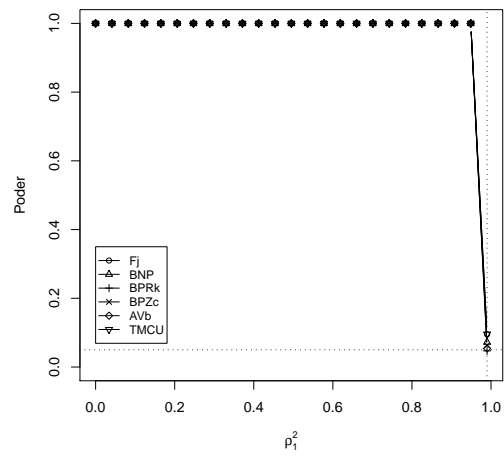
$(p = 5 \text{ e } n = 15)$



$(p = 5 \text{ e } n = 20)$



( $p = 10$  e  $n = 15$ )



( $p = 10$  e  $n = 20$ )



APÊNDICE G: *Rotina no R utilizada para a aplicação do teste AVmc.*

```
#Teste bootstrap proposto
autov.boot<-function(Y,B=1000,rho=0.9) p=ncol(Y)
n<-nrow(Y) S<-var(Y) eig<-eigen(S)
lamb0<-sum(eigvalues)lamb1 < -eigvalues[1]
zca<-(lamb1-lamb0)/(lamb0*sqrt(2/(n-1))) #Bootstrap pvalor<-0
zcb<-numeric(0) for(i in 1:B) mu <- rep(c(0), times = p) sig<-CriaSigma(k=1, p,
rho) Yb<-mvrnorm(n, mu=mu, Sigma=sig) Sb<-var(Yb) eigb<-eigen(Sb)
lamb0b<-sum(eigbvalues)lamb1b < -eigbvalues[1]
zcb<-c(zcb,(lamb1b-lamb0b)/(lamb0b*sqrt(2/(n-1)))) if(zcb[i]<=zca)
pvalor<-pvalor+1/B return(pvalor)
```