

Avaliação de funções de afilamento de expoente-variável para árvores de *Eucalyptus* spp.Evaluation of variable-exponent taper functions for *Eucalyptus* spp. TreesJoyce de Almeida Alves¹, Marcos Antônio Isaac Júnior¹, Natalino Calegario¹,
Ernani Lopes Possato¹ e Elliezer de Almeida Melo²**Resumo**

Objetivou-se neste trabalho ajustar e avaliar as funções de afilamento do tipo expoente-variável, para estimar os diâmetros ao longo do fuste e volume total (com e sem casca) de árvores de *Eucalyptus* spp., considerando diferentes estratégias na determinação da altura relativa do ponto de inflexão – p . Uma nova proposta, para estimar o valor de p , foi apresentada e uma nova equação de expoente-variável foi desenvolvida. Os métodos geométricos EDE (*Extremum Distance Estimator*), ESE (*Extremum Surface Estimator*), BEDE (*Bisection - EDE*) e BESE (*Bisection - ESE*) podem ser utilizados como uma alternativa para a determinação da altura relativa no ponto de inflexão (p) por árvore. As equações ajustadas apresentaram boa precisão (S_{yx} % de 6,35% a 7,20%) e boa habilidade, para predizer diâmetros ao longo do fuste e volume, para o perfil com e sem casca. A estratégia utilizada na determinação de p teve pouca influência na precisão das equações. A altura relativa do ponto de inflexão varia de árvore para árvore e os resultados indicam que esta variação sofre pouca ou nenhuma influência do DAP e H das árvores. A equação proposta apresentou comportamento semelhante às já desenvolvidas por Kozak, porém tem a vantagem de possuir um expoente mais simples.

Palavras-chave: Ponto de inflexão. Equações de afilamento de Kozak. Diâmetros com casca e sem casca. Volume.

Abstract

Variable-exponent taper functions were fitted to *Eucalyptus* spp. data, using different approaches for estimating inflection point (p). The precision and the prediction abilities of the taper functions were evaluated for diameter along the stem and total volume (inside bark and outside bark). A new approach was presented for estimating the p value and a modified version of Kozak's model was developed. The geometrical methods EDE (*Extremum Distance Estimator*), ESE (*Extremum Surface Estimator*), BEDE (*Bisection - EDE*) e BESE (*Bisection - ESE*) can be applied as an alternative to estimate p . The fitted equations performed well, with good precisions (S_{yx} % de 6.35% a 7.20%) and good ability to predict diameter along the stem and total volume (outside and inside bark). It was found that the different approaches tested to determine p had little influence on the precision of the equations. It was observed that the relative height at the inflection point (p) varies from tree to tree and the results indicated that DBH and H have little or no effect in this variation. The modified variable exponent was similar to Kozak's equations, but it is advantageous because it is a simpler exponent.

Keywords: Inflection point. Kozak's taper equation. Diameter inside and outside bark. Volume.

INTRODUÇÃO

O afilamento do fuste das árvores é definido como o decréscimo do diâmetro no sentido base-topo. Esta característica torna-se ferramenta importante ao manejador florestal por permitir a estimativa dos sortimentos presentes no povoamento.

Muitas equações foram desenvolvidas, ao longo dos anos, com o objetivo de descrever adequadamente o perfil das árvores. Geralmente, são classificadas como simples (KOZAK; MUNRO; SMITH, 1969; ORMEROD, 1973), segmentadas (MAX; BURKHART, 1976; PARRESOL; HOTVEDT; CAO, 1987),

1. Departamento de Ciências Florestais, Universidade Federal de Lavras- UFLA. Lavras / MG, Brasil. * Autor correspondente: joyce_a.alves@yahoo.com.br

2. Instituto Federal Goiano, IFG. Morrinhos / GO, Brasil.

polinomiais (HRADETZKY, 1976; SCHÖEPFER, 1966), sigmoidais (BIGING, 1984; GARAY, 1979; PIRES; CALEGARIO, 2007) e de forma-variável ou expoente-variável (KOZAK, 1988; NEWNHAM, 1988).

As funções de expoente-variável de Kozak (1988, 2004) são funções contínuas que descrevem o afilamento do fuste por meio da mudança do expoente, para compensar as suas formas neiloide, paraboloide e cônica. Foram desenvolvidas a partir de uma função de potência simples (PEREZ; BURKHART; STIFF, 1990), que descreve o perfil de um sólido de revolução (NEWNHAM, 1992).

Pode-se afirmar que as equações de expoente-variável representam a evolução daquelas propostas por Gray (1956) e Ormerod (1973). A principal mudança nas equações de expoente-variável é a substituição do valor fixo ou parâmetro no expoente por uma função que permite a variação da forma ao longo do fuste.

Outro ponto de destaque, nas funções de afilamento de Kozak, é a utilização da altura relativa no ponto de inflexão (p = altura no ponto de inflexão/altura total da árvore) na base da função. O valor de p é definido como o ponto em que a forma da árvore muda de neiloide para paraboloide (DEMAERSHALK; KOZAK, 1977). Segundo Kozak (1988), este ponto é relativamente constante, para determinada espécie, independentemente do tamanho da árvore.

Muitos pesquisadores adotam a prática de fixar um valor para p quando decidem não estimá-lo a partir dos dados (BERHE; ARNOLDSSON, 2008). Este procedimento é sustentado pelas pesquisas de LeMay et al. (1993 apud KOZAK, 1997) e Perez, Burkhart e Stiff (1990), que afirmam, respectivamente, que valores de p entre 0 – 0,3 ou 0,15 – 0,35 têm efeito desprezível ou pequeno na habilidade preditiva do modelo. Entretanto, conforme observado por Berhe e Arnoldsson (2008), parece existir um valor de p ótimo entre 0,1 e 0,3. Berhe e Arnoldsson (2008) utilizaram a modelagem não linear mista para investigar a variação de p . Os resultados indicaram que a altura relativa no ponto de inflexão varia de árvore para árvore e possui a tendência de depender do DAP (diâmetro à altura do peito) e da H (altura total).

Apesar de muitas pesquisas relatarem que as equações do tipo expoente-variável apresentam desempenho superior a outros tipos de funções de afilamento (ANDRADE, 2014; BERHE; ARNOLDSSON, 2008; LI; WEISKITTEL, 2010; NEWNHAM, 1992), são raramente contempladas em pesquisas brasileiras com espécies de rápido crescimento, destacando-se o estudo de Andrade (2014).

Diante do exposto, pode-se afirmar que a subjetividade na determinação de p e a influência de seu valor na habilidade preditiva da função são assuntos que também devem ser investigados, visto que ainda não há um consenso na literatura sobre estas questões. Além disso, deve-se avaliar se as funções de Kozak apresentam bom desempenho na modelagem de dados heterogêneos de afilamento de *Eucalyptus* spp, que representam a realidade de muitas empresas brasileiras.

Objetivou-se, neste trabalho, avaliar a qualidade do ajuste das equações de expoente-variável de Kozak (1988, 2004) para estimar os diâmetros, ao longo do fuste e volume total (com e sem casca) de árvores de *Eucalyptus* spp., considerando diferentes estratégias na determinação da altura relativa do ponto de inflexão – p (i. como parâmetro, ii. conforme definido por Kozak e iii. valor médio estimado por métodos geométricos). Uma proposta, para estimar o valor de p por métodos geométricos foi apresentada e uma nova equação de expoente-variável foi desenvolvida.

MATERIAL E MÉTODOS

Base de dados

Os dados utilizados neste estudo são provenientes de povoamentos de *Eucalyptus* spp. localizados nos municípios de Ouvidor - GO, Catalão - GO e Três Ranchos - GO. Os povoamentos continham idades entre 2,6 e 8,6 anos, diferentes espaçamentos de plantio (3 x 1,5 m; 3 x 3 m; 3,5 x 2 m; 3 x 2 m e 4 x 1,5 m), materiais genéticos (*E. urophylla*; *E. urograndis*; *E. cloeziana*, mudas clonais e por semente) e regimes de manejo (alto fuste e talhadia). A definição do número de árvores cubadas rigorosamente foi realizada a partir da distribuição diamétrica das árvores pertencentes às 294 unidades amostrais alocadas em 1803,46 ha de plantio.

A cubagem consistiu na derrubada e mensuração de 360 árvores distribuídas em 22 projetos. As árvores selecionadas foram abatidas e mensuradas as alturas totais. Em seguida, foram coletados os diâmetros com casca correspondentes às alturas do fuste iguais a 0,1; 0,5; 1,0; 1,3; 2,0 metros, mantendo o intervalo de 2,0 metros até a altura comercial, altura na qual o diâmetro foi igual a 4,0 cm. Nestas posições, também foram medidas as espessuras da casca. A base de dados foi dividida em 70% para ajuste das equações e 30% para validação (Tabela 1).

Tabela 1. Número de árvores cubadas por classe de diâmetro.**Table 1.** Number of the cubed trees per diameter class.

Classe de diâmetro	Ajuste	Validação	Total
[4-8[48	21	69
[8-12[48	20	68
[12-16[48	20	68
[16-20[43	19	62
[20-24[27	11	38
[24-28[21	9	30
[28-32[13	5	18
[32-36[5	2	7
Total	252	108	360

Ajuste das funções de afilamento de expoente variável

As equações de expoente variável podem ser representadas genericamente por $d_{isc} = D_1 X^C$, em que: d_{isc} = diâmetro sem casca na altura (h_i) a partir do solo ($0 \leq h_i \leq H$); D_1 = diâmetro sem casca na altura de referência p , estimado por uma equação; C = expoente que varia ao longo do fuste, representado por uma função; $X = (1-Z^m)/(1-p^m)$; Z = altura relativa (h_i/H); H = altura total da árvore; m = valor constante.

Kozak (1988) definiu que o expoente C poderia ser expresso por uma regressão linear múltipla e substituiu D_1 por uma equação que é função do DAP (diâmetro com casca na altura do peito). D_1 deve ser estimado por uma função de DAP para viabilizar a aplicação da equação de expoente variável, visto que D_1 não é uma variável medida nas árvores inventariadas. As demais equações apresentadas por Kozak (2004) foram desenvolvidas a partir de modificações na função que define o expoente C , na base X e no multiplicador (equação que estima D_1).

As funções de 1988 (1), 2001 (2) e 2002 (3), propostas por Kozak (1988, 2004), foram ajustadas para os dados deste estudo.

$$\begin{aligned} \hat{d}_{isc} &= \hat{\alpha}_0 DAP^{\hat{\alpha}_1} \hat{\alpha}_2 X_i^C \\ C &= \hat{\beta}_1 Z^2 + \hat{\beta}_2 \ln(Z + 0,001) + \hat{\beta}_3 \sqrt{Z} + \hat{\beta}_4 \exp(Z) + \hat{\beta}_5 (DAP/H), \\ X_i &= \left[1 - (h_i/H)^{1/2} \right] / \left[1 - p^{1/2} \right] \text{ e } p = h_i/H \end{aligned} \quad (1)$$

$$\begin{aligned} \hat{d}_{isc} &= \hat{\alpha}_0 DAP^{\hat{\alpha}_1} X_i^C \\ C &= \hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 (1/e^{DAP/H}) + \hat{\beta}_2 DAP^{X_i} + \hat{\beta}_3 X_i^{DAP/H}, \\ X_i &= \left[1 - (h_i/H)^{1/4} \right] / \left[1 - p^{1/4} \right] \text{ e } p = 0,01 \end{aligned} \quad (2)$$

$$\begin{aligned} \hat{d}_{isc} &= \hat{\alpha}_0 DAP^{\hat{\alpha}_1} H^{\hat{\alpha}_2} X_i^C \\ C &= \hat{\beta}_1 Z_i^4 + \hat{\beta}_2 (1/e^{DAP/H}) + \hat{\beta}_3 X_i^{0,1} + \hat{\beta}_4 (1/DAP) + \hat{\beta}_5 H^{Q_i} + \hat{\beta}_6 X_i, \\ Q_i &= \left[1 - (h_i/H)^{1/3} \right], \quad X_i = \left[1 - (h_i/H)^{1/3} \right] / \left[1 - p^{1/3} \right] \text{ e } p = 1,3/H \end{aligned} \quad (3)$$

Em que: h_i = altura do ponto de inflexão a partir do solo; α_i = parâmetros a serem estimados ($i=0, 1$ e 2); β_i = parâmetros a serem estimados ($i=0, 1 \dots 6$); d_{isc} , h_i , DAP , H e Z definidos anteriormente.

As equações também foram ajustadas para estimar o diâmetro com casca ao longo do fuste (d_{icc}). Neste caso, o multiplicador de X_i é uma equação que estima o diâmetro com casca (D_{icc}) na altura de referência p . Na equação de 1988, o multiplicador é o diâmetro com casca na altura relativa do ponto de inflexão ($p=h_i/H$). Na equação de 2001, é o diâmetro com casca na altura relativa 0,01 ($p=0,01$) e na equação de 2002, será o próprio diâmetro à altura do peito com casca (DAP_{cc}), eliminando-se assim, a necessidade de utilizar uma equação para estimá-lo, uma vez que o DAP_{cc} é uma variável observada.

As equações foram ajustadas de duas maneiras: a) p conforme definido por Kozak e b) p como parâmetro.

Determinação das coordenadas do ponto de inflexão

Na equação 1, Kozak (1988) definiu p como a altura relativa no ponto de inflexão ($p=h_i/H$). O valor de p é o ponto onde a forma da árvore muda de neiloide para parabolóide (DEMAERSHALK; KOZAK, 1977). O ponto de inflexão foi determinado para cada árvore utilizando-se os métodos geométricos propostos por Christopoulos (2014). Com esses métodos é possível identificar a inflexão de qualquer curva côncavo-convexa, sem a necessidade de utilizar regressão ou método visual.

Foram testados os quatro métodos propostos por Christopoulos (2014): EDE (*Extremum Distance Estimator*), ESE (*Extremum Surface Estimator*), BEDE (*Bisection - EDE*) e BESE (*Bisection - ESE*), para o perfil com e sem casca. As análises foram realizadas no software R (R CORE TEAM, 2014) por meio das funções *ede*, *ese*, *bede*, *bese* do pacote *Inflexion* (CHRISTOPOULOS, 2017).

Os métodos permitem encontrar dois pontos apropriados entre os quais o ponto de inflexão verdadeiro está e, então, tomar como seu estimador o ponto médio (CHRISTOPOULOS, 2016). As funções do pacote *Inflexion* retornam a abcissa do ponto de inflexão (x_{infl}) e a ordenada (y_{infl}) pode ser determinada de duas maneiras:

- se x_{infl} é um dos valores observados, então y_{infl} será seu par correspondente observado;
- se x_{infl} não é um dos valores observados, então y_{infl} será estimado por interpolação linear, utilizando-se os pares observados (x, y) anteriores e posteriores a x_{infl} .

A equação 1 foi ajustada para diâmetro com e sem casca considerando o valor médio de p estimado por cada método (EDE, ESE, BEDE e BESE). Para as posteriores análises, utilizou-se o valor de p que resultou no menor erro padrão residual para o ajuste.

Equação de expoente-variável modificada

Segundo Kozak (2004), as equações de expoente-variável podem ser facilmente modificadas e aperfeiçoadas para as condições locais e diferentes espécies pela alteração de um ou mais termos que compõe a equação: expoente, base do expoente ou multiplicador da base.

A seguinte equação foi proposta (4) e ajustada para diâmetro com e sem casca:

$$\hat{d}_i = \hat{\alpha}_0 \text{DAP}^{\hat{\alpha}_1} H^{\hat{\alpha}_2} X_i^{\hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 Z_i + \hat{\beta}_2 \text{DAP}/H + \hat{\beta}_3 p} \quad (4)$$

$$X_i = \left[1 - (h_i/H)^{1/6} \right] / \left(1 - p^{1/6} \right) \text{ e } p = \frac{h_i}{H}$$

Em que: d_i = diâmetro com ou sem casca na altura h_i ; h_i = altura a partir do solo; $0 \leq h_i \leq H$; DAP = diâmetro com casca na altura do peito (cm); H = altura total da árvore; h_i = altura do ponto de inflexão a partir do solo. $Z = h_i/H$ (altura relativa); α_i = parâmetros a serem estimados ($i=0, 1$ e 2); β_i = parâmetros a serem estimados ($i=0, 1, 2$ e 3).

O expoente da equação foi desenvolvido a partir de variáveis que possuem alta correlação com o valor de C , de acordo com a literatura e com análises prévias realizadas neste estudo. Após a inclusão de Z no expoente, as variáveis que são transformações de Z representam um ganho em precisão é muito pequeno, portanto, as transformações de Z não foram consideradas. As bases das equações de 1988, 2001 e 2002 também foram testadas e optou-se por aquela que resultou em melhor precisão. Durante o desenvolvimento da equação modificada, observou-se que quanto menor o valor de m , constante presente na base da equação, maior a precisão. Entretanto, os ganhos em precisão são pequenos e reduzem a cada redução de m .

Estimativa da altura relativa do ponto de inflexão para árvores inventariadas

A aplicação da função de afilamento de expoente-variável da equação proposta depende da estimativa das coordenadas do ponto de inflexão, ou seja, do diâmetro e altura no ponto de inflexão (D_i e h_i), das árvores presentes nas parcelas de inventário. D_i é estimado pelo multiplicador de X_i (base) nas equações de Kozak. A altura do ponto de inflexão, para a equação proposta (4), foi estimada pela equação linear simples (5).

$$h_i = \beta_0 + \beta_1 H + \varepsilon \quad (5)$$

Em que: h_i = altura do ponto de inflexão; H = altura total da árvore; ε = erro aleatório; β 's = parâmetros a serem estimados.

Esta função (5) foi ajustada, utilizando-se a estimativa de h_1 pelo método EDE, por maior correlação obtida entre h_1 e H com este método.

Análise dos resultados

As funções ajustadas foram avaliadas pelo erro padrão residual - S_{yx} (7), erro padrão residual percentual - $S_{yx\%}$ (8) e gráfico de resíduos.

$$S_{yx} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (y - \hat{y})^2}{n - p}} \quad (7)$$

$$S_{yx\%} = (S_{yx} / \bar{y}) \times 100 \quad (8)$$

Em que: S_{yx} = erro padrão residual na unidade da variável resposta; $S_{yx\%}$ = erro padrão residual percentual; y = valor observado; \hat{y} = valor estimado pela equação; n = número de observações; p = número de parâmetros.

O S_{yx} expressa em termos médios o quanto os valores observados variam em relação aos estimados. A unidade é a mesma da variável dependente e quanto mais próximo de zero melhor é a equação.

Considerando que as funções ajustadas serão utilizadas para predizer o perfil das árvores das unidades amostrais do inventário florestal, avaliou-se, também, sua habilidade preditiva, aplicando-se os critérios por classe de altura relativa ($Z=h/H$) aos dados de validação (Tabela 2).

Entra Tabela 2

Tabela 2. Critérios para validação das equações.

Table 2. Criteria for equations' validation.

Bias ou erro médio (\bar{e})	Erro médio absoluto $ e $	Erro médio percentual ($\bar{e}\%$)	Raiz do erro quadrático médio (RMSE)
$\bar{e} = \frac{\sum_{i=1}^n (y_i - \hat{y}_i)}{n}$	$ e = \frac{\sum_{i=1}^n y_i - \hat{y}_i }{n}$	$\bar{e}\% = (\bar{e} / \bar{y}) \times 100$	$RMSE = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (y - \hat{y})^2}{n}}$

Em que: y = valor observado para determinada variável de interesse, neste trabalho, diâmetro com casca (d_{cc}) e sem casca (d_{sc}); \hat{y} = valor predito para a variável de interesse; n = número de observações; \bar{y} = média dos valores observados para a variável de interesse.

As equações de expoente-variável apenas podem ser integradas numericamente, portanto, os volumes foram calculados utilizando-se a função *integrate* do R (R CORE TEAM, 2014). Os volumes preditos para os dados de validação foram comparados graficamente com os volumes obtidos pela fórmula de Smalian.

RESULTADOS E DISCUSSÃO

Estimativa do valor de p por meio de métodos geométricos

Os métodos EDE, ESE, BEDE e BESE foram eficazes na determinação do ponto de inflexão em perfis de árvores de eucalipto. O percentual de árvores com p não estimado foi menor que 5% para todos os métodos. O menor percentual foi observado, para os métodos ESE (1,1%) e BESE (1,1%), em perfis com casca e o maior percentual para os métodos ESE (4,7%) e BESE (4,7%), em perfis sem casca.

A aplicação desta metodologia evita a subjetividade na escolha de p (altura relativa do ponto de inflexão) para os ajustes das funções de afilamento de expoente-variável. Alguns autores têm optado por considerar p como parâmetro, a fim de evitar esta subjetividade (ANDRADE, 2014; BERHE; ARNOLDSSON, 2008; HUANG et al., 2000; YANG; HUANG; MENG, 2009), entretanto, conforme apontado por Fonweban et al. (2011), problemas de convergência podem ser enfrentados, principalmente, quando se opta pela modelagem de efeitos mistos.

O ponto de inflexão foi estimado por todos os métodos, para ambos os perfis, para 91% das árvores. É importante ressaltar que os valores estimados podem ou não diferir, dependendo do método adotado e do perfil considerado (com ou sem casca).

As árvores que não tiveram seu ponto de inflexão estimado possuem DAP's variando entre 4,5 cm a 15,6 cm, valores entre o DAP mínimo e médio dos dados. A ausência de dados coletados na parte superior do fuste de árvores muito pequenas, não permitiu a estimativa do ponto de inflexão pelos métodos EDE e BEDE, pois o diâmetro mínimo de cubagem (4 cm) está localizado em proporções abaixo de 50% da altura total.

Alguns perfis sem casca apresentaram forma indefinida, possivelmente causada pela imprecisão na medição da espessura de casca. Observou-se também a forma parabolóide em outros perfis se casca. Nessas situações, o ponto de inflexão não foi estimado pelos métodos ESE e BESE.

Observou-se que a presença de cascas mais espessas nas partes inferiores do fuste, conferem ao perfil com casca uma forma sigmoide mais acentuada, com ponto de inflexão bem definido. Esta situação parece ter contribuído com o processo de estimação de p .

Os valores de p variam entre árvores, porém esta variação do valor de p , estimado pelos métodos ESE, BESE e BEDE, não foi explicada pelo DAP e H das árvores (Figura 1). Ou seja, em média, o valor de p não aumentou e nem diminuiu com variação do DAP e da H. Este padrão também foi observado para perfis sem casca.

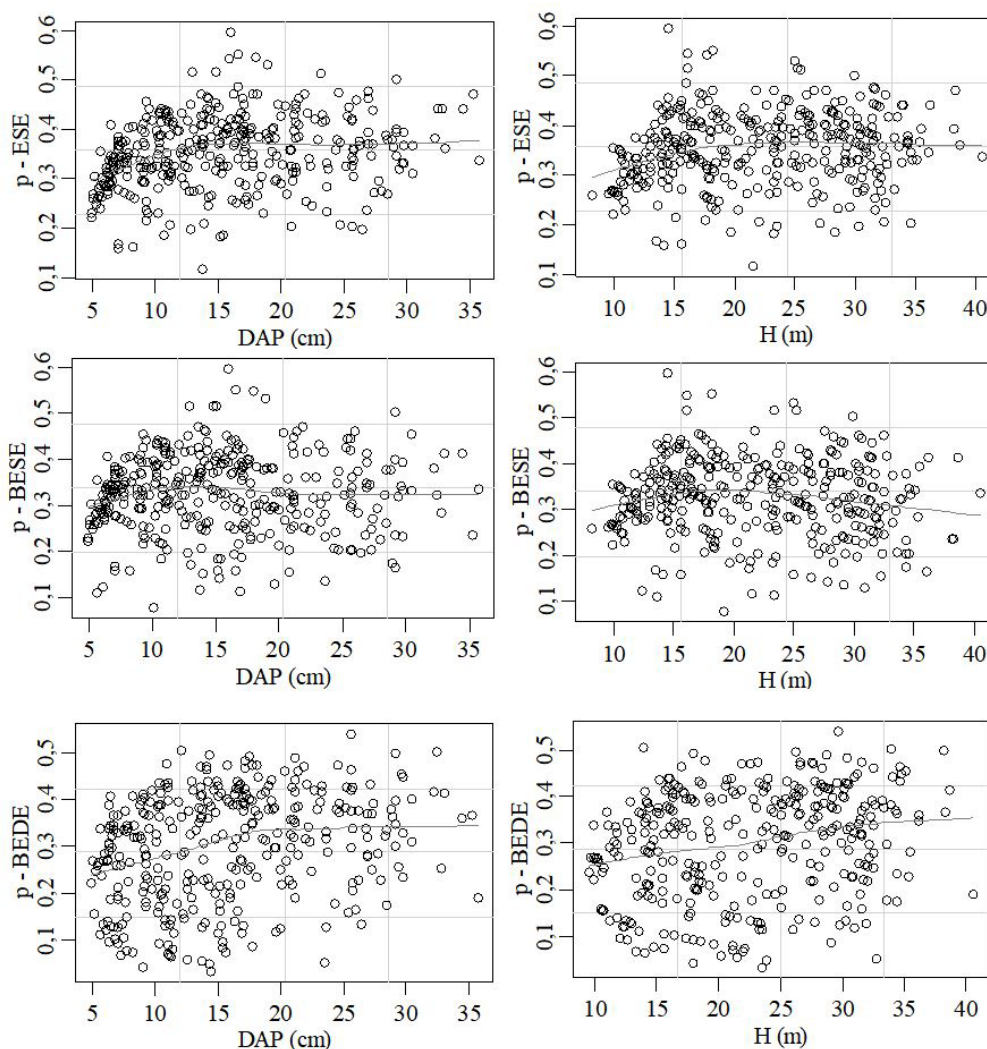


Figura 1. Relação da altura relativa do ponto de inflexão (p) com o DAP e a H da árvore, para perfil com casca.
Figure 1. Relation of the relative height of inflection point (p) with DAP and H of the tree, for profile outside bark.

Os valores de p estimados pelo método EDE apresentaram menor variabilidade. A altura relativa do ponto de inflexão (p) tende a aumentar com o aumento do DAP e da H até, aproximadamente, 12 cm e 17 m, respectivamente, tornando-se constante após estes pontos, principalmente, para perfis com casca (Figura 2).

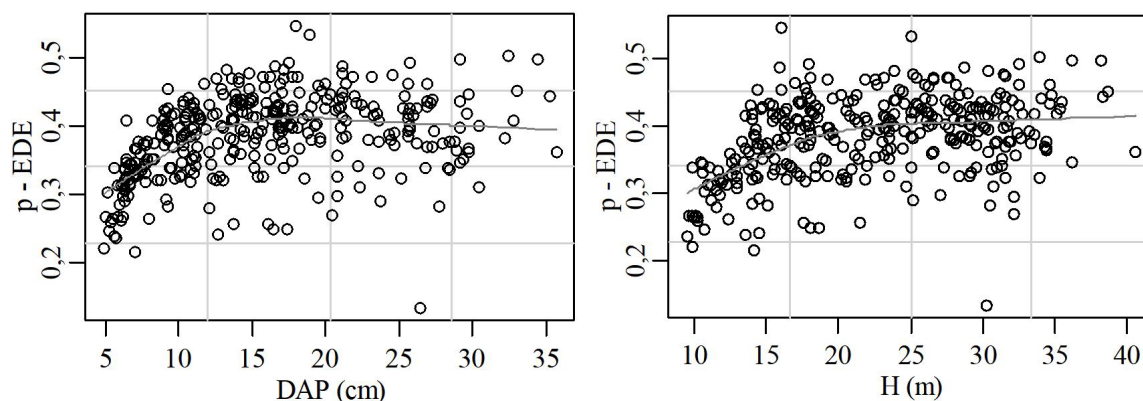


Figura 2. Relação da altura relativa do ponto de inflexão (p), estimada pelo método EDE, com o DAP e a H da árvore, para perfil com casca.

Figure 2. Relation of the relative height of inflection point (p), estimated by the EDE method, with DAP and H of the tree, for profile outside bark.

Segundo Demaerschalk e Kozak (1977), p é aproximadamente constante, para determinada espécie, independente do tamanho da árvore. É importante ressaltar que p é uma proporção entre a altura do ponto de inflexão e a altura total da árvore (h_i/H). Foi observado que a altura no ponto de inflexão (h_i) depende da H e do DAP da árvore, e a correlação entre estas variáveis foi maior para h_i estimado pelo método EDE, principalmente quando considerado o perfil com casca (Figura 3).

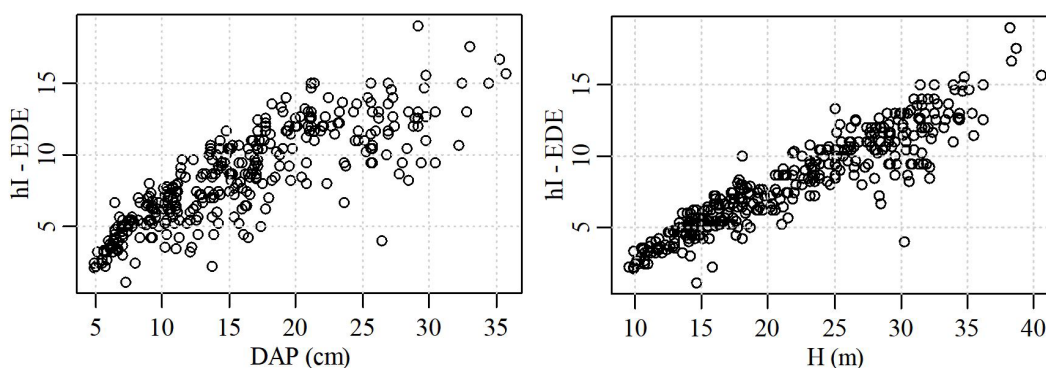


Figura 3. Relação da altura do ponto de inflexão (h_i), estimada pelo método EDE, com o DAP e a H da árvore, para perfil com casca.

Figure 3. Relation of the height of inflection point (h_i), estimated by the EDE method, with DAP and H of the tree, for profile outside bark.

Avaliação das equações de expoente-variável

Os valores de erro padrão residual (S_{yx} e $S_{yx\%}$) das equações ajustadas (1988, 2001 e 2002) foram semelhantes, independentes da variável resposta (diâmetro sem casca d_{isc} e com casca d_{icc}) e definição de p utilizada (altura relativa do ponto de inflexão). A equação de 2001 apresentou menor precisão em todos os casos, entretanto é a equação com maior parcimônia, visto que apresenta menor número de parâmetros (Tabela 3).

As equações de Kozak possuem termos que são transformações de uma mesma variável, uma das principais fontes de multicolinearidade. A multicolinearidade pode não afetar, seriamente, a habilidade preditiva de alguns modelos de expoente-variável, porém, sempre que possível, deve-se optar por equações que possuem este problema reduzido (KOZAK, 1997). As equações de 2001 e 2002 possuem esta principal vantagem em relação à de 1988 (KOZAK, 2004).

O parâmetro β_4 não foi significativo, na equação de 1988, para a variável resposta diâmetro com casca (d_{icc}), portanto retirou-se a variável $exp(Z)$ do expoente. O parâmetro α_2 , associado à altura H,

Tabela 3. Parâmetros estimados para as equações de expoente-variável.

Table 3. Estimated parameters for variable-exponent equations.

Equação de 1988				
Parâmetro	d_{isc} e p_k	d_{isc} e \hat{p}	${}^1d_{icc}$ e p_k	${}^2d_{icc}$ e \hat{p}
α_0	0,9948595	1,1127694	1,0685322	1,1095303
α_1	0,8974114	0,8950293	0,8907652	0,8901600
α_2	1,0021314	1,0035128	1,0018498	1,0022218
β_1	0,3370064	0,5828762	0,2478362	0,2748074
β_2	-0,0775437	-0,1255601	-0,0653976	-0,0689693
β_3	0,5457891	0,7605191	0,2604951	0,2187303
β_4	-0,1385210	-0,3319805	-	-
β_5	0,219300	0,2571944	0,2141330	0,2229901
p	0,30	0,1216770	0,30	0,2442721
S_{yx} (cm)	0,771	0,762	0,769	⁴ 0,769
S_{yx} %	6,77%	6,69%	6,35%	6,35%
n_{par}	8	9	7	8
Equação de 2001				
Parâmetro	d_{isc} e p_k	d_{isc} e \hat{p}	d_{icc} e p_k	d_{icc} e \hat{p}
α_0	1,0095	0,9397	1,1714	1,0947
α_1	1,0008	1,0488	0,9786	1,0348
β_0	0,4025	0,3733	0,3974	0,3714
β_1	0,2003	0,2287	0,2024	0,2228
β_2	0,0239	0,0495	0,0216	0,0528
β_3	-0,5909	-0,6638	-0,4914	-0,5612
p	0,01	0,0031	0,01	0,0023
S_{yx} (cm)	0,819	0,815	0,852	0,845
S_{yx} %	7,20%	7,16%	7,04%	6,98%
n_{par}	6	7	6	7
Equação de 2002				
Parâmetro	${}^3d_{isc}$ e p_k	d_{isc} e \hat{p}	${}^4d_{icc}$ e p_k	${}^5d_{icc}$ e \hat{p}
α_0	0,9497	1,1284	-	0,8247
α_1	0,9985	0,9690	-	0,8872
α_2	-	-0,0435	-	0,0850
β_0	-	-	-	5,7941
β_1	0,4077	0,4000	0,4348	-0,8366
β_2	-0,8113	-0,8309	-0,7331	-0,7365
β_3	0,7586	0,7854	0,6923	-5,4551
β_4	1,9230	1,9409	1,7394	1,4918
β_5	0,0212	0,0194	0,0201	-
β_6	-0,2958	-0,2886	-0,1771	0,3322
p	1,3/H	0,104715	1,3/H	0,3367
S_{yx} (cm)	0,764	0,759	0,770	0,748
S_{yx} %	6,71%	6,67%	6,77%	6,18%
n_{par}	8	10	6	10

d_{isc} = diâmetro sem casca; d_{icc} = diâmetro com casca; S_{yx} e $S_{yx\%}$ = erro padrão residual e erro padrão residual percentual; n_{par} = nº de parâmetros da equação; p_k = p conforme definido por Kozak, na equação de 1988 foi considerada a média dos valores de p estimado pelo método BEDE/BESE para d_{isc} e BESE para d_{icc} ; \hat{p} = p estimado como parâmetro; ¹Equação sem o parâmetro β_4 (não significativo); ²Equação sem α_2 (parâmetro não significativo); ³ O multiplicador da equação é o próprio DAP com casca observado; ⁴ Equação com intercepto β_0 adicionado no expoente para atingir a convergência e sem o parâmetro β_5 (não significativo).

não foi significativo na equação de 2002, para diâmetro sem casca (d_{isc}) como variável independente e p conforme definido por Kozak (1,3/H). A equação de 2002 – d_{icc} e p parâmetro – não atingiu a convergência. Para contornar este problema, foi necessário incluir um parâmetro β_0 no expoente. Neste ajuste, o parâmetro do expoente, associado à variável H^{Qi} (β_5), não foi significativo. Kozak

(2004) ajustou o modelo de 2002 para diferentes grupos de espécies e observou que 8 dos 38 ajustes apresentaram pelo menos 1 parâmetro não significativo. O parâmetro α_2 não foi significativo, em 6 ajustes e β_5 , em um dos ajustes, mostrando que as variáveis associadas tendem a não contribuir com a explicação da variação do diâmetro ao longo do fuste.

Houve redução no S_{yx} (cm e %) nos ajustes quando p foi considerado como parâmetro. Com esta estratégia de ajuste, evita-se a subjetividade na definição de p . Porém, deve-se ter cautela ao considerá-la, pois, além da redução da parcimônia, o ajuste pode não atingir a convergência, principalmente, na modelagem mista, conforme verificado por Fonweban et al. (2011).

Em relação à análise gráfica de resíduos (Figuras 4, 5 e 6), observou-se uma maior dispersão para os diâmetros maiores, além de leve tendência de subestimativa dos diâmetros com e sem casca.

As estatísticas calculadas por classe de altura relativa (Z), utilizando-se os dados de validação, são importantes na avaliação da habilidade preditiva das equações nas diferentes partes do fuste – base, meio e topo.

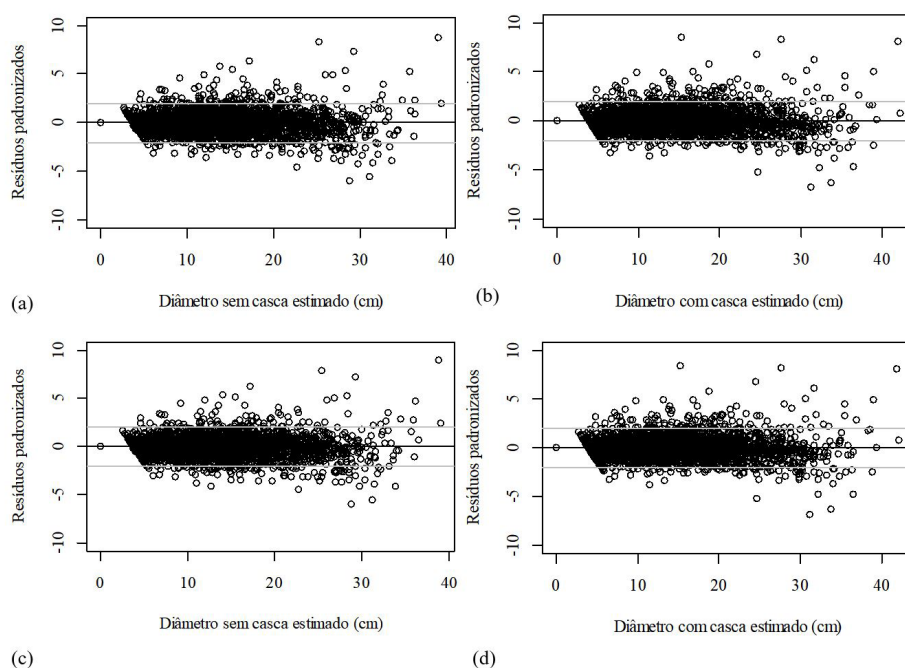


Figura 4. Gráficos de resíduos padronizados para a equação de 1988. p estimado como parâmetro da equação, em (a) $\hat{p} = 0,12$ e (b) $\hat{p} = 0,24$. p estimado pelo método geométrico que possibilitou o menor erro padrão residual, em (c) $\bar{p}_{bede/bese} = 0,30$ e (d) $\bar{p}_{bese} = 0,30$.

Figure 4. Standardized residuals plots for equation of 1988. p estimated as parameter of the equation, in (a) $\hat{p} = 0,12$ e (b) $\hat{p} = 0,24$. p estimated by the geometric method that allowed the smallest residual standard error, in (c) $\bar{p}_{bede/bese} = 0,30$ e (d) $\bar{p}_{bese} = 0,30$.

Os valores de erro médio (\bar{e}) global e por posição foram baixos, máximos de -0,06 e -0,43, respectivamente. Para os ajustes das equações de 2001, observou-se a tendência de viés positivo na estimativa de diâmetros na parte central do fuste ($0,3 < h_i/H \leq 0,7$). Na base e no topo, os vieses foram negativos e maiores. Para as demais equações, houve a tendência de viés negativo da parte central até o topo do fuste ($0,4 < h_i/H \leq 1,0$).

Para as demais estatísticas, os valores foram semelhantes entre as equações ajustadas. Entretanto, a equação de 2001 foi ligeiramente inferior e apresentou erros médios percentuais ($\bar{e}\%$) elevados (entre -20,87% e -24,10%) para a última seção ($0,9 < h_i/H \leq 1,0$).

Os volumes com casca preditos pelas equações ajustadas foram próximos aos volumes observados (Smalian), sem tendência de superestimativa ou subestimativa (Figura 7). Pode-se afirmar, pela semelhança entre os gráficos, que a predição do volume não foi influenciada pelas diferentes metodologias adotadas na determinação de p . A mesma tendência foi seguida para volumes sem casca. Pode-se inferir que a variação de p , dentro da faixa apresentada neste trabalho, não afeta a predição do volume.

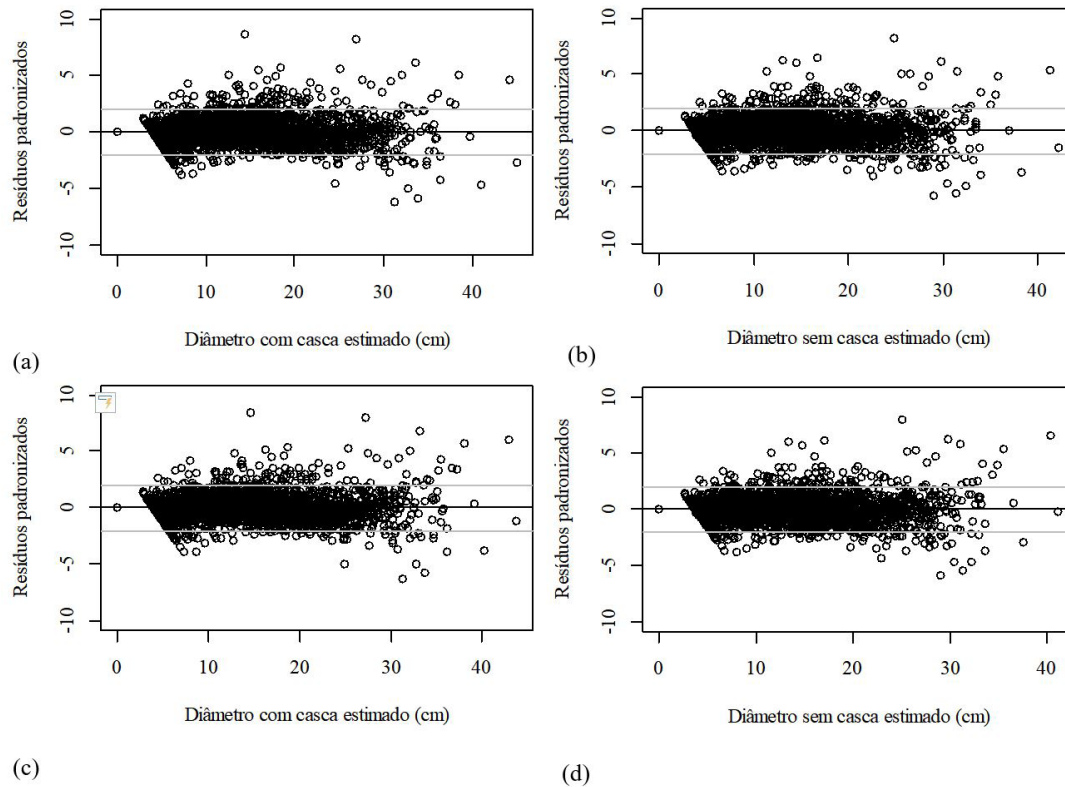


Figura 5. Gráficos de resíduos padronizados para a equação de 2001. p conforme definido por Kozak em (a) $p_{Kozak}=0,01$ e (b) $p_{Kozak}=0,01$. p estimado como parâmetro da equação em (c) $\hat{p}=0,002256$ e (d) $\hat{p}=0,0031177$.
Figure 5. Standardized residuals plots for equation of 2001. p according to that defined by Kozak, in (a) $p_{Kozak}=0,01$ e (b) $p_{Kozak}=0,01$. p estimated as parameter of the equation, in (c) $\hat{p}=0,002256$ e (d) $\hat{p}=0,0031177$.

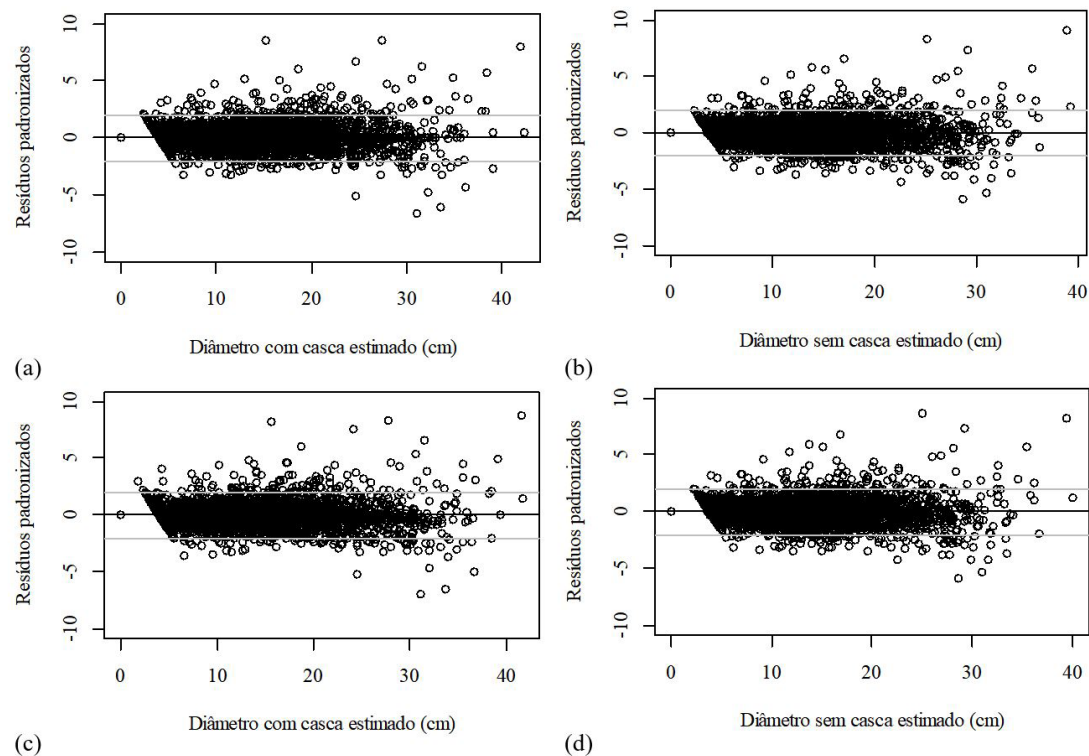


Figura 6. Gráficos de resíduos padronizados para a equação de 2002. p conforme definido por Kozak, em (a) e (b) $p=1,3/H$. p estimado como parâmetro da equação em (c) $\hat{p}=0,33673$ e (d) $\hat{p}=0,104715$.
Figure 6. Standardized residuals plots for equation of 2002. p according to that defined by Kozak, in (a) e (b) $p=1,3/H$. p estimated as parameter of the equation, in (c) $\hat{p}=0,33673$ e (d) $\hat{p}=0,104715$.

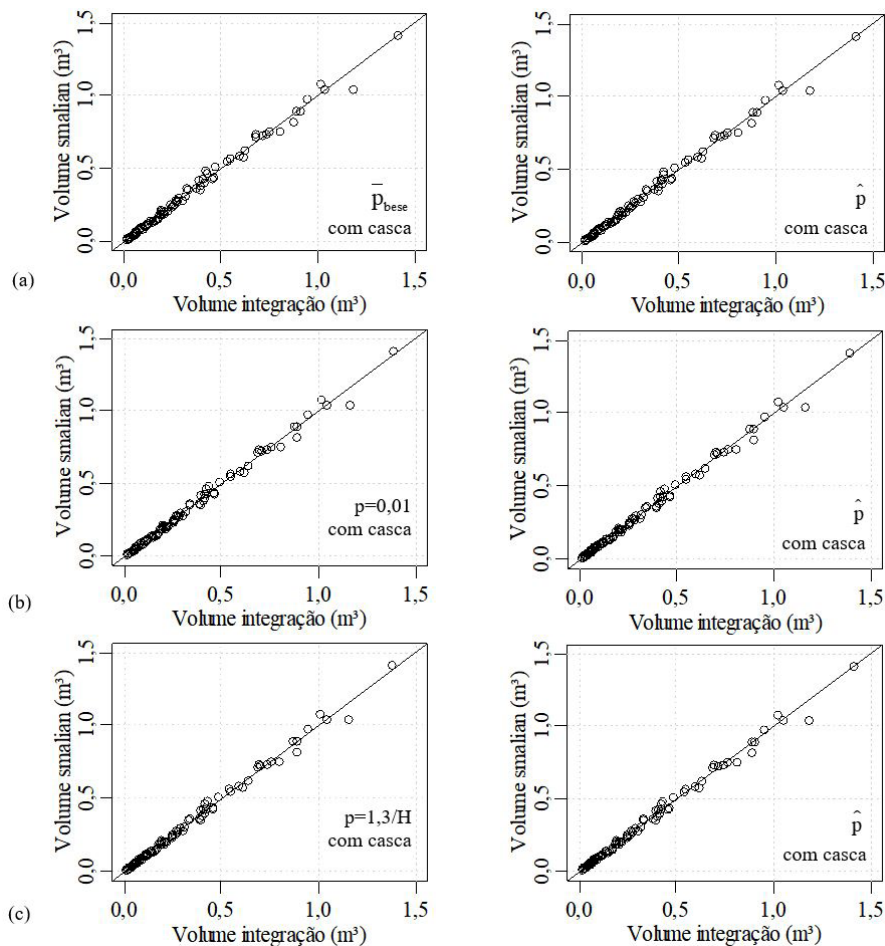


Figura 7. Volume observado (smalian) versus predito (integração) para (a) equação de 1988, (b) equação de 2001 e (c) equação de 2002.

Figure 7. Observed volume (smalian) x predicted volume (integration) for (a) equation of 1988, (b) equation of 2001 and (c) equation of 2002.

Avaliação da equação de expoente-variável modificada

As equações lineares simples, para perfil sem e com casca, foram $\hat{h}_1 = -1,099416 + 0,424189H$ e $\hat{h}_1 = -1,179444 + 0,445626H$, respectivamente. O coeficiente de determinação ajustado (R_{aj}^2) foi de 84,98% e 87,29%, para perfil sem e com casca, respectivamente.

Todos os parâmetros da equação de expoente-variável modificada foram significativos. A precisão (S_{yx} e $S_{yx\%}$) das equações modificadas foi semelhante à precisão das equações originais de Kozak (Tabela 4).

Tabela 4. Parâmetros estimados para a equação de expoente-variável proposta.

Table 4. Estimated parameters for the proposed variable-exponent equation.

Parâmetro	Equação modificada	
	d_{isc}	d_{icc}
α_0	0,7725	0,8562
α_1	0,8339	0,8517
α_2	0,1246	0,0849
β_0	0,5761	0,7327
β_1	0,3281	0,2815
β_2	0,2349	0,2116
β_3	-1,2285	-1,4421
S_{yx} (cm)	0,766	0,776
$S_{yx\%}$	6,73	6,41
n_{par}	7	7

S_{yx} e $S_{yx\%}$ = erro padrão residual e erro padrão residual percentual. n_{par} = nº de parâmetros da equação. d_{sc} = diâmetro sem casca. d_{cc} = diâmetro com casca.

Os resíduos foram bem distribuídos, com pequena tendência de subestimativa e maior variabilidade, para diâmetros maiores, principalmente para diâmetro com casca (Figura 8).

As equações modificadas também possuem boa habilidade para prever volumes sem casca e com casca (Figura 9).

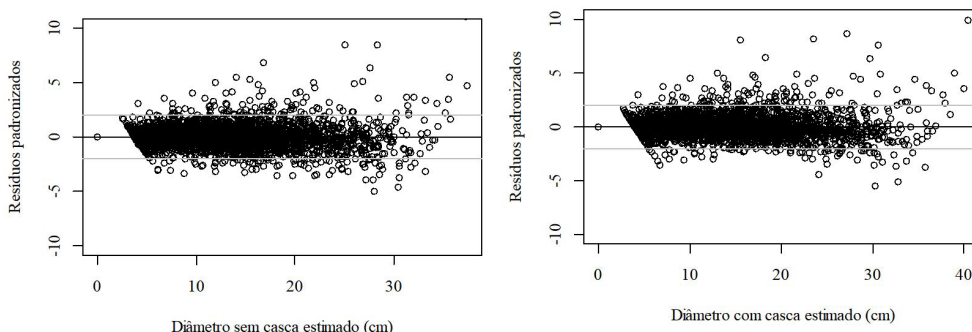


Figura 8. Gráficos de resíduos padronizados para a equação modificada.

Figure 8. Standardized residuals plots for the modified equation

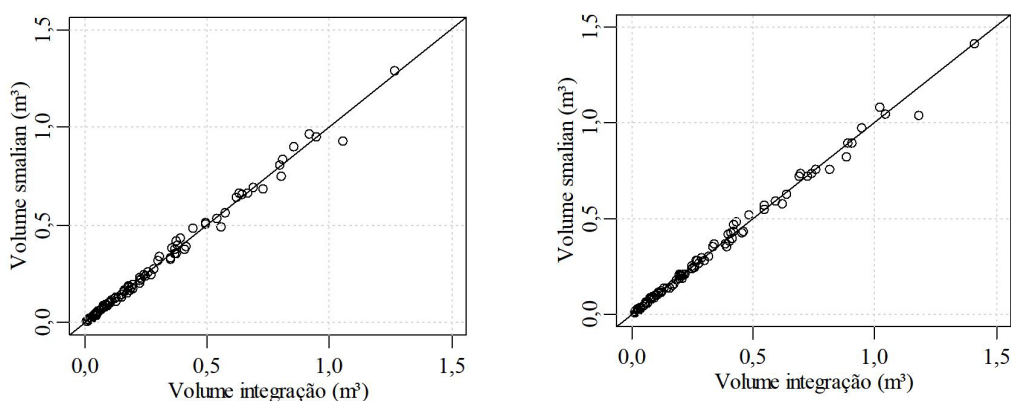


Figura 9. Volume observado (smalian) versus predito (integração) para equação modificada. (a) volume sem casca (b) volume com casca.

Figure 9. Observed volume (smalian) x predicted volume (integration) for the modified equation. (a) volume inside bark (b) volume outside bark.

As equações de expoente-variável podem ser facilmente modificadas alterando-se os seus termos: multiplicador, base ou expoente (KOZAK, 2004). Expoentes mais simples, como os da equação modificada e de 2001, podem ser adotados sem redução expressiva na precisão.

Durante o desenvolvimento da equação modificada, observou-se que quanto menor o valor de m ($1/2$, $1/3$, $1/4$, $1/6$), constante presente na base da equação, maior a precisão. Entretanto, os ganhos em precisão são pequenos e reduzem a cada redução de m .

Dentre as variáveis escolhidas para o expoente, Z é a que melhor explica a variação do expoente C e qualquer transformação de Z também possui alta correlação com C . Na proposta de modificação, optou-se por evitar as transformações de Z no expoente buscando parcimônia e facilidade de convergência.

A variável DAP/H possui forte correlação positiva com a proporção de copa viva (MUHAIRWE, 1994) e sua inclusão no expoente é uma tentativa de explicar a variação, na forma geral do fuste, causada pelas variações no comprimento da copa (NEWNHAM, 1992) que contribui para aumentar a precisão destas equações (MUHAIRWE, 1999). A razão DAP/H explica a maioria das variações que outras variáveis adicionais poderiam explicar, é altamente correlacionada com os atributos da árvore

e do povoamento, e isso é, possivelmente uma das principais razões pelas quais as equações de Kozak não podem ser melhoradas significativamente com a adição de covariáveis (HUANG et al., 2000; MUHAIRWE; LEMAY; KOZAK, 1994). Fonweban et al. (2011) observaram aumento na precisão das funções de expoente-variável entre 43% e 63% com o uso da modelagem de efeitos mistos. Portanto os esforços, em modificar a base, expoente ou multiplicador da equação de expoente-variável, podem ser redirecionados, para a mudança no tipo de modelagem, quando o objetivo é o aumento da precisão.

CONCLUSÕES

Os métodos geométricos testados podem ser utilizados como alternativa para a determinação da altura relativa no ponto de inflexão (p) por árvore de eucalipto cubada.

Todas as equações apresentaram boa precisão para estimar os diâmetros ao longo do fuste e volume total exceto o toco, para perfil com e sem casca. O tipo de estratégia adotada para a estimação de p teve pouca influência na precisão das equações. Portanto, para a base de dados utilizada neste estudo, pode-se optar pelo método mais simples para cada tipo de equação.

A equação de expoente-variável modificada também apresentou boa precisão para estimar diâmetros e volumes (com casca e sem casca), com valores semelhantes aos das equações de Kozak (1988, 2004).

Em termos de precisão, as modificações na base, expoente e multiplicador não parecem ter grande influência. Sugere-se a utilização da modelagem não linear mista como estratégia, para aumentar a precisão (FONWEBAN et al., 2011) e incorporar a variação de p existente entre árvores de uma mesma espécie (BERHE; ARNOLDSSON, 2008).

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

ANDRADE, V. C. L. Modelos de *taper* do tipo expoente-forma para descrever o perfil do fuste de árvores. **Pesquisa Florestal Brasileira**, Colombo, v.34, n.80, p.271-283, 2014.

BERHE, L.; ARNOLDSSON, G. Tree taper models for Cupressus lusitanica plantations in Ethiopia. **Southern Forests**, Oxford, v. 70, n. 3, p. 193-203, 2008.

BIGING, G. S. Taper equations for second mixed-conifers of Northern California. **Forest Science**, Bethesda, v. 30, n. 4, p.1103-1117, 1984.

CHRISTOPOULOS, D. T. Inflection: finds the inflection point of a curve. Version 1.3. **CRAN**, [S.l.]. 2017. Disponível em: < <http://CRAN.R-project.org/package=inflection> >. Acesso em: 12 mar. 2017.

CHRISTOPOULOS, D. T. On the Efficient Identification of an Inflection Point. **International Journal of Mathematics and Scientific Computing**, Philadelphia, v. 6, n. 1, p. 13-20, 2016.

CHRISTOPOULOS, D. T. **Developing methods for identifying the inflection point of a convex/concave curve**. Athens: National and Kapodistrian University of Athens, 2014. 29 p. Disponível em: < <https://arxiv.org/pdf/1206.5478v2.pdf> >. Acesso em: 12 mar. 2017.

DEMAERSHALK, J. P.; KOZAK, A. The whole-bole system: a conditioned dual-equation system for precise prediction of tree profiles. **Canadian Journal of Forest Research**, Ottawa, v. 7, n. 3, p. 488-497, 1977.

FONWEBAN, J.; GARDINER, B.; MACDONALD, E.; AUTY, D. Taper functions for Scots pine (*Pinus sylvestris* L.) and Sitka spruce (*Picea sitchensis* (Bong.) Carr.) in Northern Britain. **Forestry: an international journal of forest research**, Oxford, v. 84, n. 1, p. 49-60, 2011.

GARAY, L. **Tropical forest utilization system: VIII. A taper model for entire stem profile including buttressing**. Seattle: College of Forest Resources, 1979. 64 p. (Contribution, 36).

GRAY, H. R. **The form and taper of forest-tree stems**. Oxford: Imperial Forestry Institute / University of Oxford, 1956. 79 p

HRADETZKY, J. **Analyse und interpretation statistischer abränger keiten. (Biometrische Beiträge zu aktuellen forschungs projekten)**. Baden: Württemberg Mitteilungen der FVA, 1976. 146 p. (Abt. Biometric und Informatik, 21).

- HUANG, S.; PRICE, D.; MORGAN, D.; PECK, K. Kozak's variable-exponent taper equation regionalized for white spruce in Alberta. **Western Journal of Applied Forestry**, Essex, v. 15, n. 2, p. 75-85, 2000.
- KOZAK, A. My last words on taper equations. **The Forestry Chronicle**, Mattawa, v. 80, n. 4, p. 507-515, 2004
- KOZAK, A. Effects of multicollinearity and autocorrelation on the variable-exponent taper functions. **Canadian Journal of Forest Research**, Ottawa, v. 27, n. 5, p. 619-629, 1997.
- KOZAK, A. A variable-exponent taper equation. **Canadian Journal of Forest Research**, Ottawa, v. 18, n. 11, p. 1363-1368, 1988.
- KOZAK, A.; MUNRO, D. P.; SMITH, J. H. G. Taper functions and their application in forest inventory. **The Forest Chronicle**, Mattawa, v. 45, n. 4, p.278-283, Aug. 1969.
- LI, R.; WEISKITTEL, A. R. Comparison of models form for estimating stem taper and volume in primary conifer species of the North American Acadian Region. **Annals of Forest Science**, Les Ulis, v. 67, n. 302, p. 1-7, 2010.
- MAX, T. A.; BURKHART, H. E. Segmented polynomial regression applied to taper equations. **Forest Science**, Bethesda, v. 22, n. 3, p. 283-289, 1976.
- MUHAIRWE, C. K. Taper equations for *Eucalyptus pilularis* and *Eucalyptus grandis* for the north coast in New South Wales, Australia. **Forest Ecology and Management**, Amsterdam, v. 133, n.2/3, p. 251-269, 1999.
- MUHAIRWE, C. K. Tree form and taper variation over time for interior lodgepole pine. **Canadian Journal Forest Research**, Ottawa, v. 24, p. 1904-1913, 1994.
- MUHAIRWE, C. K.; LEMAY, V. M.; KOZAK, A. Effects of adding tree, stand, and site variables to Kozak's variable-exponent taper equation. **Canadian Journal of Forest Research**, Ottawa, v. 24, n. 2, p. 252 – 259, 1994.
- NEWNHAM, R. M. Variable-form taper functions for four Alberta tree species. **Canadian Journal of Forest Research**, Ottawa, v. 22, n. 2, p. 210 - 223, 1992.
- NEWNHAM, R. M. **A Variable-form Taper Equation**. Ontario: Minister of Supply and Services Canada, 1988. 33 p.
- ORMEROD, D.W. A simple bole model. **The Forestry Chronicle**, Mattawa, v.49, n. 3, p. 136-138, 1973.
- PARRESOL, B. R.; HOTVEDT, J. E.; CAO, Q. V.A volume and taper prediction system for bald cypress. **Canadian Journal of Forest Research**, Ottawa, v. 17, n. 3, p. 250-259, 1987.
- PEREZ, D. N.; BURKHART, H. E.; STIFF, C. T. A variable-form Taper Function for *Pinus oocarpa* Schiede in Central Honduras. **Forest Science**, Bethesda, v. 36, n. 1, p. 186-191, 1990.
- PIRES, L. M.; CALEGARIO, N. Ajuste de modelos estocásticos lineares e não lineares para descrição do perfil longitudinal de árvores. **Revista Árvore**, Viçosa, v. 31, n. 5, p. 845-852, 2007.
- R CORE TEAM. **R: a language and environment for statistical computing**. Vienna: R Foundation for Statistical Computing, 2014.
- SCHÖEPFER, W. **Automatisierung der Massen, Sorten und Wertberechnung stenender Waldbestände Schriftenreihe Bad**. Stuttgart: Selbstvrlag der Landesforstverwaltung Baden-Württemberg, 1966. (Baden-Württemberg.; Landesforstverwaltung).
- YANG, Y.; HUANG, S.; MENG, S. X. Development of a tree-specific stem profile model for white spruce: a nonlinear mixed model approach with a generalized covariance structure. **Forestry: an international journal of forest research**, Oxford, v. 82, n. 5, p. 541-555, 2009.

Recebido em: 19/01/2018

Aceito em: 20/06/2018