



PAULO ANDRÉ VASCONCELOS FERREIRA

**EVOLUÇÃO E PRESENTE STATUS DO CENÁRIO
INFLACIONÁRIO DA COSMOLOGIA**

LAVRAS – MG

2020

PAULO ANDRÉ VASCONCELOS FERREIRA

**EVOLUÇÃO E PRESENTE STATUS DO CENÁRIO INFLACIONÁRIO DA
COSMOLOGIA**

Dissertação apresentada à Universidade Federal de Lavras, como parte das exigências do Programa de Pós-Graduação em Física, área de concentração Partículas e Campos, para a obtenção do título de Mestre.

Prof. Dr. Luiz Cleber Tavares de Brito

Orientador

LAVRAS – MG

2020

**Ficha catalográfica elaborada pelo Sistema de Geração de Ficha Catalográfica da Biblioteca
Universitária da UFLA, com dados informados pelo(a) próprio(a) autor(a).**

Ferreira, Paulo André Vasconcelos

Evolução e presente status do cenário inflacionário da
cosmologia / Paulo André Vasconcelos Ferreira. – Lavras :
UFLA, 2020.

61 p. : il.

Dissertação–Universidade Federal de Lavras, 2020.

Orientador: Prof. Dr. Luiz Cleber Tavares de Brito.

Bibliografia.

1. Inflação. 2. Cosmologia. 3. Gravitação. I. Brito, Luiz
Cleber Tavares de. II. Título.

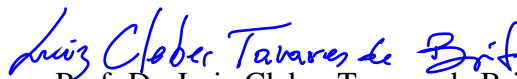
PAULO ANDRÉ VASCONCELOS FERREIRA

**EVOLUÇÃO E PRESENTE STATUS DO CENÁRIO INFLACIONÁRIO DA
COSMOLOGIA**

Dissertação apresentada à Universidade Federal de Lavras, como parte das exigências do Programa de Pós-Graduação em Física, área de concentração Partículas e Campos, para a obtenção do título de Mestre.

APROVADA em 30 de Abril de 2020.

Prof. Dr. Gilson Dallabona	UFLA
Prof. Dr. Thiago Roberto da Possa Caramês	UFLA
Prof. Dr. Andrey Gomes Martins	UEPA


Prof. Dr. Luiz Cleber Tavares de Brito
Orientador

**LAVRAS – MG
2020**

Dedico esse trabalho de mestrado à Deus e a minha família.

AGRADECIMENTOS

Agradeço em primeiro lugar à Deus e aos meus Santos de devoção (Nossa Senhora de Fátima, Santo Padre Pio e Santa Teresinha) que foram o motivo pelo qual pude chegar até aqui e concluir o mestrado acadêmico.

Agradeço também a toda minha família, em especial aos meus pais, Paulo Madson e Maria de Nazaré, a minha irmã Isabella Caroline e aos meus avós, Raimundo Pantoja e Antônia Pantoja.

Agradeço ao professor Luiz Cleber pela competente orientação, pela sua amizade e por seu grande senso de solicitude, o qual, sempre se colocou a disposição para me ajudar desde o início.

Um agradecimento especial ao meu amigo Marcos Paulo e a todos os meus colegas da pós-graduação que muito me ajudaram durante esses mais de dois anos de caminhada.

Agradeço aos professores, funcionários do DFI e a instituição UFLA pela oportunidade que recebi. O presente trabalho foi realizado com apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior – Brasil (CAPES) – Código de Financiamento 001, e com apoio do Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico (CNPq) ou Fundação de Amparo à Pesquisa de Minas Gerais (FAPEMIG).

Por fim, agradeço a todas as pessoas que me ajudaram durante esses anos e tornaram possível a conclusão desse trabalho.

*O impulso de nosso conhecimento
exige relacionar a ordem do universo com Deus.
(Max Planck)*

RESUMO

O primeiro cenário inflacionário proposto em 1981 pelo físico norte americano Alan Guth resolve o problema da planura e o problema do horizonte para os quais o modelo cosmológico padrão não oferece resposta. No entanto, o próprio Guth identificou problemas ao tentar implementá-lo. Posteriormente, outras propostas foram surgindo de autores como Andrei Linde, Andreas Albrecht e Paul Steinhardt a fim de contornar os entraves do cenário original. Apesar disso, esses modelos também mostraram-se limitados. O objetivo desse trabalho é discutir os diferentes modelos inflacionários, suas limitações e o seu presente status nas aplicações à cosmologia.

Palavras-chave: Gravitação. Cosmologia. Inflação.

ABSTRACT

The first inflationary scenario proposed in 1981 by the North American physicist Alan Guth solves the flatness problem and the horizon problem for which the standard cosmological model has no answer. However, Guth himself identified problems when trying to implement it. Other models were proposed by Andrei Linde, Andreas Albrecht and Paul Steinhardt in order to solve the flaws of the original scenario. Despite this, these models are also limited. The purpose of this work is to discuss the limitations and present status of different inflationary models in applications to cosmology.

Keywords: Gravitation. Cosmology. Inflation.

LISTA DE FIGURAS

<p>Figura 2.1 – Geometrias espaciais do universo de Friedmann: A esquerda tem-se uma geometria esférica com $K = 1$; ao centro tem-se a geometria plana com $K = 0$; a direita tem-se a geometria hiperbólica com $K = -1$.</p> <p>Figura 2.2 – Gráfico para o ΛCDM</p> <p>Figura 3.1 – História do Universo primordial: para $t < 10^{-43}$s tem-se a escala de Planck, onde os efeitos quânticos do campo gravitacional são dominantes; para $t < 10^{-36}$s tem-se a escala GUT, na qual a força forte, fraca e eletromagnética são unificadas; para $t < 10^{-32}$s tem-se a fase de expansão exponencial acelerada (inflação) do universo; em $t \sim 0.01$s tem-se a fase de formação dos hádrons; em $t \sim 1$s os neutrinos desacoplam-se da matéria bariônica; em $t \sim 3$ min os prótons e nêutrons ligam-se ao núcleo atômico formando núcleos leves; para $t \sim 380.000$ anos tem-se a última superfície de espalhamento em que a radiação cósmica de fundo desacopla-se da matéria.</p> <p>Figura 3.2 – Elementos envolvidos na definição da distância de diâmetro angular</p> <p>Figura 3.3 – Gráfico da distância física entre G_2 e G_1 e da distância de horizonte em função do Tempo</p> <p>Figura 4.1 – Gráfico para o potencial $V(\varphi) = -m^2\varphi^2 + \lambda\varphi^4 + g\varphi$ em função do inflaton.</p> <p>Figura 4.2 – Gráfico do potencial em função do campo inflaton. O platô ocorre no intervalo $V(0) < V(\varphi) < V(\varphi_1)$. Após o tunelamento, o campo evolui para o mínimo local em φ_0.</p> <p>Figura 4.3 – Gráfico do potencial em função do campo inflaton</p> <p>Figura 5.1 – Gráfico do potencial $V = \frac{m^2}{2}\varphi^2$ em função do campo inflaton</p> <p>Figura 5.2 – Gráfico de $V/M^2M_{Pl}^2$ em função de φ/M_{Pl}. A inflação ocorre ao longo do platô e termina por volta de $\varphi/M_{Pl} = 1$.</p> <p>Figura 5.3 – Espaço de parâmetros (n_S, r_*). Na horizontal tem-se o índice espectral escalar n_S e na vertical a razão tensor-escalar r_*.</p>	<p>15</p> <p>18</p> <p>20</p> <p>27</p> <p>30</p> <p>33</p> <p>36</p> <p>37</p> <p>49</p> <p>54</p> <p>56</p>
--	---

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	9
2	EQUAÇÕES DE FRIEDMANN E O MODELO Λ CDM	13
2.1	As equações de Friedmann	13
2.1.1	Parâmetros de densidade	15
2.1.2	Conservação da energia	16
2.2	O modelo cosmológico padrão - Λ CDM	17
3	O PRIMEIRO CENÁRIO INFLACIONÁRIO	20
3.1	O problema da planura	21
3.2	O problema do horizonte	26
4	LIMITAÇÕES DO CENÁRIO ORIGINAL E OS CENÁRIOS POSTERIORES	33
4.1	Problemas do Cenário Original	33
4.2	O Novo Cenário Inflacionário	35
4.3	Inflação Caótica	37
5	PRESENTE STATUS DO MODELO INFLACIONÁRIO	39
5.1	Inflação com um único campo escalar	39
5.2	Parâmetros de <i>slow-roll</i>	40
5.3	Observáveis de Inflação	43
5.4	Modelos de Inflação Caótica	47
5.4.1	Modelo Básico	47
5.4.2	Modelo Geral para Inflação Caótica	50
5.4.3	Comparação dos valores de n_S e r com os dados observacionais	51
5.4.3.1	Potencial Linear	51
5.4.3.2	Potencial $\frac{\lambda_2 \phi^2}{2}$	52
5.4.3.3	Potencial $\frac{\lambda_4 \phi^4}{4}$	52
5.5	O Modelo de Starobinsky	52
6	CONSIDERAÇÕES FINAIS	57
	REFERÊNCIAS	59

1 INTRODUÇÃO

A cosmologia é o ramo da Física destinado ao estudo do universo em escalas de distância maiores do que 300 Mpc e escalas de tempo da ordem da idade do universo (BERRY, 1989). Em particular, a cosmologia teórica preocupa-se com a elaboração de modelos que sejam coerentes com os resultados das observações astronômicas, a fim de compreender o passado, o presente e o futuro do universo. Porém, os problemas cosmológicos apresentam grandes desafios teóricos e observacionais ainda hoje.

Em 1917 inicia-se a cosmologia moderna a partir da teoria da relatividade geral (TRG) de Albert Einstein, proporcionando uma nova visão a respeito do cosmos (EINSTEIN, 1917). O próprio Einstein propõe o primeiro modelo cosmológico relativista, fundamentado em um universo estático, finito e com simetria esférica (SOARES, 2012), (WAGA, 2005), (LIMA; SANTOS, 2018). O modelo é regido pelas equações da relatividade geral (EINSTEIN, 1915), (WEINBERG, 2014), (HOBSON; EFSTATHIOU; LASENBY, 2006):

$$G_{\mu\nu} + \Lambda g_{\mu\nu} = \kappa T_{\mu\nu}, \quad (1.1)$$

em que $G_{\mu\nu}$ é o tensor de Einstein definido por

$$G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R. \quad (1.2)$$

Na expressão acima, $R_{\mu\nu}$ é chamado Tensor de Ricci, obtido a partir do tensor de curvatura de Riemann; R é o escalar de Ricci; $g_{\mu\nu}$ é o tensor métrico; $T_{\mu\nu}$ é o tensor energia-momento; $\kappa = \frac{8\pi G}{c^4}$ e Λ é a constante cosmológica¹.

Em 1922, contrapondo o universo estático de Einstein, Alexander Friedmann mostrou que as equações de campo da TRG previam soluções para um universo em evolução, de modo que o seu comportamento dependeria apenas de sua distribuição de energia e massa (FRIEDMANN, 1924), (PIATTELLA, 2018), (FABRIS; VELTEN, 2012).

Friedmann obtém as soluções das equações de campo utilizando o princípio de que o universo é homogêneo e isotrópico para grandes escalas (Princípio Cosmológico). A métrica compatível com o princípio cosmológico de isotropia e homogeneidade do universo é chamada métrica de Friedmann-Lemaître-Robertson-Walker (FLRW) (WEINBERG, 2014), (PIATTELLA, 2018), (MARTIN, 2018), que na forma padrão em coordenadas esféricas é dada

¹ Nesse texto estão sendo utilizadas as convenções da referência (PIATTELLA, 2018).

por

$$ds^2 = -c^2 dt^2 + a^2(t) \left(\frac{dr^2}{1 - Kr^2} + r^2 d\Omega^2 \right) = -c^2 dt^2 + a^2(t) d\chi^2, \quad (1.3)$$

em que c é a velocidade da luz; $a(t)$ é chamado de fator de escala; K é o parâmetro de curvatura; $d\Omega^2 = d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2$; $d\chi$ é o elemento de distância espacial co-móvel em coordenadas esféricas; as coordenadas r e t são, respectivamente, a coordenada radial e o tempo cosmológico. As coordenadas esféricas r, θ, ϕ são co-móveis.

Como será visto em detalhes na seção 2.1, a partir da métrica (1.3) e das equações de Einstein (1.1) seguem as equações de Friedmann

$$\frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{4\pi G}{3} \left(\rho + \frac{3P}{c^2} \right) + \frac{\Lambda c^2}{3} \quad (1.4)$$

e

$$H^2 = \frac{8\pi G}{3} \rho + \frac{\Lambda c^2}{3} - \frac{Kc^2}{a^2}, \quad (1.5)$$

obtidas com a hipótese de que o universo é constituído por um fluido perfeito com densidade ρ e pressão P . O parâmetro H em (1.5) é denominado parâmetro de Hubble e é definido por $H(t) \equiv \frac{\dot{a}}{a}$. As equações de Friedmann são fundamentais em cosmologia.

Posteriormente, a ideia da expansão conduziu a um modelo em que o universo inicia sua evolução a partir de um estado de alta densidade e pressão. Tal descrição, proposta por Friedmann e redescoberta por G. Lemaître, passa a ser conhecido como o modelo de *Big-Bang* (BAGDONAS; ZANETIC; GURGEL, 2017). Além disso, as observações astronômicas feitas por Slipher, Edwin Hubble, e a divulgação dos trabalhos de Georges Lemaître foram de suma importância para que a ideia de um universo em expansão passasse a ser aceita pela comunidade científica (BAGDONAS; ZANETIC; GURGEL, 2017).

A partir da década dos anos 60, a cosmologia entrou em um período de grande suporte observacional. Além da descoberta da radiação cósmica de fundo por Penzias e Wilson (PENZIAS; WILSON, 1965), pode-se mencionar a descoberta do espectro de corpo negro dessa radiação e suas anisotropias, determinadas observacionalmente por Mather e Smoot (MATHER et al., 1990), (SMOOT et al., 1992). Outro momento importante para a cosmologia foi a intrigante descoberta da expansão acelerada do universo por meio de observações com Supernovas tipo IA, descoberta por Saul Perlmutter (*Supernova Cosmology Project*) e Bryan Schmidt & Adam Riess (*High-z Supernova Search Team*) (PERLMUTTER et al., 1999), (RIESS et al., 1998). Vale a pena mencionar que este último fato não era previsto pela

comunidade científica e mostrou-se incompatível com o modelo desacelerado aceito antes de 1998.

Atualmente o modelo mais aceito para descrever os primeiros estágios do universo e a sua evolução até os dias atuais é o chamado Λ CDM (*A Cold Dark Matter*) ou *modelo cosmológico padrão*. Este modelo fundamenta-se na ideia de um universo dinâmico; na profusão de elementos leves; na existência da radiação cósmica de fundo e no princípio cosmológico de homogeneidade e isotropia do universo (WAGA, 2005). O Λ CDM é compatível com todos os dados observacionais coletados até o presente momento (AGHANIM et al., 2018). Apesar disso, as limitações do Λ CDM são bem conhecidas. Pode-se mencionar como exemplos o problema do horizonte e o problema da planura.

Frente a esses problemas surge o primeiro modelo inflacionário proposto pelo físico norte americano Alan Guth em 1981, propondo ajustes de condições iniciais no modelo cosmológico padrão (GUTH, 1981), (MARTIN, 2019). Este modelo procura descrever as propriedades do universo para escalas de energia da ordem de 10^{16} GeV e instantes de tempo muito menores do que um segundo (WAGA, 2005).

O primeiro modelo de inflação resolve os problemas da planura e do horizonte, os quais deixavam o modelo cosmológico padrão insatisfatório do ponto de vista físico (MARTIN; RINGEVAL; VENNIN, 2014). De acordo com (CHOWDHURY et al., 2019b), o modelo de A. Guth já fornece mecanismos teóricos que geram perturbações iniciais que, posteriormente, dão origem as sementes que formarão as grandes estruturas, como galáxias. Por sua vez, o modelo Λ CDM não fornece nenhuma alternativa de explicação para a formação das estruturas a partir do universo primordial. Esta é uma grande contribuição do modelo inflacionário (WEINBERG, 2008).

Contudo, o próprio A. Guth percebeu limitações no cenário inflacionário (GUTH, 1981). Esses problemas, serão discutidos com detalhes no capítulo 4. A partir disso, novos cenários vão surgindo com os trabalhos de Andrei Linde (LINDE, 1982) e os de Andreas Albrecht e Paul Steinhardt (ALBRECHT; STEINHARDT, 1982), propondo resolver as dificuldades encontradas no cenário original. No entanto, essas propostas apresentaram problemas.

Apesar das dificuldades, a ideia inicial da inflação permanece com grande visibilidade na comunidade científica (LINDE, 2008), (LINDE, 2005), (LINDE, 2018), (GUTH; KAISER; NOMURA, 2014), (IJJAS; STEINHARDT; LOEB, 2013). A descrição moderna do regime inflacionário será discutido no capítulo 5.

Com o avanço e melhor precisão dos dados observacionais proporcionados pelo satélite Planck, foi possível conectar a teoria inflacionária com as recentes observações da radiação cósmica de fundo (CHOWDHURY et al., 2019b). Desse modo, é possível estabelecer vínculos para os parâmetros dos modelos inflacionários e assim determinar quais são os mais adequados para se utilizar na cosmologia. A análise dos diferentes cenários e o presente status da inflação primordial serão os temas abordados nessa dissertação.

2 EQUAÇÕES DE FRIEDMANN E O MODELO Λ CDM

Nesse capítulo será discutido a solução da equação de Einstein obtida em 1922 pelo matemático russo Alexander Friedmann. A partir dessa solução, mostra-se como construir um modelo que descreve com boa aproximação a evolução do universo observável desde a era da radiação até hoje.

2.1 As equações de Friedmann

A solução obtida por Friedmann é de extrema importância no campo da cosmologia moderna. Achar a solução da equação (1.1) significa determinar qual a métrica compatível com uma determinada distribuição de energia e massa, ou seja, compatível com um determinado tensor energia-momento (FALCIANO, 2009).

Apesar da complicação matemática em resolver as equações de campo de Einstein, as soluções de Friedmann foram bastantes simplificadas com a adoção do princípio cosmológico (VIGLIONI; SOARES, 2011). Portanto, adota-se uma métrica compatível com o princípio de homogeneidade e isotropia, isto é, a métrica de FLRW (1.3).

A partir disso, o que se faz é calcular as componentes da métrica $g_{\mu\nu}$; calcular as componentes do tensor de Ricci $R_{\mu\nu}$; calcula-se o escalar de Ricci, (contraindo o tensor de Ricci com a métrica) $R = g^{\mu\nu}R_{\mu\nu}$; postula-se o conteúdo de matéria e energia através do tensor energia-momento $T_{\mu\nu}$ e por fim computa-se todos esses termos na equação de campo (1.1).

Para a métrica tem-se as seguintes componentes não nulas em um sistema de coordenadas co-móvel

$$g_{00} = -1, \quad (2.1)$$

$$g_{11} = \frac{a^2(t)}{1 - Kr^2}, \quad (2.2)$$

$$g_{22} = a^2(t)r^2, \quad (2.3)$$

$$g_{33} = a^2(t)r^2 \sin^2 \theta. \quad (2.4)$$

Calcula-se o tensor de Ricci a partir dos termos de conexão

$$R_{\mu\nu} = -\frac{\partial \Gamma_{\mu\sigma}^{\sigma}}{\partial x^{\nu}} + \frac{\partial \Gamma_{\mu\nu}^{\sigma}}{\partial x^{\sigma}} - \Gamma_{\mu\sigma}^{\rho} \Gamma_{\rho\nu}^{\sigma} + \Gamma_{\mu\nu}^{\rho} \Gamma_{\rho\sigma}^{\sigma}, \quad (2.5)$$

$$\Gamma_{\mu\nu}^{\sigma} = \frac{1}{2}g^{\sigma\rho} \left(\frac{\partial g_{\rho\mu}}{\partial x^{\nu}} + \frac{\partial g_{\rho\nu}}{\partial x^{\mu}} - \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^{\rho}} \right). \quad (2.6)$$

Calculando os termos do tensor de Ricci, mostra-se que (PIATTELLA, 2018)

$$R_{00} = -\frac{3}{c^2} \frac{\ddot{a}}{a}, \quad (2.7)$$

$$R_{0i} = 0, \quad (2.8)$$

$$R_{ij} = \frac{1}{c^2} g_{ij} \left(2H^2 + \frac{\ddot{a}}{a} + 2\frac{Kc^2}{a^2} \right), \quad (2.9)$$

$$R = \frac{6}{c^2} \left(H^2 + \frac{\ddot{a}}{a} + \frac{Kc^2}{a^2} \right), \quad (2.10)$$

onde

$$H(t) = \frac{\dot{a}}{a}. \quad (2.11)$$

A expressão do tensor energia momento para um fluido perfeito é dado por (HOBSON; EFSTATHIOU; LASENBY, 2006)

$$T_{\mu\nu} = \left(\rho + \frac{P}{c^2} \right) u_{\mu}u_{\nu} + P g_{\mu\nu}. \quad (2.12)$$

Utilizando o sistema de coordenadas co-móvel para a quadrivelocidade $u_{\mu} = (c, 0)$, calcula-se as componentes do tensor energia-momento

$$T_{00} = \rho(t)c^2 \quad ; \quad T_{0i} = 0 \quad ; \quad T_{ij} = g_{ij}P(t). \quad (2.13)$$

Finalmente, introduz-se os termos (2.1),(2.2), (2.3), (2.4), (2.7), (2.8), (2.9), (2.10), (2.13) na equação de Einstein (1.1) e obtém-se

$$\frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{4\pi G}{3} \left(\rho + \frac{3P}{c^2} \right) + \frac{\Lambda c^2}{3} \quad (2.14)$$

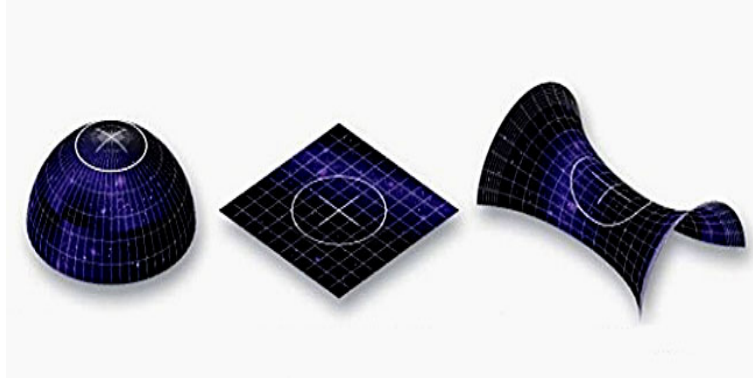
e

$$H^2 = \frac{8\pi G}{3} \rho + \frac{\Lambda c^2}{3} - \frac{Kc^2}{a^2}. \quad (2.15)$$

Assumindo o princípio de homogeneidade e isotropia, pode-se mostrar que só é possível três tipos de geometria para as seções espaciais do universo. Para mais detalhes conferir

(WEINBERG, 2014). A partir disso, tem-se que o parâmetro de curvatura K só pode assumir três valores $(1, -1, 0)$. Para $K = 1$ tem-se a geometria esférica; geometria hiperbólica para $K = -1$ e a geometria plana para $K = 0$.

Figura 2.1 – Geometrias espaciais do universo de Friedmann: A esquerda tem-se uma geometria esférica com $K = 1$; ao centro tem-se a geometria plana com $K = 0$; a direita tem-se a geometria hiperbólica com $K = -1$.



Fonte: (GALERIA DO METEORITO, 2019)

2.1.1 Parâmetros de densidade

Pode-se rescrever a equação (1.5) da seguinte forma

$$H^2 = \frac{8\pi G}{3}\rho_t - \frac{Kc^2}{a^2} \quad (2.16)$$

onde

$$\rho_t = \rho + \rho_\Lambda \quad (2.17)$$

e

$$\rho_\Lambda = \frac{\Lambda c^2}{8\pi G}, \quad (2.18)$$

em que ρ contém as componentes de matéria e radiação.

Define-se a chamada densidade de energia crítica e o parâmetro de densidade Ω

$$\rho_{cr} \equiv \frac{3H^2}{8\pi G}, \quad (2.19)$$

$$\Omega_t \equiv \frac{\rho_t}{\rho_{cr}} = \frac{8\pi G}{3H^2}\rho_t, \quad (2.20)$$

em que a densidade total Ω_t contém as contribuições das diferentes componentes do fluido cosmológico (matéria bariônica e escura, radiação e vácuo). Desse modo, pode-se reescrever a equação (2.16) da forma

$$\Omega_t + \Omega_K = 1 \quad (2.21)$$

onde

$$\Omega_K \equiv -\frac{Kc^2}{H^2a^2}. \quad (2.22)$$

Os dados observacionais mostram que atualmente $\Omega_t \approx 1$ (AGHANIM et al., 2018). Isso implica que o parâmetro de densidade de curvatura deve ser muito próximo de zero. Quando estima-se o valor de Ω_k para os estágios iniciais do universo encontra-se que o seu valor deve ser ainda menor. Compreender o motivo pelo qual Ω_t ser tão próximo da unidade nos primórdios do universo equivale a compreender o problema da planura do universo, resolvido pelo primeiro modelo de inflação (WAGA, 2005). Esse problema será discutido com detalhes no capítulo 3.

2.1.2 Conservação da energia

Na Relatividade Geral, a conservação da energia é expressa pela identidade

$$\nabla_\nu T^{\mu\nu} = \partial_\nu T^{\mu\nu} + \Gamma_{\nu\alpha}^\mu T^{\alpha\nu} + \Gamma_{\nu\alpha}^\nu T^{\mu\alpha} = 0, \quad (2.23)$$

onde ∇_ν é a derivada covariante. Para definição da derivada covariante aplicada a um tensor de segunda ordem ver referência (WEINBERG, 2014).

Utilizando a identidade de Bianchi a partir de (2.23) obtêm-se a equação para a variação da densidade ρ com o tempo para um fluido perfeito

$$\dot{\rho} + 3H \left(\rho + \frac{P}{c^2} \right) = 0. \quad (2.24)$$

Para mais detalhes em como obter (2.24) consultar referência (HOBSON; EFSTATHIOU; LASENBY, 2006).

A equação (2.24) pode ser reescrita utilizando $\dot{\rho} = \frac{d\rho}{da}\dot{a}$, $H = \frac{\dot{a}}{a}$ e multiplicando por a^3 , obtendo-se

$$\frac{d(\rho a^3)}{da} = -\frac{3Pa^2}{c^2}. \quad (2.25)$$

Nesse ponto, utiliza-se a equação de estado relacionando pressão e densidade

$$P = \omega c^2 \rho. \quad (2.26)$$

E com isso obtêm-se a solução da equação diferencial

$$\rho = \rho_0 a^{-3(1+\omega)}, \quad (2.27)$$

onde ρ_0 é a densidade hoje, correspondente ao fator de escala $a_0 = 1$.

As diferentes escolhas do parâmetro ω na equação de estado (2.26) correspondem a diferentes componentes do fluido cosmológico. Para $\omega = 0$, tem-se um fluido sem pressão, caso da matéria fria ou também conhecida como poeira. Nesse caso a solução (2.27) é dada por

$$\rho_m = \rho_{m0} a^{-3}. \quad (2.28)$$

Para $\omega = \frac{1}{3}$ tem-se o caso da radiação e a (2.27) equivale a

$$\rho_r = \rho_{r0} a^{-4}. \quad (2.29)$$

Para $\omega = -1$ tem-se o caso do vácuo com

$$\rho_\Lambda = \rho_{\Lambda 0} \quad (2.30)$$

sendo uma constante.

2.2 O modelo cosmológico padrão - Λ CDM

De modo geral, o modelo Λ CDM é composto por termos que dizem respeito a matéria escura fria, matéria bariônica, radiação e a constante cosmológica Λ . Dividindo a equação (2.16) por H_0^2 e considerando $\rho_t = \rho_m + \rho_r + \rho_\Lambda$ tem-se

$$\frac{H^2}{H_0^2} = \Omega_\Lambda + \frac{\Omega_{m0}}{a^3} + \frac{\Omega_{r0}}{a^4} + \frac{\Omega_{K0}}{a^2}. \quad (2.31)$$

Para obter a equação acima utiliza-se a definição (2.20) aplicada aos casos de matéria e radiação, usa-se as soluções (2.28), (2.29) e (2.30), assim como os valores atuais dos parâmetros $\rho_{cr,0}$ e

Ω_{K0} definidos a partir de (2.19) e (2.22) para os valores atuais do parâmetro de Hubble e do fator de escala.

Segundo as últimas observações do telescópio Planck, o valor atual do parâmetro de Hubble é $H_0 = 67.66 \pm 0.42 \text{ km s}^{-1} \text{ Mpc}^{-1}$ (AGHANIM et al., 2018)¹, ou seja, para cada mega parsec a velocidade de afastamento das galáxias aumenta em torno de 67 km s^{-1} .

O valor do parâmetro de densidade para cada uma das componentes que aparecem na equação (2.31) é determinado experimentalmente. A comparação do valor da densidade das componentes com a densidade crítica indica que atualmente em torno de 69% do nosso universo é composto da contribuição da constante cosmológica (energia escura), 26% de matéria escura fria e cerca de 5% de matéria bariônica. As contribuições da radiação, neutrinos e da curvatura espacial são desprezíveis. Nesse caso, os termos dominantes são os de matéria e Λ . Assim, desconsiderando os demais termos, pode-se reescrever (2.31) como

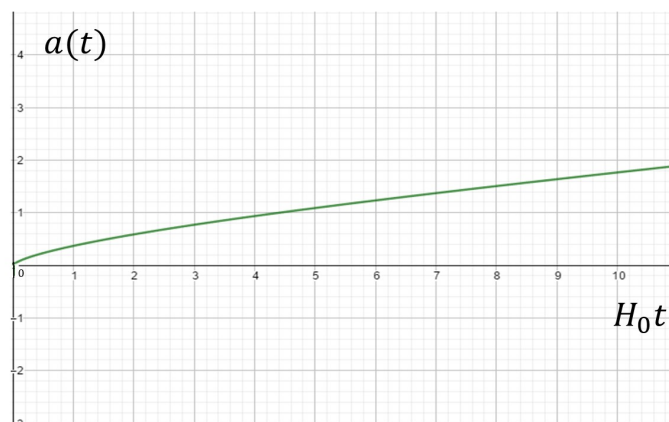
$$\frac{H^2}{H_0^2} = \Omega_\Lambda + \frac{\Omega_{m0}}{a^3}, \quad (2.32)$$

cuja solução é

$$a(t) = \left[\frac{\Omega_{m0}}{\Omega_\Lambda} \sinh^2 \left(\frac{3}{2} \sqrt{\Omega_\Lambda} H_0 t \right) \right]^{\frac{1}{3}}, \quad (2.33)$$

como pode ser verificado explicitamente por integração. Na figura 2.2 é ilustrado o comportamento do fator de escala em função de $H_0 t$.

Figura 2.2 – Gráfico para o Λ CDM



Fonte: Autor (2020).

¹ Um parsec é da ordem de dez trilhões de quilômetros.

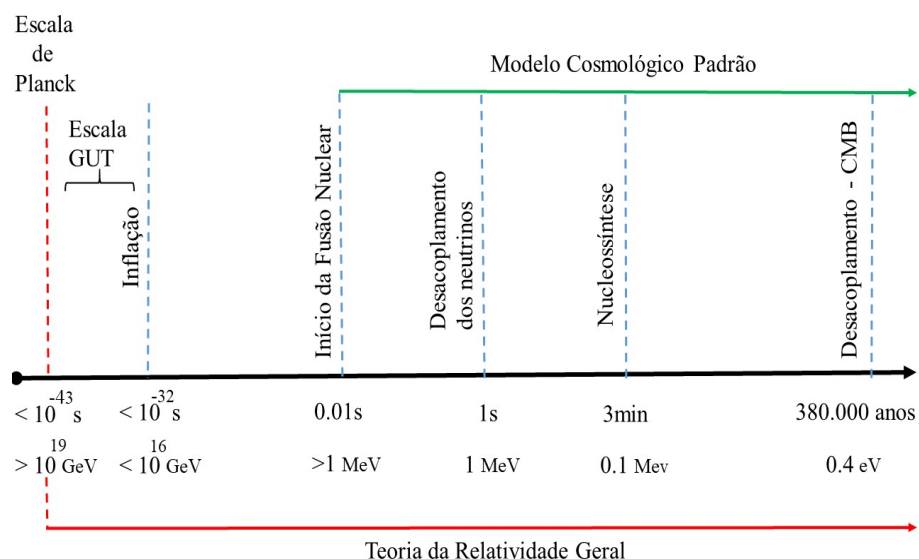
Vale apenas ressaltar que Λ CDM é uma terminologia mais recente que surgiu em a partir da descoberta da expansão exponencial acelerada do universo em 1998. O termo de Λ passou então a ser interpretado como sendo responsável por essa expansão.

3 O PRIMEIRO CENÁRIO INFLACIONÁRIO

Nesse capítulo discutiremos o primeiro cenário da teoria inflacionária proposto por Alan Guth em 1981. Nesse modelo supõe-se que o universo tenha passado por uma fase de expansão exponencial, transitando de um estado denominado de falso vácuo super-resfriado (dominado por uma alta e constante densidade de energia associada ao vácuo) para o estado de verdadeiro vácuo. Ao expandir-se exponencialmente nesse estado característico, o universo torna-se extremamente grande e plano (LINDE, 2008). De acordo com o modelo de Guth, a inflação acontece na era GUT (*Grand Unified Theory*) e deve durar pelo menos 10^{-32} s para deixar o universo nas condições perfeitas para o modelo cosmológico padrão. Na figura 3.1 apresenta-se uma linha do tempo para os estágios iniciais do universo.

Na seção 3.1 e 3.2 serão abordados os dois problemas (problema do horizonte e da planura) apresentados pelo modelo cosmológico padrão (pré-inflacionário) e a proposta de solução apresentada por Alan Guth através do primeiro cenário inflacionário. Logo após, na seção 4, serão discutidas as dificuldades de implementação do modelo, que logo ficaram evidentes.

Figura 3.1 – História do Universo primordial: para $t < 10^{-43}$ s tem-se a escala de Planck, onde os efeitos quânticos do campo gravitacional são dominantes; para $t < 10^{-36}$ s tem-se a escala GUT, na qual a força forte, fraca e eletromagnética são unificadas; para $t < 10^{-32}$ s tem-se a fase de expansão exponencial acelerada (inflação) do universo; em $t \sim 0.01$ s tem-se a fase de formação dos hádrons; em $t \sim 1$ s os neutrinos desacoplam-se da matéria bariônica; em $t \sim 3$ min os prótons e nêutrons ligam-se ao núcleo atômico formando núcleos leves; para $t \sim 380.000$ anos tem-se a última superfície de espalhamento em que a radiação cósmica de fundo desacopla-se da matéria.



Fonte: Autor (2020).

3.1 O problema da planura

Como já mencionado neste trabalho, o problema da planura tornou-se um dos entraves do modelo cosmológico padrão. Para entender melhor este problema, deve-se analisar primeiro o parâmetro de densidade de curvatura,¹

$$\Omega_K = -\frac{K}{H^2 a^2},$$

e sua medida atual Ω_{K0} cuja valor é (AGHANIM et al., 2018)

$$\Omega_{K0} = 0.0007 \pm 0.0037. \quad (3.1)$$

Portanto, o universo atual pode ser considerado espacialmente plano com boa aproximação. O problema da planura consiste no fato de que o parâmetro Ω_K é ainda menor nos estágios iniciais do universo. Isso pode ser visto da seguinte forma.

Coloca-se Ω_K em função de Ω_{K0} :

$$|\Omega_K| = |\Omega_{K0}| \frac{H_0^2}{H^2 a^2}. \quad (3.2)$$

Já que $|\Omega_{K0}| < 1$, tem-se portanto que

$$|\Omega_K| < \frac{H_0^2}{H^2 a^2}. \quad (3.3)$$

Durante a era do universo dominada por radiação desconsidera-se as contribuições dos termos de matéria, Λ e de curvatura na equação (2.31), uma vez que nessa época o termo dominante para $a \ll 1$ é proporcional a a^{-4} . Desse modo, pode-se escrever (2.31) como

$$H^2 \approx \frac{8\pi G}{3} \rho_r, \quad (3.4)$$

e dado que $\rho_r \propto a^{-4}$ obtém-se

$$H^2 \propto a^{-4}. \quad (3.5)$$

¹ A partir dessa seção usa-se um sistema de unidades em que $c = 1$.

Por fim, substituindo (3.5) em (3.2), conclui-se que:

$$|\Omega_K| \sim a^2. \quad (3.6)$$

Desse modo, para $a(t)$ muito pequeno (universo primordial) mais próximo de zero será $|\Omega_K|$ e portanto mais espacialmente plano será o universo.

Pode-se também escrever (3.2) em função do parâmetro de *redshift* z , utilizado para medir o desvio para o vermelho de ondas eletromagnéticas emitidas por objetos astronômicos como estrelas, galáxias, quasares, supernovas e etc. O parâmetro de *redshift* é definido pela identidade

$$a(t) = \frac{1}{1+z}. \quad (3.7)$$

Fisicamente a expressão (3.7) diz que o parâmetro de *redshift* será maior quanto mais no passado estiver a fonte emissora. Em particular, para $z \rightarrow \infty$ tem-se $a \rightarrow 0$, que corresponde ao *Big-Bang*. Por outro lado, para $z = 0$ tem-se o valor do fator de escala hoje, ou seja, $a(t_0) = 1$.

Para a era da radiação escreve-se (2.31) em função do parâmetro de *redshift* definido em (3.7) e chega-se em

$$\frac{H^2}{H_0^2} = \Omega_{r0} \left(\frac{1}{a^4} \right) = \Omega_{r0} (1+z)^4. \quad (3.8)$$

Substituindo (3.7) e (3.8) em (3.2), obtém-se a expressão

$$|\Omega_K| = |\Omega_{K0}| (\Omega_{r0})^{-1} (1+z)^{-2}. \quad (3.9)$$

A partir disso, pode-se analisar o valor de $|\Omega_K|$ em diferentes épocas do universo. Para era da equivalência radiação-matéria tem-se um *redshift* $z \sim 10^4$ e $\Omega_{r0} \sim 10^{-4}$; para mais detalhes conferir (PIATTELLA, 2018). Portanto tem-se:

$$|\Omega_K| \sim |\Omega_{K0}| 10^4 (1 + 10^4)^{-2} \sim |\Omega_{K0}| 10^{-4} < 10^{-4}. \quad (3.10)$$

Para era da nucleossíntese (*Big-Bang nucleosynthesis*) tem-se $z \sim 10^{10}$. Nesse caso o parâmetro de curvatura é dado por

$$|\Omega_K| \sim |\Omega_{K0}| 10^4 (1 + 10^{10})^{-2} \sim |\Omega_{K0}| 10^{-16} < 10^{-16}. \quad (3.11)$$

Extrapolando a expressão (3.9) para além da era da radiação, pode-se estimar que na era de Planck, em que $z \sim 10^{32}$, o parâmetro de curvatura é dado por

$$|\Omega_K| \sim |\Omega_{K0}|10^4 (1 + 10^{32})^{-2} \sim |\Omega_{K0}|10^{-60} < 10^{-60}. \quad (3.12)$$

Desse modo, fica bastante evidente que nos estágios iniciais do universo, ou seja, para altos *redshifts*, menor é o módulo de $|\Omega_K|$ e conseqüentemente mais espacialmente plano é o universo.

Porém, essa não é uma conclusão óbvia uma vez que o modelo não explica por que os efeitos de curvatura não são relevantes para $a \rightarrow 0$, escala de tempo para o qual o universo era extremamente denso. Sendo assim, resta responder a seguinte questão: por que o universo é tão espacialmente plano na sua fase inicial?

O problema pode ser entendido de outra forma (PIATTELLA, 2018). Se alterarmos apenas uma ordem de grandeza de $|\Omega_K|$ a partir da escala de Planck, o valor de $|\Omega_{K0}|$ calculado será dez vezes maior que o valor observado atualmente, o que é bastante insatisfatório. Isso pode ser verificado da seguinte forma. Na era de Planck tem-se

$$|\Omega_K| \sim |\Omega_{K0}|10^4 (1 + 10^{32})^{-2} \sim 10^{-63}, \quad (3.13)$$

que é compatível com o limite superior estabelecido em (3.12). Agora se por acaso utiliza-se o valor $|\Omega_K| \sim 10^{-62}$ em $|\Omega_K| = |\Omega_{K0}|10^{-60}$ - ver equação (3.12) - tem-se então

$$|\Omega_{K0}| \sim \frac{10^{-62}}{10^{-60}} \sim 10^{-2}, \quad (3.14)$$

que é dez vezes maior do que o valor provindo das observações. Trata-se então de uma forte dependência do modelo cosmológico padrão com as condições iniciais do universo.

Para resolver o problema da planura, Alan Guth propõe que ainda que os efeitos de curvatura tenham sido originalmente dominantes ($|\Omega_K| \sim 1$), eles seriam diminuídos caso o universo tenha passado por uma fase inicial de inflação na qual H tenha se mantido aproximadamente constante. De fato, considere que a inflação inicie num instante t_i e termine num instante t_f com os respectivos fatores de escala sendo a_i e a_f . A partir de $H = \frac{\dot{a}}{a}$, a hipótese

de H aproximadamente constante resulta em

$$\int_{a_i}^{a_f} \frac{da}{a} \simeq H \int_{t_i}^{t_f} dt, \quad (3.15)$$

que equivale a

$$a_f = a_i e^{H(t_f - t_i)} = a_i e^N. \quad (3.16)$$

Na equação acima $N = H(t_f - t_i)$ é o número de *e-folds*² que determina o tempo de duração da inflação. Portanto, a equação (3.16) mostra que a hipótese de H aproximadamente constante implica numa fase de expansão exponencial acelerada com duração $t_f - t_i$.

A partir disso, escreve-se o parâmetro de densidade de curvatura no início e no fim da inflação, indicados respectivamente por

$$|\Omega_{Ki}| = \frac{|K|}{H_i^2 a_i^2} \quad (3.17)$$

e

$$|\Omega_{Kf}| = \frac{|K|}{H_f^2 a_f^2}. \quad (3.18)$$

Substituindo (3.16) em (3.18) e usando a aproximação para $H_i \simeq H_f$ encontra-se

$$|\Omega_{Kf}| \simeq \frac{|K|}{H_i^2 a_i^2} e^{-2N} = |\Omega_{Ki}| e^{-2N}. \quad (3.19)$$

Supondo que os efeitos de curvatura sejam dominantes no início da inflação, ou seja, $|\Omega_{Ki}| \sim 1$ chega-se a

$$|\Omega_{Kf}| \approx e^{-2N}. \quad (3.20)$$

Desse modo, fica evidente que o fator e^{-2N} reduz exponencialmente o valor $|\Omega_{Kf}|$. A inflação deve durar um número de *e-folds* suficiente para que, ao seu final, o valor do parâmetro de curvatura seja o valor correto para o início da era da radiação. Assim, o problema da planura é resolvido, uma vez que a inflação prepara as condições iniciais para o início da era da radiação.

Contudo, o modelo cosmológico padrão não explica porque a inflação ocorre.

² A palavra *e-folds* costuma ser genericamente usada para referir-se ao intervalo de tempo N no qual uma grandeza que cresce exponencialmente aumenta por N fatores de e (número de Euler).

Da (3.20) conclui-se que o número de *e-folds* é um parâmetro crucial para o cenário inflacionário, e pode ser calculado a partir de

$$|\Omega_{K0}| = \frac{|K|}{H_0^2} = \frac{|K|}{a_f^2 H_f^2} \left(\frac{a_f H_f}{H_0} \right)^2 \approx e^{-2N} \left(\frac{a_f H_f}{H_0} \right)^2. \quad (3.21)$$

Na segunda igualdade acima foi utilizada a expressão (3.20). Uma vez que as observações mostram que $|\Omega_{K0}| < 1$ obtém-se que

$$\frac{a_f H_f}{H_0} < e^N. \quad (3.22)$$

Supõe-se que a inflação tenha terminado no início da era da radiação quando o modelo Λ CDM passa a descrever com boa aproximação a evolução do universo. Usando a equação (3.8) em termos do fator de escala e a (2.29) para $t = t_f$ tem-se que

$$\frac{H_f}{H_0} \approx \Omega_{r0}^{\frac{1}{2}} \left(\frac{\rho_{rf}}{\rho_{r0}} \right)^{\frac{1}{2}} \quad (3.23)$$

e portanto

$$a_f \approx \Omega_{r0}^{\frac{1}{4}} \sqrt{\frac{H_0}{H_f}}. \quad (3.24)$$

Substituindo-se (3.23) e (3.24) em (3.22) obtêm-se

$$e^N > \left(\frac{\Omega_{r0}^{\frac{1}{2}}}{\rho_{r0}^{\frac{1}{4}}} \right) \rho_{rf}^{\frac{1}{4}}. \quad (3.25)$$

Pode-se reescrever (3.25) em função da densidade de energia crítica atual $\rho_{cr,0}$

$$e^N > \left(\frac{\Omega_{r0}^{\frac{1}{2}} \rho_{cr,0}^{\frac{1}{4}}}{\rho_{cr,0}^{\frac{1}{4}} \rho_{r0}^{\frac{1}{4}}} \right) \rho_{rf}^{\frac{1}{4}} = \Omega_{r0}^{\frac{1}{4}} \left(\frac{\rho_{rf}}{\rho_{cr,0}} \right)^{\frac{1}{4}}. \quad (3.26)$$

Os parâmetros Ω_{r0} e $\rho_{cr,0}$ são conhecidos observacionalmente e o valor de ρ_{rf} vai definir a escala de energia na qual a inflação termina. Desse modo, pode-se determinar um limite inferior para o número de *e-folds* da inflação tomando o logaritmo em (3.26):

$$N > \frac{1}{4} \ln \left(\Omega_{r0} \frac{\rho_{rf}}{\rho_{cr,0}} \right). \quad (3.27)$$

Alan Guth propõe que a inflação ocorreu na escala GUT, ou seja, $\rho_{rf} \sim 10^{64} \text{ GeV}^4$. Usando esse valor e os dados observacionais que indicam $\Omega_{r0} \sim 10^{-5}$ e $\rho_{cr,0} \sim 10^{-49} \text{ GeV}^4$ obtém-se $N > 62$.

3.2 O problema do horizonte

A linha de mundo de um fóton é caracterizada pela condição $ds^2 = 0$ (trajetória tipo luz). Aplicada a métrica FLRW dada em (1.3), essa condição implica (considerando o movimento apenas na direção radial)

$$\int_{t_1}^{t_2} \frac{dt}{a(t)} = \pm \int_{r_1}^{r_2} \frac{dr}{\sqrt{(1 - Kr^2)}}, \quad (3.28)$$

em que as coordenadas estão associadas a um fóton que encontra-se inicialmente na coordenada r_1 no instante t_1 e, posteriormente, na coordenada r_2 no instante t_2 . A partir da (3.28) define-se o horizonte de eventos e o horizonte de partículas.

Assumindo que o “*Big-Bang*” inicie em $t = 0$, a máxima coordenada do fóton no instante t é dada por $r_{max}(t)$ definida a partir de (3.28) por

$$\int_0^t \frac{dt}{a(t)} = \int_0^{r_{max}(t)} \frac{dr}{\sqrt{(1 - Kr^2)}}, \quad (3.29)$$

em que a origem foi escolhida no início do *Big-Bang*. Na (3.29) adotou-se o sinal positivo, dado que a coordenada r do fóton aumenta com o tempo. Diz-se que existe um horizonte de partículas quando a integral que define a distância própria

$$d_{max}(t) = a(t) \int_0^{r_{max}(t)} \frac{dr}{\sqrt{(1 - Kr^2)}} = a(t) \int_0^{t'} \frac{dt'}{a(t')} \quad (3.30)$$

é convergente no *Big-Bang*, ou seja, $d_{max}(t)$ é finito³ e determina o tamanho do horizonte de partículas. A existência de um horizonte de partículas na geometria FLRW introduz um problema no modelo cosmológico padrão, conhecido como problema do horizonte. Nessa seção será visto como o modelo inflacionário resolve essa questão.

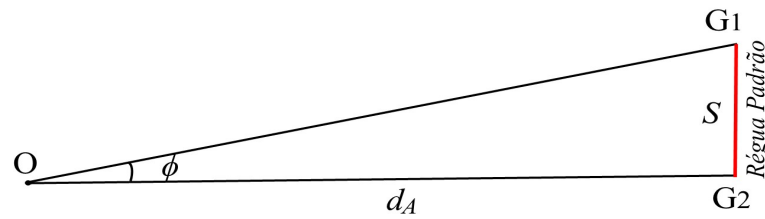
Uma das maneiras de se medir distâncias em cosmologia com razoável precisão é através das chamadas “régua padrão”. Como exemplo desses padrões de distância pode-se mencionar

³ Existe um outro tipo de horizonte importante na cosmologia denominado de *horizonte de eventos*. O problema do horizonte no modelo cosmológico padrão diz respeito ao *horizonte de partículas*.

aquelas produzidas no fim da era da recombinação pelas oscilações acústicas de bárions (BAO - *Barions Acoustic Oscillations*)⁴.

Considere uma régua padrão de comprimento S correspondente a um ângulo ϕ , definido entre as galáxia G_2 e G_1 . A Galáxia G_2 possui distância co-móvel χ em relação ao observador.

Figura 3.2 – Elementos envolvidos na definição da distância de diâmetro angular



Fonte: Autor (2020).

Para um tempo t fixo no qual define-se a régua padrão tem-se que (ver figura 3.2)

$$S = d_A \phi, \quad (3.31)$$

onde a distância de diâmetro angular d_A é a distância própria que caracteriza uma determinada régua padrão no instante t e é definida por

$$d_A = a(t)\chi, \quad (3.32)$$

em que para um raio de luz emitido em G_2 no instante t e detectado hoje no instante t_0 , tem-se (WEINBERG, 2008)

$$\chi = \int_t^{t_0} \frac{dt'}{a(t')}. \quad (3.33)$$

⁴ A era da recombinação se deu por volta de 380.000 anos após o *Big-Bang*, onde ocorreu a formação de estados ligados de núcleos e elétrons formando elementos como hidrogênio, hélio e deutério. Nessa época o universo apresentava pequenas inhomogeneidades que favoreciam o surgimento de regiões extremamente densas, as quais provocaram oscilações na matéria bariônica devido aos efeitos combinados do campo gravitacional e da radiação. Esse processo resulta na formação de ondas sonoras denominadas oscilações acústicas de bárions.

Na identidade acima o instante t pode corresponder, por exemplo, à última superfície de espalhamento, quando fótons desacoplam da matéria. A partir da distância de diâmetro angular (3.32) e do ângulo ϕ , pode-se determinar o tamanho da régua padrão através da (3.31).

O problema aparece quando calcula-se a distância de horizonte de partícula para a galáxia G_2 (distância máxima a partir da qual G_2 não poderá receber informação física) e comparamos com o tamanho S da régua padrão. Utilizando o modelo cosmológico padrão, verifica-se que a distância de horizonte corresponde a uma fração muito pequena da régua. Isso significa que G_2 e G_1 estavam desconexas no passado (final da era da recombinação). Porém, os dados observacionais demonstram um universo extremamente homogêneo em grandes escalas, o que não é compatível com esse fato.

Observa-se, por exemplo, que a radiação cósmica de fundo é homogênea e isotrópica com precisão de uma parte em 10^5 (CLEMENTS, 2017), possuindo um espectro de corpo negro com temperatura de 2.73K (SMOOT et al., 1992). Pequenas anisotropias foram detectadas pelo satélite COBE (*Cosmic Background Explorer*). Como a radiação cósmica de fundo pode ser tão homogênea em grandes escalas se regiões distantes estavam desconexas no passado?

Para verificar explicitamente o problema do horizonte no contexto do modelo Λ CDM deve-se calcular a distância de horizonte d_H desde o *Big-Bang* até a última superfície de espalhamento e comparar com o tamanho da distância de diâmetro angular d_A da última superfície de espalhamento até hoje.

Suponha que um fóton seja emitido no *Big-Bang* no instante $t = 0$ e detectado no tempo t_r na última superfície de espalhamento. Utilizando a (3.30), a distância correspondente ao horizonte de partícula no instante t_r é dada por

$$d_H = a_r \int_0^{t_r} \frac{dt'}{a'}, \quad (3.34)$$

em que $a_r = a(t_r)$ é o fator de escala na última superfície de espalhamento. A variável de integração (3.34) pode-se ser mudada utilizando $da' = \dot{a}' dt'$, resultando em

$$d_H = a_r \int_0^{a_r} \frac{da'}{H(a')a'^2}. \quad (3.35)$$

Para o Λ CDM, utilizando a equação (2.31) na (3.35) e mantendo apenas as contribuições dominantes de matéria e radiação (aproximação válida na era do equilíbrio entre matéria e

radiação) obtém-se

$$d_H = a_r \int_0^{a_r} \frac{da'}{H_0 \sqrt{\Omega_{m0} a' + \Omega_{r0}}}. \quad (3.36)$$

A integral acima tem como solução (PIATTELLA, 2018)

$$d_H = \frac{2a_r}{H_0 \Omega_{m0}} \left(\sqrt{\Omega_{m0} a_r + \Omega_{r0}} - \sqrt{\Omega_{r0}} \right). \quad (3.37)$$

De maneira análoga, a distância de diâmetro angular é calculada para um fóton emitido na última superfície de espalhamento e detectado hoje. Fixando a régua padrão no instante t_r e usando a definição (3.32), a distância de diâmetro angular é dada por (usando $a_0 = 1$)

$$d_A = a_r \int_{t_r}^{t_0} \frac{dt'}{a(t')} = a_r \int_{a_r}^1 \frac{da'}{H(a') a'^2}, \quad (3.38)$$

que para o modelo Λ CDM, com solução dada em (2.31), pode ser escrita como

$$d_A = a_r \int_{a_r}^1 \frac{da'}{H_0 \sqrt{\Omega_{m0} a' + \Omega_{r0}}}. \quad (3.39)$$

Como utilizado no calculo de d_H , foram mantidas somente as contribuições de matéria e radiação. A solução de (3.39) é dada por (PIATTELLA, 2018)

$$d_A = \frac{2a_r}{H_0 \Omega_{m0}} \left(\sqrt{\Omega_{m0} + \Omega_{r0}} - \sqrt{\Omega_{r0} + \Omega_{m0} a_r} \right). \quad (3.40)$$

Calculando a razão d_H/d_A para o final da era da recombinação em que $a_r \sim 10^{-3}$ e utilizando os valores dos parâmetros Ω_{m0} e Ω_{r0} , medidos observacionalmente (AGHANIM et al., 2018), obtém-se

$$\frac{d_H}{d_A} = \frac{\sqrt{\Omega_{m0} a_r + \Omega_{r0}} - \sqrt{\Omega_{r0}}}{\sqrt{\Omega_{m0} + \Omega_{r0}} - \sqrt{\Omega_{r0} + \Omega_{m0} a_r}} = 0.018. \quad (3.41)$$

Usando a (3.31), pode-se estimar que o ângulo ϕ correspondente a $S \sim d_H$ é da ordem de 1° , que é muito menor do que o ângulo correspondente a qualquer régua padrão observada na última superfície de espalhamento. O valor de d_H pode ser estimado a partir de (3.37) utilizando as ordens de grandezas dos parâmetros $a_r, \Omega_{m0}, \Omega_{r0}$, resultando em $d_H \sim 1\text{Mpc}$. Desse modo, fica evidente que a distância de horizonte corresponde a uma pequena fração da régua padrão determinada pelo BAO, que corresponde a 100Mpc (EISENSTEIN et al., 2005).

Uma outra maneira de entender esse problema é analisar a variação de $a(t)$ entre as duas galáxias G_2 e G_1 e comparar com a distância de horizonte para cada instante t . Como exemplo, considere o caso do universo dominado por matéria, em que (PIATTELLA, 2018)

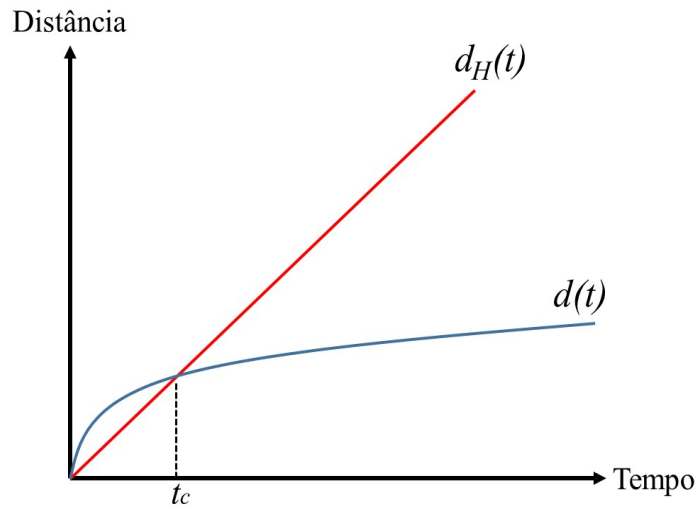
$$a(t) \sim t^{2/3}. \quad (3.42)$$

Portanto a distância física entre G_2 e G_1 varia no tempo de acordo com (3.42). Pode-se encontrar $d_H(t)$ substituindo (3.42) na (3.34), obtendo-se

$$d_H(t) = 3t. \quad (3.43)$$

Comparando a (3.42) com a (3.43), conforme mostra a figura 3.3, nota-se que para $t > t_c$ a distância de horizonte da galáxia G_2 é maior do que a distância entre G_2 e G_1 . Porém, a distância física $d(t)$ torna-se maior do que $d_H(t)$ para $t < t_c$. A galáxia G_1 sai do horizonte de G_2 em $t = t_c$.

Figura 3.3 – Gráfico da distância física entre G_2 e G_1 e da distância de horizonte em função do Tempo



Fonte: Autor (2020).

Como no problema da planura, o cenário inflacionário resolve o problema do horizonte usando a condição de que o parâmetro de Hubble H mantém-se aproximadamente constante durante a inflação. Isso pode ser visto da seguinte forma.

Como visto anteriormente na seção 3.1, a hipótese de H aproximadamente constante conduz a uma fase de expansão exponencial acelerada. Da equação (3.15) e (3.16) pode-se

concluir que para um instante t durante a inflação tem-se

$$a(t) = a_f e^{-H(t_f-t)} = a_i e^{H(t-t_i)}. \quad (3.44)$$

A distância de horizonte na última superfície de espalhamento foi dada na (3.34). Com a hipótese da inflação ocorrendo entre o *Big-Bang* e o final da era da recombinação, pode-se dizer que a contribuição dominante para a integral (3.34) ocorre no período inflacionário. Usando essa aproximação, pode-se escrever a distância de horizonte como

$$d_H \approx a_r \int_{t_i}^{t_f} \frac{dt'}{a(t')}. \quad (3.45)$$

Usando a (3.44) na integral acima, obtém-se

$$d_H = \frac{a_r}{a_f H} (e^N - 1), \quad (3.46)$$

em que N é o número de *e-folds* definido na seção anterior.

A expressão para a distância de diâmetro angular calculada na última superfície de espalhamento é obtida utilizando a aproximação de que, nesse período, o universo seja dominado por matéria. Nesse aproximação, a (2.31) na última superfície de espalhamento equivale a

$$H \sim H_0 a_r^{-\frac{3}{2}}. \quad (3.47)$$

Substituindo a (3.47) em (3.38) chega-se em

$$d_A \sim \frac{2}{H_0} \left(a_r - a_r^{\frac{3}{2}} \right). \quad (3.48)$$

Nos estágios iniciais do universo pode-se considerar $a(t) \ll 1$. Portanto, a contribuição dominante vem do termo linear. Pode-se então escrever

$$d_A \propto a_r H_0^{-1}. \quad (3.49)$$

Para o problema do horizonte é necessário calcular a razão d_H/d_A , que nesse caso é dada por

$$\frac{d_H}{d_A} \approx \frac{H_0}{a_f H_f} e^N \quad (3.50)$$

em que foram usadas as equações (3.46) e (3.49). Uma vez que deve-se ter $d_H > d_A$ para que o problema do horizonte seja resolvido, conclui-se que

$$\frac{a_f H_f}{H_0} < e^N, \quad (3.51)$$

que é a mesma condição (3.22) obtida no problema da planura.

Fica evidente que para o número de *e-folds* N determinado pela (3.51) tem-se $d_H/d_A > 1$, em coerência com os resultados das observações astronômicas que indicam um universo muito homogêneo.

4 LIMITAÇÕES DO CENÁRIO ORIGINAL E OS CENÁRIOS POSTERIORES

Nesse capítulo discutiremos as dificuldades apresentadas pelo primeiro cenário inflacionário de um ponto de vista conceitual¹. Veremos que, apesar dos problemas da planura e do horizonte serem resolvidos pelo cenário original, o próprio Alan Guth identificou problemas na sua implementação (GUTH, 1981), (GUTH; WEINBERG, 1983), (WEINBERG, 1989). Além disso, apresentaremos algumas propostas de modelos inflacionários que surgiram posteriormente com o intuito de solucionar os problemas deixados pelo cenário original.

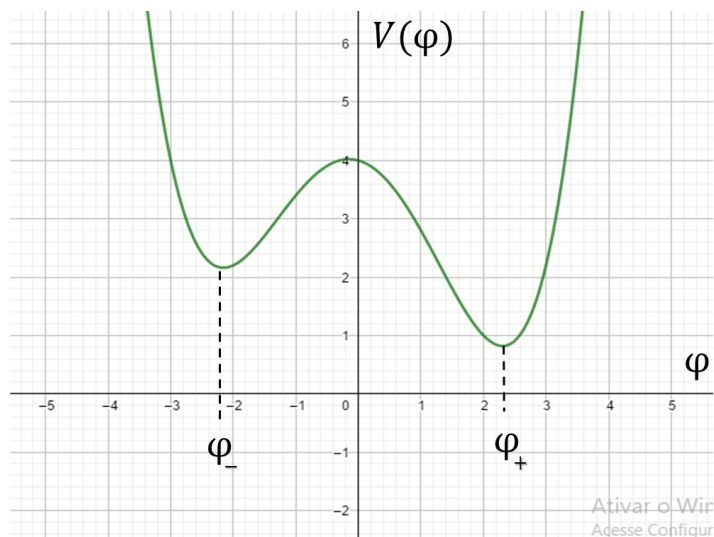
4.1 Problemas do Cenário Original

Para realizar concretamente a ideia de um regime inflacionário, Guth propôs um modelo em que postula-se a existência de um campo escalar φ , chamado *inflaton*, descrito pela densidade de lagrangeana

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}g^{\mu\nu}\partial_\mu\varphi\partial_\nu\varphi + V(\varphi). \quad (4.1)$$

Nesse modelo, escolhe-se um potencial que possui dois mínimos, um mínimo local e um mínimo global, aos quais estão associados respectivamente os valores de campo φ_- e φ_+ . Na figura 4.1 mostra-se um exemplo de potencial que satisfaz essas condições. Na literatura

Figura 4.1 – Gráfico para o potencial $V(\varphi) = -m^2\varphi^2 + \lambda\varphi^4 + g\varphi$ em função do inflaton.



Fonte: Autor (2020).

corrente, φ_- e φ_+ costumam ser chamados, respectivamente, de falso vácuo e verdadeiro vácuo.

¹ Os detalhes técnicos serão deixados para o capítulo seguinte.

A dinâmica da inflação se dá através do processo de transição de fase do campo $V(\varphi)$ do estado de falso vácuo φ_- para o estado de verdadeiro vácuo φ_+ .

Assumindo que no início da inflação os efeitos quânticos devem ser dominantes, esse processo de transição ocorre via tunelamento quântico. O processo de tunelamento em teoria quântica de campos e suas possíveis implicações cosmológicas foram explorados nos trabalhos de Sidney Coleman e colaboradores (COLEMAN, 1977), (JR; COLEMAN, 1977), (COLEMAN; LUCCIA, 1980). Nessa série de trabalhos, mostrou-se que o processo de tunelamento quântico ocorre de forma análoga ao processo de nucleação por meio da formação de bolhas que ocorre na transição de fase líquido-vapor. Nesse caso, a fase de vapor corresponde ao verdadeiro vácuo, a fase líquida ao falso vácuo e às flutuações termodinâmicas, responsáveis pela formação das bolhas, correspondem às flutuações quânticas.

Assumindo que a formação de bolhas de verdadeiro vácuo ocorreu durante o período inflacionário, o processo de expansão da bolha pode ser descrito como segue. Antes da transição de fase se completar o universo passa por um super-resfriamento devido ao crescimento exponencial produzido pela inflação. Nesse período, ocorre a produção das bolhas de verdadeiro vácuo. Como mostrado por Coleman, a energia do processo fica totalmente acumulada na superfície das bolhas, que expandem rapidamente com velocidade próxima da luz. A transição estará completa quando as bolhas coalescem dando origem a nova fase de verdadeiro vácuo, que corresponde ao universo observado a partir da era da radiação. Os detalhes do processo quântico de tunelamento estão fora do escopo do presente trabalho.

O cálculo do tunelamento fornece uma taxa de nucleação de bolhas por unidade de volume representado por λ_0 . A razão entre a taxa de formação de bolha e a taxa de expansão do universo fornece um parâmetro adimensional definido por

$$\varepsilon \equiv \frac{\lambda_0}{H^4}. \quad (4.2)$$

Uma vez que a taxa de expansão é muito maior do que a taxa de criação das bolhas de verdadeiro vácuo, a ocorrência da inflação impõe que $\varepsilon \ll 1$. Desse modo, a região de falso vácuo se expande muito mais rapidamente do que as regiões de verdadeiro vácuo delimitadas pelas bolhas. E portanto, as bolhas não coalescem em todo o espaço e a transição de fase não se completa. Ao invés disso, formam-se aglomerados finitos de bolhas de verdadeiro vácuo dominados por uma única bolha maior, resultando num universo não homogêneo e portanto

contrariando as observações, como observado por (WEINBERG, 1989),(GUTH; WEINBERG, 1983).

Além disso, como observado por (LINDE, 1982), para o processo de transição de fase escolhido por Guth ocorrer, é necessário que o universo atinja valores extremos de temperaturas de aproximadamente $T \sim 10^{-1}K$ para o qual não se tem modelos de GUT. E como já mencionado anteriormente, o processo de transição de fase não se completa e conseqüentemente o universo não reaquece, resfriando-se para sempre. Desse modo, o processo inflacionário utilizado por Alan Guth não reproduz o universo que observamos hoje (GUTH, 1981), (WAGA, 2005), (WEINBERG, 2008).

4.2 O Novo Cenário Inflacionário

Apesar da inconsistência do cenário inflacionário original, a proposta de Alan Guth teve grande importância para o avanço da cosmologia, pois a ideia geral e a maneira com que a inflação resolve o problema da planura e o problema do horizonte continuaram sendo válidas (LINDE, 2005), (WAGA, 2005).

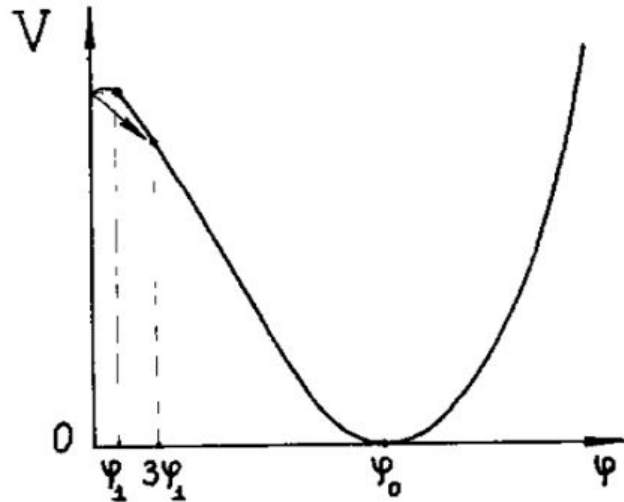
Logo após a divulgação do trabalho de Guth (GUTH, 1981), Andrei Linde (LINDE, 1982) e, independentemente, Paul Steinhardt e Andreas Albrecht (ALBRECHT; STEINHARDT, 1982), propuseram um novo cenário inflacionário a fim de resolver os entraves do cenário original. De forma geral, o modelo proposto sugere que sob determinadas condições, a inflação pode ocorrer após uma transição de fase de primeira ordem sem que seja afetado pelos problemas do cenário de Guth. Nesse trabalho, supõe-se que o processo de transição de fase ocorra através do mecanismo de quebra espontânea de simetria de Coleman-Weinberg (COLEMAN; WEINBERG, 1973). Os detalhes do mecanismo envolvem conhecimentos de teoria quântica de campos e, portanto, não serão abordados nesta dissertação.

A partir de uma escolha adequada de parâmetros, e com o potencial efetivo do campo φ tendo um platô muito próximo a $\varphi = 0$ como mostrado na figura 4.2, a inflação pode ocorrer em uma única região de flutuação com o universo expandindo dentro de uma única bolha de verdadeiro vácuo. Nesse cenário, o parâmetro de Hubble é dado por (LINDE, 1982)

$$H \approx [(8\pi/3M_p^2)V(0)]^{\frac{1}{2}} \quad (4.3)$$

onde M_p é a massa de Planck e $V(0) \approx V(\varphi_1)$ no intervalo $0 < \varphi < \varphi_1$. Segue da relação (4.3) que o parâmetro de Hubble deve se manter aproximadamente constante durante a inflação.

Figura 4.2 – Gráfico do potencial em função do campo inflaton. O platô ocorre no intervalo $V(0) < V(\varphi) < V(\varphi_1)$. Após o tunelamento, o campo evolui para o mínimo local em φ_0 .



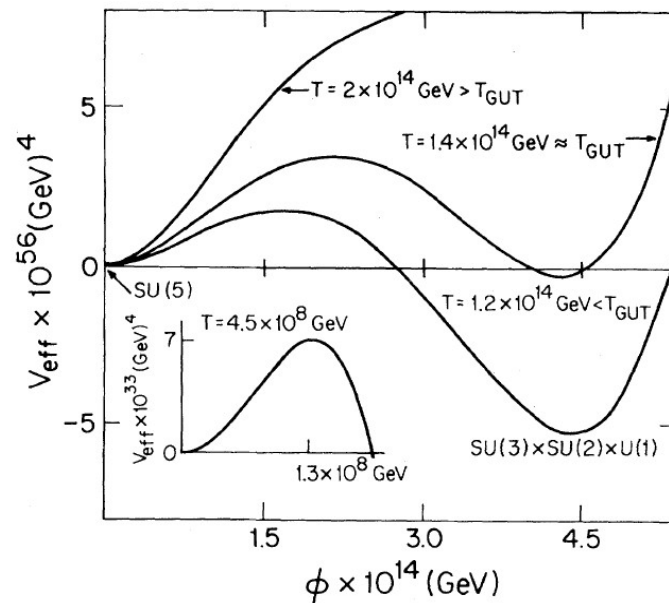
Fonte: (LINDE, 1982).

De acordo com (LINDE, 1982), as bolhas surgem com um tamanho da ordem de 10^{-20} cm. Uma vez que durante o período de expansão do universo tem-se $H(t_f - t_i) \sim 7500$, usando a relação (3.16) é possível calcular o tamanho final da bolha

$$a_f \sim 10^{-20} e^{7500} \sim 10^{3240} \text{ cm.}$$

Portanto, o tamanho atingido pela bolha de verdadeiro vácuo é muito maior que o tamanho do universo observável $d \sim 10^{28}$ cm. Desse modo, com o universo observável contido dentro de uma única bolha de verdadeiro vácuo, não se percebe as inhomogeneidades causadas pelas colisões com outras bolhas, as quais, só seriam perceptíveis numa escala de distância muito maior. Na figura 4.3, são ilustradas as curvas para o potencial em diferentes temperaturas. Note que, para $T > T_{GUT}$ existe apenas um mínimo global em $\varphi = 0$ e a simetria do modelo não foi quebrada - simetria $SU(5)$ no modelo considerado. Para $T < T_{GUT}$ ocorre a quebra espontânea da simetria para um subgrupo do grupo original - que nesse caso é o subgrupo $SU(3) \times SU(2) \times U(1)$ que corresponde ao modelo padrão da física de partículas elementares. Nessa fase final o campo encontra-se no mínimo global.

Figura 4.3 – Gráfico do potencial em função do campo inflaton



Fonte: (ALBRECHT; STEINHARDT, 1982).

Contudo, o principal problema com esse cenário consiste no fato de que são necessárias condições muito específicas para sua aplicabilidade. O próprio Andrei Linde observa que a escolha do potencial com um platô próximo a $\phi = 0$, como mostrado na figura 4.2, não parece ser natural (LINDE, 1982). Além disso, deve-se garantir que a aproximação perturbativa na qual está baseada o mecanismo de Coleman-Weinberg permaneça válida.

Para que esse cenário funcione, é necessário que o campo inflaton praticamente não interaja com outros campos de matéria e portanto, não pode estar em equilíbrio térmico (WAGA, 2005). De fato, no novo cenário inflacionário proposto por Linde, Steinhardt e Albrecht, admite-se que todo conteúdo de matéria já esteja presente desde o início da inflação, não sendo necessário inserir no modelo um mecanismo de reaquecimento (LINDE, 2005)². Assim, além de não propor nenhum mecanismo para a origem do conteúdo do universo, o fato do inflaton não estar em equilíbrio térmico com outros campos mostra-se muito artificial.

4.3 Inflação Caótica

Em 1983, o próprio Andrei Linde propõe um cenário que resolve todos os problemas dos cenários anteriores, chamado de Inflação Caótica ou Cenário Caótico. De acordo com

² Esse é um aspecto diferente do modelo original proposto por Guth, em que o reaquecimento ocorre por meio das colisões das bolhas de verdadeiro vácuo.

(LINDE, 2008), o modelo caótico não se limita a condições específicas de temperatura e a processos de transição de fase via mecanismo de quebra espontânea de simetria. Nesse cenário, a inflação pode ser gerada com ou sem equilíbrio térmico e ocorrer nos modelos mais simples de potenciais como $V(\varphi) \sim \varphi^2$. Além disso, o Cenário Caótico estende-se para outros potenciais polinomiais e pode também ocorrer em potenciais que permitam um regime de rolamento lento conhecido como *slow-roll*, que serão abordados no capítulo 5.

De acordo com (HOBSON; EFSTATHIOU; LASENBY, 2006), diferentemente dos cenários inflacionários anteriores, no Cenário Caótico o valor inicial do campo φ é definido de forma aleatória (caótica), podendo assumir valores arbitrários em qualquer ponto do espaço. No entanto, para que esse cenário funcione, é necessário que haja uma região suficientemente grande do nosso universo em que o potencial deva se manter aproximadamente constante e o campo φ deve variar muito lentamente, como será discutido em mais detalhes na seção 5.2. Em razão disso, esse cenário foi bastante criticado, pois era difícil aceitar a ideia de um universo ter surgido a partir de um regime caótico, considerando remota a possibilidade de ocorrência da inflação.

No entanto, de acordo com (WEINBERG, 2008), não se deve descartar tal possibilidade. Nesse caso, considerando o fato de que a inflação ocorreu em uma determinada região do espaço, o universo observável (homogêneo) seria então (em larga escala) uma pequena fração de uma região muito maior e inhomogênea. Os diversos modelos de inflação caótica e os respectivos problemas desses cenários serão discutidos em mais detalhes na seção 5.4.

5 PRESENTE STATUS DO MODELO INFLACIONÁRIO

O objetivo desse capítulo é apresentar a visão corrente do modelo inflacionário com base nos parâmetros de *slow-roll* (seção 5.2) e nos parâmetros observáveis (seção 5.3) que dão suporte observacional ao modelo inflacionário. Contudo, antes disso, na seção 5.1 será discutido brevemente o primeiro modelo que realizou a ideia da expansão acelerada primordial associada com o regime inflacionário. Esse modelo foi proposto pelo próprio Alan Guth e está baseado na existência de um campo escalar (*inflaton*) que atua no espaço-tempo de forma análoga à energia do vácuo (constante cosmológica). Nas seções 5.4 e 5.5, respectivamente, será discutido o cálculo dos observáveis nos modelos de inflação caótica e de Starobinsky.

5.1 Inflação com um único campo escalar

Nessa seção será apresentado um modelo inflacionário descrito por um único campo escalar φ sujeito a um potencial $V(\varphi)$. Esse modelo não depende da ocorrência de transições de fase de primeira ordem associadas ao processo de tunelamento quântico, mas impõe condições sobre o potencial $V(\varphi)$ e a dinâmica do campo inflaton. As condições estão associadas ao regime de rolamento lento (*slow-roll*) em que o campo varia lentamente até atingir o seu valor mínimo φ_{min} no final da inflação. Essas condições serão expressas de maneira precisa adiante.

O tensor energia-momento para o campo escalar é dado por (GOMES, 2002)

$$T^{\alpha}_{\beta} = g^{\alpha\nu} \partial_{\nu} \varphi \partial_{\beta} \varphi - \delta^{\alpha}_{\beta} \left(\frac{1}{2} g^{\mu\nu} \partial_{\mu} \varphi \partial_{\nu} \varphi + V(\varphi) \right). \quad (5.1)$$

Assume-se que a dinâmica do período inflacionário é dominada pelo campo inflaton. Para que seja satisfeito o princípio cosmológico postula-se que o campo φ dependa apenas do tempo. Desse modo, a partir de (1.3), pode-se calcular as componentes T^0_0 e T^i_j , as quais estão associadas a densidade ρ e a pressão P (PIATTELLA, 2018)

$$\rho_{\varphi} = -T^0_0 = \frac{1}{2} \dot{\varphi}^2 + V(\varphi), \quad (5.2)$$

$$P_{\varphi} = \frac{1}{3} \delta^i_j T^j_i = \frac{1}{2} \dot{\varphi}^2 - V(\varphi). \quad (5.3)$$

Calculando ρ_φ e substituindo (5.2) e (5.3) na equação (2.24), obtém-se a equação para o campo escalar:

$$\ddot{\varphi} + \frac{dV(\varphi)}{d\varphi} + 3H\dot{\varphi} = 0. \quad (5.4)$$

Substituindo (5.3) e (5.2) em (2.15) e (2.14), obtém-se

$$H^2 = \frac{8\pi G}{3} \rho_\varphi = \frac{8\pi G}{3} \left(\frac{1}{2} \dot{\varphi}^2 + V(\varphi) \right) \quad (5.5)$$

e

$$\frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{8\pi G}{3} (\dot{\varphi}^2 - V(\varphi)), \quad (5.6)$$

em que adotou-se $K = 0$ e $\Lambda = 0$. Derivando (5.5) resulta em

$$\dot{H} = -4\pi G \dot{\varphi}^2 \quad (5.7)$$

e

$$\ddot{H} = -8\pi G \dot{\varphi} \ddot{\varphi}. \quad (5.8)$$

Na próxima seção, as equações que determinam a dinâmica da inflação serão utilizadas para determinar as condições de *slow-roll*.

5.2 Parâmetros de *slow-roll*

A partir das equações (5.4) e (5.7) pode-se definir parâmetros que controlam a dinâmica da inflação. Esses parâmetros ficaram conhecidos como parâmetros de rolamento lento (*slow-roll*). Sabe-se que para que ocorra inflação, deve-se ter H praticamente constante e, conseqüentemente, $\dot{H} \sim 0$. Defini-se o parâmetro de *slow-roll* ε por

$$\varepsilon \equiv -\frac{\dot{H}}{H^2} = \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{H} \right) = 1 - \frac{\ddot{a}}{H\dot{a}}. \quad (5.9)$$

Substituindo (5.5) e (5.7) em (5.9) tem-se que

$$\frac{|\dot{H}|}{H^2} = \frac{4\pi G \dot{\varphi}^2}{\frac{8\pi G}{3} \left(\frac{1}{2} \dot{\varphi}^2 + V(\varphi) \right)} = \frac{3}{\left(1 + \frac{2V(\varphi)}{\dot{\varphi}^2} \right)}. \quad (5.10)$$

Da equação (5.7) tem-se que no período inflacionário $\dot{\phi}^2 \sim 0$ (rolamento lento), de modo que H é determinado pela escala do potencial $V(\phi)$, o qual deve permanecer praticamente constante durante a inflação (veja a equação (5.5)). Adotando

$$\frac{V(\phi)}{\dot{\phi}^2} \gg 1, \quad (5.11)$$

tem-se a condição de *slow-roll* associada a escala de energia na qual ocorre inflação, determinada pelo potencial $V(\phi)$:

$$|\epsilon| \ll 1. \quad (5.12)$$

Usando a condição (5.11) em (5.2) e (5.3), obtém-se

$$P_\phi \approx -V(\phi) = -\rho_\phi. \quad (5.13)$$

Desse modo, durante o período inflacionário o campo ϕ simula o comportamento da constante cosmológica (fase de de Sitter), conforme mostra a equação (2.26) tomando $\omega = -1$.

Além da condição (5.12) é necessário impor que o *slow-roll* ocorra por um período de tempo suficiente, o qual costuma ser medido pelo número de *e-folds* N . Para isso, define-se um parâmetro diretamente relacionado com o rolamento lento (PIATTELLA, 2018). A partir de (5.9) tem-se

$$\dot{\epsilon} = \frac{2(\dot{H})^2}{H^3} - \frac{\ddot{H}}{H^2} = 2H\epsilon \left(\epsilon + \frac{1}{H} \frac{\ddot{\phi}}{\dot{\phi}} \right), \quad (5.14)$$

em que na última igualdade foram utilizadas a (5.8) e a (5.9). Foi empregada a notação $\dot{\epsilon} = \frac{d\epsilon}{dt}$. Definindo o parâmetro de *slow-roll*

$$\eta \equiv -\frac{1}{H} \frac{\ddot{\phi}}{\dot{\phi}}, \quad (5.15)$$

a (5.14) pode ser escrita como

$$\dot{\epsilon} = 2H\epsilon(\epsilon - \eta). \quad (5.16)$$

Para que seja satisfeita a condição $\dot{\epsilon} \approx 0$, basta que $\eta \ll 1$, garantindo que $\dot{\epsilon}$ é de segunda ordem nos parâmetros de *slow-roll*. Segue da (5.15) que $\ddot{\phi} \approx 0$, implicando em (5.4) que

$$\frac{dV}{d\phi} \approx -3H\dot{\phi}. \quad (5.17)$$

Uma vez que a escala de energia da inflação é definida pelo potencial, é importante escrever os parâmetros ε e η em função de V e de suas derivadas. Combinando a equação (5.9) com (5.5) e (5.7) tem-se

$$\varepsilon = \frac{3\dot{\phi}^2}{2V + \dot{\phi}^2} = \left(\frac{3\dot{\phi}^2}{2V} \right) \frac{1}{\left(1 + \frac{\dot{\phi}^2}{2V} \right)}. \quad (5.18)$$

Usando a condição (5.11), pode-se expandir (5.18) em série de Taylor

$$\varepsilon = \frac{3\dot{\phi}^2}{2V} + \mathcal{O} \left[\left(\frac{\dot{\phi}^2}{V} \right)^2 \right] \approx \frac{3\dot{\phi}^2}{2V}. \quad (5.19)$$

Substituindo (5.17) em (5.19) e combinando com (5.5) e (5.11), chega-se então em

$$\varepsilon_V \equiv \frac{1}{16\pi G} \left(\frac{V'}{V} \right)^2 \approx \varepsilon \quad (5.20)$$

em que $V' = \frac{dV}{d\phi}$.

Analogamente, para calcular η_V deriva-se (5.17) em relação ao tempo e utiliza-se $\frac{d}{dt} = \dot{\phi} \frac{d}{d\phi}$, obtendo

$$\ddot{\phi} = -\frac{1}{3} \left(V'' \dot{\phi} H^{-1} - \frac{V' \dot{H}}{H^2} \right). \quad (5.21)$$

Substituindo a expressão acima em (5.15) resulta em

$$\eta \approx \frac{1}{3H^2} \left(V'' - V' \frac{\dot{H}}{H\dot{\phi}} \right) = \frac{V''}{3H^2} + \frac{\dot{H}}{H^2}, \quad (5.22)$$

em que na última igualdade foi utilizado a expressão (5.17). Usando novamente a condição (5.11) em (5.5) obtêm-se $H^2 \approx 8\pi G V/3$. Usando essa aproximação no primeiro termo de (5.22), tem-se

$$\eta = \frac{V''}{8\pi G V} + \frac{\dot{H}}{H^2}. \quad (5.23)$$

Por meio da definição (5.9), a (5.23) pode ser escrita como

$$\eta + \varepsilon = \frac{V''}{8\pi G V} \quad (5.24)$$

e, por fim, define-se

$$\eta_V \equiv \frac{1}{8\pi G} \frac{V''}{V} = \frac{1}{8\pi G V} \left(\frac{d^2 V}{d\phi^2} \right). \quad (5.25)$$

Além disso, pode-se escrever o número de *e-folds* N em função do campo φ , usando o parâmetro ε . Partindo de $dN = Hdt$, tem-se então que

$$\dot{N} = H, \quad (5.26)$$

$$\Delta N_{if} = \int_{t_i}^{t_f} H dt, \quad (5.27)$$

em que t_i e t_f são tempos arbitrários, podendo ser escolhidos em qualquer momento da inflação. Substituindo $dt = \frac{dt}{d\varphi} d\varphi$ em (5.27) para mudar a variável de integração, obtém-se

$$\Delta N_{if} = \int_{\varphi_i}^{\varphi_f} \frac{H}{\dot{\varphi}} d\varphi. \quad (5.28)$$

Inserindo (5.17) em (5.28) tem-se então

$$\Delta N_{if} = - \int_{\varphi_i}^{\varphi_f} \frac{V'}{3\dot{\varphi}^2} d\varphi. \quad (5.29)$$

Usando (5.19), pode-se ainda reescrever (5.29) da forma

$$\Delta N_{if} = -\frac{1}{2} \int_{\varphi_i}^{\varphi_f} \frac{1}{\varepsilon} \frac{V'}{V} d\varphi, \quad (5.30)$$

e inserindo (5.20) em (5.30)

$$\Delta N_{if} = -8\pi G \int_{\varphi_i}^{\varphi_f} \frac{V}{V'} d\varphi = 8\pi G \int_{\varphi_f}^{\varphi_i} \frac{V}{V'} d\varphi. \quad (5.31)$$

Como $\varepsilon \approx 0$, segue da (5.20) que durante a inflação deve-se ter $\frac{V}{V'}$ quase constante, resultando por fim em

$$\Delta N_{if} \approx 8\pi G \frac{V}{V'} (\varphi_i - \varphi_f). \quad (5.32)$$

5.3 Observáveis de Inflação

Conforme visto anteriormente na figura (3.1), antes do período inflacionário (era de Planck) tem-se um estágio do universo em que os efeitos quânticos do campo gravitacional são dominantes. Para escalas um pouco abaixo da escala de Planck, esses efeitos tornam-se perturbações no espaço-tempo clássico (Relatividade Geral). No regime inflacionário, espera-se que tais perturbações sejam “alargadas” e que os efeitos desse processo deixem

traços observáveis no universo. De fato, existem indícios de que as assinaturas dessas flutuações quânticas estão relacionadas com as anisotropias observadas no espectro da CMB (CLEMENTS, 2017),(CHOWDHURY et al., 2019a) .

A partir da teoria de perturbações cosmológicas, mostra-se que uma das grandezas relevantes para o estudo das perturbações produzidas nos estágios iniciais do universo é o espectro de potência $\mathcal{P}(k)$. Essa grandeza faz a conexão da teoria de perturbações no espaço-tempo com a teoria de flutuações quânticas, uma vez que $\mathcal{P}(k)$ está diretamente relacionado com a transformada de Fourier do valor esperado no vácuo do produto de dois campos (que representam as perturbações). As funções espectrais introduzem a escala k , que possui dimensão de inverso de comprimento (PIATTELLA, 2018), (WEINBERG, 2008). Sendo H o valor do parâmetro de Hubble na inflação, as escalas quânticas correspondem a $k/a \gg H$, enquanto as escalas que estão fora do horizonte estão associadas aos comprimentos de onda com $k/a \ll H^1$. Uma escala característica importante é a chamada escala *pivot* k_* , determinada observacionalmente a partir das anisotropias da CMB (ADE et al., 2016). Essa escala corresponde ao valor de k quando as perturbações entram no horizonte de eventos durante a era da radiação.

Para um certo campo aleatório G , podemos escrever o espectro de potencia correspondente $\mathcal{P}_G(k)$ em termos adimensionais da seguinte forma

$$\Delta_G^2 \equiv \frac{k^3 \mathcal{P}_G(k)}{2\pi^2}. \quad (5.33)$$

As anisotropias da CMB podem ser de origem Tensorial ou Escalar e são quantificadas pelo espectro de potência tensorial Δ_T e o espectro de potência escalar Δ_S , que podem ser parametrizados, respectivamente, como

$$\Delta_T^2 \equiv A_T \left(\frac{k}{k_*} \right)^{n_T(k)} \quad (5.34)$$

e

$$\Delta_S^2 \equiv A_S \left(\frac{k}{k_*} \right)^{n_S(k)-1}. \quad (5.35)$$

¹ O parâmetro de Hubble fornece uma escala natural para o tamanho do universo observável em um determinado estágio.

A partir de (5.34) e (5.35), obtêm-se os índices espectrais tensorial e escalar n_S e n_T , que são as quantidades medidas experimentalmente (ADE et al., 2016):

$$n_T \equiv \frac{d \ln \Delta_T^2}{d \ln k}; \quad (5.36)$$

$$n_S - 1 \equiv \frac{d \ln \Delta_S^2}{d \ln k}. \quad (5.37)$$

As expressões acima são obtidas diretamente de (5.34) e (5.35), respectivamente, tomando o logaritmo e derivando os dois membros em relação a $\ln k$. A variável k possui dimensão de inverso de comprimento e representa uma escala característica das perturbações.

Teoricamente, pode-se mostrar que quando a escala k cruza o horizonte de eventos em $k_* = aH$ os espectros de potência são dados por (PIATTELLA, 2018)²

$$\Delta_T^2 = \frac{2H^2}{\pi^2 M_{Pl}^2} \Big|_{k=k_*} \quad (5.38)$$

e

$$\Delta_S^2 = \frac{H^2}{8\pi^2 M_{Pl}^2 \epsilon} \Big|_{k=k_*}, \quad (5.39)$$

Em que, M_{Pl} é a massa de Planck e ϵ é o parâmetro de *slow-roll* definido em (5.9)

Essas quantidades também podem ser escritas em termos dos parâmetros de *slow-roll*. Substituindo (5.38) em (5.36) e derivando em relação a $\ln k$ obtém-se

$$n_T = \frac{2k}{H} \frac{dH}{dk} \Big|_{k=k_*} \quad (5.40)$$

Para simplificar o cálculo, será feita uma mudança de variável. Chama-se $dt = a d\eta$, onde η é denominado tempo conforme; não confundir com o parâmetro de *slow-roll* definido em (5.15).

Desse modo, pode-se escrever

$$\eta - \eta_i = \int_{t_i}^t \frac{dt'}{a(t')}. \quad (5.41)$$

Usando $H = \frac{\dot{a}}{a}$ e $dt = \frac{da}{\dot{a}}$ em (5.41) tem-se

$$\eta - \eta_i = \int_{a_i}^a \frac{da}{a^2 H}. \quad (5.42)$$

² Essas relações são determinadas a partir da teoria de perturbações cosmológicas e seus efeitos nas anisotropias da CMB. Esses tópicos não foram abordados no presente trabalho.

No início da inflação adota-se $a_i \approx 0$ e $\eta_i = 0$. Portanto, a partir da integral (5.42) obtêm-se a relação entre η e k :

$$\eta = \frac{1}{H} \int_0^a \frac{da}{a^2} = -\frac{1}{aH} = -\frac{1}{k}. \quad (5.43)$$

Usando a regra da cadeia e sabendo que $\frac{d\eta}{dk} = \frac{1}{k^2}$, pode-se ainda escrever (5.40) da forma

$$n_T = \left. \frac{2}{kH} \frac{dH}{d\eta} \right|_{k=k_*}. \quad (5.44)$$

A partir da definição (5.9) é possível mostrar que

$$\frac{dH}{d\eta} = \dot{H}a = -aH^2\varepsilon, \quad (5.45)$$

e substituindo a relação acima em (5.44), obtêm-se então

$$n_T = -2\varepsilon. \quad (5.46)$$

De maneira análoga, pode-se escrever n_S em função dos parâmetros de *slow-roll*. Substituindo (5.39) em (5.37) e aplicando a derivada em relação a $\ln k$, tem-se então

$$n_S - 1 = \left. \frac{\varepsilon k}{H^2} \frac{d(H^2/\varepsilon)}{dk} \right|_{k=k_*} = \left. \left(\frac{2k}{H} \frac{dH}{dk} - k\varepsilon^{-1} \frac{d\varepsilon}{dk} \right) \right|_{k=k_*} \quad (5.47)$$

em que

$$\left. \frac{2k}{H} \frac{dH}{dk} \right|_{k=k_*} = \left. \frac{2k}{H} \frac{dH}{d\eta} \frac{d\eta}{dk} \right|_{k=k_*} = \left. \frac{2\dot{H}}{H} \right|_{k=k_*} = -2\varepsilon \quad (5.48)$$

e

$$k\varepsilon^{-1} \left. \frac{d\varepsilon}{dk} \right|_{k=k_*} = k\varepsilon^{-1} \left. \frac{d\varepsilon}{d\eta} \frac{d\eta}{dk} \right|_{k=k_*} = \left. \frac{1}{\varepsilon k} \varepsilon' \right|_{k=k_*}, \quad (5.49)$$

onde $\varepsilon' = \frac{d\varepsilon}{d\eta} = \dot{\varepsilon}a$. Substituindo (5.48) e (5.49) em (5.47) e usando a relação $\dot{\varepsilon} = 2H\varepsilon(\varepsilon - \eta)$ obtida anteriormente, tem-se

$$n_S - 1 = -2\varepsilon - \left. \frac{1}{\varepsilon k} \varepsilon' \right|_{k=k_*} = -2\varepsilon - 2(\varepsilon - \eta). \quad (5.50)$$

Por fim, utilizando as relações $\eta_V = \eta + \varepsilon$ e $\varepsilon \approx \varepsilon_V$, chega-se em

$$n_S - 1 = -6\varepsilon_V + 2\eta_V. \quad (5.51)$$

Outra grandeza importante no contexto das observações é a chamado razão tensor-escalar, que mede a amplitude das perturbações tensoriais em relação a amplitude das perturbações escalares. Essa grandeza é definida por

$$r_* \equiv \frac{\Delta_T^2(k_*)}{\Delta_S^2(k_*)}. \quad (5.52)$$

Fazendo a substituição dos termos (5.34) e (5.35) em (5.52) tem-se então

$$r_* = 16\varepsilon_V = -8\eta_T. \quad (5.53)$$

De posse da (5.51) e (5.53), tem-se a relação dos parâmetros medidos experimentalmente com os parâmetros de *slow-roll* que descrevem a dinâmica do regime inflacionário.

5.4 Modelos de Inflação Caótica

Como mencionado anteriormente na seção 4.3, os modelos inflacionários com potencial caótico (LINDE, 1983) não possuem os problemas dos cenários originais propostos por Alan Guth (GUTH, 1981), Andrei Linde (LINDE, 1982) e Albrecht e Steinhardt (ALBRECHT; STEINHARDT, 1982). Embora esses modelos funcionem mesmo para potenciais simples, também possuem problemas que serão discutidos posteriormente. A seguir, serão discutidos alguns exemplos de potenciais utilizados em modelos de inflação caótica.

5.4.1 Modelo Básico

Considere um modelo com potencial tipo oscilador harmônico $V(\varphi) = \frac{m^2}{2}\varphi^2$, o qual, possui o valor mínimo em $\varphi = 0$. Calculando-se o termo $\frac{dV}{d\varphi}$ e substituindo-se na equação (5.4), tem-se a equação de campo para esse potencial:

$$\ddot{\varphi} + 3H\dot{\varphi} = -m^2\varphi, \quad (5.54)$$

em que o termo $3H\dot{\varphi}$ é interpretado como um termo de fricção, isto é, um termo de amortecimento do inflaton.

Supondo que na inflação a contribuição dominante vem de ρ_ϕ , a substituição de (5.2) em (2.16), conduz a equação de Friedman na forma

$$H^2 + \frac{K}{a^2} = \frac{1}{6} (\dot{\phi}^2 + m^2 \phi^2), \quad (5.55)$$

assumindo $c = 1$, $8\pi G = 1$ e $K = -1, 0, 1$. Como visto na seção 5.2, $\dot{\phi} \sim 0$ e $\phi \approx 0$. Além disso, no início da inflação o campo ϕ deve ser muito maior do que o seu valor no final da inflação. Desse modo, impõe-se que $H^2 \sim m^2 \phi^2$ no início da inflação, ou seja, a escala de H é determinada pelo inflaton. Devido ao crescimento exponencial da escala do universo e ao comportamento relativamente lento do campo, obtém-se de (5.54) e (5.55) as condições (LINDE, 2008)

$$\dot{\phi} \ll 3H\phi \quad , \quad H^2 \gg \frac{K}{a^2} \quad \text{e} \quad \phi^2 \ll m^2 \phi^2, \quad (5.56)$$

que permitem escrever

$$H(t) = \frac{\dot{a}}{a} = \frac{m}{\sqrt{6}} \phi(t) \quad (5.57)$$

e

$$\dot{\phi} = \frac{d\phi}{dt} = -m\sqrt{\frac{2}{3}}. \quad (5.58)$$

Utilizando (5.58) e sabendo que no final da inflação tem-se $\phi_f \approx 0$, pode-se escrever

$$\int_{\phi_0}^0 d\phi = -m\sqrt{\frac{2}{3}} \int_{t=0}^{t_f} dt \quad (5.59)$$

e

$$\phi_0 = m\sqrt{\frac{2}{3}} t_f. \quad (5.60)$$

De modo que ϕ_0 é o valor do campo no início da inflação e t_f o instante de tempo no fim da inflação. Além disso, a partir de (5.57) pode-se obter também

$$a(t_f) = a_0 \exp \left[\frac{m}{\sqrt{6}} \int_0^{t_f} \phi(t') dt' \right]. \quad (5.61)$$

Integrando novamente a relação (5.58)

$$\phi(t) = -m\sqrt{\frac{2}{3}} t + C. \quad (5.62)$$

Para determinar o valor da constante C , utiliza-se novamente a condição $\dot{\varphi}(t_f) = 0$, chegando-se em

$$C = m\sqrt{\frac{2}{3}}t_f = \varphi_0. \quad (5.63)$$

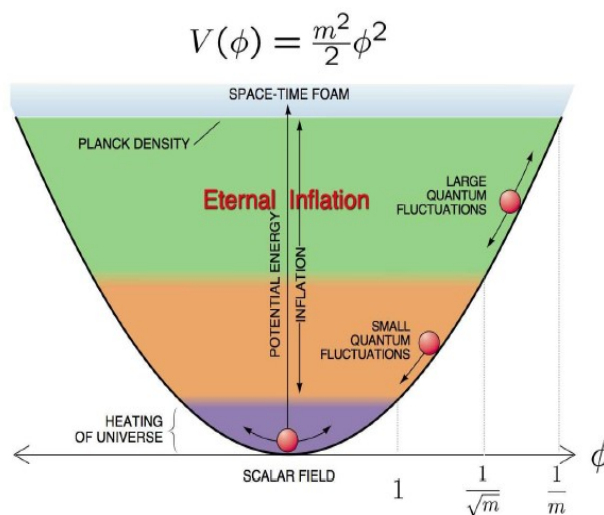
Por fim, combinando (5.62) com (5.63) e substituindo em (5.61) obtém-se

$$a(t_f) = a_0 \exp\left[\frac{\varphi_0^2}{4}\right], \quad (5.64)$$

mostrando que o potencial $V(\varphi) = \frac{m^2}{2}\varphi^2$ produz uma expansão exponencial típica de um modelo inflacionário. Desse modo, o valor do campo φ_0 no início da inflação determina o tamanho da expansão no final do regime inflacionário.

A dinâmica desse cenário pode ser melhor entendida a partir da figura 5.1. O modelo possui duas escalas de massa: a massa de Planck M_{Pl} e a massa m do inflaton. A massa de Planck é característica do início da inflação. A massa do campo não precisa necessariamente ser da ordem da massa de Planck e, de fato, fornece uma escala de energia para o final da inflação. Na fase em que $-1 \leq \frac{\dot{\varphi}}{m} \leq 1$, a oscilação amortecida do inflaton vai gerar o conteúdo do universo observado na era da radiação e que será o conteúdo dominante conforme o inflaton vai perdendo energia.

Figura 5.1 – Gráfico do potencial $V = \frac{m^2}{2}\phi^2$ em função do campo inflaton



Fonte: (LINDE, 2008).

5.4.2 Modelo Geral para Inflação Caótica

O modelo de Inflação Caótica pode ser generalizado pelo potencial (PIATTELLA, 2018)

$$V(\varphi) = \lambda_n \frac{\varphi^n}{n} \quad (5.65)$$

em que λ_n é a constante de acoplamento e n é arbitrário. A partir de (5.65) pode-se determinar os parâmetros de *slow-roll* ε_V e η_V . Posteriormente, esses parâmetros serão utilizados para obter os observáveis n_S e r e relacionados com o número de *e-folds* N . Desse modo, calculam-se as derivadas $\frac{dV}{d\varphi}$ e $\frac{d^2V}{d\varphi^2}$ a partir de (5.65) e substitui-se nas equações (5.20) e (5.25) para obter

$$\varepsilon_V = \frac{n^2}{16\pi G\varphi^2} \quad (5.66)$$

e

$$\eta_V = \frac{n(n-1)}{8\pi G\varphi^2}. \quad (5.67)$$

No final da inflação deve-se ter $\ddot{a} \approx 0$. Usando essa condição na equação (5.9) tem-se $\varepsilon \approx \varepsilon_V \approx 1$, resultando da (5.66) em

$$\varphi_f = \frac{n}{\sqrt{16\pi G}}, \quad (5.68)$$

em que φ_f é o valor do inflaton no final da inflação. Substituindo (5.65), (5.68) e $V' = \lambda \varphi^{n-1}$ em (5.31) obtêm-se

$$N = \frac{8\pi G}{n} \int_{\varphi_f}^{\varphi_i} \varphi d\varphi = \frac{4\pi G}{n} \left(\varphi_i^2 - \frac{n^2}{16\pi G} \right) \quad (5.69)$$

e conseqüentemente

$$\varphi_i^2 = \frac{n}{4\pi G} \left(N + \frac{n}{4} \right). \quad (5.70)$$

Em (5.69) foi utilizado $N_i = 0$. Substituindo (5.70) em (5.66) e (5.67) tem-se os parâmetros de *slow-roll* em função do número de *e-folds*

$$\varepsilon_V = \frac{n}{4N+n} \quad (5.71)$$

e

$$\eta_V = \frac{2(n-1)}{4N+n}. \quad (5.72)$$

Por fim, substituindo (5.71) e (5.72) em (5.51) e (5.71) em (5.53) têm-se, respectivamente, o índice espectral escalar e a razão tensor-escalar em função do número de *e-folds*:

$$n_S - 1 = -\frac{2(n+2)}{4N+n} \quad (5.73)$$

e

$$r = \frac{16n}{4N+n}. \quad (5.74)$$

5.4.3 Comparação dos valores de n_S e r com os dados observacionais

A partir dos resultados (5.73) e (5.74), obtidos na seção anterior, é possível testar potenciais da forma (5.65) e verificar quais seriam os mais adequados à descrição da inflação primordial. A seguir serão calculados os valores teóricos de n_S e r para diferentes escolhas de n . O propósito é comparar o valor teórico com os resultados experimentais da tabela 5.1 obtidos a partir da CMB (AGHANIM et al., 2018).

Tabela 5.1 – Valores experimentais dos parâmetros obtidos a partir da CMB

Parâmetro	Símbolo	Valor
Índice espectral escalar	η_S	0.9652 ± 0.0042
Razão tensor escalar	r	< 0.106
Amplitude de espectro escalar	A_S	$(2.21 \pm 0.07) \times 10^{-9}$

Uma vez que as observações das anisotropias da CMB sugerem que o número de *e-folds* deva estar limitado entre $50 < N < 60$ (ADE et al., 2016), nas comparações que seguem será utilizado $N = 60$.

5.4.3.1 Potencial Linear

Escolhendo inicialmente $n = 1$ na relação (5.65), tem-se o potencial linear

$$V(\varphi) = \lambda_1 \varphi. \quad (5.75)$$

Utilizando as equações (5.73) e (5.74) e tomando $N = 60$, obtêm-se para esse potencial

$$n_S = 0.9751 \quad r = 0.0663. \quad (5.76)$$

Embora os resultados dos parâmetros observáveis estejam dentro valor esperado, esse tipo de potencial possui problemas de implementação. O potencial não é limitado inferiormente e não possibilita a descrição de um período de aquecimento, fase em que seria produzido o conteúdo de matéria e energia necessários para a era da radiação.

5.4.3.2 Potencial $\frac{\lambda_2 \varphi^2}{2}$

De maneira análoga pode-se fazer para $n = 2$, obtendo o potencial do tipo oscilador harmônico

$$V(\varphi) = \lambda_2 \frac{\varphi^2}{2}. \quad (5.77)$$

Escolhendo $N = 60$ e utilizando novamente (5.73) e (5.74) tem-se

$$n_S = 0.9669 \quad r = 0.1322, \quad (5.78)$$

forneendo um bom resultado para n_S de acordo com a tabela 5.1 dos observáveis, porém não satisfazendo a condição $r < 0.106$.

5.4.3.3 Potencial $\frac{\lambda_4 \varphi^4}{4}$

Por fim, para $n = 4$ tem-se o modelo para o potencial do tipo

$$V(\varphi) = \frac{\lambda_4 \varphi^4}{4}. \quad (5.79)$$

Para esse caso, escolhendo mais uma vez $N = 60$ e utilizando (5.73) e (5.74) obtêm-se

$$n_S = 0.9510 \quad r = 0.2622. \quad (5.80)$$

Da tabela 5.1, nota-se portanto que esse potencial possui o mesmo problema do caso anterior, isto é, não satisfaz a condição $r < 0.106$.

5.5 O Modelo de Starobinsky

O modelo de Starobinsky (STAROBINSKY, 1987) é um caso particular de uma teoria $f(R)$ em que

$$f(R) = R + \frac{R^2}{6M^2}. \quad (5.81)$$

Note que o primeiro termo na (5.81) corresponde a TRG, enquanto que o segundo introduz uma correção quadrática no escalar de curvatura R . Uma vez que essa correção deve ser muito pequena, espera-se que a escala M seja suficientemente grande de modo que o termo R^2 possa ser interpretado como uma perturbação na TRG.

É possível mostrar que qualquer teoria $f(R)$ equivale à TRG acoplada a um campo escalar (SOTIRIOU; FARAONI, 2010). Mas precisamente, dada a ação

$$S = \frac{M_{Pl}^2}{2} \int dx^4 \sqrt{-g} f(R) \quad (5.82)$$

de uma teoria $f(R)$, mostra-se que no formalismo da métrica essa teoria é equivalente à

$$S = \int dx^4 \sqrt{-g} \left[\frac{M_{Pl}^2}{2} R - \frac{1}{2} g^{\mu\nu} \partial_\mu \varphi \partial_\nu \varphi - V(\varphi) \right] \quad (5.83)$$

com a identificação

$$V \equiv \frac{M_{Pl}^2}{2(df/dR)^2} \left(R \frac{df}{dR} - f \right) \quad (5.84)$$

e

$$\varphi \equiv \sqrt{\frac{3}{2}} M_{Pl} \ln \frac{df}{dR}. \quad (5.85)$$

Para verificar isso explicitamente, deve-se substituir (5.84) e (5.85) em (5.83).

Substituindo (5.81) em (5.84) e (5.85) obtêm-se

$$V = \frac{3}{4} \frac{M_{Pl}^2 M^2}{(R + 3M^2)^2} R^2 \quad (5.86)$$

e

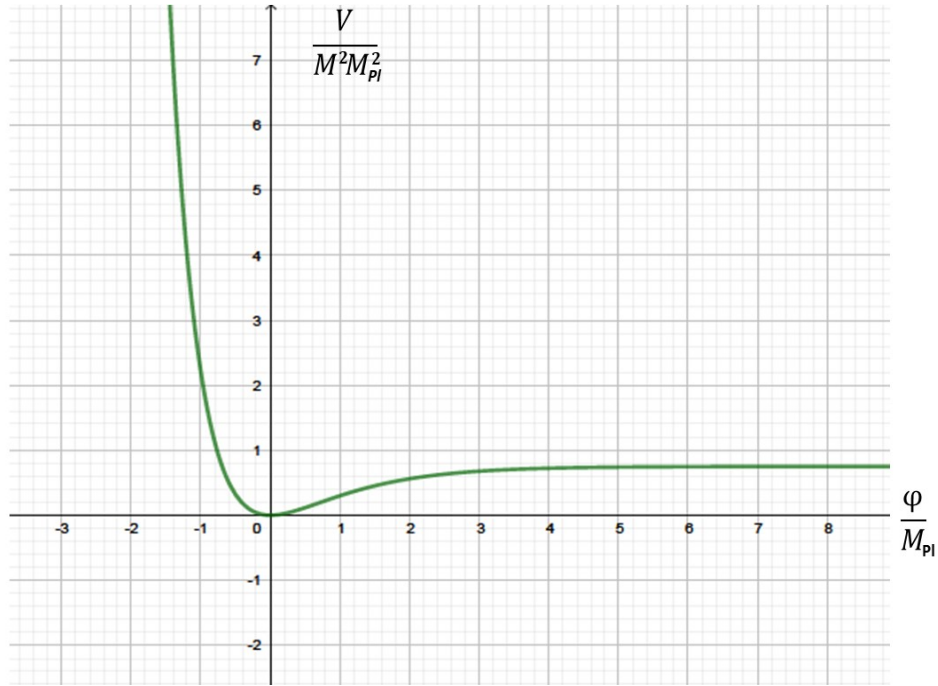
$$\varphi = \sqrt{\frac{3}{2}} \ln \left(\frac{R + 3M^2}{3M^2} \right) M_{Pl}. \quad (5.87)$$

Isolando o escalar de curvatura R em (5.87) e substituindo em (5.86) obtêm-se

$$V(\varphi) = \frac{3}{4} M_{Pl}^2 M^2 \left[1 - \exp \left(-\sqrt{\frac{2}{3}} \frac{\varphi}{M_{Pl}} \right) \right]^2. \quad (5.88)$$

A partir da figura 5.2, verifica-se que o potencial (5.88) reproduz qualitativamente o regime de rolamento lento mostrado na seção 5.1. Isso pode ser observado na figura já que $V/M_{Pl}^2 M^2$ permanece praticamente constante para $\varphi/M_{Pl} \gg 1$. A inflação termina quando o campo oscila em torno do mínimo do potencial em $\varphi/M_{Pl} = 0$.

Figura 5.2 – Gráfico de $V/M^2M_{Pl}^2$ em função de ϕ/M_{Pl} . A inflação ocorre ao longo do platô e termina por volta de $\phi/M_{Pl} = 1$.



Fonte: Autor (2020).

Para uma análise mais precisa, calculam-se os parâmetros de *slow-roll* ϵ_V e η_V para o potencial de Starobinsky na forma (5.88) a partir das definições (5.20) e (5.25). Substituindo (5.88) e as derivadas de V em (5.20) e (5.25), obtêm-se

$$\epsilon_V = \frac{4}{3} \frac{\exp\left(-2\sqrt{\frac{2}{3}}\frac{\phi}{M_{Pl}}\right)}{\left[1 - \exp\left(-\sqrt{\frac{2}{3}}\frac{\phi}{M_{Pl}}\right)\right]^2} \quad (5.89)$$

e

$$\eta_V = \frac{4}{3} \frac{\left[2\exp\left(-2\sqrt{\frac{2}{3}}\frac{\phi}{M_{Pl}}\right) - \exp\left(-\sqrt{\frac{2}{3}}\frac{\phi}{M_{Pl}}\right)\right]}{\left[1 - \exp\left(-\sqrt{\frac{2}{3}}\frac{\phi}{M_{Pl}}\right)\right]^2}. \quad (5.90)$$

As expressões a cima são válidas durante o período de inflação, portanto devem satisfazer a condição $\epsilon_V \ll 1$ e $\eta_V \ll 1$.

O número de e -folds N pode ser calculado substituindo a expressão do potencial (5.88) e a sua derivada em relação a φ na integral (5.31) resultando em

$$N = \frac{1}{M_{Pl}} \sqrt{\frac{3}{8}} \int_{\varphi_f}^{\varphi} \left[\exp\left(\sqrt{\frac{2}{3}} \frac{\varphi'}{M_{Pl}}\right) - 1 \right] d\varphi' \approx \frac{3}{4} \exp\left(\sqrt{\frac{2}{3}} \frac{\varphi}{M_{Pl}}\right). \quad (5.91)$$

Na expressão a cima foi utilizado que no final da inflação $\varphi_f = 0$ e $N_i = 0$, e que o termo da expansão é dominante para $\frac{\varphi}{M_{Pl}} \sim 1$. Substituindo (5.91) em (5.89) e (5.90) obtêm-se

$$\varepsilon_V = \frac{12}{(4N-3)^2} \quad \text{e} \quad \eta_V = 4 \frac{6-4N}{(4N-3)^2}, \quad (5.92)$$

de modo que para $N \gg 1$ pode-se escrever

$$\varepsilon_V \approx \frac{3}{4N^2} \quad (5.93)$$

e

$$\eta_V \approx -\frac{1}{N}. \quad (5.94)$$

Substituindo (5.93) e (5.94) em (5.51) e (5.53) e desprezando termos de ordem N^2 na expressão para n_S , obtêm-se a relação dos índices espectrais em função do número de e -folds para o modelo

$$n_S = 1 - \frac{2}{N} \quad (5.95)$$

e

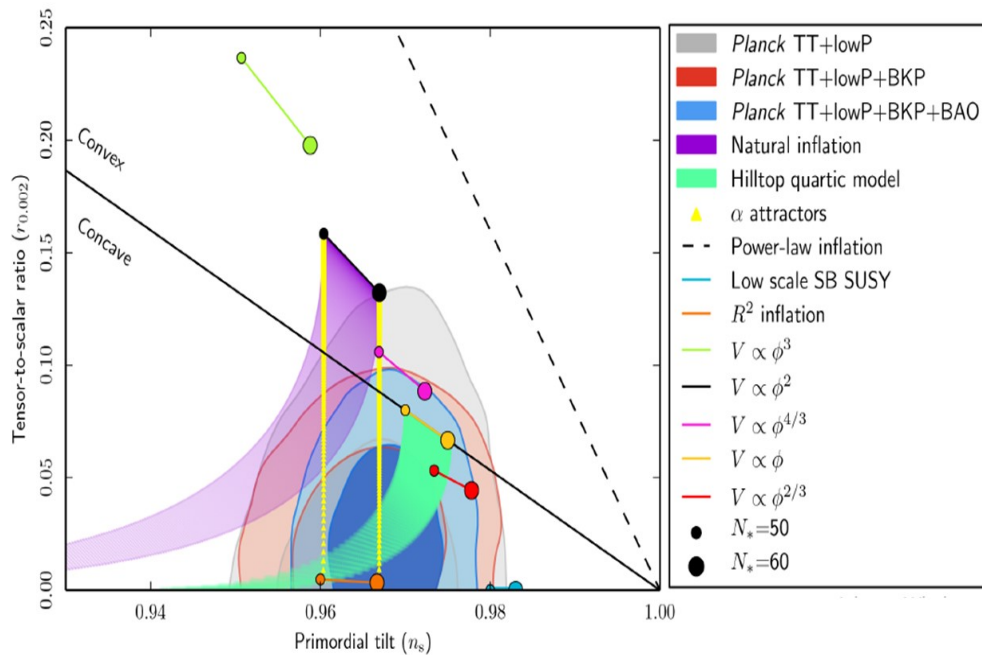
$$r = \frac{12}{N^2}. \quad (5.96)$$

Desse modo, pode-se calcular os valores dos índices espectrais n_S e r no modelo de Starobinsky e comparar com os resultados das observações exibidos na tabela (5.1). Para $N = 60$, por exemplo, obtêm-se

$$n_S = 0.966 \quad \text{e} \quad r = 0.0033, \quad (5.97)$$

o qual esta em boa concordância com o resultado experimental. Uma análise mais robusta é dada na figura 5.3, em que o modelo de Starobinsky é comparado com diferentes modelos inflacionários à luz dos dados fornecidos pela missão Planck. No que concerne aos parâmetros n_S e r , o modelo de Starobinsky (R^2 inflation) é o mais favorecidos quando diferentes tipos de medidas são combinadas (veja a região destacada em azul no gráfico) (ADE et al., 2016).

Figura 5.3 – Espaço de parâmetros (n_s, r_*) . Na horizontal tem-se o índice espectral escalar n_s e na vertical a razão tensor-escalar r_* .



Fonte: (ADE et al., 2016).

Uma crítica ao modelo de Starobinsky é a introdução apenas da correção proporcional a R^2 modificando a ação de Einstein-Hilbert. Essa escolha não está fundamentada em primeiros princípios, introduzindo uma arbitrariedade no modelo. De fato, do ponto de vista fenomenológico, um termo proporcional a R^3 pode ser introduzido e ajustado para reproduzir satisfatoriamente os resultados obtidos pela missão Planck (ASAKA et al., 2016). Contudo, o modelo de Starobinsky continua sendo uma referência para a cosmologia inflacionária, sendo aplicado inclusive à fenomenologia da inflação no contexto da gravitação quântica (BONGA; GUPT, 2016).

6 CONSIDERAÇÕES FINAIS

O presente trabalho expõe uma revisão dos diferentes cenários de inflação cósmica primordial, tendo como fim a compreensão do status atual da inflação na cosmologia. Também discute-se sucintamente os fundamentos da Relatividade Geral e sua aplicação à cosmologia.

A partir da métrica de Friedmann-Lemaître-Robertson-Walker mostrou-se como construir um modelo cosmológico que descreve com boa aproximação a evolução do universo, o modelo Λ CDM. Embora seja o modelo mais aceito atualmente, o Λ CDM ainda é considerado conceitualmente insatisfatório por não explicar o problema da planura e o problema do horizonte. Os problemas foram solucionados no início da década de 80 por Alan Guth ao postular que, antes da era da radiação, houve uma fase de expansão exponencial acelerada. Ao final dessa fase de inflação, as condições necessárias para o Λ CDM são estabelecidas. Apesar disso, o modelo inflacionário original é incompatível com a alta homogeneidade do universo, especialmente observada através das medidas de anisotropia da radiação cósmica de fundo, como foi discutido em detalhes na seção 4.1.

Apesar de não ter tido êxito, a ideia geral da inflação apresentada pelo cenário de Guth permaneceu válida. Desse modo, Andrei Linde, Andreas Albrecht e Paul Steinhardt propuseram modelos que contornam as dificuldades do modelo inflacionário original. Cenários como o da Nova Inflação e da Inflação Caótica ganharam visibilidade. Porém, como mencionado nas seções 4.2 e 4.3, também apresentaram problemas.

Além disso, foi discutido a partir da seção 5.1 modelos de inflação descritos por um único campo escalar, sujeitos a um potencial que obedece a um regime de rolamento lento (*slow-roll*). Na seção 5.2, definiu-se os parâmetros de *slow-roll*, utilizados para nortear a dinâmica da inflação. A conexão com os dados observacionais ocorre através da relação dos parâmetros de *slow-roll* ϵ_V e η_V com os parâmetros observáveis n_S e r_* , obtidos através das medidas experimentais das anisotropia da radiação cósmica de fundo.

Desse modo, a partir da conexão entre teoria e observação, é possível restringir a escolha de modelos inflacionários. As observações da CMB favorecem os potenciais sujeitos ao regime de *slow-roll*, em particular, o modelo Starobinsky. Embora com críticas isoladas, atualmente esse modelo continua sendo de grande interesse em estudos fenomenológicos.

Contudo, apesar do intenso trabalho desenvolvido na cosmologia inflacionária, a escolha de um cenários inflacionário baseado em primeiros princípios ainda é um problema em aberto. Essa linha de pesquisa apresenta uma importante interface com a física de partículas

elementares e a teoria quântica de campos. Uma perspectiva para o futuro seria explorar essa conexão com teorias de campos que incorporam efeitos oriundos da escala de Planck. Uma classe importante desses modelos são os que contém violações da simetria de Lorentz de acordo com o *Standart Model Extension* (COLLADAY; KOSTELECKY, 1998).

REFERÊNCIAS

- ADE, P. et al. Planck 2015 results-xx. constraints on inflation. **Astronomy & Astrophysics**, EDP sciences, v. 594, p. A20, 2016.
- AGHANIM, N. et al. Planck 2018 results. VI. Cosmological parameters. 7, 2018.
- ALBRECHT, A.; STEINHARDT, P. J. Cosmology for grand unified theories with radiatively induced symmetry breaking. **Physical Review Letters**, APS, v. 48, n. 17, p. 1220, 1982.
- ASAKA, T. et al. Reinterpretation of the starobinsky model. **Progress of Theoretical and Experimental Physics**, Oxford University Press, v. 2016, n. 12, p. 123E01, 2016.
- BAGDONAS, A.; ZANETIC, J.; GURGEL, I. Quem descobriu a expansao do universo? disputas de prioridade como forma de ensinar cosmologia com uso da história e filosofia da ciência. **Revista Brasileira de Ensino de Física**, v. 39, n. 2, p. e2602, 2017.
- BERRY, M. V. **Principles of cosmology and gravitation**. [S.l.]: CRC Press, 1989.
- BONGA, B.; GUPT, B. Phenomenological investigation of a quantum gravity extension of inflation with the Starobinsky potential. **Phys. Rev. D**, v. 93, n. 6, p. 063513, 2016.
- CHOWDHURY, D. et al. Assessing the scientific status of inflation after planck. **Physical Review D**, APS, v. 100, n. 8, p. 083537, 2019.
- CHOWDHURY, D. et al. Inflation after planck: Judgment day. **arXiv preprint arXiv:1902.03951**, 2019.
- CLEMENTS, D. L. An Introduction to the Planck Mission. **Contemp. Phys.**, v. 58, n. 4, p. 331–348, 2017.
- COLEMAN, S. Fate of the false vacuum: Semiclassical theory. **Physical Review D**, APS, v. 15, n. 10, p. 2929, 1977.
- COLEMAN, S.; LUCCIA, F. D. Gravitational effects on and of vacuum decay. **Physical Review D**, APS, v. 21, n. 12, p. 3305, 1980.
- COLEMAN, S.; WEINBERG, E. Radiative corrections as the origin of spontaneous symmetry breaking. **Physical Review D**, APS, v. 7, n. 6, p. 1888, 1973.
- COLLADAY, D.; KOSTELECKY, V. Lorentz violating extension of the standard model. **Phys. Rev. D**, v. 58, p. 116002, 1998.
- EINSTEIN, A. The Field Equations of Gravitation. **Sitzungsber. Preuss. Akad. Wiss. Berlin (Math. Phys.)**, v. 1915, p. 844–847, 1915.
- EINSTEIN, A. Cosmological Considerations in the General Theory of Relativity. **Sitzungsber. Preuss. Akad. Wiss. Berlin (Math. Phys.)**, v. 1917, p. 142–152, 1917.
- EISENSTEIN, D. J. et al. Detection of the baryon acoustic peak in the large-scale correlation function of sdss luminous red galaxies. **The Astrophysical Journal**, IOP Publishing, v. 633, n. 2, p. 560, 2005.

- FABRIS, J.; VELTEN, H. Cosmologia neo-newtoniana: um passo intermediário em direção à relatividade geral. **Revista Brasileira de Ensino de Física.**, v. 34, n. arXiv: 1207.0060, p. 4302, 2012.
- FALCIANO, F. Geometria, espaço-tempo e gravitação: conexão entre conceitos da relatividade geral. **Revista Brasileira de Ensino de Física**, v. 31, n. 4, p. 4308, 2009.
- FRIEDMANN, A. On the Possibility of a world with constant negative curvature of space. **Z. Phys.**, v. 21, p. 326–332, 1924.
- GALERIA DO METEORITO. **Geometrias do Universo**. 2019. Disponível em: <<https://www.galeriadometeorito.com/2018/06/qual-e-o-formato-do-universo.html>>. Acesso em: 16 ago. 2019.
- GOMES, M. O. C. **Teoria Quântica dos Campos Vol. 39**. [S.l.]: Edusp, 2002.
- GUTH, A. H. Inflationary universe: A possible solution to the horizon and flatness problems. **Physical Review D**, APS, v. 23, n. 2, p. 347, 1981.
- GUTH, A. H.; KAISER, D. I.; NOMURA, Y. Inflationary paradigm after Planck 2013. **Phys. Lett. B**, v. 733, p. 112–119, 2014.
- GUTH, A. H.; WEINBERG, E. J. Could the universe have recovered from a slow first-order phase transition? **Nuclear Physics B**, Elsevier, v. 212, n. 2, p. 321–364, 1983.
- HOBSON, M. P.; EFSTATHIOU, G. P.; LASENBY, A. N. **General relativity: an introduction for physicists**. [S.l.]: Cambridge University Press, 2006.
- IJJAS, A.; STEINHARDT, P. J.; LOEB, A. Inflationary paradigm in trouble after Planck2013. **Phys. Lett. B**, v. 723, p. 261–266, 2013.
- JR, C. G. C.; COLEMAN, S. Fate of the false vacuum. ii. first quantum corrections. **Physical Review D**, APS, v. 16, n. 6, p. 1762, 1977.
- LIMA, J.; SANTOS, R. 100 years of relativistic cosmology (1917–2017). part i: From origins to the discovery of universal expansion (1929). **Revista Brasileira de Ensino de Física**, v. 40, n. 1, 2018.
- LINDE, A. Prospects of inflation. **Physica Scripta**, IOP Publishing, v. 2005, n. T117, p. 40, 2005.
- LINDE, A. Inflationary cosmology. In: **Inflationary Cosmology**. [S.l.]: Springer, 2008. p. 1–54.
- LINDE, A. On the problem of initial conditions for inflation. **Found. Phys.**, v. 48, n. 10, p. 1246–1260, 2018.
- LINDE, A. D. A new inflationary universe scenario: a possible solution of the horizon, flatness, homogeneity, isotropy and primordial monopole problems. **Physics Letters B**, Elsevier, v. 108, n. 6, p. 389–393, 1982.
- LINDE, A. D. Chaotic Inflation. **Phys. Lett.**, v. 129B, p. 177–181, 1983.
- MARTIN, J. The theory of inflation. **arXiv preprint arXiv:1807.11075**, 2018.

MARTIN, J. Cosmic inflation: Trick or treat? **arXiv preprint arXiv:1902.05286**, 2019.

MARTIN, J.; RINGEVAL, C.; VENNIN, V. Encyclopædia inflationaris. **Physics of the Dark Universe**, Elsevier, v. 5, p. 75–235, 2014.

MATHER, J. C. et al. A preliminary measurement of the cosmic microwave background spectrum by the cosmic background explorer (cobe) satellite. **The Astrophysical Journal**, v. 354, p. L37–L40, 1990.

PENZIAS, A. A.; WILSON, R. W. A measurement of excess antenna temperature at 4080 mc/s. **The Astrophysical Journal**, v. 142, p. 419–421, 1965.

PERLMUTTER, S. et al. Measurements of omega and lambda from 42 high-redshift supernovae. **The Astrophysical Journal**, v. 517, n. 2, p. 565–586, 1999.

PIATTELLA, O. **Lecture notes in cosmology**. [S.l.], 2018.

RIESS, A. G. et al. Observational evidence from supernovae for an accelerating universe and a cosmological constant. **The Astronomical Journal**, IOP Publishing, v. 116, n. 3, p. 1009, 1998.

SMOOT, G. F. et al. Structure in the cobe differential microwave radiometer first-year maps. **The Astrophysical Journal**, v. 396, p. L1–L5, 1992.

SOARES, D. O universo estático de einstein. **Revista Brasileira de Ensino de Física**, v. 34, n. 1, p. 1302, 2012.

SOTIRIOU, T. P.; FARAONI, V. f (r) theories of gravity. **Reviews of Modern Physics**, APS, v. 82, n. 1, p. 451, 2010.

STAROBINSKY, A. A. A New Type of Isotropic Cosmological Models Without Singularity. **Adv. Ser. Astrophys. Cosmol.**, v. 3, p. 130–133, 1987.

VIGLIONI, A.; SOARES, D. Observações sobre as soluções clássicas da equação de friedmann. **Rev. Bras. Ensino Fis**, 2011.

WAGA, I. Cem anos de descobertas em cosmologia e novos desafios para o século xxi. **Revista Brasileira de Ensino de Física**, v. 27, n. 1, p. 157–173, 2005.

WEINBERG, E. J. Some problems with extended inflation. **Physical Review D**, APS, v. 40, n. 12, p. 3950, 1989.

WEINBERG, S. **Cosmology**. [S.l.]: Oxford university press, 2008.

WEINBERG, S. **Gravitation and Cosmology: Principles and Applications of the General Theory of Relativity**. [S.l.]: John Wiley and sons, 2014.