



JAQUELINE GONÇALVES FERNANDES

**MODELOS NÃO LINEARES DUPLO SIGMOIDAIS:
UMA APLICAÇÃO PARA DESCRIÇÃO DO CRESCIMENTO DE
FRUTOS DO PESSEGUEIRO**

LAVRAS – MG

2020

JAQUELINE GONÇALVES FERNANDES

**MODELOS NÃO LINEARES DUPLO SIGMOIDAIS:
UMA APLICAÇÃO PARA DESCRIÇÃO DO CRESCIMENTO DE FRUTOS DO
PESSEGUEIRO**

Tese apresentada à Universidade Federal de Lavras como parte das exigências do Programa de Pós-graduação em Estatística e Experimentação Agropecuária, área de concentração Estatística e Experimentação Agropecuária para a obtenção do título de *Doctor Science*.

Prof. Dr. Joel Augusto Muniz
Orientador

Prof. Dr. Tales Jesus Fernandes
Coorientador

**LAVRAS – MG
2020**

**Ficha catalográfica elaborada pelo Sistema de Geração de Ficha Catalográfica da Biblioteca
Universitária da UFLA, com dados informados pelo(a) próprio(a) autor(a).**

Fernandes, Jaqueline Gonçalves

Modelos não lineares duplo sigmoidais : Uma aplicação
para descrição do crescimento de frutos do pessegueiro /
Jaqueline Gonçalves Fernandes. – Lavras : UFLA, 2020.

103 p. : il.

Tese(doutorado)–Universidade Federal de Lavras, 2020.

Orientador: Prof. Dr. Joel Augusto Muniz.

Bibliografia.

1. Pêssego Aurora. 2. Modelos difásicos. 3. Modelos
Generalizados I. Muniz, Joel Augusto. II. Fernandes, Tales
Jesus.

JAQUELINE GONÇALVES FERNANDES

**MODELOS NÃO LINEARES DUPLO SIGMOIDAIIS: UMA APLICAÇÃO PARA
DESCRIÇÃO DO CRESCIMENTO DE FRUTOS DO PESSEGUEIRO**

Tese apresentada à Universidade Federal de Lavras como parte das exigências do Programa de Pós-graduação em Estatística e Experimentação Agropecuária, área de concentração Estatística e Experimentação Agropecuária para a obtenção do título de *Doctor Science*.

APROVADA em 15 de junho de 2020.

Prof. Dr. Joel Augusto Muniz	UFLA
Prof. Dr. Tales Jesus Fernandes	UFLA
Profa. Dra. Adriele Aparecida Pereira	UNIFAL
Prof. Dr. Paulo Henrique Sales de Guimarães	UFLA

Prof. Dr. Joel Augusto Muniz
Orientador

Prof. Dr. Tales Jesus Fernandes
Co-Orientador

**LAVRAS – MG
2020**

À minha mãezinha, Nossa Senhora da Conceição.

AGRADECIMENTOS

Agradeço a Deus pela vida e saúde.

Obrigada Santa Terezinha por estar sempre me guiando.

Obrigada aos meus pais, Osvaldo e Mercês, por todo amor e carinho.

Obrigada à minha irmã Janaina pelo incentivo e cumplicidade.

Obrigada ao meu orientador, professor Joel, pelo acompanhamento e auxílio no desenvolvimento de todo trabalho, além do apoio às minhas escolhas durante esse processo.

Obrigada a todos os professores que aceitaram contribuir, doando parte do seu tempo e conhecimento para participar da banca de defesa.

Obrigada aos queridos professores que fizeram parte dessa jornada, começando pelos da escola até a pós graduação.

Obrigada aos amigos do departamento, sempre dispostos a ajudar, compartilhar conhecimento e companhia. Agradeço também, pelos momentos de descontração e por fazerem parte dessa etapa tão importante.

Obrigada à Universidade Federal de Lavras, especialmente ao Departamento de Estatística por poder desenvolver esse trabalho.

Obrigada a Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior pelo financiamento.

E obrigada a todos que de alguma forma participaram e me auxiliaram nesse percurso de aprendizados.

O presente trabalho foi realizado com apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior – Brasil (CAPES) – Código de Financiamento 001.

RESUMO GERAL

O Brasil é o décimo segundo maior produtor mundial de pêssego, sendo a maior concentração localizada no Rio Grande do Sul. A forma de manuseio do fruto após a colheita é uma das etapas mais importantes do processo de produção já que nessa fase ocorrem as maiores perdas. Dessa forma, é necessário estudar suas etapas de desenvolvimento para auxiliar produtores a tomar decisões quanto ao manejo no campo e principalmente a colheita. A curva de crescimento do pêssego é dividida em três estádios diferentes, caracterizando um formato duplo sigmóide. A primeira fase é caracterizada pelo crescimento acelerado da semente e o desenvolvimento do endocarpo, em seguida o fruto passa a crescer de forma mais lenta devido a mudanças fisiológicas e anatômicas e, por fim, na terceira fase do crescimento percebe-se o aumento do volume celular juntamente com o processo de maturação. A fim de descrever esse comportamento foram ajustados alguns modelos não lineares com característica duplo sigmóide aos dados de altura e diâmetro polar, medidos em milímetros (mm) de frutos do pessegueiro “Aurora 1”. Os modelos utilizados foram: Brody + Brody, Brody + Gompertz, Brody + Logístico, Gompertz + Brody, Gompertz + Gompertz, Gompertz + Logístico, Logístico + Logístico, Logístico + Brody, Logístico + Gompertz, Brody Generalizado, Gompertz Generalizado e Logístico Generalizado. Além disso, também foram ajustados modelos considerando a incorporação da heterogeneidade das medidas, incluindo diferentes pesos nas formas de potência simples, potência do logaritmo ou exponencial. A estimação foi realizada a partir do método de mínimos quadrados com o auxílio do algoritmo de Gauss-Newton, implementados no software R versão 4.0.2. Para a análise de resíduos, foram utilizados os testes de Shapiro Wilk, Breusch Pagan, Durbin Watson e algumas análises gráficas. A qualidade do ajuste dos modelos foi verificada com base na análise do coeficiente de determinação ajustado, critério de informação se Akaike corrigido, desvio padrão residual, índice de ajuste da assíntota e medidas de não linearidade. Os resultados encontrados mostram que os modelos não lineares ajustados possibilitam descrever a curva de crescimento para pêssegos “Aurora 1”, contribuindo com informações importantes para otimizar a produção.

Palavras-chave: Biometria. Duplo sigmoidal. Pêssego “Aurora 1”. Regressão não linear.

ABSTRACT

Brazil is the twelfth largest producer of peach in the world, with the highest concentration located in Rio Grande do Sul. The way of handling the fruit after harvest is one of the most important stages of the production process since in this phase the greatest losses occur. Thus, it is necessary to study its stages of development to help producers make decisions regarding management in the field and especially the harvest. The peach growth curve is divided into three different stages, featuring a double sigmoid shape. The first phase is characterized by the accelerated growth of the seed and the development of the endocarp. Then, the fruit starts to grow more slowly due to physiological and anatomical changes. Finally, in the third phase of growth, the cell volume increases along with the maturation process. In order to describe this behavior, some non-linear models with double sigmoid characteristics were adjusted to the height and polar diameter data, measured in millimeters (mm) of peach fruits "Aurora 1". The models used were: Brody + Brody, Brody + Gompertz, Brody + Logistics, Gompertz + Brody, Gompertz + Gompertz, Gompertz + Logistics, Logistics + Logistics, Logistics + Brody, Logistics + Gompertz, Generalized Brody, Generalized Gompertz and Generalized Logistics. In addition, models were also adjusted considering the incorporation of the heterogeneity of the measures, including different weights in the forms of simple power, logarithmic or exponential power. The estimation was performed using the least squares method with the aid of the Gauss-Newton algorithm, implemented in software R version 4.0.2. For the analysis of residues the tests of Shapiro Wilk, Breusch Pagan, Durbin Watson and some graphic analyzes were used. The quality of the fit of the models was verified based on the analysis of the adjusted determination coefficient, information criterion if corrected Akaike, residual standard error, asymptote adjustment index and non-linearity measures. The results found show that the adjusted non-linear models make it possible to describe the growth curve for peaches "Aurora 1", contributing with important information to optimize production.

Keywords: Biometry. Double sigmoidal. Peach "Aurora 1". Nonlinear regression.

LISTA DE FIGURAS

2.1 – Ilustração do fruto de pessegueiro composto pelo pericarpo e semente.	17
2.2 – Curva de desenvolvimento do fruto do pessegueiro (Diâmetro).	17
2.3 – Formato das curvas dos modelos Brody, Gompertz e Logístico para o caso $A = 1$, $B = 0$ e $K = 1$. Sendo A o valor assintótico, correspondente ao valor máximo da variável dependente; K o índice de maturidade ou precocidade e B o ponto de inflexão da curva do modelo.	24
3.1 – Imagens de pêssegos “Aurora-1” cultivados na região de Jaboticabal - SP.	38
4.1 – Gráfico do ajuste de modelos não lineares difásicos para dados de altura de pêssegos “Aurora-1”. BG = Brody + Gompertz, BL = Brody + Logístico, GB = Gompertz + Brody, GG = Gompertz + Gompertz, GL = Gompertz + Logístico, LB = Logístico + Brody, LG = Logístico + Gompertz, LL = Logístico + Logístico.	45
4.2 – Gráfico do ajuste de modelos não lineares difásicos para dados de diâmetro de pêssegos “Aurora-1”. BG = Brody + Gompertz, BL = Brody + Logístico, GB = Gompertz + Brody, GG = Gompertz + Gompertz, GL = Gompertz + Logístico, LB = Logístico + Brody, LG = Logístico + Gompertz, LL = Logístico + Logístico.	46
4.3 – Gráfico da taxa de crescimento (altura) obtida a partir do ajuste do modelo Gompertz + Gompertz.	66
4.4 – Gráfico da aceleração de crescimento (altura) obtida a partir do ajuste do modelo Gompertz + Gompertz.	67
4.5 – Gráfico da taxa de crescimento (altura) obtida a partir do ajuste do modelo Brody generalizado.	68
4.6 – Gráfico da aceleração de crescimento (altura) obtida a partir do ajuste do modelo Brody generalizado.	68
4.7 – Gráfico da taxa de crescimento (diâmetro) obtida a partir do ajuste do modelo Logístico + Gompertz.	69
4.8 – Gráfico da aceleração de crescimento (diâmetro) obtida a partir do ajuste do modelo Logístico + Gompertz.	70
4.9 – Gráfico da taxa de crescimento (diâmetro) obtida a partir do ajuste do modelo Logístico generalizado.	71

4.10 –Gráfico da aceleração de crescimento (diâmetro) obtida a partir do ajuste do modelo Logístico generalizado.	71
4.11 –Gráfico do ajuste de modelos não lineares generalizados e difásicos ajustados a dados de altura de pêssegos “Aurora-1”.	72
4.12 –Gráfico do ajuste de modelos não lineares generalizados e difásicos ajustados a dados de diâmetro de pêssegos “Aurora-1”.	73
4.13 –Média e desvio padrão das medidas de altura e diâmetros de pêssegos ”Aurora-1”.	82
4.14 –Gráfico de resíduos versus quantis teóricos para modelos não lineares Logístico + Gompertz, considerando diferentes comportamentos da variância, ajustados à dados de altura de pêssegos “Aurora-1”.	84
4.15 –Gráfico de resíduos versus quantis teóricos para modelos não lineares Logístico + Gompertz, considerando diferentes comportamentos da variância, ajustados à dados de diâmetro de pêssegos “Aurora-1”.	85
4.16 –Gráfico de resíduos versus valores ajustados para modelos não lineares Gompertz + Gompertz, considerando diferentes comportamentos da variância, ajustados à dados de altura de pêssegos “Aurora-1”.	86
4.17 –Gráfico de resíduos versus valores ajustados para modelos não lineares Logístico + Gompertz, considerando diferentes comportamentos da variância, ajustados à dados de diâmetro de pêssegos “Aurora-1”.	87
4.18 –Gráfico de resíduos versus ordem de coleta dos dados para modelos não lineares Gompertz + Gompertz, considerando diferentes comportamentos da variância, ajustados à dados de altura de pêssegos “Aurora-1”.	88
4.19 –Gráfico de resíduos versus ordem de coleta dos dados para os modelos não lineares Logístico + Gompertz, considerando diferentes comportamentos da variância, ajustados à dados de diâmetro de pêssegos “Aurora-1”.	88
4.20 –Gráfico do ajuste de modelos não lineares Gompertz + Gompertz, considerando diferentes comportamentos para a variância, para dados de altura de pêssegos “Aurora-1”.	90
4.21 –Gráfico do ajuste de modelos não lineares Logístico + Gompertz, considerando diferentes comportamentos para a variância, para dados de diâmetro de pêssegos “Aurora-1”.	90

LISTA DE TABELAS

2.1 – Modelos Brody, Gompertz e Logístico para o caso $A = 1$, $B = 0$ e $K = 1$. Sendo A o valor assintótico, correspondente ao valor máximo da variável dependente; K o índice de maturidade ou precocidade e B o ponto de inflexão da curva do modelo.	23
2.2 – Equações dos modelos não lineares sigmóides difásicos construídos a partir da soma de dois modelos sigmóides simples.	25
4.1 – Estatísticas descritivas das variáveis altura e diâmetro, em milímetros (mm), de pêssegos “Aurora-1”.	40
4.2 – Estimativas dos parâmetros dos modelos não lineares Brody (B), Gompertz (G) e Logístico (L) difásicos ajustados à dados de altura e diâmetro de pêssegos “Aurora-1”.	41
4.3 – Valores-p para os testes de normalidade de Shapiro-Wilk; independência de Durbin-Watson; e homogeneidade de variâncias de Breusch-Pagan para a análise de resíduos dos modelos não lineares Brody (B), Gompertz (G) e Logístico (L) difásicos ajustados à dados de altura e diâmetro de pêssegos “Aurora-1”.	43
4.4 – Medidas da qualidade do ajuste dos modelos não lineares Brody (B), Gompertz (G) e Logístico (L) difásicos ajustados à dados de altura e diâmetro de pêssegos “Aurora-1”.	44
4.5 – Estimativas dos parâmetros de modelos não lineares generalizados ajustados à dados de altura e diâmetro de pêssegos “Aurora-1”.	62
4.6 – Valores-p para os testes de normalidade de Shapiro-Wilk; independência de Durbin-Watson; e homogeneidade de variâncias de Breusch-Pagan para a análise de resíduos de modelos não lineares generalizados ajustados à dados de altura e diâmetro de pêssegos “Aurora-1”.	62
4.7 – Medidas da qualidade do ajuste de modelos não lineares generalizados ajustados ao dados de altura e diâmetro de pêssegos “Aurora-1”.	63
4.8 – Medidas da qualidade do ajuste de modelos não lineares generalizados e difásicos ajustados ao dados de altura e diâmetro de pêssegos “Aurora-1”.	64

4.9 – Estimativa e Erro Padrão dos parâmetros de modelos não lineares Gompertz + Gompertz, considerando diferentes comportamentos da variância, ajustados à dados de altura de pêssegos “Aurora-1”.	83
4.10 – Estimativa e Erro Padrão dos parâmetros de modelos não lineares Logístico + Gompertz, considerando diferentes comportamentos da variância, ajustados à dados de diâmetro de pêssegos “Aurora-1”.	83
4.11 – Valores-p do teste de normalidade de Shapiro-Wilk para a análise de resíduos de modelos não lineares Gompertz + Gompertz e Logístico + Gompertz ajustados, respectivamente, à dados de altura e diâmetro de pêssegos “Aurora-1”.	85
4.12 – Medidas da qualidade do ajuste de modelos não lineares estimado pelo método dos mínimos quadrados generalizados: Gompertz + Gompertz ajustados à dados de altura e Logístico + Gompertz ajustados à dados de diâmetro de pêssegos “Aurora-1” considerando diferentes pesos.	89

SUMÁRIO

CAPÍTULO 1 Descrição da curva de crescimento do fruto do pessegueiro via modelos sigmoidais difásicos.	11
1 Introdução	13
2 Referencial teórico	15
3 Material e métodos	38
4 Resultados e discussão	40
5 Conclusão	47
REFERÊNCIAS	48
CAPÍTULO 2 Comparação de modelos com caráter duplo sigmoidal aplicados na descrição da curva de crescimento do fruto de pessegueiro	54
1 Introdução	57
2 Material e métodos	59
3 Resultados e discussão	62
4 Conclusão	74
REFERÊNCIAS	75
CAPÍTULO 3 Modelos não lineares duplo sigmoidais aplicados a medidas com comportamento heterocedástico ao longo do tempo	77
1 Introdução	79
2 Material e métodos	81
3 Resultados e discussão	82
4 Conclusão	91
REFERÊNCIAS	92
APENDICE A – Derivadas	94
APENDICE B – Script R	101

CAPÍTULO 1 DESCRIÇÃO DA CURVA DE CRESCIMENTO DO FRUTO DO PESSE- GUEIRO VIA MODELOS SIGMOIDAIS DIFÁSICOS.

RESUMO

Frutos de pêssgo apresentam grande importância nacional. O país produz uma quantidade significativa mas ainda não é o suficiente para atender a demanda local, por isso são necessários estudos para que possamos aumentar a produção e também diminuir perdas após a colheita. Modelos de regressão não linear são excelentes ferramentas para estimar parâmetros com interpretação biológica, permitindo realizar inferências e tomadas de decisões importantes. Para estimar os parâmetros desses modelos foi utilizado o método de mínimos quadrados e o algoritmo de Gauss-Newton implementados no software R versão 4.0.2. Os pressupostos de normalidade, homogeneidade e independência dos resíduos foram analisados segundo os testes de Shapiro Wilk, Breusch Pagan e Durbin Watson, respectivamente. A qualidade do ajuste dos modelos foi verificada com base no valor do coeficiente de determinação ajustado (R_a^2), no critério de informação de Akaike corrigido (AICc), no desvio padrão residual (DPR), índice de ajuste da assíntota (IA) e medidas de não linearidade. O modelo duplo Gompertz (GG) foi o que melhor se ajustou aos dados de altura do fruto e o modelo Logístico + Gompertz (LG) foi o que melhor se ajustou aos dados de diâmetro. Concluiu-se que, as medidas de altura e diâmetro do fruto na primeira etapa do processo de crescimento foram de 35,03 mm e 26,22 mm, enquanto que na maturidade chegou a 62,43 mm e 48,12 mm respectivamente. Observou-se também que as idades de 22 e 82 dias e 29 e 81 após o florescimento corresponderam aos tempos em que o fruto atingiu a taxa máxima de crescimento na primeira e na segunda etapa do processo, respectivamente. Além disso, o desenvolvimento da primeira etapa de crescimento foi mais acelerado, correspondendo a 0,14 mm ao dia para altura e 0,19 mm ao dia para diâmetro, ao passo que o índice associado ao desenvolvimento da segunda etapa foi de 0,05 mm ao dia para altura e 0,14 mm para o diâmetro.

Palavras-chave: Crescimento de pêssgo. Duplo Gompertz. Logístico + Gompertz. Sigmoidal duplo.

ABSTRACT

Peach fruits are of great national importance. The country produces a significant amount but it is still not enough to meet local demand, so studies are needed so that we can increase production and also reduce losses after harvest. Nonlinear regression models are excellent tools for estimating parameters with biological interpretation, allowing for inferences and important decision making. To estimate the parameters of these models, the least squares method and the Gauss-Newton algorithm implemented in software R version 4.0.2 were used. The assumptions of normality, homogeneity and independence of the residues were analyzed according to the tests by Shapiro Wilk, Breusch Pagan and Durbin Watson, respectively. The quality of the adjustment of the models was verified based on the value of the adjusted determination coefficient (R_a^2), in the corrected Akaike information criterion (AICc), in the residual standard deviation (DPR), asymptote adjustment index (IA) and non-linearity measures. The double Gompertz (GG) model was the one that best fit the fruit height data and the Logistic + Gompertz (LG) model was the one that best fitted the diameter data. It was concluded that the height and diameter measurements of the fruit in the first stage of the growth process were 35.03 mm and

26.22 mm, while at maturity it reached 62.43 mm and 48.12 mm respectively. It was also observed that the ages of 22 and 82 days and 29 and 81 after flowering corresponded to the times when the fruit reached the maximum growth rate in the first and second stages of the process, respectively. In addition, the development of the first growth stage was more accelerated, corresponding to 0.14 mm a day for height and 0.19 mm a day for diameter, while the index associated with the development of the second stage was 0.05 mm per day for height and 0.14 mm for diameter.

Keywords: Peach growth. Double Gompertz. Logistics + Gompertz. Double sigmoidal.

1 INTRODUÇÃO

O pêssego é uma fruta apreciada em vários países do mundo. Atualmente, a China é o maior produtor, seguido pela Itália e Grécia. O Brasil ocupa a décima segunda posição no ranking mundial de produtores e a maior concentração de sua produção fica na região sul, sendo o estado do Rio Grande do Sul o responsável por cerca de 65% do total (FAOSTAT, 2020).

Uma das etapas mais importantes do processo de produção do fruto é a colheita. Em geral, quando é feita para o consumo imediato é desejável que o fruto esteja em estágio de maturação, devendo estar resistente ao manuseio e transporte, além de apresentar características que atendam aos desejos do consumidor final, como a cor, a textura e o sabor. Já para a produção destinada à indústria, é necessário conhecer o tempo de armazenamento do mesmo para então definir a melhor época de colheita, cujo fruto deve ser firme e ter iniciado o processo de amadurecimento, evitando assim distúrbios fisiológicos, ou seja, aparência ou sabores anormais. A forma de manusear o pêssego pós-colheita também é muito importante para manter a qualidade do fruto, que é perecível. Mesmo depois de colhidos, eles continuam vivos, mantendo as funções fisiológicas funcionando normalmente (RASEIRA; PEREIRA; CARVALHO, 2014).

Sendo assim, é então necessário conhecer o desenvolvimento e a maturação do fruto do pessegueiro para ajudar produtores a tomarem decisões quanto ao manejo no campo e colheita. Segundo Cavalini et al. (2006), um dos principais fatores de perda pós-colheita é exatamente a escolha da época de colheita, no entanto, tal época é normalmente determinada de forma subjetiva, avaliando a cor externa ou o tamanho do fruto, um procedimento pouco padronizado entre os produtores. Uma maneira de descrever todo esse processo é construir modelos com base no estudo das curvas de crescimento dos frutos, e dessa forma obter estimativas dos parâmetros desses modelos que indiquem o ponto de colheita adequado dependendo da finalidade para qual o fruto foi produzido.

De acordo com Medeiros e Raseira (1998), o desenvolvimento do pêssego é caracterizado por uma curva de crescimento sigmoideal duplo, passando por três estádios diferentes: o crescimento acelerado da semente e do endocarpo; o crescimento lento devido à mudanças fisiológicas e anatômicas e, por fim, o aumento do volume celular juntamente com o processo de maturação.

O estágio de desenvolvimento do fruto tem alto impacto no momento da colheita já que influencia diretamente em sua qualidade após a maturação. Quando colhidos verdes ou imaturos eles podem não amadurecer, enrugam ou apresentar qualidade inferior com o passar do tempo. Além disso, quando colhidos muito maduros, o processo de armazenamento e comercialização é prejudicado e podem acontecer inúmeras perdas. Por isso, avaliar o padrão do seu crescimento a partir do estudo desses estádios pode auxiliar o acompanhamento do desenvolvimento, possibilitando construir índices de maturidade (COOMBE, 1976).

Diversos autores já caracterizaram a curva de crescimento do fruto por meio de descrição gráfica, sem ajuste de modelos para descrever tal fenômeno. Outros autores, como Génard,

Bruchou e Souty (1991), Martínez et al. (2017) obtiveram resultados ao ajustar alguns modelos não lineares para a curva de crescimento, no entanto, não há informações claras sobre a interpretação biológica de cada um dos parâmetros.

Para estudar o processo de crescimento animal ou vegetal é possível utilizar diversos modelos estatísticos, como os não lineares. Uma particularidade muito conveniente de algumas parametrizações dos modelos não lineares é fornecer estimativas para os parâmetros com interpretação biológica (FERNANDES et al., 2015). Em frutos de caroço, como os pêssegos, o crescimento pode ser dividido em duas etapas, o desenvolvimento do mesocarpo e do caroço (LARUE; JOHNSON, 1989). Nesse caso, o modelo escolhido precisa descrever essas duas fases para que as estimativas obtidas auxiliem na interpretação de todas as etapas do processo.

Os modelos não lineares mais utilizados para descrever curvas de crescimento com comportamento sigmoidal são: Gompertz, Logístico, Richards e o Von Bertalanffy. Uma das formas de parametrização dos modelos com caráter duplo sigmoidal é somando duas funções sigmóides simples, denominados modelos difásicos (ASCHONITIS et al., 2014; HAU; AMORIM; BERGAMIN FILHO, 1993). Exemplo de aplicação desse tipo de modelo é encontrada no trabalho de Fernandes, Pereira e Muniz (2017) que obtiveram bons resultados ao ajustar os modelos duplo Gompertz e duplo Logístico para descrever o comportamento do crescimento de frutos do cafeeiro.

Desta forma, esse trabalho tem como objetivo descrever a curva de crescimento de pêssegos, a partir da altura e diâmetro do fruto ao longo do tempo, ajustando os modelos não lineares duplo sigmoidais contruídos a partir da combinação dos modelos: Brody; Gompertz e Logístico.

2 REFERENCIAL TEÓRICO

Nesta seção é apresentada uma revisão de literatura sobre o pessegueiro, modelos não lineares e algumas aplicações, curvas de crescimento, além de alguns métodos e medidas para o ajuste e seleção dos modelos.

2.1 Pessegueiro

O pessegueiro (*Prunus persica* L. Batsch) é nativo da China, pertencente à família *Rosaceae*, subfamília *Prunoideae*, gênero *Prunus*, subgênero *Amygdalus* e seção *Euamygdalus* com registros de 20 séculos a.C. Em 1532, Martin Afonso de Sousa trouxe mudas da Ilha da Madeira, em Portugal para São Vicente, São Paulo. A região paulista, cujas condições naturais eram favoráveis à produção, recebeu os primeiros pomares comerciais. Na década de 60, a região Sul começou a explorar melhor a cultura do pessegueiro e um programa de melhoramento genético foi implementado (MADAIL; RASEIRA, 2008; MEDEIROS; RASEIRA, 1998; RASEIRA; PEREIRA; CARVALHO, 2014).

De acordo com Faostat (2020), os países que mais produziram pêssego em 2018 foram respectivamente: China, Itália, Grécia e Espanha. O Brasil ocupa a décima segunda posição, totalizando 17.605 hectares de área plantada com produção de 219.598 toneladas. O Rio Grande do Sul é o estado responsável pela maior produção, atingindo cerca de 65% de todo o país e o maior polo produtivo é o município de Pelotas que concentra fruticultores responsáveis por mais de 90% dos pêssegos destinados à indústria (PAM, IBGE, 2020).

Segundo Madail e Raseira (2008), até 2008 o Brasil não produzia pêssego suficiente para a demanda interna. Em 2009 foi necessário importar cerca de 11 mil toneladas do fruto. Entre 2006 e 2011 esse número chegou a 67 mil toneladas, gerando um custo de mais de 64 milhões de dólares. Conforme AGROSTAT (2012), o país ainda precisa aumentar a cadeia de produção. Os principais países que exportam pêssego para o Brasil são: Argentina, Chile, Espanha, Grécia e China (RASEIRA; PEREIRA; CARVALHO, 2014).

O pêssego está entre os principais frutos oriundos do clima temperado cultivados no país e pode ser consumido tanto *in natura*, quanto na forma processada, como compota, pessegada, geleia, suco ou polpa concentrada (RASEIRA; PEREIRA; CARVALHO, 2014; VIEIRA et al., 2017). Segundo Fachinello et al. (2011), existe uma tendência para que a produção destinada exclusivamente a indústria diminua, dando lugar a frutos que podem ser apropriados para as mais diversas finalidades. Algumas cultivares são muito exigentes e necessitam de frio hibernar, no entanto já existem novas espécies, como a BRS Mandinho, que consegue se adaptar às condições subtropicais. Essa cultivar é a primeira da variedade botânica *platicarpa* lançada no Brasil e têm alcançado ótimos preços por causa da boa aceitação no mercado (RASEIRA et al., 2016).

O pêssego tem grande valor nutritivo, apresentando alto teor de vitamina C, rico em compostos bioativos que podem atuar como antioxidantes. Além disso, apresenta alto teor de

fibras (RASEIRA; PEREIRA; CARVALHO, 2014). Estas características mostram que o fruto é um alimento funcional, com aspectos essenciais para manutenção do organismo e prevenção de doenças. O mesmo tem grande importância social, sendo este delicado e por isso sua produção exige mão de obra braçal, gerando muitos empregos. Durante as operações de poda, raleio e colheita há alta demanda de operários. Muitos funcionários são contratados de forma sazonal pelas indústrias e tantos outros de forma indireta (MADAIL; RASEIRA, 2008; RASEIRA; PEREIRA; CARVALHO, 2014).

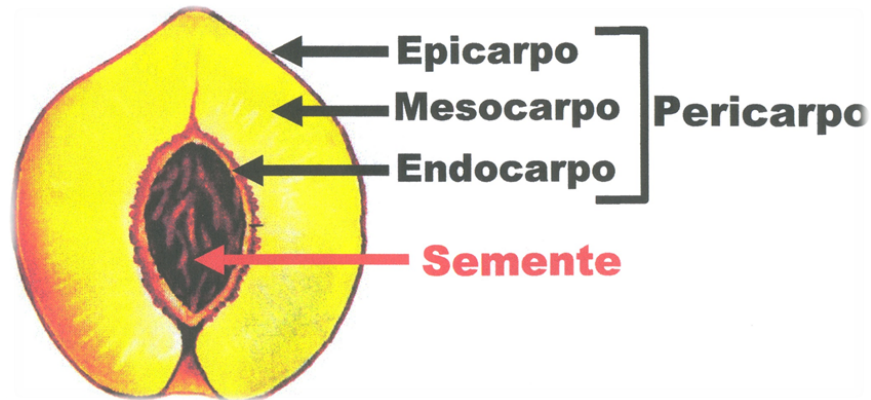
Entre as diversas cultivares desenvolvidas pelos programas de melhoramento genético, a cultivar “Aurora 1” é recomendada para produção de frutos para mesa. Nas condições climáticas do Rio Grande do Sul, a planta é de bom vigor, suscetível à ferrugem-da-folha e a bacteriose. Tem produtividade média e se adapta facilmente às regiões mais quentes, necessitando de menos de 200 horas de frio por ano. A cultivar foi lançada pelo Instituto Agrônomo de Campinas (IAC) e possui polpa firme, doce, aderente ao caroço e praticamente sem acidez, características que a torna preferida entre outras cultivares por alguns mercados (RASEIRA; PEREIRA; CARVALHO, 2014).

A árvore do pessegueiro é decíduifólia, podendo atingir até 10 m de altura. A planta tem variabilidade genética para porte, vigor e hábito de crescimento. As raízes são pivotantes na fase inicial do desenvolvimento e com o passar do tempo se tornam numerosas, extensas e pouco profundas. Os ramos são classificados em mistos, brindilais, dardos ou ladrões. As folhas são oblongas, lanceoladas e distribuídas alternadamente. As flores normalmente possuem apenas um pistilo, são perfeitas e períginas (RASEIRA; PEREIRA; CARVALHO, 2014).

O fruto é do tipo drupa, tem aroma delicado e epiderme aveludada, recoberta ou não por pelos (tricomos) (RASEIRA; QUEZADA, 2003). A polpa pode ter diferentes tonalidades, variando entre o branco, amarelo verde e vermelho. A coloração da casca varia de verde-clara, creme, amarelo, laranja ou vermelho. Normalmente, a determinação do ponto de colheita é feita a partir de avaliações subjetivas, analisando a firmeza da polpa, tamanho ou coloração (MEDEIROS; RASEIRA, 1998).

De acordo com Medeiros e Raseira (1998), o fruto é composto pelo pericarpo (epicarpo, mesocarpo e endocarpo) e a semente, com diferentes variações de cores e sabor da polpa doce-acidulado Figura 2.1. O caroço, que contém uma ou duas sementes, pode ser encontrado solto ou preso à polpa.

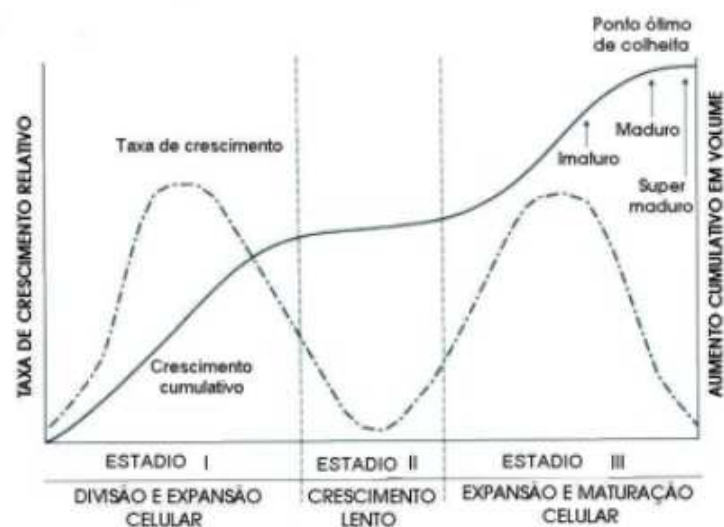
Figura 2.1 – Ilustração do fruto de pessegueiro composto pelo pericarpo e semente.



Fonte: AdoroBiologia, Angiospermas. Disponível em: <http://adorobiologia.blogspot.com/2015/07/>. Acessado em 18 de maio de 2020.

Medeiros e Raseira (1998), Cunha Junior et al. (2007), Silva et al. (2013) definem que o crescimento apresenta desenvolvimento caracterizado por uma curva duplo sigmoidal, dividido nos três estádios descritos na Figura 2.2.

Figura 2.2 – Curva de desenvolvimento do fruto do pessegueiro (Diâmetro).



Fonte: Adaptado de LaRue e Johnson (1989).

Estádio I - acontece a divisão e alguma expansão celular, nesta fase o pericarpo e a semente do fruto cresce em ritmo acelerado. Ocorre em aproximadamente 50 dias após o florescimento e vai até o momento em que o endocarpo (caroço) começa a endurecer. Nessa etapa a semente e o endocarpo praticamente atingem o tamanho final;

Estádio II - o fruto passa por diferentes mudanças fisiológicas e anatômicas. A polpa passa a desenvolver-se de forma mais lenta, o caroço endurece e a semente é formada. O crescimento do fruto é estabilizado, marcando a união dos dois sigmóides. Essa fase pode durar alguns dias em cultivares muito precoces ou até várias semanas nas cultivares tardias.

Estádio III - período de aumento do volume celular e dos espaços intracelulares, ocorre o inchamento do fruto e o acúmulo de açúcar. Nesse estágio, é perceptível as principais mudanças físicas e bioquímicas do fruto, que fazem parte do processo de maturação.

Em geral, as fases I e III tem tempo de duração parecidas e a fase II é a responsável por determinar o ciclo, diferenciando o tipo de cultivar. Conhecer essas etapas é importante para o manejo da frutificação, permitindo definir o melhor momento para realizar intervenções, como o raleio (MEDEIROS; RASEIRA, 1998).

O raleio consiste na eliminação do excesso de frutos. Seu principal objetivo é aumentar o tamanho final deles, evitar a quebra de ramos e reduzir custos da colheita. Quando o raleio é realizado após a frutificação há um controle maior para que não haja remoção excessiva de frutos. Em regiões onde o inverno é mais rigoroso, também é recomendado que o raleio seja feito depois do nascimento dos frutos para evitar possíveis danos causados pelas geadas (MEDEIROS; RASEIRA, 1998).

2.2 Curvas de crescimento

Em muitos casos é desejável conhecer o tamanho ou peso médio adulto de uma determinada espécie, antes mesmo de que ela chegue nessa etapa do processo de crescimento. Um exemplo seria tentar prever o diâmetro ou altura de um fruto na época de colheita utilizando informações obtidas no início do ciclo produtivo. Nesse sentido, diferentes métodos podem ser aplicados, o principal deles é determinar a curva de crescimento do fruto (BEBBINGTON et al., 2009).

No início do século XX, alguns britânicos desenvolveram técnicas para analisar curvas de crescimento. Eles apresentaram fórmulas de análise e os cálculos para diferentes parâmetros, além de discussões sobre os métodos (BLACKMAN, 1919; BRIGGS; KIDD; WEST, 1920). Segundo Mazzini et al. (2005), depois de obter as estimativas dos parâmetros dos modelos de crescimento é possível utilizá-los para fazer inferências sobre o peso à maturidade, o grau de amadurecimento e a taxa de crescimento.

Atualmente, é possível encontrar na literatura diversos trabalhos que utilizaram modelos não lineares para descrever curvas de crescimento. A vantagem de utilizar essa classe de modelos é a obtenção de parâmetros com interpretação biológica e assim, é possível fazer inferências sobre os dados de forma simples e rápida. A seguir serão apresentados alguns trabalhos para melhor exemplificar as diferentes aplicações.

Amabile, Guimarães e Neto (2003) avaliaram o comportamento de cultivares de girasol em latossolo utilizando os modelos Logístico, Weibull e Logístico Generalizado com quatro parâmetros. O comprimento e diâmetro dos frutos da tamareira-anã foram avaliados ao longo do tempo por Terra, Muniz e Savian (2010) após ajustarem os modelos Gompertz e Logístico. Prado et al. (2013) e Prado, Savian e Muniz (2013) descreveram o crescimento de frutos de coqueiro anão verde a partir dos dados de diâmetro longitudinal e transversal externo em diferentes

idades, utilizando os modelos Logístico e Gompertz. Os mesmos modelos foram ajustados e apresentados no trabalho de Fernandes et al. (2014) que descreveram curvas de crescimento do fruto de cafeeiro. Outro estudo, realizado por Sousa et al. (2014), mostra o ajuste de modelos não lineares para descrever a germinação de sementes de café (*Coffea Arábica L.*).

Além disso, Lúcio et al. (2016) ajustaram os modelos Logístico e Von Bertalanffy para produção de frutos de tomate tipo cereja cultivados em estufa plástica. E o modelo Logístico foi considerado o mais adequado para descrever a curva de crescimento do milho (MANGUEIRA et al., 2016). Muianga et al. (2016) avaliaram o ajuste dos modelos Gompertz e Logístico para descrever o desenvolvimento de frutos do cajueiro. E Muniz, Nascimento e Fernandes (2017) compararam os ajustes para descrever o crescimento do fruto de cacau.

Outro exemplo pode ser encontrado no trabalho de Ribeiro et al. (2018a), nesse caso os modelos não lineares foram utilizados para descrever o crescimento de frutos de pequizeiro. Ribeiro et al. (2018b) comprovaram o caráter sigmoidal do crescimento da pera asiática após ajustar o modelo Logístico. O modelo Logístico também foi o que melhor se ajustou aos dados de plantas de pimenta (*Capsicum sp.*), indicado por Jane et al. (2019b), depois de comparar com modelos polinomiais. Além disso, Jane et al. (2020) ajustaram os modelos não lineares Logístico e Gompertz para descrever o crescimento da altura de colmos de cana-de-açúcar (*Saccharum spp.*)

2.3 Curvas de crescimento duplo sigmoidais

Os exemplos citados anteriormente mostram diferentes aplicações de modelos não lineares simples para descrever curvas de crescimento biológico. Na natureza, também é muito comum o comportamento de crescimento com característica duplo sigmoidal, ou seja, o processo de desenvolvimento é dividido em duas diferentes etapas. Alguns trabalhos que evidenciam essa característica são apresentados a seguir.

Hurwitz et al. (1991) descreveram o crescimento de perus após ajustar o modelo duplo Gompertz, os autores concluíram que o crescimento é bifásico por causa da diferença entre as taxas de crescimento dos órgãos desses animais. Santoro et al. (2005) ajustaram modelos sigmóides simples e o modelo duplo Logístico aos dados de crescimento de bovinos zebu (Guzerá e Nelore), os autores verificaram que o modelo duplo é o mais adequado para descrever o crescimento desta espécie.

Em um estudo de curvas de crescimento de fêmeas Hereford, foram ajustados modelos duplo Logístico com três diferentes estruturas de erros, em dados de peso-idade de 55 fêmeas avaliadas desde o nascimento até 675 dias de idade. Os resultados obtidos para o ajuste dos modelos aos dados médios indicaram que o modelo Logístico difásico AR (2) foi o mais eficiente para descrever a curva de crescimento do rebanho (MENDES et al., 2008).

Segundo Coombe (1976), no caso de frutos com caroço, o crescimento é caracterizado por uma curva com dois pontos de inflexão, isto é, com formato duplo sigmoidal. Isso acontece

devido ao fato de que inicialmente o crescimento do caroço sobrepõe-se ao da polpa. Álvarez e Boche (1999) ajustaram modelos duplos sigmóides generalizados e concluíram que o crescimento de frutos de nectarina da cultivar Sun Grand pode ser descrito utilizando o modelo duplo Logístico.

Gomes, Pinheiro e Lima (2008) estudaram frutos de quatro espécies de Sapotaceae na restinga de Maricá, RJ: *Pouteria venosa* (Mart.) Baehni, *P. psammophila* (Mart.) Radlk., *Manilkara subsericea* (Mart.) Dubar e *Sideroxylon obtusifolium* (Roem. & Schult.) T. D. Penn. subsp. *obtusifolium*. A família Sapotaceae tem grande importância econômica, algumas espécies são destinadas à ornamentação, enquanto outras são cultivadas para comercialização de frutos ou extração de madeira. Os autores observaram que três espécies apresentaram frutos com padrão de crescimento duplo sigmoidal.

Os autores Serrano et al. (2007) e Nava et al. (2014) analisaram o crescimento de goiaba a partir do diâmetro longitudinal e polar do fruto e afirmaram que o comportamento do crescimento apresenta caráter sigmoidal duplo. Inicialmente ocorre um desenvolvimento acelerado, seguido pela maturação da semente (desaceleração do crescimento) e finalmente volta a crescer de forma exponencial ao mesmo tempo que o fruto amadurece.

Fernandes, Pereira e Muniz (2017) verificaram que o padrão de crescimento do fruto de cafeeiro é duplo sigmoidal. A conclusão foi obtida após estudar o acúmulo de massa fresca ao longo do tempo utilizando modelos não lineares. Os autores indicaram que o modelo duplo Logístico é o mais adequado para descrever tal curva de crescimento.

Com o objetivo de descrever a curva de desenvolvimento de amora-preta verificou-se que o modelo duplo Logístico foi o que melhor se ajustou para as cultivares Brazos e Guarani, enquanto que o duplo Gompertz foi o escolhido para as cultivares Tupy e Choctaw (SILVA et al., 2020).

Álvares et al. (2004) avaliaram o desenvolvimento dos frutos de pessegueiros ‘Rei da Conserva’ e afirmaram que o comportamento da curva de crescimento apresenta padrão duplo sigmoidal. Donoso et al. (2006) e Bruna (2007) caracterizaram as curvas do processo de crescimento do fruto de pêssigo a partir de dados de peso-idade e identificaram os três estádios de crescimento descritos na literatura por muitos outros autores.

Cunha Junior et al. (2007) caracterizaram a espécie “Aurora 1” de pêssigo, a partir de dados de altura e diâmetro do fruto, e confirmaram o padrão de crescimento duplo sigmoidal. O mesmo comportamento foi descrito por Bruckner et al. (2013), em que caracterizaram os três estádios, sendo o primeiro exponencial, seguido pelo estágio com pouco crescimento, e o estágio III, novamente exponencial culminando com a maturação do fruto. No entanto, todos os autores citados acima não ajustaram nenhum modelo para descrever a curva de crescimento do fruto.

Enquanto que Génard, Bruchou e Souty (1991) ajustaram o modelo duplo sigmoidal difásico (Brody + Logístico) aos dados de diâmetro de pêssigo e utilizaram o desvio-padrão residual para avaliar o ajuste. Casierra-Posada, Barreto e Fonseca (2004) ajustaram polinômios de

terceiro grau para descrever o crescimento de pêssegos, contudo as estimativas dos parâmetros não possuem interpretação biológica. E Martínez et al. (2017) escolheram três modelos não lineares generalizados com comportamento duplo sigmoidal e estimaram alguns parâmetros sem interpretação biológica direta.

2.4 Modelos de regressão

Ao ajustar modelos de regressão é possível estudar a relação entre duas variáveis X e Y (DRAPER; SMITH, 1998). O objetivo principal é encontrar uma função de X que explique Y , no entanto, sabe-se que essa relação não é perfeita, e por isso, também é necessário incluir um erro (ε), tornando-se assim o modelo estatístico:

$$\mathbf{Y} = f(\mathbf{X}) + \varepsilon \quad (2.1)$$

Para construção do modelo adequado, deve-se levar em consideração diferentes fatores: natureza das variáveis; pressuposições dos erros; o tipo da relação; entre outros. Um exemplo é o modelo de regressão simples que depende de uma única variável X e de alguns parâmetros, descrito da forma:

$$\mathbf{Y} = f(\mathbf{X}, \theta) + \varepsilon \quad (2.2)$$

em que \mathbf{Y} é o vetor observado da variável resposta ou dependente, θ é o vetor de parâmetros do modelo, \mathbf{X} é o vetor de observações da variável explicativa ou independente, $f(\cdot)$ a relação entre as variáveis e ε o vetor de erros associado ao modelo. Draper e Smith (1998) classificam os modelos de regressão em lineares, linearizáveis ou não lineares.

O modelo é dito **linear** quando as derivadas parciais em relação aos parâmetros não dependem de nenhum parâmetro, ou seja, depende apenas de X , podendo ser representado por

$$\frac{\partial f(\mathbf{X}; \theta)}{\partial \theta} = h(\mathbf{X}).$$

Caso alguma dessas derivadas dependa de θ então o modelo é denominado **não linear**. Neste caso, a estimativa dos parâmetros se torna um pouco mais complexa, não sendo possível determinar os parâmetros θ de forma algébrica. Deve-se recorrer a métodos numéricos iterativos.

Já os **linearizáveis** são os modelos não lineares possíveis de serem transformados em modelos lineares a partir de alguma transformação.

2.5 Modelos de regressão não linear

Os processos biológicos são bem representados por modelos não lineares. Uma das vantagens desse tipo de modelo é que seus parâmetros possuem interpretação biológica já que as

funções são deduzidas a partir de suposições teóricas utilizando equações diferenciais (CORDEIRO; PRUDENCE; DEMÉTRIO, 2009).

As curvas de crescimento, por exemplo, apresentam características de comportamento não linear. Na maioria dos casos o indivíduo cresce de forma acelerada na fase inicial, essa velocidade diminui na transição para a fase adulta e se torna estável posteriormente. Na literatura é possível encontrar diferentes trabalhos que utilizaram esses modelos para descrever o comportamento do crescimento, tanto animal quanto vegetal (ROCHA-SILVA et al., 2016; TEIXEIRA NETO et al., 2016; MUIANGA et al., 2016; LIMA et al., 2017; MUNIZ; NASCIMENTO; FERNANDES, 2017; FERNANDES et al., 2019).

Os modelos não lineares mais utilizados para descrever curvas de crescimento são os da família Richards: Logístico, Gompertz, Von Bertalanffy e Brody (monomolecular). Esses modelos são considerados como da mesma família pois a expressão matemática do modelo geral Richards pode ser reescrita na forma de qualquer um desses modelos com apenas a restrição de um único parâmetro. O modelo Richards pode ser representado por:

$$y_i = A[1 + (\delta - 1)e^{-K(x_i - B)}]^{1/(1-\delta)} + \varepsilon_i \quad (i = 1, 2, \dots, n) \quad (2.3)$$

Quando $\delta = 0$ tem-se o modelo Brody, se $\delta = \frac{2}{3}$ então o modelo é o Von Bertalanffy, para $\delta = 2$ o modelo é o Logístico e se o $\lim_{\delta \rightarrow 1}$ obtêm-se o modelo Gompertz.

Uma característica comum a quase todos esses modelos é descrever comportamentos sigmóides, ou seja, em formato de "S", com exceção para o modelo Brody. Segundo Tsoularis e Wallace (2002), grande parte desses e de outros modelos referem-se à pequenas variações de uma equação mais geral, denominada Richards.

Para os modelos Gompertz (2.4) e Logístico (2.5), Fernandes et al. (2015) mostraram que algumas parametrizações são mais adequadas que outras, pois possuem menores medidas de não linearidade. A seguir é apresentada a parametrização sugerida para cada um dos modelos, ambos possuem a mesma interpretação dos parâmetros.

$$y_i = Ae^{-e^{K(B-x_i)}} + \varepsilon_i \quad (i = 1, 2, \dots, n) \quad (2.4)$$

$$y_i = \frac{A}{1 + e^{K(B-x_i)}} + \varepsilon_i \quad (i = 1, 2, \dots, n) \quad (2.5)$$

em que, y_i é a i -ésima observação da variável dependente; x_i é a i -ésima observação da variável independente; A é o valor assintótico, correspondente ao valor máximo; k indica o índice de maturidade ou precocidade, quanto maior esse valor menos tempo é necessário para atingir o valor assintótico, B é a abscissa do ponto de inflexão da curva do modelo e ε_i é o erro aleatório associado a i -ésima observação.

O modelo 2.4 foi proposto por Gompertz em 1825 para estudar a mortalidade humana. Inicialmente o modelo era interessante somente em ciências atuariais e ao longo do tempo

passou a ser muito utilizado para modelar curvas de crescimento, tanto na economia quanto para descrever fenômenos biológicos (WINSOR, 1932).

Segundo Seber e Wild (1989), o modelo Logístico foi proposto em 1838 por Verhulst para descrever o crescimento populacional de humanos. Atualmente, é uma das funções não lineares mais conhecidas e utilizadas para descrever curvas de crescimento. Suas três características principais são: o parâmetro A corresponde à assintota superior do modelo; a função é estritamente crescente e não possui ponto crítico; é simétrica em relação ao ponto de inflexão.

De acordo com Winsor (1932), os modelos Gompertz e Logístico apresentam propriedades muito semelhantes que são úteis para descrever fenômenos de crescimento. Enquanto a curva Logística se ajusta melhor em dados que apresentam ponto de inflexão na metade da distância até o ponto máximo de crescimento, o modelo Gompertz apresenta melhores resultados quando essa distância corresponde a 37% do crescimento total concluído.

No caso do modelo Brody (2.6) (BRODY, 1945), também conhecido como modelo monomolecular, uma de suas características principais é não possuir ponto de inflexão. Em virtude disso, esse modelo também não possui formato sigmoidal, mas sim crescente com concavidade voltada para baixo. Na literatura, encontramos estudos como o de Carneiro et al. (2014), que utilizaram o modelo Brody para comparar curvas de crescimento de bovinos da raça Tabapuã. O modelo de Brody pode ser representado da seguinte forma:

$$y_i = A(1 - e^{[K(B-x_i)]}) + \varepsilon_i \quad (i = 1, 2, \dots, n) \quad (2.6)$$

As interpretações dos parâmetros são as mesmas dos modelos Gompertz e Logístico, com exceção do B que, neste caso, funciona apenas como um parâmetro de escala e não possui interpretação biológica.

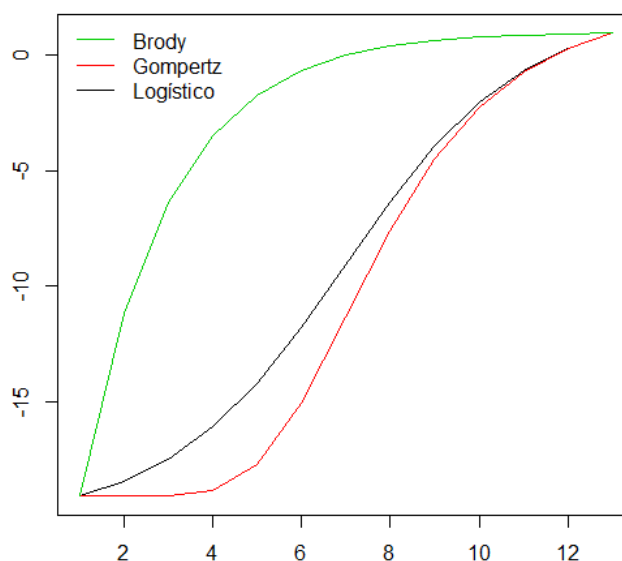
A seguir é apresentado um gráfico com uma ilustração da forma dos três modelos descritos anteriormente, considerando os parâmetros fixos: $A = 1$, $B = 0$ e $K = 1$ (Tabela 2.1, Figura 2.3).

Tabela 2.1 – Modelos Brody, Gompertz e Logístico para o caso $A = 1$, $B = 0$ e $K = 1$. Sendo A o valor assintótico, correspondente ao valor máximo da variável dependente; K o índice de maturidade ou precocidade e B o ponto de inflexão da curva do modelo.

Modelos	Equação
Brody	$y_i = 1 - e^{-x_i}$
Gompertz	$y_i = e^{-e^{-x_i}}$
Logístico	$y_i = \frac{1}{1+e^{-x_i}}$

Fonte: Da autora (2020).

Figura 2.3 – Formato das curvas dos modelos Brody, Gompertz e Logístico para o caso $A = 1$, $B = 0$ e $K = 1$. Sendo A o valor assintótico, correspondente ao valor máximo da variável dependente; K o índice de maturidade ou precocidade e B o ponto de inflexão da curva do modelo.



Fonte: Da autora (2020).

2.6 Modelos duplo sigmoidais

Em alguns casos, ao estudar curvas de crescimento, algumas variáveis podem ser caracterizadas em diferentes estádios. Assim, torna-se necessário dividir o processo de crescimento em mais de uma fase e então, construir modelos de crescimento multifásicos com parâmetros restritos para cada fase (MENDES et al., 2008).

Segundo Hau, Amorim e Bergamin Filho (1993), Aschonitis et al. (2014) é possível obter modelos duplos sigmoidais a partir da soma de duas funções de modelos simples. Na literatura encontra-se esse modelos obtidos a partir da soma de outros modelos não lineares simples, como por exemplo, combinações de Brody + Logístico (BL) no trabalho de Génard, Bruchou e Souty (1991) ou de Logístico + Logístico (LL) e Gompertz +Gompertz (GG) na pesquisa de Fernandes, Pereira e Muniz (2017). Nesses trabalhos, os modelos são escritos com um total de seis parâmetros, sendo três deles para ajustar a curva da primeira fase de crescimento e outros três para a segunda curva. Um resumo com todas as possíveis combinações dos três modelos Brody, Gompertz e Logístico é apresentado na Tabela 2.2.

Tabela 2.2 – Equações dos modelos não lineares sigmoidais difásicos construídos a partir da soma de dois modelos sigmóides simples.

Modelos difásicos	Equação
Brody + Brody (BB)	$y_i = A_1[1 - e^{K_1(B_1-x_i)}] + (A_2 - A_1)[1 - e^{K_2(B_2-x_i)}] + \varepsilon_i$
Brody + Gompertz (BG)	$y_i = A_1[1 - e^{K_1(B_1-x_i)}] + (A_2 - A_1)e^{-e^{K_2(B_2-x_i)}} + \varepsilon_i$
Brody + Logístico (BL)	$y_i = A_1[1 - e^{K_1(B_1-x_i)}] + \frac{A_2 - A_1}{1 + e^{K_2(B_2-x_i)}} + \varepsilon_i$
Gompertz + Gompertz (GG)	$y_i = A_1e^{-e^{K_1(B_1-x_i)}} + (A_2 - A_1)e^{-e^{K_2(B_2-x_i)}} + \varepsilon_i$
Gompertz + Brody (GB)	$y_i = A_1[1 - e^{K_1(B_1-x_i)}] + (A_2 - A_1)[1 - e^{K_2(B_2-x_i)}] + \varepsilon_i$
Gompertz + Logístico (GL)	$y_i = A_1[1 - e^{K_1(B_1-x_i)}] + \frac{A_2 - A_1}{1 + e^{K_2(B_2-x_i)}} + \varepsilon_i$
Logístico + Logístico (LL)	$y_i = \frac{A_1}{1 + e^{K_1(B_1-x_i)}} + \frac{A_2 - A_1}{1 + e^{K_2(B_2-x_i)}} + \varepsilon_i$
Logístico + Brody (LB)	$y_i = \frac{A_1}{1 + e^{K_1(B_1-x_i)}} + (A_2 - A_1)[1 - e^{K_2(B_2-x_i)}] + \varepsilon_i$
Logístico + Gompertz (LG)	$y_i = \frac{A_1}{1 + e^{K_1(B_1-x_i)}} + (A_2 - A_1)e^{-e^{K_2(B_2-x_i)}} + \varepsilon_i$

Fonte: Da autora (2020).

Sendo: i cada uma das observações ao longo do tempo; y_i a i -ésima observação a ser estudada; A_1 a resposta máxima esperada na primeira fase do crescimento; A_2 a resposta máxima esperada na segunda e última fase do crescimento; k_1 e k_2 os índices de maturidade das respectivas fases de crescimento, valores mais altos indicam a necessidade de menor tempo para que a variável em estudo chegue ao seu tamanho final; B_1 e B_2 são as abscissas do ponto de inflexão das curvas de cada uma das fases (com exceção do modelo Brody, que não apresenta essa característica), ou seja, indica o ponto máximo de crescimento; ε_i o erro aleatório associado ao modelo, o qual pressupõe-se que seja independente e identicamente distribuído sob uma distribuição Normal com média zero e variância conhecida, $\varepsilon_i \sim N(0, \sigma^2)$.

Segundo Sheehy, Mitchell e Ferrer (2004), a escolha de qual modelo deve ser usado em cada uma das fases depende exclusivamente do padrão de crescimento correspondente a cada uma delas. No caso do crescimento em duas fases com simetria em relação ao ponto de inflexão, Meyer (1994) propôs a curva duplo Logístico, esse mesmo modelo também foi o que apresentou a melhor qualidade de ajuste para descrever caracteres produtivos de crotalaria juncea (*Crotalaria juncea* L.), de acordo com o trabalho de Bem et al. (2020). Enquanto, o modelo duplo Gompertz foi utilizado para descrever curvas com características assimétricas dentro de cada fase (HURWITZ et al., 1991). Génard, Bruchou e Souty (1991) escolheram os modelos Brody e Logístico para representar curvas de crescimento de frutos de pêssego devido ao co-

nhecimento prático de que o fruto cresce mais rápido inicialmente e depois o crescimento é semelhante ao comportamento em forma de S.

2.7 Métodos de estimação

As estimativas dos parâmetros podem ser obtidas de diferentes formas, como por exemplo, pelo método de mínimos quadrados, dos momentos, ou máxima verossimilhança. O primeiro é um dos mais utilizados e tem como propósito obter as estimativas dos parâmetros de forma que a soma de quadrados dos resíduos seja mínima (DRAPER; SMITH, 1998).

O método dos mínimos quadrados é puramente matemático, entretanto para que as inferências a partir das estimativas do modelo sejam confiáveis é necessário verificar se o vetor de erros são independentes, identicamente distribuídos e se possuem média zero e variância constante seguindo uma distribuição Normal. Segundo Draper e Smith (1998), é necessário incorporar na matriz de variâncias e covariâncias constantes para que essas pressuposições sejam atendidas. Assim o método de mínimos quadrados pode ser classificado de três formas: ordinário, ponderado ou generalizado.

2.8 Método dos mínimos quadrados ordinários

Quando se trata de um modelo que atende todas pressuposições descritas anteriormente, isto é, $\varepsilon \sim N(0, I\sigma^2)$, utiliza-se o método dos mínimos quadrados ordinários. A partir do modelo não linear $Y = f(X, \theta) + \varepsilon$, é possível escrever os resíduos como $\varepsilon = Y - f(X, \theta)$. Então, a soma de quadrados dos erros será:

$$S(\theta) = \varepsilon' \varepsilon = [Y' - (f(X, \theta))'] [Y - f(X, \theta)]$$

ao desenvolver esse produto, ele poderá ser representado por

$$S(\theta) = Y'Y - Y'f(X, \theta) - [f(X, \theta)]'Y + [f(X, \theta)]'f(X, \theta)$$

$$S(\theta) = Y'Y - [f(X, \theta)]'Y - [f(X, \theta)]'Y + [f(X, \theta)]'f(X, \theta)$$

$$S(\theta) = Y'Y - 2[f(X, \theta)]'Y + [f(X, \theta)]'f(X, \theta)$$

Derivando $S(\theta)$ em relação aos seus parâmetros e igualando as expressões a zero é possível obter o mínimo da soma de quadrados dos resíduos:

$$\frac{\partial S(\theta)}{\partial \theta} = -2 \left[\frac{\partial f(X, \theta)}{\partial \theta} \right]' Y + \left[\frac{\partial f(X, \theta)}{\partial \theta} \right]' f(X, \theta) + [f(X, \theta)]' \left[\frac{\partial f(X, \theta)}{\partial \theta} \right]$$

Aplicando a propriedade de matriz transposta $A'B = B'A$, com $A = [f(X, \theta)]'$ e $B = \left[\frac{\partial f(X, \theta)}{\partial \theta} \right]$, então

$$\frac{\partial S(\theta)}{\partial \theta} = -2 \left[\frac{\partial f(X, \theta)}{\partial \theta} \right]' Y + \left[\frac{\partial f(X, \theta)}{\partial \theta} \right]' f(X, \theta) + \left[\frac{\partial f(X, \theta)}{\partial \theta} \right]' [f(X, \theta)]$$

$$\frac{\partial S(\theta)}{\partial \theta} = -2 \left[\frac{\partial f(X, \theta)}{\partial \theta} \right]' Y + 2 \left[\frac{\partial f(X, \theta)}{\partial \theta} \right]' f(X, \theta)$$

$$\frac{\partial S(\hat{\theta})}{\partial \theta} = -2 \left[\frac{\partial f(X, \hat{\theta})}{\partial \theta} \right]' [Y - f(X, \hat{\theta})] = 0$$

sendo $\frac{\partial f(X, \theta)}{\partial \theta}$ a matriz de derivas parciais ($n \times k$) e para simplificar, denominamos simplesmente por X :

$$\frac{\partial f(X, \theta)}{\partial \theta} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f(X_1, \theta)}{\partial \theta_1} & \frac{\partial f(X_1, \theta)}{\partial \theta_2} & \cdots & \frac{\partial f(X_1, \theta)}{\partial \theta_k} \\ \frac{\partial f(X_2, \theta)}{\partial \theta_1} & \frac{\partial f(X_2, \theta)}{\partial \theta_2} & \cdots & \frac{\partial f(X_2, \theta)}{\partial \theta_k} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f(X_n, \theta)}{\partial \theta_1} & \frac{\partial f(X_n, \theta)}{\partial \theta_2} & \cdots & \frac{\partial f(X_n, \theta)}{\partial \theta_k} \end{bmatrix} = X$$

Assim, encontra-se o sistema de equações normais não lineares. No entanto, pela própria definição de modelos não lineares, as derivadas parciais dependem de pelo menos um dos parâmetros. Neste caso, é preciso recorrer à métodos iterativos para encontrar aproximações e assim estimar o vetor θ (DRAPER; SMITH, 1998).

Após aplicar os métodos iterativos é possível obter as estimativas dos parâmetros a partir da equação:

$$\hat{\theta} = (X'X)^{-1}X'Y$$

No entanto, o método de mínimos quadrados ordinários não fornece estimativas mínimas das variâncias quando o erro não satisfaz todas as pressuposições de normalidade, independência e homoscedasticidades dos erros (RAWLINGS; PANTULA; DICKEY, 2001).

2.9 Método dos mínimos quadrados ponderados

Se o modelo não satisfaz a pressuposição de homogeneidade de variâncias é viável utilizar o método de mínimos quadrados ponderados. Assim, $\varepsilon \sim N(0, V\sigma^2)$, sendo V uma matriz diagonal positiva definida que contém os pesos correspondentes à ponderação para as variâncias. Segundo Hoffmann et al. (2016), esse método fornece estimadores não tendenciosos e de variância mínima.

A matriz diagonal V pode ser representada por:

$$V\sigma^2 = \begin{bmatrix} V_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & V_2 & \vdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & V_n \end{bmatrix} \sigma^2$$

Então, observa-se que a pressuposição de independência dos resíduos é válida devido a presença de elementos nulos fora da diagonal principal. Assim, $E(e_i, e_j) = 0$ para todo $i \neq j$

Com relação a matriz diagonal de pesos W , ela pode ser obtida após calcular o valor de cada um de seus elementos $w_j = \frac{1}{\sqrt{v_j}}$:

$$W = \begin{bmatrix} w_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & w_2 & \vdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & w_n \end{bmatrix}$$

assim, é possível escrever duas expressões que serão usadas posteriormente: $WW = V^{-1}$ e $V = W^{-1}W^{-1}$.

Voltando na expressão $Y = X\theta + \varepsilon$ e pré multiplicando os dois lados por W :

$$WY = WX\theta + W\varepsilon$$

se considerarmos $WY = Y^*$, $WX = X^*$ e $W\varepsilon = \varepsilon^*$ então,

$$Y^* = X^*\theta + \varepsilon^*$$

$$E[\varepsilon^*] = W0 = 0$$

$$Var[\varepsilon^*] = Var[W\varepsilon] = WVar[\varepsilon]W' = WV\sigma^2W' = WVV'W'\sigma^2 = WW^{-1}W^{-1}W'\sigma^2 = I\sigma^2 = I\sigma^2$$

E assim, é possível obter as estimativas de mínimos quadrados ponderados a partir do método de mínimos quadrados ordinários com um pequena diferença na construção das matriz X e Y :

$$\hat{\theta}_P = (X'^*X^*)^{-1}X'^*Y^*$$

$$\hat{\theta}_P = (X'W'WX)^{-1}(X'W'WY)$$

$$\hat{\theta}_P = (XV^{-1}X)^{-1}(X'V^{-1}Y)$$

2.10 Método dos mínimos quadrados generalizados

No caso de modelos em que os erros violam uma das pressuposições de independência e ou homogeneidade de variâncias, $\varepsilon \sim N(0, G\sigma^2)$, utiliza-se o método de mínimos quadrados generalizados. Deste modo, G é uma matriz simétrica positiva definida que representa as variâncias e covariância dos erros, com diagonal principal contendo as ponderações para a variâncias e os demais elementos relativos à correlação dos resíduos (HOFFMANN et al., 2016).

De acordo com Rawlings, Pantula e Dickey (2001), uma transformação linear é feita em Y para que o modelo transformado satisfaça a condição $Var(\varepsilon) = G\sigma^2$, isto é, $T'T = G$, sendo T uma matriz não singular e que apresenta inversa T^{-1} .

Então, a partir do modelo $Y = X\theta + \varepsilon$, é possível reescrevê-lo após pré-multiplicar ambos lados por T^{-1} :

$$T^{-1}Y = T^{-1}X\theta + T^{-1}\varepsilon$$

considerando o novo modelo como $Y^* = X^*\theta + \varepsilon^*$, em que $Y^* = T^{-1}Y$, $T^{-1}X = X^*$ e $T^{-1}\varepsilon = \varepsilon^*$, então

$$Var(\varepsilon^*) = Var(T^{-1}\varepsilon) = T^{-1}Var(\varepsilon)(T^{-1})' = T^{-1}G(T^{-1})'\sigma^2 = T^{-1}T'T(T^{-1})'\sigma^2 = I\sigma^2$$

Retornando ao conceito de mínimos quadrados ordinários:

$$\hat{\theta}_G = (X'^*X^*)^{-1}X'^*Y^*$$

$$\hat{\theta}_G = (X(T^{-1})'T^{-1}X)^{-1}X'(T^{-1})'T^{-1}Y$$

$$\hat{\theta}_G = (X(TT)^{-1}X)^{-1}X'(TT)^{-1}Y$$

$$\hat{\theta}_G = (XG^{-1}X)^{-1}X'G^{-1}Y$$

sendo a matriz G :

$$G = \frac{\sigma_\varepsilon^2}{1 - \phi_1^2} \begin{bmatrix} 1 & \phi_1 & \phi_1^2 & \dots & \phi_1^{n-1} \\ \phi_1 & 1 & \phi_1 & \dots & \phi_1^{n-2} \\ \phi_1^2 & \phi_1 & 1 & \dots & \phi_1^{n-3} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \phi_1^{n-1} & \phi_1^{n-2} & \phi_1^{n-3} & \dots & 1 \end{bmatrix}$$

2.11 Métodos iterativos

Normalmente, os métodos iterativos utilizados para estimar os parâmetros de modelos não lineares têm o propósito de encontrar a melhor estimativa baseadas em aproximações que são aprimoradas a cada iteração, sendo que a primeira aproximação depende de um valor inicial informado pelo pesquisador. Os métodos mais frequentes na literatura são o Steepest Descent ou Gradiente, o Marquardt e o de Gauss-Newton (BATES; WATTS, 1980).

A partir de um valor inicial θ^0 , denominado θ^n , é possível determinar o próximo valor θ^{n+1} acrescentando um vetor λ^n :

$$\theta^{n+1} = \theta^n + \lambda^n$$

Supondo que o objetivo é minimizar a soma de quadrado dos erros $S(\theta)$, então $S(\theta^{n+1})$ deve ser menor que $S(\theta^n)$. Em seguida, deve-se escolher algum critério de parada e esperar a convergência. O critério pode ser quando a próxima atualização do parâmetro não for significativa em relação à anterior ou quando a diferença da soma de quadrados entre elas for muito pequena. De acordo Draper e Smith (1998) os métodos iterativos usuais se diferenciam basicamente pela forma como λ^n é calculada.

Para obter a solução da função, geralmente é utilizado o gradiente dado por:

$$X = \frac{\partial S(\theta)}{\partial \theta}$$

No caso do método de Steepest Descent ou Gradiente, $\theta^{n+1} - \theta^n = X'\varepsilon$. Uma desvantagem dessa simplicidade é que a convergência ocorre de forma muito lenta e por isso sua escolha não é muito recomendada.

Segundo Mischan e Pinho (2014), o método Marquardt é um dos mais utilizados em programas de regressão não-linear, sendo uma combinação de dois outros métodos, o da descida linear e o de Gauss Newton. Nesse caso, $\theta^{n+1} - \theta^n = [X'X + K \cdot \text{diag}(X'X)^{-1}X'\varepsilon]$, em que $(X'X)^{-1}$ corresponde à inversa generalizada da matriz $(X'X)$.

Para o método de Newton, $\theta^{n+1} - \theta^n = (H^n)^{-1}X'\varepsilon$, em que, $(H^n)^{-1}$ é a inversa da hessiana. Esse método utiliza a matriz hessiana pois realiza uma aproximação de $S(\theta^{n+1})$ em θ^n por expansão da série de Taylor:

$$S(\theta^{n+1}) \simeq S(\theta^n) + (\theta^{n+1} - \theta^n)'S(\theta^n) + \frac{1}{2}(\theta^{n+1} - \theta^n)'H^n(\theta^{n+1} - \theta^n) \quad (2.7)$$

Como a matriz hessiana H^n pode não ser positiva definida fora da região do mínimo, então pode acontecer de não haver convergência.

O método de Gauss-Newton parte do problema de minimizar a soma de quadrado dos erros do modelo 2.2. Depois de encontrar a hessiana, parte da equação é descartada por contribuir pouco para a estimação e assim, $\theta^{n+1} - \theta^n = (X'X)X'\varepsilon$. Percebe-se que a mudança em relação ao método anterior é devido apenas a uma alteração no tamanho do passo de cada iteração. Comparando com os demais métodos já citados, o de Gauss-Newton é o mais utilizado em artigos recentes na literatura (RIBEIRO et al., 2018b; SILVEIRA et al., 2018; SILVA et al., 2019a; SILVA et al., 2019b; SOUZA et al., 2019b; FERNANDES et al., 2019; JANE et al., 2020).

O essencial em todos esses métodos é fazer uma boa escolha dos valores iniciais para os parâmetros, dessa forma é possível obter rápida convergência e boas estimativas, independente

do método escolhido (MAZUCHELI; ACHCAR, 2002).

2.12 Pressuposições do modelo

Em muitos trabalhos, a análise de resíduos do modelo é desprezada. No entanto, essa etapa é muito importante para garantir que as inferências a partir dos parâmetros estimados sejam confiáveis. Para verificar os pressupostos de normalidade, independência e homogeneidade de variâncias dos resíduos é possível utilizar análise gráfica ou diferentes testes estatísticos, alguns deles serão apresentados a seguir.

2.13. Normalidade dos resíduos

O teste de Shapiro-Wilk (SHAPIRO; WILK, 1965) é utilizado para verificar o pressuposto de normalidade dos resíduos. As hipóteses podem ser escritas da seguinte forma:

H_0 : os resíduos apresentam distribuição Normal;

H_a : os resíduos não apresentam distribuição Normal.

A estatística utilizada para este teste é dada por:

$$W = \frac{b^2}{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})}$$

em que, b é determinado pela equação a seguir, dependendo do valor de n . Se n é par:

$$b = \sum_{i=1}^{n/2} a_{n-i+1} (x_{(n-i+1)} - x_{(i)})$$

ou se n é ímpar:

$$b = \sum_{i=1}^{(n+1)/2} a_{n-i+1} (x_{(n-i+1)} - x_{(i)})$$

em que a_{n-i+1} são constantes geradas pelas médias, variâncias e covariâncias das estatísticas de ordem de uma amostra de tamanho n de uma distribuição Normal. E x_i são os valores da amostra ordenados, sendo $x_{(1)}$ o menor valor.

Em geral, quando a pressuposição de normalidade dos resíduos não é atendida os pesquisadores aplicam alguma transformação na variável resposta e esta impacta diretamente na interpretação dos parâmetros obtidos. Andrade, Cirillo e Beijo (2014) propuseram um algoritmo *bootstrap* que permite incluir medidas de influência em modelos de regressão não linear quando há violação na pressuposição da normalidade devido a presença de outliers. Os autores concluíram que esse procedimento proporciona uma redução do viés das estimativas do parâmetros. Mangueira et al. (2016) sugeriram ajustar modelos não lineares considerando a distribuição assimétrica dos erros e concluíram com base em alguns avaliadores de ajuste que

essa seria a forma mais adequada de descrever a curva de crescimento de altura de milho.

2.14 Independência dos resíduos

Ao construir modelos utilizando medidas obtidas ao longo do tempo é comum que os resíduos também apresentem autocorrelação (SEBER; WILD, 1989). De acordo com Morettin e Toloí (2006), os resíduos são ditos auto-correlacionados quando há uma variação sistemática dos valores em observações sucessivas. No caso de estudos de modelos não lineares para descrever curvas de crescimento, tem-se medidas obtidas ao longo do tempo e, segundo Prado, Savian e Muniz (2013), é razoável incorporar a autocorrelação.

Assumindo que os resíduos são auto-correlacionados na forma de um processo estacionário auto-regressivo de ordem p , representado por $AR(p)$, então $\varepsilon_i = \phi_1 \varepsilon_{i-1} + \phi_2 \varepsilon_{i-2} + \dots + \phi_p \varepsilon_{i-p} + u_i$, em que $\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_p$ são parâmetros de autocorrelação e $u_i \sim N(0, \sigma^2)$ é um ruído branco. Quando há autocorrelação residual de primeira ordem $AR(1)$, os erros do modelo pode ser representados como $u_i = \phi_1 \varepsilon_{i-1} + \varepsilon_i$.

A verificação se os resíduos são independentes ou autocorrelacionados pode ser feita a partir do teste de Durbin-Watson, as hipóteses são:

H_0 : os resíduos são independentes;

H_a : os resíduos não são independentes.

A estatística de teste varia de 0 a 4 e para verificar se há autocorrelação de primeira ordem $AR(1)$, ela pode ser calculada por

$$DW = \frac{\sum_{i=2}^n (\varepsilon_i - \varepsilon_{i-1})^2}{\sum_{i=1}^n \varepsilon_i^2}$$

em que ε_i e ε_{i-1} são os resíduos nos tempo i e $i - 1$ respectivamente. Caso o valor calculado de DW seja próximo de 0 há indicação de autocorrelação positiva, se o valor é próximo de 2 então os resíduos são considerados independentes e se o valor está mais perto de 4 a autocorrelação dos resíduos é negativa.

2.15 Homogeneidade dos resíduos

Segundo Pereira et al. (2016), a presença de heterogeneidade de variâncias é uma das características inerentes à dados de crescimento medidos ao longo do tempo. Quando a heterocedasticidade não é considerada na análise, os resultados obtidos possivelmente não serão precisos.

Um estudo de caso usando dados de ganho de peso de codornas mostrou que o ajuste do modelo Gompertz, sob a suposição de homogeneidade de variâncias dos erros, superestimou o verdadeiro peso médio assintótico das aves. O problema foi corrigido após considerar a

presença de heterocedasticidade nos resíduos, incorporando-as no modelo (Mazucheli; Souza; Philippsen, 2011).

Pereira et al. (2016) concluíram, com o auxílio do desvio padrão residual, que o ajuste do modelo Gompertz pelo método dos mínimos quadrados generalizados, incorporando a heterogeneidade de variâncias e a autocorrelação residual, é indicado para modelar curvas de crescimento da altura de cafeeiro.

Normalmente, a heterogeneidade de variâncias é verificada a partir de gráficos ou testes estatísticos. Um gráfico simples, que pode ajudar a identificar essa característica é o de resíduos *versus* valores ajustados. O padrão ideal para esse tipo de gráfico é uma distribuição aleatória com média 0 e com amplitude constante. Em relação aos testes, o mais comum na literatura é o teste de Breusch-Pagan (BREUSCH; PAGAN, 1979) que considera as seguintes hipóteses:

H_0 : os resíduos são homocedásticos;

H_a : os resíduos não são homocedásticos.

A estatística de teste segue uma distribuição de qui-quadrado, após calculada é comparado com o valor tabelado considerando 1 grau de liberdade e pode ser obtida a partir do ajuste de um modelo linear simples e em seguida, são calculados os resíduos padronizados:

$$u_i = \frac{e_i^2}{\frac{\sum_{i=1}^n e_i^2}{n}}$$

Posteriormente, deve-se construir a regressão entre $u_i = (u_1, \dots, u_n)$, como variável resposta, e o vetor \hat{y} , como variável explicativa, para então obter a estatística de teste:

$$\chi_{BP}^2 = \frac{SQReg}{2} \quad (2.8)$$

Logo, se não houver heteroscedasticidade, espera-se que os resíduos ao quadrado não aumentem ou diminuam com o aumento do valor predito, \hat{y} , tornando assim, a estatística de teste χ_{BP}^2 não significativa.

2.16 Critérios para seleção de modelos

A qualidade do ajuste dos modelos pode ser verificada utilizando alguns critérios como: o coeficiente de determinação ajustado (R_a^2); o desvio padrão residual (DRP) e o critério de Akaike corrigido (AICc).

2.17 Coeficiente de determinação ajustado

O coeficiente de determinação ajustado é útil para comparar modelos com diferentes quantidades de parâmetros. A sua equação depende do coeficiente de determinação (R^2), apresentado a seguir.

$$R^2 = \frac{SQR}{SQT} \quad (2.9)$$

o R^2 é basicamente a razão entre a soma de quadrados da regressão (SQR) e a soma de quadrados total (SQT), ou seja, ele indica quanto o modelo foi capaz de explicar os dados. O R_a^2 pode ser escrito como:

$$R_a^2 = 1 - \frac{(1 - R^2)(n - 1)}{n - p} \quad (2.10)$$

sendo n o número de observações e p o número de parâmetros do modelo. Quanto maior o valor do R_a^2 melhor o ajuste do modelo.

2.18 Desvio padrão residual

O desvio padrão residual é uma medida proporcional ao quadrado médio do resíduo (QMR) e pode ser escrita como:

$$DPR = \sqrt{QMR} \quad (2.11)$$

Neste caso, quanto menor o valor do DPR, melhor é o ajuste do modelo (PRADO; SAVIAN; MUNIZ, 2013).

2.19 Critério de informação de Akaike

O cálculo do critério de informação de Akaike (AIC), proposto por Akaike (1974), penaliza os modelos com relação ao número total de parâmetros. O AIC é comumente utilizado para selecionar modelos não lineares com melhor qualidade de ajuste, como pode ser observado no estudo de descrição da curva de mineralização de carbono feito por Silva et al. (2019a), Paula et al. (2020). Esse critério pode ser calculado usando a fórmula:

$$AIC = -2\ln(L(\theta)) + 2p \quad (2.12)$$

De acordo com Burnham e Anderson (2003), deve-se substituir o AIC pelo AICc quando o tamanho da amostra é pequena, ou seja, quando $\frac{n}{p} < 40$. Muitos estudos que envolvem modelos de regressão não linear utilizam esse critério para avaliar a qualidade de ajuste e escolher o melhor modelo (JANE et al., 2019b; FURTADO et al., 2019b). Esse indicador pode ser calculado a partir da seguinte expressão:

$$AICc = -2\ln(L(\theta)) + 2p + 2\frac{p(p+1)}{n-p-1} \quad (2.13)$$

em que, $\ln(L(\theta))$ é o logaritmo natural do máximo da verossimilhança, p é o número de parâmetros a ser estimado pelo modelo e n é o tamanho da amostra. Quanto menor o seu valor, melhor o ajuste do modelo.

2.20 Índice de ajuste da Assíntota

Sabe-se que os modelos Brody, Gompertz e Logístico apresentam a característica comum no que diz respeito a interpretação do parâmetro A , referindo-se à assíntota do modelo. Neste caso, um modelo bem ajustado indica que a estimativa da assíntota não difere muito do valor final observado nos dados. Para quantificar essa informação, Mischak e Pinho (2014) propuseram calcular o quociente entre a média dos últimos 20% valores medidos (20%VM) e o valor estimado da assíntota (\hat{A}), criando o critério do índice de ajuste da assíntota (IA). Quanto mais próximo de 1 o seu valor, melhor o ajuste do modelo.

$$IA = \frac{20\%VM}{\hat{A}}$$

2.21 Medidas de não linearidade

Para obter bons resultados assintóticos a partir de modelos não lineares, principalmente no caso de pequenas amostras, é preciso verificar se esses modelos apresentam comportamento não muito distante do linear. As primeiras medidas criadas para quantificar a não linearidade de modelos foram propostas por Beale (1960). No entanto, elas tendem a subestimar a verdadeira não linearidade (GUTTMAN; MEETER, 1965). Outros autores também propuseram algumas medidas e as mais utilizadas são o Vício de Box e a Curvatura de Bates e Wattes (MAZUCHELI; ACHCAR, 2002; ZEVIANI et al., 2012).

De acordo com Mazucheli e Achcar (2002) é desejável que os estimadores de mínimos quadrados tenham vício pequeno para exibirem comportamento próximo do linear e assim permitirem resultados mais confiáveis em suas inferências.

O vício de Box (BOX, 1971) foi proposto como uma estatística para avaliar os estimadores de mínimos quadrados dos parâmetros de modelos não lineares. Essa medida pode ser calculada a partir da seguinte equação:

$$V(\hat{\theta}) = -\frac{\sigma^2}{2} \left[\sum_{i=1}^n F(\theta) F'(\theta) \right]^{-1} \sum_{i=1}^n F(\theta) \operatorname{tr} \left[\left(\sum_{i=1}^n F(\theta) F'(\theta) \right)^{-1} H(\theta) \right] \quad (2.14)$$

sendo $F(\theta)$ o vetor ($p \times 1$) de primeiras derivadas de $f(X_i; \theta)$, $H(\theta)$ a matriz ($p \times p$) de segunda derivadas em relação a cada θ e tr indica a operação traço. Em geral, são usadas as estimativas $\hat{\sigma}_2$ e $\hat{\theta}$ no lugar dos parâmetros desconhecidos. O vício também pode ser apresentado na forma percentual:

$$\%V(\hat{\theta}) = \frac{100 \cdot V(\hat{\theta})}{\hat{\theta}} \quad (2.15)$$

Segundo Box (1971), o modelo apresenta comportamento não linear se $\%V(\hat{\theta}) > 1\%$, em valor absoluto. Assim, é possível identificar quais parâmetros do modelo mais contribuem para caracterizá-lo como não linear e então tentar uma nova reparametrização (MAZUCHELI; ACHCAR, 2002).

Para a nova reparametrização, o vício pode ser medido da seguinte forma:

$$V(\phi) = G'(\hat{\theta})V(\hat{\theta}) + \frac{1}{2} tr[M(\hat{\theta})Cov(\hat{\theta})] \quad (2.16)$$

em que $\phi = g(\theta)$ é o novo parâmetro, $G(\hat{\theta})$ é o vetor ($p \times 1$) de primeiras derivadas, $M(\hat{\theta})$ é a matriz ($p \times p$) de segunda derivadas, $Cov(\hat{\theta})$ é a matriz de variâncias e covariâncias assintótica de $\hat{\theta}$ dada por $\hat{\sigma}^2[F'(\hat{\theta})F(\hat{\theta})]^{-1}$.

Conhecendo as ideias de Beale (1960), Bates e Watts (1980) usaram conceitos de geometria diferencial para criar outras medidas de não linearidade com base na curvatura. Segundo Seber e Wild (1989), tais medidas podem ser usadas para comparar diferentes parametrizações ou mesmo conjunto de dados distintos visto que elas não dependem de mudanças na escala.

Bates e Watts (1980) mostraram que a não linearidade de um modelo pode estar associada a duas componentes distintas: a não linearidade intrínseca (IN) e a não linearidade devido ao efeito dos parâmetros (PE). A IN mede a extensão do espaço de estimação do modelo, enquanto que a PE representa o valor máximo do efeito correspondente a parametrização do modelo. No caso do modelo linear, essas quantidades são iguais a zero. Assim, quanto menor forem essas medidas mais próximo o modelo estará do linear.

Para estimar os parâmetros dos modelos não lineares é utilizada uma aproximação da série de Taylor, assim os autores defendem que essa aproximação linear só é válida dependendo da quantidade referente ao segundo termo da série de Taylor (2.7). Então, o termo

$$\frac{1}{2}(\theta^{n+1} - \theta^n)'H^n(\theta^{n+1} - \theta^n)$$

é dividido em duas componentes ortogonais que correspondem a projeção sobre o plano tangente e a reta normal ao plano tangente. A partir de uma matriz de projeção

$$P = \hat{F}(\hat{F}'\hat{F})^{-1}\hat{F}'$$

é possível obter essa decomposição. As componentes são representadas por

$$\hat{H} = \hat{H}^T + \hat{H}^N$$

em que T e N representam as componentes tangencial e normal, respectivamente. As medidas foram definidas comparando o termo quadrático com o linear da seguinte forma:

$$K^T = \frac{\|(\boldsymbol{\theta} - \hat{\boldsymbol{\theta}})' H^T (\boldsymbol{\theta} - \hat{\boldsymbol{\theta}})\|}{\|F(\boldsymbol{\theta} - \hat{\boldsymbol{\theta}})\|^2} \quad (2.17)$$

e

$$K^N = \frac{\|(\boldsymbol{\theta} - \hat{\boldsymbol{\theta}})' H^N (\boldsymbol{\theta} - \hat{\boldsymbol{\theta}})\|}{\|F(\boldsymbol{\theta} - \hat{\boldsymbol{\theta}})\|^2} \quad (2.18)$$

sendo K^T a medida relacionada ao efeito do parâmetro e K^N correspondente a medida de curvatura intrínseca do modelo.

3 MATERIAL E MÉTODOS

Nesta seção é apresentado o material utilizado no presente trabalho, proveniente de um experimento realizado com frutos de pessegueiro e também, a metodologia que será aplicada para modelar as curvas de crescimento.

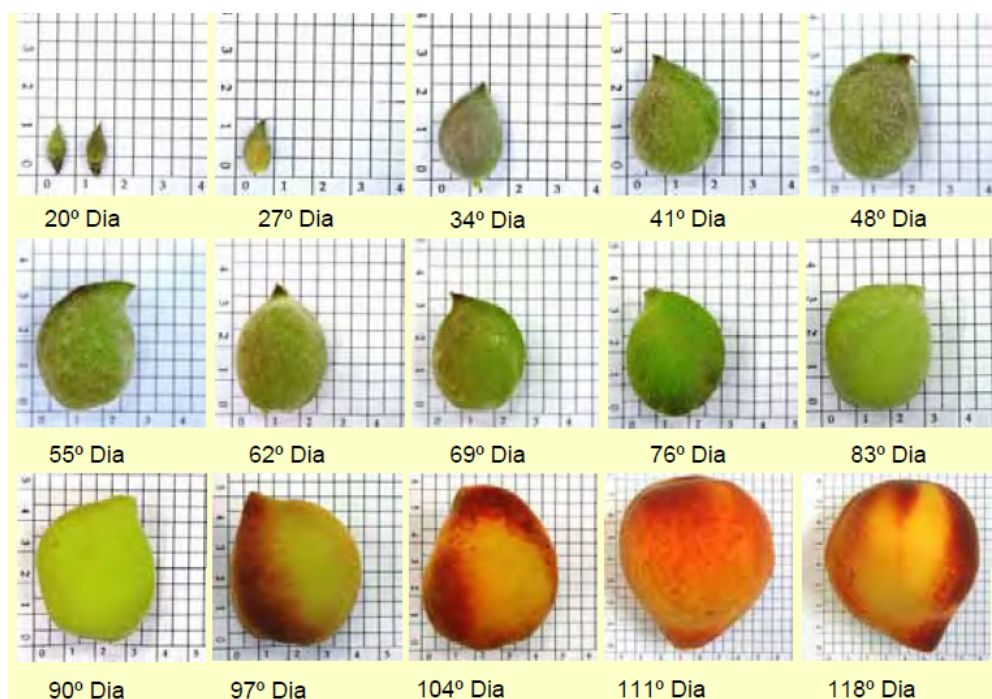
3.1 Material

Os dados utilizados neste trabalho foram obtidos de Cunha Junior et al. (2007) e correspondem a medidas de altura e diâmetro de frutos do pessegueiro “Aurora 1” produzidos em clima tropical. O experimento foi realizado em 2005, no município de Vista Alegre do Alto, próximo à Jaboticabal-SP.

Foram marcados 200 ramos que continham flores no estágio que antecede entre um ou dois dias a abertura total da flor (antese), em 15 plantas diferentes. Após 20 dias dessa marcação iniciou-se a coleta dos frutos que foram levados imediatamente para o laboratório.

A cada sete dias foram colhidos 30 diferentes frutos, escolhidos de forma aleatória. Em seguida, foram registradas suas respectivas medidas de altura e diâmetro em milímetros (mm), realizados com auxílio de paquímetro marca Mebo. Todo processo se repetiu até o período de total maturação dos frutos, concluindo em 111 dias. A Figura 3.1 mostra claramente a evolução do tamanho dos pêssegos ao longo do tempo.

Figura 3.1 – Imagens de pêssegos “Aurora-1” cultivados na região de Jaboticabal - SP.



Fonte: Adaptação de Cunha Junior (2007).

3.2 Modelos

Foram ajustados os modelos não lineares difásicos Brody + Brody (BB), Brody + Gompertz (BG), Brody + Logístico (BL), Gompertz + Gompertz (GG), Gompertz + Brody (GB), Gompertz + Logístico (GL), Logístico + Logístico (LL), Logístico + Brody (LB) e Logístico + Gompertz (LG). As estimativas dos parâmetros serão calculadas a partir do método de mínimos quadrados via algoritmo iterativo de Gauss-Newton.

3.3 Análise de resíduos

Para verificar as pressuposições de normalidade, independência e homoscedasticidade dos resíduos foram utilizados os testes de Shapiro-Wilk (SHAPIRO; WILK, 1965), Durbin-Watson (MORETTIN; TOLOI, 2006) e Breusch e Pagan (BREUSCH; PAGAN, 1979) respectivamente.

3.4 Seleção do modelo

A seleção do modelo que melhor se ajusta aos dados foi feita com base na análise dos maiores valores do coeficiente de determinação ajustado (R_a^2) e do índice de ajuste da assintota (IA), menores valores do desvio padrão residual (DPR) e do critério de informação de Akaike corrigido (AICc), além dos menores valores das medidas de não linearidade.

3.5 Recursos computacionais

Os modelos foram ajustados com base no método de mínimos quadrados ordinários, via algoritmo iterativo de Gauss-Newton, programado no software R (R Core Team, 2020).

Dentro do software, utilizamos a função *nls* presente no pacote *stats*.

Obtemos o valor do AICc a partir da função *AICc* do pacote *AICcmodavg*.

Os valores das medidas de não linearidade foram obtidos via função *rms.curv* do pacote *MASS*.

4 RESULTADOS E DISCUSSÃO

Serão apresentadas estatísticas descritivas dos dados de altura e diâmetro do fruto de pessegueiro, além dos modelos ajustados com as respectivas análises de resíduos e avaliadores da qualidade de ajuste.

4.1 Estatísticas descritivas

A Tabela 4.1 mostra algumas informações observadas das variáveis que foram utilizadas para descrever a curva de crescimento de frutos do pessegueiro “Aurora-1” a partir do ajuste de modelos não lineares.

As observações foram medidas em 14 tempos diferentes, ou seja, neste estudo foi coletado uma amostra pequena para cada uma das variáveis. Assim, de acordo com Burnham e Anderson (2003), o mais correto é utilizar o AICc no lugar do AIC como critério para selecionar os melhor modelo.

Além disso também é apresentado os valores mínimos e máximos. No caso da altura, O menor valor encontrado foi igual a 9,53 mm enquanto que para o diâmetro o valor mínimo foi igual a 4,83 mm. Os valores máximos para altura e diâmetro foram iguais a 57,36 mm e 50,31 mm respectivamente. O valor máximo dessas variáveis é uma informação útil ao ajustar modelos não lineares, esses valores foram utilizado como valor inicial para estimar a assíntota superior da curva de crescimento do fruto, já que um dos parâmetros, A_2 , tem exatamente essa mesma interpretação biológica, e que de acordo com Bebbington et al. (2009) é uma informação muito importante para os produtores.

Outras medidas, como as de tendência central dos dados, que ajudam a descrever as variáveis em estudo, também foram apresentadas na Tabela 1.3. O valor médio da altura é igual a 38,57 ao passo que a mediana foi igual ao valor 37,89, uma diferença de apenas 0,69 mm, indicando que os dados são distribuídos de forma levemente assimétrica à direita. Para a variável diâmetro, a diferença entre as duas estatísticas também indica uma distribuição assimétrica à direita com uma diferença um pouco maior entre elas (2,65 mm), com média igual a 29,50 e mediana igual a 26,85.

Tabela 4.1 – Estatísticas descritivas das variáveis altura e diâmetro, em milímetros (mm), de pêssegos “Aurora-1”.

Variável	Tempos	Mínimo	Máximo	Média	Mediana
Altura	14	9,53	57,36	38,57	37,89
Diâmetro	14	4,83	50,31	29,50	26,85

Fonte: Da autora (2020).

4.2 Ajuste dos modelos

As estimativas dos parâmetros obtidas para cada um dos modelos são apresentadas na Tabela 4.2.

Tabela 4.2 – Estimativas dos parâmetros dos modelos não lineares Brody (B), Gompertz (G) e Logístico (L) difásicos ajustados à dados de altura e diâmetro de pêssegos “Aurora-1”.

Variável	Modelo	A_1	A_2	B_1	B_2	K_1	K_2
Altura	BB	-	-	-	-	-	-
	BG	36,32	61,55	16,82	82,73	0,0943	0,0529
	BL	34,68	59,26	17,00	86,02	0,1036	0,0819
	GG	35,03	62,43	21,81	81,79	0,1444	0,0485
	GB	25,24	61,55	82,73	16,82	0,0529	0,0943
	GL	33,35	59,76	21,57	85,12	0,1559	0,0754
	LL	32,35	60,37	24,09	84,65	0,2170	0,0690
	LB	24,58	59,26	86,02	17,00	0,0819	0,1036
	LG	34,10	63,79	24,43	81,56	0,2041	0,0436
Diâmetro	BB	-	-	-	-	-	-
	BG	27,78	48,06	17,90	81,69	0,0728	0,1448
	BL	27,53	47,55	17,93	84,55	0,0743	0,2217
	GG	26,70	48,08	25,07	81,20	0,1263	0,1397
	GB	20,28	48,06	81,69	17,90	0,1448	0,0728
	GL	26,42	47,57	24,97	84,12	0,1294	0,2103
	LL	25,91	47,62	28,17	83,85	0,1923	0,2023
	LB	20,02	47,55	84,55	17,93	0,2217	0,0743
	LG	26,22	48,12	28,35	80,90	0,1868	0,1367

Fonte: Da autora (2020).

Não foi possível obter os parâmetros do modelo Brody + Brody (BB) para nenhuma das variáveis em estudo, altura e diâmetro. O ajuste não aconteceu devido a falta de convergência do modelo. Isso pode ter ocorrido devido a própria natureza dos dados, que tem comportamento de crescimento duplo sigmoidal, como já foi definido por Medeiros e Raseira (1998), Cunha Junior et al. (2007), Silva et al. (2013). Neste caso, o modelo BB não apresenta nenhuma fase com característica sigmóide e por isso, não conseguiu representar o crescimento. Os demais modelos se ajustaram aos dados de forma satisfatória.

Para a variável altura, todos os modelos ajustados superestimaram a medida do fruto à maturidade, isto é, todas as estimativas relativas ao parâmetro A_2 foram superiores ao valor máximo observado, igual a 57,36 mm. Os modelo Brody + Logístico (BL) e Logístico + Brody (LB) foram os que apresentaram estimativas que mais se aproximaram, com o mesmo valor e igual a 59,26 mm.

Por outro lado, os mesmos modelos ajustados para a variável diâmetro apresentaram estimativas do parâmetro A_2 inferiores ao valor máximo observado, subestimando o tamanho final do fruto, assim como apresentado no estudo de crescimento de café de Fernandes, Pereira e Muniz (2017). Segundo Muianga et al. (2016) essa subestimação pode ser explicada devido a desidratação do fruto após a maturação, colaborando para perda de dimensão, dessa forma o

diâmetro à maturidade (A_2) é naturalmente inferior ao valor máximo observado. O modelo Logístico + Gompertz (LG) foi o que mais aproximou do valor observado, com valor da assintota superior do crescimento igual a 48,12 mm.

As estimativas dos parâmetros B_1 e B_2 indicam as idades em que o fruto atinge a taxa máxima de crescimento em cada uma das fases. Observa-se que, em geral, a idade em dias após o florescimento está entre 16 e 29 dias para a primeira fase (B_1) e 81 e 87 dias para a segunda fase (B_2). No entanto, quando o modelo difásico é composto pelo modelo Brody na segunda fase, não é possível identificar uma interpretação biológica clara das estimativas dos parâmetros B_1 e B_2 . A principal justificativa, nesse caso, é a própria característica do modelo Brody que se diferencia dos demais por não apresentar comportamento sigmoidal.

Os parâmetros K_1 e K_2 também podem ser interpretados de forma biológica. Para a variável altura, o índice de crescimento é um pouco maior na primeira fase para a maioria dos modelos ajustados, assim como acontece com taxa de matéria fresca de cafeeiro estudada por Fernandes, Pereira e Muniz (2017). Observa-se um comportamento diferente para a maioria das estimativas desses mesmos parâmetros para a variável diâmetro, neste caso o índice é maior na segunda fase do crescimento. Outra curiosidade, é que sempre que os modelos são formados pelo modelo Brody na segunda fase, então a estimativa dos índices K_1 e K_2 são os mesmos valores correspondentes as estimativas K_2 e K_1 , respectivamente, do seu modelo construído na forma inversa, ou seja, a estimativa de K_1 do modelo GB é igual a estimativa de K_2 do modelo BG.

A Tabela 4.3 mostra um resumo da análise de resíduos para todos os modelos ajustados. Muniz, Nascimento e Fernandes (2017) e Ribeiro et al. (2018b) também utilizaram esses mesmos testes para verificar pressuposições dos resíduos obtidos a partir do ajuste de modelos não lineares.

Tabela 4.3 – Valores-p para os testes de normalidade de Shapiro-Wilk; independência de Durbin-Watson; e homogeneidade de variâncias de Breusch-Pagan para a análise de resíduos dos modelos não lineares Brody (B), Gompertz (G) e Logístico (L) difásicos ajustados à dados de altura e diâmetro de pêssegos “Aurora-1”.

Variável	Modelo	Shapiro–Wilk	Durbin–Watson	Breusch–Pagan
Altura	BB	-	-	-
	BG	0,26	0,88	0,17
	BL	0,45	0,66	0,15
	GG	0,14	0,95	0,18
	GB	0,26	0,95	0,17
	GL	0,25	0,88	0,15
	LL	0,38	0,93	0,16
	LB	0,45	0,68	0,15
	LG	0,33	0,85	0,21
Diâmetro	BB	-	-	-
	BG	0,17	0,47	0,28
	BL	0,20	0,22	0,19
	GG	0,45	0,77	0,09
	GB	0,17	0,65	0,21
	GL	0,45	0,75	0,16
	LL	0,48	0,71	0,12
	LB	0,20	0,59	0,36
	LG	0,23	0,67	0,08

Fonte: Da autora (2020).

Percebe-se que, tanto para a variável altura quanto para o diâmetro, todos os modelos ajustados indicam um valor-p maior que 0,05, atendendo as pressuposições de normalidade, independência e homocedasticidade dos erros ao nível de 5% de significância. Assim, é possível continuar comparando os oito modelos e escolher qual deles melhor descreve o crescimento.

As medidas da qualidade do ajuste desses modelos são apresentadas na Tabela 4.4, tanto para os dados de altura como para os dados de diâmetro.

Tabela 4.4 – Medidas da qualidade do ajuste dos modelos não lineares Brody (B), Gompertz (G) e Logístico (L) difásicos ajustados à dados de altura e diâmetro de pêssegos “Aurora-1”.

Variável	Modelo	R_a^2	AICc	DPR	IA	K^T	K^N
Altura	BB	-	-	-	-	-	-
	BG	0,99	56,39	1,46	0,88	4,70	0,61
	BL	0,99	57,26	1,50	0,92	5,04	0,45
	GG	0,99	55,85	1,43	0,87	4,46	0,52
	GB	0,99	56,39	1,46	0,88	5,04	0,45
	GL	0,99	56,37	1,45	0,91	4,77	0,39
	LL	0,99	75,13	1,46	0,90	5,05	0,38
	LB	0,99	57,26	1,50	0,92	5,04	0,45
	LG	0,99	56,44	1,46	0,85	5,03	0,48
Diâmetro	BB	-	-	-	-	-	-
	BG	0,98	64,09	1,92	0,98	2,13	0,50
	BL	0,98	65,04	1,98	0,99	2,23	0,59
	GG	0,98	60,07	1,66	0,98	1,31	0,46
	GB	0,98	64,09	1,92	0,98	2,23	0,59
	GL	0,98	61,09	1,72	0,99	1,28	0,47
	LL	0,98	78,22	1,63	0,99	1,12	0,44
	LB	0,98	65,04	1,98	0,99	2,23	0,59
	LG	0,99	58,82	1,59	0,98	1,18	0,48

Fonte: Da autora (2020).

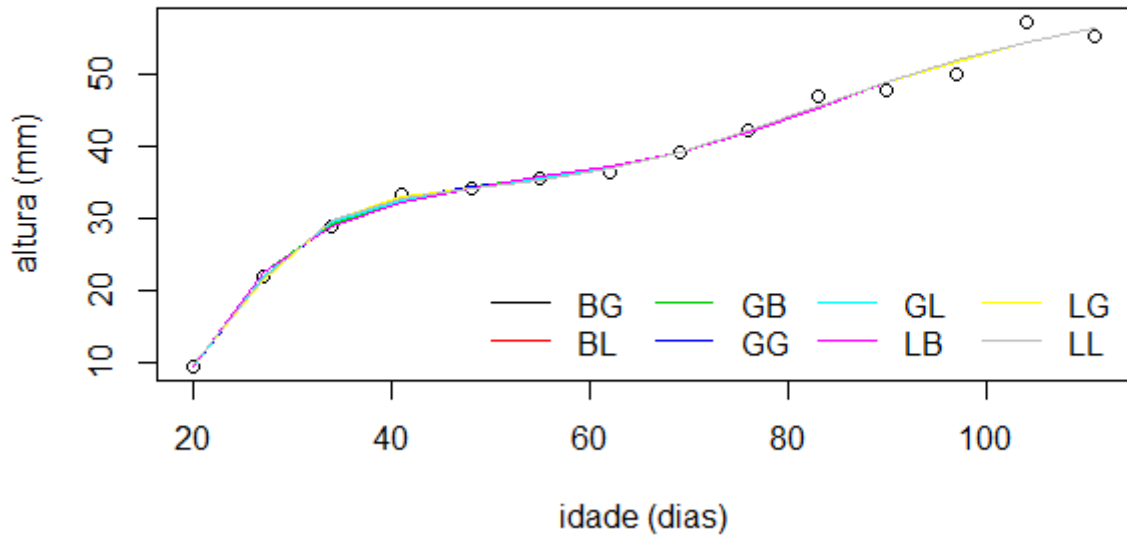
Verifica-se que os valores do DPR dos modelos ajustados não ultrapassaram 1,98 mm, valor inferior ao DPR encontrado no trabalho de Génard, Bruchou e Souty (1991). Esses autores defendem o bom ajuste do modelo Brody + Logístico (BL), ajustado à dados de diâmetro de pêssegos, com DPR aproximadamente igual a 2,5 mm.

Todos os modelos apresentam bom desempenho ao observar o índice de ajuste da assíntota (IA), valores muito próximos de 1. Com destaque para a combinação dos modelos Brody e Logístico (BL ou LB), tanto para a variável altura quanto para a variável diâmetro.

Em geral, todos os modelos apresentados na Tabela 4.4 manifestaram bom desempenho e se ajustaram aos dados de forma satisfatória, assim como observado no trabalho de Fernandes, Pereira e Muniz (2017) que ajustaram os modelos GG e LL aos dados de crescimento de café e obtiveram ótimos resultados, com valores de R_{aj}^2 , DPR e AIC muito próximos.

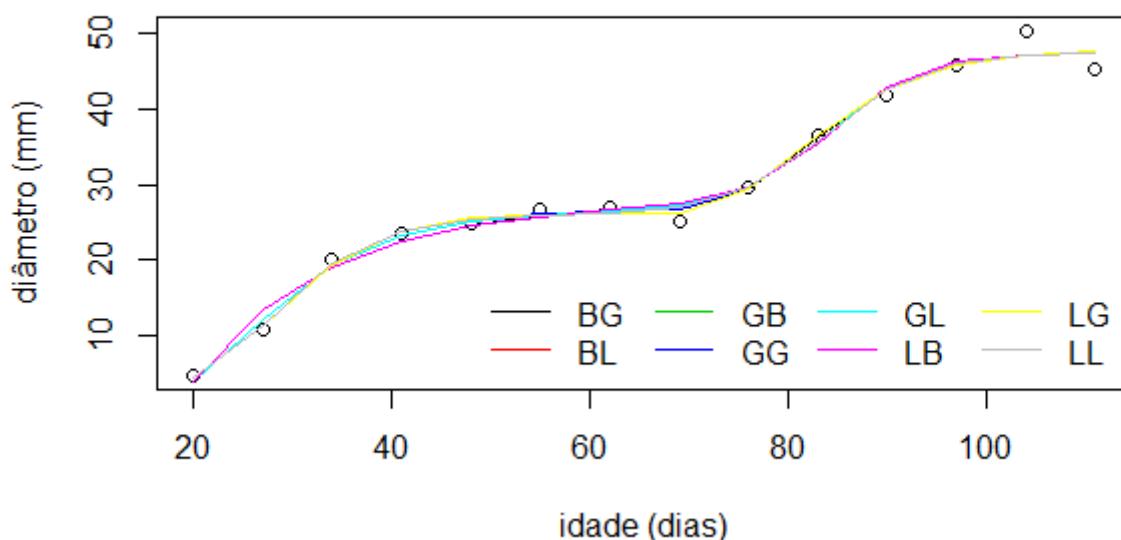
A representação gráfica com os dados observados juntamente com a ilustração do ótimo ajuste dos modelos difásico pode ser conferida na Figura 4.1 para a variável altura e na Figura 4.2 para a variável diâmetro. Confirmando o comportamento de crescimento com caráter duplo sigmóide já mencionado por outros autores como Álvares et al. (2004), Donoso et al. (2006), Bruna (2007), mas que não chegaram a ajustar modelos.

Figura 4.1 – Gráfico do ajuste de modelos não lineares difásicos para dados de altura de pêsesgos “Aurora-1”. BG = Brody + Gompertz, BL = Brody + Logístico, GB = Gompertz + Brody, GG = Gompertz + Gompertz, GL = Gompertz + Logístico, LB = Logístico + Brody, LG = Logístico + Gompertz, LL = Logístico + Logístico.



Fonte: Da autora (2020).

Figura 4.2 – Gráfico do ajuste de modelos não lineares difásicos para dados de diâmetro de pêssegos “Aurora-1”. BG = Brody + Gompertz, BL = Brody + Logístico, GB = Gompertz + Brody, GG = Gompertz + Gompertz, GL = Gompertz + Logístico, LB = Logístico + Brody, LG = Logístico + Gompertz, LL = Logístico + Logístico.



Fonte: Da autora (2020).

Para a variável altura, todos os modelos apresentam o mesmo valor para o coeficiente de determinação ajustado, indicando que todos os oito modelos podem ser utilizados para descrever o fruto. Ainda assim, o modelo duplo Gompertz (GG) apresentou os menores valores de AICc, DPR e K^T , apenas o valor de K^N não está entre os menores comparando aos demais modelos. Outros autores que também obtiveram boas estimativas ao ajustar o modelo GG foi Hurwitz et al. (1991) ao descrever a curva de crescimento de perus.

Já para a variável diâmetro, o modelo que melhor se ajustou aos dados, de acordo com os mesmos critérios, foi o modelo Logístico + Gompertz (LG). Neste caso, o modelo LG apresentou o maior valor de R_{aj}^2 , além dos menores valores para AICc, DPR e K^T .

A partir do ajuste desses modelos é possível afirmar que as medidas de altura e diâmetro do fruto ao final da primeira etapa do processo de crescimento foram de 35,03 mm e 26,22 mm, enquanto que no final da segunda etapa chegou a 62,43 mm e 48,12 mm respectivamente. Além disso, as idades de 22 e 82 dias para a altura e 29 e 81 dias para o diâmetro, após o florescimento, corresponderam aos tempos em que o fruto atingiu a taxa máxima de crescimento na primeira e na segunda etapa do processo. O desenvolvimento da primeira etapa de crescimento foi mais acelerado para as duas variáveis em estudo, correspondendo a 0,14 mm ao dia para altura e 0,19 mm ao dia para diâmetro, ao passo que o índice associado ao desenvolvimento da segunda etapa foi de 0,05 mm ao dia para altura e 0,14 mm para o diâmetro.

5 CONCLUSÃO

A maior parte dos modelos difásicos, com caráter duplo sigmoidal, construídos a partir da combinação dos modelos Brody, Gompertz e Logístico se ajustaram bem aos dados de altura e diâmetro de pêssegos “Aurora-1”, a única exceção foi o modelo Brody + Brody que não pode ser ajustado.

A partir da análise conjunta dos critérios de qualidade de ajuste verifica-se que o modelo que melhor se ajustou aos dados de altura foi o duplo Gompertz (GG), enquanto que o modelo Logístico + Gompertz (LG) foi o que melhor se ajustou aos dados de diâmetro.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

AGROSTAT. **Estatísticas de Comercio Exterior do Agronegócio Brasileiro**. BRASIL, 2012. Disponível em: <<http://sistemasweb.agricultura.gov.br/pages/AGROSTAT.html>>.

AKAIKE, H. A new look at the statistical model identification. **IEEE transactions on automatic control**, Ieee, v. 19, n. 6, p. 716–723, 1974.

ÁLVARES, V. D. S. et al. Desenvolvimento do pêssego'rei da conserva'em viçosa, mg. **Ceres**, v. 51, n. 294, 2004.

ÁLVAREZ, A.; BOCHE, S. Modelos matemáticos para describir crecimientos doble sigmoideos en frutos de un nectarin tardío (cv sun grand). **Agro sur**, v. 27, n. 1, p. 21–28, 1999.

AMABILE, R. F.; GUIMARÃES, D. P.; NETO, A. L. de F. Análise de crescimento de girassol em latossolo com diferentes níveis de saturação por bases no cerrado. **Pesquisa Agropecuária Brasileira**, v. 38, n. 2, p. 219–224, 2003.

ANDRADE, L. Ribeiro de; CIRILLO, M. A.; BEIJO, L. A. Proposal of a bootstrap procedure using measures of influence in non-linear regression models with outliers. **Acta Scientiarum. Technology**, Universidade Estadual de Maringá, v. 36, n. 1, 2014.

ASCHONITIS, V. G. et al. A review and synthesis of bivariate non-linear models to describe the relative variation of ecological, biological and environmental parameters. **Environmental Modeling & Assessment**, Springer, v. 20, n. 2, p. 169–182, 2014.

BATES, D. M.; WATTS, D. G. Relative curvature measures of nonlinearity. **Journal of the Royal Statistical Society. Series B (Methodological)**, JSTOR, p. 1–25, 1980.

BEALE, E. Confidence regions in non-linear estimation. **Journal of the Royal Statistical Society. Series B (Methodological)**, JSTOR, p. 41–88, 1960.

BEBBINGTON, M. et al. Dynamics and phases of kiwifruit (*actinidia deliciosa*) growth curves. **New Zealand Journal of Crop and Horticultural Science**, Taylor & Francis, v. 37, n. 3, p. 179–188, 2009.

BEM, C. M. d. et al. Univariate and multivariate nonlinear models in productive traits of the sunn hemp. **Revista Ciência Agrônômica**, SciELO Brasil, v. 51, n. 1, 2020.

BLACKMAN, V. The compound interest law and plant growth. **Annals of botany**, JSTOR, v. 33, n. 131, p. 353–360, 1919.

BOX, M. Bias in nonlinear estimation. **Journal of the Royal Statistical Society. Series B (Methodological)**, JSTOR, p. 171–201, 1971.

- BREUSCH, T. S.; PAGAN, A. R. A simple test for heteroscedasticity and random coefficient variation. **Econometrica: Journal of the Econometric Society**, JSTOR, p. 1287–1294, 1979.
- BRIGGS, G.; KIDD, F.; WEST, C. A quantitative analysis of plant growth: Part ii. **Annals of applied Biology**, Wiley Online Library, v. 7, n. 2-3, p. 202–223, 1920.
- BRODY, S. **Bioenergetics and growth**. [S.l.]: Reinhold Publishing Corporation: New York, 1945.
- BRUCKNER, C. H. et al. Curva de crescimento e padrão respiratório de frutos de genótipos de pessegueiro em região de clima subtropical. **Revista Brasileira de Fruticultura**, 2013.
- BRUNA, E. D. Curva de crescimento de frutos de pêsego em regiões subtropicais. **Revista Brasileira de Fruticultura**, Sociedade Brasileira de Fruticultura, v. 29, n. 3, p. 685–689, 2007.
- CARNEIRO, A. P. S. et al. Identidade de modelos não lineares para comparar curvas de crescimento de bovinos da raça tabapuã. **Pesq. agropec. bras**, SciELO Brasil, p. 57–62, 2014.
- CARVALHO, L. R. d. et al. Ajustes de modelos não lineares de efeitos fixos, com ponderação e misto-aplicações. **Revista Brasileira de Biometria**, p. 296–307, 2014.
- CASIERRA-POSADA, F.; BARRETO, V. E.; FONSECA, O. L. Crecimiento de frutos y ramas de duraznero (*prunus persica* l. batsch, cv.'conservero') en los altiplanos colombianos. **Agronomía Colombiana**, Universidad Nacional de Colombia, v. 22, n. 1, 2004.
- CAVALINI, F. C. et al. Maturity indexes for 'kumagai' and 'paluma' guavas. **Revista Brasileira de Fruticultura**, SciELO Brasil, v. 28, n. 2, p. 176–179, 2006.
- COOMBE, B. The development of fleshy fruits. **Annual Review of Plant Physiology**, Annual Reviews 4139 El Camino Way, PO Box 10139, Palo Alto, CA 94303-0139, USA, v. 27, n. 1, p. 207–228, 1976.
- CORDEIRO, G. M.; PRUDENCE, A. A.; DEMÉTRIO, C. G. B. Uma revão dos modelos normais não-lineares. **Rev. Bras. Biom**, v. 27, n. 3, p. 360–393, 2009.
- CUNHA JUNIOR, L. C. Caracterização do desenvolvimento de pêsegos aurora-1 e sua conservação pós-colheita em dois estádios de maturação. Universidade Estadual Paulista (UNESP), 2007.
- CUNHA JUNIOR, L. C. et al. Caracterização da curva de maturação de pêsegos aurora-1, na região de Jaboticabal-SP. **Revista Brasileira de Fruticultura**, Sociedade Brasileira de Fruticultura, p. 661–665, 2007.
- DONOSO, J. et al. Comportamiento fenológico del duraznero (*prunus persica* l.) en tres localidades de la vi región. **INIA Informativo Nro**, v. 13, 2006.

DRAPER, N. R.; SMITH, H. **Applied Regression Analysis, Third Edition**. [S.l.]: 3 ed. New York: John Wiley. 706 p., 1998.

FACHINELLO, J. C. et al. Situação e perspectivas da fruticultura de clima temperado no Brasil. **Revista Brasileira de Fruticultura**, v. 33, n. 1, p. 109–120, 2011.

FAOSTAT, F. Statistical databases. **Food and Agriculture Organization of the United Nations**, 2020.

FERNANDES, F. A. et al. Curvas de crescimento de mamíferos produtores de carne pelo modelo de von Bertalanffy. **Pesquisa Agropecuária Brasileira**, SciELO Brasil, v. 54, 2019.

FERNANDES, T. J. et al. Parameterization effects in nonlinear models to describe growth curves. **Acta Scientiarum. Technology**, Editora da Universidade Estadual de Maringá-EDUEM, v. 37, n. 4, p. 397, 2015.

FERNANDES, T. J.; PEREIRA, A. A.; MUNIZ, J. A. Double sigmoidal models describing the growth of coffee berries. **Ciência Rural**, SciELO Brasil, v. 47, n. 8, 2017.

FERNANDES, T. J. et al. Seleção de modelos não lineares para a descrição das curvas de crescimento do fruto do cafeeiro. **Coffee Science**, v. 9, n. 2, p. 207–215, 2014.

FURTADO, T. D. R. et al. Drying kinetics of jabuticaba pulp by regression models. **Revista Brasileira de Fruticultura**, SciELO Brasil, v. 41, n. 1, 2019.

FURTADO, T. D. R. et al. Natural convection drying kinetics of ‘prata’ and ‘d’água’ banana cultivars (*Musa ssp*) by nonlinear regression models. **Revista Brasileira de Fruticultura**, SciELO Brasil, v. 41, n. 5, 2019.

GÉNARD, M.; BRUCHOU, C.; SOUTY, M. Variabilité de la croissance et de la qualité chez la pêche (*Prunus persica* L. Batsch) et liaison entre croissance et qualité. **Agronomie**, v. 11, n. 10, p. 829–845, 1991.

GOMES, R.; PINHEIRO, M. C. B.; LIMA, H. Fenologia reprodutiva de quatro espécies de Sapotaceae na restinga de Maricá, RJ. **Revista Brasileira de Botânica**, SciELO Brasil, v. 31, n. 4, p. 679–687, 2008.

GUTTMAN, I.; MEETER, D. A. On Beale’s measures of non-linearity. **Technometrics**, Taylor & Francis Group, v. 7, n. 4, p. 623–637, 1965.

HAU, B.; AMORIM, L.; BERGAMIN FILHO, A. Mathematical functions to describe disease progress curves of double sigmoid pattern. **Phytopathology**, v. 83, n. 9, p. 928–932, 1993.

HOFFMANN, R. et al. **Análise de regressão: uma introdução à econometria**. [S.l.]: São Paulo, 2016.

HURWITZ, S. et al. Characterization of growth and development of male british united turkeys. **Poultry science**, Oxford University Press Oxford, UK, v. 70, n. 12, p. 2419–2424, 1991.

JANE, S. A. et al. Comparison of polynomial and nonlinear models on description of pepper growth. **Revista Brasileira de Ciências Agrárias**, v. 14, n. 4, 2019.

JANE, S. A. et al. Adjusting the growth curve of sugarcane varieties using nonlinear models. **Ciência Rural**, SciELO Brasil, v. 50, n. 3, 2020.

LARUE, J. H.; JOHNSON, R. S. **Peaches, plums, and nectarines: Growing and handling for fresh market**. [S.l.]: UCANR Publications, 1989. v. 3331.

LIMA, K. P. d. et al. Uso de modelos não lineares na descrição do acúmulo de boro em diferentes partes do feijoeiro cultivar jalo. **Revista Brasileira de Biometria**, v. 35, n. 4, p. 834–861, 2017.

LÚCIO, A. D. et al. Modelos não-lineares para a estimativa da produção de tomate do tipo cereja. **Ciência Rural**, SciELO Brasil, v. 46, n. 2, p. 233–241, 2016.

MADAIL, J. C.; RASEIRA, M. Aspectos da produção e mercado do pêsego no brasil. **Embrapa Clima Temperado-Circular Técnica (INFOTECA-E)**, Pelotas: Embrapa Clima Temperado, 2008., 2008.

MANGUEIRA, R. A. F. et al. Logistic model considering different error distributions applied in maize height data. **Revista Brasileira de Biometria**, v. 34, n. 2, p. 317–333, 2016.

MARTÍNEZ, J. D. et al. Growth models of peach fruit *prunus persica* (l) in three handling systems. **Interciencia**, Asociación Interciencia, v. 42, n. 9, 2017.

MAZUCHELI, J.; ACHCAR, J. A. Algumas considerações em regressão não linear. **Acta Scientiarum**, Maringá, v. 24, n. 6, p. 1761–1770, 2002.

MAZUCHELI, J.; SOUZA, R. d.; PHILIPPSEN, A. S. Modelo de crescimento de gompertz na presença de erros normais heterocedásticos: um estudo de caso. **Revista Brasileira de Biometria**, v. 29, n. 1, p. 91–101, 2011.

MAZZINI, A. R. de A. et al. Curva de crescimento de novilhos hereford: heterocedasticidade e resíduos autorregressivos. **Ciência Rural**, SciELO Brasil, v. 35, n. 2, p. 422–427, 2005.

MEDEIROS, C. A. B.; RASEIRA, M. d. C. B. **A cultura do pessegueiro**. [S.l.]: Embrapa-Serviço de Produção de Informação, Pelotas: Embrapa-Centro de Pesquisa Agropecuária de Clima Temperado, 1998.

- MENDES, P. N. et al. Modelo logístico difásico no estudo do crescimento de fêmeas da raça hereford. **Ciência Rural**, Universidade Federal de Santa Maria, v. 38, n. 7, 2008.
- MEYER, P. Bi-logistic growth. **Technological forecasting and social change**, Elsevier, v. 47, n. 1, p. 89–102, 1994.
- MISCHAN, M. M.; PINHO, S. Z. d. **Modelos não lineares**. [S.l.]: Cultura acadêmica, São Paulo -SP, 2014.
- MORETTIN, P. A.; TOLOI, C. **Análise de séries temporais**. [S.l.]: Blucher, 2006.
- MUIANGA, C. A. et al. Descrição da curva de crescimento de frutos do cajueiro por modelos não lineares. **Revista Brasileira de Fruticultura**, Directory of Open Access Journals, v. 38, n. 1, p. 22–32, 2016.
- MUNIZ, J. A.; NASCIMENTO, M. d. S.; FERNANDES, T. J. Nonlinear models for description of cacao fruit growth with assumption violations. **Revista Caatinga**, SciELO Brasil, v. 30, n. 1, p. 250–257, 2017.
- NAVA, A. D. et al. Growth kinetics of vegetative and reproductive organs of guava (*psidium guajava* L.) in iguala guerrero, mexico. **Agricultural Sciences**, Scientific Research Publishing, v. 5, n. 14, p. 1468, 2014.
- PAM, IBGE. PAM: Produção agrícola municipal 2018. **Instituto Brasileiro de Geografia e Estatística**. Acesso em maio de 2020.
- PAULA, G. S. de et al. Comparison of nonlinear models for the description of carbon mineralization in soils treated with pig slurry. **Revista Agrogeoambiental**, v. 11, n. 4, 2020.
- PEREIRA, A. A. et al. Modelagem não linear do crescimento em altura do cafeeiro irrigado e não irrigado em diferentes densidades. **IRRIGA**, v. 1, n. 1, p. 140–149, 2016.
- PRADO, T. et al. Ajuste do modelo logístico na descrição do crescimento de frutos de coqueiro anão por meio de algoritmos iterativos mcmc. **Revista Brasileira de Biometria**, v. 31, n. 2, 2013.
- PRADO, T. K. L.; SAVIAN, T. V.; MUNIZ, J. A. Ajuste dos modelos gompertz e logístico aos dados de crescimento de frutos de coqueiro anão verde. **Ciência Rural**, SciELO Brasil, v. 43, n. 5, 2013.
- R Core Team. **R: A Language and Environment for Statistical Computing**. Vienna, Austria, 2020. Disponível em: <<https://www.R-project.org/>>.
- RAWLINGS, J. O.; PANTULA, S. G.; DICKEY, D. A. **Applied regression analysis: a research tool**. [S.l.]: Springer Science & Business Media, 2001.

- RIBEIRO, T. D. et al. Description of the growth of pequi fruits by nonlinear models. **Revista Brasileira de Fruticultura**, SciELO Brasil, v. 40, n. 4, 2018.
- RIBEIRO, T. D. et al. The use of the nonlinear models in the growth of pears of 'shinseiki' cultivar. **Ciência Rural**, SciELO Brasil, v. 48, n. 1, 2018.
- ROCHA-SILVA, M. et al. Curva de crescimento de codornas de corte por meio de modelos de regressão não-lineares. **Archives of Veterinary Science**, v. 21, n. 4, 2016.
- SANTORO, K. R. et al. Estimativas de parâmetros de curvas de crescimento de bovinos zebu, criados no estado de pernambuco. **Revista Brasileira de Zootecnia**, Sociedade Brasileira de Zootecnia, v. 34, n. 6, p. 2262–2279, 2005.
- SEBER, G.; WILD, C. Nonlinear regression. 1989. **Search PubMed**, p. 325–365, 1989.
- SERRANO, L. A. L. et al. Goiabeira 'paluma' sob diferentes sistemas de cultivo, épocas e intensidades de poda de frutificação. **Pesquisa Agropecuária Brasileira**, SciELO Brasil, v. 42, n. 6, p. 785–792, 2007.
- SHAPIRO, S. S.; WILK, M. B. An analysis of variance test for normality (complete samples). **Biometrika**, JSTOR, v. 52, n. 3/4, p. 591–611, 1965.
- SHEEHY, J. E.; MITCHELL, P.; FERRER, A. B. Bi-phasic growth patterns in rice. **Annals of botany**, Oxford University Press, v. 94, n. 6, p. 811–817, 2004.
- SILVA, D. F. et al. Curva de crescimento e padrão respiratório de frutos de genótipos de pessegueiro em região de clima subtropical. **Revista de Fruticultura**, v. 35, n. 2, 2013.
- SILVA, E. M. et al. Description of the carbon mineralization of swine manure and oat straw in the soil through nonlinear models. **Revista Agrogeoambiental**, v. 11, n. 2, p. 71–86, 2019.
- SILVA, E. M. et al. Fitting of decomposition of sewage sludge and oat straw by nonlinear models. **Revista Agrogeoambiental**, 2019.
- SILVA, É. M. d. et al. Description of blackberry fruit growth by nonlinear regression models. **Revista Brasileira de Fruticultura**, SciELO Brasil, v. 42, n. 2, 2020.
- SILVEIRA, S. de C. et al. Modelos não lineares ajustados à produção acumulada de biogás provenientes de camas sobrepostas de suínos. **Revista Agrogeoambiental**, v. 10, n. 3, 2018.
- SOUSA, I. F. et al. Ajuste de modelos não lineares autorregressivos na descrição da germinação se sementes de café. **Ciência Rural**, v. 44, n. 11, p. 2016–2021, 2014.
- SOUZA, F. et al. Influence of temperature on the development of peach fruit in a subtropical climate region. **Agronomy**, Multidisciplinary Digital Publishing Institute, v. 9, n. 1, p. 20, 2019.

- SOUZA, F. A. C. d. et al. Morphometric characteristics of the mangalarga marchador horse breed determined by nonlinear models. **Pesquisa Agropecuária Brasileira**, SciELO Brasil, v. 54, 2019.
- TEIXEIRA NETO, M. R. et al. Descrição do crescimento de ovinos santa inês utilizando modelos não-lineares selecionados por análise multivariada. **Revista Brasileira de Saúde e Produção Animal**, v. 17, n. 1, p. 26–36, 2016.
- TERRA, M.; MUNIZ, J.; SAVIAN, T. Ajuste dos modelos logístico e gompertz aos dados de crescimento de frutos da tamareira-anã (*Phoenix roebelenii* o'brien). **Magistra, Cruz das Almas**, v. 22, n. 1, p. 1–7, 2010.
- TSOULARIS, A.; WALLACE, J. Analysis of logistic growth models. **Mathematical biosciences**, Elsevier, v. 179, n. 1, p. 21–55, 2002.
- VIEIRA, E. C. S. et al. Aceitabilidade e características físico-químicas de geleia mista de casca de abacaxi e polpa de pêssego. **Científica**, v. 45, n. 2, p. 115–122, 2017.
- WINSOR, C. P. The gompertz curve as a growth curve. **Proceedings of the national academy of sciences**, National Acad Sciences, v. 18, n. 1, p. 1–8, 1932.
- ZEVIANI, W. M. et al. Modelos não lineares para a liberação de potássio de esterco animais em latossolos. **Ciência Rural**, SciELO Brasil, v. 42, n. 10, p. 1789–1796, 2012.

CAPÍTULO 2 COMPARAÇÃO DE MODELOS COM CARÁTER DUPLO SIGMOIDAL APLICADOS NA DESCRIÇÃO DA CURVA DE CRESCIMENTO DO FRUTO DE PESSEGUEIRO

RESUMO

O desenvolvimento de frutos de pessegueiro passa por três estádios. O primeiro deles está ligado ao crescimento do caroço, o segundo corresponde basicamente ao período de mudanças fisiológicas do fruto e o terceiro estágio define o período em que ele volta a crescer, aumentando o volume da polpa. Ajustar modelos de regressão com caráter duplo sigmoideal utilizando medidas de altura e diâmetro de pêssegos permite encontrar parâmetros que podem auxiliar diretamente na otimização da produção desses frutos. Nesse capítulo, foram ajustados os modelos Brody generalizado, Gompertz generalizado e Logístico generalizado e comparados com o ajuste dos modelos Gompertz + Gompertz e Logístico + Gompertz. Ou seja, foram comparadas duas estruturas de modelos de regressão não linear construídas com 5 ou 6 parâmetros, denominados modelos generalizados e difásicos, respectivamente. A estimação foi realizada a partir do método de mínimos quadrados com o auxílio do algoritmo de Gauss-Newton, implementados no software R versão 4.0.2. As pressuposições de normalidade, homogeneidade e independência dos resíduos foram verificadas com o auxílio dos testes de Shapiro Wilk, Breusch Pagan e Durbin Watson. Coeficiente de determinação ajustado, critério de informação de Akaike corrigido (AICc), desvio padrão residual, índice de ajuste da assíntota e algumas medidas de não linearidade foram as estatísticas utilizadas para determinar a qualidade do ajuste dos modelos. Verificou-se que as duas formas de parametrização dos modelos apresentaram resultados satisfatórios para descrever as variáveis em estudo. Houve uma pequena diferença positiva na qualidade do ajuste para os modelos generalizados. No entanto, os modelos difásicos se mostraram mais úteis pois a interpretação biológica de todos os 6 parâmetros pode ser feita de forma direta.

Palavras-chave: Desenvolvimento de frutos. Duplo sigmoide. Modelos de regressão não linear.

ABSTRACT

The development of peach fruits goes through three stages. The first of these is linked to the growth of the seed, the second basically corresponds to the period of physiological changes in the fruit and the third stage defines the period in which it grows again, increasing the volume of the pulp. Adjusting regression models with a double sigmoidal character using measures of height and diameter of peaches allows finding parameters that can directly assist in the optimization of the production of these fruits. In this chapter, the generalized Brody, generalized Gompertz and generalized Logistic models were adjusted and compared with the adjustment of the Gompertz + Gompertz and Logistic + Gompertz models. That is, two structures of nonlinear regression models were compared, constructed with 5 or 6 parameters, called generalized and diphasic models, respectively. The estimation was performed using the least squares method with the aid of the Gauss-Newton algorithm, implemented in software R version 4.0.2. The assumptions of normality, homogeneity and independence of the residues were verified with the aid of the Shapiro Wilk, Breusch Pagan and Durbin Watson tests. Adjusted determination coefficient, corrected Akaike information criterion (AICc), residual standard deviation, asymptote adjustment index and some non-linearity measures were the statistics used to determine the quality of the models' fit. It was found that the two forms of parameterization of the models showed satisfactory results to describe the variables under study. There was a small positive

difference in the quality of the fit for the generalized models. However, the diphasic models proved to be more useful since the biological interpretation of all 6 parameters can be done directly.

Keywords: Fruit development. Double sigmoid. Nonlinear regression models.

1 INTRODUÇÃO

O pêssego (*Prunus persica* L. Batsch) pertencente à família Rosaceae é um dos frutos economicamente mais importantes em regiões de clima temperado (SHULAEV et al., 2008). Segundo dados da Faostat (2020), o Brasil é o décimo segundo maior produtor mundial. O desenvolvimento do fruto ocorre em três estádios totalmente distintos. O primeiro deles é basicamente o crescimento acelerado do caroço, seguido pelo estágio responsável pelas mudanças fisiológicas e anatômicas, com um crescimento um pouco mais lento e, por fim, no terceiro estágio o fruto volta a crescer rapidamente, aumentando o volume celular da polpa ao mesmo tempo em que ocorre o processo de maturação (MEDEIROS; RASEIRA, 1998).

Para otimizar a produção do fruto de pessegueiro é necessário ter um conhecimento mais aprofundado das etapas do seu crescimento. Dessa forma, é possível obter informações que contribuem para melhores práticas de manejo, evitando perdas do fruto principalmente na fase da colheita.

Na literatura diversos estudos com relação ao comportamento da curva de crescimento de seres vivos. Esses trabalhos normalmente envolvem medidas como peso, altura, diâmetro, entre outros. As informações são mensuradas ao longo do tempo e são relacionadas utilizando modelos estatísticos. Alguns desses modelos, como é o caso dos modelos de regressão não linear, possuem vantagens na qualidade do ajuste além de serem compostos por parâmetros que possuem interpretação biológica. Exemplos de aplicações desses modelos podem ser encontrados nos trabalhos de Ribeiro et al. (2018a), Souza et al. (2019a).

Os modelos não lineares mais utilizados e indicados para descrever o crescimento biológico são os modelos da família Richards: Brody; Gomperts; Logístico e von Bertalanffy. Eles são classificados como da mesma família pois a partir de uma única função é possível obter qualquer um dos quatro modelos mencionados. Ou seja, dependendo do valor de um único parâmetro do Richards, o modelo é transformado em outro com denominação e comportamento diferente.

Normalmente, as curvas de crescimento apresentam comportamento sigmoidal, com a presença de um único ponto de inflexão seguido por uma assíntota. No caso dos frutos de pessegueiro há uma diferença nesse formato devido a presença do caroço. Frutos com essa característica possuem curva de crescimento com caráter duplo sigmoidal, isto é, o desenvolvimento é melhor representado por modelos que descrevem curvas com aspecto de dois "S", um para cada uma das etapas de crescimento. Um dos exemplos, além do pêssego, é o fruto do café, descrito por Fernandes, Pereira e Muniz (2017) ou blackberry, apresentado no trabalho de Silva et al. (2020).

Entre os diversos modelos com caráter duplo sigmoidal é possível separá-los em dois tipos: bifásicos e generalizados. O primeiro é formado pela união de dois modelos simples, enquanto o segundo pode ser descrito como uma generalização do modelo simples. A principal característica do tipo generalizado é ser composto por um expoente polinomial. Inicialmente, ele apresenta uma vantagem em relação aos modelos difásicos, tendo em vista que é composto

por cinco parâmetros, enquanto o difásico são seis. No entanto, ainda não há na literatura comparações entre os modelos difásicos e os generalizados. No trabalho de Martínez et al. (2017) encontra-se três variações de modelos generalizados ajustados para variáveis de diâmetro do fruto de pêsego: brody, gompertz e logístico.

O objetivo desse trabalho é descrever a curva de crescimento do pêsego *Prunus persica* L. Batsch, a partir de dados de altura e diâmetro do fruto, utilizando os modelos não lineares generalizados Brody, Gompertz e Logístico, além de comparar o ajuste destes com o ajuste dos modelos difásicos Gompertz + Gompertz e Logístico + Gompertz, que também possuem característica duplo sigmoidal.

2 MATERIAL E MÉTODOS

2.1 Material

Os modelos que serão apresentados a seguir foram ajustados utilizando dados oriundos do experimento de Cunha Junior et al. (2007) conduzido em Vista Alegre do Alto - SP, no ano de 2005.

Os autores marcaram com fita colorida 200 flores (estádio balão) de pessegueiros da cultivar “Aurora-1” em 15 plantas distintas. Após 20 dias corridos à marcação, iniciou-se a coleta dos frutos. A cada sete dias, novos 30 pêssegos eram coletados e o processo foi repetido até chegar ao período de maturação completa do fruto.

Depois de coletados, todos os frutos foram levados para o Laboratório de Tecnologia dos Produtos Agrícolas da FCAV/UNESP, Jaboticabal-SP e então passavam por análises físicas e químicas. Entre as várias informações obtidas, foram mensuradas a altura e o diâmetro, em milímetros, de cada um dos fruto com a ajuda de um paquímetro.

O presente trabalho utilizou um total de 14 medidas, tanto da variável altura quanto da variável diâmetro, obtidas a partir da média das informações dos 30 frutos ao longo do tempo.

2.2 Modelos

Foram ajustados os modelos duplos sigmoidais: Brody Generalizado (2.1); Gompertz Generalizado (2.2) e Logístico Generalizado (2.3). Eles foram obtidos a partir da generalização dos sigmóides simples, em que o expoente corresponde a um polinômio do terceiro grau em relação ao tempo. Os mesmos modelos foram utilizados no trabalho de Martínez et al. (2017), que descreveram o crescimento de frutos de pêssego a partir de medidas do diâmetro ao longo do tempo. As parametrizações desses modelos são apresentadas a seguir:

$$y_i = A(1 - e^{-(B+Cx_i+Dx_i^2+Ex_i^3)}) + \varepsilon_i \quad (2.1)$$

$$y_i = Ae^{-e^{-(B+Cx_i+Dx_i^2+Ex_i^3)}} + \varepsilon_i \quad (2.2)$$

$$y_i = \frac{A}{1 + e^{-(B+Cx_i+Dx_i^2+Ex_i^3)}} + \varepsilon_i \quad (2.3)$$

em que y_i representa a medida do fruto, ou seja, os valores, em mm, de altura ou diâmetro do fruto; x_i o tempo; A a medida final da variável em estudo, B , C , D e E estão associadas com a taxa de crescimento ao longo do tempo e ε_i é o erro aleatório associado ao modelo, o qual pressupõe-se que seja independente e identicamente distribuído sob uma distribuição Normal com média zero e variância conhecida, $\varepsilon_i \sim N(0, \sigma_2^2)$.

Além disso, também será discutido e analisado os resultados obtidos a partir do ajuste dos modelos difásicos Gompertz + Gompertz (2.4) e Logístico + Gompertz (2.5). Modelos semelhantes também foram ajustados por Fernandes, Pereira e Muniz (2017) para descrever curvas de crescimento de frutos do cafeeiro, por Bem et al. (2020) ao estudar caracteres produtivos de crotalária juncea e por Silva et al. (2020) que analisaram curvas de crescimento de diferentes cultivares do fruto amora-preta. Tais modelos podem ser escritos da seguinte forma:

$$y_i = A_1 e^{-e^{K_1(B_1 - x_i)}} + (A_2 - A_1) e^{-e^{K_2(B_2 - x_i)}} + \varepsilon_i \quad (2.4)$$

$$y_i = \frac{A_1}{1 + e^{K_1(B_1 - x_i)}} + (A_2 - A_1) e^{-e^{K_2(B_2 - x_i)}} + \varepsilon_i \quad (2.5)$$

em que i indica cada uma das observações ao longo do tempo; y_i a a medida do fruto; A_1 a resposta máxima esperada na primeira fase do crescimento; A_2 a resposta máxima esperada na segunda e última fase do crescimento; k_1 e k_2 os índices de maturidade das respectivas fases de crescimento, valores mais altos indicam a necessidade de menor tempo para que a variável em estudo chegue ao seu tamanho final; B_1 e B_2 são as abscissas do ponto de inflexão das curvas de cada uma das fases, ou seja, indica o ponto máximo de crescimento; ε_i o erro aleatório associado ao modelo, o qual pressupõe-se que seja independente e identicamente distribuído sob uma distribuição Normal com média zero e variância conhecida, $\varepsilon_i \sim N(0, \sigma_2^2)$.

2.3 Método de estimação

Para obter as estimativas dos parâmetros dos modelos foi utilizado o método de mínimos quadrados ordinários (DRAPER; SMITH, 1998) e o método iterativo de Gauss-Newton implementados no software R (R Core Team, 2020).

2.4 Pressuposições e testes

Para verificar se as estimativas obtidas são confiáveis foram testadas as pressuposições de normalidade, homocedasticidade e independência dos resíduos a partir dos testes de Shapiro-Wilk (SHAPIRO; WILK, 1965), Durbin-Watson (MORETTIN; TOLOI, 2006) e Breusch e Pagan (BREUSCH; PAGAN, 1979) respectivamente. Esses mesmos testes também foram utilizados nos trabalhos de Silveira et al. (2018) e Furtado et al. (2019a).

2.5 Qualidade do ajuste

A qualidade do ajuste dos modelos ajustados foi feita com base na escolha do maior valor do coeficiente de determinação ajustado (R_a^2), menor valor do critério de informação de Akaike corrigido ($AICc$) (AKAIKE, 1974), menor valor do desvio padrão residual (DPR),

maior valor do índice de ajuste da assíntota (IA), além dos menores valores das medidas de não linearidade relacionada ao efeito dos parâmetros (K^T) e também relacionada a curvatura intrínseca do modelo (K^N) (MAZUCHELI; ACHCAR, 2002).

Na literatura existem diversos trabalhos que também utilizaram esses mesmos indicadores como avaliadores da qualidade de ajuste dos modelos não lineares ajustados (MARTÍNEZ et al., 2017; MUNIZ; NASCIMENTO; FERNANDES, 2017; RIBEIRO et al., 2018b). Dentre os avaliadores mencionados, o Índice de ajuste da assíntota (IA) é um dos menos utilizados e foi proposto por Mischan e Pinho (2014). O objetivo dessa estatística é verificar o quanto a estimativa do parâmetro que está relacionado com o tamanho final do fruto está próximo do valor observado.

3 RESULTADOS E DISCUSSÃO

Foram ajustados os três modelos generalizados (Brody, Gompertz e Logístico) aos dados de altura e diâmetro do fruto do pessegueiro da cultivar “Aurora-1”. Os valores iniciais para cada um dos parâmetros foram escolhidos com base nos valores das estimativas dos mesmos parâmetros, apresentadas no trabalho de Martínez et al. (2017), e podem ser observadas na Tabela 4.5.

Tabela 4.5 – Estimativas dos parâmetros de modelos não lineares generalizados ajustados à dados de altura e diâmetro de pêssegos “Aurora-1”.

Variável	Modelo	A	B	C	D	E
Altura	Brody	57,31	-1,54	0,12	-0,002	0,00001
	Gompertz	56,11	3,58	-0,22	0,004	-0,00002
	Logístico	55,54	-5,91	0,32	-0,005	0,00003
Diâmetro	Brody	49,31	-1,70	0,13	-0,003	0,00002
	Gompertz	48,11	5,25	-0,31	0,01	-0,00003
	Logístico	47,59	-9,26	0,51	-0,009	0,00005

Fonte: Da autora (2020).

De acordo com os testes (Tabela 4.6), ao nível de 5% de significância, os resíduos do modelo Gompertz generalizado, ajustado para a variável diâmetro, não satisfaz a pressuposição de homogeneidade de variância, indicando que para continuar trabalhando com este modelo será preciso incorporar a variabilidade da variância das medidas utilizando alguma forma de ponderação (PEREIRA et al., 2016), conforme veremos no capítulo 3. Os demais modelos apresentaram valor-p maiores que 0,05, indicado que as pressuposições foram atendidas, e por isso, prosseguimos com a avaliação do ajuste apenas para eles.

Tabela 4.6 – Valores-p para os testes de normalidade de Shapiro-Wilk; independência de Durbin-Watson; e homogeneidade de variâncias de Breusch-Pagan para a análise de resíduos de modelos não lineares generalizados ajustados à dados de altura e diâmetro de pêssegos “Aurora-1”.

Variável	Modelo	Shapiro–Wilk	Durbin–Watson	Breusch–Pagan
Altura	Brody	0,64	0,90	0,10
	Gompertz	0,91	0,38	0,10
	Logístico	0,92	0,12	0,15
Diâmetro	Brody	0,10	0,10	0,46
	Gompertz	1,00	0,43	0,02
	Logístico	0,68	0,97	0,06

Fonte: Da autora (2020).

Analisando o coeficiente de determinação ajustado (R_a^2), percebe-se que os modelos Brody generalizado e Gompertz generalizado apresentaram o maior valor para a variável altura (0,99), enquanto o modelo Logístico generalizado apresentou o maior valor para o diâmetro (0,99). Os menores valores do critério de informação de Akaike (AIC) e do Desvio Padrão Residual (DPR) são encontrados ao ajustar o modelo Brody generalizado para a variável altura

e Logístico generalizado para a variável diâmetro. O valor mais próximo de 1 da medida do Índice da Assíntota (IA), tanto para a altura dos frutos quanto para o diâmetro, foi utilizando o modelo Logístico generalizado. Considerando a medida de não linearidade sobre o efeito dos parâmetros (K^T), o modelo que melhor se ajustou aos dados de altura e diâmetro foi o modelo Logístico generalizado. E em relação a medida de não linearidade intrínseca do modelo (K^N), o melhor modelo para ajustar altura foi o Brody generalizado e para o diâmetro foi novamente o modelo Logístico generalizado.

Em resumo, percebe-se que todos os modelos generalizados apresentados na Tabela 4.7, para descrever a curva de crescimento de pêssegos utilizando medidas de altura e diâmetro, foram bem ajustados.

Os autores Martínez et al. (2017) ajustaram os modelos sigmoidais generalizados: Brody (2.1); Gompertz (2.2) e Logístico (2.3), obtidos a partir da generalização dos sigmóides simples e concluíram, de acordo com o maior valor do coeficiente de determinação, menor valor da soma de quadrados dos erros e maior valor do critério de Akaike que, o modelo Brody generalizado foi o melhor para descrever o crescimento de frutos de pêssego.

Álvarez e Boche (1999) também utilizaram modelos sigmóides generalizados para descrever curvas de crescimento de nectarinas Neuquen (Argentina). Neste trabalho, o modelo Logístico generalizado foi considerado o mais adequado após constatar a menor soma de quadrado dos erros e a melhor precisão ao estimar o valor da assíntota superior.

Tabela 4.7 – Medidas da qualidade do ajuste de modelos não lineares generalizados ajustados ao dados de altura e diâmetro de pêssegos “Aurora-1”.

Variável	Modelo	R_a^2	AICc	DPR	IA	K^T	K^N
Altura	Brody	0,99	55,17	1,41	0,95	1,35	0,14
	Gompertz	0,99	58,07	1,56	0,97	0,90	0,18
	Logístico	0,98	74,68	1,84	0,98	0,83	0,24
Diâmetro	Brody	0,96	71,28	2,50	0,96	1,38	0,23
	Logístico	0,99	69,56	1,54	0,99	0,41	0,19

Fonte: Da autora (2020).

De acordo com as medidas de qualidade de ajuste apresentadas na Tabela 4.7, pode-se afirmar que, o modelo Brody generalizado foi o que melhor se ajustou à variável altura. E o modelo Logístico generalizado foi o que melhor se ajustou à variável diâmetro, diferente do modelo escolhido por Martínez et al. (2017) ao estudar a mesma variável e mesmo fruto, mas corroborando com a mesma escolha de Álvarez e Boche (1999) que ajustou o modelo a fim de descrever a curva de crescimento de nectarinas.

Como mencionado anteriormente, o parâmetro A , correspondente à assíntota superior do modelo na fase final do crescimento assim, pode-se afirmar que o valor máximo da altura chega a 57,31 mm e o valor à maturidade do diâmetro chega a 47,59 mm.

Comparando com os modelos difásicos ajustados no capítulo anterior, para os mesmos conjunto de dados, percebe-se que para a variável altura, o modelo difásico selecionado foi o

Gompertz + Gompertz (GG), enquanto que o modelo selecionado no presente capítulo foi o Brody generalizado. Da mesma forma, no primeiro capítulo, o modelo Logístico + Gompertz (LG) foi o escolhido como o modelo mais adequado para descrever o diâmetro, ao passo que, o modelo Logístico generalizado foi o que apresentou o melhor desempenho.

Diante dessas duas opções de modelos para esses dois conjuntos de dados (altura e diâmetro) e conhecendo diferentes medidas da qualidade de ajuste de cada um deles (Tabela 4.8) é possível compara-los e fazer uma indicação mais assertiva do modelo que melhor descreve a curva de crescimento do fruto em estudo.

Tabela 4.8 – Medidas da qualidade do ajuste de modelos não lineares generalizados e difásicos ajustados ao dados de altura e diâmetro de pêssegos “Aurora-1”.

Variável	Modelo	R_a^2	AICc	DPR	IA	K^T	K^N
Altura	Gompertz + Gompertz (GG)	0,99	55,85	1,43	0,87	4,46	0,52
	Brody generalizado	0,99	55,17	1,41	0,95	1,35	0,14
Diâmetro	Logístico + Gompertz (LG)	0,99	58,82	1,59	0,98	1,18	0,48
	Logístico generalizado	0,99	69,56	1,54	0,99	0,41	0,19

Fonte: Da autora (2020).

Observando os dados da Tabela 4.8, verifica-se que, tomando como base apenas o coeficiente de determinação ajustado, todos os modelos apresentam desempenho igualmente satisfatórios, assim vamos levar em consideração apenas os demais avaliadores e critérios. Começando pela variável altura, todas as medidas indicam que o modelo mais adequado é o modelo Brody generalizado. E para a variável diâmetro, apenas o *AICc* mostra o modelo difásico como o mais adequado, os demais avaliadores e critérios sugerem que o modelo que melhor descreve o diâmetro é o Logístico generalizado.

Outra característica favorável na escolha de um modelo generalizado em detrimento de um difásico é o fato do primeiro apresentar 5 parâmetros, enquanto o segundo é composto por 6. No entanto, é preciso verificar também uma das características mais relevantes ao ajustar um modelo de regressão não linear, ou seja, a facilidade de interpretação biológica de cada um dos parâmetros. Neste caso, os modelos difásicos superam os generalizados pela riqueza de informações, devido a facilidade de interpretação direta de todos os parâmetros.

Estimativas do parâmetro A , em modelos generalizados, correspondem aos valores do parâmetro A_2 em modelos difásicos. Porém, o segundo, além de encontrar estimativas para o tamanho do fruto na fase final do crescimento (segunda fase), também gera estimativas para o tamanho final do fruto em sua primeira etapa do crescimento (parâmetro A_1). Nesse estudo, pode-se afirmar que a altura final do fruto chega a 57,31 mm considerando os resultados obtidos via modelo Brody generalizado ou 62,43 mm se considerarmos os resultados obtidos a partir do ajuste do modelo Gompertz + Gompertz. Para a variável diâmetro, os valores seriam 47,59 mm ou 48,12 ao considerar os modelos Logístico + Gompertz e Logístico generalizado, respectivamente. As estimativas obtidas para o tamanho final do diâmetro são semelhantes às

estimativas encontradas no trabalho de Martínez et al. (2017), que apresentaram valores entre 41,72 a 55,30 mm, dependendo do tratamento e modelo ajustado.

É interessante observar que os resultados obtidos como estimativas para o valor assintótico são maiores quando utilizamos modelos difásicos e, ao comparar esses resultados com as medidas observadas, há indícios de que esses valores são superestimados. Para a altura, o valor máximo foi igual a 57,36, levemente diferente da estimativa obtida via modelo brody generalizado (57,31). E para a variável diâmetro, o valor máximo chegou a 50,31, um pouco mais próximo de 48,12 (estimativa do modelo logístico generalizado), do que 47,59 (estimativa do modelo Logístico + Gompertz).

A interpretação dos demais parâmetros é mais clara e direta em modelos difásicos. Enquanto nos generalizados, os parâmetros B , C , D e E estão todos relacionados com a taxa de crescimento (MARTÍNEZ et al., 2017), no modelo difásico existe uma interpretação clara e individual de todos eles.

As estimativas dos parâmetros K_1 e K_2 em modelos difásicos, indicam o quanto a variável de interesse aumentou em relação ao tempo na primeira e segunda fase de crescimento, respectivamente. E os parâmetros B_1 e B_2 desses mesmos modelos são responsáveis por identificarem os tempos (primeira e segunda fase) em que a variável em estudo atingiu a taxa máxima de crescimento. No caso de modelos generalizados, para obter valores com a mesma interpretação de B_1 e/ou B_2 é necessário conhecer as raízes da segunda derivada da respectiva função, ou seja, os pontos de inflexão.

A fim de entender um pouco mais sobre o comportamento de crescimento do frutos, em cada uma das etapas sigmóides, foram construídos diferentes gráficos. As ilustrações foram obtidas a partir das derivadas, em relação ao tempo, das funções de cada um dos modelos apresentados anteriormente.

Assim, será possível observar que os gráficos referentes à primeira derivada indicam a taxa de crescimento do fruto a partir das variáveis altura e diâmetro, enquanto que a segunda derivada corresponde a aceleração do crescimento do fruto a partir do estudo dessas mesmas variáveis. O desenvolvimento dos cálculos está detalhado no apêndice A e o script (em R) para obtenção dos ponto de inflexão, a partir dessas derivadas, está disponível no apêndice B.

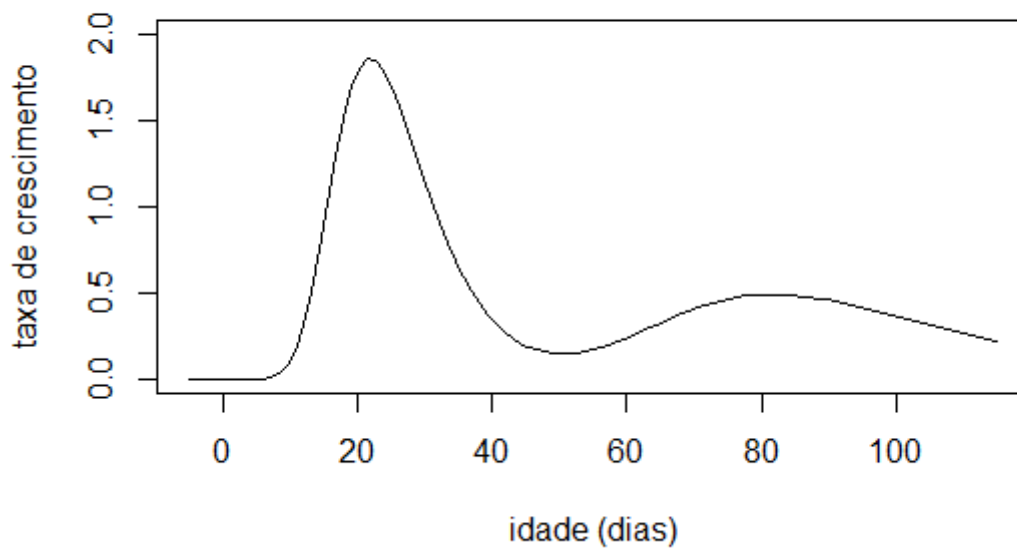
Para o modelo Gompertz + Gompertz ajustado à variável altura:

$$y = A_1 e^{-e^{K_1(B_1-x)}} + (A_2 - A_1) e^{-e^{K_2(B_2-x)}}$$

$$\frac{\partial}{\partial x}(y) = A_1 K_1 e^{-e^{K_1(B_1-x)} + K_1(B_1-x)} + (A_2 - A_1) K_2 e^{-e^{K_2(B_2-x)} + K_2(B_2-x)}$$

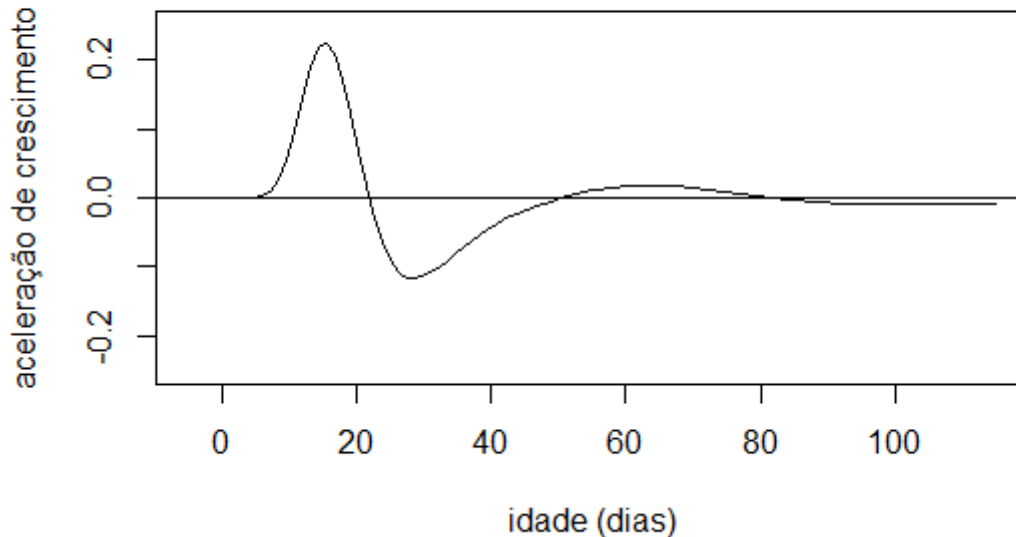
$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}(y) = A_1 K_1 e^{-e^{K_1(B_1-x)} + K_1(B_1-x)} (K_1 e^{K_1(B_1-x)} - K_1) + (A_2 - A_1) K_2 e^{-e^{K_2(B_2-x)} + K_2(B_2-x)} (K_2 e^{K_2(B_2-x)} - K_2)$$

Figura 4.3 – Gráfico da taxa de crescimento (altura) obtida a partir do ajuste do modelo Gompertz + Gompertz.



Fonte: Da autora (2020).

Figura 4.4 – Gráfico da aceleração de crescimento (altura) obtida a partir do ajuste do modelo Gompertz + Gompertz.



Fonte: Da autora (2020).

Observando o comportamento das funções obtidas a partir das derivadas do modelo Gompertz + Gompertz (Figuras 4.3 e 4.4), verifica-se que o ponto de máximo da segunda fase de crescimento é menor que o ponto de máximo da primeira fase. A mesma conclusão pode ser obtida quando comparamos os valores dos índices de crescimento, ou seja, $K_1 = 0,1444$ e $K_2 = 0,0485$, com $K_1 > K_2$. Esse comportamento de crescimento mais acelerado na primeira fase também foi encontrado por Fernandes, Pereira e Muniz (2017), ao ajustar modelos duplo sigmóides para descrever frutos de café. Essa característica é comum nesses casos pois é na primeira fase que acontece o desenvolvimento do caroço.

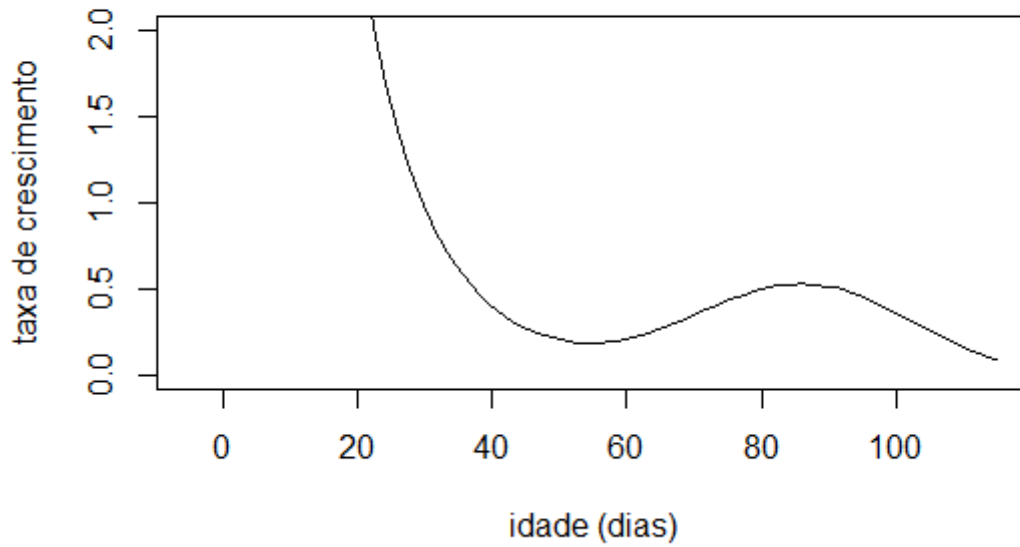
Já para o modelo Brody generalizado ajustado à variável altura, não é possível verificar essa mesma ocorrência ao analisar as Figuras 4.5 e 4.6, também obtidas a partir das derivadas de sua função. Isso acontece pois esse modelo não apresenta ponto de inflexão, principal característica do modelo Brody:

$$y = A(1 - e^{-(B+Cx+Dx^2+Ex^3)})$$

$$\frac{\partial}{\partial x}(y) = -Ae^{-(B+Cx+Dx^2+Ex^3)}(-C - 2Dx - 3Ex^2)$$

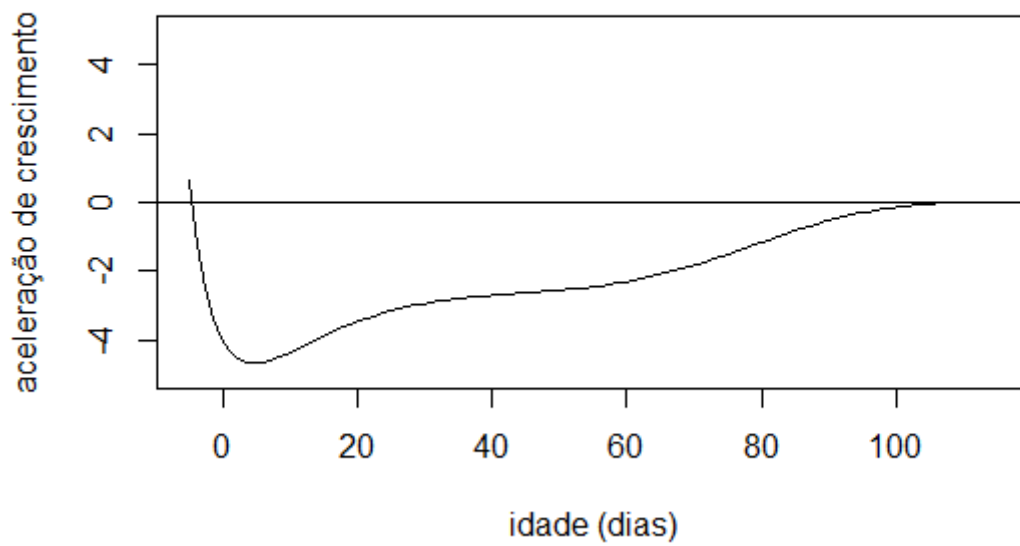
$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}(y) = -A \left(e^{-(B+Cx+Dx^2+Ex^3)}(-C - 2Dx - 3Ex^2)^2 + e^{-(B+Cx+Dx^2+Ex^3)}(-2D - 6Ex) \right)$$

Figura 4.5 – Gráfico da taxa de crescimento (altura) obtida a partir do ajuste do modelo Brody generalizado.



Fonte: Da autora (2020).

Figura 4.6 – Gráfico da aceleração de crescimento (altura) obtida a partir do ajuste do modelo Brody generalizado.



Fonte: Da autora (2020).

No caso da variável diâmetro, há uma semelhança do comportamento de crescimento nas duas fases, com estimativas dos índices iguais a $K_1 = 0,1868$ e $K_2 = 0,1367$ obtidas a partir do modelo difásico. Indicando assim, que o crescimento da primeira etapa tende a ser um pouco maior que o crescimento da segunda, as Figuras 4.7, 4.8, 4.9 e 4.10 ilustram perfeitamente esse comportamento.

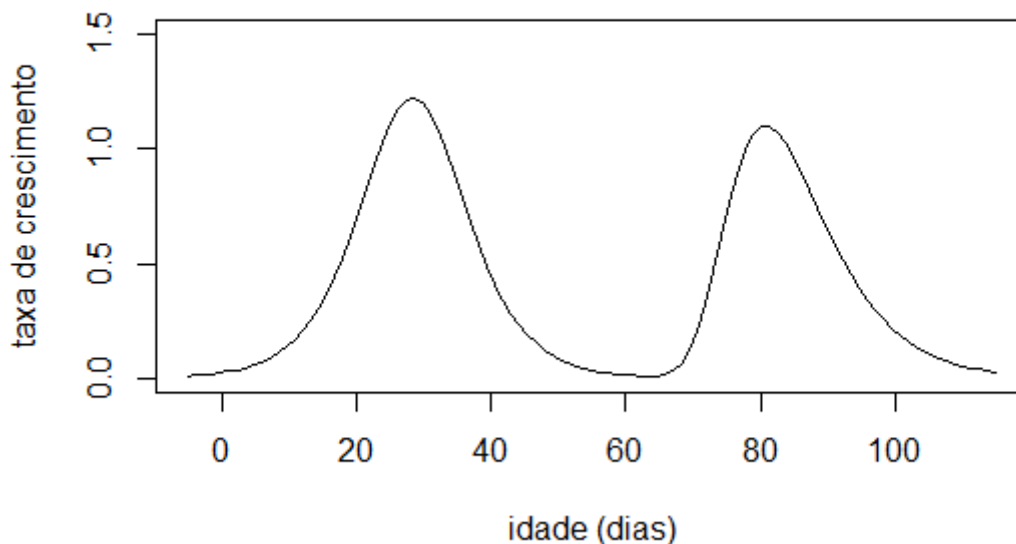
Para o modelo Logístico + Gompertz ajustado a dados de diâmetro:

$$y = \frac{A_1}{1 + e^{K_1(B_1 - x)}} + (A_2 - A_1)e^{-e^{K_2(B_2 - x)}}$$

$$\frac{\partial}{\partial x}(y) = \frac{A_1 K_1 e^{K_1(B_1 - x)}}{(1 + e^{K_1(B_1 - x)})^2} + (A_2 - A_1) K_2 e^{-e^{K_2(B_2 - x)} + K_2(B_2 - x)}$$

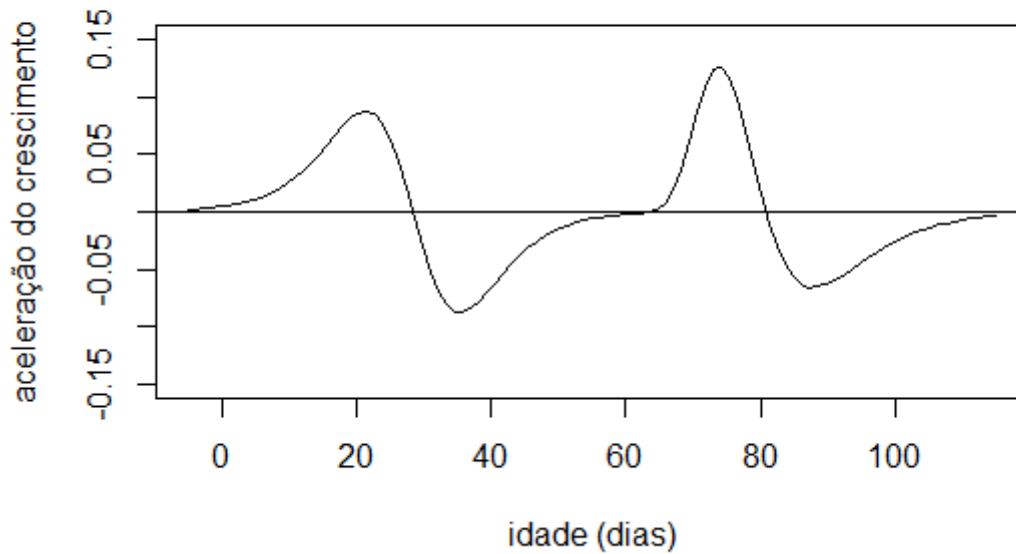
$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}(y) = \frac{A_1 K_1^2 e^{K_1(B_1 - x)} (e^{K_1(B_1 - x)} - 1)}{(1 + e^{K_1(B_1 - x)})^3} + (A_2 - A_1) K_2 e^{-e^{K_2(B_2 - x)} + K_2(B_2 - x)} (K_2 e^{K_2(B_2 - x)} - K_2)$$

Figura 4.7 – Gráfico da taxa de crescimento (diâmetro) obtida a partir do ajuste do modelo Logístico + Gompertz.



Fonte: Da autora (2020).

Figura 4.8 – Gráfico da aceleração de crescimento (diâmetro) obtida a partir do ajuste do modelo Logístico + Gompertz.



Fonte: Da autora (2020).

E para o modelo Logístico generalizado ajustado a dados de diâmetro:

$$y = \frac{A}{1 + e^{-(B+Cx+Dx^2+Ex^3)}}$$

$$\frac{\partial}{\partial x}(y) = -\frac{Ae^{-(B+Cx+Dx^2+Ex^3)}(-C - 2Dx - 3Ex^2)}{(1 + e^{-(B+Cx+Dx^2+Ex^3)})^2}$$

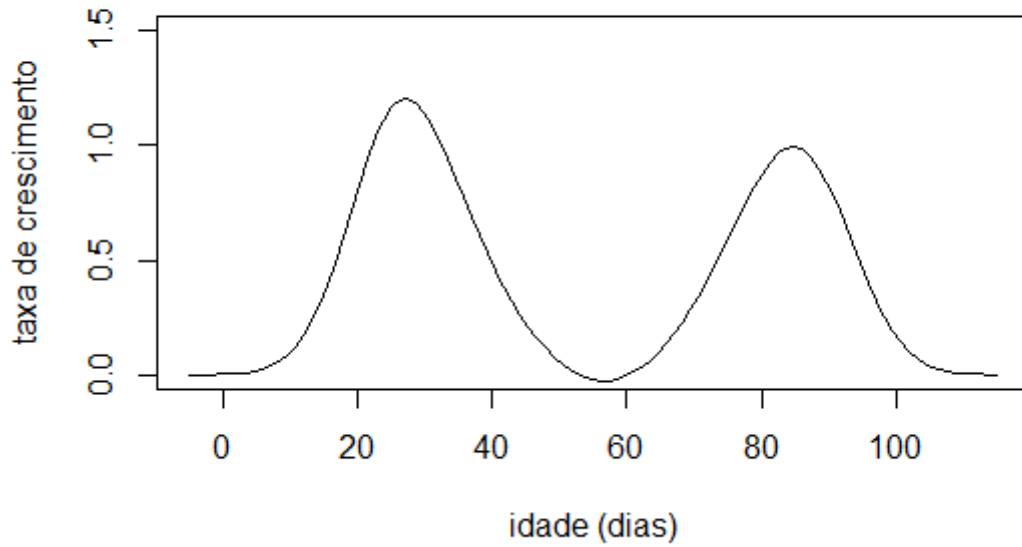
$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}(y) = -A \frac{\alpha\beta + \alpha(-2D - 6Ex)(1 + \alpha) - 2\alpha^2\beta^2}{(1 + \alpha)^4}$$

sendo:

$$\alpha = e^{-(B+Cx+Dx^2+Ex^3)}$$

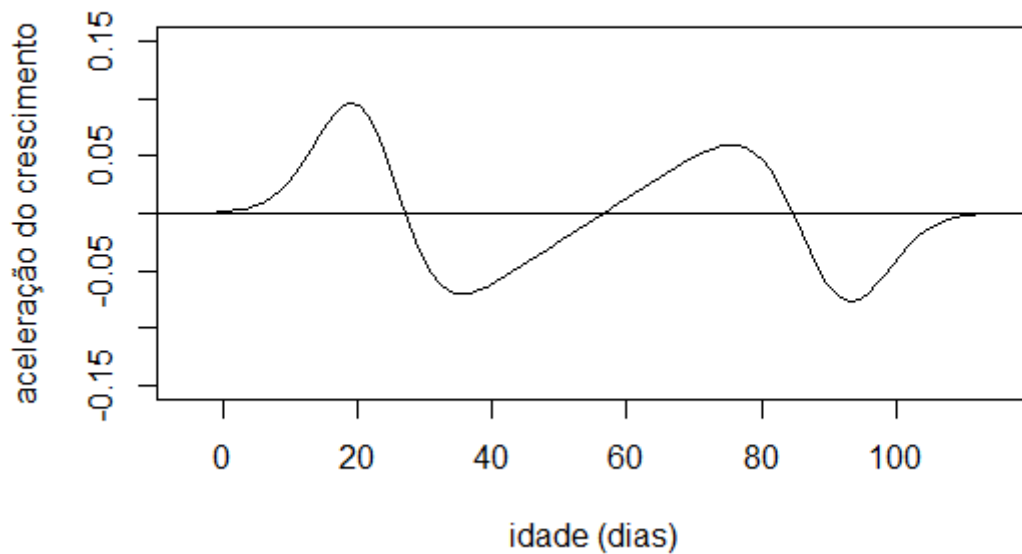
$$\beta = -C - 2Dx - 3Ex^2$$

Figura 4.9 – Gráfico da taxa de crescimento (diâmetro) obtida a partir do ajuste do modelo Logístico generalizado.



Fonte: Da autora (2020).

Figura 4.10 – Gráfico da aceleração de crescimento (diâmetro) obtida a partir do ajuste do modelo Logístico generalizado.

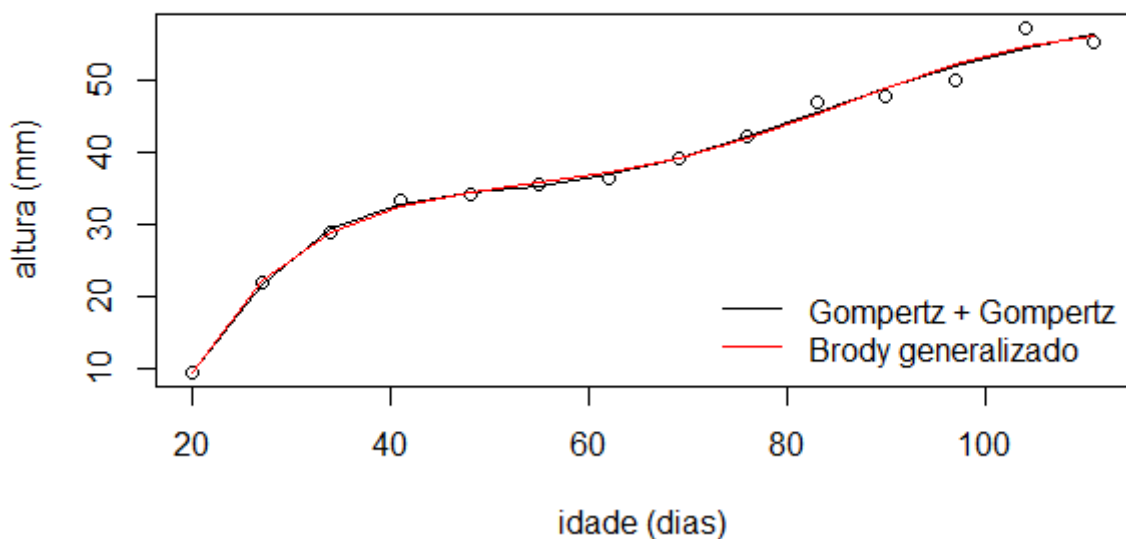


Fonte: Da autora (2020).

As Figuras 4.11 e 4.12, apresentadas a seguir, foram construídas utilizando as medidas observadas de altura e diâmetro do fruto de pessegueiro, juntamente com a ilustração da curva dos dois modelos selecionados para cada uma das variáveis. Visivelmente, percebe-se que os ajustes estão praticamente sobrepostos, ilustrando o que já foi indicado ao analisar os avaliadores e critérios de qualidade de ajuste, com valores semelhantes para os modelos comparados.

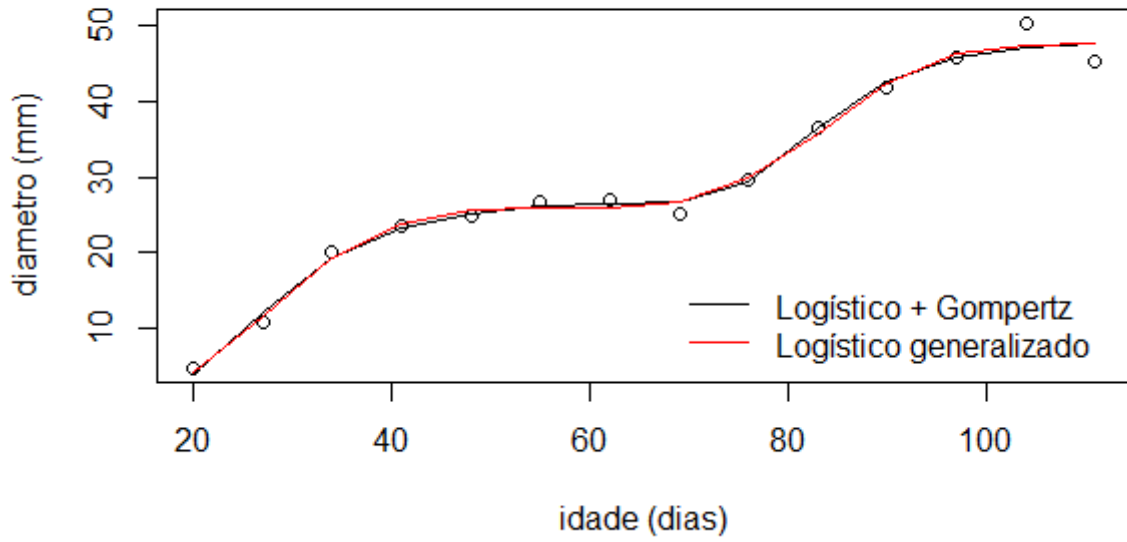
Assim, como a qualidade do ajuste das medidas indica que todos os modelos ajustados são bons para descrever as curvas de crescimento do fruto de pêsego, fazer a escolha do melhor modelo com base na praticidade da interpretação de seus parâmetros. Nesse caso, os modelos difásicos se mostram superiores e devem ser escolhidos em detrimento dos generalizados, principalmente pela facilidade para tomar decisões e fazer inferências com base nas estimativas dos seus 6 parâmetros.

Figura 4.11 – Gráfico do ajuste de modelos não lineares generalizados e difásicos ajustados a dados de altura de pêsegos “Aurora-1”.



Fonte: Da autora (2020).

Figura 4.12 – Gráfico do ajuste de modelos não lineares generalizados e difásicos ajustados a dados de diâmetro de pêssegos “Aurora-1”.



Fonte: Da autora (2020).

4 CONCLUSÃO

Foi possível descrever a curva de crescimento do pêsego *Prunus persica* L. Batsch, utilizando medidas de altura e diâmetro desses frutos, ajustadas a partir de modelos de regressão não linear generalizados.

Para altura, o modelo que melhor se ajustou foi o Brody generalizado, enquanto que para a variável diâmetro, o melhor ajuste aconteceu ao utilizar o modelo Logístico generalizado.

Ao comparar os resultados do ajuste entre modelos não lineares generalizados com os difásicos, verificou-se que ambos podem ser utilizados para o ajuste, no entanto, os modelos difásicos são mais indicados devido à facilidade de interpretação biológica das estimativas de todos os parâmetros.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

AKAIKE, H. A new look at the statistical model identification. **IEEE transactions on automatic control**, Ieee, v. 19, n. 6, p. 716–723, 1974.

ÁLVAREZ, A.; BOCHE, S. Modelos matemáticos para describir crecimientos doble sigmoideos en frutos de un nectarin tardío (cv sun grand). **Agro sur**, v. 27, n. 1, p. 21–28, 1999.

BEM, C. M. d. et al. Univariate and multivariate nonlinear models in productive traits of the sunn hemp. **Revista Ciência Agronômica**, SciELO Brasil, v. 51, n. 1, 2020.

BREUSCH, T. S.; PAGAN, A. R. A simple test for heteroscedasticity and random coefficient variation. **Econometrica: Journal of the Econometric Society**, JSTOR, p. 1287–1294, 1979.

BURNHAM, K. P.; ANDERSON, D. R. **Model selection and multimodel inference: a practical information-theoretic approach**. [S.l.]: Springer Science & Business Media, 2003.

CUNHA JUNIOR, L. C. Caracterização do desenvolvimento de pêsegos aurora-1 e sua conservação pós-colheita em dois estádios de maturação. Universidade Estadual Paulista (UNESP), 2007.

CUNHA JUNIOR, L. C. et al. Caracterização da curva de maturação de pêsegos aurora-1, na região de Jaboticabal-SP. **Revista Brasileira de Fruticultura**, Sociedade Brasileira de Fruticultura, p. 661–665, 2007.

DRAPER, N. R.; SMITH, H. **Applied Regression Analysis, Third Edition**. [S.l.]: 3 ed. New York: John Wiley. 706 p., 1998.

FAOSTAT, F. Statistical databases. **Food and Agriculture Organization of the United Nations**, 2020.

FERNANDES, T. J. et al. Parameterization effects in nonlinear models to describe growth curves. **Acta Scientiarum. Technology**, Editora da Universidade Estadual de Maringá-EDUEM, v. 37, n. 4, p. 397, 2015.

FERNANDES, T. J.; PEREIRA, A. A.; MUNIZ, J. A. Double sigmoidal models describing the growth of coffee berries. **Ciência Rural**, SciELO Brasil, v. 47, n. 8, 2017.

FERNANDES, T. J. et al. Seleção de modelos não lineares para a descrição das curvas de crescimento do fruto do cafeeiro. **Coffee Science**, v. 9, n. 2, p. 207–215, 2014.

FURTADO, T. D. R. et al. Drying kinetics of jaboticaba pulp by regression models. **Revista Brasileira de Fruticultura**, SciELO Brasil, v. 41, n. 1, 2019.

MARTÍNEZ, J. D. et al. Growth models of peach fruit *Prunus persica* (L) in three handling systems. **Interciencia**, Asociación Interciencia, v. 42, n. 9, 2017.

- MAZUCHELI, J.; ACHCAR, J. A. Algumas considerações em regressão não linear. **Acta Scientiarum, Maringá**, v. 24, n. 6, p. 1761–1770, 2002.
- MEDEIROS, C. A. B.; RASEIRA, M. d. C. B. **A cultura do pessegueiro**. [S.l.]: Embrapa-Serviço de Produção de Informação, Pelotas: Embrapa-Centro de Pesquisa Agropecuária de Clima Temperado, 1998.
- MISCHAN, M. M.; PINHO, S. Z. d. **Modelos não lineares**. [S.l.]: Cultura acadêmica, São Paulo -SP, 2014.
- MORETTIN, P. A.; TOLOI, C. **Análise de séries temporais**. [S.l.]: Blucher, 2006.
- PEREIRA, A. A. et al. Modelagem não linear do crescimento em altura do cafeeiro irrigado e não irrigado em diferentes densidades. **IRRIGA**, v. 1, n. 1, p. 140–149, 2016.
- R Core Team. **R: A Language and Environment for Statistical Computing**. Vienna, Austria, 2020. Disponível em: <<https://www.R-project.org/>>.
- RASEIRA, M. et al. ‘brs mandinho’: The first platycarpa peach cultivar released in brazil. **Revista Brasileira de Fruticultura**, SciELO Brasil, v. 38, n. 3, 2016.
- RASEIRA, M. d. C.; QUEZADA, A. Pêssego produção. **Embrapa Clima Temperado. Brasília. EMBRAPA**, 2003.
- RASEIRA, M. d. C. B.; PEREIRA, J. F. M. P.; CARVALHO, F. L. C. **Pessegueiro**. [S.l.]: Embrapa, 2014.
- RIBEIRO, T. D. et al. The use of the nonlinear models in the growth of pears of ‘shinseiki’ cultivar. **Ciência Rural**, SciELO Brasil, v. 48, n. 1, 2018.
- SHAPIRO, S. S.; WILK, M. B. An analysis of variance test for normality (complete samples). **Biometrika**, JSTOR, v. 52, n. 3/4, p. 591–611, 1965.
- SHULAEV, V. et al. Multiple models for rosaceae genomics. **Plant physiology**, Am Soc Plant Biol, v. 147, n. 3, p. 985–1003, 2008.
- SILVA, D. F. et al. Curva de crescimento e padrão respiratorio de frutos de genótipos de pessegueiro em região de clima subtropical. **Revista de Fruticultura**, v. 35, n. 2, 2013.
- SILVA, E. M. et al. Description of the carbon mineralization of swine manure and oat straw in the soil through nonlinear models. **Revista Agrogeoambiental**, v. 11, n. 2, p. 71–86, 2019.
- SILVA, E. M. et al. Fitting of decomposition of sewage sludge and oat straw by nonlinear models. **Revista Agrogeoambiental**, 2019.

SILVA, É. M. d. et al. Description of blackberry fruit growth by nonlinear regression models. **Revista Brasileira de Fruticultura**, SciELO Brasil, v. 42, n. 2, 2020.

SILVEIRA, S. de C. et al. Modelos não lineares ajustados à produção acumulada de biogás provenientes de camas sobrepostas de suínos. **Revista Agrogeoambiental**, v. 10, n. 3, 2018.

SOUZA, F. et al. Influence of temperature on the development of peach fruit in a subtropical climate region. **Agronomy**, Multidisciplinary Digital Publishing Institute, v. 9, n. 1, p. 20, 2019.

CAPÍTULO 3 MODELOS NÃO LINEARES DUPLO SIGMOIDAIS APLICADOS A MEDIDAS COM COMPORTAMENTO HETEROCEDÁSTICO AO LONGO DO TEMPO

RESUMO

Modelos não lineares são muito bem empregados para descrever curvas de crescimento de diversos seres vivos. No entanto, nem sempre é analisado com todo o cuidado necessário a etapa de análise dos resíduos e verificação de todas as pressuposições. Neste trabalho, foram utilizadas medidas de altura e diâmetro do fruto de pessegueiro para descrever sua curva de crescimento utilizando modelos de regressão não linear. Foram ajustados modelos difásicos construídos a partir da soma dos modelos Gompertz + Gompertz e Logístico + Gompertz. Além disso, foram incorporados os pesos do tipo potência, potência do logaritmo e exponencial para melhor descrever a variabilidade das medidas ao longo do tempo. As análises dos resíduos foram detalhadas a partir de gráficos. Para verificar a normalidade, gráfico de resíduos versus quantis teóricos. Para homoscedasticidade, resíduos versus valores ajustados e finalmente para independência, resíduos versus a ordem de coleta dos dados. Em resposta a estas análises foi confirmado a presença de heterogeneidade dos resíduos, uma consequência da variabilidade dos dados ao longo do tempo. Com o auxílio das medidas de qualidade de ajuste: Coeficiente de Determinação ajustado; Critério de Informação de Akaike corrigido; Desvio Padrão Residual e Índice de ajuste da Assíntota foi possível concluir que, para descrever curvas de crescimento de pêssegos, a partir de medidas da altura ou diâmetro do fruto, é aconselhável utilizar modelos que consideram a variância das medidas com comportamento exponencial.

Palavras-chave: Heterogeneidade de variâncias. Modelos difásicos. Modelo não linear ponderado.

ABSTRACT

Nonlinear models are very well used to describe growth curves of different living beings. However, the step of analyzing residues and verifying all assumptions is not always analyzed with all the necessary care. In this work, measures of height and diameter of the peach fruit were used to describe its growth curve using non-linear regression models. Diphasic models built from the sum of the Gompertz + Gompertz and Logistic + Gompertz models were adjusted. In addition, power, logarithmic and exponential weights were incorporated to better describe the variability of the measures over time. The analyzes of the residues were detailed from graphs. To verify normality, graph of residuals versus theoretical quantiles. For homoscedasticity, residuals versus adjusted values and finally for independence, residuals versus the order of data collection. In response to these analyzes, the presence of residue heterogeneity was confirmed, a consequence of the variability of the data over time. With the aid of fit quality measures: Adjusted Coefficient of Determination; Corrected Akaike Information Criterion; Residual Standard Deviation and Adjustment Index of Asymptote it was possible to conclude that, in order to describe peach growth curves, from measures of height or diameter of the fruit, it is advisable to use models that consider the variance of the measures with exponential behavior.

Keywords: Heterogeneity of variances. Diphasic models. Weighted nonlinear model.

1 INTRODUÇÃO

Curvas de crescimento de seres vivos podem ser facilmente descritas com a ajuda de modelos de regressão. Uma das etapas mais importantes após ajustar esses modelos é verificar se todas as pressuposições foram atendidas. Quando se trata do ajuste de modelos de regressão não linear, essa premissa não é diferente, ou seja, deve-se ficar atento ao verificar se os erros são independentes, normalmente distribuídos e homocedásticos. Assim, é possível inferir sobre todas as estimativas e interpretar os valores estimados de forma confiável.

No entanto, alguns modelos podem não atender alguma dessas pressuposições. Assim, é preciso identificar alternativas para obter estimativas mais precisas w caso exista a dependência dos resíduos, Morettin e Tolo (2006) recomendam incorporar um parâmetro de autocorrelação no modelo.

Quando os resíduos não satisfazem a pressuposição de homogeneidade de variâncias há um indicativo de que os valores dos dados apresentem maior variabilidade conforme aumenta a média mensurada. Essa característica é muito comum em dados de crescimento medidos ao longo do tempo. Para resolver problemas de heterocedasticidade diversos trabalhos indicam realizar uma ponderação.

De acordo com Rawlings, Pantula e Dickey (2001), a presença de heterogeneidade de variâncias nas amostras provoca uma mudança nas estimativas dos parâmetros, visto que as observações com maiores variâncias influenciam de forma mais intensa quando comparada às observações que apresentam variâncias pequenas.

Braccini Neto et al. (1996) perceberam que a variância cresce exponencialmente a medida em que a média dos pesos por idade também crescem. Segundo Pereira et al. (2016), é viável realizar uma ponderação pelo inverso da variância, dessa forma haverá um equilíbrio definido pelos pesos para cada uma das observações, permitindo assim, que medidas com maior variabilidade influenciem menos na estimação dos parâmetros do modelo.

Mazzini et al. (2003) aplicaram os modelos Brody, Gompertz, Logístico, Richards e Von Bertalanffy para descrever as curvas de crescimento de bovinos Hereford. Eles foram ajustados considerando ou não a ponderação pelo inverso da variância. Os autores concluíram, com base na interpretação biológica dos parâmetros e também com base nos avaliadores da qualidade de ajuste, que o melhor modelo foi obtido após ter incorporado a heterogeneidade de variâncias presente nos dados.

Mazucheli, Souza e Philippsen (2011) verificaram que o modelo Gompertz, sob a suposição de homogeneidade de variâncias dos erros, superestimou o verdadeiro peso médio assintótico das aves e, ao incorporar a presença de heterocedasticidade nos resíduos nos modelos, percebeu que o ajuste melhorou.

Em relação à curvas de crescimento vegetal, Fernandes et al. (2014) utilizaram ponderação por pesos estimados, com base no comportamento das variâncias amostrais ao ajustar modelos não lineares para descrever curvas de crescimento do fruto de cafeeiro.

Muniz, Nascimento e Fernandes (2017) verificaram a presença de heterogeneidade de variâncias em dados de crescimento de frutos de cacau a partir do teste de Hartley. Eles utilizaram os modelos não lineares Gompertz e Logístico para descrever tal crescimento e obtiveram menor erro padrão das estimativas dos parâmetros usando a ponderação pelo inverso da variância.

Conhecendo todos esses exemplos da literatura e comparando com o caso do estudo da curva de crescimento de frutos do pessegueiro pressupõem-se que estudar a variância dos dados observadas pode contribuir com um ajuste ainda melhor e consequentemente alcançar estimativas dos parâmetros mais precisas.

Nesse sentido, o objetivo desse capítulo foi ajustar o modelo de regressão não linear Gompertz + Gompertz aos dados de altura do fruto de pêssego e também o modelo Logístico + Gompertz aplicados à dados de diâmetro desse fruto, considerando diferentes comportamentos da variância, a fim de melhor estimar os parâmetros para descrever a curva de crescimento do pêssego.

2 MATERIAL E MÉTODOS

O dados utilizados para esse estudo correspondem a 14 médias obtidas a partir de 30 observações distintas, de altura e diâmetro do fruto de pessegueiro, medidas ao longo do tempo. O experimento foi conduzido por Cunha Junior et al. (2007) na cidade de Vista Alegre do Alto-SP.

Foram ajustados os modelos de regressão não linear: Duplo Gompertz (2.1) para os dados de altura e Logístico + Gompertz (2.2) para os dados de diâmetro.

$$y_i = A_1 e^{-e^{K_1(B_1 - x_i)}} + (A_2 - A_1) e^{-e^{K_2(B_2 - x_i)}} + \varepsilon_i \quad (2.1)$$

$$y_i = \frac{A_1}{1 + e^{K_1(B_1 - x_i)}} + (A_2 - A_1) e^{-e^{K_2(B_2 - x_i)}} + \varepsilon_i \quad (2.2)$$

em que i indica cada uma das n observações, $i = 1, 2, \dots, n$, ao longo do tempo; y_i a medida do fruto; A_1 a resposta máxima esperada na primeira fase do crescimento; A_2 a resposta máxima esperada na segunda e última fase do crescimento; k_1 e k_2 os índices de maturidade das respectivas fases de crescimento, valores mais altos indicam a necessidade de menor tempo para que a variável em estudo chegue ao seu tamanho final; B_1 e B_2 são as abscissas do ponto de inflexão das curvas de cada uma das fases, ou seja, indica o ponto máximo de crescimento; ε_i o erro aleatório associado ao modelo, o qual pressupõe-se que seja independente e identicamente distribuído sob uma distribuição Normal com média zero e variância conhecida, $\varepsilon_i \sim N(0, \sigma_2^2)$.

Os modelos foram ajustados utilizando a função *nls* e *gnls* do pacote "nlme" instalado no ambiente de programação R (R Core Team, 2020). A primeira função foi utilizada para descrever modelos não lineares usando o método de estimação de mínimos quadrados ordinários, enquanto a segunda usa o método de estimação de mínimos quadrados generalizados. Neste último caso também foi incorporado diferentes parâmetros: *weights = varPower(~ form = x)*, *weights = varPower(~ form = log(x))* e *weights = varExp(~ form = x)* para considerar o comportamento da variância dos dados com característica de potência, potência do logaritmo ou exponencial, respectivamente.

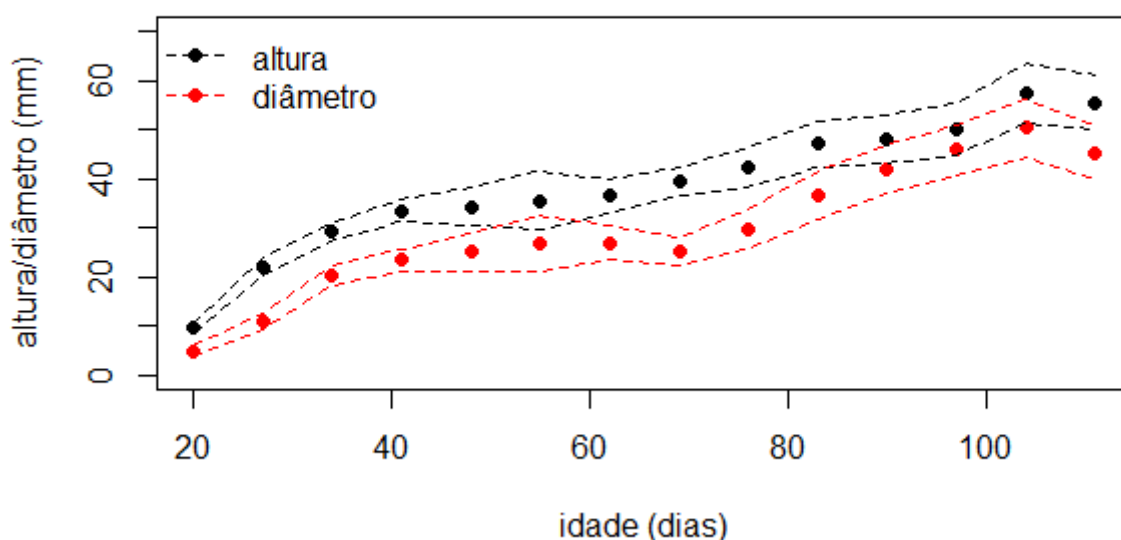
Para verificar a pressuposição de normalidade foi realizado o teste de Shapiro-Wilk (SHAPIRO; WILK, 1965). A pressuposição de homoscedasticidade foi verificada a partir da análise gráfica dos resíduos versus valores ajustados. Enquanto que a pressuposição de independência foi feita com base no estudo de gráficos dos resíduos comparados com a ordem de coleta dos dados.

A avaliação da qualidade do ajuste dos modelos foram feitas com base nos valores do coeficiente de determinação ajustado (R_a^2), critério de informação de Akaike corrigido ($AICc$) (AKAIKE, 1974), desvio padrão residual (DPR) e Índice de ajuste da Assíntota (IA).

3 RESULTADOS E DISCUSSÃO

Observando o comportamento das médias e do desvio padrão das observações de altura e diâmetro do fruto de pêssegos, Figura 4.13, percebe-se que há uma tendência de que a variabilidade das medidas sejam um pouco maiores no final de cada uma das etapas de crescimento, isto é, próximo a 60 e 100 dias de idade a amplitude das médias é maior quando comparadas com aos demais períodos. Essa característica sugere que é preciso dar uma atenção maior a variabilidade dos dados, estudando a possibilidade de heterogeneidade de variância dos dados. Caso seja confirmada essa hipótese, os autores Rawlings, Pantula e Dickey (2001) afirmam que isso provoca uma mudança nas estimativas dos parâmetros, implicando em inferências menos confiáveis.

Figura 4.13 – Média e desvio padrão das medidas de altura e diâmetros de pêssegos "Aurora-1".



Fonte: Adaptação de Cunha Junior et al. (2007).

Para incorporar a heterogeneidade de variância dos dados, Carvalho et al. (2014) ajustaram modelos não lineares com ponderação para medidas de volume do tronco de *Eucalyptus grandis*. Os autores verificaram que o modelo ponderado foi o mais adequado para descrever os dados.

Após confirmarem a presença de heterogeneidade de variâncias dos dados, Guedes et al. (2004) utilizaram modelos ponderados para descrever curvas de crescimento de cordeiros da raça santa inês. A fim de obter estimativas confiáveis para os parâmetros dos modelos deste estudo foram ajustados quatro variações de modelos não lineares, para cada uma das variáveis em estudo. O primeiro modelo considera a variância constante, da mesma maneira que outros

autores também já utilizaram (FERNANDES et al., 2014; BEM et al., 2020; SILVA et al., 2020), e os demais foram ajustados incorporando diferentes pesos para a variância dos dados.

Observando os resultados é possível afirmar que, em geral, o erro padrão para os parâmetros estimados pelos modelos considerando a variância das medidas contantes, tanto da altura (Tabela 4.9) quanto do diâmetro (Tabela 4.10), são maiores que o erro padrão dos parâmetros obtidos a partir dos modelos que consideram a variância como um função de potência, potência do logaritmo ou exponencial.

Tabela 4.9 – Estimativa e Erro Padrão dos parâmetros de modelos não lineares Gompertz + Gompertz, considerando diferentes comportamentos da variância, ajustados à dados de altura de pêssegos “Aurora-1”.

Parâmetro	Ajuste	Variância dos dados			
		Constante	Potência	Potência do Logaritmo	Exponencial
A_1	Estimativa	35,0347	35,0121	35,0136	35,1701
	Erro Padrão	1,6907	0,5849	0,5953	0,5066
A_2	Estimativa	62,4319	62,5116	62,5080	60,5770
	Erro Padrão	6,1435	6,6906	6,6627	5,5264
B_1	Estimativa	21,8052	21,8012	21,8014	21,8367
	Erro Padrão	0,7164	0,1529	0,1521	0,1543
B_2	Estimativa	81,7872	81,8219	81,8210	80,2942
	Erro Padrão	5,0054	5,9950	6,0076	4,8509
K_1	Estimativa	0,1444	0,1447	0,1447	0,1433
	Erro Padrão	0,0266	0,0055	0,0053	0,0058
K_2	Estimativa	0,0485	0,0482	0,0482	0,0537
	Erro Padrão	0,0184	0,0149	0,0151	0,0150

Fonte: Da autora (2020).

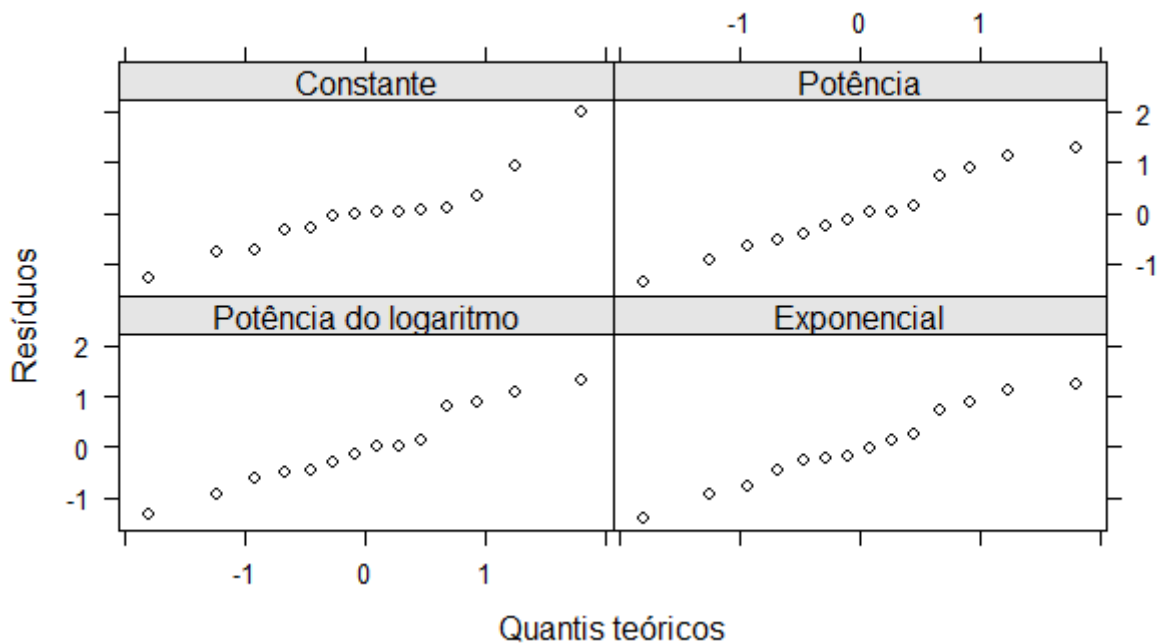
Tabela 4.10 – Estimativa e Erro Padrão dos parâmetros de modelos não lineares Logístico + Gompertz, considerando diferentes comportamentos da variância, ajustados à dados de diâmetro de pêssegos “Aurora-1”.

Parâmetro	Ajuste	Variância dos dados			
		Constante	Potência	Potência do Logaritmo	Exponencial
A_1	Estimativa	26,2173	26,2193	26,2187	26,2077
	Erro Padrão	0,8887	0,6101	0,6337	0,5393
A_2	Estimativa	48,1188	48,0999	48,1028	48,4195
	Erro Padrão	1,4693	1,9639	1,9229	2,1979
B_1	Estimativa	28,3450	28,3463	28,3462	28,3403
	Erro Padrão	1,0564	0,4824	0,4953	0,4608
B_2	Estimativa	80,8954	80,8905	80,8912	81,0221
	Erro Padrão	1,3833	1,4809	1,4869	1,4841
K_1	Estimativa	0,1868	0,1867	0,1868	0,1866
	Erro Padrão	0,0347	0,0129	0,0128	0,0137
K_2	Estimativa	0,1367	0,1372	0,1371	0,1318
	Erro Padrão	0,0361	0,0406	0,0407	0,0375

Fonte: Da autora (2020).

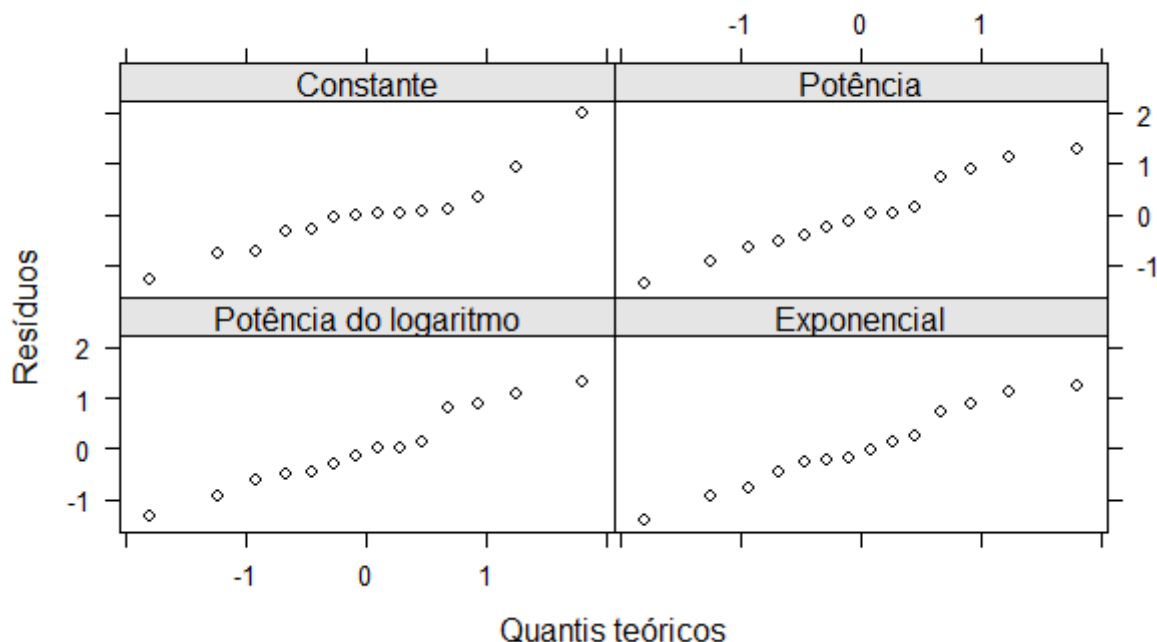
Para validar as estimativas apresentadas anteriormente foi realizado uma análise dos resíduos para cada um dos modelos ajustados. Inicialmente foram construídos gráficos para os resíduos versus quantis teóricos da distribuição Normal e também foi realizado o teste de Shapiro-Wilk (SHAPIRO; WILK, 1965). Observando os gráficos nas Figuras 4.14 e 4.15, verifica-se que os pontos parecem seguir o comportamento de uma reta, assim pode-se dizer que há indícios de que os erros são normalmente distribuídos. Além disso, os valores-p apresentados na Tabela 4.11 são maiores que 0,05, indicando que todos os modelos ajustados atendem a pressuposição de normalidade dos resíduos ao nível de 5% de significância.

Figura 4.14 – Gráfico de resíduos versus quantis teóricos para modelos não lineares Logístico + Gompertz, considerando diferentes comportamentos da variância, ajustados à dados de altura de pêesegos “Aurora-1”.



Fonte: Da autora (2020).

Figura 4.15 – Gráfico de resíduos versus quantis teóricos para modelos não lineares Logístico + Gompertz, considerando diferentes comportamentos da variância, ajustados à dados de diâmetro de pêsesgos “Aurora-1”.



Fonte: Da autora (2020).

Tabela 4.11 – Valores-p do teste de normalidade de Shapiro-Wilk para a análise de resíduos de modelos não lineares Gompertz + Gompertz e Logístico + Gompertz ajustados, respectivamente, à dados de altura e diâmetro de pêsesgos “Aurora-1”.

Variável	Variância dos dados			
	Constante	Potência	Potência do Logaritmo	Exponencial
Altura	0,1417	0,1379	0,1381	0,0892
Diâmetro	0,2327	0,2303	0,2305	0,2681

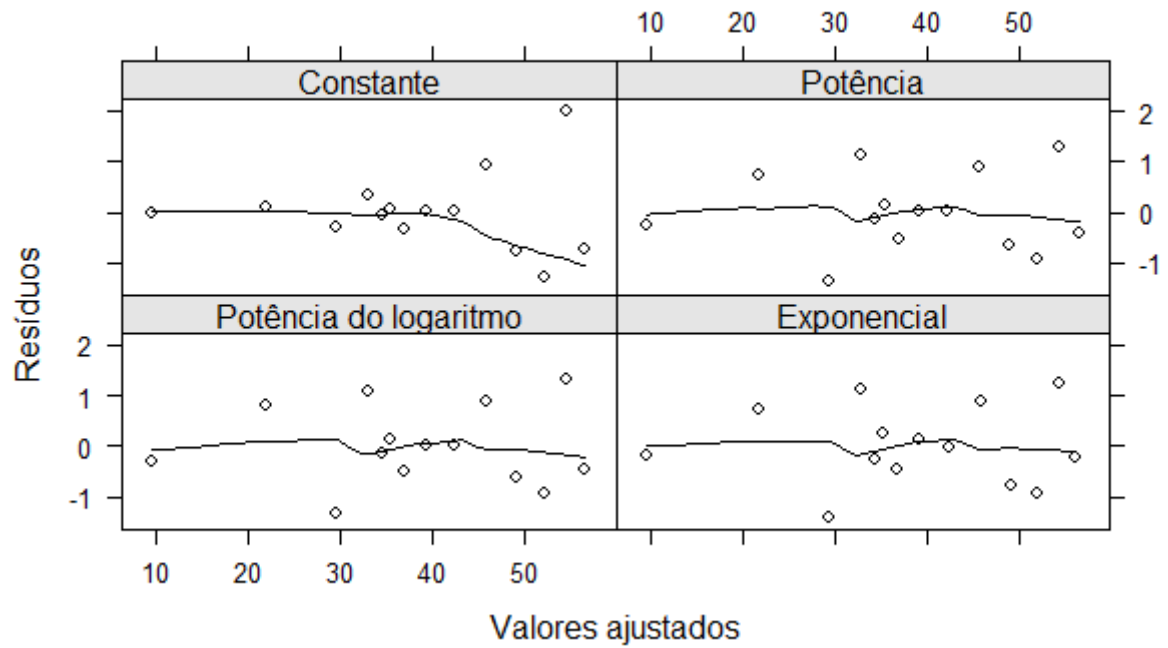
Fonte: Da autora (2020).

Também foi avaliada a pressuposição de homocedasticidade a partir da análise gráfica dos resíduos versus valores ajustados. Observa-se na Figura 4.16 e na Figura 4.17 que o modelo que considera a variância constante, primeiro quadrante, produz resíduos que se comportam de maneira a formar um funil. Os pontos dispostos no gráfico iniciam uma dispersão em torno da reta e a medida que os valores das observações aumentam eles ficam mais dispersos. Olhando para os demais quadrantes verifica-se que os resíduos se dispõem de forma aleatória, sem apresentar algum tipo de tendência.

Tal comportamento indica a violação da pressuposição de homoscedasticidade. Neste caso, utilizar modelos que levam em consideração essa diferença na variância dos dados permite a obtenção de melhores estimativas dos parâmetros. Ao estudar curvas de crescimento é muito comum encontrar esse tipo de comportamento, Pasternak e Shalev (1994) indicam o método

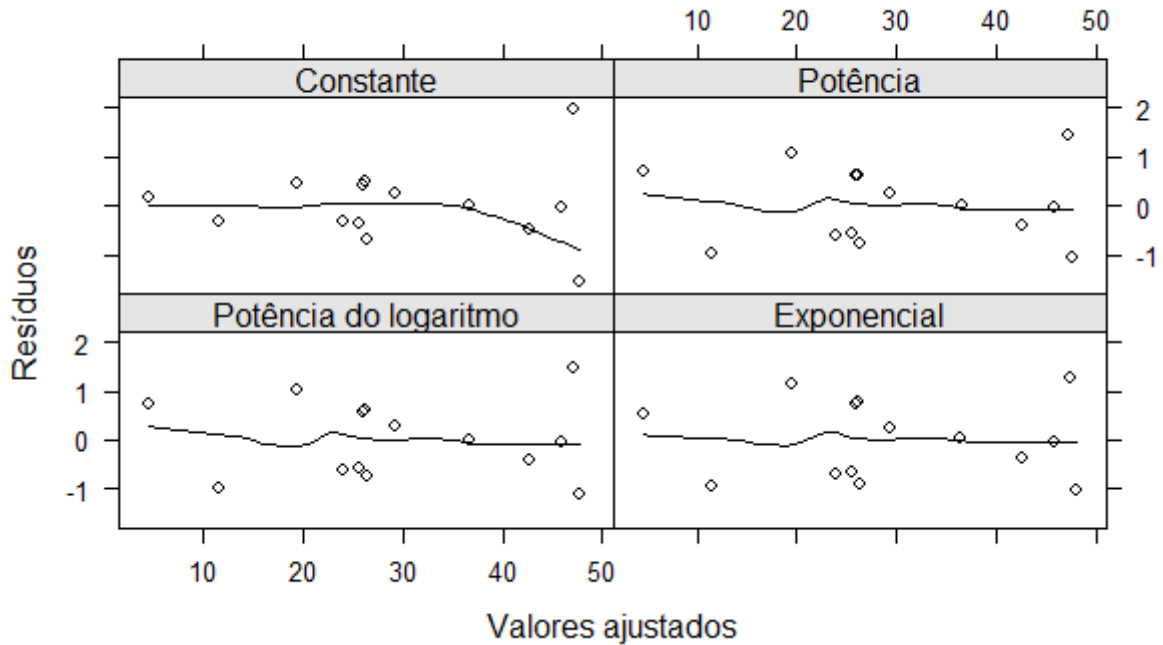
de regressão não linear ponderado como a melhor forma para estimar os parâmetros das curvas de crescimento. Os autores orientam que caso essa informação seja desprezada os parâmetros estimados podem ficar viesados.

Figura 4.16 – Gráfico de resíduos versus valores ajustados para modelos não lineares Gompertz + Gompertz, considerando diferentes comportamentos da variância, ajustados à dados de altura de pêsesgos “Aurora-1”.



Fonte: Da autora (2020).

Figura 4.17 – Gráfico de resíduos versus valores ajustados para modelos não lineares Logístico + Gompertz, considerando diferentes comportamentos da variância, ajustados à dados de diâmetro de pêssegos “Aurora-1”.

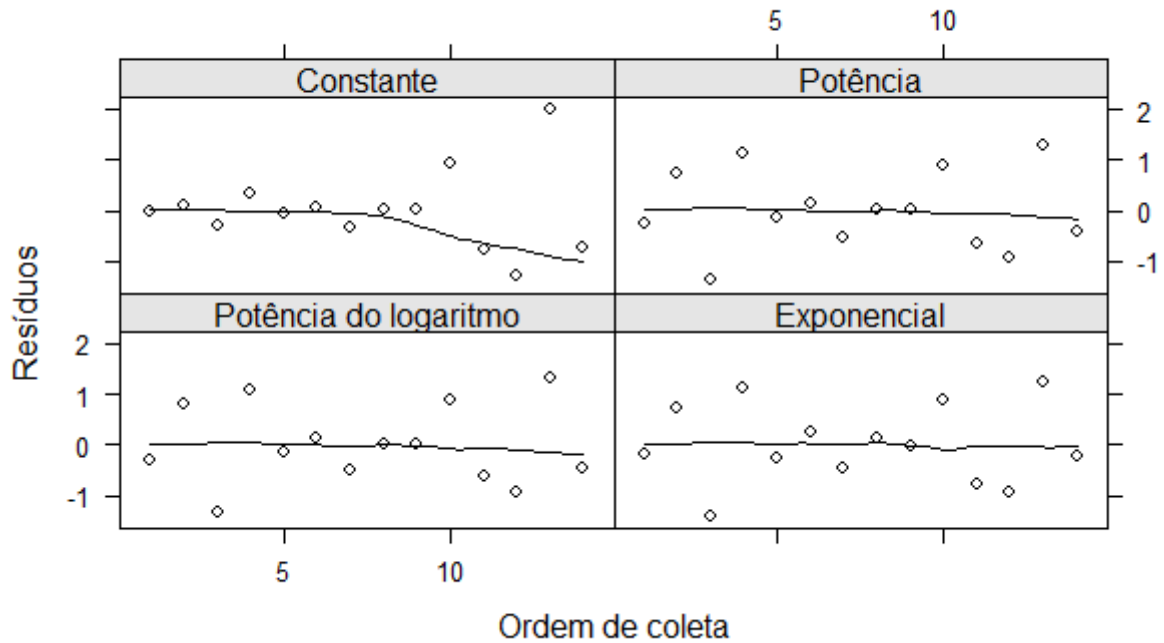


Fonte: Da autora (2020).

Para avaliar a pressuposição de independência dos resíduos foram construídos gráficos que permitem comparar o comportamento desses resíduos com a ordem de coleta dos dados. As Figuras 4.18 e 4.19 ilustram essa informação para as variáveis altura e diâmetro, respectivamente.

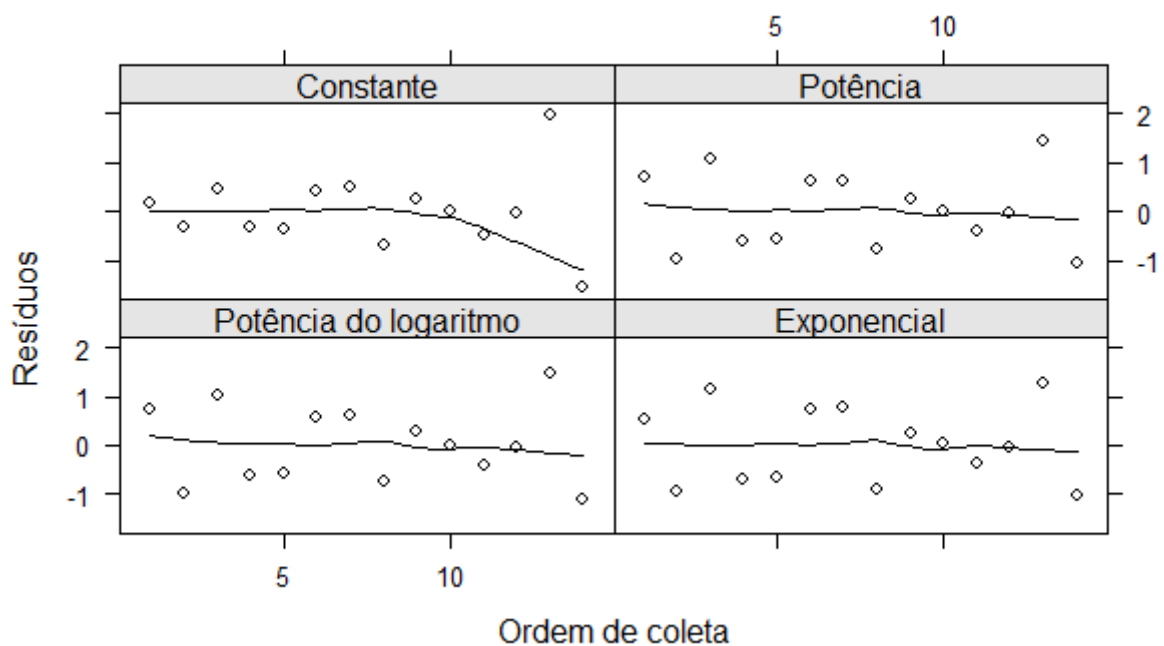
Observa-se que os modelos ponderados satisfazem a pressuposição de independência dos resíduos visto que o comportamento dos resíduos não indica nenhuma tendência dos pontos, enquanto que o modelo que considera a variância contante indica um comportamento de maior dispersão dos resíduos para as últimas observações coletadas. Nesse sentido, os modelos ponderados são os mais indicados para descrever curvas de crescimento de frutos de pêssegos.

Figura 4.18 – Gráfico de resíduos versus ordem de coleta dos dados para modelos não lineares Gompertz + Gompertz, considerando diferentes comportamentos da variância, ajustados à dados de altura de pêssegos “Aurora-1”.



Fonte: Da autora (2020).

Figura 4.19 – Gráfico de resíduos versus ordem de coleta dos dados para os modelos não lineares Logístico + Gompertz, considerando diferentes comportamentos da variância, ajustados à dados de diâmetro de pêssegos “Aurora-1”.



Fonte: Da autora (2020).

A Tabela 4.12 permite comparar os modelos ajustados utilizando diferentes critérios para avaliar a qualidade dos ajustes. Percebe-se que todos os modelos ajustados são muito bem avaliados de acordo com todas as medidas utilizadas. Em relação ao coeficiente de determinação ajustado (R_a^2), todos os três modelos, além do que considera a variância contante, apresentam valores altos.

O Critério de Informação de Akaike corrigido ($AICc$) indica que, utilizar a ponderação exponencial para a variância colabora para um melhor ajuste dos dados, quando comparado com os pesos do tipo potência ou potência do logaritmo. Analisando os resultados do Desvio Padrão Residual (DPR), a variabilidade das medidas é melhor modelada considerando a variância com comportamento como potência do logaritmo.

Para a variável altura, o Índice de ajuste da Assíntota (IA) mais próximo do valor um foi quando utilizou o modelo com variância exponencial, enquanto que o melhor IA , para a variável diâmetro, foi quando o modelo ajustado considera a variância com comportamento de potência.

Em resumo, é possível afirmar que todos os três modelos ponderados, considerados neste trabalho, são eficientes para descrever curvas de crescimento de pêssego a partir de medidas de altura e diâmetro do fruto, ao longo do tempo. Analisando a combinação dos critérios mencionados anteriormente é preferível ponderar a variância utilizando o peso exponencial, para ambas variáveis em estudo.

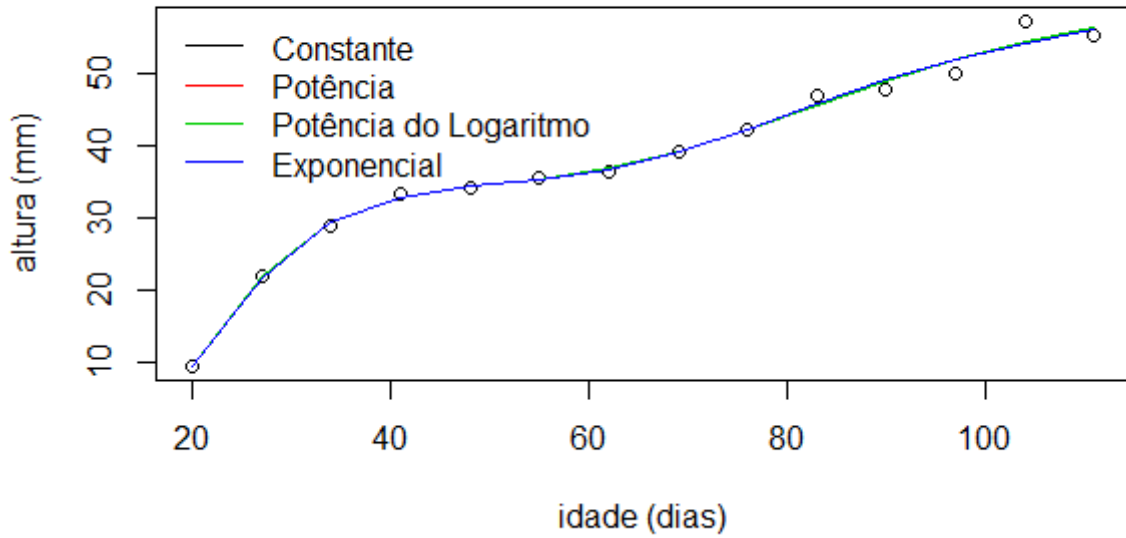
Tabela 4.12 – Medidas da qualidade do ajuste de modelos não lineares estimado pelo método dos mínimos quadrados generalizados: Gompertz + Gompertz ajustados à dados de altura e Logístico + Gompertz ajustados à dados de diâmetro de pêssegos “Aurora-1” considerando diferentes pesos.

Variável	Variância dos dados	R_a^2	$AICc$	DPR	IA
Altura	Constante	0,9880	74,7160	1,4270	0,8704
	Potência	0,9880	71,3439	0,0008	0,8693
	Potência do logaritmo	0,9880	71,3573	0,0001	0,8693
	Exponencial	0,9877	70,8301	0,1252	0,8970
Diâmetro	Constante	0,9857	77,4827	1,5860	0,9795
	Potência	0,9857	81,6787	0,0171	0,9799
	Potência do logaritmo	0,9857	81,9780	0,0044	0,9798
	Exponencial	0,9858	80,7045	0,3431	0,9734

Fonte: Da autora (2020).

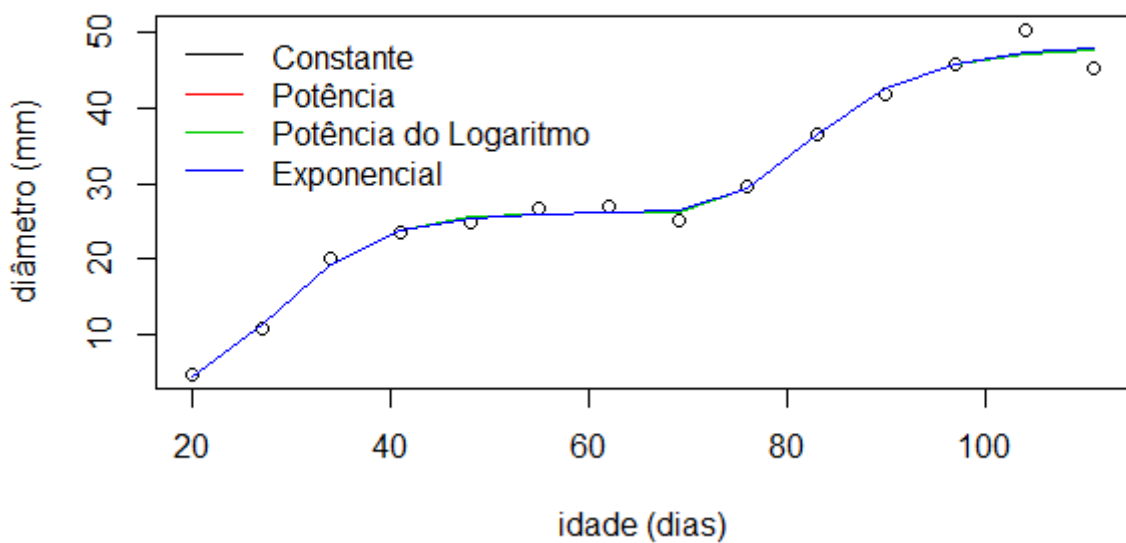
A seguir são apresentados os gráficos contendo os pontos correspondentes às medidas de altura (Figura 4.20) e diâmetro (Figura 4.21) de frutos de pêssego juntamente com as curvas para cada um dos modelos ajustados. Para as duas variáveis estudadas, observa-se uma sobreposição das curvas ao longo de quase todos os pontos. Visualmente, as curvas obtidas a partir do ajuste dos modelos considerando diferentes pesos são muito próximas, corroborando com as medidas de qualidade do ajuste que também indicam que as estimativas de todos os diferentes modelos ajustados são eficientes para descrever o crescimento do fruto.

Figura 4.20 – Gráfico do ajuste de modelos não lineares Gompertz + Gompertz, considerando diferentes comportamentos para a variância, para dados de altura de pêsesgos “Aurora-1”.



Fonte: Da autora (2020).

Figura 4.21 – Gráfico do ajuste de modelos não lineares Logístico + Gompertz, considerando diferentes comportamentos para a variância, para dados de diâmetro de pêsesgos “Aurora-1”.



Fonte: Da autora (2020).

4 CONCLUSÃO

Para descrever curvas de crescimento de pêssegos a partir de medidas da altura do fruto é aconselhável utilizar o modelo duplo sigmoidal Gompertz + Gompertz considerando o comportamento exponencial da variância das medidas.

Para descrição a partir da mensuração do diâmetro de pêssegos é indicado ajustar o modelo Logístico + Gompertz considerando o comportamento exponencial da variância das medidas.

O ajuste com a ponderação das medidas observadas permitiu uma melhor estimativa dos parâmetros, impactando em resultados mais confiáveis para os dois modelos em estudo.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- AKAIKE, H. A new look at the statistical model identification. **IEEE transactions on automatic control**, Ieee, v. 19, n. 6, p. 716–723, 1974.
- BEM, C. M. d. et al. Univariate and multivariate nonlinear models in productive traits of the sunn hemp. **Revista Ciência Agronômica**, SciELO Brasil, v. 51, n. 1, 2020.
- BRACCINI NETO, J. et al. Análise de curvas de crescimento de aves de postura. **Revista Brasileira de Zootecnia**, v. 25, n. 6, p. 1062–1073, 1996.
- CARVALHO, L. R. d. et al. Ajustes de modelos não lineares de efeitos fixos, com ponderação e misto-aplicações. **Revista Brasileira de Biometria**, p. 296–307, 2014.
- CUNHA JUNIOR, L. C. Caracterização do desenvolvimento de pêssegos aurora-1 e sua conservação pós-colheita em dois estádios de maturação. Universidade Estadual Paulista (UNESP), 2007.
- CUNHA JUNIOR, L. C. et al. Caracterização da curva de maturação de pêssegos aurora-1, na região de Jaboticabal-SP. **Revista Brasileira de Fruticultura**, Sociedade Brasileira de Fruticultura, p. 661–665, 2007.
- FERNANDES, T. J. et al. Parameterization effects in nonlinear models to describe growth curves. **Acta Scientiarum. Technology**, Editora da Universidade Estadual de Maringá-EDUEM, v. 37, n. 4, p. 397, 2015.
- FERNANDES, T. J.; PEREIRA, A. A.; MUNIZ, J. A. Double sigmoidal models describing the growth of coffee berries. **Ciência Rural**, SciELO Brasil, v. 47, n. 8, 2017.
- FERNANDES, T. J. et al. Seleção de modelos não lineares para a descrição das curvas de crescimento do fruto do cafeeiro. **Coffee Science**, v. 9, n. 2, p. 207–215, 2014.
- GUEDES, M. H. P. et al. Estudo das curvas de crescimento de cordeiros das raças santa inês e bergamácia considerando heterogeneidade de variâncias. **Ciência e Agrotecnologia**, v. 28, n. 2, p. 381–388, 2004.
- MAZUCHELI, J.; SOUZA, R. d.; PHILIPPSSEN, A. S. Modelo de crescimento de gompertz na presença de erros normais heterocedásticos: um estudo de caso. **Revista Brasileira de Biometria**, v. 29, n. 1, p. 91–101, 2011.
- MAZZINI, A. R. de A. et al. Análise da curva de crescimento de machos Hereford. **Ciência e Agrotecnologia**, SciELO Brasil, v. 27, n. 5, p. 1105–1112, 2003.
- MAZZINI, A. R. de A. et al. Curva de crescimento de novilhos hereford: heterocedasticidade e resíduos autorregressivos. **Ciência Rural**, SciELO Brasil, v. 35, n. 2, p. 422–427, 2005.

MORETTIN, P. A.; TOLOI, C. **Análise de séries temporais**. [S.l.]: Blucher, 2006.

PASTERNAK, H.; SHALEV, B. The effect of a feature of regression disturbance on the efficiency of fitting growth curves. **Growth, development, and aging: GDA**, v. 58, n. 1, p. 33–39, 1994.

PEREIRA, A. A. et al. Modelagem não linear do crescimento em altura do cafeeiro irrigado e não irrigado em diferentes densidades. **IRRIGA**, v. 1, n. 1, p. 140–149, 2016.

R Core Team. **R: A Language and Environment for Statistical Computing**. Vienna, Austria, 2020. Disponível em: <<https://www.R-project.org/>>.

RAWLINGS, J. O.; PANTULA, S. G.; DICKEY, D. A. **Applied regression analysis: a research tool**. [S.l.]: Springer Science & Business Media, 2001.

SHAPIRO, S. S.; WILK, M. B. An analysis of variance test for normality (complete samples). **Biometrika**, JSTOR, v. 52, n. 3/4, p. 591–611, 1965.

SILVA, D. F. et al. Curva de crescimento e padrão respiratório de frutos de genótipos de pessegueiro em região de clima subtropical. **Revista de Fruticultura**, v. 35, n. 2, 2013.

SILVA, E. M. et al. Description of the carbon mineralization of swine manure and oat straw in the soil through nonlinear models. **Revista Agrogeoambiental**, v. 11, n. 2, p. 71–86, 2019.

SILVA, E. M. et al. Fitting of decomposition of sewage sludge and oat straw by nonlinear models. **Revista Agrogeoambiental**, 2019.

SILVA, É. M. d. et al. Description of blackberry fruit growth by nonlinear regression models. **Revista Brasileira de Fruticultura**, SciELO Brasil, v. 42, n. 2, 2020.

APÊNDICE A – Derivadas

Gompertz + Gompertz

$$y = A_1 e^{-e^{K_1(B_1-x)}} + (A_2 - A_1) e^{-e^{K_2(B_2-x)}}$$

1ª derivada:

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial x} \left(A_1 e^{-e^{K_1(B_1-x)}} + (A_2 - A_1) e^{-e^{K_2(B_2-x)}} \right) \\ &= \frac{\partial}{\partial x} \left(A_1 e^{-e^{K_1(B_1-x)}} \right) + \frac{\partial}{\partial x} \left((A_2 - A_1) e^{-e^{K_2(B_2-x)}} \right) \\ &= \alpha + \beta \end{aligned}$$

resolvendo cada uma das derivadas separadamente:

$$\begin{aligned} \alpha &= \frac{\partial}{\partial x} \left(A_1 e^{-e^{K_1(B_1-x)}} \right) \\ &= A_1 \frac{\partial}{\partial x} \left(e^{-e^{K_1(B_1-x)}} \right) \end{aligned}$$

aplicando a regra da cadeia: $\frac{\partial f(u)}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial x}$

$$\begin{aligned} f &= e^u, u = -e^{K_1(B_1-x)} \\ &= A_1 \frac{\partial}{\partial u} (e^u) \frac{\partial}{\partial x} \left(-e^{K_1(B_1-x)} \right) \\ &= A_1 e^u K_1 e^{K_1(B_1-x)} \\ &= A_1 e^{-e^{K_1(B_1-x)}} K_1 e^{K_1(B_1-x)} \\ \alpha &= A_1 K_1 e^{-e^{K_1(B_1-x)} + K_1(B_1-x)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \beta &= \frac{\partial}{\partial x} \left((A_2 - A_1) e^{-e^{K_2(B_2-x)}} \right) \\ &= (A_2 - A_1) \frac{\partial}{\partial x} \left((A_2 - A_1) e^{-e^{K_2(B_2-x)}} \right) \\ f &= e^u, u = -e^{-K_2(B_2-x)} \\ &= (A_2 - A_1) \frac{\partial}{\partial u} (e^u) \frac{\partial}{\partial x} \left(-e^{K_2(B_2-x)} \right) \\ &= (A_2 - A_1) e^u K_2 e^{K_2(B_2-x)} \\ &= (A_2 - A_1) e^{-e^{-K_2(B_2-x)}} K_2 e^{K_2(B_2-x)} \\ \beta &= (A_2 - A_1) K_2 e^{-e^{K_2(B_2-x)} + K_2(B_2-x)} \end{aligned}$$

$$= A_1 K_1 e^{-e^{K_1(B_1-x)} + K_1(B_1-x)} + (A_2 - A_1) K_2 e^{-e^{K_2(B_2-x)} + K_2(B_2-x)}$$

2ª derivada:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(A_1 K_1 e^{-e^{K_1(B_1-x)} + K_1(B_1-x)} + (A_2 - A_1) K_2 e^{-e^{K_2(B_2-x)} + K_2(B_2-x)} \right)$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{\partial}{\partial x} \left(A_1 K_1 e^{-e^{K_1(B_1-x)} K_1(B_1-x)} \right) + \frac{\partial}{\partial x} \left((A_2 - A_1) K_2 e^{-e^{K_2(B_2-x)} + K_2(B_2-x)} \right) \\
&= \alpha + \beta
\end{aligned}$$

resolvendo cada uma das derivadas separadamente:

$$\begin{aligned}
\alpha &= \frac{\partial}{\partial x} \left(A_1 K_1 e^{-e^{K_1(B_1-x)} K_1(B_1-x)} K_1(B_1-x) \right) \\
\alpha &= A_1 K_1 e^{-e^{K_1(B_1-x)} + K_1(B_1-x)} (K_1 e^{K_1(B_1-x)} - K_1) \\
\beta &= \frac{\partial}{\partial x} \left((A_2 - A_1) K_2 e^{-e^{K_2(B_2-x)} + K_2(B_2-x)} \right) \\
\beta &= (A_2 - A_1) K_2 e^{-e^{K_2(B_2-x)} + K_2(B_2-x)} (K_2 e^{K_2(B_2-x)} - K_2)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= A_1 K_1 e^{-e^{K_1(B_1-x)} + K_1(B_1-x)} (K_1 e^{K_1(B_1-x)} - K_1) + \\
&\quad (A_2 - A_1) K_2 e^{-e^{K_2(B_2-x)} + K_2(B_2-x)} (K_2 e^{K_2(B_2-x)} - K_2)
\end{aligned}$$

Logístico + Gompertz

$$y = \frac{A_1}{1 + e^{K_1(B_1-x)}} + (A_2 - A_1)e^{-e^{K_2(B_2-x)}}$$

1ª derivada:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{A_1}{1 + e^{K_1(B_1-x)}} + (A_2 - A_1)e^{-e^{K_2(B_2-x)}} \right) \\ \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{A_1}{1 + e^{K_1(B_1-x)}} \right) + \frac{\partial}{\partial x} \left((A_2 - A_1)e^{-e^{K_2(B_2-x)}} \right) \\ = \alpha + \beta \end{aligned}$$

resolvendo cada uma das derivadas separadamente:

$$\begin{aligned} \alpha &= \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{A_1}{1 + e^{K_1(B_1-x)}} \right) \\ \alpha &= \frac{A_1 K_1 e^{K_1(B_1-x)}}{(1 + e^{K_1(B_1-x)})^2} \\ \beta &= \frac{\partial}{\partial x} \left((A_2 - A_1)e^{-e^{K_2(B_2-x)}} \right) \\ \beta &= (A_2 - A_1) K_2 e^{-e^{K_2(B_2-x)} + K_2(B_2-x)} \\ &= \frac{A_1 K_1 e^{K_1(B_1-x)}}{(1 + e^{K_1(B_1-x)})^2} + (A_2 - A_1) K_2 e^{-e^{K_2(B_2-x)} + K_2(B_2-x)} \end{aligned}$$

2ª derivada:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{A_1 K_1 e^{K_1(B_1-x)}}{(1 + e^{K_1(B_1-x)})^2} + (A_2 - A_1) K_2 e^{-e^{K_2(B_2-x)} + K_2(B_2-x)} (K_2 e^{K_2(B_2-x)} - K_2) \right) \\ \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{A_1 K_1 e^{K_1(B_1-x)}}{(1 + e^{K_1(B_1-x)})^2} \right) + \frac{\partial}{\partial x} \left((A_2 - A_1) K_2 e^{-e^{K_2(B_2-x)} + K_2(B_2-x)} (K_2 e^{K_2(B_2-x)} - K_2) \right) \\ = \alpha + \beta \end{aligned}$$

resolvendo cada uma das derivadas separadamente:

$$\begin{aligned} \alpha &= \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{A_1 K_1 e^{K_1(B_1-x)}}{(1 + e^{K_1(B_1-x)})^2} \right) \\ \alpha &= \frac{A_1 K_1^2 e^{K_1(B_1-x)} (e^{K_1(B_1-x)} - 1)}{(1 + e^{K_1(B_1-x)})^3} \\ \beta &= \frac{\partial}{\partial x} \left((A_2 - A_1) K_2 e^{-e^{K_2(B_2-x)} + K_2(B_2-x)} (K_2 e^{K_2(B_2-x)} - K_2) \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \beta &= (A_2 - A_1)K_2 e^{-e^{K_2(B_2-x)} + K_2(B_2-x)} (K_2 e^{K_2(B_2-x)} - K_2) \\ &= \frac{A_1 K_1^2 e^{K_1(B_1-x)} (e^{K_1(B_1-x)} - 1)}{(1 + e^{K_1(B_1-x)})^3} + (A_2 - A_1)K_2 e^{-e^{K_2(B_2-x)} + K_2(B_2-x)} (K_2 e^{K_2(B_2-x)} - K_2) \end{aligned}$$

Logístico generalizado

$$y = \frac{A}{1 + e^{-(B+Cx+Dx^2+Ex^3)}}$$

1ª derivada:

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{A}{1 + e^{-(B+Cx+Dx^2+Ex^3)}} \right) \\ &= A \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{1 + e^{-(B+Cx+Dx^2+Ex^3)}} \right) = A \frac{\partial}{\partial x} \left(1 + e^{-(B+Cx+Dx^2+Ex^3)} \right)^{-1} \end{aligned}$$

aplicando a regra da cadeia:

$$\begin{aligned} & \frac{\partial f(u)}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial x} \\ & f = u^{-1} \text{ e } u = 1 + e^{-(B+Cx+Dx^2+Ex^3)} \\ &= A \frac{\partial}{\partial u} (u)^{-1} \frac{\partial}{\partial x} \left(1 + e^{-(B+Cx+Dx^2+Ex^3)} \right) \\ & \frac{\partial}{\partial u} (u^{-1}) = -\frac{1}{u^2} \\ & \frac{\partial}{\partial x} \left(1 + e^{-(B+Cx+Dx^2+Ex^3)} \right) = e^{-(B+Cx+Dx^2+Ex^3)} (-C - 2Dx - 3Ex^2) \\ &= A \left(-\frac{1}{u^2} \right) e^{-(B+Cx+Dx^2+Ex^3)} (-C - 2Dx - 3Ex^2) \end{aligned}$$

substituindo u por:

$$\begin{aligned} & u = \left(1 + e^{-(B+Cx+Dx^2+Ex^3)} \right) \\ &= A \left(-\frac{1}{\left(1 + e^{-(B+Cx+Dx^2+Ex^3)} \right)^2} \right) e^{-(B+Cx+Dx^2+Ex^3)} (-C - 2Dx - 3Ex^2) \\ &= -\frac{A e^{-(B+Cx+Dx^2+Ex^3)} (-C - 2Dx - 3Ex^2)}{\left(1 + e^{-(B+Cx+Dx^2+Ex^3)} \right)^2} \end{aligned}$$

2ª derivada:

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial x} \left(-\frac{A e^{-(B+Cx+Dx^2+Ex^3)} (-C - 2Dx - 3Ex^2)}{\left(1 + e^{-(B+Cx+Dx^2+Ex^3)} \right)^2} \right) \\ &= -A \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{e^{-(B+Cx+Dx^2+Ex^3)} (-C - 2Dx - 3Ex^2)}{\left(1 + e^{-(B+Cx+Dx^2+Ex^3)} \right)^2} \right) \end{aligned}$$

aplicando a regra do quociente:

$$\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - g'f}{g^2}$$

$$f = e^{-(B+Cx+Dx^2+Ex^3)}(-C - 2Dx - 3Ex^2)$$

$$f' = \frac{\partial}{\partial x}(e^{-(B+Cx+Dx^2+Ex^3)})(-C - 2Dx - 3Ex^2)$$

$$f' = e^{-(B+Cx+Dx^2+Ex^3)}(-C - 2Dx - 3Ex^2)^2 + e^{-(B+Cx+Dx^2+Ex^3)}(-2D - 6Ex)$$

$$g = (1 + e^{-(B+Cx+Dx^2+Ex^3)})^2$$

$$g' = \frac{\partial}{\partial x}(1 + e^{-(B+Cx+Dx^2+Ex^3)})^2$$

$$g' = 2e^{-(B+Cx+Dx^2+Ex^3)}(1 + e^{-(B+Cx+Dx^2+Ex^3)})(-C - 2Dx - 3Ex^2)$$

$$= -A \frac{f'g - g'f}{g^2}$$

simplificando:

$$\alpha = e^{-(B+Cx+Dx^2+Ex^3)}$$

$$\beta = -C - 2Dx - 3Ex^2$$

$$= -A \frac{\alpha\beta + \alpha(-2D - 6Ex)(1 + \alpha)^2 - 2\alpha(1 + \alpha)\beta\alpha\beta}{(1 + \alpha)^4}$$

$$= -A \frac{\alpha\beta + \alpha(-2D - 6Ex)(1 + \alpha) - 2\alpha^2\beta^2}{(1 + \alpha)^4}$$

Brody generalizado

$$y = A(1 - e^{-(B+Cx+Dx^2+Ex^3)})$$

1ª derivada:

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial x} \left(A(1 - e^{-(B+Cx+Dx^2+Ex^3)}) \right) \\ &= -Ae^{-(B+Cx+Dx^2+Ex^3)}(-C - 2Dx - 3Ex^2) \end{aligned}$$

2ª derivada:

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial x} \left(-Ae^{-(B+Cx+Dx^2+Ex^3)}(-C - 2Dx - 3Ex^2) \right) \\ &= -Ae^{-(B+Cx+Dx^2+Ex^3)}(-C - 2Dx - 3Ex^2)^2 + e^{-(B+Cx+Dx^2+Ex^3)}(-2D - 6Ex) \end{aligned}$$

APÊNDICE B – Script R

```

1 #-----Algumas definicoes-----
2
3 #PI - Ponto de Inflexao
4 #x - vetor de variaveis independentes
5 #y - vetor de variaveis dependentes
6 #a, b, c, d, e, a1, b1, k1, a2, b2, k2 - valores iniciais

1 #-----Pacotes necessarios-----
2
3 pacote<-c("rootSolve")
4 instalar<-pacote[!(pacotes %in% installed.packages()["Package"])]
5 if(length(instalar)>0){install.packages(instalar)}
6 lapply(pacote, library, character.only=T)

1 #-----Gompertz + Gompertz-----#
2
3 PI_gompertz_gompertz<-function (x,y,a1,a2,b1,b2,k1,k2){
4   gg<-nls (y~((a1*(exp(-exp(k1*(b1-x)))))+
5     (a2-a1)*exp(-exp(k2*(b2-x))))),
6   start=c(a1=a1,a2=a2,b1=b1,b2=b2,k1=k1,k2=k2))#modelo
7   a1<-summary(gg)$parameters[1,1]
8   a2<-summary(gg)$parameters[2,1]
9   b1<-summary(gg)$parameters[3,1]
10  b2<-summary(gg)$parameters[4,1]
11  k1<-summary(gg)$parameters[5,1]
12  k2<-summary(gg)$parameters[6,1] #coeficientes do modelo
13  fx<-function(x) a1*(k1*exp(-exp(k1*(b1-x)))+
14    k1*(b1-x))* (k1*exp(k1*(b1-x))-k1)+
15    ((a2-a1)*(k2*exp(-exp(k2*(b2-x)))+k2*(b2-x)))*
16    (k2*exp(k2*(b2-x))-k2)) #segunda derivada
17  PI<-uniroot.all(fx,c(0,max(x)))
18  PI<-c(PI[1],PI[3]) #pontos de inflexao
19 return(PI)}

```



```

1 #-----Logistico + Gompertz-----#
2
3 PI_logistico_gompertz<-function (x,y,a1,a2,b1,b2,k1,k2){
4   lg<-nls (y~((a1/(1+exp(k1*(b1-x))))+(a2-a1)*exp(-exp(k2*(b2-x))))),
5   start=c(a1=a1,a2=a2,b1=b1,b2=b2,k1=k1,k2=k2) #modelo
6   a1<-summary(lg)$parameters[1,1]
7   a2<-summary(lg)$parameters[2,1]
8   b1<-summary(lg)$parameters[3,1]
9   b2<-summary(lg)$parameters[4,1]
10  k1<-summary(lg)$parameters[5,1]
11  k2<-summary(lg)$parameters[6,1] #coeficientes do modelo
12  fx<-function(x) (a1*(k1^2)*exp(k1*(b1-x))*
13  (exp(k1*(b1-x))-1))/
14  ((1+exp(k1*(b1-x)))^3)+
15  ((a2-a1)*k2*exp(-exp(k2*(b2-x)))+k2*(b2-x))*
16  (k2*exp(k2*(b2-x))-k2) #segunda derivada
17  PI<-uniroot.all(fx,c(0,max(x)))
18  PI<-c(PI[1],PI[3]) #pontos de inflexao
19 return(PI)}

```

```

1 #-----Logistico generalizado-----#
2
3 PI_logistico_generalizado<-function (x,y,a,b,c,d,e){
4   l<-nls(y~(a/(1+exp(-b-c*x-d*x^2-e*x^3))),
5   start=c(a=a,b=b,c=c,d=d,e=e)) #modelo
6   a<-summary(l)$parameters[1,1]
7   b<-summary(l)$parameters[2,1]
8   c<-summary(l)$parameters[3,1]
9   d<-summary(l)$parameters[4,1]
10  e<-summary(l)$parameters[5,1] #coeficientes do modelo
11  fx<-function(x)-a*(exp(-(b+c*x+d*x^2+e*x^3))*
12  ((-3*e*x^2-2*d*x-c)^2-6*e*x-2*d)*
13  (exp(-(b+c*x+d*x^2+e*x^3))+1)-
14  2*exp(-2*(b+c*x+d*x^2+e*x^3))*
15  (-3*e*x^2-2*d*x-c)^2)/
16  (1+exp(-(b+c*x+d*x^2+e*x^3)))^3 #segunda derivada
17  PI<-uniroot.all(fx,c(0,max(x)))
18  PI<-c(PI[1],PI[3]) #pontos de inflexao
19 return(PI)}

```