EXTENSÃO DO TESTE DE NORMALIDADE DE SHAPIRO-FRANCIA PARA O CASO MULTIVARIADO

ROBERTA BESSA VELOSO SILVA

2009

ROBERTA BESSA VELOSO SILVA

EXTENSÃO DO TESTE DE NORMALIDADE DE SHAPIRO-FRANCIA PARA O CASO MULTIVARIADO

Tese apresentada à Universidade Federal de Lavras, como parte das exigências do Programa de Pós-graduação em Estatística e Experimentação Agropecuária, para a obtenção do título de "Doutor".

Orientador

Prof. Dr. Daniel Furtado Ferreira

LAVRAS

MINAS GERAIS - BRASIL

2009

Ficha Catalográfica Preparada pela Divisão de Processos Técnicos da Biblioteca Central da UFLA

Silva, Roberta Bessa Veloso.
Extensão do teste de normalidade de Shapiro-Francia para o caso multivariado / Roberta Bessa Veloso Silva. - Lavras : UFLA, 2009.

59 p.

Tese (Doutorado) - Universidade Federal de Lavras, 2009.
Orientador: Daniel Furtado Ferreira.
Bibliografia.

1. Simulação Monte Carlo. 2. Shapiro-Wilk. 3. Teste de normalidade multivariado. 4. Shapiro-Francia. I. Universidade Federal de Lavras. II.Título.

CDD-519.282

ROBERTA BESSA VELOSO SILVA

EXTENSÃO DO TESTE DE NORMALIDADE DE SHAPIRO-FRANCIA PARA O CASO MULTIVARIADO

Tese apresentada à Universidade Federal de Lavras, como parte das exigências do Programa de Pós-graduação em Estatística e Experimentação Agropecuária, para a obtenção do título de "Doutor".

APROVADA em 10 de julho de 2009

Prof. Dr. Marcelo Tavares	UFU
Prof. Dr. Eric Batista Ferreira	UNIFAL
Prof. Dr. Ruben Delly Veiga	UFLA
Prof. Dr. Renato Ribeiro Lima	UFLA

Prof. Dr. Daniel Furtado Ferreira
UFLA
(Orientador)

LAVRAS
MINAS GERAIS - BRASIL

"Ainda que eu atravesse o vale da sombra e da morte não temerei mal algum,

pois estais comigo"

(Salmo 22)

AGRADECIMENTOS

A Deus, por me abençoar com suas mãos divinas e direcionar meus passos pelos melhores caminhos.

A minha família (Lenita, José Oswaldo e Júnior), agradeço por todas as palavras, todo amor e apoio para alcançar mais essa vitória.

Ao meu orientador, professor Daniel Furtado Ferreira agradeço pela confiança. Em todos esses anos tive o prazer de trabalhar com ele, de poder me espelhar na sua competência, no seu profissionalismo. As suas sábias palavras me fizeram enxergar além da vida profissional.

À Universidade Federal de Lavras, que fez parte da minha vida desde a graduação. Em especial aos professores do Departamento de Ciências Exatas (DEX), por ajudarem a enriquecer os meus conhecimentos e aos funcionários, pela amizade.

À Fapemig pelo apoio financeiro concedido durante o período de realização deste trabalho.

Aos membros da banca examinadora, pelas sugestões e contribuições valiosas para o aprimoramento deste trabalho.

Aos meus amigos, Anderson, Patrícia Mendes, Patrícia Paranaíba, Verônica, Graziela, Luciene, Maria Imaculada, Natascha, Renata, Taciana e Eric, com quem sempre pude contar, pela ajuda e a amizade e que compartilharam harmoniosamente comigo vários momentos do cotidiano. Nunca esquecerei de tudo que todos vocês fizeram por mim.

SUMÁRIO

LISTA DE TABELAS

RESUMO

SILVA, Roberta Bessa Veloso. **Extensão do teste de normalidade de Shapiro-Francia para o caso multivariado**. 2009. 59 p. Tese (Doutorado em Estatística e Experimentação Agropecuária)- Universidade Federal de Lavras, Lavras. *

No presente trabalho ressalta-se a importância da aplicação de testes de normalidade multivariada, pois a suposição de que um conjunto de dados multivariados vem de uma distribuição normal multivariada é central em muitas técnicas estatísticas multivariadas. Se esta suposição não é satisfeita, os resultados das análises estatísticas tornam-se não confiáveis. Shapiro & Francia (1972) apresentaram uma alternativa do teste Shapiro & Wilk (1965) univariado, basicamente com as mesmas propriedades em termos de desempenho de seu concorrente direto. A vantagem é a grande facilidade de obtenção de estimativas dos coeficientes associados às estatísticas de ordem $\boldsymbol{a}$, em relação às mesmas quantidades do teste de Shapiro-Wilk. Não se têm relatos da implementação do teste de normalidade multivariada de Royston (Royston, 1983b, 1993) em nenhum *software* de análise estatística. Uma aparente e possível razão é a dificuldade na sua implementação. Por essa razão, neste trabalho objetivou-se a proposição da extensão multivariada do teste de normalidade univariado de Shapiro-Francia (Shapiro & Francia, 1972), TSFM, tendo por inspiração a extensão do teste de normalidade de Shapiro-Wilk univariada para o caso multivariado (Royston, 1983, 1993), TSWM. O desempenho dos testes de Shapiro-Wilk multivariado e do teste proposto nesse trabalho foi avaliado pelas taxas de erro tipo I e poder, por meio de simulação Monte Carlo. Conclui-se que o teste de normalidade univariado de Shapiro-Francia foi estendido para o caso multivariado com sucesso, pois controlou o erro tipo I e foi equivalente ao teste Shapiro-Wilk multivariado. O poder do TSFM foi, em geral, igual ou superior ao do TSWM. Não há um teste, entre os dois, uniformemente superior em todos os casos. O TSFM é recomendado para uso rotineiro nas aplicações multivariadas que requerem testes de normalidade.

* Comitê Orientador: Daniel Furtado Ferreira - UFLA (Orientador); Eric Batista Ferreira - UNIFAL.

ABSTRACT

SILVA, Roberta Bessa Veloso. **Multivariate extension of the Shapiro-Francia normality test**. 2009. 59 p. Thesis (Doctor in Statistics and Agricultural Experimentation) - Federal University of Lavras, Lavras. [*]

The present work emphasizes the importance of multivariate normality test, since the assumption that a set of multivariate data come from a multivariate normal distribution is central in many multivariate statistical techniques. If this assumption is not satisfied, the results of statistical analysis becomes unreliable. Shapiro & Francia (1972) proposed an alternative test of Shapiro & Wilk (1965) univariate which shows the same properties related to the performance of the Shapiro and Wilk' test. The great advantage the Shapiro and Francia's univariate normality test is simplicity of obtaining estimates of the coefficients associated with the statistics of order $\boldsymbol{a}$, for the same quantities of the Shapiro-Wilk test. There is no papers reporting implementation of Royston multivariate normality test (Royston, 1983b, 1993) in any statistical analysis system. One reason is the difficulty in its implementation. For this reason this research proposed the multivariate extension of the univariate normality Shapiro-Francia's test (Shapiro & Francia, 1972). The performance of tests was evaluating the type I error rates and power using Monte Carlo simulation. The Shapiro-Francia univariate normality test was extended to the multivariate case successfully, controlled the type I error and was considered equivalent to the multivariate Shapiro-Wilk's normality test. The power of the new test was in general equal and greater than the power of the multivariate Shapiro-Wilk's normality test. There is no test uniformly superior in all cases. The new Shapiro and Francia's multivariate normality test is recommended in applications that require evaluating for multivariate normality.

[*]Guidance commettee: Daniel Furtado Ferreira - UFLA (Adviser); Eric Batista Ferreira - UNIFAL.

1 INTRODUÇÃO

A estatística multivariada tem como ingrediente básico a observação de diversas variáveis simultaneamente nas unidades amostrais ou experimentais. A análise, a descrição e a inferência são realizadas com base nas respostas simultâneas, valendo-se da estrutura de correlação entre as variáveis.

A análise multivariada pode se originar da generalização de técnicas e métodos univariados. A utilização adequada das técnicas multivariadas de inferência depende do bom entendimento dos seus aspectos e de uma avaliação detalhada para verificar se as pressuposições formuladas na teoria foram atendidas.

A suposição de que um conjunto de dados multivariados vem de uma distribuição normal multivariada é central em muitas técnicas estatísticas multivariadas. Se essa suposição não é satisfeita, os resultados das análises estatísticas podem não ser confiáveis. As taxas de erro tipo I e tipo II tendem a aumentar e o poder diminui nessas circunstâncias. A necessidade de se avaliar a suposição de normalidade multivariada dos dados amostrais ou dos resíduos experimentais é, então, preponderante.

Royston (1983b) generalizou o teste de normalidade de Shapiro & Wilk (1965) univariado para o caso multivariado. Esse teste baseia-se na obtenção da estatística original W para cada variável, que é transformada em um escore normal padrão Z, também para cada variável, utilizando uma transformação de W pela família Box-Cox. Uma nova transformação é realizada, obtendo-se estatísticas com distribuições marginais quiquadrado. Essas estatísticas são somadas e os graus de liberdade, uma vez que não são independentes, dependem da correlação existente entre elas. Royston (1983b) propôs determinar essas correlações a partir das estimativas das correlações entre as variáveis originais. Assim, obteve um teste quiquadrado de alto desempenho para testar a hipótese de normalidade multivariada.

É necessário enfatizar que as transformações utilizadas e as quantidades necessárias para o cálculo das estatísticas marginais devem utilizar os métodos descritos em Royston (1993).

Não se têm relatos da implementação do teste de normalidade multivariada de Royston (Royston, 1983b, 1993) em nenhum software de análise estatística. Uma aparente e possível razão é a dificuldade na sua implementação.

Shapiro & Francia (1972) apresentaram uma alternativa do teste de normalidade univariado de Shapiro-Wilk (Shapiro & Wilk, 1965) que apresenta, basicamente, as mesmas propriedades em termos de desempenho de seu concorrente direto. A vantagem é a grande facilidade de obtenção de estimativas dos coeficientes associados às estatísticas de ordem $\boldsymbol{a}$, em relação às mesmas quantidades do teste de Shapiro-Wilk. A definição de $\boldsymbol{a}$ no teste de Shapiro-Wilk é $\boldsymbol{a} = (\boldsymbol{m}/ \boldsymbol{m}^t\boldsymbol{V}^{-2}\boldsymbol{m})$ e, no teste de Shapiro-Francia, é $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{m}/\ (\boldsymbol{m}^t\boldsymbol{m})^{1/2}$, em que $\boldsymbol{m}$ é um vetor $n \times 1$ das esperanças das estatísticas de ordem da normal padrão e $\boldsymbol{V}$ a matriz $n \times n$ de covariância dessas estatísticas de ordem. Royston (1993) apresenta aproximações para a obtenção de estimativas de $\boldsymbol{a}$, considerando ambas as definições.

Por essas razões, neste trabalho objetivou-se a proposição da extensão multivariada do teste de normalidade de Shapiro-Francia (Shapiro & Francia, 1972) tendo por inspiração a extensão do teste de normalidade de Shapiro-Wilk univariado para o caso multivariado (Royston, 1983b, 1993). Além do mais, buscou-se realizar a avaliação do desempenho da nova proposta por simulação Monte Carlo.

2 REFERENCIAL TEÓRICO

2.1 Taxas de erro tipo I e Poder

O pesquisador, em geral, depara-se com a necessidade de testar hipóteses sobre parâmetros populacionais. Ao testar as hipóteses, o pesquisador corre o risco de tomar decisões erradas, ou seja, de cometer erros. Esses erros são referenciados como sendo do tipo I ou do tipo II. O erro tipo I é aquele que se comete ao rejeitar uma hipótese nula, dado que essa hipótese é verdadeira e a probabilidade de incorrer neste tipo de erro é representada pelo valor de significância α (Mood et al., 1974). O erro tipo II é o erro que se comete ao aceitar a hipótese nula, quando esta hipótese é falsa, e a probabilidade associada a esse erro é representada por β.

O pesquisador não consegue controlar as probabilidades de se cometer os dois tipos de erros ao mesmo tempo, embora consiga controlar a do erro tipo I. Para que quaisquer testes de hipóteses ou regras de decisão tenham resultados válidos, eles devem ser planejados de modo que os erros de decisão sejam reduzidos ao mínimo. Isto não é tarefa simples, pois, para um dado tamanho de amostra, a tentativa de diminuir certo tipo de erro é acompanhada pelo aumento do outro. Isso reforça a importância do controle do erro tipo I e que os erros (tipo I e tipo II) são inversamente proporcionais (Borges & Ferreira, 2002). Portanto, um equilíbrio entre as taxas de erro é essencial. O poder de um teste é a probabilidade de rejeitar uma hipótese H_0 falsa (Ferreira, 2005). O complemento da probabilidade da ocorrência do erro tipo II, $1-\beta$, é denominado poder do teste.

No desenvolvimento de um novo teste, segundo Ferreira (2005), a avaliação do poder é um critério largamente empregado para a escolha, ou não, do teste. O poder não é, no entanto, factível de ser calculado em situações reais por depender do valor desconhecido do parâmetro, por exemplo, μ. Assim sendo, pode-se definir a função poder, por exemplo, $P(\mu)$, como a probabilidade de H_0 ser rejeitada, dado que H_0 é falsa. Essa função depende da quantidade desconhecida μ. A função complementar é aquela que se refere à probabilidade de H_0 não ser rejeitada, sendo conhecida por curva característica de operação (CCO). A curva característica de operação é definida por $CCO(\mu) = 1 - P(\mu)$.

2.2 Simulação de dados

Segundo Ferreira (2008), em muitos trabalhos científicos existe a necessidade de simular dados de alguma distribuição. Em outras situações, destacam-se a validação de um modelo e a comparação de métodos de estimação e de testes de hipóteses. A geração de amostras aleatórias de distribuições multivariadas é uma tarefa um pouco mais difícil de ser realizada do que a geração de amostras aleatórias de distribuições univariadas (Johnson, 1987).

Dachs (1988) define simulação como o processo para imitar o comportamento de um sistema real, para estudar seu funcionamento sob condições alternativas. Tornou-se cada vez mais frequente o uso de métodos de simulação para estudar novos procedimentos estatísticos ou para comparar o comportamento de diferentes técnicas estatísticas.

A simulação de dados é, possivelmente, a área em que mais se usa geração de números aleatórios, na atualidade e é também muito antiga (Dachs, 1988). Essa é uma área muito vasta, que cresceu muito e passou por uma revolução com o advento do computador. Foi, portanto, o aparecimento do computador que deu a um número crescente de pessoas a possibilidade de realizar simulações, desde simples jogos até modelos da economia em escala mundial. Um dos aspectos importantes da simulação é a validação dos modelos, pois, se o modelo reproduzir com alguma fidelidade a realidade, torna-se clara a influência de certas alterações na realidade e ainda permite que essas alterações sejam testadas antes de serem levadas para a realidade no modelo, ou seja, com o programa de simulação (Dachs, 1988)

O método Monte Carlo, de maneira bastante simplificada, é utilizado para que sejam simuladas realizações de variáveis aleatórias a partir de uma sequência pseudoaleatória, baseada na distribuição uniforme (0,1). Todo processo simulado que envolve um componente aleatório de qualquer distribuição é considerado como pertencente ao método Monte Carlo. Felizmente, na literatura, existem inúmeros algoritmos eficientes de inversão das funções de distribuições comumente usadas pelos estatísticos (Santos, 2001).

2.3 Testes multivariados de normalidade

O desenvolvimento de testes multivariados de normalidade começou com o trabalho de Wayle, intitulado "Distribuição Beta Multivariada e Teste para Normalidade Multivariada", em 1968. O próximo estágio no desenvolvimento desses testes está relacionado com os trabalhos de Mardia (1970, 1974, 1975, 1980). Foi Mardia quem introduziu as medidas de assimetria e curtose multivariadas com a generalização das medidas de assimetria de Pearson. Tendo essas medidas como base, vários testes para normalidade multivariada foram construídos. Testes conjuntos e diretos utilizando essas medidas foram desenvolvidos no trabalho de Mardia & Foster (1983).

A verificação do poder dos testes multivariados de normalidade é baseada nas medidas de assimetria e curtose há mais de 40 anos. Nenhum desses estudos é completamente abrangente, já que seria exaustivo testar todos os métodos existentes, e impossível testar todos os desvios de normalidade. A maioria dos estudos mais abrangentes se limita a estudar uma categoria particular de testes ou aquele considerado o mais popular.

Mardia (1970) desenvolveu extensões multivariadas de assimetria e curtose univariadas. As medidas obtidas por Mardia são invariantes. A estatística de teste amostral para assimetria multivariada é

$$b_{1,p} = \frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \left[(y_i - \bar{y})^t S^{-1} (y_i - \bar{y}) \right]^3 . \tag{2.1}$$

A correspondente estatística amostral para curtose é

$$b_{2,p} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \left[(y_i - \bar{y})^t S^{-1} (y_i - \bar{y}) \right]^2 . \tag{2.2}$$

Note que assimetria e curtose de Mardia são funções das distâncias quadráticas de Mahalanobis, o que torna essas medidas úteis na detecção de *outliers*. Grandes valores de curtose multivariada, em comparação com o valor esperado sob normalidade, indicam que uma ou mais observações têm grande distância de Mahalanobis e se localizam longe do centróide gerado pelo conjunto de dados.

Mardia (1970, 1974) determinou as distribuições assintóticas das estatísticas de assimetria e curtose multivariadas. Se for considerado $A = nb_{1,p}$, pode-se mostrar que A é assintoticamente distribuída como uma variável aleatória qui-quadrado com $p(p+1)(p+2)/6$ graus de liberdade. Similarmente, a estatística $B = [b_{2,p} - p(p+2)]/\sqrt{8p(p+2)/n}$ é assintoticamente distribuída segundo uma normal padrão. As funções de distribuições assintóticas das estatísticas de assimetria e curtose multivariadas foram apresentadas por Mardia (1970, 1974, 1975), para desenvolver dois testes de normalidade multivariada.

As pesquisas sobre testes de normalidade sofreram novo impulso com a introdução do teste da análise da variância proposto por Shapiro & Wilk (1965). Segundo Royston (1982), o teste estatístico de Shapiro-Wilk foi construído pela regressão dos valores amostrais ordenados com as correspondentes estatísticas de ordem normais que, para uma amostra de uma população normalmente distribuída, é linear. A estatística W foi obtida como uma razão F da análise generalizada de mínimos quadrados, sendo adequado o ajuste linear. As porcentagens das distribuições nulas de W foram tabuladas para as probabilidades acumuladas, $1 - \alpha =$ $0{,}01$; $0{,}02$; $0{,}05$; $0{,}10$; $0{,}50$; $0{,}9$; $0{,}95$; $0{,}98$; $0{,}99$ e para tamanhos amostrais de $n = 3(1)50$. Uma transformação normalizadora de W foi proposta mais tarde (Shapiro & Wilk, 1968), utilizando a aproximação S_B de Johnson para a região de $n = 7(1)50$, embora o uso de tabelas para $4(1)6$ tenha sido necessário.

No artigo de Royston (1982), foi feita uma aplicação do uso de W para o ajuste de três parâmetros da distribuição lognormal. Os valores de W foram gerados de conjuntos de desvios normais calculados como transformação integral normal de números pseudoaleatórios uniformes. Foram gerados 600 valores de W para cada tamanho amostral $n = 7(1)30(5)100$, 125, 150, $200(100)600$, 750, 1000, 1250, 1500 e 2000. Os resultados obtidos por Royston (1982) foram discordantes daqueles encontrados por Shapiro & Wilk (1965).

De acordo com os dados trabalhados em Royston (1982), os coeficientes de assimetria e curtose se reduzem em magnitude quando n aumenta a partir de 10, alcançando valores aproximadamente normais em $n = 750$ e, então, divergindo. Shapiro & Wilk (1965) obtiveram $\beta_1 = -3{,}32$, $\beta_2 = 212{,}43$ para $n = 50$. Foi observado que a distribuição acumulada empírica de W se torna menos assimétrica quando n vai de 5 para 50.

Segundo Royston (1983b), a estatística W de Shapiro-Wilk tem tido melhor desempenho que o teste conjunto de normalidade. Royston (1982) estendeu seus estudos para tamanhos de amostra até 2000 e usou um algoritmo para calcular W e seus níveis de significância para quaisquer tamanhos de amostra entre 3 e 2000. A descrição completa da teoria desse algoritmo é dada por Royston (1982) que utilizando simulação Monte Carlo, Royston (1982) mostrou que a transformação

$$Y = (1 - W)^{\lambda} \tag{2.3}$$

resulta numa variável Y, com distribuição aproximadamente normal padrão. A transformação (2.3) foi adequada para tamanhos de amostra entre 7 e 2000. O parâmetro λ foi estimado por 50 tamanhos de amostras selecionadas e, então, suavizados com polinômios em $ln(n) - d$, sendo $d = 3$ para $7 \leq n \leq 20$ e $d = 5$ para $21 \leq n \leq 2000$.

A média μ_y e o desvio padrão σ_y da variável y transformada foram calculados utilizando-se λs e seus polinômios suavizados por $ln(n) - d$. Para dado valor de W, seu nível de significância foi calculado pela quantidade

$$Z = \frac{\left[(1 - W)^{\lambda} - \mu_y\right]}{\sigma_y}, \tag{2.4}$$

que é a cauda superior da distribuição normal padrão. Grandes valores de Z indicam não normalidade da amostra original.

A estatística W não foi calculada por Royston (1983b) para tamanhos de amostra além de $3 \leq n \leq 2000$. Para amostra de tamanhos de 4 a 6, o nível de significância de W foi abaixo de $0{,}0002$ e acima de $0{,}9998$, sendo considerado 0 ou 1, respectivamente. O tempo exigido para o cálculo de W para grandes amostras dependerá, principalmente, da rotina utilizada para os valores amostrais estabelecidos que não foram considerados nesse algoritmo.

Royston (1983b) estendeu o teste de Shapiro-Wilk para o caso multivariado. Primeiro, calculou a estatística de Shapiro-Wilk univariada, W_j, para a variável j, sendo $j = 1,2,\ldots,p$, em que p é o número de variáveis. Então, W_j foi normalizada de acordo com a seguinte transformação:

$$Z_j = \frac{(1 - W_j)^\lambda - \mu}{\sigma} \tag{2.5}$$

sendo λ, μ e σ constantes para um dado tamanho de amostra apresentado em Royston (1982). Em seguida, é definida a estatística:

$$R_j = \left\{ \Phi^{-1} \left[\frac{\Phi(-Z_j)}{2} \right] \right\}^2. \tag{2.6}$$

Se os dados têm distribuição normal multivariada e sendo os Xs mutuamente independentes, então, o $\sum R_j$ tem uma distribuição aproximada de quiquadrado com p graus de liberdade. Uma vez que os Xs e os R_js são dependentes, Royston formulou a estatística de teste

$$H = \frac{e \sum R_j}{p} \tag{2.7}$$

em que e uma constante menor ou igual a p. Essa constante e é chamada de "graus de liberdade equivalentes". A estatística H tem distribuição aproximada de quiquadrado com e graus de liberdade e a normalidade multivariada é rejeitada se a estatística apresentar valores superiores ao valor crítico considerado.

De acordo com Royston (1983, 1995), o teste proposto por Shapiro & Wilk (1965) é um poderoso teste de normalidade. É a razão de duas estimativas da variância de uma distribuição normal baseada numa amostra aleatória de n observações. O numerador da estatística W do teste de Shapiro-Wilk é proporcional ao quadrado do melhor estimador linear do desvio padrão (variância mínima, não viesado) e o denominador é a soma dos quadrados das observações ao redor da média amostral. A estatística W pode ser definida como o quadrado do coeficiente de correlação de Pearson entre as observações ordenadas e os coeficientes

$\boldsymbol{a}^t = [a_1,...,a_n]$. A estatística do teste de Shapiro-Wilk é dada por:

$$W = \frac{(\sum a_i \nu_i)^2}{\sum (\nu_i - \bar{\nu})^2}, \tag{2.8}$$

sendo $\bar{\nu} = \sum \nu_i / n$ e $\boldsymbol{a}$ é o melhor coeficiente linear não viesado de Sarhan & Greenberg (1956).

Cirillo & Ferreira (2003) propuseram a extensão do teste do coeficiente de correlação, r_q, apresentado por Johnson & Wichern (1998), para amostras maiores, bem como a expansão desse teste para os quantis $0{,}01$; $0{,}05$ e $0{,}10$, para diversos tamanhos de amostras e variando o número de variáveis p em $1 \leq p \leq 10$. Concluiu-se que o poder desse teste foi reduzido à medida que aumentou o número de variáveis e o controle da taxa de erro tipo I não apresentou problemas, devido à própria construção do teste.

Mecklin & Mundfrom (2004), quando compararam os vários trabalhos de testes multivariados de normalidade, observaram que pouco tem sido feito na verificação da qualidade desses testes. D$'$Agostino (1970) reforçou no "pouco tem sido feito quanto ao estudo do poder dos testes multivariados de normalidade" e que nenhuma recomendação definitiva pode ser feita.

Segundo Mecklin & Mundfrom (2004), muitas extensões multivariadas de procedimentos univariados de ajuste padrão, tais como o quiquadrado, Kolmogorov-Smirnov, Cramér-Von Mises e Anderson-Darling, foram propostas. Esforços têm sido feitos para estender o teste de normalidade de Shapiro-Wilk univariado, como por exemplo, os testes de Royston (1983) e Mudholkar et al. (1995). As tentativas para testar a normalidade multivariada via procedimentos de ajuste ou medidas de assimetria e curtose foram alvos de críticas. Essas categorias de testes foram criticadas por falta de consistência diante de todas as possíveis distribuições alternativas e por não serem verdadeiramente procedimentos multivariados (Mecklin & Mundfrom, 2004). Esses testes, que são matematicamente consistentes, mostram somente o desvio da normalidade e não a razão para a não-normalidade.

Conforme Mecklin & Mundfrom (2004), o procedimento gráfico na verificação do ajuste a uma distribuição, inclusive a normal multivariada, é um bom método. No procedimento gráfico utilizado na verificação do ajuste dos dados a uma distribuição específica, a linearidade dos pontos plotados indica que os dados se ajustam à distribuição proposta. Os desvios da linearidade plotada indicam possíveis problemas de falta de ajuste, tais como assimetria, curtose ou a presença de *outliers* e as possíveis soluções, como o uso de transformações, eliminação de *outliers* ou o uso de estimadores robustos, são consideradas. Uma excelente revisão de métodos gráficos usados em técnicas não-paramétricas é apresentado por Fisher (1983).

Farrel et al. (2007) estudaram os tamanhos e as taxas de poder empíricos de algumas recentes propostas de testes multivariados de normalidade e compararam-nos com o propósito de encontrar aquele com melhor desempenho. Os autores mostraram que o teste de Royston (1983b) não atinge o nível nominal de significância e não leva em consideração a extensão proposta por Royston (1993) para corrigir o problema. Um teste consistente e invariante proposto por Henze & Zirkler (1990) tem boas propriedades de poder, particularmente para amostras maiores ou iguais a 75, enquanto uma aproximação sugerida por Royston detecta efetivamente desvios de normalidade multivariada para tamanhos pequenos de amostras. Os resultados de Farrel et al. (2007) foram comparados com os estudos de simulação prévios e foram discutidas algumas situações associadas com a geração de dados multivariados.

Ferreira (2008) propôs um teste de normalidade baseado na extensão multivariada do teste W' de Shapiro-Francia. A estatística do teste foi baseada na correlação entre os quantis observados das distâncias quadráticas para a média amostral e os quantis esperados da distribuição beta. Buscou-se uma transformação para a obtenção de uma aproximação para a normal e foram realizadas avaliações Monte Carlo para avaliar a performance do teste. O teste conjunto baseado em assimetria e curtose foi conservativo na maioria dos casos e tendeu a acentuar o rigor com o aumento do número de variáveis. A tentativa de extensão do teste de normalidade de Shapiro-Francia proposto por Ferreira (2008) foi feita sem sucesso, pois este foi competitivo somente para amostras iguais ou superiores a 100 e quando o número de variáveis foi menor ou igual a 20.

De acordo com Domanski (2008), existem muitos métodos de construção de testes de normalidade multivariados. A revisão de literatura prova que existem pelo menos sessenta procedimentos de verificação da hipótese de normalidade multivariada da variável e das distribuições aleatórias. Para tanto, pode-se indicar uma importante categoria de testes multivariados de normalidade, as classes de testes baseados em assimetria e curtose. Características desses testes, juntamente com as tabelas de quantis das funções dos testes, podem ser encontrados em Snedecor & Cochran (1989). O procedimento de Domanski para testar a normalidade multivariada está implementado no software estatístico R. O método empregado por ele baseia-se em Royston (1982, 1982b e 1995). Existem críticas em relação ao desempenho desse teste. Esse teste apresenta altas taxas de erro tipo I, que aumentam com o aumento do número de variáveis p.

Cantelmo & Ferreira (2007) avaliaram a performance do teste multivariado proposto por Domanski (1998), implementado no software estatístico R (R Development Core Team, 2008), comparando o seu desempenho com os testes de assimetria e curtose de Mardia (1970, 1974, 1975), utilizando simulação Monte Carlo. Foram comparados as taxas de erro tipo I e os valores de poder dos testes. Os autores concluíram que o teste de normalidade multivariada de Domanski (1998) implementado no R, função *mshapiro.test* do pacote mvnormtest, tem fraco desempenho (liberal) e não é, em hipótese alguma, recomendado para uso rotineiro.

Oliveira & Ferreira (2009) propuseram a extensão multivariada do teste de normalidade quiquadrado. Foram considerados tamanhos de amostras, $n = 10, 20, 50, 100$ e 200, diferentes número de variáveis, p para os níveis nominais de 5% e 1% e a correlação foi fixada em $0{,}5$. O teste proposto denominado de MCS foi comparado com o teste conjunto de assimetria e curtose, MSK, e o teste de normalidade multivariado de Shapiro-Wilk proposto por Royston (1993), $MR92$. O desempenho dos testes foi avaliado pelas taxas de erro tipo I e poder via simulação Monte Carlo. Sob H_1, foram consideradas as distribuições alternativas t multivariada com 30 graus de liberdade, lognormal e normal contaminada.

O teste proposto por Oliveira & Ferreira (2009) controlou o erro tipo I em todas as situações. O poder aumentou com o aumento do tamanho de amostra e é satisfatório para $n \geq 50$. Nas circunstâncias em que o número de variáveis, p é próximo do tamanho de amostra n, o poder do teste MCS foi melhor que o teste conjunto de assimetria e curtose. Para distribuições semelhantes à normal multivariada o teste MCS teve desempenho melhor do que o teste $MR92$. Não existe um teste uniformemente superior em todos os casos. O teste MCS é recomendado nas circunstâncias em que p é próximo de n.

3 MÉTODOS

3.1 Proposta do teste

Uma das propostas deste trabalho foi a de adaptar a metodologia de Royston (1983) do teste de Shapiro-Wilk multivariado para a proposição do teste de Shapiro-Francia multivariado. A idéia é a substituição da estatística de Shapiro-Wilk multivariada, W, pela estatística de Shapiro-Francia univariada, estimando novos valores para os parâmetros do modelo (3.12). Este teste utiliza uma simplificação do vetor de coeficientes $\boldsymbol{a}$ de dimensão $n \times 1$ do teste de Shapiro-Wilk. Seja o vetor $\boldsymbol{a}^*$ de dimensão $n \times 1$ definido por:

$$\boldsymbol{a}^* = (\tilde{\boldsymbol{m}}^{\boldsymbol{t}}\tilde{\boldsymbol{m}})^{-1/2}\tilde{\boldsymbol{m}} \tag{3.1}$$

em que $\tilde{\boldsymbol{m}} = [\tilde{m}_1,...,\tilde{m}_n]^t$ é o vetor do estimador das médias das estatísticas de ordem, em que $\tilde{m}_j = \Phi^{-1}[(j - 0{,}375)/(n + 0{,}25)]$, sendo $\Phi^{-1}(U)$ o valor da inversa da função distribuição dado o argumento U entre 0 e 1, n o tamanho da amostra e j refere-se à j-ésima estatística de ordem.

Seja $\boldsymbol{X}_1$, $\boldsymbol{X}_2$,..., $\boldsymbol{X}_n$ uma amostra aleatória de tamanho n de uma distribuição qualquer com média $\boldsymbol{\mu}$ e covariância $\boldsymbol{\Sigma}$, ambos desconhecidos, em que $\boldsymbol{X}_j \in \mathbb{R}^p$ e $j = 1{,}2{,}...{,}n$ e $i = 1{,}2{,}...{,}p$.

A estatística do teste de Shapiro-Francia univariado é dada por:

$$W_i' = \frac{\left[\sum_{j=1}^{n} a_j^* X_{(j)i}\right]^2}{\sum_{j=1}^{n}(X_{(j)i} - \bar{X}_i)^2} \qquad i = 1{,}2{,}...{,}p$$

em que $X_{(j)i}$ é a j-ésima estatística de ordem correspondente à i-ésima variável aleatória do vetor $\boldsymbol{X}_j$.

Para testar a hipótese nula H_0 : os dados são provenientes de uma distribuição normal multivariada, foi proposta a extensão multivariada do teste de

Shapiro-Francia univariado, seguindo os passos da extensão multivariada do teste de Shapiro-Wilk univariado proposto por Royston (1993). Para isso as estatísticas univariadas $W_i^{'}$ foram calculadas para cada variável.

Royston (1983) mostrou que $W_i^{'}$ pode ser transformada em uma variável aproximadamente normal, Z_i, sob a hipótese de que a variável aleatória X_i segue uma distribuição com média e variância desconhecidas. Inicialmente, foi obtida a transformação:

$$Y_i = ln(1 - W_i^{'}) \tag{3.2}$$

cuja média e desvio padrão são dados, respectivamente, por:

$$\mu_{Yi} = -1{,}2725 + 1{,}0521 u_1 \tag{3.3}$$

$$\sigma_{Yi} = 1{,}0308 - 0{,}26758 u_2 \tag{3.4}$$

em que $u_1 = ln[ln(n)]$ e $u_2 = ln[ln(n)] + 2/ln(n)$, sendo válidos para $5 \leq n \leq 5000$. A estatística Z_i é dada por

$$Z_i = \frac{Y_i - \mu_{Yi}}{\sigma_{Yi}} \tag{3.5}$$

segue uma distribuição normal padrão N(0,1).

O teste de normalidade univariado é concluído calculando-se o valor-p por $1 - \Phi(Z_i)$, em que $\Phi(Z_i)$ é o valor da função distribuição da normal padrão para o valor Z_i. Assim, grandes valores positivos de Z_i são evidências de não-normalidade.

Os valores de $Z_1, Z_2, ..., Z_p$ foram obtidos como descrito anteriormente, com Z_i baseado na amostra da i-ésima variável com n observações. Para construção do teste multivariado foi definida a estatística

$$\kappa_i = \left\{\Phi^{-1}\left[\frac{1}{2}\Phi(-Z_i)\right]\right\}^2, \qquad i = 1,2,...,p, \tag{3.6}$$

em que $\Phi(x) = (2\pi)^{-\frac{1}{2}} \int_{-\infty}^{x} exp\left(-\frac{1}{2}t^2\right) dt$.

Pode-se observar que:

- κ_i será grande quando Z_i for grande e positivo (valores grandes positivos da variável i mostram sinais de não-normalidade);
- κ_i tenderá a zero para grandes valores de Z_i negativos (nenhum desvio de normalidade);
- $\kappa_i \sim \chi_1^2$.

A matriz de correlação entre os κs, foi definida como $c_{ij} = corr(\kappa_i, \kappa_j)$ e a estatística G por $G = \sum_1^p \kappa_i/p$. Se os dados originais, (Xs), forem não-correlacionados, os correspondentes valores dos W's, Zs e κs serão também não-correlacionados. Dessa maneira, G tem distribuição proporcional à distribuição quiquadrado, com p graus de liberdade, proporcionando um teste de normalidade multivariada baseado nas estatísticas Ws univariadas combinadas, se as variáveis forem perfeitamente correlacionadas, $\kappa_1 = \kappa_2 = \kappa_3 = ... = \kappa_m$ e $G \sim \chi_1^2$. Para pares de correlações intermediários, uma aproximação natural para a distribuição de G é $G \sim \chi_e^2/e$, sendo e os graus de liberdade equivalentes (não necessariamente um inteiro) obtidos, como segue dos primeiros dois momentos de G. O primeiro momento é:

$$E(G) = E\left(\frac{\chi_e^2}{e}\right) = \frac{E\left(\chi_e^2\right)}{e} = \frac{e}{e} = 1.$$

O segundo momento é obtido por meio de:

$$Var(pG) = Var \sum_{i=1}^{p} \kappa_i \tag{3.7}$$

$$p^2 Var(G) = 2p + \Sigma\Sigma_{i \neq j}^{p} Cov(\kappa_i,\kappa_j).$$

pois,

$$Var(\kappa_i) = 2.$$

sendo

$$c_{ij} = corr(\kappa_i,\kappa_j) = \frac{Cov(\kappa_i,\kappa_j)}{\sqrt{2 \times 2}}$$

$$p^2 Var(G) = 2p + 2 \sum \sum_{i \neq j} c_{ij}.$$

Portanto,

$$Var(G) = \frac{2}{p} + \frac{2}{p^2} \sum \sum_{i \neq j} c_{ij}.$$

Também, pode-se observar que $Var\left(\chi_e^2/e\right) = 2e/e^2 = 2/e$. Então, igualando-se os segundos momentos:

$$e = \frac{2}{Var(G)} = \frac{1}{\frac{1}{p} + \frac{1}{p^2} \sum \sum_{i \neq j} c_{ij}} = \frac{p}{1 + (p-1)\bar{c}}, \tag{3.8}$$

em que $\bar{c} = \sum \sum_{i \neq j} c_{ij}/p^2 - p$, note que $p = [c_{ij}]$ tem $(p^2 - p)$ elementos, sem considerar a diagonal. A estatística,

$$H = eG = \frac{e}{p}\sum_{1}^{p} \kappa_i \sim \chi^2_e, \tag{3.9}$$

sendo que $e = p$ quando $\bar{c} = 0$, $e = 1$ e $\bar{c} = 1$, como esperado, ou e é dado por (3.8) .

O problema é que, para determinar e a partir da expressão (3.8), é preciso conhecer c_{ij}, que é a correlação entre κ_i e κ_j. Conforme sugerido por Royston (1983b), pode-se determinar c_{ij} por intermédio da correlação ρ_{ij} entre X_i e X_j. Como ρ_{ij} é também desconhecido, utilizou-se um estimador de c_{ij} que dependia do estimador r_{ij} de ρ_{ij}. Assim, utilizou-se a mesma função $g(r_{ij},n)$ proposta por Royston (1983b), embora seus parâmetros tenham sido reestimados neste trabalho. Logo, o estimador $\hat{c}_{ij}$ de c_{ij} é dado por

$$\hat{c}_{ij} = \begin{cases} \hat{g}(r_{ij},n) & \text{se} \quad i \neq j \\ 1 & \text{se} \quad i = j \end{cases} \tag{3.10}$$

sendo a função g, condicionada a $g(0,n) = 0$ e $g(1,n) = 1$, dada por:

$$g(\rho_{ij},n) = \rho_{ij}^{\lambda}\left[1 - \frac{\mu}{\nu}\rho_{ij}(1-\rho_{ij})^{\mu}\right] \tag{3.11}$$

em que os parâmetros λ, μ e ν foram determinados, conforme procedimento adotado por Royston (1983b) para a extensão multivariada do teste Shapiro-Wilk univariado, por simulação Monte Carlo. Também ρ_{ij} foi substituído pelo estimador correspondente r_{ij}.

Para ajustar esse modelo, foram geradas 1000 amostras bivariadas, considerando diferentes configurações envolvendo tamanhos de amostras e coeficiente de correlação entre as variáveis. Os tamanhos amostrais n considerados foram de

10, 20, 50, 100, 200, 500, 1000, 2000, 3500 e 5000 e os coeficientes de correlação ρ foram 0, ±0,20, ±0,40, ±0,60, ±0,70, ±0,80, ±0,90, ±0,95, ±0,99 e ±0,995, sendo 19 valores de ρ e 10 valores de n, totalizando 190 configurações. Convém salientar que os valores de ρ foram tomados em módulo, uma vez que o sinal não afeta os valores de c_{ij}, que são sempre positivos.

Em cada uma das 1000 amostras simuladas de cada configuração, foram estimados κ_1 e κ_2 e estabelecida a correlação $\hat{c}_{ij}$ a partir dos 1000 pares obtidos. A partir de uma modificação do modelo (3.11) e dos valores de c_{ij}, ρ e n foram estimados os parâmetros necessários para se obter c_{ij} a partir de r_{ij} e n. O modelo modificado foi

$$c_{ij} = \rho_{ij}^{\lambda}\left[1 - \frac{\mu}{b_0 + b_1x^2 + b_2x^3} \times \rho_{ij}(1-\rho_{ij})^{\mu}\right], \qquad (3.12)$$

em que $x = ln(n)$.

Os parâmetros λ, μ, b_0, b_1 e b_2 foram estimados utilizando-se o procedimento de Gauss-Newtom modificado por intermédio do proc nlin do programa SAS v.9 (SAS, 2000). As estimativas obtidas foram $\hat{\lambda} = 5{,}1139$, $\hat{\mu} = 0{,}6631$, $\hat{b}_0 = 0{,}2143$, $b_1 = \hat{0}{,}0472$ e $b_2 = -0{,}00511$. A expressão (3.12) deve ser utilizada a partir das estimativas de $\rho_{ij}(r_{ij})$ para se determinar $\hat{c}_{ij}$. A partir da expressão (3.8) deve-se determinar os graus de liberdade equivalentes (e) e a estatística H (3.9) que, sob H_0, segue uma distribuição de quiquadrado com e graus de liberdade. Se $H \geq \chi^2_{\alpha,e}$, a hipótese nula de normalidade deve ser rejeitada, em que $\chi^2_{\alpha,e}$ é o quantil superior 100 $\alpha\%$ da distribuição quiquadrado com e graus de liberdade. Para comodidade do leitor, o coeficiente de correlação c_{ij} entre κ_i e κ_j, $i \neq j$ deve ser estimado por:

$$\hat{c}_{ij} = r_{ij}^{5,1139}\left[1 - \frac{0,6631}{0,2143 + 0,0472x^2 - 0,00511x^3} \times r_{ij}(1 - r_{ij})^{0,6631}\right] \tag{3.13}$$

em que $x = ln(n)$.

3.2 Avaliação do desempenho

Duas estratégias foram consideradas neste trabalho. A primeira teve o intuito de avaliar as taxas de erro tipo I do teste de Shapiro-Francia multivariado proposto, denominado de TSFM. A segunda foi delineada para avaliar o poder do teste. Em ambos os casos, foi utilizada simulação Monte Carlo. Em cada simulação foi aplicado o teste de normalidade em um nível nominal pré-estabelecido de significância, sendo verificado se a hipótese nula foi ou não rejeitada. Este processo, em cada caso, foi repetido 10.000 vezes e a proporção de decisões incorretas no primeiro caso representa a taxa de erro tipo I empírica e, no segundo caso, a proporção de decisões corretas é o poder empírico. Os valores da taxa de erro tipo I empírica foram comparados com o valor nominal por meio de um teste binomial exato para a hipótese nula, $H_0 : \alpha_0$ com 99% de confiança, para $\alpha_0 = 0,05$ e $0,01$. Também foram comparados as taxas de erro tipo I e os valores de poder dos testes de Shapiro-Francia multivariado, TSFM e o de Shapiro-Wilk multivariado, TSWM (Royston, 1983b).

O outro aspecto da avaliação do desempenho dos testes é o seu poder. Para isso, diferentes situações sob H_1 foram simulados neste trabalho, sendo consideradas as distribuições t multivariada com $\nu = 1$ e $\nu = 30$ graus de liberdade, lognormal e normal contaminada com grau de contaminação $\delta = 0,30$. Em todos os casos, foram simuladas situações com $p = 2$ e com $p = 10$ variáveis. Diferentes valores de tamanho de amostra e de correlação entre as variáveis foram considerados, da mesma forma que foi simulada para o erro tipo I. Os resultados apresentados foram restritos à situação de $\alpha = 5\%$, uma vez que o padrão de resposta para $\alpha = 1\%$ foi similar.

Amostras aleatórias normais multivariadas de tamanho n foram simuladas no espaço p-dimensional, dadas por $\boldsymbol{X}_1,\ \boldsymbol{X}_2,...,\boldsymbol{X}_n$ e computadas as taxas de erro tipo I. O vetor aleatório $\boldsymbol{X}_j = [X_{j1},\ X_{j2},\ ...,\ X_{jp}]^t$ de dimensão $p \times 1$ tem densidade normal multivariada dada por

$$f(\boldsymbol{x}) = (2\pi)^{-\frac{p}{2}}|\boldsymbol{\Sigma}|^{-\frac{1}{2}}exp\left\{-\frac{1}{2}(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{\mu})^t\boldsymbol{\Sigma}^{-1}(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{\mu})\right\} \tag{3.14}$$

em que $\boldsymbol{\Sigma}$ é a matriz de covariâncias e $\boldsymbol{\mu}$ é o vetor de médias $p \times 1$ populacionais.

Para simular um vetor aleatório $\boldsymbol{X}_j$ da distribuição apresentada em (3.14) foi inicialmente obtido o fator de Cholesky ($\boldsymbol{\Gamma}$) da matriz $\boldsymbol{\Sigma}$ de dimensão $p \times p$, tal que $\boldsymbol{\Sigma} = \boldsymbol{\Gamma}\boldsymbol{\Gamma}^t$. Posteriormente, foi simulado um vetor $\boldsymbol{Z}_j$ composto de elementos independentes de uma distribuição normal padrão univariada, sendo que $\boldsymbol{Z}_j$ tem distribuição $N_p(\boldsymbol{0},\boldsymbol{I})$, em que $\boldsymbol{0}$ é o vetor nulo e $\boldsymbol{I}$ é a matriz identidade $p \times p$.

Utilizando uma transformação linear do vetor dada por $\boldsymbol{X}_j = \boldsymbol{\Gamma}\boldsymbol{Z}_j + \boldsymbol{\mu}$, obteve-e o vetor desejado com distribuição dada por (3.14). Repetiu-se esse processo n vezes, até formar a amostra aleatória.

Foram simuladas amostras aleatórias de distribuições não-normais para avaliar o poder dos testes em rejeitar a hipótese nula que, por construção, é falsa. O mesmo procedimento da obtenção das taxas de erro tipo I foi usado nesse caso. A diferença consistiu na determinação de diferentes distribuições para os elementos Z_i do vetor $\boldsymbol{Z}$. Foram obtidas amostras aleatórias das distribuições t de Student multivariada, normal contaminada e log-normal.

Para realizar essas avaliações do desempenho do teste de normalidade de Shapiro-Francia multivariado ($TSFM$), foram feitas simulações Monte Carlo, considerando diferentes amostras, correlações e número de variáveis. Os tamanhos amostrais considerados foram 5, 20, 30, 60, 100, 150, 200, 250, 300, 350, 400, 500, 750, 1000, 2000, 3500 e 5000; as correlações, ρ, foram fixadas em $0{,}0$, representando ausência de correlação; $0{,}1$, para correlação baixa; $0{,}5$ para correlação intermediária e $0{,}9$ para correlação alta. Optou-se por considerar o número de variáveis como sendo $p = 2$, 3, 5 e 10.

4 RESULTADOS E DISCUSSÃO

4.1 Taxas de erro tipo I

Nas Tabelas 1 e 2 estão apresentadas as taxas de erro tipo I dos testes de Shapiro-Francia multivariado (TSFM), proposto neste trabalho e de Shapiro-Wilk multivariado, proposto por Royston (1983b) e modificado por Royston (1993) (TSWM), para o nível de significância nominal $\alpha = 5\%$, número de variáveis, $p = 2$ e correlação entre as variáveis $\rho = 0$, $0{,}1$, $0{,}5$ e $0{,}9$, em função dos diferentes tamanhos amostrais n. Os resultados das taxas de erro tipo I foram confrontados com o nível de significância nominal $\alpha = 5\%$ por intermédio de um teste binomial exato com nível de significância de 1%. Valores significativos ($p < 0{,}01$) e superiores ao valor nominal $\alpha = 5\%$, indicam um caráter liberal do teste e valores significativos ($p < 0{,}01$) e inferiores a $\alpha = 5\%$, um caráter conservativo.

O TSFM apresentou a maior parte dos resultados das taxas de erro tipo I não significativamente ($p > 0{,}01$) diferente do valor nominal $\alpha = 5\%$. Em algumas situações, no entanto, os resultados foram liberais, ou seja, o teste apresentou taxas de erro tipo I superiores significativamente ($p < 0{,}01$) ao valor nominal de 5%. Entretanto, nenhum valor de taxa de erro tipo I observada foi expressivamente superior ao valor nominal de 5%. O maior valor observado foi apenas de $1{,}10$ ponto percentual superior ao valor nominal de 5% e ocorreu para $\rho = 0{,}1$ e $n = 3500$ (Tabela 1). Para maior correlação ($\rho \geq 0{,}5$) entre as variáveis, houve um maior controle do erro tipo I, sendo liberal apenas em uma situação, $n = 5000$ e $\rho = 0{,}5$ (Tabela 2). Não houve um padrão muito claro para a ocorrência das situações liberais do TSFM em relação ao ρ e ao tamanho amostral n. A única constatação em relação ao padrão de resposta que se pode verificar é que quanto menos correlacionadas as variáveis forem, maior número de casos em que o teste é considerado liberal.

TABELA 1 Taxas de erro tipo I para os testes TSWM e TSFM, considerando normalidade multivariada, valor nominal de 5%, em função dos diferentes tamanhos amostrais (n), do número de variáveis $(p = 2)$ e das correlações ($\rho = 0{,}0$ e ρ=0,1).

	$\rho = 0{,}0$		$\rho = 0{,}1$	
n	TSWM	TSFM	TSWM	TSFM
5	0,0465	0,0572^{+}	0,0480	0,0537
20	0,0510	0,0564^{+}	0,0531	0,0518
30	0,0499	0,0548	0,0477	0,0519
60	0,0483	0,0513	0,0552	0,0527
100	0,0533	0,0558	0,0461	0,0520
150	0,0483	0,0568^{+}	0,0498	0,0514
200	0,0479	0,0535	0,0502	0,0518
250	0,0478	0,0468	0,0494	0,0517
300	0,0502	0,0506	0,0464	0,0526
350	0,0488	0,0536	0,0490	0,0509
400	0,0535	0,0527	0,0513	0,0515
500	0,0502	0,0493	0,0539	0,0502
750	0,0522	0,0555	0,0501	0,0553
1000	0,0550	0,0512	0,0560	0,0548
2000	0,0537	0,0577^{+}	0,0506	0,0539
3500	0,0445	0,0538	0,0482	0,0610^{+}
5000	0,0413	0,0545	0,0393^{-}	0,0566^{+}

$^{+}$ Taxas de erro tipo I superiores ao valor nominal de 5% de significância
$^{-}$ Taxas de erro tipo I inferiores ao valor nominal de 5% de significância

O TSWM foi utilizado para fins de comparação e os seus resultados para taxa de erro tipo I encontram-se nas Tabelas 1 e 2, considerando as mesmas configurações apresentadas para o TSFM. Esse teste apresentou, via de regra, um melhor controle da taxa de erro tipo I do que o TSFM. No entanto, para $n = 5000$ e $\rho = 0{,}1$ e $\rho = 0{,}5$, o TSWM foi considerado conservativo, pois apresentou taxas de erro tipo I significativamente ($P < 0{,}01$) inferiores ao valor nominal de significância de 5%. Nos demais casos, o tamanho do teste foi não significativamente ($P > 0{,}01$) diferente do valor nominal de 5%.

Os resultados para as taxas de erro tipo I dos dois testes (TSFM e TSWM) para $\alpha = 5\%$ e $p = 10$, considerando diferentes valores de ρ e de n, estão apresentados nas Tabelas 3 e 4. O que se observa é o mesmo padrão de desempenho dos testes observado para a situação de $p = 2$. Assim, o TSFM controlou o erro tipo I na maioria das situações e nas poucas situações em que não houve controle, o teste foi considerado liberal, porém, com diferenças da taxa de erro tipo I observada para o valor nominal de significância inexpressivo. A maior diferença foi observada para $\rho = 0{,}1$ e $n = 5000$, sendo de $1{,}17$ ponto percentual. Novamente, as situações de menores correlações correspondem aos casos em que houve maior número de situações significativamente ($P < 0{,}01$) diferentes (superiores) ao nível nominal de 5% (Tabelas 3 e 4).

No caso do TSWM, houve controle do erro tipo I em quase todas as situações. No entanto, para $n = 5000$ e $\rho \leq 0{,}5$, o TSWM foi conservativo, mesmo com $\rho = 0{,}0$, situação que não ocorreu para $p = 2$ (Tabela 1). Outro caso de teste conservativo ocorreu para $\rho = 0{,}1$ e $n = 400$. Chama a atenção o fato de que com $n = 5000$ e $\rho = 0{,}9$, o TSWM foi liberal, sendo a taxa de erro tipo I observada $1{,}03$ ponto percentual superior ao valor nominal de 5%. Isso pode indicar que o TSWM seja mais poderoso do que o TSFM sob H_1, pois o TSFM com $\rho = 0{,}9$ controlou adequadamente as taxas de erro tipo I para todos os tamanhos de amostra.

Nas Tabelas 5 e 6 estão apresentadas as taxas de erro tipo I, considerando $\alpha = 1\%$ e $p = 2$ de ambos os testes (TSWM e TSFM), em função de ρ e n. Para essa situação, o TSFM apresentou desempenho superior ao observado para $\alpha = 5\%$. Houve, no entanto, algumas situações em que as taxas de erro foram significativamente ($P < 0{,}01$) inferiores ao valor nominal de 1%. Essas situações ocorreram essencialmente para $n = 5$ e todos os valores de ρ. O TSFM foi liberal

TABELA 2 Taxas de erro tipo I para os testes TSWM e TSFM, considerando normalidade multivariada, valor nominal de 5% de significância, em função dos diferentes tamanhos amostrais (n), do número de variáveis $(p = 2)$ e das correlações ($\rho = 0{,}5$ e ρ=0,9).

	$\rho = 0{,}5$		$\rho = 0{,}9$	
n	TSWM	TSFM	TSWM	TSFM
5	0,0419	0,0502	0,0488	0,0500
20	0,0485	0,0499	0,0447	0,0521
30	0,0487	0,0560	0,0464	0,0507
60	0,0494	0,0526	0,0485	0,0477
100	0,0468	0,0505	0,0465	0,0518
150	0,0481	0,0558	0,0491	0,0487
200	0,0477	0,0538	0,0498	0,0484
250	0,0504	0,0520	0,0522	0,0470
300	0,0515	0,0498	0,0493	0,0518
350	0,0502	0,0490	0,0478	0,0486
400	0,0483	0,0535	0,0543	0,0510
500	0,0500	0,0537	0,0501	0,0511
750	0,0505	0,0557	0,0508	0,0496
1000	0,0498	0,0541	0,0495	0,0478
2000	0,0444	0,0528	0,0494	0,0512
3500	0,0464	0,0548	0,0470	0,0550
5000	$0{,}0392^{-}$	$0{,}0588^{+}$	0,0468	0,0495

$^{+}$ Taxas de erro tipo I superiores ao valor nominal de 5% de significância

$^{-}$ Taxas de erro tipo I inferiores ao valor nominal de 5% de significância

com grandes valores de ρ ($\rho = 0{,}9$) e grandes tamanhos amostrais ($n \geq 3500$).

O TSWM apresentou tamanhos de testes iguais ao valor nominal de significância de 1% para todos os tamanhos amostrais e correlações entre as variáveis (Tabelas 5 e 6). Os desempenhos dos dois testes foram semelhantes em todos os casos, exceto para $n = 5$ e todos os ρs e para $n = 3500$ com $\rho = 0{,}9$.

Nas Tabelas 7 e 8 estão apresentadas as taxas de erro tipo I dos testes para $\alpha = 1\%$ e $p = 10$ variáveis, em função de ρ e n. Nesse caso, o desempenho do TSFM foi bem superior ao das situações anteriores de forma absoluta ou relativa,

TABELA 3 Taxas de erro tipo I para os testes TSWM e TSFM, considerando normalidade multivariada, valor nominal de 5%, em função dos diferentes tamanhos amostrais (n), do número de variáveis, $p = 10$, e da correlação, $\rho = 0{,}0$ e $\rho = 0{,}1$.

	$\rho = 0{,}0$		$\rho = 0{,}1$	
n	TSWM	TSFM	TSWM	TSFM
20	0,0446	0,0529	0,0516	0,0480
30	0,0516	0,0505	0,0515	0,0527
60	0,0469	0,0549	0,0498	0,0546
100	0,0466	$0{,}0565^{+}$	0,0513	0,0506
150	0,0448	0,0521	0,0482	0,0525
200	0,0488	0,0517	0,0464	0,0489
250	0,0517	0,0534	0,0538	0,0558
300	0,0489	0,0506	0,0494	0,0536
350	0,0539	0,0523	0,0519	$0{,}0580^{+}$
400	0,0513	0,0527	$0{,}0408^{-}$	0,0523
500	0,0505	$0{,}0578^{+}$	0,0506	0,0514
750	0,0515	$0{,}0572^{+}$	0,0567	0,0514
1000	0,0520	0,0507	0,0576	0,0548
2000	0,0471	0,0549	0,0543	0,0542
3500	0,0428	$0{,}0583^{+}$	0,0422	$0{,}0581^{+}$
5000	$0{,}0364^{-}$	$0{,}0579^{+}$	$0{,}0316^{-}$	$0{,}0617^{+}$

$^{+}$ Taxas de erro tipo I superiores ao valor nominal de 5% de significância
$^{-}$ Taxas de erro tipo I inferiores ao valor nominal de 5% de significância

quando $\rho \leq 0{,}5$. Para $\rho = 0{,}9$, houve muitos casos em que as taxas de erro tipo I foram superiores ao valor nominal de 1%. Esse resultado é o oposto do que ocorreu para $\alpha = 5\%$ com $p = 10$, pois o efeito da correlação no desempenho do teste se inverteu nas duas situações (Tabelas 3 e 8 versus 7 e 8).

O TSWM teve, de forma geral, o pior desempenho nessa circunstância ($p = 10$ e $\alpha = 1\%$). Os resultados com $\rho = 0$ e com $\rho = 0{,}9$ foram liberais para grande parte dos valores de n. Embora seu desempenho relativo nessas duas configurações tenha sido inferior ao do TSFM, as magnitudes das taxas de erro tipo I observadas não foram elevadas e as diferenças para o valor nominal de 1%

TABELA 4 Taxas de erro tipo I para os testes TSWM e TSFM, considerando normalidade multivariada, valor nominal de 5%, em função dos diferentes tamanhos amostrais (n), do número de variáveis, $p = 10$, e das correlações, ($\rho = 0{,}5$ e $\rho = 0{,}9$).

	$\rho = 0{,}5$		$\rho = 0{,}9$	
n	TSWM	TSFM	TSWM	TSFM
20	0,0446	0,0463	0,0450	0,0474
30	0,0470	0,0464	0,0450	0,0501
60	0,0459	0,0511	0,0469	0,0554
100	0,0471	0,0522	0,0489	0,0518
150	0,0482	0,0533	0,0508	0,0483
200	0,0464	$0{,}0569^{+}$	0,0468	0,0484
250	0,0472	0,0547	0,0486	0,0518
300	0,0502	0,0492	0,0506	0,0475
350	0,0504	0,0517	0,0476	0,0465
400	0,0498	0,0528	0,0475	0,0470
500	0,0495	0,0494	0,0483	0,0462
750	0,0529	0,0487	0,0498	0,0483
1000	0,0502	0,0525	0,0548	0,0469
2000	0,0525	0,0538	0,0544	0,0484
3500	0,0450	0,0541	0,0522	0,0471
5000	$0{,}0399^{-}$	$0{,}0578^{+}$	$0{,}0603^{+}$	0,0520

$^{+}$ Taxas de erro tipo I superiores ao valor nominal de 5% de significância

foram inexpressivas. A maior diferença observada foi de $0{,}71$ ponto percentual com $n = 3500$ e $\rho = 0{,}9$.

As demais situações simuladas para $p = 3$ e 5 com $\alpha = 5\%$ e 1% nos mesmos casos em relação a n e ρ apresentaram padrões de respostas intermediários entre as situações de $p = 2$ e $p = 10$ (resultados não apresentados).

O desempenho de ambos os testes foi relativamente satisfatório para o controle do erro tipo I. Não houve um melhor teste, uma vez que o controle do erro tipo I alternou conforme as situações em relação às correlações entre as variáveis, aos tamanhos de amostra e ao nível de significância adotado. Nas situações em que os testes não controlaram o erro tipo I, tanto no sentido do conservativismo

TABELA 5 Taxas de erro tipo I para os testes TSWM e TSFM, considerando normalidade multivariada, valor nominal de 1%, em função dos diferentes tamanhos amostrais (n), do número de variáveis, $p = 2$, e da correlação, $\rho = 0{,}0$ e $\rho = 0{,}1$.

	$\rho = 0{,}0$		$\rho = 0{,}1$	
n	TSWM	TSFM	TSWM	TSFM
5	0,0081	0,0063$^-$	0,0086	0,0051$^-$
20	0,0104	0,0082	0,0108	0,0125
30	0,0102	0,0118	0,0094	0,0092
60	0,0102	0,0114	0,0120	0,0102
100	0,0106	0,0104	0,0091	0,0117
150	0,0099	0,0113	0,0116	0,0110
200	0,0105	0,0115	0,0092	0,0103
250	0,0093	0,0109	0,0096	0,0089
300	0,0106	0,0116	0,0101	0,0095
350	0,0080	0,0116	0,0080	0,0110
400	0,0106	0,0104	0,0112	0,0111
500	0,0090	0,0117	0,0114	0,0118
750	0,0097	0,0104	0,0110	0,0110
1000	0,0098	0,0127	0,0114	0,0106
2000	0,0114	0,0118	0,0097	0,0111
3500	0,0090	0,0124	0,0112	0,0127

$^-$ Taxas de erro tipo I inferiores ao valor nominal de 5% de significância

quanto da liberalidade, não houve uma excessiva diferença entre as taxas de erro tipo I observadas e nominais. Assim, pode-se afirmar que o controle do erro tipo I, tanto do novo teste (TSFM) quanto do teste de Royston (1983b) (TSWM), foi adequado, qualquer que seja o nível de significância nominal adotado. Em geral, o TSFM foi um pouco superior ao TSWM com $\alpha = 1\%$ e o contrário ocorreu com $\alpha = 5\%$.

TABELA 6 Taxas de erro tipo I para os testes TSWM e TSFM, considerando normalidade multivariada, valor nominal de 1%, em função dos diferentes tamanhos amostrais (n), do número de variáveis, $p = 2$, e das correlações ($\rho = 0{,}5$ e $\rho = 0{,}9$).

	$\rho = 0{,}5$		$\rho = 0{,}9$	
n	TSWM	TSFM	TSWM	TSFM
5	0,0078	0,0044^{-}	0,0091	0,0062^{-}
20	0,0092	0,0090	0,0090	0,0117
30	0,0094	0,0094	0,0012	0,0012
60	0,0089	0,0107	0,0112	0,0107
100	0,0092	0,0091	0,0104	0,0117
150	0,0108	0,0119	0,0121	0,0102
200	0,0096	0,0102	0,0090	0,0102
250	0,0117	0,0111	0,0116	0,0113
300	0,0102	0,0091	0,0119	0,0122
350	0,0109	0,0121	0,0118	0,0110
400	0,0102	0,0090	0,0124	0,0097
500	0,0101	0,0106	0,0116	0,0093
750	0,0114	0,0124	0,0126	0,0093
1000	0,0116	0,0120	0,0102	0,0107
2000	0,0094	0,0109	0,0122	0,0104
3500	0,0081	0,0107	0,0111	0,0137^{+}

$^{+}$ Taxas de erro tipo I superiores ao valor nominal de 5% de significância
$^{-}$ Taxas de erro tipo I inferiores ao valor nominal de 5% de significância

4.2 Poder

A primeira distribuição simulada sob H_1 foi a t multivariada, com $\nu = 1$ grau de liberdade. Os resultados de poder para $\alpha = 5\%$, $p = 2$ e $\rho = 0$ e $0{,}1$ em função de n foram apresentados na Tabela 9 e, para $\rho = 0{,}5$ e $0{,}9$, na Tabela 10. O TSFM apresentou desempenho de poder igual ou superior ao do TSWM, dependendo dos valores de n e de ρ. Em pequenas amostras ($n < 60$), para $\rho = 0{,}0$ e $0{,}1$ e $0{,}5$, o TSFM foi sempre superior ao TSWM em poder (Tabelas 9 e 10). Para $\rho = 0{,}9$, o poder do TSFM foi superior ao do TSWM para $n \leq 100$ (Tabela 10). Nos demais casos, os valores de poder de ambos os testes foram iguais

TABELA 7 Taxas de erro tipo I para os testes TSWM e TSFM, considerando normalidade multivariada, valor nominal de 1%, em função dos diferentes tamanhos amostrais (n), do número de variáveis, $p = 10$, e das correlações ($\rho = 0{,}0$ e $\rho = 0{,}1$).

	$\rho = 0{,}0$		$\rho = 0{,}1$	
n	TSWM	TSFM	TSWM	TSFM
20	0,0084	0,0107	0,0093	0,0091
30	0,0111	0,0118	0,0108	0,0103
60	0,0104	0,0116	0,0096	0,0108
100	0,0093	0,0083	0,0104	0,0111
150	0,0097	0,0111	0,0101	0,0123
200	0,0103	0,0117	0,0104	0,0100
250	0,0097	0,0108	0,0107	0,0113
300	$0{,}0133^{+}$	0,0113	0,0092	0,0097
350	$0{,}0151^{+}$	0,0105	0,0096	0,0118
400	$0{,}0130^{+}$	0,0107	0,0084	0,0104
500	$0{,}0131^{+}$	0,0114	0,0115	0,0113
750	$0{,}0144^{+}$	0,0102	0,0110	0,0110
1000	$0{,}0132^{+}$	0,0111	0,0099	0,0112
2000	$0{,}0152^{+}$	0,0123	0,0104	$0{,}0129^{+}$
3500	0,0082	0,0128	0,0080	$0{,}0129^{+}$

$^{+}$ Taxas de erro tipo I superiores ao valor nominal de 5% de significância

entre si e iguais a 100%.

É conveniente salientar que a t multivariada com $\nu = 1$ grau de liberdade é uma distribuição com características diferentes da normal multivariada. Assim, os testes apresentaram valores elevados de poder, mesmo para amostras pequenas como, por exemplo, $n = 20$, cujos valores de poder superaram a 90%. Em amostras extremamente pequenas, $(n = 5)$, os testes tiveram redução drástica de poder, embora com valores bem superiores, ainda, aos valores nominais. A correlação, em geral, teve efeito de reduzir os valores de poder de ambos os testes, embora o TSFM continuasse sempre superior ao TSWM.

Nas Tabelas 11 e 12 estão apresentados os resultados de poder para as

TABELA 8 Taxas de erro tipo I para os testes TSWM e TSFM, considerando normalidade multivariada, valor nominal de 1%, em função dos diferentes tamanhos amostrais (n), do número de variáveis, $p = 10$, e da correlação, $\rho = 0{,}5$ e $\rho = 0{,}9$.

	$\rho = 0{,}5$		$\rho = 0{,}9$	
n	TSWM	TSFM	TSWM	TSFM
20	0,0084	0,0090	$0{,}0139^{+}$	$0{,}0146^{+}$
30	0,0105	0,0110	0,0124	0,0124
60	0,0118	0,0126	$0{,}0147^{+}$	$0{,}0145^{+}$
100	0,0100	0,0122	$0{,}0146^{+}$	$0{,}0135^{+}$
150	0,0111	0,0129**	$0{,}0151^{+}$	$0{,}0137^{+}$
200	0,0099	0,0106	0,0103	$0{,}0131^{+}$
250	0,0117	0,0109	0,0094	$0{,}0132^{+}$
300	0,0105	0,0119	0,0116	$0{,}0137^{+}$
350	0,0113	0,0141	$0{,}0129^{+}$	0,0125
400	0,0093	0,0116	0,0105	0,0126
500	0,0105	0,0115	0,0118	0,0117
750	0,0126	0,0113	0,0111	$0{,}0129^{+}$
1000	0,0122	0,0105	0,0124	$0{,}0141^{+}$
2000	0,0119	0,0106	$0{,}0168^{+}$	0,0110
3500	0,0094	0,0119	$0{,}0171^{+}$	$0{,}0138^{+}$

$^{+}$ Taxas de erro tipo I superiores ao valor nominal de 5% de significância

mesmas situações das Tabelas 9 e 10, respectivamente, exceto pelo fato de se ter $p = 10$ variáveis. Novamente, os valores de poder do TSFM foram superiores aos do TSWM. A correlação entre as variáveis diminuiu o poder dos testes. Comparando-se os resultados das Tabelas 9 e 10 com os das Tabelas 11 e 12, verifica-se que o aumento do número de variáveis provoca um aumento do poder.

Nas Tabelas 13 a 16 estão apresentados os valores de poder dos testes TSWM e TSFM, para as mesmas situações anteriores (Tabelas 9 a 12), exceto pelo fato de se considerar, nesse caso, a t multivariada com $\nu = 30$ graus de liberdade. Essa distribuição se assemelha muito a uma normal multivariada, uma vez que para $\nu \to \infty$, a t multivariada converge para a normal multivariada. Espera-se assim

TABELA 9 Valores de poder para os testes TSWM e TSFM, considerando a distribuição t de Student multivariada com 1 grau de liberdade, valor nominal de 5%, em função dos diferentes tamanhos amostrais (n), do número de variáveis $(p = 2)$ e da correlação, $\rho = 0{,}0$ e $\rho = 0{,}1$.

	$\rho = 0{,}0$		$\rho = 0{,}1$	
n	TSWM	TSFM	TSWM	TSFM
5	0,3581	0,3802	0,3555	0,3875
20	0,9503	0,9627	0,9532	0,9656
30	0,9928	0,9946	0,9926	0,9938
60	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
100	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
150	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
200	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
250	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
300	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
350	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
400	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
500	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
750	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
1000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
2000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
3500	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
5000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000

TABELA 10 Valores de poder para os testes TSWM e TSFM, considerando a distribuição t de Student multivariada com 1 grau de liberdade, valor nominal de 5%, em função dos diferentes tamanhos amostrais (n), do número de variáveis $(p = 2)$ e das correlações ($\rho = 0{,}5$ e $\rho = 0{,}9$).

	$\rho = 0{,}5$		$\rho = 0{,}9$	
n	TSWM	TSFM	TSWM	TSFM
5	0,3499	0,3803	0,3132	0,3328
20	0,9418	0,9601	0,9095	0,9321
30	0,9881	0,9932	0,9775	0,9858
60	1,0000	1,0000	0,9999	1,0000
100	1,0000	1,0000	0,9999	1,0000
150	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
200	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
250	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
300	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
350	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
400	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
500	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
750	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
1000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
2000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
3500	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
5000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000

TABELA 11 Valores de poder para os testes TSWM e TSFM, considerando a distribuição t de Student multivariada com 1 grau de liberdade, valor nominal de 5%, em função dos diferentes tamanhos amostrais (n), do número de variáveis $(p = 10)$ e da correlação, $\rho = 0{,}0$ e $\rho = 0{,}1$.

	$\rho = 0{,}0$		$\rho = 0{,}1$	
n	TSWM	TSFM	TSWM	TSFM
20	0,9980	0,9993	0,9979	0,9992
30	0,9999	1,0000	1,0000	1,0000
60	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
100	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
150	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
200	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
250	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
300	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
350	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
400	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
500	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
750	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
1000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
2000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
3500	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
5000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000

TABELA 12 Valores de poder para os testes TSWM e TSFM, considerando a distribuição t de Student multivariada com 1 grau de liberdade, valor nominal de 5%, em função dos diferentes tamanhos amostrais (n), do número de variáveis $(p = 10)$ e das correlações ($\rho = 0{,}5$ e $\rho = 0{,}9$).

	$\rho = 0{,}5$		$\rho = 0{,}9$	
n	TSWM	TSFM	TSWM	TSFM
20	0,9934	0,9971	0,9486	0,9604
30	0,9997	1,0000	0,9919	0,9924
60	1,0000	1,0000	0,9998	1,0000
100	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
150	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
200	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
250	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
300	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
350	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
400	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
500	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
750	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
1000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
2000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
3500	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
5000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000

que os valores de poder sejam baixos, exceto em grandes amostras. O mesmo padrão de resposta da t multivariada com $\nu = 1$ foi observado, para esse caso. O poder diminuiu com o aumento de ρ e aumentou com o aumento de p.

TABELA 13 Valores de poder para os testes TSWM e TSFM, considerando a distribuição t de Student multivariada com 30 graus de liberdade, valor nominal de 5%, em função dos diferentes tamanhos amostrais (n), do número de variáveis ($p = 2$) e das correlações ($\rho = 0{,}0$ e $\rho = 0{,}1$).

	$\rho = 0{,}0$		$\rho = 0{,}1$	
n	TSWM	TSFM	TSWM	TSFM
5	0,0494	0,0566	0,0563	0,0570
20	0,0693	0,0750	0,0659	0,0755
30	0,0755	0,0865	0,0725	0,0807
60	0,0871	0,1031	0,0827	0,1051
100	0,0975	0,1218	0,0911	0,1299
150	0,1108	0,1501	0,1106	0,1469
200	0,1255	0,1697	0,1222	0,1599
250	0,1344	0,1779	0,1302	0,1779
300	0,1446	0,1912	0,1480	0,1972
350	0,1576	0,2038	0,1546	0,2053
400	0,1700	0,2185	0,1685	0,2254
500	0,1914	0,2474	0,0744	0,2455
1000	0,2970	0,3697	0,2839	0,3646
2000	0,4797	0,6828	0,4877	0,6946
3500	0,7111	0,7762	0,6875	0,7610
5000	0,8422	0,9015	0,8433	0,9006

Para $p = 2$ (Tabelas 13 e 14) com $n = 5$, independentemente do valor de ρ, os valores de poder não diferiram significativamente do valor nominal de significância ($\alpha = 5\%$). Para $n > 5$, os valores de poder são significativamente ($P < 0{,}01$) superiores ao valor nominal de 5%. Em todos os casos, o poder do TSFM foi superior ao do TSWM. Grandes diferenças de poder foram observadas entre os dois testes, sempre favorecendo o TSFM. Nessa distribuição valores de poder superiores a 80% foram observados somente com amostras de tamanho

TABELA 14 Valores de poder para os testes TSWM e TSFM, considerando a distribuição t de Student multivariada com 30 graus de liberdade, valor nominal de 5%, em função dos diferentes tamanhos amostrais (n), do número de variáveis $(p = 2)$ e da correlação, $\rho = 0{,}5$ e $\rho = 0{,}9$.

	$\rho = 0{,}5$		$\rho = 0{,}9$	
n	TSWM	TSFM	TSWM	TSFM
5	0,0498	0,0533	0,0442	0,0530
20	0,0661	0,0736	0,0633	0,0684
30	0,0753	0,0835	0,0655	0,0755
60	0,0844	0,1023	0,0739	0,0947
100	0,0942	0,1214	0,0867	0,0987
150	0,1111	0,1413	0,0961	0,1236
200	0,1227	0,1597	0,1026	0,1274
250	0,1336	0,1715	0,1154	0,1486
300	0,1396	0,1898	0,1179	0,1563
350	0,1558	0,2033	0,1389	0,1707
400	0,1709	0,2186	0,1460	0,1779
500	0,1847	0,2380	0,1855	0,1981
1000	0,2893	0,3592	0,2333	0,2921
2000	0,4684	0,6610	0,3879	0,4777
3500	0,6860	0,7714	0,5863	0,6517
5000	0,8361	0,8888	0,7271	0,7861

5000.

Nas Tabelas 15 e 16 estão apresentados os valores de poder de TSFM e TSWM para $p = 10$ e distribuição t multivariada, com $\nu = 30$ graus de liberdade. Se observa que a superioridade do teste proposto (TSFM) se dilatou em relação à situação de $p = 2$ com a mesma distribuição. Além do mais, com o aumento do número de variáveis, o poder de ambos os testes aumentou.

Os valores de poder de ambos os testes só tenderam a se igualar com $n \geq 3500$ para $\rho < 0{,}9$. Com $\rho = 0{,}9$, isso ocorreu somente com tamanhos de amostra iguais a 5000. A maior diferença entre os dois testes ocorreu para $n = 350$, sendo de, aproximadamente, 24 pontos percentuais a favor de TSFM. O

TABELA 15 Valores de poder para os testes TSWM e TSFM, considerando a distribuição t de Student multivariada com 30 graus de liberdade, valor nominal de 5%, em função dos diferentes tamanhos amostrais (n), do número de variáveis $(p = 10)$ e das correlações ($\rho = 0{,}0$ e $\rho = 0{,}1$).

	$\rho = 0{,}0$		$\rho = 0{,}1$	
n	TSWM	TSFM	TSWM	TSFM
20	0,0782	0,0946	0,0842	0,0972
30	0,0914	0,1198	0,0940	0,1228
60	0,1288	0,2375	0,1230	0,2366
100	0,1588	0,2992	0,1632	0,2869
150	0,1967	0,3473	0,1980	0,3391
200	0,2300	0,3966	0,2288	0,3986
250	0,2607	0,4242	0,2625	0,4278
300	0,2960	0,4788	0,2970	0,4753
350	0,3353	0,5750	0,3296	0,5729
400	0,3673	0,5197	0,3596	0,5099
500	0,4152	0,5829	0,4254	0,5720
750	0,5646	0,7125	0,5681	0,7170
1000	0,6785	0,8141	0,6783	0,8164
2000	0,9325	0,9729	0,9342	0,9728
3500	0,9964	0,9995	0,9954	0,9990
5000	0,9998	1,0000	0,9995	0,9999

TABELA 16 Valores de poder para os testes TSWM e TSFM, considerando a distribuição t de Student multivariada com 30 grau de liberdade, valor nominal de 5%, em função dos diferentes tamanhos amostrais (n), do número de variáveis $(p = 10)$ e das correlações ($\rho = 0{,}5$ e $\rho = 0{,}9$).

	$\rho = 0{,}5$		$\rho = 0{,}9$	
n	TSWM	TSFM	TSWM	TSFM
20	0,0747	0,0863	0,0607	0,0711
30	0,0912	0,1106	0,0768	0,0764
60	0,1186	0,2042	0,0817	0,1126
100	0,1490	0,2598	0,0974	0,1286
150	0,1799	0,2961	0,1069	0,1408
200	0,2079	0,3248	0,1145	0,1539
250	0,2414	0,3661	0,1241	0,1725
300	0,2637	0,3991	0,1410	0,1725
350	0,2925	0,4909	0,1485	0,2189
400	0,3159	0,4326	0,1591	0,1966
500	0,3764	0,4902	0,1804	0,2159
750	0,4999	0,6139	0,2361	0,2774
1000	0,6076	0,7192	0,2767	0,3261
2000	0,8745	0,9244	0,4652	0,5187
3500	0,9818	0,9941	0,6917	0,7282
5000	0,9987	0,9997	0,8438	0,8651

efeito da correlação no poder dos testes é muito grande, sendo que quanto maior a correlação entre as variáveis menor o poder. Quedas nos valores de poder superiores a 40 pontos percentuais, do $\rho = 0{,}9$ para $\rho = 0{,}0$, sugerem que trabalhos sejam feitos para investigar essas situações de alta correlação e para propor alternativas mais robustas.

TABELA 17 Valores de poder para os testes TSWM e TSFM, considerando a distribuição lognormal multivariada valor nominal de 5%, em função dos diferentes tamanhos amostrais (n), do número de variáveis $(p = 2)$ e das correlações ($\rho = 0{,}0$ e $\rho = 0{,}1$).

	$\rho = 0{,}0$		$\rho = 0{,}1$	
n	TSWM	TSFM	TSWM	TSFM
5	0,7548	0,7583	0,7541	0,7555
20	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
30	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
60	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
100	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
150	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
200	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
250	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
300	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
350	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
400	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
500	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
750	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
1000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
2000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
3500	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
5000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000

Outras distribuições além da t multivariada foram utilizadas para as simulações Monte Carlo sob H_1. Foram escolhidas as distribuições multivariadas lognormal e normal contaminada. Essas distribuições foram escolhidas para que os resultados fossem comparados com os de Oliveira & Ferreira (2009). De ma-

TABELA 18 Valores de poder para os testes TSWM e TSFM, considerando a distribuição lognormal multivariada valor nominal de 5%, em função dos diferentes tamanhos amostrais (n), do número de variáveis $(p = 2)$ e das correlações ($\rho = 0{,}5$ e $\rho = 0{,}9$).

	$\rho = 0{,}5$		$\rho = 0{,}9$	
n	TSWM	TSFM	TSWM	TSFM
5	0,7472	0,7488	0,6744	0,6787
20	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
30	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
60	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
100	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
150	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
200	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
250	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
300	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
350	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
400	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
500	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
750	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
1000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
2000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
3500	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
5000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000

neira geral os resultados obtidos, como era esperado, são similares aos obtidos por esses autores, para o TSWM.

Nas Tabelas 17 e 18 estão apresentados os resultados de poder para a simulação sob H_1, considerando a distribuição lognormal multivariada com $p = 2$. Os valores de poder de ambos os testes, para $n \geq 20$, foram iguais entre si e iguais a 100%. Os valores de poder foram menores que 100% somente para $n = 5$. Nesse caso, os desempenhos de ambos os testes foram muito similares, embora novamente o TSFM tenha sido consistentemente superior para todos os valores de ρ.

TABELA 19 Valores de poder para os testes TSWM e TSFM, considerando a distribuição lognormal multivariada valor nominal de 5%, em função dos diferentes tamanhos amostrais (n), do número de variáveis $(p = 10)$ e das correlações ($\rho = 0{,}0$ e $\rho = 0{,}1$).

	$\rho = 0{,}0$		$\rho = 0{,}1$	
n	TSWM	TSFM	TSWM	TSFM
20	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
30	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
60	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
100	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
150	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
200	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
250	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
300	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
350	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
400	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
500	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
750	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
1000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
2000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
3500	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
5000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000

Nas Tabelas 19 e 20 estão apresentados os resultados de poder sob a log-

TABELA 20 Valores de poder para os testes TSWM e TSFM, considerando a distribuição lognormal multivariada valor nominal de 5%, em função dos diferentes tamanhos amostrais (n), do número de variáveis $(p = 10)$ e das correlações ($\rho = 0{,}5$ e $\rho = 0{,}9$).

	$\rho = 0{,}5$		$\rho = 0{,}9$	
n	TSWM	TSFM	TSWM	TSFM
20	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
30	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
60	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
100	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
150	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
200	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
250	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
300	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
350	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
400	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
500	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
750	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
1000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
2000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
3500	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
5000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000

normal multivariada para $p = 10$. Nesse caso, como no caso anterior, os valores de poder de ambos os testes foram todos iguais a 100%. Convém salientar que o tamanho amostral igual a 5 não foi simulado, uma vez que o número de variáveis $p = 10$ é maior do que o tamanho amostral. Isso conduz a singularidades nas matrizes de covariâncias amostrais e impossibilita a aplicação dos testes.

TABELA 21 Valores de poder para os testes TSWM e TSFM, considerando a distribuição normal contaminada com grau de contaminação ($\delta = 30$), valor nominal de 5%, em função dos diferentes tamanhos amostrais (n), do número de variáveis ($p = 2$) e das correlações ($\rho = 0{,}0$ e $\rho = 0{,}1$).

	$\rho = 0{,}0$		$\rho = 0{,}1$	
n	TSWM	TSFM	TSWM	TSFM
5	0,1591	0,1721	0,1629	0,1827
20	0,8115	0,6985	0,9390	0,8343
30	0,9670	0,9211	0,9966	0,9848
60	1,0000	0,9997	1,0000	1,0000
100	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
150	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
200	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
250	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
300	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
350	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
400	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
500	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
750	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
1000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
2000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
3500	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
5000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000

Para a distribuição normal contaminada com $p = 2$, os valores de poder estão apresentados nas Tabelas 21 e 22. Com amostras iguais ou superiores a 60, o poder dos testes foi igual a 100%, exceto com $\rho = 0$, em que o poder do TSFM foi de 99,97%. É interessante notar que o desempenho do TSWM para

TABELA 22 Valores de poder para os testes TSWM e TSFM, considerando a distribuição normal contaminada multivariada com grau de contaminação ($\delta = 0{,}30$), valor nominal de 5%, em função dos diferentes tamanhos amostrais (n), do número de variáveis $(p = 2)$ e das correlações ($\rho = 0{,}5$ e $\rho = 0{,}9$).

	$\rho = 0{,}5$		$\rho = 0{,}9$	
n	TSWM	TSFM	TSWM	TSFM
5	0,1637	0,1821	0,1587	0,1728
20	0,9341	0,8256	0,8973	0,7858
30	0,9963	0,9816	0,9884	0,9632
60	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
100	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
150	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
200	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
250	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
300	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
350	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
400	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
500	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
750	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
1000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
2000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
3500	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
5000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000

$n = 20$ e 30 foi superior ao TSFM. Esses foram os únicos casos em que houve essas inversões de desempenho. A maior diferença ocorreu com $n = 20$, sendo de, aproximadamente, 12 pontos percentuais. Para $n = 30$, as diferenças foram menos expressivas a favor de TSWM do que com $n = 20$. Para $n = 5$, o TSFM foi superior ao TSWM.

Outro comportamento interessante dos valores de poder dos testes foi observado. Com o aumento dos valores de ρ, houve uma tendência de aumento dos valores de poder até $\rho = 0{,}5$, com decréscimo, no entanto, para $\rho = 0{,}9$. Todavia, os valores de poder para $n = 20$ e $n = 30$ com $\rho = 0{,}9$ foram maiores do que os valores com $\rho = 0{,}0$.

Finalmente, os resultados referentes às últimas situações simuladas, que se referem à distribuição normal contaminada multivariada com $p = 10$ variáveis, estão apresentadas nas Tabelas 23 e 24. Para $n \geq 60$, sem exceção, os valores de poder de ambos os testes foram iguais a 100%. Consistentemente, para $n = 20$ e 30, o TSWM foi superior em poder ao TSFM, exceto para $n = 30$ e $\rho = 0{,}1$ (Tabela 23), em que os valores de poder foram iguais.

De maneira geral, houve controle do erro tipo I dos dois testes. Em algumas situações, apesar de os valores das taxas terem sido significativamente ($P < 0{,}01$) superiores aos valores nominais de significância adotados, não foram expressivamente maiores que elas e também houve uma visível superioridade do TSFM quanto ao poder em relação ao TSWM. Assim, a nova proposta é considerada superior e deve ser recomendada. Ademais, todas as quantidades necessárias para a aplicação do TSFM são mais simples de ser calculadas do que aquelas, do TSWM. Embora isso tudo seja favorável ao novo teste, deve ser feita a ressalva de que o teste concorrente (TSWM) apresentou desempenho superior em algumas circunstâncias. Portanto, reafirma-se a constatação de Oliveira & Ferreira (2009) de que não há um teste uniformemente poderoso. Neste contexto, reforça-se a importância de se apresentar mais uma opção entre os testes existentes, que são escassos no contexto multivariado.

TABELA 23 Valores de poder para os testes TSWM e TSFM, considerando a distribuição normal contaminada com grau de contaminação ($\delta = 30$), valor nominal de 5%, em função dos diferentes tamanhos amostrais (n), do número de variáveis ($p = 10$) e das correlações ($\rho = 0{,}0$ e $\rho = 0{,}1$).

	$\rho = 0{,}0$		$\rho = 0{,}1$	
n	TSWM	TSFM	TSWM	TSFM
20	0,8730	0,7745	0,9994	0,9966
30	0,9834	0,9482	0,9999	0,9999
60	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
100	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
150	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
200	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
250	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
300	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
350	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
400	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
500	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
750	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
1000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
2000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
3500	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
5000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000

TABELA 24 Valores de poder para os testes TSWM e TSFM, considerando a distribuição normal contaminada multivariada com grau de contaminação ($\delta = 30$), valor nominal de 5%, em função dos diferentes tamanhos amostrais (n), do número de variáveis $(p = 10)$ e das correlações ($\rho = 0{,}5$ e $\rho = 0{,}9$).

	$\rho = 0{,}5$		$\rho = 0{,}9$	
n	TSWM	TSFM	TSWM	TSFM
20	0,9313	0,8257	0,9853	0,9200
30	0,9835	0,9568	0,9996	0,9975
60	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
100	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
150	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
200	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
250	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
300	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
350	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
400	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
500	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
750	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
1000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
2000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
3500	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
5000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000

5 CONCLUSÕES

- O teste de normalidade univariado de Shapiro-Francia foi estendido para o caso multivariado com sucesso.

- O controle do erro tipo I da nova proposta foi considerado adequado e equivalente ao do concorrente TSWM.

- Em termos de poder, o TSFM teve desempenho praticamente equivalente ao do TSWM.

- Dentre os dois testes comparados, não há um teste uniformemente superior, em todos os casos. O TSFM é recomendado para uso rotineiro nas aplicações multivariadas que requerem testes de normalidade, assim como o TSWM.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

BORGES, L. C.; FERREIRA, D. F. **Poder e taxas de erro tipo I dos testes Scott-Knott, Tukey e Student Newman-Keuls sob distribuições normal e não-normais dos resíduos**. 2002. 94 p. Dissertação (Mestrado em Estatística e Experimentação Agropecuária) - Universidade Federal de Lavras, Lavras.

CANTELMO, N. F.; FERREIRA, D. F. Desempenho de testes de normalidade multivariados avaliado por simulação Monte Carlo. **Ciência e Agrotecnologia**, Lavras, v. 31, n. 6, p. 1630-1636, 2007.

CIRILO, M. A.; FERREIRA, D. F. Extensão do teste para normalidade univariado baseado no coeficiente de correlação quantil-quantil para o caso multivariado. **Revista de Matemática e Estatística**, São Paulo, v. 21, n. 3, p. 57-75, 2003.

D'AGOSTINO, R. R. Transformation to normality of the null distribution of g1. **Biometrika**, London, v. 57, p. 679-681, 1970.

DACHS, J. N. **Estatística computacional:** uma introdução em turbo pascal. Rio de Janeiro: LTC, 1988. 236 p.

DOMANSKI, C. **Wlasnosci testu wielowymiarowej normalnosci Shapiro-Wilka i jego zastosowanie**. Cracow: University of Economics Rector's Lectures, 1998.

FARREL, P. J.; BARRERA, M. S.; NACZK, K. On tests for multivariate normality and association simulation studies. **Journal of Statistical Computation and Simulation**, New York, v. 77, n. 12, p. 1053-1068, 2007.

FERREIRA, D. F. **Estatística básica**. Lavras: UFLA, 2005. 664 p.

FERREIRA, D. F. **Estatística multivariada**. Lavras: UFLA, 2008. v 1., 662 p.

FISHER, N. I. Graphical methods in nonparametric statistics: a review and annotated bibliography. **International Statistical Review**, Edinburgh, v. 51, p. 25-58, 1983.

HENZE, N.; ZIRKLER, B. A class of invariante consistent tests for multivariate normality. **Communications in Statistics:** theory and methods, New York, v. 19, n.10, p. 3595-3618, 1990.

JOHNSON, M. E. **Multivariate statistical simulation:** a guide to selecting and generating continuous multivariate distributions. New York: J. Wiley, 1987. 240 p.

JOHNSON, R. A.;WICHERN, D. W. **Applied multivariate statistical analysis**. 4. ed. New York: Prentice Hall, 1998. 816 p.

MARDIA, K. V. Applications of some measures of multivariate skewness and kurtosis for testing normality and robustness studies. **Sankhya**: the Indian Journal of Statistics, Calcutta, v. 36, p. 115-128, 1974.

MARDIA, K. V. Assessment of multinormality and the robustness of Hotelling's T^2 test. **Journal of the Royal Statistical Society**, London, v. 24, p. 163-171, 1975.

MARDIA, K. V. Measures of multivariate skewness and kurtosis with applications. **Biometrika**, London, v. 57, n. 3, p. 519-530, July 1970.

MARDIA, K. V. Tests of univariate and multivariate normality. **Handbook of Statistics**, Ames, v. 1, p. 297-320, 1980.

MECKLIN, C. J.; MUNDFROM, D. J. An appraisal and bibliography of tests for multivariate normality. **International Statistical Review**, Edinburgh, v. 72, n. 1, p. 123-138, 2004.

MOOD, A.M.; GRAYBILL, F.A.; BOES, D.C. **Introduction to the theory of statistics**. 3. ed. New York: J. Wiley, 1974. 564 p.

MUDHOLKAR, G. S.; SRIVASTAVA, D. K.; LIN, C. T. Some p-variate adaptations of the Shapiro-Wilk tes of normality. **Communications in Statistics:** theory and methods, New York, v. 24, n. 4, p. 953-985, 1995.

OLIVEIRA, I. R. C.; FERREIRA, D. F. Multivariate extension of chi-squared univariate normality test. **Journal of Statistical Computation and Simulation**, New York, p. 1-14, 2009. DOI: 10.1080/00949650902731377.

R DEVELOPMENT CORE TEAM. R: a language and environment for statistical computing. Vienna: R Foundation for Statistical Computing, 2008. Disponível em: <http://www.r-project.org.>. Acesso em: 05 mar. 2008.

ROYSTON, J. P. A toolkit for testing for non-normality in complete and censored samples. **Journal of the Royal Statistical Society:** série D, London, v. 42, n. 1, p. 37-43, 1993.

ROYSTON, J. P. Algorithm AS 181: the W test for normality. **Journal of the Royal Statistical Society:** série C - apllied statistics, London, v. 31, n. 2, p. 176-180, 1982.

ROYSTON, J. P. Remark AS R94: a remark on algorithm AS 181: the W test for normality. **Journal of the Royal Statistical Society:** série C - apllied statistics, London, v. 44, n. 4, p. 547-551, 1995.

ROYSTON, J. P. Some techniques for assessing multivariate normality based on the Shapiro-Wilk W. **Journal of the Royal Statistical Society:** série C - apllied statistics, London, v. 32, n. 2, p. 121-133, 1983b.

SANTOS, A. C. dos. **Definição do tamanho amostral usando simulação Monte Carlo para os testes de normalidade univariado e multivariado baseados em assimetria e curtose**. 2001. 71 p. Dissertação (Mestrado em Estatística e Experimentação Agropecuária) - Universidade Federal de Lavras, Lavras.

SAS INSTITUTE. **SAS/STAT User's guide:** version 9. Cary, 2000.

SHAPIRO, S. S.; FRANCIA, R. S. An approximate analysis of variance test for normality. **Journal of the American Statistical Association**, New York, v. 67, n. 337, p. 215-216, Mar. 1972.

SHAPIRO, S. S.; WILK, M. B. An analysis of variance test for normality. **Journal Biometrika**, London, v. 52, n. 3/4, p. 591-611, Nov. 1965.

SHAPIRO, S. S.; WILK, M. B. The joint assessment of normality of several independent samples. **Technometrics**: a journal of statistics for the physical, chemical and engineering science, Washington, v. 10, n. 4, p. 825-839, Nov. 1968.

SNEDECOR, G. W.; COCHRAN, W. G. **Statistical methods**. 8. ed. Ames: Iowa State University Press, 1989.

ANEXO

Programa R de simulação utilizado para computar o erro tipo I e o poder de todos os testes, conforme a situação avaliada.

```
# Multivariate normality test - Royston (1983)
# This is a extension of the Shapiro-Wilk's univariate normality
# test # Call the function Shapiro.Royston(x), where x is the
# data matrix (n x p), columns are variates and lines observations
# we have some auxiliar functions: ki, fz,fe,grhon
# based on the article: ROYSTON, J. P. A toolkit for
# testing for non-normality in complete
# and censored samples.

Shapiro.Royston = function(x){
        #auxiliar functions
        ki = function(zj) {
              ki = (qnorm(0.5*pnorm(-zj)))^2
              return(ki)
        }

        fz = function(wj,n){
             if (n <= 11) {
               lamb =  -2.273+0.459*n
               u     = log(1-wj)
               y     = -log(lamb-u)
               muy   = 0.544-0.39978*n+0.025054*n^2-0.0006714*n^3
               sigy  = exp(1.3822-0.77857*n+0.062767*n^2-
                             0.0020322*n^3)
             } else {
               y=log(1-wj)
             xx=log(n)
             muy=-1.5861-0.31082*xx-0.083751*xx^2+0.0038915*xx^3
             sigy=exp(-0.4803-0.082676*xx+0.0030302*xx^2)
             }
             zc = (y-muy)/sigy
             return(zc)
        }

        fe  = function(cbar,p){
           e = p/(1+(p-1)*cbar)
           return(e)
        }

        grhon = function(rho,n){
           mu = 0.715
           lamb = 5
           xx = log(n)
```

```
        nu = 0.21364+0.015124*xx^2-0.0018034*xx^3
        #nu=0.35
        #print(nu)
        grijn = rho^lamb*(1-mu/nu*rho*(1-rho)^mu)
        grijn
      }
# main procedures
if (!is.matrix(x))
stop("x[] is not a matrix with number of rows (sample size)
      between 3 and 5000")
p=ncol(x)
p
n=nrow(x)
n
if (n < 3 || n > 5000)
      stop("sample size must be between 3 and 5000")
rx = cor(x)
#Calculating the univariate W statistics using R function
Wis = matrix(0,p,1)
for (i in 1:p){
  xj=x[1:n,i]
  wi = shapiro.test(xj)
  Wis[i,1]= wi$statistic
 }
#calculating Cij matrix
Cij = matrix(1,p,p)
if (p>1){
  pp=1:p-1
  #print(pp)
  for (i in pp){
    ii=i+1
    seq=ii:p
    for (j in seq){
      #print(i);print(j);print(seq)
      cij = grhon(abs(rx[i,j]),n)
      Cij[i,j]=cij
      #print(cij)
      Cij[j,i]=cij
    }
  }
}
# test statistics and p-value
if(p>1) cbar=sum(Cij-diag(p))/(p*(p-1)) else
  cbar=0
e=fe(cbar,p)
Kis=ki(fz(Wis,n))
G=sum(Kis)/p
W.mean = mean(Wis)
```

```
  H=e*G
  prH =1 - pchisq(H,e)
  return(list(W = W.mean, G=G, H = H, dfeq = e, p.value = prH))
}

# Multivariate normality test - Roberta (2009). This
# is a extension of the Shapiro-Francia's univariate normality
# test. Call the function Mult.SF(x), where x is the data matrix
# (n x p), colunms are variates and lines observations
# we have some auxiliar functions: ki, fz,fe,grhon
# test statistic was based on the article: ROYSTON,
# J. P. A toolkit for testing for non-normality in complete
# and censored samples.
# This test is proposed as result of the Doctoral Thesis
# of Roberta Bessa Veloso Silva

Mult.SF = function(x){
        #auxiliar functions
        ki = function(zj) {
             ki = (qnorm(0.5*pnorm(-zj)))^2
             return(ki)
        }

        fe  = function(cbar,p){
          e = p/(1+(p-1)*cbar)
          return(e)
        }

        grhon = function(rho,n){
          mu = 0.6631
          lamb = 5.1139
          xx = log(n)
          nu = 0.2143+0.0472*xx^2-0.00511*xx^3
          grijn = rho^lamb*(1-mu/nu*rho*(1-rho)^mu)
          grijn
        }

        SF.test = function (xj)
        {
          xj = sort(xj[complete.cases(xj)])
          n = length(xj)
          if ((n < 5 || n > 5000))
             stop("sample size must be between 5 and 5000")
          y = qnorm(ppoints(n, a = 3/8))
          W = cor(xj, y)^2
          u = log(n)
          v = log(u)
          mu  = -1.2725 + 1.0521 * (v - u)
```

```
        sig = 1.0308 - 0.26758 * (v + 2/u)
        z = (log(1 - W) - mu)/sig
        pval = pnorm(z, lower.tail = FALSE)
        return(list(statistic = c(W = W), p.value =
                    c(p.value = pval), zc=c(zc=z)))
      }

# main procedures
if (!is.matrix(x))
      stop("x[] is not a matrix with number of rows
            (sample size) between 3 and 5000")
p=ncol(x)
p
n=nrow(x)
n
if (n < 5 || n > 5000)
      stop("sample size must be between 3 and 5000")
rx = cor(x)
# Calculating the univariate statistics W using
# an auxiliary function
Wis = matrix(0,p,2)
for (i in 1:p){
  xj=x[1:n,i]
  wi = SF.test(xj)
  Wis[i,1]= wi$statistic
  Wis[i,2]= wi$zc
 }

# Computing the Cij matrix
Cij = matrix(1,p,p)
if (p>1){
  pp=1:p-1
  #print(pp)
  for (i in pp){
    ii=i+1
    seq=ii:p
    for (j in seq){
      #print(i);print(j);print(seq)
      cij = grhon(abs(rx[i,j]),n)
      Cij[i,j]=cij
      #print(cij)
      Cij[j,i]=cij
    }
  }
}
# test statistics and p-value
if(p>1) cbar=sum(Cij-diag(p))/(p*(p-1)) else
  cbar=0
```

```
  e=fe(cbar,p)
  Kis=ki(Wis[,2])
  G=sum(Kis)/p
  W.mean = mean(Wis)
  H=e*G
  prH =1 - pchisq(H,e)
  return(list(W = W.mean, G=G, H = H, dfeq = e, p.value = prH))
}
##########################################################
#Avaliação da performance dos testes via simulação
##########################################################

library(mvtnorm); library(mvnormtest); library(compositions)


#Normal Contaminada - deve mudar seus parâmetros aqui
mu11 = matrix(0,p,1);
Sigma11 = matrix(rho*sig2,p,p)
for (ii in 1:p) Sigma11[ii,ii]=sig2
mu22 = matrix(5*sig2^0.5,p,1)
Sigma22 = 1.2^(1/p) * Sigma11
# Determinante é igual a 20% maior que o de Sigma1
library(mvtnorm)

# Simulação Monte Carlo da distribuição  Normal Contaminada
SMCNC = function(n,delta=0.3,mu1,Sigma1,mu2,Sigma2)
{
   u = runif(n)
   if (u[1]<=delta) {Y = rmvnorm(1,mu1, Sigma1)
   } else Y = rmvnorm(1,mu2, Sigma2)
   for (ii in 2:n)
   {
     if (u[ii]<=delta) {Y = rbind(Y,rmvnorm(1,mu1, Sigma1))
     } else Y = rbind(Y,rmvnorm(1,mu2, Sigma2))
   }
   return(Y)
}


# Modificar aqui
n=350;p=10;df =30
rho=0.0
delta = 0.30
sig2=1
Sigma=sig2*((1-rho)*diag(p)+rho*matrix(1,p,p))
mu=rep(0,p)

Sigma1=matrix(0,p,p)
```

```
for(i in 1:p) for(j in 1:p)
{
  Sigmal[i,j]=(exp((mu[i]+mu[j])+(Sigma[i,i]+Sigma[j,j])/2))*
              (exp(Sigma[i,j])-1)
}
mul=exp(mu+0.5*diag(Sigma))
alpha05=0.05
alpha01 =0.01
N=2000



etI.mSFrob05=0; etI.Roy05=0
etI.mSFrob01=0; etI.Roy01=0
for (i in 1:N)
{
  #x=rlnorm.rplus(n, mul, Sigmal)
  # gerar dados da normal multivariada contaminada
  #x= SMCNC(n,delta,mu11,Sigma11,mu22,Sigma22)
  x=rmvt(n, Sigma, df) # t multivariada
  res.etI.Mult.SF=Mult.SF(x) #Shapiro-Francia Multivariado
  res.Roy= Shapiro.Royston(x)  #Shapiro Wilk de Royston
  if (res.etI.Mult.SF$p.value<alpha05)
      etI.Mult.SF05=etI.Mult.SF05+1/N
  if (res.Roy$p.value<alpha05) etI.Roy05=etI.Roy05+1/N

  if (res.etI.Mult.SF$p.value<alpha01)
      etI.Mult.SF01=etI.Mult.SF01+1/N
  if (res.Roy$p.value<alpha01) etI.Roy01=etI.Roy01+1/N
}

data.frame('n'=n,'p'=p,'rho'=rho,'alpha05'=alpha05,
           'TSFM05'=etI.Mult.SF05,'TSWM05'=etI.Roy05)

data.frame('n'=n,'p'=p,'rho'=rho,'alpha01'=alpha01,
           'TSFM01'=etI.Mult.SF01,'TSWM01'=etI.Roy01)
```