



DANILO MACHADO PIRES

**COMPARAÇÃO ENTRE MODELOS ESTATÍSTICOS
DE *RATING* EM TORNEIOS DE XADREZ**

LAVRAS - MG

2014

DANILO MACHADO PIRES

**COMPARAÇÃO ENTRE MODELOS ESTATÍSTICOS DE *RATING* EM
TORNEIOS DE XADREZ**

Tese apresentada à Universidade Federal de Lavras, como parte das exigências do Programa de Pós-Graduação em Estatística e Experimentação Agropecuária, área de concentração em Estatística e Experimentação Agropecuária, para a obtenção do título de Doutor.

Orientador
Dr. Júlio Sílvio de Sousa Bueno Filho

**LAVRAS - MG
2014**

**Ficha Catalográfica Elaborada pela Coordenadoria de Produtos e
Serviços da Biblioteca Universitária da UFLA**

Pires, Danilo Machado.

Comparação entre modelos estatísticos de rating em torneios de xadrez / Danilo Machado Pires. – Lavras : UFLA, 2014.
90 p. : il.

Tese (doutorado) – Universidade Federal de Lavras, 2014.
Orientador: Júlio Sílvio de Sousa Bueno Filho.
Bibliografia.

1. Ratings. 2. Xadrez. 3. Comparação pareada. 4. Delineamento de torneio. 5. Inferência bayesiana. I. Universidade Federal de Lavras. II. Título.

CDD – 519.542

DANILO MACHADO PIRES

**COMPARAÇÃO ENTRE MODELOS ESTATÍSTICOS DE *RATING* EM
TORNEIOS DE XADREZ**

Tese apresentada à Universidade Federal de Lavras, como parte das exigências do Programa de Pós-Graduação em Estatística e Experimentação Agropecuária, área de concentração em Estatística e Experimentação Agropecuária, para a obtenção do título de Doutor.

APROVADA em 01 de Agosto de 2014.

Dr. Júlio Sílvio de Sousa Bueno Filho	UFLA
Dra. Thelma Sáfadi	UFLA
Dr. Daniel Furtado Ferreira	UFLA
Dr. Lucas Monteiro Chaves	UFLA
Dr. Adriano Polpo de Campos	UFSCar

Dr. Júlio Sílvio de Sousa Bueno Filho
Orientador

**LAVRAS - MG
2014**

“A glória é tanto mais tardia quanto mais duradoura há de ser, porque todo fruto delicioso amadurece lentamente”

(Arthur Schopenhauer)

*A Deus,
à minha família,
aos meus irmãos,
aos meus pais,
aos meus avós,
aos meus amigos,
ofereço.*

À minha Mãe, Lecy, ao meu pai, Orécio; aos meus irmãos, Daniel e Daniele; aos meus avós, Itacy e Leonides; a minha tia Fausta.
dedico.

AGRADECIMENTOS

"A vida é um espetáculo que começa muito antes de chegarmos e terminará muito depois de partirmos" preconizou Aristóteles. E ao longo desse "espetáculo" buscamos superar obstáculos, conquistar vitórias e realizar sonhos. Para tal, contamos com a colaboração, apoio, incentivo, compreensão e torcida de várias pessoas, das quais seremos eternamente gratos.

Agradeço aos professores pela contribuição fundamental em minha formação, sem a qual eu não poderia se quer, almejar essa conquista.

Ao meu orientador Júlio Sílvio de Sousa Bueno Filho, pela ajuda, pelo empenho e especialmente pela paciência. Apesar de várias divergências e conflitos reconheço que foi mais do que um mestre, foi um amigo, cujas lições de vida, profissionalismo e amizade, levarei comigo.

À banca examinadora, composta por Thelma Sáfyadi, Daniel Furtado Ferreira, Lucas Monteiro Chaves e Adriano Polpo de Campos que aceitaram o convite que lhes foi feito e, dessa forma, colaboraram para a conclusão deste projeto.

A todos meus amigos de Paracatu e em especial aos meus amigos Max José, Robson Araújo, Danilo Salgado, Leandro Marques e Fabrício Ribeiro pela amizade, pelos conselhos e por todo o apoio.

Aos amigos que fiz em Lavras, que compartilharam comigo momentos do qual serão lembrados com nostalgia pelo resto da minha vida, em especial a Adriana Brasil, Crysttian Arantes Paixão, Manoel Victor veloso, Abigail Emília Bracarense e Luciana Bracarense, que são pessoas que tive o privilégio de conhecer e foram fundamentais para que eu tenha conseguido realizar este trabalho.

A Joana Nogueira por todo apoio, incentivo e pelos sábios conselhos.

Carlos Drummond de Andrade certa vez disse: "...*Mesmo antes de nascer, já tinha alguém torcendo por você*". Ele se referia a nossa família, pessoas que não escolhemos conhecer, mais estamos destinados a amar.

Assim agradeço a minha avó, Itacy, pelas orações dispensadas a mim, pela

torcida, por está sempre presente e ser um exemplo a ser seguido.

Ao meu avô, Leonides, (*in memorian*) que sempre considerei um segundo pai, cujos conselhos foram vitais para minha formação.

À minha tia, Fausta, por todo apoio e carinho.

À minha irmã Daniele, e ao meu irmão Daniel, pela amizade, confiança e força nas minhas realizações. Pela torcida, pelo apoio e por serem essas pessoas especiais do qual tenho enorme orgulho e admiração, agradeço por sempre estarem a meu lado.

Agradeço a minha mãe, Lecy, que lutou por toda a vida para que eu conseguisse trilhar meu caminho. Agradeço por sua paciência, pelo incentivo, por todo apoio e dedicação demonstrada ao primar pelo bem estar e educação dos seus filhos, mesmo que seja ao custo do seu próprio bem estar, e principalmente por acreditar em mim e me encorajar a lutar pelos meus sonhos.

Em especial, agradeço ao meu pai Orécio Franciscico Pires (*in memorian*), pelo exemplo de caráter, honestidade e sabedoria. Por sempre ter estado ao meu lado nos momentos de alegria e de tristeza, por ter dado não só a mim, mas a toda a família uma vida digna e honrada. Agradeço por todo investimento feito em mim, por compartilhar meus problemas e comemorar minhas conquistas, pelos conselhos e ensinamentos dos quais considero vitais para minha formação. Por sempre ter estado pronto a me ajudar em qualquer dificuldade e nunca ter me desamparado, por comemorar comigo as vitórias, e não me deixar abalar pelas derrotas. Por motivos que só Deus pode explicar não está mais entre nós, mais sei que em espírito comemora comigo mais essa realização.

Agradeço a CAPES (Coordenação de Aperfeiçoamento de Nível Superior) pelas bolsas concedidas para auxiliar no desenvolvimento deste projeto.

Aos funcionários dos departamentos onde desenvolvi minhas atividades, pelo auxílio, ajuda e apoio.

Ao Departamento de Ciências Exatas pela oportunidade no curso de Doutorado em Estatística, o qual possibilitou, por meio de sua estrutura, disciplinas e

professores, desenvolver este trabalho.

À Universidade Federal de Lavras pela estrutura e oportunidade de desenvolver esse projeto.

Meus sinceros agradecimentos a todos que os que participaram desta fase importante da minha vida.

A Deus, pela inspiração, pela força, pelos momentos concedidos para fazer com que essa vitória pudesse ser valorizada, eu agradeço eternamente.

RESUMO

Sistemas de rating são modelos estatísticos para estimar a força relativa de jogadores ou equipes esportivas. O xadrez é um dos esportes mais praticados no mundo, existindo uma vasta literatura a seu respeito e uma enorme quantidade de dados relacionados a partidas e jogadores. Parte da popularidade do xadrez deve-se ao sistema de *ratings*, utilizado pela Federação Internacional de Xadrez (a FIDE, que adota o sistema ELO). A comunidade enxadrística tem manifestado diversas críticas ao ELO por este não levar em conta, por exemplo, o possível benefício de jogar de brancas (iniciar a partida), a forte tendência de ocorrerem empates entre mestres e a hipótese de que resultados recentes tenham maior importância que os antigos. Neste trabalho foram propostos modelos paramétricos para um sistema de *ratings* para jogadores de xadrez e sua análise bayesiana. Foram feitas comparações quanto à capacidade descritiva e preditiva em exemplos reais, focando em diferentes níveis de complexidade para a modelagem da vantagem das brancas. Foi também modelada a tendência a ocorrer empates. Adicionalmente, foram analisados fatores de ponderação temporal na verossimilhança, de forma que partidas antigas tenham menos peso em relação às mais recentes. Foi analisado um banco de dados composto por partidas oficiais jogadas pelos melhores 46 enxadristas de do mundo ($ELO > 2700$) no período de janeiro de 2010 até novembro de 2012. A inferência sobre os parâmetros foi feita mediante estatísticas descritivas calculadas em amostras das suas distribuições marginais *a posteriori*. Na análise da capacidade de predição usou-se um banco de dados independente, constituído de partidas dos principais torneios jogados no período de janeiro a agosto de 2013. O ajuste dos modelos foi comparado usando critérios de informação e a medida de DeFinetti. Diversos modelos superaram o sistema ELO. Nosso estudo aponta que uma melhoria evidente e de fácil implementação consiste em considerar a vantagem das brancas em modelos com verossimilhança ponderada, ou suas versões dinâmicas.

Palavras-chave: Comparação pareada. Dados categorizados. Delineamento de torneio. Inferência bayesiana.

ABSTRACT

Ratings systems are statistical models to estimate relative strength of players or sporting teams. Chess is one of the sports with the highest number of practitioners and the larger specialized literature. Part of its popularity is due to chess rating system used by International Chess federation (FIDE, that uses ELO system). Chess community has expressed many criticisms on ELO not taking into account some known disturbances in performance, for instance, the benefit of having the white pieces (initial move), the drawing tendency among players with higher strength, and the hypothesis that recent results are more meaningful than older ones. In this thesis we propose parametric models for rating systems and their Bayesian analysis. We compared their descriptive and predictive performance in real data, focusing in the complexity of modeling for white advantage. Drawing tendency was also modeled. Time dependent weights on likelihood functions were also investigated, with the older games having smaller weights than the new ones. A dataset containing games from the best 46 world elite chess players (ELO>2700), collected from January 2010 to November 2012. The inference was carried out using samples statistics from marginal posterior distributions. Analyses of predictive performance used an independent data-set with games from the same players from year 2013 (January to August). Model adjustment were compared using information criteria as well as DeFinetti measure. Many of the proposed models overcome ELO. An evident and straightforward change would be to consider white advantage in weighted likelihood models, or dynamic versions of them.

Keywords: Bayesian inference. Categorical data. Pairwise comparison. Tournament design.

LISTA DE FIGURAS

1	Probabilidades de vitória em relação à diferença de rating Δ_R , obtidas pelo modelos Normal e Logístico.	23
2	Estimativas pontuais de R_s e respectivos intervalos de credibilidade HPD a 95%, obtidos pelo modelo Bradley-Terry estático com R_s e δ	59
3	Estimativas pontuais de R_s e respectivos intervalos de credibilidade HPD a 95%, obtidos pelo modelo Bradley-Terry com R_s e δ , com verossimilhança ponderada.	60
4	Probabilidades de vitória em relação à diferença de rating Δ_R , obtidas pelo modelo Bradley-Terry simples (equivalente ao ELO) , o modelo Bradley-Terry estático com o acréscimo de um único $\delta = 41,73$ (Bradley-Terry (θ)) e o modelo Bradley-Terry com verossimilhança ponderada com o acréscimo de um único $\delta = 43,68$ (Bradley-Terry (θ) ω).	61
5	Estimativas pontuais de γ_s e respectivos intervalos de credibilidade HPD a 95%, obtidos pelo modelo de Davidson estático com γ_s , δ_s e λ , modelo completo.	65
6	Estimativas pontuais de γ_s e respectivos intervalos de credibilidade HPD a 95%, obtidos pelo modelo de Davidson com verossimilhança ponderada, com γ_s , δ_s e λ , modelo completo.	66
7	Estimativas pontuais de δ_s e respectivos intervalos de credibilidade HPD a 95%, obtidos pelo modelo de Davidson estático com γ_s , δ_s e λ , modelo completo.	67
8	Estimativas pontuais de δ_s e respectivos intervalos de credibilidade HPD a 95%, obtidos pelo modelo de Davidson com verossimilhança ponderada, com γ_s , δ_s e λ , modelo completo.	68

- 9 Diagramas de dispersão entre as 46 estimativas de rating γ de cada um dos modelos estudados e as estimativas oficiais FIDE . Sigla: ELO.D12 = Rating FIDE (ELO) emitido em dezembro de 2012, ELO.M14 = Rating FIDE (ELO) emitido em maio de 2014, BT= Bradley-Terry simples estático, BT1=Bradley-Terry com mando simples (único δ) estático, BT2 = Bradley-Terry completo estático, o mesmo raciocínio serve para os modelos derivados do modelo de Davidson, DV. As siglas seguidas de ω se referem aos modelos com verossimilhança ponderada. 69

LISTA DE TABELAS

1	Proporção de vitória para o jogador das brancas, calculada pelo modelo normal e sua aproximação logística, para diferentes valores de Δ_R (diferença entre o rating das brancas e das pretas). . . .	22
2	Distância de DeFinetti associada às respectivas de probabilidades de vitória do jogador de brancas, empate e vitória do jogador de pretas	40
3	Conjuntos de dados utilizados para inferência de parâmetros (<i>Training set</i>) e de predição de resultados (<i>Testing set A</i> e <i>B</i>), e os respectivos períodos em que ocorreram as partidas, assim como as quantidades de jogos, a quantidade de resultados (vitória (V), empate (E) e derrota (D) das brancas) e o número de jogadores com ratings estimados pelos modelos propostos, em cada conjunto de dados	42
4	Jogadores analisados (nome, país e seus respectivos ratings FIDE (ELO) referente a dezembro de 2012). <i>Trai.s.=Training set</i> , <i>Tes.s.A = Testing set A</i> e <i>Tes.s.B=Testing set B</i>	43
5	Modelos analisados, referentes às variações dos modelo de Bradley-Terry e Davidson. ($\omega_t = 1$: Modelos estáticos, ω_t : Modelos com verossimilhança ponderada).	52
6	Estimativas AIC dos modelos estáticos e com verossimilhança ponderada, para as variações do modelo Bradley-Terry e Davidson, em suas formas básicas utilizando os parâmetros de referência (Em negrito estão menores valores de AIC, por modelo). $\omega_t = 1$: Modelos estáticos; ω_t : Modelos com verossimilhança ponderada .	55

- 7 Negativa da média e desvio padrão do valor dos logaritmos das verossimilhanças, para cada ponto amostral das distribuições a *posteriori* conjuntas, correspondente às diferentes modificações dos modelos de Bradley-Terry e Davidson. Em negrito estão os menores valores de média e os maiores valores de desvio padrão, para cada modelo. $\omega_t = 1$: Modelos estáticos; ω_t : Modelos com verossimilhança ponderada. 56
- 8 Estimativas de AIC para os modelos analisados e AICM para os modelos de referência. Em negrito estão os menores valores da estimativa para cada modelo. $\omega_t = 1$: Modelos estáticos; ω_t : Modelos com verossimilhança ponderada. 57
- 9 Porcentagens de vitórias das pretas, empates e vitórias das brancas, calculadas pelo modelo Davidson completo, em partidas entre jogadores de iguais vantagens de brancas, para $\lambda = 0$, $\lambda = 1,098$ e $\lambda = 1,106$, para diferentes valores de Δ_R (diferença entre ratings). Em negrito estão destacadas as probabilidades de empates entre jogadores com mesmo rating, para os diferentes valores de λ . 62
- 10 Estimativas pontuais de ratings e deltas de cada jogador por meio dos modelos de Davidson completos (estático e com verossimilhança ponderada). A sigla "ELO" indica que a estimativa foi reescalada para a escala ELO. 64
- 11 Estimativas de AIC e as medidas de *DeFinetti*, relacionados aos resultados do *testing set A* e os modelos de predição derivados dos modelos de Bradley-Terry e Davidson, em suas formas básicas utilizando os parâmetros de referência. São também, usados como parâmetros de referência para o modelo Bradley-Terry os ratings FIDE (dezembro de 2012). Em negrito estão menores valores de AIC e DeFinetti, por modelo. 70

- 12 Negativa da média e variância dos logaritmos das verossimilhanças (l) e as estimativas das medidas de DeFinetti, obtidas pela análise do *Testing set A* por meio das diferentes modificações dos modelos de Bradley-Terry e Davidson. Em negrito estão os menores valores de média e os maiores valores de variância, para cada modelo. $\omega_t = 1$: Modelos estáticos; ω_t : Modelos com verossimilhança ponderada. 71
- 13 Estimativas de AICM para os modelos analisados e AIC para os modelos de referência. Os menores valores de AICM estão destacados em negrito. $\omega_t = 1$: Modelos estáticos; ω_t : Modelos com verossimilhança ponderada. 72
- 14 Estimativa AIC e medida de *DeFinetti*, relacionados aos resultados do *testing set B* e os modelos de predição derivados dos modelos de Bradley-Terry e Davidson, em suas formas básicas utilizando os parâmetros de referência. São, também, usados como parâmetros de referência para o modelo Bradley-Terry os ratings FIDE (dezembro de 2012). Em negrito estão menores valores de AIC e DeFinetti, por modelo. 73
- 15 Negativa da média e variância dos logaritmos das verossimilhanças das amostras de l e as estimativas das distâncias de DeFinetti, obtidos para as diferentes modificações dos modelos de Bradley-Terry e Davidson, considerando $\delta_i = 0$, $\delta_i = \mu_{\delta_s}$ e $\delta_i = -\delta_j$ para os jogadores que não têm valor δ_i estimado nos modelos completos. Em negrito estão os menores valores de média e os maiores valores de variância, para cada modelo. Sigla: $\omega_t = 1$: Modelos estáticos; ω_t : Modelos com verossimilhança ponderada. 75
- 16 Estimativas de AICM para os modelos analisados e AIC para os modelos de referência. Os menores valores para cada modelo estão em negrito. $\omega_t = 1$: Modelos estáticos; ω_t : Modelos com verossimilhança ponderada. 77

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	17
2	REFERENCIAL TEÓRICO	20
2.1	Sistema ELO	20
2.1.1	Sistema ELO ++	27
2.2	O modelo de Bradley-Terry	30
2.3	O modelo de Davidson	33
2.4	Versões Bayesianas dos modelos de rating	36
2.4.1	Verossimilhança ponderada na inferência Bayesiana	37
2.5	Seleção de modelos	39
3	MATERIAL E MÉTODOS	41
3.1	Formulação Bayesiana dos modelos	44
3.2	Processo de simulação	48
3.2.1	Distribuições condicionais completas	49
3.3	Definição dos modelos	51
3.4	Decisão sobre os melhores modelos	52
4	RESULTADOS E DISCUSSÃO	55
4.1	Análise descritiva	55
4.2	Análise preditiva de partidas jogadas somente entre jogadores com parâmetros estimados pelos modelos (<i>Testing set A</i>)	69
4.3	Análise preditiva de partidas jogadas onde pelo menos um dos jogadores teve os parâmetros estimados pelos modelos (<i>Testing set B</i>)	73
5	CONCLUSÃO	78
	REFERÊNCIAS	80
	APÊNDICE	83

1 INTRODUÇÃO

O xadrez é um dos jogos mais populares do mundo, sendo praticado por milhões de pessoas em torneios (amadores e profissionais), clubes, escolas, pela internet, por correspondência e informalmente. É reconhecido como um esporte pelo Comitê Olímpico Internacional - COI(2014), apresentando sua olimpíada específica e campeonatos mundiais em todas as suas categorias. Possui uma vasta literatura a seu respeito, sendo o jogo com mais livros editados no mundo e o segundo assunto com mais livros editados, de uma forma geral, perdendo apenas para medicina (WIKIPEDIA, 2014).

Existem diversos bancos de dados, em que, facilmente, há acesso a jogos que ocorreram em épocas e locais variados e a informações sobre jogadores e torneios. Muitos bancos de dados são disponíveis com livre acesso pela internet, como, por exemplo, o BrasilBase (BRASILBASE, 2014) é uma das maiores bases de dados sobre o enxadrismo brasileiro e, de acordo com ele, em julho de 2014, a base de dados possuía um acervo de mais de 280 mil partidas, além de estatísticas, fotografias, biografias e resenhas literárias. O site Chessgames.com (CHESSGAMES, 2014) abriga o maior banco de dados de livre acesso e é gerido por uma comunidade de enxadristas, mantendo mais de 770.000 partidas armazenadas. Dentre os bancos de dados comerciais, pode citar o ChessBase com, aproximadamente, 6 milhões de partidas acumuladas até 2014.

Grande parte da popularidade do xadrez se deve à introdução dos sistemas de *ratings*. *Ratings* são medidas da força dos jogadores, calculados por meio de estimativas simples e pelo qual qualquer jogador do mundo pode ter uma ideia de sua força como enxadrista; é impossível imaginar um torneio de xadrez sem esse sistema (GLICKMAN;JONES,1999).

Os sistemas de *rating*, além de serem imprescindíveis em torneios de xadrez, apresentam inúmeras utilizações práticas; um exemplo é a possibilidade de elaborar emparelhamentos de jogadores sem que os jogadores considerados prováveis candidatos a vencer se confrontem nas rodadas iniciais de um torneio. É, também, de grande interesse dos próprios jogadores quantificar sua força relativa para, assim, monitorar seu desempenho ao longo dos torneios disputados. Grandes

federações esportivas usam sistemas de *rating* para medir a força relativa de jogadores e equipes. Cita-se, como exemplo, a USCF, United States Chess Federation, a FIDE, Fédération Internationale des Échecs- FIDE(2014a). e, também, a FIFA, Fédération Internationale des Football Association - FIFA(2014).

De uma forma geral, os sistemas de *rating* servem, para relacionar competidores, não somente no que diz respeito a jogadores e equipes esportivas, mas inclusive produtos comerciais, a partir do qual se estabelece *rankings* relacionados a determinados critérios, além de servir como uma proposta de modelo descritivo e preditor de resultados em uma dada competição.

A FIDE é o órgão regulador da modalidade e utiliza o sistema de *rating* desenvolvido pelo físico Arpad Elo (ELO, 1978). Trata-se de um sistema estatístico, baseado na hipótese que a performance de cada enxadrista em suas partidas, é uma variável aleatória.

Esse sistema é utilizado pela FIDE, para a elaboração do *ranking* mundial de enxadristas, e também, como uma das formas de avaliação para a concessão de títulos vitalícios aos jogadores. Esses títulos correspondem a classes cujo objetivo é a distinção de jogadores por habilidades. Reconhecem-se três classes: Mestre FIDE, Mestre Internacional e Grande Mestre Internacional. O mais alto *rating* ELO, já alcançado na história do enxadrismo, foi o de 2882 pontos, obtido pelo Grande Mestre Internacional e atual campeão mundial Magnus Carlsen, em maio de 2014, de acordo com a FIDE (FIDE, 2014a) e de 2895 pelo campeão mundial de 1972, Robert J. Fisher, de acordo com as estimativas do site Chessmetrics (SONAS, 2013).

O estudo realizado se justifica pela existência de inúmeras críticas quanto à capacidade de descrição e predição do sistema ELO. Outro ponto discutível é que esse sistema não leva em consideração o momento que a partida ocorreu. Assim, não considera a hipótese de que resultados recentes tenham maior influência na determinação da “força” atual do jogador. Isso pode ser um problema, uma vez que em muitas situações, os jogadores competem uns contra os outros ao longo do tempo e, durante este tempo, é razoável acreditar que as habilidades dos mesmos podem sofrer mudanças.

A enorme quantidade de dados sobre partidas de xadrez leva à elaboração

de hipóteses pela comunidade enxadrística, relacionadas ao possível benefício que o enxadrista que controla as peças brancas possui ao realizar o primeiro movimento em um jogo de xadrez, e a forte tendência a ocorrerem empates entre mestres. Resultados históricos apoiam essa observação, dado que as brancas pontuam em jogos de xadrez um pouco mais comumente do que as peças pretas, e o empate é um resultado frequente (CHESSGAMES, 2014).

Diversas alternativas a essas críticas têm sido propostas na literatura estatística. A maior parte destas propostas consiste em modificar o sistema ELO, tratando-o como um caso particular do modelo de preferência de Bradley e Terry (1952) e sua variação com empates, modelo de Davidson (1970). Talvez as modificações mais importantes envolvam a adoção de um parâmetro para modelar a vantagem do lance inicial (jogar de brancas no xadrez, ou mando de campo em esportes coletivos), valendo-se de novas ferramentas disponíveis para ajustar modelos mais flexíveis (GLICKMAN; JONES, 1999; KAGGLE, 2014a; SISMANIS, 2010).

Com base nessas considerações, este trabalho foi realizado com o objetivo principal de desenvolver modelos paramétricos, para um sistema de *ratings* de xadrez, com o enfoque bayesiano. Os modelos são comparados quanto à sua capacidade descritiva e preditiva em exemplos reais. Adicionalmente, foi discutido se a vantagem de brancas é ou não relevante, para jogadores de alto nível em partidas pensadas e se é possível determinar um fator discriminante da tendência de ocorrer empates, durante os jogos e de que existem diferenças da influência de partidas antigas e recentes no cálculo da força relativa dos jogadores.

Todas as rotinas necessárias foram implementadas utilizando a linguagem R (R Core Team, 2014).

2 REFERENCIAL TEÓRICO

2.1 Sistema ELO

Em 1969, o físico Húngaro, naturalizado Norte Americano, Arpad E. Elo (1903-1992), apresentou à FIDE um método, para se calcular a força relativa entre os enxadrists e, desde então ele vem sendo utilizado (ELO, 1978; FIDE, 2014a). Este sistema foi desenvolvido, inicialmente, para a federação Norte Americana de Xadrez (United States Chess Federation - USCF, 2013), na década de 60 e, ao criar o sistema de rating ELO, preocupou-se em mais do que apenas uma ordem de força entre os vários jogadores. Ele propôs atribuir probabilidades de vitória, para cada confronto a ser realizado, poder atualizar as forças relativas, imediatamente, após um torneio e, também, criar intervalos de classe, para estabelecer uma distinção de habilidades de jogadores por níveis, conforme a tradição enxadrística.

O sistema baseia-se no fato que de uma forma geral, um forte jogador não é sempre superior a um jogador fraco. Porém, com base em uma grande quantidade de “partidas”, esse jogador irá apresentar resultados ao redor de um valor médio. Ocorrem desvios deste valor, porém grandes desvios são menos frequentes que pequenos. Este fato sugere que se deve assumir modelos probabilísticos para o sistema de rating.

O desempenho de um jogador está diretamente vinculado ao rating (R) de seus oponentes e os resultados obtidos perante cada um deles. No caso do xadrez, os resultados são representados por 1, 0 e $\frac{1}{2}$, indicando, respectivamente, vitória para o jogador de brancas, derrota para jogador brancas e empate entre os jogadores.

Elo observou que a diferença de rating entre dois jogadores ($\Delta_R = R_i - R_j$) poderia determinar a proporção de vitórias entre eles, aqui chamados escores E_{ij} (escore entre os jogadores i e j). E os ratings seguiam uma distribuição que se assemelhava à distribuição normal (Como ponto de partida Elo sugeriu os parâmetros $\mu = 0$ e $\sigma = 200$). Hoje, a FIDE estabelece, dentre os critérios, que os jogadores que obtenham ratings acima de 2300 pontos sejam considerados Mestre FIDE, 2400 pontos Mestre Internacional e 2500 Grande Mestre Internacional

(ELO, 1978).

Uma vez que são dois participantes, em uma única partida, cada um dos participantes com um desvio padrão 200, o desvio padrão da diferença de ratings entre os jogadores i e j (σ') é dado por:

$$\sigma' = \sqrt{\sigma_i^2 + \sigma_j^2} \cong \sqrt{2 \times 200^2} = 282,84. \quad (1)$$

A proporção estimada de vitórias do jogador i sobre o jogador j (E_{ij}), ao longo do torneio, para cada indivíduo, é obtida então pela distribuição normal acumulada com média μ igual a 0 (indica a diferença no rating atual de um indivíduo e o seu rating esperado) e $\sigma' = 282,84$.

Assim, $E_{ij} = P[\Delta_r < \Delta_R]$. Isso pode ser calculado por:

$$E_{ij} = \int_{-\infty}^{\Delta_R} \frac{e^{-\frac{\Delta_r^2}{2(200\sqrt{2})^2}}}{200\sqrt{2}\sqrt{2\pi}} d\Delta_r = \int_{-\infty}^{\Delta_R} \frac{e^{-\left(\frac{\Delta_r}{400}\right)^2}}{400\sqrt{\pi}} d\Delta_r = \Phi_{(0;282,84^2)}(\Delta_r). \quad (2)$$

O modelo de score foi, primeiramente, desenvolvido na forma de distribuição acumulada normal e depois substituído pela função logística acumulada de base 10, uma vez que era, numericamente, mais conveniente de se trabalhar, pois a realização dos cálculos se fazia com calculadoras manuais até década de 1980 (AUCOIN; ASHKAR, 2010). Dessa forma, uma boa aproximação de (2) pode ser dada por:

$$E_{ij} = \frac{1}{1 + 10^{\frac{R_j - R_i}{400}}}. \quad (3)$$

Na tabela 1 estão relacionadas as esperanças de vitórias das brancas para diferenças de rating, variando de -100 a 100 pontos, calculadas pela distribuição normal e pela aproximação logística.

No gráfico da Figura 1, juntamente com os valores da tabela 1, mostra-se que, para pequenas diferenças de rating, ambos os modelos são indistinguíveis. A diferença entre os modelos se acentua a partir de valores de Δ_R superiores a $|200|$.

A atualização do rating ELO do jogador é feita pela diferença entre o score esperado W_e do jogador ($W_e = \sum_{j=1}^n E_{ij}$, a soma das proporções que

Tabela 1 Proporção de vitória para o jogador das brancas, calculada pelo modelo normal e sua aproximação logística, para diferentes valores de Δ_R (diferença entre o rating das brancas e das pretas).

	Δ_R	Modelo Normal	Modelo logístico
1	-100,00	36,18	35,99
2	-90,00	37,52	37,33
3	-80,00	38,87	38,69
4	-70,00	40,23	40,06
5	-60,00	41,60	41,45
6	-50,00	42,98	42,85
7	-40,00	44,38	44,27
8	-30,00	45,78	45,69
9	-20,00	47,18	47,12
10	-10,00	48,59	48,56
11	0,00	50,00	50,00
12	10,00	51,41	51,44
13	20,00	52,82	52,88
14	30,00	54,22	54,31
15	40,00	55,62	55,73
16	50,00	57,02	57,15
17	60,00	58,40	58,55
18	70,00	59,77	59,94
19	80,00	61,13	61,31
20	90,00	62,48	62,67
21	100,00	63,82	64,01

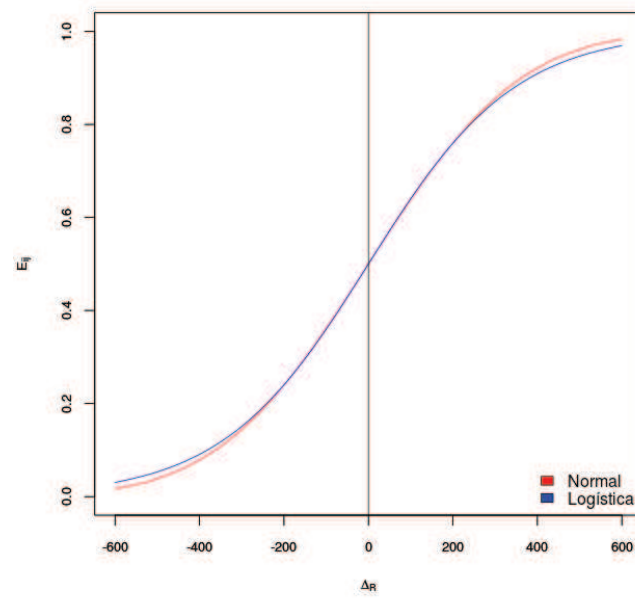


Figura 1 Probabilidades de vitória em relação à diferença de rating Δ_R , obtidas pelo modelos Normal e Logístico.

espera-se antes do torneio acontecer calculados pelo modelo normal ou logístico) e o escore obtido W_0 , isso é, a soma dos resultados observados ao fim de algum período de avaliação escolhido (após um jogo, um torneio e etc). O novo rating (R_n) do jogador é obtido por meio da expressão (4).

$$R_n = R_c + k(W_0 - W_e), \quad (4)$$

em que R_c é o rating corrente, antes da atualização e k (*fator k*) é um coeficiente de regularização, utilizado para estabelecer um ajuste linear ao incremento do rating do jogador, de acordo com seu nível como jogador (FIDE, 2014b). O *fator k* foi uma sugestão, proposta por Elo, para minorar o efeito de inflação do rating, determinando, assim, que jogadores fortes tem seu rating atualizado com um *fator k* menor do que os de jogadores fracos. Dessa forma, um jogador forte, ao participar de um torneio de maioria de jogadores fracos e medianos, mesmo após bons resultados, tem um acréscimo modesto no seu rating, em relação ao que aconteceria a um jogador fraco que alcançasse bons resultados em um torneio composto por jogadores fortes, como pode ser observado no exemplo a seguir.

Suponha duas situações, em que dois jogadores A e B participam de dois torneios diferentes. O jogador A tem um rating de 1820 pontos e enfrentou 4 jogadores cujos ratings foram, respectivamente, 2400, 2550, 2600 e 2650, obtendo os seguintes resultados: vitória, derrota, empate e empate. Esses resultados no xadrez são representados por: 1, 0, $\frac{1}{2}$ e $\frac{1}{2}$, dessa forma o jogador A apresentou $W_0 = 2$ (2 pontos em 4 partidas pois, $1 + 0 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 2$). Por A ser um jogador fraco (rating de 1820 é dado a iniciantes no xadrez), o seu *fator k* será fixado em $k = 32$ (valor utilizado pela FIDE para não mestres). Dessa forma o novo rating R_n do jogador A é obtido por:

$$R_n = 1820 + 32(2 - W_e) \quad (5)$$

W_e corresponde ao escore esperado, ao fim do torneio, assim, podemos calcular pelos dois modelos, normal (2) ou logístico (3).

Logo:

$$W_e = 0,034 + 0,015 + 0,011 + 0,008 = 0,068$$

$$R_n = 1820 + 32(2 - 0,068) \approx 1881$$

Agora suponha que o jogador B, com rating de 2500, participe de um torneio e enfrentou 4 jogadores cujos ratings são, respectivamente, 2300, 2200, 2100 e 2150, obtendo os mesmos resultados, obtidos pelo jogador A : vitória, derrota, empate e empate, ou seja, $W_0 = 2$ (2 pontos em 4 partidas). Por B ser um jogador forte (Grande Mestre), o seu *fator* k será fixado em $k = 16$. Dessa forma o novo rating R_n do jogador B é obtido por:

$$R_n = 2800 + 16(2 - W_e) \quad (6)$$

a exemplo do calculo feito para o jogador A, W_e corresponde ao escore esperado ao fim do torneio, assim:

$$W_e = 0,76 + 0,85 + 0,92 + 0,89 = 3,42$$

$$R_n = 2500 + 16(2 - 3,42) = 2476$$

Como pode ser observado no exemplo acima, o jogador B, mesmo obtendo metade dos pontos distribuídos, teve um pequeno decréscimo no seu rating, uma vez que o que resultado conseguido por ele foi abaixo do que era esperado, e o fato de ser um grande mestre determinou que o seu *fator* k seja baixo. Já o jogador A, embora tenha os mesmos 2 pontos, diante dos seus adversários, foi bem mais do que o esperado para ele, e por ser um jogador fraco ele tem um *fator* k maior, resultando em um aumento mais expressivo em seu rating.

Um medida usada, para determinar o desempenho que um jogador teve, imediatamente após um torneio, ou um *match*¹, é o rating performance. Esta medida é calculada, com base na porcentagem de vitórias observadas e é utilizada, para determinar um rating condizente com o desempenho do jogador naquele momento. Assim o rating performance R_p é calculado por:

$$R_p = R_m + D_p \quad (7)$$

em que R_m é o rating médio dos adversários enfrentados, e D_p é o quantil do modelo ELO, relacionado a porcentagem de vitórias observadas. Essencialmente, equivale a inverter a função de distribuição. Por exemplo se um jogador obteve 70% de vitórias então:

¹Termo que indica no enxadrismo, o confronto entre dois enxadristas, na presença de um árbitro e com estrita observação de regras pré-estabelecidas.

$$0,7 = P[\Delta_R < D_p]$$

ou

$$D_p = \Phi_{(0;282,84)}^{-1}(0,7)$$

Voltando aos dados do exemplo anterior, o jogador A enfrentou um grupo de jogadores cujo rating médio R_m foi de 2550 pontos ELO. E obteve 50% de vitórias, assim seu rating performance pode ser calculado por:

$$R_p = 2550 + \Phi^{-1}(0,5; 0; 282,84) \quad (8)$$

Logo o jogador A teve um rating performance de $R_p \approx 2550$ pontos ELO, 750 pontos a mais que o seu rating corrente, justificando o grande acréscimo obtido em seu rating calculado pela equação 4.

Em relação ao jogador B, a média de ratings do seus adversários foi de $R_m = 2300$, e ele obteve 0,5% de vitórias, assim, seu rating performance foi de aproximadamente, 2300. Esse valor é 200 pontos ELO a menos que o seu rating corrente, justificando o decréscimo obtido em seu rating calculado pela equação 4. É sensato esperar que o rating do jogador B, após essas partidas, diminua. O fato do jogador B, supostamente, ser um grande mestre (2500 pontos de rating), determina que o *fator k* usado para o cálculo de seu novo rating, seja baixo.

Embora o sistema ELO esteja em uso, ainda hoje, diversas melhorias já foram propostas, com o intuito de melhorar a acurácia do modelo em relação a sua capacidade descritiva e preditiva de resultados em partidas. Por exemplo, o uso de um *fator k* dinâmico, ou uma outra forma de determinar a atualização dos ratings. Avaliando os enormes banco de dados que se tem disponível, é possível perceber que o rating do jogador é influenciado, não somente pelos pontos obtidos e esperados, mas por alguns fatores, como o momento em que a partida ocorreu, a propensão a ocorrerem empates, em determinadas partidas e torneios, e o possível benefício que se tem ao jogar de brancas (as peças brancas fazem o lance inicial e, assim, determinam que “direção” o jogo irá tomar) (CHESSBASE, 2014a; ELO, 1978; FIDE, 2014b; FILGUTH, 2005; KAGGLE, 2014a).

2.1.1 Sistema ELO ++

Em agosto de 2010, a empresa Alemã de softwares de xadrez Chessbase, juntamente com a empresa de consultoria estatística em modelagem de dados KAGGLE, promoveram um torneio internacional que tinha por objetivo descobrir novas abordagens para prever os resultados de jogos futuros de maneira mais precisa que o sistema de ratings ELO. A competição atraiu mais de 250 equipes de 41 países e teve como vencedor Yannis Sismanis (cientista do centro de pesquisa de Almaden - IBM) com o sistema de ratings batizado por ele de ELO++ (KAGGLE, 2014)

O sistema ELO++ baseia-se no sistema de classificação ELO, usando uma curva logística sobre a diferença dos ratings dos jogadores, com o acréscimo de uma variável h no preditor linear (9), relacionada à vantagem de se jogar de brancas no conjunto de dados analisados.

$$p_{ij} = \frac{1}{1 + 10^{\frac{R_j - R_i - h}{400}}}, \quad (9)$$

em que R_i e R_j são os ratings dos jogadores i e j , respectivamente.

A obtenção dos ratings de cada jogador no sistema ELO++ é relacionado à minimização da função perda (Equação 10).

$$L = \sum_{\text{jogos}} \omega_{ij} (\hat{p}_{ij} - p_{ij})^2 + \rho \sum_{\text{jogadores}} (R_i - a_i)^2 \quad (10)$$

em que \hat{p}_{ij} é a predição de proporção de vitórias do jogador i sobre o jogador j , p_{ij} é o resultado observado na partida entre os jogadores, ρ é um escalar que possui um papel auxiliar na resolução do problema, a_i é a média de ratings dos adversários do jogador i (11) ponderada por ω_{ij} que, por sua vez, corresponde a um valor de ponderação do momento que a partida ocorreu (12).

$$a_i = \frac{\sum_{k \in N_i} \omega_{ik} R_k}{\sum_{k \in N_i} \omega_{ik}}, \quad (11)$$

N_i é o conjunto de adversários do jogador i .

$$\omega_{ij} = \left(\frac{1 + t - t_{min}}{1 + t_{max} - t_{min}} \right)^2 \quad (12)$$

em que t_{min} e t_{max} são respectivamente, os índices referentes a partida mais antiga e a mais recente no banco de dados avaliado e t é o índice da partida em análise. Desta maneira, Sismanis propôs, em seu modelo, uma forma de lidar com a hipótese de que existe influência do tempo em que a partida ocorreu na estimativa dos ratings do jogadores.

O sistema ELO++ utiliza do conceito de validação cruzada que, basicamente, consiste em utilizar um conjunto de dados, para a estimação dos parâmetros do modelo (dados de treinamento ou *training set*) e um conjunto de dados (dados de validação ou *testing set*) empregados na validação do modelo (KOHAVI, 1995). A etapa de "treinamento", então, corresponde em encontrar os valores de R_i que minimizem a função perda (10) que implica em otimizar os valores de h e do parâmetro ρ .

O autor utilizou, como forma de minimizar a função perda, a técnica iterativa de aprendizado de máquina conhecida como "*Stochastic Gradient Descent*", com a qual os ratings são atualizados a cada iteração por meio das seguintes fórmulas:

$$R_i \leftarrow R_i - \eta \left[\omega_{ij} (\hat{p}_{ij} - p_{ij})^2 + \frac{\rho}{|N_i|} (R_i - a_i) \right] \quad (13)$$

e

$$R_j \leftarrow R_j - \eta \left[\omega_{ij} (\hat{p}_{ij} - p_{ij})^2 + \frac{\rho}{|N_j|} (R_j - a_j) \right] \quad (14)$$

em que $|N_i|, |N_j|$ correspondem às quantidade de adversários do jogador i e j , respectivamente e η é a taxa de aprendizado definida pelo autor após testes extensivos de simulação, como:

$$\eta = \left(\frac{6}{p + 5} \right)^{0,602} \quad (15)$$

p é o número da iteração corrente.

Este modelo apresentou convergência em 50 iterações, e apresentou re-

sultados de previsão 6,6% mais preciso do que o sistema ELO, demonstrando um potencial no estudo da melhoria do sistema de ratings utilizado pela FIDE. No entanto, é considerado um sistema, relativamente, complexo envolvendo técnicas de aprendizado de máquina que, ao invés de se basear em uma justificativa estatística, tem um foco mais algorítmico, utilizando representações de modelos mais flexíveis por heurísticas para a realização da busca de estimativas de mínimo risco. Mais detalhes sobre o sistema ELO++ e sua metodologia estão em Kaggle (2014a, 2014b) e Sismanis (2010).

2.2 O modelo de Bradley-Terry

Na década de 50 os pesquisadores Ralph Allan Bradley (1923 - 2001) e Milton E. Terry publicaram três artigos cujo foco era um modelo de comparação pareada. Este modelo recebeu considerável atenção na literatura e inúmeras aplicações e propostas de modificações foram discutidas (BRADLEY, 1954, 1955, 1965; BRADLEY; TERRY, 1952; DAVIDSON, 1969; DAVISON; SOLOMON, 1973; GLICKMAN, 1993, 2001; GLICKMAN; JONES, 1999).

Pode-se ver este modelo como uma competição onde se supõe que p competidores estão envolvidos em uma competição direta dois a dois. E é assumindo que cada jogador i tem um parâmetro π_i associado. Este parâmetro pode ser interpretado como a capacidade relativa ou força relativa de cada jogador. É convencional interpretar π_i como “mérito” do i -th jogador que está sendo avaliado. Além disso, $\pi_i \geq 0$ e $\sum_{i=1}^p \pi_i = 1$.

O modelo de Bradley-Terry postula que, quando há competição entre dois jogadores (i e j), obtém-se as variáveis X_i e X_j que são os chamados escores (variáveis latentes), então o modelo Bradley-Terry permite calcular a probabilidade de $X_i > X_j$, que pode ser interpretado como a probabilidade do jogador i vencer o jogador j , descrita pela equação 16:

$$\pi_{ij} = P(X_i > X_j) = P(i \text{ vencer } j) = \frac{\pi_i}{\pi_i + \pi_j}. \quad (16)$$

Esse modelo é aplicado somente em comparações dois a dois que não admitam empates.

Uma derivação do modelo dado em 16 pode ser obtido, assumindo-se que quando o jogador i está em competição, ele produz um escore X_i independente do jogador oposto, com função de distribuição acumulada Gumbel (17) com parâmetro de posição $\alpha = \ln(\pi_i)$ e de escala $\beta = 1$.

$$F_{X_i}(x) = e^{-e^{-(x-\ln\pi_i)}} \quad (17)$$

Verifica-se que tal variável apresente a função geradora de momentos ($M_{X_i}(t)$), dada por (18).

$$M_{X_i}(t) = e^{\ln\pi_i t} \Gamma(1 - t). \quad (18)$$

Como a função geradora de momentos de uma soma de variáveis aleatórias independentes pode ser obtida pelo produto das funções geradoras de momentos de cada componente da soma. A variável $Z_{ij} = X_i - X_j$ (equivalente a $Z_{ij} = X_i + (-X_j)$), pode ser obtida por meio da expressão (19).

$$M_{Z_{ij}}(t) = M_{X_i}(t)M_{X_j}(-t) \quad (19)$$

$M_{-X_j}(t) = M_{X_j}(-t)$, em razão da propriedade que garante que $M_{aX+b}(t) = e^{bt}M_X(at)$, para a e b constantes (CASELLA; BERGER, 2010).

Logo:

$$M_{Z_{ij}}(t) = e^{\ln\pi_i t} \Gamma(1 - t) e^{-\ln\pi_j t} \Gamma(1 + t) \quad (20)$$

$$M_{Z_{ij}}(t) = e^{(\ln\pi_i - \ln\pi_j)t} \Gamma(1 - t) \Gamma(1 + t) \quad (21)$$

O resultado encontrado em (21) equivale à função geradora de momentos de uma variável aleatória logística com parâmetro local $\alpha = \ln\pi_i - \ln\pi_j$ e $\beta = 1$ de acordo com o teorema da unicidade, se duas variáveis têm a mesma função geradora de momentos, também, tem a mesma função de distribuição (MAGALHÃES, 2006).

$$F_{Z_{ij}}(z) = P(Z_{ij} \leq z) = \frac{1}{1 + e^{-(z - \ln\pi_i + \ln\pi_j)}} \quad (22)$$

Quando $z = 0$, tem-se

$$P(X_i - X_j > 0) = P(X_i > X_j) = 1 - \frac{1}{1 + e^{-(-\ln\pi_i + \ln\pi_j)}} = \frac{\pi_i}{\pi_i + \pi_j} \quad (23)$$

Uma interpretação de $X_i > X_j$ indica a preferência (vitória) do jogador i sobre o jogador j , ou seja, a probabilidade da preferência do jogador i sobre o jogador j é maior que 0.

No intuito de simplificar o modelo é feita uma reparametrização de forma que $\ln \pi_i = \gamma_i$. Logo:

$$P(i \text{ vencer } j) = 1 - \frac{1}{1 + e^{(\gamma_i - \gamma_j)}} = \frac{1}{1 + e^{\gamma_j - \gamma_i}}, \quad (24)$$

em que γ_i é chamado de rating do jogador i , o mesmo vale para o jogador j .

Na análise de dados emparelhados com o modelo (24), supõe-se que o jogador " i " competiu contra o jogador " j " ($j \neq i$). Os resultados possíveis desse jogo são: $y_{ij} = 0$ (vitória de " j "), $y_{ij} = 0,5$ (empate) e $y_{ij} = 1$ (vitória de " i "), considerando que o jogador i é sempre o que iniciou a partida, ou seja, jogou com peças brancas.

A verossimilhança de um resultado y_{ij} para o modelo de Bradley-Terry e seus derivados é, alternativamente, dada pela expressão (25). Ou seja, os autores consideram, inicialmente, que modelos com escolha completa (vitória ou derrota), equivalem a modelos Bernoulli para cada partida. Posteriormente, considera-se adaptar o modelo, para esportes que tem como resultados vitória, derrota ou empate, usando $1/2$ diretamente como resultado para o empate (Bernoulli modificado) ou modelos multidimensionais (DAVIDSON, 1969).

$$p(y_{ij} | \pi_{ij}) \propto \pi_{ij}^{y_{ij}} (1 - \pi_{ij})^{(1 - y_{ij})}. \quad (25)$$

O logaritmo da verossimilhança, obtido a partir do modelo (25), para uma amostra de n observações, é dado por:

$$l(\pi_{ij}; \mathbf{y}) \propto \sum_{k=1}^n [y_k \ln(\pi_{ijk}) + (1 - y_k) \ln(1 - \pi_{ijk})]. \quad (26)$$

É importante mencionar que, embora o modelo Bradley-Terry não trate, diretamente, o empate, ele adota que este resultado consiste em 0,5 vitória e 0,5 derrota (um acréscimo nos dois resultados).

2.3 O modelo de Davidson

O modelo de Davidson pode ser considerado uma extensão do modelo de Bradley-Terry (DAVIDSON, 1969) discutido anteriormente. Porém, esse modelo é capaz de discriminar as probabilidades de ocorrer empate ($\pi_{ij,0}$), bem como de vitória e ou de derrota do jogador i sobre o jogador j , respectivamente, dadas por (π_{ij}) e (π_{ji}). Desta maneira, tais probabilidades são definidas por:

O modelo estabelece que :

$$\begin{aligned}\pi_{ij} &= P(i \text{ vencer } j) = \frac{\pi_i}{\pi_i + \pi_j + \nu\sqrt{\pi_i\pi_j}} \\ \pi_{ji} &= P(j \text{ vencer } i) = \frac{\pi_j}{\pi_i + \pi_j + \nu\sqrt{\pi_i\pi_j}} \\ \pi_{ij,0} &= P(i \text{ empatar com } j) = \frac{\nu\sqrt{\pi_i\pi_j}}{\pi_i + \pi_j + \nu\sqrt{\pi_i\pi_j}}\end{aligned}\quad (27)$$

em que o $\nu \geq 0$ é um parâmetro relacionado à tendência de ocorrer empate na partida entre os jogadores i e j .

A extensão do modelo de Bradley-Terry, proposta por Davidson, assume satisfazer os axioma da escolha de Luce (LUCE, 1959). Este axioma parte do pressuposto de que a frequência relativa de opções por i sobre j não deve mudar, ao se alterar disponibilidade de escolhas, ou seja, a frequência de opções por i sobre j não irá mudar caso outra opção de escolha passe a estar disponível. Dessa forma, a razão das probabilidades de escolha das alternativas permaneceria inalterada com a introdução de mais alternativas.

Uma consequência direta desse axioma é que, se π_{ij} indica a probabilidade de que o jogador i vença o jogador j e π_{ji} indica a probabilidade do jogador j vencer o jogador i , então tem-se que:

$$\frac{\pi_{ij}}{\pi_{ji}} = \frac{\pi_i}{\pi_j}, \quad (28)$$

onde pode-se interpretar π_i como mérito do jogador i e π_j mérito jogador j , a exemplo do que foi dito sobre os parâmetros do modelo de Bradley-Terry na seção 2.2.

Contudo, o modelo de Davidson requer uma condição adicional relacionada a probabilidade do empate $\pi_{ij,0}$. A condição é que a probabilidade do empate $\pi_{ij,0}$ seja proporcional a média geométrica das probabilidades de preferências (vitórias e derrotas) dos tratamentos comparados (Equação 29):

$$\pi_{ij,0} = \nu \sqrt{\pi_{ij} \pi_{ji}}, \quad (29)$$

onde ν não depende de i e j .

Com base na equação (30) tem-se que a força relativa do empate é dada por $\pi_0 = \nu \sqrt{\pi_i \pi_j}$, já que:

$$\begin{aligned} \frac{\pi_{ij,0}}{\pi_{ij}} &= \frac{\pi_0}{\pi_i}, \\ \frac{\pi_i \nu \sqrt{\pi_{ij} \pi_{ji}}}{\pi_{ij}} &= \pi_0, \\ \frac{\pi_i \nu \sqrt{\pi_{ji} \pi_{ji} \frac{\pi_i}{\pi_j}}}{\pi_{ij}} &= \pi_0, \\ \frac{\pi_{ji}}{\pi_{ij}} \pi_i \nu \sqrt{\frac{\pi_i}{\pi_j}} &= \pi_0, \\ \frac{\pi_j}{\pi_i} \pi_i \nu \sqrt{\frac{\pi_i}{\pi_j}} &= \pi_0 \end{aligned}$$

Logo:

$$\pi_0 = \nu \sqrt{\pi_i \pi_j} \quad (30)$$

O uso da média geométrica é sugerido, pois no modelo Bradley-Terry a força relativa dos jogadores pode ser representada por valores $\ln \pi_i, \dots, \ln \pi_t$, na escala linear.

Por exemplo:

$$e^{\frac{\ln(\pi_i) + \ln(\pi_j)}{2}} = e^{\frac{\ln(\pi_i \pi_j)}{2}} = e^{\ln(\pi_i \pi_j)^{\frac{1}{2}}} = \sqrt{\pi_i \pi_j} \quad (31)$$

O modelo de Davidson é, então, obtido imediatamente, baseado na relação entre (28) e (30) sob a restrição $\pi_{ij} + \pi_{ji} + \pi_{ij,0} = 1$.

A exemplo do que foi estabelecido no modelo de Bradley-Terry, uma parametrização pode ser feita de maneira a tornar as equações, matematicamente, tratáveis (AGRESTI, 2002; GLICKMAN, 2001). Assim fazendo $\pi_i = e^{\gamma_i}$, $\pi_j = e^{\gamma_j}$ e $\nu = e^\lambda$, tem-se:

$$\begin{aligned}\pi_{ij} &= Pr(i \text{ vence } j) = \frac{e^{\gamma_i}}{e^{\gamma_i} + e^{\gamma_j} + e^{\lambda + \frac{(\gamma_i + \gamma_j)}{2}}} \\ \pi_{ij,0} &= Pr(i \text{ empata com } j) = \frac{e^{\lambda + \frac{(\gamma_i + \gamma_j)}{2}}}{e^{\gamma_i} + e^{\gamma_j} + e^{\lambda + \frac{(\gamma_i + \gamma_j)}{2}}} \\ \pi_{ji} &= Pr(j \text{ vence } i) = \frac{e^{\gamma_j}}{e^{\gamma_i} + e^{\gamma_j} + e^{\lambda + \frac{(\gamma_i + \gamma_j)}{2}}}\end{aligned}\quad (32)$$

em que o λ é um índice discriminante, o qual indica probabilidade crescente para ocorrência de empate quando os valores são positivos.

A verossimilhança é obtida pelo produtório das probabilidades correspondentes aos n resultados, efetivamente, observados.

$$L(\pi; \mathbf{y}) \propto \prod_{k=1}^n \pi_{ijk}^{I_{\{y_k=1\}}} \pi_{ij0k}^{I_{\{y_k=0,5\}}} \pi_{jik}^{I_{\{y_k=0\}}}, \quad (33)$$

cujo logaritmo é dado por:

$$l(\pi; \mathbf{y}) \propto \sum_{k=1}^n [I_{\{y_k=1\}} \ln(\pi_{ijk}) + I_{\{y_k=0,5\}} \ln(\pi_{ij0k}) + I_{\{y_k=0\}} \ln(\pi_{jik})] \quad (34)$$

em que $I_{\{\cdot\}}$ representa a função indicadora do resultado.

2.4 Versões Bayesianas dos modelos de rating

Uma fragilidade nos delineamentos de comparação emparelhada está na dificuldade de incorporar informações adicionais ao parâmetro do modelo, os quais podem ser particularmente relevantes para o delineamento do torneio dos jogadores e jogos em diversos esportes. Uma forma de lidar com essa situação é o uso da inferência Bayesiana. Diversas formulações Bayesianas do modelo Bradley-Terry e seus derivados têm sido sugeridas na literatura (CARON; DOUCET, 2012; DAVISON; SOLOMON, 1973; GLICKMAN, 1993, 2007; GLICKMAN; JENSEN, 2005; LEONARD, 1977).

A inferência bayesiana procura combinar toda a informação sobre os parâmetros do modelo amostral antes da amostra ser observada. A informação resultante é resumida na distribuição a posteriori conjunta dos parâmetros. Esta é a distribuição que se procura obter para realizar a inferência em distribuições marginais dos parâmetros de interesse (O'HAGAN, 1994).

Como exemplo, considere uma quantidade de interesse desconhecida θ (o parâmetro de interesse). A informação de que se dispõe sobre θ resumida, probabilisticamente, por meio de $p(\theta)$, pode ser combinada à da observação de uma quantidade aleatória Y relacionada com θ . A distribuição $p(y|\theta)$ define essa relação. A ideia de que após observar $Y = y$ a quantidade de informação sobre θ aumenta é bastante intuitiva e o teorema de Bayes (35) é a regra de atualização utilizada para quantificar este aumento de informação (EHLERS, 2011).

$$p(\theta|y) = \frac{p(\theta,y)}{p(y)} = \frac{p(y|\theta)p(\theta)}{p(y)} = \frac{p(y|\theta)p(\theta)}{p(y)} \quad (35)$$

$p(y)$, não depende de θ , funcionando como uma constante normalizadora de $p(\theta|y)$.

Para um valor fixo de y , a função $p(y|\theta) = L(\theta; y)$ fornece a verossimilhança de cada um dos possíveis valores de θ enquanto $p(\theta)$ é chamado de *a priori* de θ . Estas duas fontes de informações, a priori e verossimilhança, são combinadas levando à distribuição *a posteriori* de θ , $p(\theta|y)$.

Logo, $p(\theta|y)$ pode ser descrita como:

$$p(\theta|y) \propto L(\theta; y)p(\theta) \quad (36)$$

Assim, a distribuição *a posteriori* é proporcional ao produto da verossimilhança e a distribuição *a priori*. Em resumo, pode-se escrever a relação simbólica.

$$\text{Posteriori} \propto \text{Verossimilhança} \times \text{Priori}.$$

Uma formulação Bayesiana do modelo de Bradley-Terry foi proposta por Glickman (1993), ao estabelecer que dados os resultados \mathbf{y} , os ratings dos competidores $\gamma = (\gamma_1, \dots, \gamma_m)$ assumem uma distribuição *a priori* normal multivariada. O processo Bayesiana se dá pela análise da *a posteriori* (37).

$$f(\gamma|\mathbf{y}) \propto f(\gamma)L(\gamma; \mathbf{y}), \quad (37)$$

Na inferência Bayesiana, a ideia é inferir sobre os parâmetros, no caso γ . Pela distribuição *a posteriori* conjunta, a distribuição marginal de cada γ_i pode ser obtida para orientar essas inferências. A distribuição marginal para cada um determinado γ_i é dada por:

$$f(\gamma_i|\mathbf{y}) = \int \dots \int f(\gamma_i, \gamma_{-i}|\mathbf{y}) d\gamma_{-i}, \quad (38)$$

em que γ_{-i} corresponde ao conjunto complementar de γ_i .

A inferência exata somente será feita calculando-se as integrais dadas em (38), analiticamente, o que é, em muitos casos, um trabalho penoso ou até impraticável. Técnicas de otimização e métodos de aproximação numérica são, portanto, sugeridas para lidar com esse problema, sendo bastante utilizados os métodos de simulação estocástica Monte Carlo via cadeias de Markov (MCMC) em que se destacam os algoritmos Metropolis-Hastings (MH) e o amostrador de Gibbs. Mais detalhes sobre os algoritmos (e justificativas teóricas para seu uso) podem ser encontradas em Gamerman e Lopes (1997).

2.4.1 Verossimilhança ponderada na inferência Bayesiana

Para cada valor do parâmetro (escalar ou vetor), a verossimilhança é uma medida de compatibilidade com a amostra observada, sendo assim, é um instrumento para avaliar as evidências contidas nos dados. A presença de valores anômalos pode ocasionar em um comprometimento na informação resumida pela função

de verossimilhança. De fato para a inferência Bayesiana, esse problema pode alterar, seriamente, a distribuição *a posteriori* podendo prejudicar a confiabilidade das estimativas (AGOSTINELLI; GRECO, 2012; EHLERS, 2011).

De acordo com Glikman (1993), o modelo Bayesiano, em sua forma convencional (seção 2.4), sem os devidos ajustes, não é apropriado para comparações emparelhadas em que as habilidades dos jogadores podem mudar ao longo do tempo. Desta maneira, ele propôs em suas análises o uso de modelos dinâmicos Bayesianos, com o intuito de poder lidar com a influência do tempo em que a partida foi jogada, no rating estimado do jogador. Assim, seus modelos têm parâmetros variando ao longo do tempo, segundo uma regra que liga as estimativas presentes às estimativas passadas, dessa forma, a cada instante de tempo, informações existentes são descritas pelas distribuições *a posteriori* e utilizadas para atualização das estimativas em um próximo instante.

Outras propostas de lidar com a influência do tempo, nos modelos de rating, surgiram, na literatura, como por exemplo, o modelo ELO++ (SISMANIS, 2010) apresentado na seção 2.1.1. Uma outra estratégia, para lidar com situações dessa natureza é a proposta neste trabalho. Baseia-se na ideia de ponderar a verossimilhança na fórmula de Bayes, conforme o momento em que foi jogada.

A verossimilhança ponderada é caracterizada pela introdução de um conjunto de pesos ω que se destinam a diminuir a relevância de partidas consideradas antigas em relação a partidas atuais. Dessa forma, seja $\mathbf{y} = (y_1, \dots, y_m)$ uma amostra de tamanho m i.i.d cujas variáveis aleatórias apresentem função de probabilidade, $p(y_{ij}|\theta)$. A função de distribuição ponderada pode ser definida como:

$$L^\omega(\theta; \mathbf{y}) = \prod_{i=1}^m p(y_i|\theta)^{\omega(y_i)} \quad (39)$$

Sob o modelo assumido, a verossimilhança ponderada compartilha as principais características (assintóticas) da função de verossimilhança convencional, sendo, portanto, válida para inferência Bayesiana. Uma vez que se assumiu uma distribuição *a priori*, mediante a aplicação do teorema de Bayes, o uso da verossimilhança ponderada permite obter uma distribuição *a posterior* adequada, sem contrapor nenhuma lei probabilística (AGOSTINELLI; GRECO, 2012; HU; ZI-

DEK, 2002; SHIMODAIRA, 2000).

2.5 Seleção de modelos

Se uma boa estimativa para o logaritmo da verossimilhança esperada puder ser obtida por meio dos dados observados, ela poderá ser utilizada como um critério para comparar modelos. Um modo de comparar n modelos, $f_1(y|\theta_1), \dots, f_n(y|\theta_n)$, é comparar as magnitudes da função suporte maximizada, $\ln L(\hat{\theta}_i; y)$. Mas, tal método não fornece uma verdadeira comparação, haja vista que, em não conhecendo o verdadeiro modelo $f(y)$, primeiramente, o método da máxima verossimilhança estima os parâmetros θ_i de cada modelo $f_i(y)$, $i = 1, 2, \dots, n$, e, posteriormente são utilizados os mesmos dados para estimar $E[\ln(f(y|\hat{\theta}))]$, Isto introduz um viés em $L(\hat{\theta}_i; y)$, sendo que, a magnitude deste viés varia de acordo com a dimensão do vetor de parâmetros (EMILIANO et al., 2010).

Deste modo, os critérios de informação são construídos para avaliar e corrigir os viés (b) da função suporte. Um critério de informação tem a forma que se segue:

$$CI(Y_n, b) = -2 \sum_{i=1}^n \ln L(\hat{\theta}; Y_i) + 2(b), \quad (40)$$

Akaike (1974), mostrou que o viés é dado, assintoticamente por p , em que p é o número de parâmetros a serem estimados no modelo e definiu seu critério de informação como:

$$AIC = -2 \ln L_{Max}(\hat{\theta}; \mathbf{y}) + 2(p), \quad (41)$$

em que $\ln L_{Max}(\hat{\theta}; \mathbf{y})$ é o logaritmo do valor maximizado da função de verossimilhança e p é o número de parâmetros a serem estimados no modelo.

Ao simular amostras da distribuição *a posteriori* conjunta, é possível se obter a amostra $l = (\ln L_1(\hat{\theta}; y), \dots, \ln L_k(\hat{\theta}; y))$ por meio do algoritmo MCMC. Uma aproximação numérica AIC chamada de AICM (critério de Akaike via Monte Carlo) utiliza apenas os logaritmos da verossimilhança da simulação da *posteriori* e pode ser empregada para os mesmos fins (RAFTERY; NEWTON, 2007).

$$AICM = -2\bar{l} + 2\sigma_l^2, \quad (42)$$

em que \bar{l} e σ_l^2 são, respectivamente, a média e a variância da amostra l . Então, elege-se como o melhor modelo aquele que apresente o menor valor de AIC ou AICM.

A literatura apresenta diversos outros critérios e metodologias podem, também, serem utilizados, para a seleção de modelos, como, por exemplo a comparação direta de \bar{l} para cada modelo, o fator de Bayes, o critério Bayesiano.

Um outro método de verificação da qualidade de previsões, para eventos tricotômicos bastante difundidos, é a medida de DeFinetti que consiste no cálculo da média aritmética das distâncias de DeFinetti.

As distâncias de DeFinetti correspondem às distâncias euclidianas quadráticas entre o ponto correspondente à distribuição de probabilidade prevista e o ponto correspondente ao resultado, efetivamente, observado de várias previsões dentro de um banco de dados, conforme a tabela 2.

Tabela 2 Distância de DeFinetti associada às respectivas de probabilidades de vitória do jogador de brancas, empate e vitória do jogador de pretas

Vitória do jogador de brancas	$(\pi_{ij} - 1)^2 + (\pi_{ij0} - 0)^2 + (\pi_{ji} - 0)^2$
Empate	$(\pi_{ij} - 0)^2 + (\pi_{ij0} - 1)^2 + (\pi_{ji} - 0)^2$
Vitória do jogador de pretas	$(\pi_{ij} - 0)^2 + (\pi_{ij0} - 0)^2 + (\pi_{ji} - 1)^2$

A medida de DeFinetti, ao tratar de modelos dicotômicos, como o modelo de Bradley-Terry, fica reduzida à média aritmética dos desvios quadráticos entre a probabilidade prevista e o resultado, efetivamente, observado de várias previsões. Mais detalhes, sobre a medida de DeFinetti, como propriedades e aplicações, podem ser obtidos em Arruda (2000) e DeFinetti (1972).

3 MATERIAL E MÉTODOS

Para o processo de inferência dos parâmetros e verificação da capacidade descritiva dos modelos, a princípio, foi utilizado um banco de dados, que contém 28042 partidas oficiais, jogadas por enxadristas de elite (ratings ELO variando entre 2500 pontos até 2843 pontos), no período de janeiro de 2010 até novembro de 2012. Dentre essas partidas foram selecionadas somente aquelas que foram jogadas por um grupo de 46 enxadristas, escolhidos para análise, (pertencentes ao grupo dos 100 melhores jogadores do mundo conforme o rating FIDE emitido em dezembro de 2012), resultando, assim, em um banco de dados, composto por 6807 partidas, aqui chamado de *Training set*.

A análise, sobre a capacidade de predição dos modelos, foi feita nos resultados referentes a um segundo banco de dados, composto por 2201 partidas dos principais torneios jogados no período de janeiro a agosto de 2013 (Grand Prix, Torneio de candidatos, Copa do mundo e outros).

Essa análise foi feita por duas metodologias, onde:

- I) A primeira é a análise somente de partidas em que todos os jogadores tiveram o rating estimado pelos modelos discutidos nesse trabalho, resultando, assim, em um total de 411 partidas, envolvendo 36 jogadores (*Testing set A*).
- II) A segunda é analisar as partidas em que, pelo menos, um dos jogadores teve o rating estimado, isso acarreta em um banco de dados, composto por 732 partidas (*Testing set B*), envolvendo 88 jogadores, sendo 37 com ratings estimados neste trabalho de tese e 51 usando o rating corrente (ELO).

A tabela 3 apresentam-se, em resumo, as informações referentes aos bancos de dados *Training set* e *Testing set A e B*. Nos Bancos de dados, além dos resultados das partidas, temos as datas em que ocorreram e os ratings de cada jogador.

Na tabela 4 encontram-se os nomes, países de origem e ratings FIDE (de dezembro de 2012) de todos os jogadores analisados em cada conjunto de dados.

Tabela 3 Conjuntos de dados utilizados para inferência de parâmetros (*Training set*) e de predição de resultados (*Testing set A e B*), e os respectivos períodos em que ocorreram as partidas, assim como as quantidades de jogos, a quantidade de resultados (vitória (V), empate(E) e derrota (D) das brancas) e o número de jogadores com ratings estimados pelos modelos propostos , em cada conjunto de dados

Banco de dados	Período	Nºde Partidas	Nºjogadores.
<i>Training set</i>	01/2010-11/2012	6807	$D = 1185$
			$E = 3658$
			$V = 1964$
<i>Testing set A</i>	01/2013-08/2013	411	$D = 62$
			$E = 235$
			$V = 114$
<i>Testing set B</i>	01/2013-08/2013	732	$D = 154$
			$E = 344$
			$V = 234$

Tabela 4 Jogadores analisados (nome, país e seus respectivos ratings FIDE (ELO) referente a dezembro de 2012). $Trai.s.=Training\ set$, $Tes.s.A = Testing\ set\ A$ e $Tes.s.B=Testing\ set\ B$.

	Nome	País	Rating	Trai.s.	Tes.s.A	Tes.s.B	Nome	País	Rating	Trai.s.	Tes.s.A	Tes.s.B
1	Carlsen, Magnus	NOR	2848	x	x	x	49	Almasi, Zoltan	HUN	2689		
2	Aronian, Levon	ARM	2815	x	x	x	50	Grachev, Boris	RUS	2688	x	x
3	Kramnik, Vladimir	RUS	2795	x	x	x	51	Movsesian, Sergei	ARM	2688		x
4	Radjabov, Teimour	AZE	2793	x	x	x	52	Rublevsky, Sergei	RUS	2688		x
5	Caruana, Fabiano	ITA	2782	x	x	x	53	Eljanov, Pavel	UKR	2687	x	
6	Axand, Viswanathan	IND	2775	x	x	x	54	Sjo, Wesley	PHI	2682	x	
7	Karjakin, Sergey	RUS	2775	x	x	x	55	Bologan, Viktor	MDA	2681		x
8	Topalov, Veselin	BUL	2771	x	x	x	56	Fridman, Daniel	GER	2667		x
9	Ivanchuk, Vassily	UKR	2766	x	x	x	57	Sugisstan, Gabriele	ARM	2666		x
10	Grischuk, Alexander	RUS	2764	x	x	x	58	Poikin, Vladimir	RUS	2665		x
11	Mamedyarov, Shakhriyar	AZE	2764	x	x	x	59	Granda Zuniga, Julio E	PER	2664		x
12	Kamsky, Gata	USA	2762	x	x	x	60	Georgiev, Kiril	BUL	2660		x
13	Nakamura, Hikaru	USA	2760	x	x	x	61	Onischuk, Alexander	USA	2660		x
14	Gelfand, Boris	ISR	2751	x	x	x	62	Safari, Eltaj	AZE	2660		x
15	Morozevich, Alexander	RUS	2748	x	x	x	63	Khenkin, Igor	GER	2659		x
16	Svidler, Peter	RUS	2747	x	x	x	64	Khairullin, Ildar	RUS	2658		x
17	Jakovenko, Dmitry	RUS	2741	x	x	x	65	Khismatullin, Denis	RUS	2658		x
18	Wang, Hao	CHN	2737	x	x	x	66	Zvjaginsev, Vadim	RUS	2658		x
19	Wojtaszek, Radoslaw	POL	2734	x	x	x	67	Kumosov, Igor	RUS	2657		x
20	Dominguez Perez, Leinier	CUB	2734	x	x	x	68	Dreev, Aleksey	RUS	2654		x
21	Leko, Peter	HUN	2732	x	x	x	69	Kobalia, Mikhail	RUS	2652		x
22	Ponomarev, Ruslan	UKR	2732	x	x	x	70	Smirin, Ilya	ISR	2652		x
23	Tomashhevsky, Evgeny	RUS	2725	x	x	x	71	Tkachev, Vladislav	FRA	2649		x
24	Andreikin, Dmitry	RUS	2723	x	x	x	72	Dubov, Daniil	RUS	2638		x
25	Areshchenko, Alexander	UKR	2720	x	x	x	73	Mamedov, Rauf	AZE	2637		x
26	Giri, Anish	NED	2720	x	x	x	74	Najer, Evgeniy	RUS	2633		x
27	Vachier-Lagrave, Maxime	FRA	2711	x	x	x	75	Popov, Ivan	RUS	2632		x
28	Adams, Michael	ENG	2710	x	x	x	76	Guseinov, Gadir	AZE	2631		x
29	Navara, David	CZE	2710	x	x	x	77	Nguyen, Ngoc Truong Son	VIE	2625		x
30	Moiseenko, Alexander	UKR	2710	x	x	x	78	Meier, Georg	GER	2610		x
31	Malakhov, Vladimir	RUS	2709	x			79	Ponkratov, Pavel	RUS	2605		x
32	Cheparinov, Ivan	BUL	2709	x			80	Mecking, Henrique	BRA	2604		x
33	Shirov, Alexei	LAT	2708	x			81	Rakhmanov, Aleksandr	RUS	2602		x
34	Naiditsch, Arkadij	GER	2708	x			82	Frolyanov, Dmitry	RUS	2570		x
35	Nepomniachtchi, Ian	RUS	2707	x			83	Ghaem Maghami, Elsan	IRI	2554		x
36	Le, Quang Liem	VIE	2705	x	x	x	84	Vasquez Schroeder, Rodrigo	CHI	2542		x
37	Riazantsev, Alexander	ARM	2704	x	x	x	85	Salem, A. R. Saleh	UAE	2531		x
38	Akopian, Vladimir	ARM	2704	x	x	x	86	Artemiev, Vladislav	RUS	2524		x
39	Bacrot, Etienne	FRA	2703	x	x	x	87	Gundava, Bayarsaikhan	MGL	2516		x
40	Ding, Liren	CHN	2702	x	x	x	88	Pridorzhni, Aleksei	RUS	2512		x
41	Karjabov, Anton	UKR	2702	x	x	x	89	Rodriguez Vilar, Andres	URU	2508		x
42	Fressinet, Laurent	UKR	2700	x			90	Al-Sayed, Mohammed	QAT	2507		x
43	Kasimdzhanov, Rustam	FRA	2700	x			91	Gordievsky, Dmitry	RUS	2474		x
44	Wang, Yue	CHN	2696	x			92	Podapov, Pavel	RUS	2460		x
45	Valljo Pons, Francisco	ESP	2694	x	x	x	93	Cherniaev, Alexander	RUS	2447		x
46	Vitugov, Nikita	RUS	2694	x	x	x	94	Nadimian, Ashot	ARM	2428		x
47	Markov, Ernesto	RUS	2693	x			95	Pashev, Rakhim	RUS	2384		x
48	Alekseev, Evgeny	RUS	2691	x			96	Sbirniev, Aleksandr	RUS	2239		x

A descrição completa dos jogadores (dados dos jogadores, todas partidas completas etc.) pode ser encontrada em Chessbase (2014b), Chessgames (2014), Chessresults (2014) e FIDE (2014a).

3.1 Formulação Bayesiana dos modelos

Existe uma estreita relação entre os ratings obtidos pelo sistema ELO e os obtidos pelo modelo de Bradley-Terry e Davidson (seção 2). O parâmetro γ_i se relaciona com o rating ELO (R_i) por:

$$R_i = \frac{400}{\ln 10} \gamma_i. \quad (43)$$

Assim, é possível reconhecer que o cálculo do escore ELO (E_{ij}) é análogo ao cálculo de probabilidade Bradley-Terry (π_{ij}), ou seja, $E_{ij} = P(i \text{ vencer } j)$. Logo, o modelo de Bradley-Terry foi escrito, em função dos ratings ELO (44), mantendo, assim, os ratings na escala original FIDE.

$$P(i \text{ vencer } j) = \frac{1}{1 + 10^{\frac{R_j - R_i}{400}}}. \quad (44)$$

Os modelos adotados (Bradley-Terry e Davidson) sofreram modificações no preditor linear de forma ser possível comparar modelos que levam em conta parâmetros que contemplem a vantagem das peças brancas δ em relação a modelos que não considerem este parâmetro. Desta forma foi estabelecido o modelo com vantagem de jogar de brancas (45).

$$\pi_{ij} = P(i \text{ vencer } j) = \frac{1}{1 + 10^{\frac{(R_j - R_i - \delta)}{400}}}. \quad (45)$$

No caso de cada jogador ser influenciado de forma diferente por jogar de brancas, o modelo fica dado por:

$$\pi_{ij} = P(i \text{ vencer } j) = \frac{1}{1 + 10^{\frac{(-R_i + R_j - \delta_i + \delta_j)}{400}}}, \quad (46)$$

δ_i e δ_j são a metade da vantagem de jogar de brancas para os jogadores i e j ,

respectivamente.

Por conveniência, diferente do que foi feito nos modelos derivados do modelo de Bradley-Terry, os modelos derivados do modelo de Davidson não foram reescalados, para lidar com ratings na escala ELO e, sim, os ratings trabalhados por esses modelos que foram modificados, de acordo com a equação (43), de maneira a ficar em conformidade com a escala de valores já utilizados pelo modelo de Davidson.

De forma análoga, incluindo uma constante geral δ associada à vantagem de jogar de brancas, no modelo de Davidson, tem-se.

$$\begin{aligned}\pi_{ij} &= P(i \text{ vencer } j) = \frac{e^{\gamma_i + \delta}}{e^{\gamma_j} + e^{\gamma_i + \delta} + e^{\lambda + \frac{\gamma_i + \gamma_j + \delta}{2}}}, \\ \pi_{ij0} &= Pr(i \text{ empatar } j) = \frac{e^{\lambda + \frac{\gamma_i + \gamma_j + \delta}{2}}}{e^{\gamma_j} + e^{\gamma_i + \delta} + e^{\lambda + \frac{\gamma_i + \gamma_j + \delta}{2}}}, \\ \pi_{ji} &= P(j \text{ vencer } i) = \frac{e^{\gamma_j}}{e^{\gamma_j} + e^{\gamma_i + \delta} + e^{\lambda + \frac{\gamma_i + \gamma_j + \delta}{2}}}.\end{aligned}\tag{47}$$

No caso de cada jogador ser influenciado de forma diferente por jogar de brancas, tem-se:

$$\begin{aligned}\pi_{ij} &= P(i \text{ vencer } j) = \frac{e^{\gamma_i + \delta_i}}{e^{\gamma_j - \delta_j} + e^{\gamma_i + \delta_i} + e^{\lambda + \frac{\gamma_i + \delta_i + \gamma_j - \delta_j}{2}}}, \\ \pi_{ij0} &= P(i \text{ empatar } j) = \frac{e^{\lambda + \frac{\gamma_i + \delta_i + \gamma_j - \delta_j}{2}}}{e^{\gamma_j - \delta_j} + e^{\gamma_i + \delta_i} + e^{\lambda + \frac{\gamma_i + \delta_i + \gamma_j - \delta_j}{2}}}, \\ \pi_{ji} &= P(j \text{ vencer } i) = \frac{e^{\gamma_j - \delta_j}}{e^{\gamma_j - \delta_j} + e^{\gamma_i + \delta_i} + e^{\lambda + \frac{\gamma_i + \delta_i + \gamma_j - \delta_j}{2}}}.\end{aligned}\tag{48}$$

Na análise bayesiana dos modelos derivados do modelo de Bradley-Terry, estabeleceram-se as distribuições *a priori* normais, para os parâmetros δ e R , pois admite-se que as características dessa distribuição estejam de acordo com as ob-

servações nos dados históricos. Dessa forma, para cada elemento dos parâmetros, R_i (ratings), δ_i e δ , adotaram-se as seguintes distribuições normais.

$$R_i \sim N(2705, 400^2)$$

$$\delta_i \sim N(50, 40^2)$$

$$\delta \sim N(50, 40^2).$$

Com as respectivas funções de densidades dadas por:

$$p(R_i) = \frac{e^{-\frac{(R_i-2705)^2}{2 \cdot 400^2}}}{400\sqrt{2\pi}}, \quad (49)$$

$$p(\delta) = \frac{e^{-\frac{(\delta-50)^2}{2 \cdot 40^2}}}{40\sqrt{2\pi}} \quad (50)$$

e

$$p(\delta_i) = \frac{e^{-\frac{(\delta_i-50)^2}{2 \cdot 40^2}}}{40\sqrt{2\pi}}, \quad (51)$$

onde δ_i é utilizado, quando se pretende analisar um parâmetro de empate, para cada jogador e δ é quando se analisa um parâmetro único por banco de dados.

Com as especificações anteriores, têm-se as seguintes distribuições conjuntas *a posteriori*

$$P(\mathbf{R} | \mathbf{y}) \propto \prod_{k=1}^n \pi_{i_k j_k}^{y_k} (1 - \pi_{i_k j_k})^{(1-y_k)} \prod_{i=1}^p \frac{e^{-\frac{(R_i-2705)^2}{2 \cdot 400^2}}}{400\sqrt{2\pi}}, \quad (52)$$

$$P(\mathbf{R}, \delta | \mathbf{y}) \propto \prod_{k=1}^n \pi_{i_k j_k}^{y_k} (1 - \pi_{i_k j_k})^{(1-y_k)} \prod_{i=1}^p \frac{e^{-\frac{(R_i-2705)^2}{2 \cdot 400^2}}}{400\sqrt{2\pi}} \frac{e^{-\frac{(\delta-50)^2}{2 \cdot 40^2}}}{40\sqrt{2\pi}} \quad (53)$$

ou

$$P(\mathbf{R}, \boldsymbol{\delta} \mid \mathbf{y}) \propto \prod_{k=1}^n \pi_{i_k j_k}^{y_k} (1 - \pi_{i_k j_k})^{(1-y_k)} \prod_{i=1}^p \frac{e^{-\frac{(R_i - 2705)^2}{2 \cdot 400^2}}}{400\sqrt{2\pi}} \frac{e^{-\frac{(\delta_i - 50)^2}{2 \cdot 40^2}}}{40\sqrt{2\pi}} \quad (54)$$

em que p é o número de jogadores analisados e n corresponde ao número de partidas.

E, para os modelos derivados do sistema de Davidson, adotaram-se, para as distribuições *a priori*, as seguintes normais:

$$\begin{aligned} \gamma_i &\sim N(15, 400^2) \\ \delta_i &\sim N(1, 10^2) \\ \delta &\sim N(1, 10^2) \\ \lambda &\sim N(1, 5^2). \end{aligned}$$

Cujas funções densidade são dadas por:

$$p(\gamma_i) = \frac{e^{-\frac{(\gamma_i - 15)^2}{2 \cdot 400^2}}}{400\sqrt{2\pi}}, \quad (55)$$

$$p(\delta) = \frac{e^{-\frac{(\delta - 1)^2}{2 \cdot 10^2}}}{10\sqrt{2\pi}}, \quad (56)$$

$$p(\delta_i) = \frac{e^{-\frac{(\delta_i - 1)^2}{2 \cdot 10^2}}}{10\sqrt{2\pi}} \quad (57)$$

e

$$p(\lambda) = \frac{e^{-\frac{(\lambda - 1)^2}{2 \cdot 5^2}}}{5\sqrt{2\pi}} \quad (58)$$

A exemplo dos modelos derivados de Bradley-Terry, o conjunto de parâmetros depende do modelo em análise. Desta forma, têm-se as seguintes distribui-

ções conjuntas *a posteriori*:

$$P(\gamma, \lambda | \mathbf{y}) \propto \prod_{k=1}^n \left(\pi_{i_k j_k}^{I_{\{y_k=1\}}} \pi_{i_k j_k 0}^{I_{\{y_k=0,5\}}} \pi_{j_k i_k}^{I_{\{y_k=0\}}} \right) \prod_{i=1}^p \frac{e^{-\frac{(\gamma_i-15)^2}{2 \cdot 400^2}}}{400\sqrt{2\pi}} \frac{e^{-\frac{(\lambda-1)^2}{2 \cdot 5^2}}}{5\sqrt{2\pi}}, \quad (59)$$

$$P(\gamma, \delta, \lambda | \mathbf{y}) \propto \prod_{k=1}^n \left(\pi_{i_k j_k}^{I_{\{y_k=1\}}} \pi_{i_k j_k 0}^{I_{\{y_k=0,5\}}} \pi_{j_k i_k}^{I_{\{y_k=0\}}} \right) \prod_{i=1}^p \frac{e^{-\frac{(\gamma_i-15)^2}{2 \cdot 400^2}}}{400\sqrt{2\pi}} \times \frac{e^{-\frac{(\delta-1)^2}{2 \cdot 10^2}}}{10\sqrt{2\pi}} \frac{e^{-\frac{(\lambda-1)^2}{2 \cdot 5^2}}}{5\sqrt{2\pi}} \quad (60)$$

ou

$$P(\gamma, \delta, \lambda | \mathbf{y}) \propto \prod_{k=1}^n \left(\pi_{i_k j_k}^{I_{\{y_k=1\}}} \pi_{i_k j_k 0}^{I_{\{y_k=0,5\}}} \pi_{j_k i_k}^{I_{\{y_k=0\}}} \right) \prod_{i=1}^p \frac{e^{-\frac{(\gamma_i-15)^2}{2 \cdot 400^2}}}{400\sqrt{2\pi}} \times \frac{e^{-\frac{(\delta_i-1)^2}{2 \cdot 10^2}}}{10\sqrt{2\pi}} \frac{e^{-\frac{(\lambda-1)^2}{2 \cdot 5^2}}}{5\sqrt{2\pi}} \quad (61)$$

em que p é o número de jogadores analisados e n corresponde ao número de partidas.

3.2 Processo de simulação

De posse dos dados do *Training set* (nome de cada jogador, resultados (\mathbf{y}) da partida, as datas em que ocorreram), a inferência sobre os parâmetros dos modelos foi feita mediante estatísticas sobre amostras das distribuições marginais *a posteriori* com relação aos parâmetros. Para isso, foi utilizado o método (Monte Carlo via Cadeia de Markov), desenvolvido por meio do algoritmo de Metropolis-Hastings, dentro do amostrador de Gibbs, aplicado a cada distribuição condicional completa.

Foi gerada uma cadeia inicial, com 130000 iterações, para todos os pa-

râmetros, porém, como é de conhecimento geral, o método MCMC leva a duas propriedades indesejáveis na amostra resultante, que são o efeito do valor inicial e a dependência entre as observações, e isso pode comprometer a inferência dos parâmetros. Então, foram descartados os primeiros 50000 valores, a fim de que a influência do valor inicial arbitrário pudesse ser anulada (processo conhecido como *burn-in*). A seguir, os pontos amostrais foram tomados de 20 em 20 iterações (processo conhecido como *jump*), de forma que pudesse ser obtida uma amostra aleatória. Dessa forma a amostra final constou de 4.000 observações. O algoritmo foi implementado utilizando a linguagem R (R Core Team, 2014). Foram geradas 3 cadeias, para cada uma das condicionais completas e avaliada a convergência usando a biblioteca Coda do R (PLUMMER et al., 2006).

3.2.1 Distribuições condicionais completas

As distribuições condicionais completas de cada parâmetro (para cada um dos modelos) necessárias aos algoritmos utilizados neste trabalho são dadas por:

- A) Para o caso do modelo mais simples derivado do modelo de Bradley-Terry (44).

$$P(R_{i^*} | \mathbf{R}_{-i^*}, \mathbf{y}) \propto \prod_{k=1}^n \pi_{i_k j_k}^{y_k} (1 - \pi_{i_k j_k})^{(1-y_k)} e^{-\frac{(R_{i^*} - 2705)^2}{32000}}, \quad (62)$$

- B) Para o caso do modelo derivado do modelo de Bradley-Terry com um δ único(45).

$$P(R_{i^*} | \mathbf{R}_{-i^*}, \delta, \mathbf{y}) \propto \prod_{k=1}^n \pi_{i_k j_k}^{y_k} (1 - \pi_{i_k j_k})^{(1-y_k)} e^{-\frac{(R_{i^*} - 2705)^2}{320000}}, \quad (63)$$

$$P(\delta | \mathbf{R}, \mathbf{y}) \propto \prod_{k=1}^n \pi_{i_k j_k}^{y_k} (1 - \pi_{i_k j_k})^{(1-y_k)} e^{-\frac{(\delta - 50)^2}{3200}} \quad (64)$$

C) Para o caso do modelo mais complexo, com um δ para cada jogador (46).

$$P(R_{i^*} | \mathbf{R}_{-i^*}, \boldsymbol{\delta}, \mathbf{y}) \propto \prod_{k=1}^n \pi_{i_k j_k}^{y_k} (1 - \pi_{i_k j_k})^{(1-y_k)} e^{-\frac{(R_{i^*} - 2705)^2}{320000}} \quad (65)$$

$$P(\delta_{i^*} | \mathbf{R}_{i^*}, \boldsymbol{\delta}_{-i^*}, \mathbf{y}) \propto \prod_{k=1}^n \pi_{i_k j_k}^{y_k} (1 - \pi_{i_k j_k})^{(1-y_k)} e^{-\frac{(\delta_{i^*} - 50)^2}{3200}} \quad (66)$$

Para todas as condicionais completas, referentes às modificações do modelo de Bradley-Terry tem-se que i^* é um jogador específico (sendo $-i^*$ seu complementar) e $\pi_{i_j k}$ é a probabilidade de vitória das brancas no k -ésimo jogo.

D) Para o caso do modelo mais simples derivado do modelo de Davidson (33).

$$P(\gamma_{i^*} | \boldsymbol{\gamma}_{-i^*}, \boldsymbol{\lambda}, \mathbf{y}) \propto \prod_{k=1}^n \left(\pi_{i_k j_k}^{I_{\{y_k=1\}}} \pi_{i_k j_k 0}^{I_{\{y_k=0,5\}}} \pi_{j_k i_k}^{I_{\{y_k=0\}}} \right) e^{-\frac{(\gamma_{i^*} - 15)^2}{32000}} \quad (67)$$

$$P(\lambda | \boldsymbol{\gamma}, \mathbf{y}) \propto \prod_{k=1}^n \left(\pi_{i_k j_k}^{I_{\{y_k=1\}}} \pi_{i_k j_k 0}^{I_{\{y_k=0,5\}}} \pi_{j_k i_k}^{I_{\{y_k=0\}}} \right) e^{-\frac{(\lambda - 1)^2}{50}} \quad (68)$$

E) Para o caso do modelo derivado do modelo de Davidson com δ único (47).

$$P(\gamma_{i^*} | \boldsymbol{\gamma}_{-i^*}, \delta, \boldsymbol{\lambda}, \mathbf{y}) \propto \prod_{k=1}^n \left(\pi_{i_k j_k}^{I_{\{y_k=1\}}} \pi_{i_k j_k 0}^{I_{\{y_k=0,5\}}} \pi_{j_k i_k}^{I_{\{y_k=0\}}} \right) e^{-\frac{(\gamma_{i^*} - 15)^2}{32000}} \quad (69)$$

$$P(\delta | \boldsymbol{\gamma}, \boldsymbol{\lambda}, \mathbf{y}) \propto \prod_{k=1}^n \left(\pi_{i_k j_k}^{I_{\{y_k=1\}}} \pi_{i_k j_k 0}^{I_{\{y_k=0,5\}}} \pi_{j_k i_k}^{I_{\{y_k=0\}}} \right) \frac{e^{-\frac{(\delta - 1)^2}{2 \cdot 10^2}}}{10\sqrt{2\pi}} \quad (70)$$

$$P(\lambda | \boldsymbol{\gamma}, \delta, \mathbf{y}) \propto \prod_{k=1}^n \left(\pi_{i_k j_k}^{I_{\{y_k=1\}}} \pi_{i_k j_k 0}^{I_{\{y_k=0,5\}}} \pi_{j_k i_k}^{I_{\{y_k=0\}}} \right) \frac{e^{-\frac{(\lambda - 1)^2}{2 \cdot 5^2}}}{5\sqrt{2\pi}} \quad (71)$$

F) Para o caso do modelo mais complexo derivado do modelo de Davidson com um δ para cada jogador(48).

$$P(\gamma_{i^*} | \gamma_{-i^*}, \delta, \lambda, \mathbf{y}) \propto \prod_{k=1}^n \left(\pi_{i_k j_k}^{I_{\{y_k=1\}}} \pi_{i_k j_k 0}^{I_{\{y_k=0,5\}}} \pi_{j_k i_k}^{I_{\{y_k=0\}}} \right) e^{-\frac{(\gamma_{i^*}-15)^2}{32000}} \quad (72)$$

$$P(\delta_{i^*} | \gamma, \delta_{-i^*}, \lambda, \mathbf{y}) \propto \prod_{k=1}^n \left(\pi_{i_k j_k}^{I_{\{y_k=1\}}} \pi_{i_k j_k 0}^{I_{\{y_k=0,5\}}} \pi_{j_k i_k}^{I_{\{y_k=0\}}} \right) e^{-\frac{(\delta_{i^*}-1)^2}{200}} \quad (73)$$

$$P(\lambda | \gamma, \delta, \mathbf{y}) \propto \prod_{k=1}^n \left(\pi_{i_k j_k}^{I_{\{y_k=1\}}} \pi_{i_k j_k 0}^{I_{\{y_k=0,5\}}} \pi_{j_k i_k}^{I_{\{y_k=0\}}} \right) e^{-\frac{(\lambda-1)^2}{50}} \quad (74)$$

Para todas as condicionais completas, referentes às modificações do modelo de Davidson, tem-se que i^* é um jogador específico (sendo $-i^*$ seu complementar) e $\pi_{i_k j_k}$, $\pi_{i_k j_k 0}$ e $\pi_{j_k i_k}$ são as probabilidades de vitória, empate e derrota para o jogador de brancas na partida k-ésima partida.

3.3 Definição dos modelos

Foi criada uma variável ω (75), para ponderar a verossimilhança, de forma que as partidas mais antigas tenham menos peso em relação às mais recentes.

$$\omega_t = \frac{1}{\sqrt{\frac{t-t_{min}}{t_{max}-t_{min}}}} \quad (75)$$

em que t_{min} e t_{max} são, respectivamente, os índices referente ao tempo da partida mais antiga e a mais recente do *Training set*, e t é o tempo corrente da partida em análise. Esta variável é semelhante à utilizada no sistema ELO++ (seção 2.1.1), porém com aplicação diferente.

Com o acréscimo de variável ω na verossimilhança, os parâmetros são,

então, ponderados pelo tempo. Os modelos, com a utilização de ω em sua verossimilhança, (39), foram chamados de modelos com verossimilhança ponderada, e os demais modelos foram chamados de modelos estáticos. Logo obtiveram-se 12 modelos diferentes, sendo 6 modelos estáticos e 6 modelos com verossimilhança ponderada, conforme apresentado na tabela 5.

Tabela 5 Modelos analisados, referentes às variações dos modelo de Bradley-Terry e Davidson. ($\omega_t = 1$: Modelos estáticos, ω_t : Modelos com verossimilhança ponderada).

Modelos analisados		Parâmetros	Verossimilhança
Bradley-Terry	$\omega_t = 1$	$\theta = R_i$	$L(\theta; \mathbf{y})$
		$\theta = R_i, \delta$	
		$\theta = R_i, \delta_i$	
	ω_t	$\theta = R_i$	$L^{\omega_t}(\theta; \mathbf{y})$
$\theta = R_i, \delta$			
$\theta = R_i, \delta_i$			
Davidson	$\omega_t = 1$	$\theta = \gamma_i, \lambda$	$L(\theta; \mathbf{y})$
		$\theta = \gamma_i, \delta, \lambda$	
		$\theta = \gamma_i, \delta_i, \lambda$	
	ω_t	$\theta = \gamma_i, \lambda$	$L^{\omega_t}(\theta; \mathbf{y})$
$\theta = \gamma_i, \delta, \lambda$			
$\theta = \gamma_i, \delta_i, \lambda$			

3.4 Decisão sobre os melhores modelos

A decisão, sobre os melhores modelos, quanto à sua capacidade descritiva e de predição, foi feita com base na comparação direta das estimativas de AIC (41) e AICM (42).

Em, especial, a comparação entre os modelos de predição, foi feita, mediante as seguintes ideias.

- Para cada resultado y^* dos jogos dos *Testing sets A e B*, foi calculada na distribuição preditiva o valor $p(y^*|y, \theta)$
- Com base nos $p(y^*|y, \theta)$ são obtidos os resumos utilizados para avaliação do modelo : $-\bar{l}$, AIC, AICM e medida DeFinetti.

Como já mencionado, o *Testing set B* é composto por partidas em que, pelo menos, um dos jogadores teve o rating estimado pelos modelos discutidos. Ou seja, podem existir jogadores que não tiveram seus parâmetros inferidos por esses modelos e, para tratar essa situação, as seguintes propostas foram seguidas:

- 1º) Foi utilizado o rating ELO do jogador que não teve seu rating estimado pelo modelo discutido em questão e este foi reescalado para que ficasse na mesma escala dos ratings estimados.
- 2º) Em relação ao valor de δ_i , foram estabelecidos três (3) abordagens diferentes:
 - i Usar $\delta_i = 0$ para os jogadores que não têm valor δ_i calculado.
 - ii Usar $\delta_i = \mu_\delta$ (Média da amostra de δ_s estimada no modelo correspondente com único δ) para os jogadores que não têm valor δ_i calculado.
 - iii Usar $\delta_i = -\delta_j$, que equivale ao dobro da estimativa δ do jogador presente na partida com δ_i estimado.

A comparação foi feita entre as diferentes variações de cada modelo e em relação a modelos de referência equivalentes, que utilizam como parâmetros palpites básicos, que correspondem a:

- I Supor que as probabilidades de vitória e derrotas são equiprováveis (modelo equiprovável), ou seja, $\frac{1}{2}$ e $\frac{1}{2}$ para os modelos Bradley-Terry e $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{3}$ e $\frac{1}{3}$ para os modelos de Davidson.
- II Supor que as probabilidade de vitória e derrotas são melhor descritas a partir da proporção dos resultados verificada no banco de dados (modelos proporcionais)
- III Supor que as probabilidade de vitória e derrotas são melhor descritas a partir da proporção dos resultados verificada no banco de dados, descartando as partidas que ocorreram empates (modelos proporcionais descartando empates).

No caso em especial do modelo de Bradley-Terry, pelo fato de que em sua forma básica equivale ao modelo ELO, usado pela FIDE (ver seção 2.1), foram utilizadas, também, como parâmetros para os modelos de referência os ratings FIDE de cada jogador. Na análise descritiva sobre o *Trainning set*, são utilizados os ratings FIDE que os jogadores tinham no momento em que ocorreu as suas partidas. E, na análise da capacidade preditiva dos resultados do *Testing set A e B*, utilizaram-se os ratings FIDE de que cada jogador tinha em dezembro de 2012, pois são as últimas estimativas de ratings FIDE anteriores às partidas do *Testing set A e B*.

4 RESULTADOS E DISCUSSÃO

4.1 Análise descritiva

Na tabela 6 apresentam-se as estimativas dos critérios de informação de Akaike (1974). Esses valores foram obtidos a partir da análise dos resultados do *Training set*, associados às formas básicas dos modelos de Bradley-Terry e Davidson, com os parâmetros de referência.

Tabela 6 Estimativas AIC dos modelos estáticos e com verossimilhança ponderada, para as variações do modelo Bradley-Terry e Davidson, em suas formas básicas utilizando os parâmetros de referência (Em negrito estão menores valores de AIC, por modelo).

$\omega_t = 1$: Modelos estáticos; ω_t : Modelos com verossimilhança ponderada

Modelos de Referência	AIC			
	Bradley-Terry		Davidson	
	$\omega_t = 1$	ω_t	$\omega_t = 1$	ω_t
Equiprovável	9440,4	16790,8	14960,5	26610,4
Desc. empates	9481,8	16841,3	13771,8	24491,2
Proporcional	11489,2	20464,2	13581,0	24137,0
ELO	9039,5	15993,6		

Observando-se a tabela 6, pode-se perceber que, em relação aos parâmetros utilizados como referência, associados ao modelo de Bradley-Terry (estáticos e com verossimilhança ponderada) os melhores modelos descritivos foram os ratings FIDE (no momento que ocorreu a partida), índice da acurácia do sistema ELO em relação às demais referências.

Já, em relação ao modelo de Davidson, tanto estático como com verossimilhança ponderada, os melhores parâmetros de referência foram as proporções dos resultados do *Training set*. Isso, talvez, justifique-se pelo fato de que os resultados do *Training set* se distribuem de forma heterogênea e o modelo de Davidson é capaz de descrever, separadamente, as probabilidades dos três resultados possíveis (vitória, empate e derrota).

Na tabela 7 são apresentados o valor da média e desvio padrão, da amostra $l = (\ln L_1(\hat{\theta}; y), \dots, \ln L_k(\hat{\theta}; y))$ associados às modificações dos modelos de Bradley-Terry e Davidson (é considerado o valor negativo da média de l a fim de maior legibilidade das estimativas). Essas estimativas foram obtidas das cadeias de Markov, geradas com base nas amostras das distribuições *a posteriori* e servem para mostrar que os modelos estão estáveis e convergindo. Com exceção do modelo simples de Davidson com verossimilhança ponderada, todos os demais modelos apresentaram desvio padrão inferior a 0,3, resultado satisfatório se levar em conta a escala dos valores.

Tabela 7 Negativa da média e desvio padrão do valor dos logaritmos das verossimilhanças, para cada ponto amostral das distribuições *a posteriori* conjuntas, correspondente às diferentes modificações dos modelos de Bradley-Terry e Davidson.

Em negrito estão os menores valores de média e os maiores valores de desvio padrão, para cada modelo. $\omega_t = 1$: Modelos estáticos; ω_t : Modelos com verossimilhança ponderada.

Modelos analisados		Parâmetros (θ)	$-\bar{l}$	σ_l
Bradley-Terry	$\omega_t = 1$	$\theta = R_i$	4468,2	0,10
		$\theta = R_i, \delta$	4423,6	0,09
		$\theta = R_i, \delta_i$	4439,3	0,07
	ω_t	$\theta = R_i$	7907,4	0,03
		$\theta = R_i, \delta$	4423,6	0,06
		$\theta = R_i, \delta_i$	7822,5	0,03
Davidson	$\omega_t = 1$	$\theta = \gamma_i, \lambda$	6343,5	0,16
		$\theta = \gamma_i, \delta, \lambda$	6238,6	0,28
		$\theta = \gamma_i, \delta_i, \lambda$	6212,6	0,11
	ω_t	$\theta = \gamma_i, \lambda$	11231,5	22,7
		$\theta = \gamma_i, \delta, \lambda$	10980,5	0,08
		$\theta = \gamma_i, \delta_i, \lambda$	10943,7	0,05

As estimativas AIC (modelos de referência) e as estimativas AICM (modelos analisados) estão agrupadas na tabela 8, conforme o modelo do qual derivam (Bradley-Terry ou Davidson) e o tipo de verossimilhança utilizado em sua posteriori (estática ou ponderada no tempo). A decisão sobre a relevância dos parâmetros foi feita com base na comparação desses valores.

Tabela 8 Estimativas de AIC para os modelos analisados e AICM para os modelos de referência. Em negrito estão os menores valores da estimativa para cada modelo.

$\omega_t = 1$: Modelos estáticos; ω_t : Modelos com verossimilhança ponderada.

Modelos	Parâmetros	AICM	AIC		
Bradley-Terry	$\omega_t = 1$	$\theta = R_i$	8936,4		
		$\theta = R_i, \delta$	8847,2		
		$\theta = R_i, \delta_i$	8878,6		
		Equiprovável		9436,4	
		Desc. empates		9473,8	
		Proporcional		11481,2	
		ELO		8947,4	
	ω_t	$\theta = R_i$	15841,8		
		$\theta = R_i, \delta$	8847,3		
		$\theta = R_i, \delta_i$	15644,9		
			Equiprovável		16786,8
			Desc. empates		16833,3
			Proporcional		20456,2
			ELO		15901,6
Davidson	$\omega_t = 1$	$\theta = \gamma_i, \lambda$	12686,9		
		$\theta = \gamma_i, \delta, \lambda$	12477,3		
		$\theta = \gamma_i, \delta_i, \lambda$	12425,2		
			Equiprovável		14956,5
			Desc. empates		13763,8
			Proporcional		13569
	ω_t	$\theta = \gamma_i, \lambda$	23491,8		
		$\theta = \gamma_i, \delta, \lambda$	21961,1		
		$\theta = \gamma_i, \delta_i, \lambda$	21887,3		
			Equiprovável		26606,4
			Desc. empates		24489,2
			Proporcional		24125

Verifica-se que todos os modelos, derivados dos modelos de Bradley-Terry e Davidson, foram melhores que os modelos de referência equivalentes. Em relação aos modelos, derivados do modelo de Bradley-Terry o melhor modelo estático, foi aquele que contém as estimativas de R_s e um único δ , apresentando uma estimativa de $\delta = 41,7$ cujo intervalo de credibilidade HPD a 95% é : $IC[33,5 ; 50,6]$. Isso equivale dizer que existe um benefício de 41,7 pontos na escala ELO para o jogador que disputar a partida de brancas. Por exemplo, em uma partida entre dois jogadores com ratings 2686 e 2715, o jogador de rating 2686 teria uma acréscimo de quase 6% na sua probabilidade de vitória, pelo fato de jogar de brancas, o que equivale a dizer que seu rating seria equivalente a 2727,7.

Em se tratando dos modelos com verossimilhança ponderada, o melhor, também, foi o que contém as estimativas de R_s e um único δ . Apresentando uma estimativa de $\delta = 43,68$ com intervalo de credibilidade HPD a 95% é : $IC[37,09 ; 50,14]$. A exemplo da análise feita para o modelo estático, essa estimativa encontrada para o modelo com verossimilhança ponderada, equivale dizer que existe um benefício de 43,68 pontos na escala ELO para o jogador que disputar a partida de brancas. Novamente, em uma partida, entre dois jogadores com ratings 2686 e 2715, o jogador de rating 2686 teria uma acréscimo de, aproximadamente 6,27% na sua probabilidade de vitória, que equivale a dizer que por jogar de brancas seu rating seria equivalente a 2729,68.

Nas figuras 2 e 3 estão representadas as estimativas pontuais do rating R_s com seus respectivos intervalos de credibilidade HPDs, obtidos pelos dois melhores modelos de Bradley-Terry para 46 jogadores escolhidos no *Training set*. Para o modelo estático, é possível perceber que somente os sete primeiros jogadores diferem do último jogador. Já, no modelo com verossimilhança ponderada, a proximidade entre as estimativas de ratings dos jogadores é maior que no estático, e existe uma maior distinção entre os primeiros e os últimos jogadores (linhas verticais nos gráficos), deixando definido um grupo com 9 em que seus intervalos HPD sobrepõem o intervalo HPD do jogador de rating mais alto.

Ambos os modelos coincidiram, em relação ao jogador de rating mais alto (Magnus Carlsen) e, de uma forma geral, mostram uma grande similaridade entre os demais jogadores, indício de habilidades bem próximas entre eles.

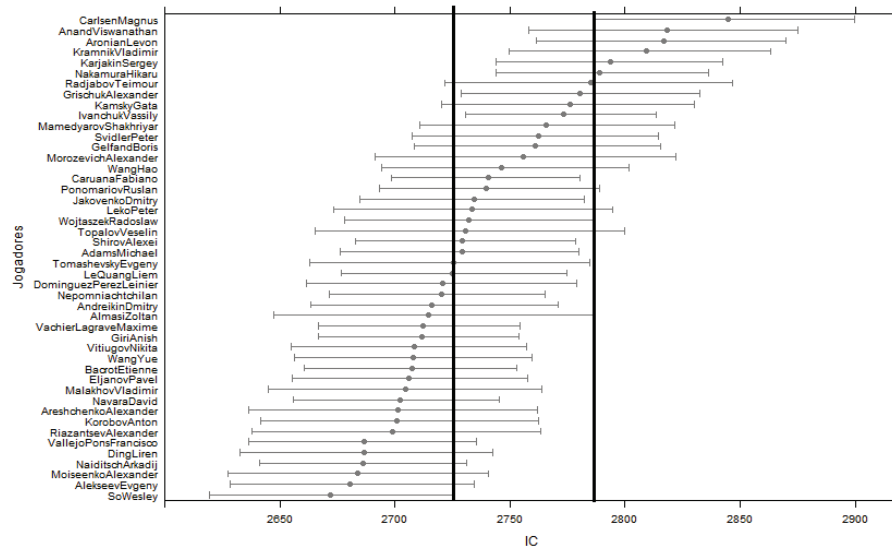


Figura 2 Estimativas pontuais de R_s e respectivos intervalos de credibilidade HPD a 95%, obtidos pelo modelo Bradley-Terry estático com R_s e δ .

No gráfico da figura 4 mostram-se como as curvas dos modelos de Bradley-Terry estático simples (ELO) e os modelos Bradley-Terry estático e com verossimilhança ponderada (ambos com o acréscimo de um único δ) se ajustam sobre os escores reais observados no *Training set*, deixando evidente como o modelo ELO subestima as probabilidades de vitórias entre jogadores com diferenças de ratings indo de -200 a 200 pontos, pois como se pode ver pelo gráfico sua curva está abaixo dos escores observados. É possível notar, também, que os modelos Bradley-Terry estático e com verossimilhança ponderada foram bastante similares e se ajustaram bem aos escores observados, superando o ajuste feito por meio das estimativas obtidas pelo modelo ELO.

Todos os modelos, derivados do modelo de Davidson, foram melhores que os seus respectivos modelos de referência. Os melhores foram os modelos completos, com γ e δ para cada jogador e o λ próprio do modelo, cuja estimativa foi de $\lambda = 1,098$ com intervalo de credibilidade HPD a 95% igual a $IC[1,041 ; 1,15]$ para o modelo estático e $\lambda = 1,106$ com intervalo de credibilidade HPD a 95%

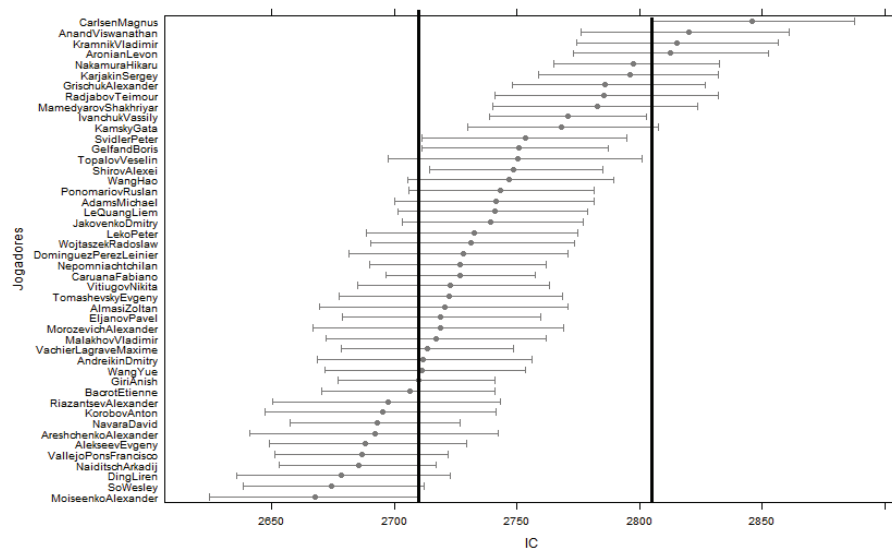


Figura 3 Estimativas pontuais de R_s e respectivos intervalos de credibilidade HPD a 95%, obtidos pelo modelo Bradley-Terry com R_s e δ , com verossimilhança ponderada.

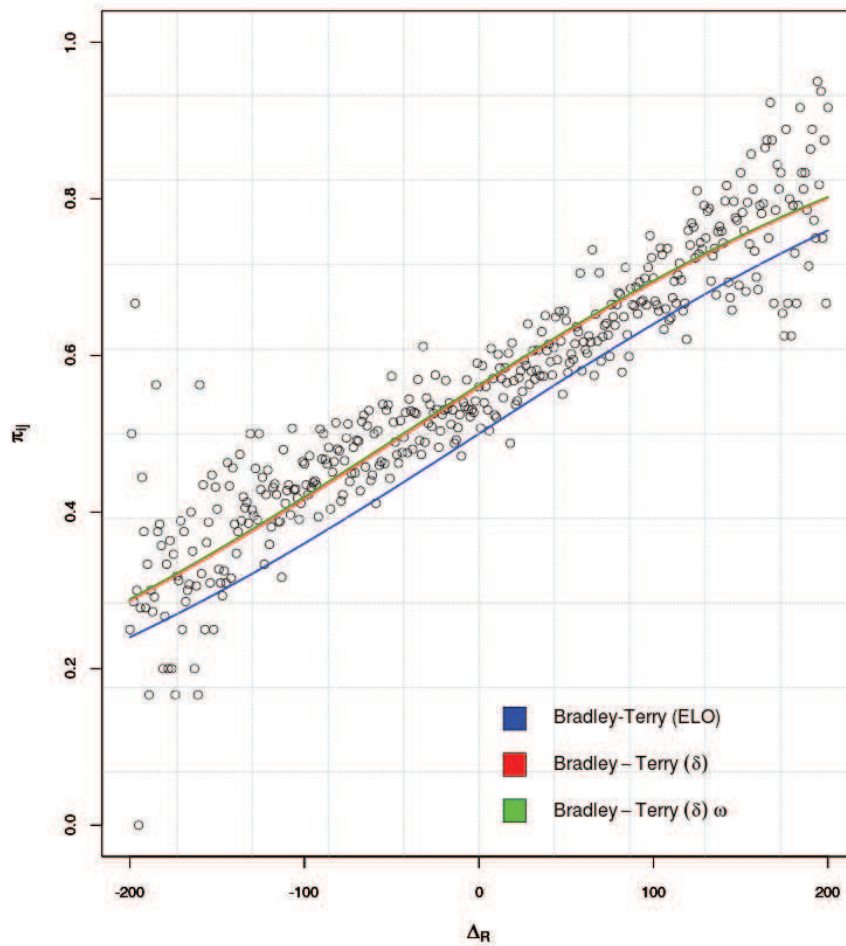


Figura 4 Probabilidades de vitória em relação à diferença de rating Δ_R , obtidas pelo modelo Bradley-Terry simples (equivalente ao ELO), o modelo Bradley-Terry estático com o acréscimo de um único $\delta = 41,73$ (Bradley-Terry (θ)) e o modelo Bradley-Terry com verossimilhança ponderada com o acréscimo de um único $\delta = 43,68$ (Bradley-Terry (θ) ω).

igual a $IC[1,062 ; 1,14]$, para o com verossimilhança ponderada. As estimativas de λ , em ambos os modelos, indicam uma tendência a ocorrência de empate (tendência essa ligeiramente mais sensível no modelo com verossimilhança ponderada).

Na tabela 9 exemplificam-se as porcentagens de vitórias de pretas, empate e vitória das brancas, calculadas pelo modelo Davidson completo, em partidas entre jogadores com δ iguais e com diferenças de ratings indo de -100 a 100 pontos na escala ELO.

Tabela 9 Porcentagens de vitórias das pretas, empates e vitórias das brancas, calculadas pelo modelo Davidson completo, em partidas entre jogadores de iguais vantagens de brancas, para $\lambda = 0$, $\lambda = 1,098$ e $\lambda = 1,106$, para diferentes valores de Δ_R (diferença entre ratings). Em negrito estão destacadas as probabilidades de empates entre jogadores com mesmo rating, para os diferentes valores de λ .

Δ_R	$\lambda = 0$			$\lambda = 1,098$			$\lambda = 1,106$		
	π_{ji}	π_{ij0}	π_{ij}	π_{ji}	π_{ij0}	π_{ij}	π_{ji}	π_{ij0}	π_{ij}
-100,00	43,25	32,43	24,32	26,24	59,00	14,76	26,12	59,19	14,69
-80,00	41,23	32,75	26,02	24,92	59,35	15,72	24,80	59,55	15,65
-60,00	39,23	33,00	27,77	23,64	59,63	16,73	23,52	59,82	16,65
-40,00	37,24	33,19	29,58	22,39	59,83	17,78	22,28	60,02	17,70
-20,00	35,27	33,30	31,43	21,18	59,95	18,88	21,08	60,14	18,79
0,00	33,33	33,33	33,33	20,01	59,98	20,01	19,91	60,18	19,91
20,00	31,43	33,30	35,27	18,88	59,95	21,18	18,79	60,14	21,08
40,00	29,58	33,19	37,24	17,78	59,83	22,39	17,70	60,02	22,28
60,00	27,77	33,00	39,23	16,73	59,63	23,64	16,65	59,82	23,52
80,00	26,02	32,75	41,23	15,72	59,35	24,92	15,65	59,55	24,80
100,00	24,32	32,43	43,25	14,76	59,00	26,24	14,69	59,19	26,12

Como é de se supor, a tendência de ocorrer empates é maior entre jogadores de ratings iguais (em negrito), e essa tendência diminui à medida que a diferença de ratings entre os jogadores aumenta. Logo um valor de λ diferente de 0 intensifica essa tendência. Assim, um λ de 1,098 no modelo implica 59,98% de empates, na mesma situação um λ de 1,106 implicará 60,17% de empates nas partidas entre tais jogadores, enquanto em uma situação de $\lambda = 0$ esse valor seria de 33,33%, esse aumento é verificado ao longo de todo Δ_R como pode ser observado na tabela 9.

Na tabela 10 observam-se as estimativas pontuais de ratings γ_s e deltas δ_s de cada um dos 46 jogadores, referentes aos dois melhores modelos (estático e com verossimilhança ponderada, ambos completos), permitindo uma noção dos valores de δ em relação ao γ na escala adotada para o modelo de Davidson e normalizadas na escala ELO, de forma a deixar mais legível a relação entre as estimativas obtidas e os ratings usados pela FIDE.

Por meio dos valores da tabela 10, é possível estimar o valor médio dos δ_s para os modelos e seus respectivos intervalos de credibilidade. Desta forma, o modelo estático completo de Davidson teve $\bar{\delta} = 66,23$ na escala ELO, com intervalo de credibilidade a 95% igual a $IC[55,93 ; 76,54]$. E o modelo com verossimilhança ponderada completa teve $\bar{\delta} = 68,84$, também, na escala ELO, com intervalo de credibilidade a 95% igual a $IC[56,98 ; 80,70]$. Essas estimativas são interessantes, pois mostram que, em média a vantagem de se jogar de brancas é bem próxima em ambos os modelos, sendo ligeiramente maior no modelo com verossimilhança ponderada.

Também, é importante mencionar que essas estimativas ($\bar{\delta}$) correspondem, respectivamente, a 2,28% e 2,37% da média dos ratings estimados pelos mesmos modelos. E essas medidas, se comparadas às obtidas pelos melhores modelos de Bradley-Terry (1,52% e 1,59%), apontam uma maior influência do lance inicial nos modelos de Davidson.

Nas figuras 5 e 6 verificam-se as estimativas pontuais dos parâmetros de rating γ_s com seus respectivos intervalos de credibilidade HPDs, também, para 46 jogadores analisados no *Training set* com os dois melhores modelos Davidson. Tanto o modelo estático (γ_s, δ_s e $\lambda = 1,098$) como o com verossimilhança ponderada (γ_s, δ_s e $\lambda = 1,106$), discriminaram bem os jogadores. No modelo estático é possível definir um grupo com 7 jogadores similares ao de maior rating, enquanto que para o modelo com verossimilhança ponderada este grupo contém 5 jogadores.

Nas figuras 7 e 8 verificam-se as estimativas pontuais dos parâmetros de δ com seus respectivos intervalos de credibilidade HPDs, também, para os 46 jogadores analisados no *Training set* com os dois melhores modelos. Por ambos os modelos, derivados do modelo de Davidson, jogar de brancas traz diferentes benefícios dependendo do jogador. Observa-se, também, no modelo de Davidson

Tabela 10 Estimativas pontuais de ratings e deltas de cada jogador por meio dos modelos de Davidson completos (estático e com verossimilhança ponderada). A sigla "ELO" indica que a estimativa foi reescalada para a escala ELO.

Jogador	Modelo estático				Modelo com verossimilhança ponderada			
	γ	$\gamma(\text{ELO})$	δ	$\delta(\text{ELO})$	γ	$\gamma(\text{ELO})$	δ	$\delta(\text{ELO})$
Adams,Michael	16,69	2899,3	0,47	80,88	16,91	2938,3	0,77	134,17
Alekseev,Evgeny	15,94	2768,4	0,17	28,83	16,02	2782,3	0,09	16,21
Almasi,Zoltan	16,46	2860,1	0,51	88,36	16,53	2871,5	0,55	95,71
Anand,Viswanathan	17,72	3077,6	0,02	3,39	17,74	3081,9	0,26	45,64
Andreikin,Dmitry	16,46	2859,9	-0,03	-5,81	16,41	2850,5	-0,02	-3,89
Areshchenko,Alexander	16,35	2841,0	0,35	61,33	16,23	2819,8	0,23	39,36
Aronian,Levon	17,76	3085,1	0,34	58,51	17,67	3069,5	0,52	90,89
Bacrot,Etienne	16,33	2836,2	0,8	139,31	16,36	2841,2	0,88	153,55
Carlsen,Magnus	18,12	3148,1	0,44	76,79	18,12	3148,0	0,3	51,6
Caruana,Fabiano	16,78	2914,1	0,62	107,21	16,61	2885,7	0,7	120,81
Ding,Liren	16,07	2791,4	0,34	59,49	15,97	2774,3	0,35	60,78
DominguezPerez,Leinier	16,37	2844,2	0,55	95,93	16,46	2858,7	0,49	85,42
Eljanov,Pavel	16,25	2823,0	0,51	88,44	16,43	2854,3	0,22	38,3
Gelfand,Boris	16,92	2938,8	0,28	48,77	16,74	2908,0	0,37	64,36
Giri,Anish	16,41	2850,0	0,07	12,44	16,39	2847,1	0,02	3,47
Grischuk,Alexander	17,17	2982,3	0,38	65,32	17,23	2992,4	0,37	64,47
Ivanchuk,Vassily	17,12	2973,7	0,34	59,27	17,08	2966,6	0,36	62,56
Jakovenko,Dmitry	16,62	2887,5	0,42	73,42	16,69	2899,9	0,35	60,56
Kamsky,Gata	17,24	2994,5	0,46	80,05	17,15	2979,6	0,35	60,09
Karjakin,Sergey	17,39	3021,4	0,27	47,43	17,42	3026,5	0,22	38,82
Korobov,Anton	16,4	2848,9	0,57	99,42	16,39	2847,4	0,58	101,1
Kramnik,Vladimir	17,65	3066,3	0,59	102,97	17,73	3079,7	0,44	76,05
Leko,Peter	16,61	2885,8	0,55	96	16,77	2872,8	0,67	116,87
Le,QuangLiem	16,54	2873,6	0,17	28,76	16,54	2913,8	0,43	75,19
Malakhov,Vladimir	16,22	2817,8	0,38	66,59	16,42	2852,6	0,55	95,95
Mamedyarov,Shakhriyar	17,00	2953,2	0,84	145,7	17,22	2991,2	0,84	145,68
Moiseenko,Alexander	16,03	2784,8	0,57	98,66	15,84	2752,2	0,6	104,09
Morozevich,Alexander	16,95	2944,3	0,4	69,93	16,43	2853,7	0,4	68,97
Naiditsch,Arkadij	16,06	2790,0	0,46	80,26	16,03	2785,5	0,48	83,56
Nakamura,Hikaru	17,38	3019,2	0,35	60,45	17,5	3040,4	0,32	55,76
Navara,David	16,21	2816,2	0,33	57,49	16,09	2795,4	0,29	50,18
Nepomniachtchi,Ian	16,46	2858,9	0,17	29,39	16,58	2880,5	0,17	30,25
Ponomarev,Ruslan	16,62	2887,6	-0,06	-10,57	16,68	2897,8	-0,05	-8,97
Radjabov,Teimour	17,23	2993,2	0,12	20,87	17,2	2987,7	0,14	24,78
Riazantsev,Alexander	16,29	2829,4	0,15	25,31	16,29	2829,9	0,18	31,41
Shirov,Alexei	16,63	2889,6	0,61	105,45	16,88	2931,9	0,64	110,65
So,Wesley	15,89	2759,6	0,34	59,79	15,91	2763,0	0,18	32,05
Svidler,Peter	17,00	2953,3	0,18	31,5	16,87	2930,0	0,22	38,38
Tomashevsky,Evgeny	16,52	2869,2	0,56	96,61	16,48	2862,4	0,66	113,99
Topalov,Veselin	16,52	2869,9	0,58	101,18	16,76	2911,9	0,93	162,08
Vachier-Lagrave,Maxime	16,36	2842,8	0,37	63,85	16,38	2846,1	0,45	77,59
VállejoPons,Francisco	16,04	2786,3	0,49	85,02	16,02	2783,2	0,4	69,5
Vitiugov,Nikita	16,33	2837,6	0,47	81,58	16,54	2872,9	0,37	64,48
Wang,Hao	16,83	2924,5	0,39	67,78	16,87	2929,8	0,42	72,5
Wang,Yue	16,28	2827,3	0,42	72,76	16,31	2832,6	0,27	46,82
Wojtaszek,Radoslaw	16,64	2890,5	0,24	40,89	16,66	2894,8	0,26	45,06

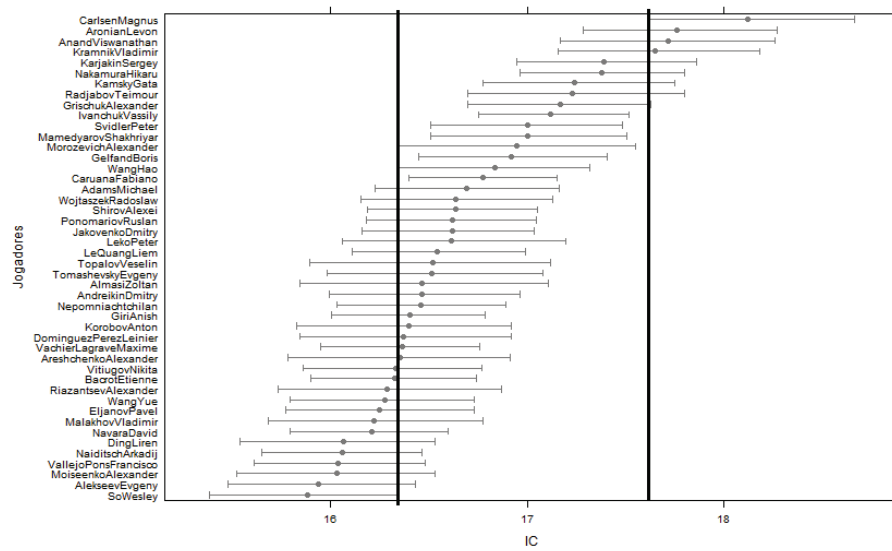


Figura 5 Estimativas pontuais de γ_s e respectivos intervalos de credibilidade HPD a 95%, obtidos pelo modelo de Davidson estático com γ_s , δ_s e λ , modelo completo.

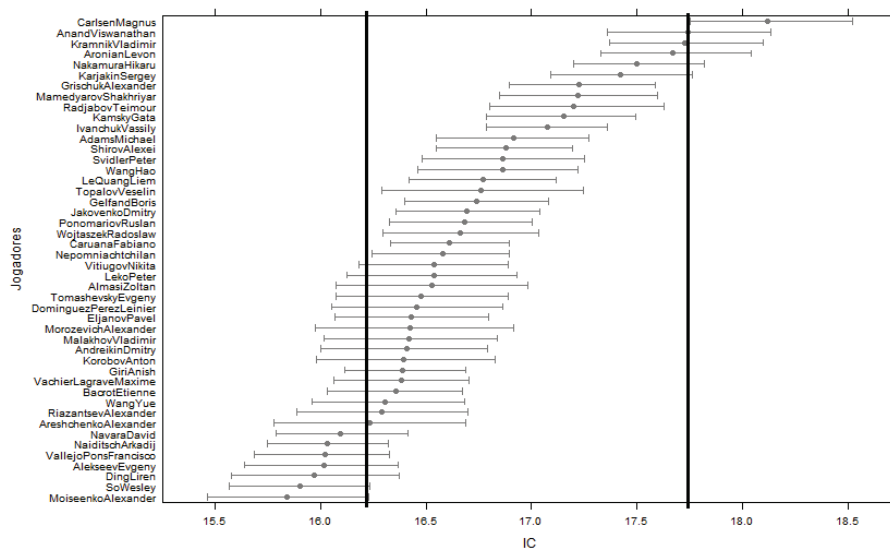


Figura 6 Estimativas pontuais de γ_s e respectivos intervalos de credibilidade HPD a 95%, obtidos pelo modelo de Davidson com verossimilhança ponderada, com γ_s , δ_s e λ , modelo completo.

estático que todos os intervalos de credibilidade HPD das estimavas de δ se sobrepõem, mostrando que, embora tenham estimativas pontuais diferentes, os mesmos apresentam grandes similaridades. No modelo com verossimilhança ponderada, também, ocorre uma sobreposição em quase todos os intervalos, porém existem uma pequena parcela de jogadores cujos intervalos não se sobrepõem, mostrando que, para o este modelo um determinado grupo de jogadores tiveram um desempenho melhor ao jogar de brancas.

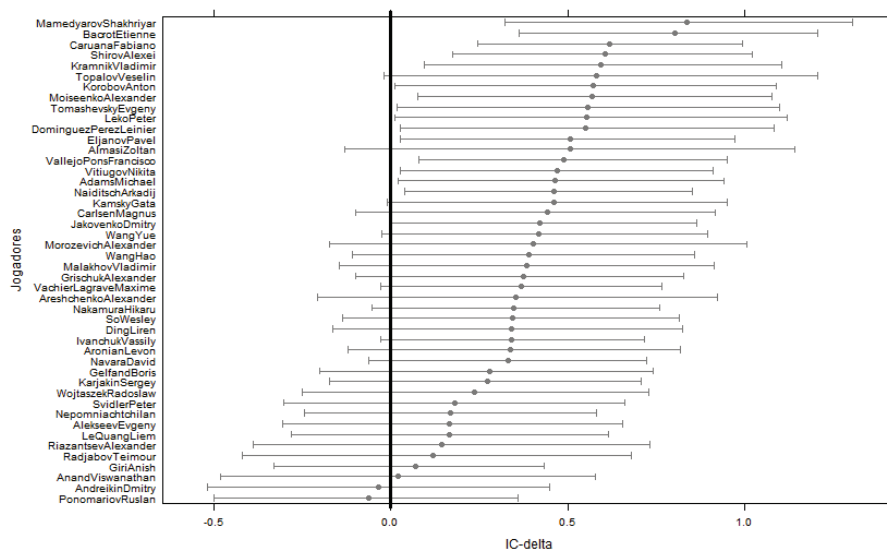


Figura 7 Estimativas pontuais de δ_s e respectivos intervalos de credibilidade HPD a 95%, obtidos pelo modelo de Davidson estático com γ_s , δ_s e λ , modelo completo.

Em relação às estimativas ELO, de dezembro de 2012 (última data do *Training set*) e os demais modelos, as correlações variaram entre 80,82% a 92,88%. Já em relação às estimativas ELO de maio de 2014 e os demais modelos, como era de se esperar devido ao fato que essas estimativas vieram de um banco de dados mais recente do que o *Training set*, a correlação foi menor, entre 71,67% e 76,21%. Inclusive, em relação às estimativas de dezembro de 2012 e as estimativas de maio de 2014 a correlação foi de 78,31%.

De maneira geral, os 12 modelos, discutidos neste trabalho, foram bem

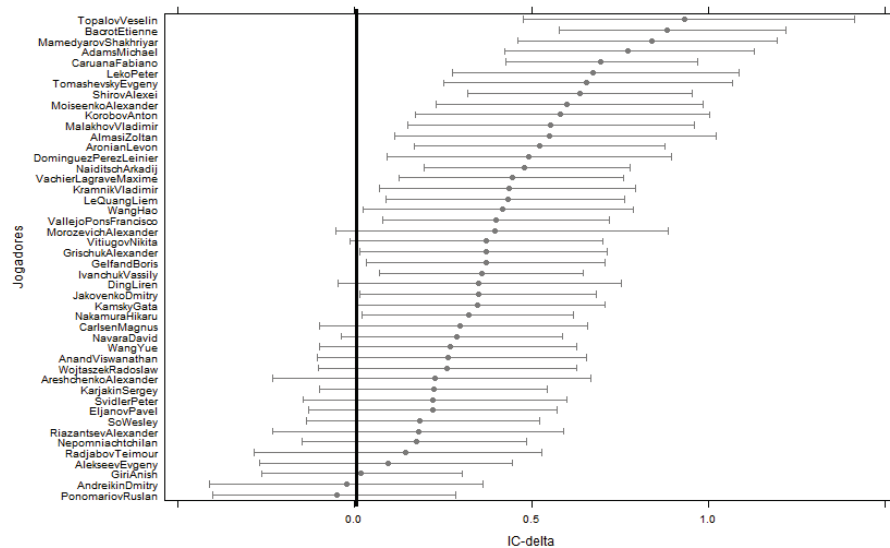


Figura 8 Estimativas pontuais de δ_s e respectivos intervalos de credibilidade HPD a 95%, obtidos pelo modelo de Davidson com verossimilhança ponderada, com γ_s , δ_s e λ , modelo completo.

correlacionados entre si, apresentando correlações que variam de 91,53% entre os modelos de Bradley-Terry completo, com verossimilhança ponderada e o modelo de Davidson simples estáticos. E 99,96% entre o modelo de Bradley-Terry com mando simples (único δ) e modelo de Bradley-Terry completo, ambos estático. O diagrama de dispersão entre as 46 estimativas de cada modelo é mostrado na figura 9, e ilustra bem essa situação.

As estimativas pontuais de rating (na escala ELO), encontradas por todos modelos derivados do Bradley-Terry e Davidson (estáticos e com verossimilhança ponderada) e os os ratings FIDE de dezembro de 2012 e março de 2014 (FIDE, 2014a) dos 46 jogadores, analisados no *Training set*, encontram-se no apêndice A. No apêndice B, estão os valores de correlação entre os modelos e no apêndice C encontra-se a lista com os modelos ordenados em ordem decrescente de confiabilidade, ou seja, do menor para o maior valor das estimativas do critério de Akaike.

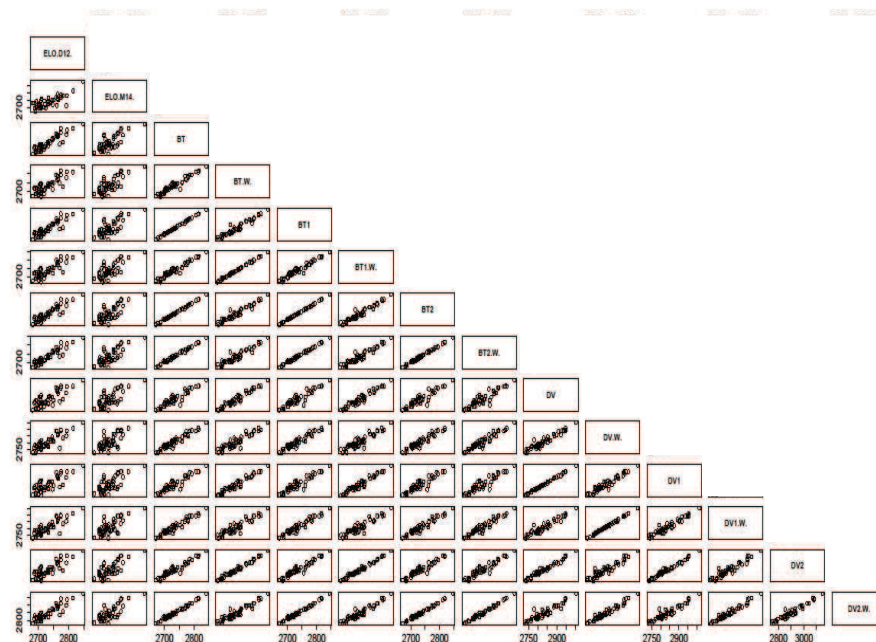


Figura 9 Diagramas de dispersão entre as 46 estimativas de rating γ de cada um dos modelos estudados e as estimativas oficiais FIDE .

Sigla: ELO.D12 = Rating FIDE (ELO) emitido em dezembro de 2012, ELO.M14 = Rating FIDE (ELO) emitido em maio de 2014, BT= Bradley-Terry simples estático, BT1=Bradley-Terry com mando simples (único δ) estático, BT2 = Bradley-Terry completo estático, o mesmo raciocínio serve para os modelos derivados do modelo de Davidson, DV. As siglas seguidas de ω se referem aos modelos com verossimilhança ponderada.

4.2 Análise preditiva de partidas jogadas somente entre jogadores com parâmetros estimados pelos modelos (*Testing set A*)

Na tabela 11 encontram-se as estimativas dos critérios de informação de Akaike (AIC) e as estimativas da medida de DeFinetti, obtidos com base na análise dos resultados do *Testing set A*, associados às formas básicas dos modelos de Bradley-Terry e Davidson com os parâmetros de referência.

Percebe-se, por esta tabela que, em relação aos parâmetros utilizados como

referência para o modelo de Bradley-Terry, o melhor modelo preditor do *Testing set A* foi aquele conseguido com os ratings FIDE obtidos em dezembro de 2012, tanto pela avaliação do critério de Akaike quanto pela medida de DeFinetti. Mostrando que as estimativas dos ratings ELO são melhores parâmetros para um modelo preditor, do que usar valores arbitrários como proporção de resultados, ou valores equiprováveis.

Em relação ao modelo de Davidson tanto pelo AIC quanto pela medida de DeFinetti, os melhores parâmetros de referência foram as proporções de resultados, pelos mesmos motivos observados no *Training set* (heterogeneidade dos dados). O fato do empate ser o resultado mais frequente, é sensato esperar que as proporções verificadas sejam melhores parâmetros para um modelo preditor que tenha a característica de ser capaz de discriminar a probabilidade de ocorrer empates na partida.

Tabela 11 Estimativas de AIC e as medidas de *DeFinetti*, relacionados aos resultados do *testing set A* e os modelos de predição derivados dos modelos de Bradley-Terry e Davidson, em suas formas básicas utilizando os parâmetros de referência. São também, usados como parâmetros de referência para o modelo Bradley-Terry os ratings FIDE (dezembro de 2012). Em negrito estão menores valores de AIC e DeFinetti, por modelo.

Modelos de Referência	AIC		<i>M. DeFinetti</i>	
	Bradley-Terry	Davidson	Bradley-Terry	Davidson
Equiprovável	573,8	907,2	0,107	0,666
Desc. empates	583,6	813,2	0,110	0,587
Proporcional	718,4	801,7	0,184	0,573
ELO	570,46		0,107	

Na tabela 12 observam-se as médias (menores valores em negrito) e variâncias (maiores valores em negrito) da negativa dos logaritmos das verossimilhanças, da amostra $l = (\ln L_1(\hat{\theta}; y), \dots, \ln L_k(\hat{\theta}; y))$ e das distâncias de DeFinetti associados às modificações dos modelos de Bradley-Terry e Davidson. Pelo valor das variâncias, é possível perceber que as estimativas foram precisas. Isso serve para mostrar a boa convergência das estimativas e estabilidade dos modelos. Nota-se

uma concordância entre as medidas de confiabilidade utilizadas para avaliar os modelos, pois estas medidas concordam em relação aos modelos que tiveram menores médias e maiores variâncias.

Tabela 12 Negativa da média e variância dos logaritmos das verossimilhanças (l) e as estimativas das medidas de DeFinetti, obtidas pela análise do *Testing set A* por meio das diferentes modificações dos modelos de Bradley-Terry e Davidson. Em negrito estão os menores valores de média e os maiores valores de variância, para cada modelo. $\omega_t = 1$: Modelos estáticos; ω_t : Modelos com verossimilhança ponderada.

Modelos analisados	Parâmetros (θ)	$-\bar{l}$	σ_l^2	$M. DeFinetti$	$\sigma_{M. DeF.}^2$	
Bradley-Terry	$\omega_t = 1$	$\theta = R_i$	288,5	0,005	0,110	0,0012
		$\theta = R_i, \delta$	285,3	0,005	0,107	0,0012
		$\theta = R_i, \delta_i$	288,6	0,009	0,110	0,0019
	ω_t	$\theta = R_i$	286,9	0,003	0,109	0,0007
		$\theta = R_i, \delta$	283,6	0,003	0,105	0,0007
		$\theta = R_i, \delta_i$	284,6	0,002	0,106	0,0004
Davidson	$\omega_t = 1$	$\theta = \gamma_i, \lambda$	405,3	0,009	0,584	0,0018
		$\theta = \gamma_i, \delta, \lambda$	397,7	0,009	0,574	0,0021
		$\theta = \gamma_i, \delta_i, \lambda$	404,7	0,025	0,579	0,0061
	ω_t	$\theta = \gamma_i, \lambda$	404,1	0,005	0,582	0,0012
		$\theta = \gamma_i, \delta, \lambda$	396,4	0,005	0,573	0,0014
		$\theta = \gamma_i, \delta_i, \lambda$	401,9	0,014	0,577	0,0036

As estimativas das tabelas 11 e 12 estão agrupadas na tabela 13, conforme o modelo do qual se derivam (Bradley-Terry ou Davidson) e o tipo de verossimilhança, utilizado em sua posteriori (estática ou ponderada no tempo). Por esta tabela, é possível perceber que, pelo menos um modelo estático e um modelo com verossimilhança ponderada, tanto derivado do modelo de Bradley-Terry como de Davidson, foram superiores ao melhor modelo de referência equivalente.

A decisão sobre a relevância dos parâmetros, em todos os modelos, foi feita com base na comparação dos valores da tabela 13 e as medidas de DeFinetti apresentadas nas tabelas 11 e 12. Observa-se que os melhores modelos derivados do modelo de Bradley-Terry e derivados do modelo de Davidson, quanto a sua capacidade de prever os resultados do *Testing set A*, foram os modelos com verossimilhança ponderada e com δ único. Evidência da relevância de tratar de forma diferenciada partidas antigas e recentes e de que a vantagem de brancas foi

Tabela 13 Estimativas de AICM para os modelos analisados e AIC para os modelos de referência. Os menores valores de AICM estão destacados em negrito. $\omega_t = 1$: Modelos estáticos; ω_t : Modelos com verossimilhança ponderada.

Modelos		Parâmetros	AICM	AIC
Bradley-Terry	$\omega_t = 1$	$\theta = R_i$	576,99	
		$\theta = R_i, \delta$	570,63	
		$\theta = R_i, \delta_i$	577,17	
	ω_t	$\theta = R_i$	573,72	
		$\theta = R_i, \delta$	567,12	
		$\theta = R_i, \delta_i$	569,16	
		Equiprovável		573,76
		Desc. empate		583,64
		Proporcional		718,38
		ELO		570,46
Davidson	$\omega_t = 1$	$\theta = \gamma_i, \lambda$	810,63	
		$\theta = \gamma_i, \delta_i, \lambda$	795,42	
		$\theta = \gamma_i, \delta_i, \lambda$	809,39	
	ω_t	$\theta = \gamma_i, \lambda$	808,17	
		$\theta = \gamma_i, \delta_i, \lambda$	792,83	
		$\theta = \gamma_i, \delta_i, \lambda$	803,94	
		Equiprovável		907,27
		Desc. empates		813,24
		Proporcional		801,66

sentida no conjunto de partidas de uma forma geral e não individualmente por jogador. Este resultados concorda com o verificado em dados históricos, em que geralmente ocorrem mais vitórias pelo lado das brancas do que para as pretas.

A lista com os modelos ordenados em ordem decrescente de confiabilidade (do menor para o maior valor das estimativas AIC e DeFinetti) encontra-se no apêndice D. Dentre os modelos derivados do modelo de Bradley-Terry, o segundo melhor foi, também, um modelo com verossimilhança ponderada, porém com a vantagem de jogar de brancas diferenciadas para cada jogador (δ_i). E, no que diz respeito aos modelos derivados do modelo de Davidson, o segundo melhor modelo apresentou divergência em relação a medida de Definetti que definiu como melhor o modelo de referência proporcional e o critério de Akaike definiu como o modelo estático com γ e δ_i para cada jogador e o λ próprio do modelo.

4.3 Análise preditiva de partidas jogadas onde pelo menos um dos jogadores teve os parâmetros estimados pelos modelos (*Testing set B*)

Na tabela 14 encontram-se as estimativas AIC, obtidas a partir da análise dos resultados do *Testing set B*, associados às formas básicas dos modelos de Bradley-Terry e Davidson, com os parâmetros de referência. Na mesma tabela, se encontra as estimativas da medida de DeFinetti.

Tabela 14 Estimativa AIC e medida de *DeFinetti*, relacionados aos resultados do *testing set B* e os modelos de predição derivados dos modelos de Bradley-Terry e Davidson, em suas formas básicas utilizando os parâmetros de referência. São, também, usados como parâmetros de referência para o modelo Bradley-Terry os ratings FIDE (dezembro de 2012). Em negrito estão menores valores de AIC e DeFinetti, por modelo.

Modelos de Referência	AIC		<i>M. DeFinetti</i>	
	Bradley-Terry	Davidson	Bradley-Terry	Davidson
Equiprovável	1018,8	1612,4	0,132	0,677
Desc. empates	1021,1	1558,0	0,131	0,638
Proporcional	1185,2	1545,4	0,184	0,632
ELO	995,2		0,126	

Concordando com os resultados vistos até agora, para os modelos de referência, o melhor modelo Bradley-Terry, quanto à capacidade de prever os resultados do *Testing set B*, foram os ratings FIDE de dezembro de 2012, tanto pela avaliação do critério de Akaike quanto pela medida de DeFinetti. E, em relação ao modelo de Davidson, os melhores parâmetros de referência, foram as proporções de resultados. Isso mostra que, mesmo com um banco de dados, ligeiramente, maior, o comportamento dos dados se mantiveram, não alterando o observado nas análises do *Testing set A*.

Na tabela 15 verificam-se as médias (menores valores em negrito) e variâncias (maiores valores em negrito) da negativa dos logaritmos das verossimilhanças, da amostra $l = (\ln L_1(\hat{\theta}; y), \dots, \ln L_k(\hat{\theta}; y))$ e das distâncias de DeFinetti obtidas pela análise do *Testing set B*, por meio das diferentes modificações dos

modelos de Bradley-Terry e Davidson.

O mesmo observado na análise do *Testing set A* (tabela12) é percebido na tabela 15. O valor das variâncias indicam que as estimativas foram precisas, mostrando boa convergência e estabilidade dos modelos. Houve concordância entre as medidas de confiabilidade utilizadas, para avaliar os modelos (Akaike e DeFinetti), pois estas medidas concordam em quais modelos tiveram menores médias e maiores variâncias.

É importante ressaltar que, para os jogadores que não tiveram o valor δ_i estimado pelo modelo completo, foram utilizadas diferentes estimativas de δ_i , sendo $\bar{\delta}_i = 0$, $\bar{\delta}_i = \mu_{\delta_s}$ e $\bar{\delta}_i = -\delta_j$, conforme mencionado na seção 3.4, resultando em seis diferentes estimativas de $-\bar{l}_i$, para os modelos completos derivados do modelo de Bradley-terry e seis os modelos completos derivados do modelo de Davidson.

Tabela 15 Negativa da média e variância dos logaritmos das verossimilhanças das amostras de l e as estimativas das distâncias de DeFinetti, obtidos para as diferentes modificações dos modelos de Bradley-Terry e Davidson, considerando $\delta_i = 0$, $\delta_i = \mu_{\delta_s}$ e $\delta_i = -\delta_j$ para os jogadores que não têm valor δ_i estimado nos modelos completos. Em negrito estão os menores valores de média e os maiores valores de variância, para cada modelo. Sigla: $\omega_t = 1$: Modelos estáticos; ω_t : Modelos com verossimilhança ponderada.

	Parâmetros (θ)	$-\bar{l}$	σ_l^2	$M. DeFinetti$	$\sigma_{M.DeF.}^2$	
Bradley-Terry	$\theta = R_i$	504,5	0,005	0,129	0,0010	
	$\theta = R_i, \delta$	499,4	0,005	0,126	0,0009	
	$\delta_i = 0$	$\omega_t = 1$	502,9	0,008	0,128	0,0016
	$\delta_i = \mu_{\delta_s}$		504,8	0,008	0,129	0,0016
	$\delta_i = -\delta_j$		514,2	0,017	0,134	0,0030
			502,5	0,002	0,128	0,0006
			497,5	0,002	0,125	0,0005
	$\delta_i = 0$	ω_t	498,6	0,001	0,126	0,0003
	$\delta_i = \mu_{\delta_s}$		500,2	0,002	0,127	0,0003
	$\delta_i = -\delta_j$		506,4	0,004	0,130	0,0007
			771,4	0,007	0,636	0,0016
			763,9	0,007	0,629	0,0018
Davidson	$\theta = \gamma_i, \lambda$	796,1	0,020	0,653	0,0045	
	$\theta = \gamma_i, \delta_i, \lambda$	799,2	0,020	0,649	0,0047	
	$\delta_i = 0$	$\omega_t = 1$	818,5	0,055	0,653	0,0112
	$\delta_i = \mu_{\delta_s}$		774,2	0,004	0,639	0,0010
	$\delta_i = -\delta_j$		768,0	0,004	0,634	0,0011
			791,7	0,017	0,652	0,0028
	$\delta_i = 0$	ω_t	795,1	0,012	0,648	0,0027
	$\delta_i = \mu_{\delta_s}$		808,5	0,031	0,651	0,0067
	$\delta_i = -\delta_j$					

Os valores das estimativas AIC dos modelos de referência, presentes na tabela 14 e os valores referentes às estimativas AICM dos modelos analisados (tabela 15) estão agrupadas na tabela 16, conforme o modelo do qual se derivam (Bradley-Terry ou Davidson) e o tipo de verossimilhança utilizado em sua posteriori (estática ou ponderada no tempo). Isso permite uma maior visibilidade da diferença entre as estimativas em relação aos modelos.

Nota-se que, ao tentar prever os resultados de um banco de dados, onde pelo menos um dos jogadores teve os ratings estimados pelos modelos discutidos neste trabalho, foi importante considerar a existência do benefício de jogador de brancas (fazer o lance inicial da partida), esse benefício foi observado nas variações de ambos os modelos (Bradley-Terry e Davidson). Embora o critério de Akaike e a medida de DeFinetti tenham coincidido sobre os melhores modelos, considerando o segundo melhor ocorre divergência sobre quais seriam os melhores. A lista com os modelos ordenados do melhor para o pior, conforme avaliação do critério de Akaike e da medida de DeFinetti, podem ser vistos no apêndice E.

Percebe-se que o modelo Bradley-Terry melhor classificado, de acordo com os valores das tabelas 14,15 e 16, foi o modelo com verossimilhança ponderada, mostrando que foi importante considerar que partidas recentes têm uma influência maior no rating do que partidas antigas. Já, o melhor modelo Davidson foi estático, indiferente em relação ao momento em que a partida ocorreu, na determinação do rating do jogador.

Tabela 16 Estimativas de AICM para os modelos analisados e AIC para os modelos de referência. Os menores valores para cada modelo estão em negrito.

$\omega_t = 1$: Modelos estáticos; ω_t : Modelos com verossimilhança ponderada.

Modelos analisados	Parâmetros (θ)	AICM	AIC	
Bradley-Terry	$\theta = R_i$	1008,11		
	$\theta = R_i, \delta$	998,69		
	$\omega_t = 1$			
	$\delta_i = 0$	$\theta = R_i, \delta_i$	1005,90	
	$\delta_i = \mu_{\delta_s}$	$\theta = R_i, \delta_i$	1009,61	
	$\delta_i = -\delta_f$	$\theta = R_i, \delta_i$	1028,30	
		$\theta = R_i$	1005,06	
		$\theta = R_i, \delta$	995,10	
	ω_t			
	$\delta_i = 0$	$\theta = R_i, \delta_i$	997,16	
	$\delta_i = \mu_{\delta_s}$	$\theta = R_i, \delta_i$	1000,47	
	$\delta_i = -\delta_j$	$\theta = R_i, \delta_i$	1012,79	
		Equiprovável		1018,76
		Desc. empates		1021,10
	Proporcional		1185,18	
	ELO		995,18	
Davidson	$\theta = \gamma_i, \lambda$	1542,90		
	$\theta = \gamma_i, \delta, \lambda$	1527,77		
	$\omega_t = 1$			
	$\delta_i = 0$	$\theta = \gamma_i, \delta_i, \lambda$	1592,32	
	$\delta_i = \mu_{\delta_s}$	$\theta = \gamma_i, \delta_i, \lambda$	1598,47	
	$\delta_i = -\delta_j$	$\theta = \gamma_i, \delta_i, \lambda$	1637,11	
		$\theta = \gamma_i, \lambda$	1548,47	
		$\theta = \gamma_i, \delta, \lambda$	1536,01	
	ω_t			
	$\delta_i = 0$	$\theta = \gamma_i, \delta_i, \lambda$	1583,53	
	$\delta_i = \mu_{\delta_s}$	$\theta = \gamma_i, \delta_i, \lambda$	1590,32	
	$\delta_i = -\delta_j$	$\theta = \gamma_i, \delta_i, \lambda$	1671,00	
		Equiprovável		1621,36
		Desc. empates		1558,00
	Proporcional		1544,38	

5 CONCLUSÃO

Foi possível implementar toda a análise bayesiana dos modelos considerados usando a linguagem R. No entanto os algoritmos foram ineficientes e levaram a que pequenos números de parâmetros pudessem ser estimados, referentes a jogadores de elite.

Analisando partidas pensadas entre jogadores de elite, conclui-se que todos têm força relativa muito parecida, houve um consenso de que considerar benefício de fazer o lance inicial é relevante aos modelos descritores da performance passada. Para modelos derivados do modelo de Bradley-Terry os melhores modelos foram aqueles em que se considera que a vantagem de brancas é comum a todos os jogadores, diferente do verificado pelos modelos derivados do modelo de Davidson, que considera que benefício ao se jogar de brancas é sentido diferentemente por cada jogador.

Em relação à capacidade preditiva dos melhores modelos, houve uma concordância no uso de modelos preditores com o acréscimo de um parâmetro relativo à vantagem de se jogar de Brancas. Tanto pelo modelo derivado do modelo de Bradley-Terry como do modelo derivado do modelo Davidson, aquele com parâmetro único para vantagem de se jogar de Brancas foi o melhor. Porém, não houve consenso sobre a utilização da verossimilhança ponderada, embora haja indícios que levem a imaginar que o desempenho mais recente do jogador seja mais relevante para determinar sua força relativa atual. O modelo estático de Davidson que foi o melhor modelo preditor, nos resultados das partidas do *Testing set A*. Porém, para os resultados do *Testing set B*, o melhor preditivo foi aquele cujos parâmetros foram estimados pelo modelo com verossimilhança ponderada, discordando do resultado verificado pelo melhor modelo derivado do modelo de Bradley-Terry que, em ambos os bancos de dados (*Testing set*), existem diferenças da influência de partidas antigas e recentes no cálculo da força relativa dos jogadores.

A adequação dos modelos de Davidson, na análise desses dados, serviu para mostrar que modelos que lidam com empates se mostram eficientes para o xadrez, uma vez que o empate é um dos resultados mais recorrentes neste esporte. O tipo de análise feita neste trabalho pode ser estendido para outros esportes, como,

por exemplo, a utilização do modelo de Bradley-Terry para analisar partidas de Basquete, tênis, vôlei e quaisquer outros esportes que não ocorram empates como resultado, caso contrário sugere-se utilizar o modelo de Davidson.

Percebe-se que de uma forma geral os melhores modelos testados apresentam diferentes tipos de melhora sobre o sistema ELO. Considerar apenas a vantagem das brancas em modelos com verossimilhança ponderada pode ser a primeira melhoria e talvez a mais fácil de implementar. Considerar mais de um parâmetro por jogador envolve maior complexidade mas tem potencial descritivo maior.

REFERÊNCIAS

- AGOSTINELLI, C.; GRECO, L. **Weighted likelihood in bayesian inference**. Disponível em: <<http://new.sis-statistica.org/wp-content/uploads/2013/09/RS12-Weighted-likelihood-in-Bayesian-inference.pdf>>. Acesso em: 10 dez. 2012.
- AGRESTI, A. **Categorical data analysis**. New York: Wiley Interscience, 2002. 744 p.
- AKAIKE, H. A new look at the Statistical model identification. **IEEE Transactions on Automatic Control**, New York, v. 19, n. 6, p. 716-723, 1974.
- ARRUDA, M. L. de. **Poisson, Bayes, futebol e DeFinetti**. 2000. 123 p. Dissertação (Mestrado em Estatística) - Universidade de São Paulo, São Paulo, 2000.
- AUCOIN, F.; ASHKAR, F. **Discriminating between the logistic and the normal distributions based on likehook ratio**. Cape Town: InterStat, 2010. 14 p. Disponível em: <<http://interstat.statjournals.net/YEAR/2010/articles/1008003.pdf>>. Acesso em: 10 mar. 2014.
- BRADLEY, R. A. Another intepretation of a model for paired comparisons. **Psychometrika**, Williamsburg, v. 30, n. 3, p. 315-318, Sept. 1965.
- BRADLEY, R. A. Rank analysis of incomplete blocks idesigns III: addititonal tables for the method of paired comparisons. **Biometrika**, London, v. 41, p. 502-537, 1954.
- BRADLEY, R. A. Rank analysis of incomplete blocks designs III: some large-sample results on estimation and power for method of paired comparisons. **Biometrika**, London, v. 42, n. 3, p. 450-470, Dec. 1955.
- BRADLEY, R. A.; TERRY, M. E. Rank analysis of incomplete blocks designs: I., the method of paired comparisons. **Biometrika**, London, v. 39, n. 3, p. 324-345, Dec. 1952.
- BRASILBASE. **BrasilBase**: uma história do Xadrez Brasileiro através de seus jogadores, partidas e torneios. Disponível em: <<http://www.brasilbase.pro.br/>>. Acesso em: 10 mar. 2014.

CARON, F. C.; DOUCET, A. Efficient bayesian inference for generalized bradley-terry models. **Journal of Computation and Graphical Statistics**, Alexandria, v. 21, n. 1, p. 174-196, Nov. 2012.

CASELLA, G.; BERGER, R. L. **Inferência estatística**. São Paulo: Cengage Learning, 2010. 612 p.

CHESSBASE. **Aeroflot open**: le quang liem victorious. Disponível em: <<http://www.chessbase.com/newsdetail.asp?newsid=6136>>. Acesso em: 10 mar. 2014a.

CHESSBASE. **Price competition**: can you out-predict elo? Disponível em: <<http://www.chessbase.com/newsdetail.asp?newsid=6619>>. Acesso em: 10 mar. 2014b.

CHESSGAMES. Disponível em: <<http://www.chessgames.com/perl/chess.pl?tid=75295>>. Acesso em: 10 mar. 2014.

CHESSRESULTS. **Prize competiton**: can you out-predict Elo? Disponível em: <<http://www.chessbase.com/newsdetail.asp?newsid=6619>>. Acesso em: 10 mar. 2014.

COMITÉ OLÍMPICO INTERNACIONAL. **Aeroflot open**: le quang liem victorious. Disponível em: <<http://chess-results.com>>. Acesso em: 10 mar. 2014.

DAVIDSON, R. R. On extending the bradley-terry model to accommodate ties in paired comparison experiments. **Journal of the American Statistical Association**, New York, v. 65, n. 37, p. 317-328, Aug. 1969.

DAVISON, R. R.; SOLOMON, D. L. A bayesian approach to paired comparison experimentation. **Biometrika**, London, v. 60, n. 3, p. 477, Dec. 1973.

DEFINETTI, B. **Probability, induction and statistics**. New York: J. Wiley, 1972. 453 p.

EHLERS, R. S. **Inferência bayesiana**. São Paulo: ICMC-USP, 2011. 101 p.

ELO, A. E. **The rating of chess players past and present**. New York: Arco, 1978. 230 p.

EMILIANO, P. C. et al. Critério de informação de akaike versus bayesian: análise comparativa. In: SIMPÓSIO NACIONAL DE PROBABILIDADE E ESTATÍSTICA, 19., 2010, São Pedro. **Anais...** São Pedro: SINAPE, 2010. Disponível em: <<http://www.ime.unicamp.br/sinape/19sinape/node/615>>. Acesso em: 10 fev. 2014.

FEDERATION INTERNATIONALE DES ECHECS. **Rating regulations: the k-Factor**. Disponível em: <<http://www.fide.com>>. Acesso em: 10 mar. 2014a.

FEDERATION INTERNATIONALE DES ECHECS. **Rating regulations: the K-factor**. Disponível em: <<http://www.fide.com/component/content/article/1-fide-news/3963-ratingregulations-the-k-factor>>. Acesso em: 10 fev. 2014b.

FÉDÉRATION INTERNATIONALE DE FOOTBALL ASSOCIATION. **World football elo ratings**. Disponível em: <<http://www.eloratings.net>>. Acesso em: 10 mar. 2014.

FILGUTH, R. **Xadrez de A a Z: dicionário ilustrado**. Porto Alegre: Artmed, 2005. 240 p.

GAMERMAN, D.; LOPES, H. F. **Markov chain Monte Carlo: stochastic simulation for bayesian inference**. London: Champan & Hall, 1997. 344 p.

GLICKMAN, M. E. Bayesian locally optimal design of knockout tournaments. **Journal of Statistical Planning and Inference**, Amsterdam, v. 138, p. 2117-2127, Oct. 2007.

GLICKMAN, M. E. Dynamic paired comparison models with stochastic variances. **Journal of Applied Statistics**, Abingdon, v. 28, n. 6, p. 673-689, 2001.

GLICKMAN, M. E. **Paired comparison models with time-varying parameters**. 1993. 105 p. Thesis (Ph.D. in Statistics) - Harvard University, Cambridge, 1993.

GLICKMAN, M. E.; JENSEN, S. T. Adaptive paired comparison design. **Journal of Statistical Planning and Inference**, Amsterdam, v. 127, n. 2, p. 279-293, 2005.

GLICKMAN, M. E.; JONES, A. C. Rating the chess rating system. **Chance**, New York, v. 12, n. 1, p. 21-28, 1999.

HU, F.; ZIDEK, J. The weighted likelihood. **The Canadian Journal of Statistics**, Montreal, v. 30, n. 3, p. 347-371, Sept. 2002.

KAGGLE. Disponível em: <<http://www.kaggle.com>>. Acesso em: 10 mar. 2014a.

KAGGLE. **Summary of Elo chess ratings competition, stage set for part II**. Disponível em: <<http://blog.kaggle.com/2010/>>. Acesso em: 10 mar. 2014b.

KOHAVI, R. A study of cross-validation and bootstrap for accuracy estimation and model selection. In: INTERNATIONAL JOINT CONFERENCE ON ARTIFICIAL INTELLIGENCE, 14., 1995, San Francisco. **Proceedings...** San Francisco: IJCAI, 1995. v. 2, p. 1137-1143.

LEONARD, T. An alternative bayesian approach to the bradley-terry model for paired comparisons. **Biometrics**, London, v. 33, p. 121-132, 1977.

LUCE, R. D. **Individual choice behavior**. New York: J. Wiley, 1959. 176 p.

MAGALHÃES, M. N. **Probabilidade e variáveis aleatórias**. São Paulo: EDUSP, 2006. 428 p.

O'HAGAN, A. **Kendall's advanced theory of statistics**. Oxford: E. Arnold, 1994. 512 p.

PLUMMER, M. et al. Coda: convergence diagnosis and output analysis for mcmc. **R News**, New York, v. 6, n. 1, p. 7-11, 2006. Disponível em: <<http://CRAN.R-project.org/doc/Rnews/>>. Acesso em: 10 dez. 2013.

R CORE TEAM. **R: a language and environment for statistical computing**. Vienna, 2014. Disponível em: <<http://www.R-project.org/>>. Acesso em: 10 mar. 2014.

RAFTERY, A. E.; NEWTON, M. A. Estimating the integrated likelihood via posterior simulation using the harmonic mean identity. **Bayesian Statistics**, Kyoto, v. 8, n. 1, p. 1-45, 2007.

SHIMODAIRA, H. Improving predictive inference under covariate shift by weighting the log-likelihood function. **Journal of Statistical Planning and Inference**, Amsterdam, v. 90, p. 227-244, Feb. 2000.

SISMANIS, Y. **How i won the “chess rating-elo vs the rest of the world”**. Ithaca: ArXiv E-prints, 2010. Disponível em: <<http://arxiv.org/abs/1012.4571>>. Acesso em: 10 dez. 2013.

SONAS, J. **Chessmetrics**. Disponível em: <<http://www.chessmetrics.com/cm/>>. Acesso em: 10 dez. 2013.

UNITED STATES CHESS FEDERATION. Disponível em: <<http://www.uschess.org/>>. Acesso em: 10 dez. 2013.

WIKIPEDIA. **Chess libraries**. Disponível em: <<http://en.wikipedia.org/wiki/Chesslibraries>>. Acesso em: 10 mar. 2014.

APÊNDICE

APÊNDICE A - Estimativas pontuais de rating

Estimativas de rating (na escala ELO) obtidas por todos os modelos derivados do Bradley-Terry e Davidson, para cada um dos 46 jogadores analisados no *Training set*. Sigla: ELO.D12 = Rating FIDE (dezembro de 2012), ELO.M14 = Rating FIDE (maio de 2014), BT= Bradley-Terry simples estático, BT1=Bradley-Terry com mando simples (único δ) estático, BT2 = Bradley-Terry completo estático, o mesmo raciocínio serve para os modelos derivados do modelo de Davidson, DV. As siglas seguidas de ω se referem aos modelos com verossimilhança ponderada.

Nomes	ELO.D12	ELO.M14	BT	BT ω	BT1	BT1 ω	BT2	BT2 ω	DV	DV ω	DV1	DV1 ω	DV2	DV2 ω
Adams,Michael	2710	2750	2727,2	2739,8	2729,1	2741,5	2730,5	2724,1	2866,2	2817,1	2873,4	2821,7	2938,3	2899,3
Alekseev,Evgeny	2691	2673	2678,0	2684,9	2680,3	2688,2	2681,4	2675,7	2744,4	2726,1	2753,1	2731,1	2782,3	2768,4
Almasi,Zoltan	2689	2693	2712,3	2716,4	2714,8	2720,8	2716,5	2709,6	2808,3	2780,9	2816,3	2785,6	2871,5	2860,1
Anand,Viswanathan	2775	2785	2816,1	2817,3	2818,2	2820,3	2818,3	2813,7	2946,7	2896,7	2956,7	2899,8	3081,9	3077,6
Andreikin,Dmitry	2723	2722	2715,3	2710,6	2716,0	2711,6	2716,2	2712,4	2802,6	2794,0	2807,5	2797,1	2850,5	2859,9
Areshchenko,Alexander	2720	2701	2697,1	2684,8	2701,5	2692,0	2704,0	2709,2	2767,6	2773,0	2782,8	2781,6	2819,8	2841,0
Aronian,Levon	2815	2815	2814,7	2809,9	2816,8	2812,5	2818,6	2818,0	2946,1	2907,7	2954,1	2912,0	3069,5	3085,1
Bacrot,Etienne	2703	2721	2707,6	2707,6	2707,5	2706,4	2706,9	2705,1	2805,8	2785,6	2807,2	2786,6	2841,2	2836,2
Carlsen,Magnus	2848	2882	2842,1	2841,6	2844,8	2846,0	2846,9	2845,5	3002,0	2949,3	3013,9	2954,7	3148,0	3148,1
Caruana,Fabiano	2782	2783	2739,5	2726,1	2740,4	2726,9	2741,6	2742,6	2830,0	2834,5	2835,0	2837,1	2885,7	2914,1
Ding,Liren	2702	2714	2687,2	2680,0	2686,7	2678,5	2686,8	2685,4	2747,3	2752,8	2746,8	2753,2	2774,3	2791,4
Dominguez Perez,Leinier	2734	2768	2718,7	2726,3	2720,8	2728,1	2720,9	2724,8	2791,6	2768,1	2795,8	2772,0	2858,7	2844,2
Eljanov,Pavel	2687	2732	2705,1	2717,6	2706,2	2718,9	2707,1	2701,9	2801,0	2763,1	2805,3	2766,3	2854,3	2823,0
Gelfand,Boris	2751	2753	2759,6	2749,0	2760,9	2751,0	2761,0	2759,8	2822,7	2809,6	2827,2	2810,8	2908,0	2938,8
Giri,Anish	2720	2746	2711,1	2708,9	2711,7	2710,1	2711,9	2714,0	2802,4	2782,4	2807,9	2784,4	2847,1	2850,0
Grischuk,Alexander	2764	2792	2779,0	2784,7	2780,6	2786,0	2779,7	2773,6	2899,8	2858,4	2905,2	2859,8	2992,4	2982,3
Ivanchuk,Vassily	2766	2753	2771,3	2768,1	2773,4	2771,0	2774,6	2776,0	2883,9	2863,8	2892,9	2869,6	2966,6	2973,7
Jakovenko,Dmitry	2741	2730	2734,5	2739,9	2734,6	2739,4	2736,8	2733,5	2838,0	2811,3	2840,4	2812,1	2899,9	2887,5
Kamsky,Gata	2762	2713	2774,6	2766,4	2776,1	2768,3	2774,0	2772,1	2908,2	2884,0	2916,8	2889,8	2979,6	2994,5
Karjakin,Sergey	2775	2770	2793,0	2794,7	2793,9	2796,0	2795,0	2790,6	2929,8	2890,7	2937,0	2894,2	3026,5	3021,4
Korobov,Anton	2702	2696	2700,1	2694,4	2701,1	2695,3	2703,0	2708,6	2799,2	2786,7	2803,8	2788,1	2847,4	2848,9
Kramnik,Vladimir	2795	2783	2806,9	2810,8	2809,5	2815,3	2811,7	2808,1	2944,2	2888,5	2955,4	2894,5	3079,7	3066,3
Leko,Peter	2732	2737	2731,0	2730,3	2733,4	2732,6	2733,5	2737,8	2795,3	2779,7	2800,2	2783,5	2872,8	2885,8
Le,QuangLiem	2705	2712	2723,3	2739,2	2725,2	2741,2	2724,4	2718,1	2853,0	2806,5	2861,2	2812,4	2913,8	2873,6
Malakhov,Vladimir	2709	2694	2700,4	2711,1	2704,5	2717,0	2704,9	2700,5	2792,6	2758,7	2806,3	2765,5	2852,6	2817,8
Mamedyarov,Shakhriyar	2764	2760	2769,7	2787,9	2765,8	2782,9	2763,0	2756,8	2922,3	2859,0	2916,4	2853,8	2991,2	2953,2
Moiseenko,Alexander	2710	2707	2686,2	2669,7	2683,9	2667,8	2683,6	2688,1	2738,3	2751,4	2735,8	2748,7	2752,2	2784,8
Morozevich,Alexander	2748	2719	2753,6	2713,1	2756,0	2718,9	2757,6	2759,6	2779,3	2820,5	2791,9	2825,7	2853,7	2944,3
Naiditsch,Arkadij	2708	2700	2686,9	2686,3	2686,3	2685,3	2685,3	2689,2	2763,8	2755,6	2763,8	2755,7	2785,5	2790,0
Nakamura,Hikaru	2760	2772	2785,6	2792,7	2789,0	2797,7	2789,9	2788,2	2935,0	2886,9	2947,5	2892,8	3040,4	3019,2
Navara,David	2710	2708	2699,9	2690,7	2702,2	2692,8	2701,3	2704,7	2764,3	2769,1	2771,9	2774,4	2795,4	2816,2
Nepomniachtchi,Ian	2707	2735	2720,5	2726,1	2720,3	2726,9	2720,1	2713,4	2825,1	2790,8	2829,9	2791,9	2880,5	2858,9
Ponomarev,Ruslan	2732	2723	2739,0	2742,3	2739,7	2743,5	2740,8	2739,9	2828,1	2803,3	2832,7	2805,3	2897,8	2887,6
Radjabov,Teimour	2793	2713	2781,2	2778,8	2785,4	2785,6	2783,3	2783,1	2887,3	2850,1	2901,6	2855,5	2987,7	2993,2
Riazantsev,Alexander	2705	2692	2699,5	2698,8	2699,1	2697,7	2699,4	2701,4	2791,8	2777,1	2793,1	2777,5	2829,9	2829,4
Shirov,Alexei	2708	2703	2727,5	2745,5	2729,4	2748,7	2730,3	2724,0	2851,7	2799,4	2860,4	2805,0	2931,9	2889,6
So,Wesley	2682	2731	2671,2	2672,7	2671,8	2674,6	2671,0	2671,1	2735,6	2725,3	2741,5	2727,6	2763,0	2759,6
Svidler,Peter	2747	2753	2760,0	2750,6	2762,3	2753,4	2763,0	2765,7	2852,2	2842,7	2861,5	2847,6	2930,0	2953,3
Tomashevsky,Evgeny	2725	2695	2723,8	2722,4	2725,5	2722,5	2726,2	2728,8	2810,1	2788,1	2812,4	2792,5	2862,4	2869,2
Topalov,Veselin	2771	2772	2728,3	2748,1	2730,5	2750,4	2730,6	2734,6	2810,9	2759,7	2815,7	2763,3	2911,9	2869,9
Vachier-Lagrave,Maxime	2711	2758	2711,6	2711,5	2712,1	2713,3	2711,6	2712,5	2802,7	2788,7	2809,1	2791,7	2846,1	2842,8
VallejoPons,Francisco	2694	2700	2686,3	2686,8	2686,8	2686,6	2686,1	2686,2	2746,6	2736,0	2748,7	2736,6	2783,2	2786,3
Vitugov,Nikita	2694	2742	2706,2	2719,9	2708,5	2722,7	2708,1	2706,4	2820,6	2776,4	2829,2	2781,9	2872,9	2837,6
Wang,Hao	2737	2734	2744,3	2746,2	2746,4	2747,0	2745,7	2745,2	2856,2	2824,8	2861,6	2828,9	2929,8	2924,5
Wang,Yue	2696	2713	2708,0	2712,3	2707,9	2711,4	2707,5	2700,5	2786,6	2770,8	2786,7	2771,0	2832,6	2827,3
Wojtaszek,Radoslaw	2734	2724	2733,7	2732,6	2732,3	2731,2	2732,0	2732,9	2848,4	2824,1	2848,9	2821,1	2894,8	2890,5

**APÊNDICE C - Modelos ordenados em ordem decrescente de confiabilidade
(Análise do *Training set*).**

Modelos ordenados conforme ordem decrescente de exatidão (do menor AIC ou AICM para o maior). $\omega_t = 1$: Modelos estáticos; ω_t : Modelos com verossimilhança ponderada.

Bradley-Terry					
Parâmetros		Parâmetros			
$\omega_t = 1$	$\theta = R_i, \delta$	1°	$\theta = R_i, \delta$	ω_t	
	$\theta = R_i, \delta_i$	2°	$\theta = R_i, \delta_i$		
	$\theta = R_i$	3°	$\theta = R_i$		
	ELO	4°	ELO		
	Equiprovável	5°	Equiprovável		
	Desc. empates	6°	Desc. empates		
	Proporcional	7°	Proporcional		
Davidson					
Parâmetros		Parâmetros			
$\omega_t = 1$	$\theta = \gamma_i, \delta_i, \lambda$	1°	$\theta = \gamma_i, \delta_i, \lambda$	ω_t	
	$\theta = \gamma_i, \delta, \lambda$	2°	$\theta = \gamma_i, \delta, \lambda$		
	$\theta = \gamma_i, \lambda$	3°	$\theta = \gamma_i, \lambda$		
	Proporcional	4°	Proporcional		
	Desc. empates	5°	Desc. empates		
	Equiprovável	6°	Equiprovável		

**APÊNDICE D - Modelos ordenados em ordem decrescente de confiabilidade
(Análise do *Testing set A*).**

Modelos ordenados em ordem decrescente de exatidão com relação ao critério de Akaike e a medida de DeFinetti. $\omega_t = 1$: Modelos estáticos; ω_t : Modelos com verossimilhança ponderada.

Bradley-Terry				
Critério de AKaike			M.DeFinetti	
ω_t	$\theta = R_i, \delta$	1°	$\theta = R_i, \delta$	ω_t
ω_t	$\theta = R_i, \delta_i$	2°	$\theta = R_i, \delta_i$	ω_t
	ELO	3°	Equiprovável	
$\omega_t = 1$	$\theta = R_i, \delta$	4°	ELO	
ω_t	$\theta = R_i$	5°	$\theta = R_i, \delta$	$\omega_t = 1$
	Equiprovável	6°	$\theta = R_i, \delta$	ω_t
$\omega_t = 1$	$\theta = R_i$	7°	Desc. empates	
$\omega_t = 1$	$\theta = R_i, \delta_i$	8°	$\theta = \gamma_i, \lambda$	$\omega_t = 1$
	Desc. Empates	9°	$\theta = R_i, \delta_i$	$\omega_t = 1$
	Proporcional	10°	Proporcional	
Davidson				
ω_t	$\theta = \gamma_i, \delta, \lambda$	1°	$\theta = \gamma_i, \delta, \lambda$	ω_t
$\omega_t = 1$	$\theta = \gamma_i, \delta, \lambda$	2°	Proporcional	
	Proporcional	3°	$\theta = \gamma_i, \delta, \lambda$	$\omega_t = 1$
ω_t	$\theta = \gamma_i, \delta_i, \lambda$	4°	$\theta = \gamma_i, \delta_i, \lambda$	ω_t
ω_t	$\theta = \gamma_i, \lambda$	5°	$\theta = \gamma_i, \delta_i, \lambda$	$\omega_t = 1$
$\omega_t = 1$	$\theta = \gamma_i, \delta_i, \lambda$	6°	$\theta = \gamma_i, \lambda$	ω_t
$\omega_t = 1$	$\theta = \gamma_i \lambda$	7°	$\theta = \gamma_i, \lambda$	$\omega_t = 1$
	Desc. empates	8°	Desc. empates	
	Equiprovável	9°	Equiprovável	

**APÊNDICE E - Modelos ordenados em ordem decrescente de confiabilidade
(Análise do *Testing set B*).**

Modelos ordenados em ordem decrescente de confiabilidade com relação ao critério de Akaike e a medida de DeFinetti. $\omega_t = 1$: Modelos estáticos; ω_t : Modelos com verossimilhança ponderada.

Critério de Akaike		Bradley-Terry				M.DeFinetti	
		ω_t	$\theta = R_i, \delta$		$\theta = R_i, \delta$		
$\delta_i = 0$	ω_t	ELO	1°	$\theta = R_i, \delta$	$\omega_t = 1$	$\delta_i = 0$	
	$\omega_t = 1$	$\theta = R_i, \delta_i$	2°	$\theta = R_i, \delta$	$\omega_t = 1$		
$\delta_i = \mu_{\delta_s}$	ω_t	$\theta = R_i, \delta_i$	3°	$\theta = R_i, \delta_i$	$\omega_t = 1$	$\delta_i = \mu_{\delta_s}$	
	$\omega_t = 1$	$\theta = R_i, \delta$	4°	ELO	$\omega_t = 1$		
$\delta_i = 0$	ω_t	$\theta = R_i, \delta_i$	5°	$\theta = R_i, \delta_i$	ω_t	$\delta_i = 0$	
	$\omega_t = 1$	$\theta = R_i$	6°	$\theta = R_i, \delta_i$	$\omega_t = 1$		
$\delta_i = \mu_{\delta_s}$	ω_t	$\theta = R_i, \delta_i$	7°	$\theta = R_i$	ω_t	$\delta_i = \mu_{\delta_s}$	
	$\omega_t = 1$	$\theta = R_i$	8°	$\theta = R_i$	ω_t		
$\delta_i = -\delta_j$	ω_t	$\theta = R_i, \delta_i$	9°	$\theta = R_i, \delta_i$	ω_t	$\delta_i = -\delta_j$	
	$\omega_t = 1$	$\theta = R_i, \delta_i$	10°	$\theta = R_i, \delta_i$	$\omega_t = 1$		
$\delta_i = -\delta_j$	$\omega_t = 1$	Desc. empates	11°	Desc. empates	$\omega_t = 1$	$\delta_i = -\delta_j$	
		Equiprovável	12°	Equiprovável			
		$\theta = R_i, \delta_i$	13°	$\theta = R_i, \delta_i$			
		Proporcional	14°	Proporcional			
Davidson							
$\delta_i = 0$	$\omega_t = 1$	$\theta = \gamma_i, \delta, \lambda$	1°	$\theta = \gamma_i, \delta, \lambda$	$\omega_t = 1$	$\delta_i = \mu_{\delta_s}$	
	ω_t	$\theta = \gamma_i, \delta, \lambda$	2°	Proporcional	$\omega_t = 1$		
$\delta_i = 0$	$\omega_t = 1$	$\theta = \gamma_i, \lambda$	3°	$\theta = \gamma_i, \delta, \lambda$	ω_t	$\delta_i = \mu_{\delta_s}$	
	ω_t	Proporcional	4°	$\theta = \gamma_i, \lambda$	$\omega_t = 1$		
$\delta_i = \mu_{\delta_s}$	ω_t	$\theta = \gamma_i, \lambda$	5°	$\theta = \gamma_i, \lambda$	ω_t	$\delta_i = -\delta_j$	
	$\omega_t = 1$	Desc.empates	6°	Desc. empates	ω_t		
$\delta_i = \mu_{\delta_s}$	ω_t	$\theta = \gamma_i, \delta_i, \lambda$	7°	$\theta = \gamma_i, \delta_i, \lambda$	ω_t	$\delta_i = 0$	
	$\omega_t = 1$	$\theta = \gamma_i, \delta_i, \lambda$	8°	$\theta = \gamma_i, \delta_i, \lambda$	$\omega_t = 1$		
$\delta_i = -\delta_j$	ω_t	$\theta = \gamma_i, \delta_i, \lambda$	9°	$\theta = \gamma_i, \delta_i, \lambda$	ω_t	$\delta_i = -\delta_j$	
	$\omega_t = 1$	$\theta = \gamma_i, \delta_i, \lambda$	10°	$\theta = \gamma_i, \delta_i, \lambda$	ω_t		
$\delta_i = -\delta_j$	ω_t	Equiprovável	11°	$\theta = \gamma_i, \delta_i, \lambda$	$\omega_t = 1$	$\delta_i = 0$	
	$\omega_t = 1$	$\theta = \gamma_i, \delta_i, \lambda$	12°	$\theta = \gamma_i, \delta_i, \lambda$	$\omega_t = 1$		
$\delta_i = -\delta_j$	ω_t	$\theta = \gamma_i, \delta_i, \lambda$	13°	Equiprovável	$\omega_t = 1$	$\delta_i = -\delta_j$	
	$\omega_t = 1$	$\theta = \gamma_i, \delta_i, \lambda$	13°	Equiprovável	$\omega_t = 1$		