



**RAMON BAIA DE ALFAIA**

**CRITICALIDADE DA CARGA CENTRAL NA  
TERMODINÂMICA DE BURACOS NEGROS ANTI-DE  
SITTER CERCADOS POR DIFERENTES FLUIDOS**

**LAVRAS – MG**

**2022**

**RAMON BAIA DE ALFAIA**

**CRITICALIDADE DA CARGA CENTRAL NA TERMODINÂMICA DE BURACOS  
NEGROS ANTI-DE SITTER CERCADOS POR DIFERENTES FLUIDOS**

Dissertação de mestrado apresentada à  
Universidade Federal de Lavras como parte  
das exigências do Programa de Pós-Graduação  
em Física, área de concentração Partículas e  
Campos, para obtenção do título de Mestre.

Dr. Luiz Cleber Tavares de Brito

Orientador

Dr. Iarley Pereira Lobo

Coorientador

**LAVRAS – MG**

**2022**

**Ficha catalográfica elaborada pelo Sistema de Geração de Ficha Catalográfica da Biblioteca  
Universitária da UFLA, com dados informados pelo(a) próprio(a) autor(a).**

Alfaia, Ramon Baia de.

    Criticalidade da carga central na termodinâmica de buraco  
negros anti-de Sitter cercados por diferentes fluídos / Ramon Baia  
de Alfaia. - 2022.

    55 p.

    Orientador(a): Luiz Cleber Tavares de Brito.

    Coorientador(a): Iarley Pereira Lobo.

    Dissertação (mestrado acadêmico) - Universidade Federal de  
Lavras, 2022.

    Bibliografia.

    1. Relatividade Geral. 2. Termodinâmica de Buracos Negros. 3.  
Métrica de Kiselev. I. Brito, Luiz Cleber Tavares de. II. Lobo,  
Iarley Pereira. III. Título.

**RAMON BAIA DE ALFAIA**


**CRITICALIDADE DA CARGA CENTRAL NA TERMODINÂMICA DE BURACOS  
NEGROS ANTI-DE SITTER CERCADOS POR DIFERENTES FLUIDOS**

**CENTRAL CHARGE CRITICALITY IN THE THERMODYNAMICS OF ANTI-DE  
SITTER BLACK HOLES SURROUNDED BY DIFFERENT FLUIDS**

Dissertação de mestrado apresentada à  
Universidade Federal de Lavras como parte  
das exigências do Programa de Pós-Graduação  
em Física, área de concentração Partículas e  
Campos, para obtenção do título de Mestre.

APROVADA em 16 de Março de 2022.

Dr. Iarley Pereira Lobo                      UFPB - Examinador  
Dr. Luis Cesar Nunes dos Santos      UFPB - Examinador  
Dr. Cleverson Filgueiras                UFLA - Examinador

  
Dr. Luiz Cleber Tavares de Brito  
Orientador

Dr. Iarley Pereira Lobo  
Co-Orientador

**LAVRAS – MG  
2022**

*A todos que contribuíram para este momento*

## **AGRADECIMENTOS**

Aos meus familiares, em especial, meus pais Rubens e Vandete e tios Ruy, Marly e Maísa por todo o apoio em minhas escolhas.

Aos meus amigos paraenses Marcos, Tarciso, Rony, Carlos, pelo companheirismo de longas datas e aos amigos do departamento de Física, Jesus, Romão, Pablo, João e Dimas pelos momentos de descontração e trocas de conhecimento em física e áreas afins.

Aos professores da Universidade do Estado do Pará, Andrey, João Paulo e Penn pela motivação durante os tempos de graduação e pelo incentivo a seguir carreira acadêmica.

À Leide, pela compreensão durante meu período de ausência e por me dar forças em tempos difíceis.

Aos meus orientadores, Luiz Cleber e Iarley Lobo pelos conselhos e ensinamentos passados no desenvolvimento deste trabalho.

À Universidade Federal de Lavras (UFLA) e ao Departamento de Física (DFI) pela oportunidade de desenvolver meus estudos e acolhimento durante a pós graduação.

Ao Programa de Monitoria Nível 2 da Universidade Federal de Lavras por ter financiado esta pesquisa.

À CAPES, FAPEMIG e CNPq pelo financiamento do Programa de Pós Graduação em Física.

## RESUMO

Esta dissertação está inserida no contexto geral da Termodinâmica de Buracos Negros. Após introduzir os fundamentos da Teoria da Relatividade Geral, partimos para o propósito específico do trabalho: a investigação das Leis da Termodinâmica de Buracos Negros no contexto da geometria de Kiselev em  $D$  dimensões na presença de diferentes espécies de fluidos. Apresentamos as leis da termodinâmica para o modelo e analisamos o comportamento crítico do modelo na abordagem holográfica proposta recentemente em (CONG; KUBIZNAK; MANN, 2021). Como resultado, mostramos que a técnica holográfica permanece válida para a geometria de Kiselev quando o espaço de fase estendido é generalizado para incorporar uma termodinâmica com uma constante gravitacional variável.

**Palavras-chave:** Relatividade Geral, Termodinâmica de Buracos Negros, Métrica de Kiselev, Comportamento crítico.

## ABSTRACT

This dissertation is inserted in the general context of Black Hole Thermodynamics. After introducing the fundamentals of the General Theory of Relativity, we consider the specific purpose of the work: the investigation of the Laws of Black Hole Thermodynamics in the context of Kiselev's geometry in  $D$  dimensions in the presence of different kinds of fluids. We present the laws of thermodynamics for the model and analyze the critical behavior of the model in the holographic approach recently proposed in (CONG; KUBIZNAK; MANN, 2021). As a result, we show that the holographic technique remains valid for Kiselev geometry when the extended phase space is generalized to incorporate a thermodynamics with a variable gravitational constant.

**Keywords:** General Relativity, Black Hole Thermodynamics, Kiselev Metric, Critical Behavior.



## SUMÁRIO

<b>1</b>	<b>Introdução</b>	<b>7</b>
<b>2</b>	<b>Fundamentos da Relatividade Geral</b>	<b>10</b>
<b>2.1</b>	<b>Equações de Einstein</b>	<b>10</b>
<b>2.2</b>	<b>Simetrias e Campos de Vetores de Killing</b>	<b>11</b>
<b>2.3</b>	<b>A métrica de Schwarzschild</b>	<b>12</b>
<b>2.4</b>	<b>Coordenadas de Kruskal-Szekeres</b>	<b>13</b>
<b>3</b>	<b>Termodinâmica de Buracos Negros</b>	<b>18</b>
<b>3.1</b>	<b>Lei Zero</b>	<b>18</b>
<b>3.2</b>	<b>Primeira, Segunda e Terceira Leis da Termodinâmica</b>	<b>21</b>
<b>3.3</b>	<b>Termodinâmica do buraco negro de Reissner-Nordström no espaço Anti-de Sitter</b>	<b>23</b>
<b>3.3.1</b>	<b>Criticalidade e Transição de Fase</b>	<b>26</b>
<b>4</b>	<b>Buraco Negro de Kiselev</b>	<b>29</b>
<b>4.1</b>	<b>Solução em 4 dimensões</b>	<b>29</b>
<b>4.2</b>	<b>Relação de Smarr para o buraco negro de Kiselev em 4 dimensões</b>	<b>31</b>
<b>4.3</b>	<b>Transição de fase do buraco negro de Reissner-Nordström anti-de Sitter na presença de um fluido de quintessência</b>	<b>34</b>
<b>4.4</b>	<b>Solução em D dimensões</b>	<b>37</b>
<b>5</b>	<b>Criticalidade de um buraco negro anti-de Sitter imerso em diferentes fluidos</b>	<b>39</b>
<b>5.1</b>	<b>Termodinâmica com G constante em D dimensões</b>	<b>39</b>
<b>5.2</b>	<b>Termodinâmica com G variável em D dimensões</b>	<b>41</b>
<b>5.3</b>	<b>Classificação de buracos negros e a termodinâmica estendida em <math>D = 4</math></b>	<b>45</b>
<b>5.4</b>	<b>Comportamento crítico</b>	<b>49</b>
<b>6</b>	<b>Conclusão</b>	<b>53</b>
	<b>REFERÊNCIAS</b>	<b>54</b>

## 1 INTRODUÇÃO

Com o advento da Relatividade Restrita, no início do século XX, espaço e tempo deixaram de ser grandezas independentes para juntas se tornarem fundamentais à descrição da geometria do espaço-tempo. Nesse cenário, as leis da Física são as mesmas independentemente do referencial inercial adotado, além disso, a velocidade da luz impõe, localmente, um limite físico de velocidade de propagação de um sinal ou de qualquer corpo material. Em 1915, partindo da base fornecida pela Relatividade Restrita, Albert Einstein propôs um conjunto de equações que sintetizavam uma nova visão do campo gravitacional: a Relatividade Geral.

A Teoria da Relatividade Geral contrapõe-se ao conhecimento sobre Gravitação estabelecido naquela época. De acordo com os conhecimentos da Física newtoniana, espaço e tempo seriam grandezas físicas independentes e absolutas. Desse modo, a medida de ambas era vista como independente do referencial adotado. Além disso, na visão newtoniana, a força gravitacional seria uma interação instantânea de ação à distância (HOBSON; EFSTATHIOU; LASENBY, 2006).

Através da Relatividade Geral, a gravidade passou a ser entendida como uma deformação na geometria do espaço-tempo. Por outro lado, a interpretação newtoniana afirma que a força da gravidade seria oriunda da atração entre os objetos devido as suas massas. Além disso, a Relatividade Geral é uma teoria de campos, o que elimina o problema da ação instantânea à distância existente na teoria newtoniana (D'INVERNO, 1992).

A solução de Schwarzschild foi a primeira solução exata para as equações da Relatividade Geral. Prediz a possibilidade de um objeto extremamente massivo, com intenso campo gravitacional ao seu redor, chamado de Buraco Negro. Por menos intuitiva que sejam suas propriedades, sabemos atualmente que sua existência é real (ABBOTT et al., 2016; AKIYAMA et al., 2019; GHEZ et al., 1998; SCHÖDEL et al., 2002) e que podem ocorrer naturalmente como o estágio final de uma estrela (WEINBERG, 1972). Posteriormente, outras soluções foram encontradas como a de de Reissner-Nordström para um buraco negro carregado e a de Kerr-Newmann, que caracteriza um buraco negro carregado e com rotação.

A termodinâmica de buracos negros nasceu em 1972, quando Jacob Bekenstein propôs que buracos negros possuem entropia (BEKENSTEIN, 2020). Essa afirmação discordava da noção corrente à época, pois acreditava-se que buracos negros não poderiam emitir radiação e, portanto, não seriam dotados de temperatura. Por isso, Bekenstein não formalizou sua teoria, e com isso a possibilidade da existência de uma termodinâmica para buracos negros foi entendida

como uma mera especulação. Para uma revisão ampla sobre o assunto, consultar a referência (KUBIZŇÁK; MANN; TEO, 2017).

Porém, em 1974 o físico Stephen Hawking elaborou argumentos indicando que, devido a efeitos quânticos, o buraco negro pode se comportar como um corpo negro e emitir radiação, conhecida atualmente como Radiação Hawking (HAWKING, 1975). Anteriormente, mostrou-se que as Leis da Termodinâmica de Buracos Negros representam a relação entre os observáveis e as leis da física de buracos negros com as leis da termodinâmica clássica (BARDEEN; CARTER; HAWKING, 1973). Isso possibilita analisar buracos negros como sistemas termodinâmicos, o que nos permite determinar grandezas como pressão, temperatura, volume, dentre outras.

Em particular, a introdução de uma constante cosmológica implica que buracos negros podem sofrer mudanças de fase, uma vez que este parâmetro está diretamente relacionado com a pressão (KUBIZŇÁK; MANN; TEO, 2017). A partir dessas definições, podemos estudar a termodinâmica de buracos negros em uma nova estrutura, muitas vezes chamada de Química de Buracos Negros. Nesta abordagem, o comportamento dos buracos negros é análogo à uma variedade de fenômenos químicos, como o comportamento do gás de Van der Waals.

Com esta motivação, esta dissertação aborda o estudo da Termodinâmica de Buracos Negros tendo como foco o buraco negro anti-de Sitter imerso em diferentes fluidos (Buraco Negro de Kiselev). Visando este objetivo específico, iniciaremos o capítulo 1 desta dissertação com uma discussão elementar sobre alguns aspectos da Teoria da Relatividade Geral e a apresentação das Equações de Einstein. Em seguida será apresentada uma breve discussão sobre simetrias e vetores de Killing, além da primeira solução exata para as equações de Einstein: a solução de Schwarzschild. Mais detalhes sobre esses tópicos podem ser encontrados nas referências (D'INVERNO, 1992; HOBSON; EFSTATHIOU; LASENBY, 2006; POISSON, 2004; WEINBERG, 1972).

A partir disso, realizamos no capítulo 2 um estudo detalhado sobre a termodinâmica de buracos negros através da construção das leis da termodinâmica para esses objetos, relacionando os observáveis da termodinâmica clássica com os do espaço-tempo de Schwarzschild. Após a construção deste arcabouço teórico, apresentamos no capítulo 3 uma breve descrição da termodinâmica para o caso do Buraco Negro de Reissner-Nordström no espaço de fase Anti de-Sitter (FERNANDO, 2018). Em seguida, no capítulo 4, adentramos o tema desta dissertação descrevendo o buraco negro de Kiselev em  $D$  dimensões. No último capítulo apresentaremos a

termodinâmica do buraco negro de Kiselev em  $D$  dimensões em um espaço de fase estendido. Neste cenário, a constante gravitacional  $G$  é tratada como uma variável termodinâmica. Finalizamos discutindo a relação dos resultados com a abordagem holográfica e com o estudo do comportamento crítico do buraco negro.

## 2 FUNDAMENTOS DA RELATIVIDADE GERAL

Iniciaremos este capítulo fazendo um breve resumo sobre os fundamentos da Relatividade Geral. Primeiramente serão introduzidas as equações de Einstein e, em seguida, apresentada a discussão sobre simetrias e tensores de Killing. Posteriormente será discutida a solução de Karl Schwarzschild para Equações de Einstein, que deu origem ao estudo de Buracos Negros. O capítulo será finalizado com uma discussão sobre as Coordenadas de Kruskal-Szekeres.

### 2.1 Equações de Einstein

As equações de Einstein fazem a descrição do conceito moderno de Gravidade. Através destas equações, temos o entendimento que a atração entre objetos massivos (mais precisamente, com um certo tensor momento-energia) é devido à curvatura na geometria do espaço-tempo. A geometria é dada pelo tensor de Einstein  $G_{\mu\nu}$ , que está relacionado com a densidade de energia e matéria, representado pelo tensor momento-energia  $T_{\mu\nu}$ , através da Equação de Einstein

$$G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}Rg_{\mu\nu} = \frac{8\pi G}{c^4}T_{\mu\nu}. \quad (2.1)$$

Nesta equação,  $g_{\mu\nu}$  é o tensor métrico, que tem a finalidade de descrever o tipo de geometria do espaço-tempo,  $G$  é a constante de Newton e  $c$  é a velocidade da luz. O tensor de Ricci  $R_{\mu\nu}$  e o escalar de curvatura  $R$  são definidos, respectivamente, por

$$R_{\mu\nu} = \Gamma_{\mu\sigma,\nu}^{\sigma} - \Gamma_{\mu\nu,\sigma}^{\sigma} + \Gamma_{\mu\sigma}^{\xi}\Gamma_{\xi\nu}^{\sigma} - \Gamma_{\mu\nu}^{\xi}\Gamma_{\xi\sigma}^{\sigma} \quad (2.2)$$

e

$$R = g^{\mu\nu}R_{\mu\nu}, \quad (2.3)$$

onde foi introduzida a notação  $F_{,\nu} = \frac{\partial F}{\partial x^{\nu}}$ , em que  $F$  é uma função arbitrária que em geral pode conter índices covariantes e contravariantes. Podemos reescrever o tensor de Ricci através do tensor métrico. Para isto, basta utilizarmos os Símbolos de Christoffel  $\Gamma_{\beta\gamma}^{\alpha}$ :

$$\Gamma_{\beta\gamma}^{\alpha} = \frac{1}{2}g^{\alpha\theta} (g_{\theta\gamma,\beta} + g_{\beta\theta,\gamma} - g_{\beta\gamma,\theta}). \quad (2.4)$$

Os Símbolos de Christoffel expressam a conexão afim em um espaço métrico Riemanniano. A conexão é a grandeza que permite comparar vetores infinitesimalmente separados e assim definir paralelismo em uma variedade arbitrária e as chamadas geodésicas, que são curvas auto-paralelas. Como podemos reescrever os elementos da equação de Einstein em termos do tensor de curvatura, que por sua vez depende da métrica, podemos inferir que as equações de Einstein são equações dinâmicas para a métrica do espaço-tempo.

## 2.2 Simetrias e Campos de Vetores de Killing

Assim como em mecânica clássica e mecânica quântica, as simetrias estão presentes no contexto da relatividade geral. O conceito de simetria pode ser entendido como uma transformação que mantém uma grandeza invariante. No caso da Relatividade Geral, uma grandeza que pode estar sujeita transformações de simetria é o tensor métrico  $g_{\mu\nu}$  (D'INVERNO, 1992). A partir dessa ideia, podemos definir o que são os vetores de Killing.

Vetores de Killing geram simetrias no espaço-tempo, portanto estão associados a transformações de coordenadas do tipo  $x^\mu \rightarrow x'^\mu$ . Dessa forma, trataremos da transformações de coordenadas para as quais o tensor métrico permanece inalterado. Precisaremos analisá-los porque estudaremos um espaço-tempo de buraco negro estático (com simetria por translações temporais) e esfericamente simétrico (com simetria rotacional).

Para o caso de uma transformação infinitesimal no sistema de coordenada  $x$ , temos

$$x^\mu \rightarrow x'^\mu = x^\mu + \varepsilon X^\mu(x), \quad (2.5)$$

onde  $\varepsilon$  é um parâmetro infinitesimal e  $X^\mu$  um campo vetorial.

A hipótese de invariância da métrica pode ser escrita como

$$g_{\mu\nu}(x) = g'_{\mu\nu}(x). \quad (2.6)$$

Do fato de que a métrica é um tensor de 2ª ordem, tem-se que

$$g'_{\mu\nu}(x) = \frac{\partial x^\alpha}{\partial x'^\mu} \frac{\partial x^\beta}{\partial x'^\nu} g_{\alpha\beta}(x). \quad (2.7)$$

Substituindo a (2.7) em (2.6), utilizando a (2.5) e desprezando termos de segunda ordem em  $\varepsilon$ , obtém-se:

$$\begin{aligned} g_{\mu\nu}(x) &= \left( \delta_{\mu}^{\alpha} + \varepsilon X_{,\mu}^{\alpha}(x) \right) \left( \delta_{\nu}^{\beta} + \varepsilon X_{,\nu}^{\beta}(x) \right) g_{\alpha\beta}(x) \\ &= g_{\mu\nu}(x) + \varepsilon (X_{\mu,\nu} + X_{\nu,\mu}) \end{aligned} \quad (2.8)$$

em que foi utilizada a definição da delta de Kronecker  $\frac{\partial x^{\alpha}}{\partial x^{\beta}} = \delta_{\beta}^{\alpha}$  e a propriedade da métrica  $A^{\mu} g_{\mu\nu} = A_{\nu}$ . Da equação (2.8), conclui-se que a métrica será invariante se for satisfeita a condição

$$X_{\mu;\nu} + X_{\nu;\mu} = 0, \quad (2.9)$$

onde  $X_{\mu;\nu} = X_{\mu,\nu} - \Gamma_{\mu\nu}^{\alpha} X_{\alpha}$  é a derivada covariante de  $X_{\mu}$ . Estas são as equações de Killing, cuja as soluções são os campos vetoriais de Killing. Portanto, podemos classificar o espaço-tempo utilizando suas simetrias. Em particular, o espaço-tempo é dito estacionário se ele apresentar um campo de Killing tipo-tempo (ou seja, com norma negativa, segundo a assinatura da métrica que utilizaremos  $(-+++)$ ). Um espaço-tempo estático possui um vetor de Killing tipo-tempo e apresenta um sistema de coordenadas no qual a métrica não depende da coordenada temporal e não possui termos cruzados envolvendo o tempo. Além disso, um espaço-tempo é dito esfericamente simétrico se ele possui um conjunto de vetores de Killing que obedecem à álgebra dos geradores do grupo de rotações (D'INVERNO, 1992).

### 2.3 A métrica de Schwarzschild

Em 1916, Karl Schwarzschild desenvolveu a primeira solução exata para as equações de campo da Relatividade Geral. Utilizando argumentos de simetria, mostrou que o campo gravitacional estático e com simetria esférica, externo a um corpo de massa  $M$  com a mesma simetria, é dado pelo elemento de linha

$$ds^2 = - \left( 1 - \frac{2M}{r} \right) dt^2 + \left( 1 - \frac{2M}{r} \right)^{-1} dr^2 + r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2). \quad (2.10)$$

A expressão acima corresponde à geometria de Schwarzschild em coordenadas esféricas  $(t, r, \theta, \phi)$ , e descreve o espaço-tempo de um buraco negro, chamado buraco negro de Schwarzschild. Além disso, na expressão acima foram utilizadas unidades naturais em que

$G = c = 1$ . A métrica de Schwarzschild é diagonal, com as componentes da métrica dada pelo tensor  $g_{\mu\nu}$ :

$$g_{\mu\nu} = \text{diag} \left[ - \left( 1 - \frac{2M}{r} \right), \left( 1 - \frac{2M}{r} \right)^{-1}, r^2, r^2 \sin^2 \theta \right]. \quad (2.11)$$

Note que para  $r \rightarrow \infty$  em (2.10), recuperamos a métrica de Minkowski em coordenadas esféricas. E com uma transformação de coordenadas, obtemos a métrica de Minkowski em coordenadas cartesianas

$$ds^2 = -dt^2 + dx^2 + dy^2 + dz^2. \quad (2.12)$$

Isso implica que a métrica de Schwarzschild é assintoticamente plana.

Analisando a métrica de Schwarzschild, assumindo valores de  $r = 0$  e  $r = 2M$ , uma das componentes de (2.10) diverge, isto pode estar associado ou não ao sistema de coordenadas utilizado.

A coordenada  $r_S = 2M$  é denominada de raio de Schwarzschild. A singularidade em  $r_S$  existente em (2.10) pode ser removida através de uma mudança de coordenadas; esse ponto será discutido na próxima seção. Diferentemente, a singularidade em  $r = 0$  não é removível, sendo denominada de singularidade física.

## 2.4 Coordenadas de Kruskal-Szekeres

Para contornar o problema da singularidade na métrica quando  $r = 2M$ , em 1960 Martin Kruskal e Gyorgy Szekeres introduziram um sistema de coordenadas compatível com as geodésicas nulas ( $ds^2 = 0$ ) em que foram utilizadas curvas radiais, ou seja, em que  $\theta$  e  $\phi$  são constantes (POISSON, 2004). Levando em consideração essa condição, a (2.10) pode ser reescrita como

$$dt = \pm \left( 1 - \frac{2M}{r} \right)^{-1} dr. \quad (2.13)$$

O sinal positivo na expressão acima corresponde a um raio de luz se afastando da origem, enquanto que o sinal negativo corresponde a um raio de luz que se aproxima da origem. Integrando (2.13), temos

$$t = \pm r^* + \text{const}, \quad (2.14)$$



onde

$$r^* = r + 2M \ln \left| 1 - \frac{r}{2M} \right| \quad (2.15)$$

e

$$dr^* = \frac{dr}{1 - 2M/r}. \quad (2.16)$$

A partir de (2.14), introduzimos novas coordenadas  $u$  e  $v$  definidas por

$$u = t - r^* \quad \text{e} \quad v = t + r^*. \quad (2.17)$$

Seguindo a escolha do sinal (2.14),  $u$  ou  $v$  constantes correspondem, respectivamente, às trajetórias de um raio de luz se afastando (outgoing) ou se aproximando (ingoing) da origem. Para reescrevermos a (2.10) no sistema de coordenadas  $(u, v)$ , tomamos o diferencial das coordenadas (2.17) e (2.15) e substituímos no produto  $dudv = d^2t - d^2r^*$ , obtendo o resultado

$$\left(1 - \frac{2M}{r}\right) dudv = \left(1 - \frac{2M}{r}\right) dt^2 - \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-1} dr^2. \quad (2.18)$$

Comparando (2.18) com (2.10), a métrica de Schwarzschild assume a forma

$$ds^2 = - \left(1 - \frac{2M}{r}\right) dudv + r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2). \quad (2.19)$$

Somando as coordenadas  $u$  e  $v$  em (2.17) temos que

$$r^* = \frac{1}{2}(v - u), \quad (2.20)$$

em que  $r^*$  depende da coordenada original  $r$  de acordo com a equação (2.15).

Quando  $r \rightarrow 2M$ , a (2.15) nos mostra que  $v - u = -\infty$  e portanto, o termo linear  $r$  é desprezado. Assim,  $r^*$  é reescrito

$$r^* \approx 2M \ln \left| 1 - \frac{r}{2M} \right| \Rightarrow \mp e^{(v-u)/4M} \approx \frac{r}{2M} \left(1 - \frac{2M}{r}\right), \quad (2.21)$$

logo,

$$\mp e^{(v-u)/4M} = \left(1 - \frac{2M}{r}\right). \quad (2.22)$$

Em que o sinal positivo corresponde a  $r > 2M$  e negativo a  $r < 2M$  são regiões em torno de  $r = 2M$ . A métrica (2.19) torna-se

$$ds^2 \approx \mp \left( e^{-u/4M} du \right) \left( e^{v/4M} dv \right) + r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2). \quad (2.23)$$

Isso motiva a definir um novo sistema de coordenadas em que  $U = \mp e^{-u/4M}$  e  $V = e^{v/4M}$ . Desta forma, a (2.22) torna-se

$$\mp UV = e^{(v-u)/4M} = e^{r^*/2M} \Rightarrow -UV = e^{r/2M} \left( \frac{r}{2M} - 1 \right). \quad (2.24)$$

O produto dos diferenciais de  $U$  e  $V$  nos mostra que

$$dudv = \pm 16M^2 e^{-(v-u)/4M} dU dV, \quad (2.25)$$

ou ainda

$$\left( 1 - \frac{2M}{r} \right) dudv = \frac{32M^3}{r} e^{-r/2M} dU dV. \quad (2.26)$$

Comparando com (2.19), temos

$$ds^2 = -\frac{32M^3}{r} e^{-r/2M} dU dV + r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2), \quad (2.27)$$

que é o elemento de linha de Schwarzschild nas coordenadas de Kruskal-Szekeres. Diferentemente da métrica (2.10), a mudança de coordenadas faz com que a métrica não seja singular para o raio de Schwarzschild, porém ela continua singular para  $r = 0$ , o que implica que esta é uma singularidade física, enquanto  $r = 2M$  era apenas uma singularidade removível por transformação de coordenadas.

Como as funções  $U$  e  $V$  são dependentes das coordenadas do tipo-luz, estas funções também são constantes ao longo das curvas tipo-luz. A partir de (2.24) vemos que as curvas com  $r = \mathbf{const}$  são aquelas que satisfazem

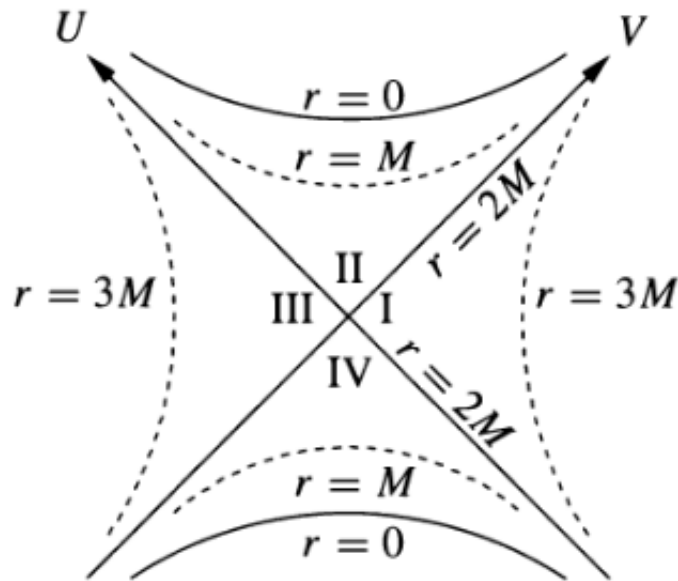
$$UV = \mathbf{const}, \quad (2.28)$$

que é a equação de uma hipérbole no plano  $U$ - $V$ . Para  $r = 2M$  temos que  $UV = 0$ , o que implica em hipérbolas que se degeneram e coincidem com os eixos do plano  $U$ - $V$ . Em para  $r = 0$ , temos

$UV = 1$ , que são as hipérbolas contidas nas regiões **II** e **IV** que contêm a singularidade não removível. Para  $r = 3M$ , temos  $UV < 0$  que estão contidas nas regiões **I** e **III**.

A união destas regiões forma o Diagrama de Kruskal-Szekeres que descreve o espaço-tempo estendido de Schwarzschild, de acordo com a figura (2.1).

Figura 2.1 – Diagrama de Kruskal-Szekeres.



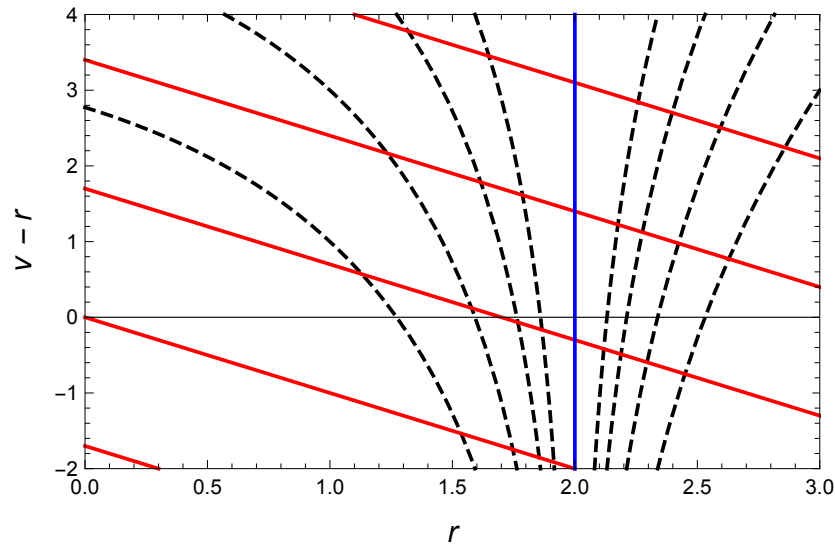
Fonte: POISSON, (1), 2004, p.166

Imagine que um objeto em queda livre na região **I**, cruza o horizonte de eventos e chega na região **II** até a singularidade. Supondo que este objeto possa emitir um feixe de luz, devido ao intenso campo gravitacional, o feixe permanecerá confinado nesta região, pois ele deve permanecer na superfície do cone luz definido pelos eixos  $U - V$ , e cairá na singularidade. Devido a este comportamento, podemos descrever a região **II** como um buraco negro. A região **IV** possui a mesma estrutura da região **II**, mas com as coordenadas  $U$  e  $V$  invertidas, ou seja, se o feixe de luz fosse emitido em **IV** passaria pelo horizonte de eventos, saindo pela região **III** ou **I** descrevendo o que é conhecido como buraco branco.

Também é possível ver essa distorção do cone de luz que caracteriza  $r = 2M$  como uma "região de não-retorno" através do diagrama da figura (2.2), na qual o eixo vertical corresponde a  $v - r$ , e vemos que os raios de luz que se aproximam do buraco negro (ingoing) fazem um ângulo de  $45^\circ$  com o eixo  $r$ , e os raios de luz que se afastam obedecendo uma equação do tipo (POISSON, 2004):

$$\frac{d(v-r)}{dr} = \frac{dv}{dr} - 1 = \frac{2}{1-2M/r} - 1. \quad (2.29)$$

Figura 2.2 – Diagrama de espaço-tempo nas coordenadas  $(v - r) \times r$ .



Fonte: Alfaia, 2021

A equação acima é obtida como segue: fazendo o diferencial dos raios outgoing, temos  $dt = dr^*$ , pois  $du = 0$ . Substituindo em  $dv = dt + dr^*$  e utilizando (2.16) determinamos

$$\frac{dv}{dr} = \frac{2}{1 - 2M/r}, \quad (2.30)$$

que é a equação da geodésica outgoing. Em termos  $(v - r) \times r$  encontramos  $d(v - r)/dr = 2/(1 - 2M/r) - 1$ , a própria (2.29). Para os raios ingoing temos  $dt = -dr^*$ , pois  $dv = 0$ . Substituindo em (2.29), encontramos

$$\frac{d(v - r)}{dr} = -1, \quad (2.31)$$

que é a equação da geodésica ingoing. A partir de (2.29) e (2.31) construímos o diagrama 2.2.

### 3 TERMODINÂMICA DE BURACOS NEGROS

Esta seção tem o propósito de estabelecer a conexão entre as leis da termodinâmica e a física de buracos negros. Nesse sentido, é possível mostrar que existe uma correspondência entre as grandezas termodinâmicas e as grandezas definidas a partir da geometria de buracos negros. Isso permite iniciar as leis da termodinâmica de buracos negros sem a necessidade da Teoria de Campos em Espaços Curvos, que não será abordada nesse trabalho.

#### 3.1 Lei Zero

A Lei Zero da termodinâmica estabelece o equilíbrio térmico entre sistemas, enunciada do seguinte modo: "Se dois sistemas estão em equilíbrio térmico com um terceiro, estes estão em equilíbrio térmico entre si"(NUSSENZVEIG, 2018). Para determinarmos se um conjunto de sistemas está em equilíbrio térmico, precisa-se identificar se todos possuem a mesma temperatura.

Como consequência da Lei Zero, um sistema em equilíbrio térmico possuirá temperatura constante. Para fazermos a conexão entre a termodinâmica e a mecânica de buracos negros, precisamos definir a grandeza física denominada de gravidade superficial  $\kappa$ .

Inicialmente o elemento de linha de Schwarzschild (2.10) será escrito como

$$ds^2 = -f(r)dt^2 + f(r)^{-1}dr^2 + r^2d\Omega^2, \quad (3.1)$$

onde definimos a função

$$f(r) = 1 - \frac{2M}{r} \quad (3.2)$$

e a métrica da superfície da esfera de raio unitário

$$d\Omega^2 = d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2. \quad (3.3)$$

Primeiramente, vamos fazer o estudo da métrica  $f(r)$  próximo ao horizonte de eventos  $r_+ = 2M$ , o raio de Schwarzschild. Utilizando a expansão de Taylor e desprezando termos de segunda ordem, temos

$$f(r) \approx f'(r)|_{r=r_+}(r - r_+), \quad (3.4)$$

em que foi utilizado  $f(r_+) = 0$ . A gravidade superficial  $\kappa$  é definida por

$$\kappa = \frac{1}{2} f'(r)|_{r=r_+}, \quad (3.5)$$

de modo que a (3.4) equivale a

$$f(r) = 2\kappa(r - r_+). \quad (3.6)$$

A gravidade superficial  $\kappa$  representa a força necessária para que um observador a uma distância infinita do buraco negro mantenha uma partícula de massa unitária estacionária no horizonte de eventos (POISSON, 2004). De fato, pelas características da métrica de Schwarzschild (3.1), vemos que esse espaço-tempo é estático, portanto possui um vetor de Killing  $t^\alpha$  (e já está adaptado à forma estática, sem termos cruzados de tempo e espaço).

Pela definição de referencial estacionário, a quadri-velocidade  $u^\alpha$  é proporcional ao vetor de Killing (POISSON, 2004)

$$u^\alpha = \xi t^\alpha. \quad (3.7)$$

Usando a normalização  $-1 = u^\alpha u_\alpha$  e a (3.7) obtemos

$$-1 = \xi^2 g_{00}. \quad (3.8)$$

Da (3.1), temos que  $g_{00} = -f(r)$ . Desse modo, a constante de proporcionalidade  $\xi$  é dada por

$$\xi = f(r)^{-1/2}. \quad (3.9)$$

Substituindo a expressão de  $\xi$  obtida acima em (3.7), temos

$$u^\alpha = f(r)^{-1/2} t^\alpha. \quad (3.10)$$

A partir da definição da quadriaceleração

$$a^\alpha = u^\beta u^\alpha{}_{;\beta} = u^\beta \left[ u^\alpha{}_{,\beta} + \Gamma^\alpha_{\beta\gamma} u^\gamma \right], \quad (3.11)$$

podemos determinar as suas componentes:

$$a^0 = u^0 \left[ u^0{}_{,0} + \frac{1}{2} g^{00} (g_{00,0} + g_{00,0} - g_{00,0}) \right] = 0; \quad (3.12)$$

$$a^1 = u^1 \left[ u^1_{,0} + \frac{1}{2} g^{01} (g_{10,0} + g_{01,0} - g_{00,1}) \right] = \frac{1}{2} f'(r); \quad (3.13)$$

$$a^2 = u^2 \left[ u^2_{,0} + \frac{1}{2} g^{02} (g_{20,0} + g_{02,0} - g_{00,2}) \right] = 0; \quad (3.14)$$

$$a^3 = u^3 \left[ u^3_{,0} + \frac{1}{2} g^{03} (g_{30,0} + g_{03,0} - g_{00,3}) \right] = 0. \quad (3.15)$$

Para obter as componentes acima foram utilizados os símbolos de Christoffel (2.4) e as componentes da métrica dadas em (2.11).

Assim, determinamos que a quadriaceleração depende apenas da componente radial (3.13). O módulo do vetor aceleração depende apenas de  $r$  e é dado por

$$a(r) = \left[ g_{\alpha\beta} a^\alpha a^\beta \right]^{1/2} = \left[ g_{11} a^1 a^1 \right]^{1/2} = \frac{1}{2} f(r)^{-1/2} f'(r), \quad (3.16)$$

em que foi usada (2.11) e a (3.13).

Uma vez que a quadriaceleração possui uma componente não-nula, a trajetória da partícula não é uma geodésica. Em outras palavras, a (3.16) nos mostra que existe uma força aplicada localmente na partícula, mantendo-a em sua trajetória. Para o caso da partícula na coordenada  $r$ , o valor da aceleração  $a_\infty(r)$  em relação a um observador no infinito é obtida da seguinte forma.

Suponha que a partícula esteja presa por uma corda infinita sem massa e esticada até um observador no infinito. Se o observador deslocar a corda por uma distância própria  $\delta S$ , o trabalho realizado sobre a corda é  $\delta W_\infty = a_\infty \delta S$ , em que  $a_\infty$  é a força exercida pelo observador sobre a corda. Essa força é transmitida à partícula através da corda, realizando sobre esta um trabalho (lembrar que a massa da partícula é unitária)

$$\delta W = a(r) \delta S. \quad (3.17)$$

Se o trabalho realizado sobre a partícula for integralmente convertido em radiação e coletado no infinito pelo observador, a energia  $\delta E_\infty$  detectada terá sofrido um redshift

gravitacional<sup>1</sup> por um fator  $f(r)^{1/2}$  (HOBSON; EFSTATHIOU; LASENBY, 2006)

$$\delta E_\infty = f(r)^{1/2} a(r) \delta S. \quad (3.18)$$

Como a energia é conservada,  $\delta E_\infty = \delta W_\infty$ . Logo, a (3.16), (3.17) e a (3.18) conduzem a

$$a_\infty(r) = \frac{1}{2} f'(r). \quad (3.19)$$

Assim, a força exercida pelo observador no infinito - ou seja, a gravidade superficial - para que a partícula seja mantida no horizonte de eventos é dada por

$$\kappa = a_\infty(r_+) = \frac{1}{2} f'(r_+) = \frac{1}{4M}. \quad (3.20)$$

Para obter a expressão acima, foi utilizada a definição (3.2) e  $r_+ = 2M$ . Como  $\kappa$  depende somente de  $r_+$ , vemos que ela é constante ao longo da superfície (pois não depende de coordenadas angulares e temporais). De fato, isso permite definir a temperatura  $T$  da superfície do buraco negro como proporcional à essa quantidade:

$$T = \frac{\kappa}{2\pi}. \quad (3.21)$$

Assim, isso permite enunciar um análogo à lei zero da termodinâmica para buracos negros da seguinte forma: A gravidade superficial  $\kappa$  de um buraco negro de Schwarzschild é constante ao longo do horizonte de eventos.<sup>2</sup>

### 3.2 Primeira, Segunda e Terceira Leis da Termodinâmica

A 1ª Lei da termodinâmica equivale à lei da conservação da energia, (NUSSENZVEIG, 2018):

$$dU = TdS - dW. \quad (3.22)$$

<sup>1</sup> Desvio no comprimento de onda da radiação devido ao campo gravitacional.

<sup>2</sup> De fato, essa analogia se confirma ao se estudar a emissão de radiação na vizinhança de um buraco negro utilizando ferramentas de teoria quântica de campos em espaços curvos (MUKHANOV; WINITZKI, 2007).



A identidade acima relaciona a diferença de energia interna  $dU$  de um sistema com sua diferença de entropia  $dS$  e o trabalho realizado pelo sistema  $dW$ . O parâmetro  $T$  representa a temperatura de equilíbrio.

Para compararmos a 1ª lei da termodinâmica com a mecânica de buracos negros, precisamos entender a relação entre a área  $A$ , a massa  $M$  do buraco negro e a gravidade superficial  $\kappa$ . Para um buraco negro de Schwarzschild com massa  $M$  e raio  $r_+ = 2M$  a área é dada por

$$A = \int_0^\pi d\theta \int_0^{2\pi} d\phi \sqrt{|\mathbf{det}[g]|}, \quad (3.23)$$

em que  $\mathbf{det}[g] = -r_+^4 \sin^2 \theta$  é o determinante da métrica (2.11) avaliado em  $r_+ = 2M$ . Logo,

$$A = 4M^2 \int_0^\pi \sin \theta d\theta \int_0^{2\pi} d\phi = 16\pi M^2. \quad (3.24)$$

Supondo que o buraco negro sofra uma perturbação em sua área e, por consequência, em sua massa

$$dA = 32\pi M dM, \quad (3.25)$$

que expressa em termos da gravidade superficial dada em (3.20) fica

$$dM = \frac{\kappa}{8\pi} dA = T \frac{dA}{4}, \quad (3.26)$$

em que  $T$  foi dado em (3.34). A expressão (3.26) acima é a versão da 1ª Lei da termodinâmica para um buraco negro de Schwarzschild, e é o análogo da expressão (3.44) quando  $dW = 0$ . A tabela 3.1 mostra uma comparação dos observáveis da primeira lei da termodinâmica com a versão (3.26) para o buraco negro de Schwarzschild.

Tabela 3.1 – Analogia entre a termodinâmica e a mecânica do buraco negro de Schwarzschild

1ª Lei da termodinâmica	Análogo para Schwarzschild
$dU$	$dM$
$T$	$\kappa/2\pi$
$dS$	$dA/4$

Desta forma, comparando a entropia e a área, encontramos a relação

$$S = \frac{A}{4} = 4\pi M^2, \quad (3.27)$$

nos mostrando que a entropia também é proporcional à área.

A segunda lei da termodinâmica nos diz que a entropia de um sistema termicamente isolado nunca pode decrescer, ou seja, a variação da entropia satisfaz

$$\delta S \geq 0. \quad (3.28)$$

A versão da segunda lei para mecânica de buracos negros afirma que *a área do horizonte de eventos de um buraco negro nunca diminui*. Ou seja, a variação da área do horizonte satisfaz

$$\delta A \geq 0 \quad (3.29)$$

A analogia entre entropia e a área esta enfatizada na tabela (3.1).

A terceira lei da termodinâmica trabalha com a formulação clássica da inacessibilidade do zero absoluto, ou seja, com o fato de que é impossível reduzir a temperatura de qualquer sistema ao zero absoluto através de um número finito de processos termodinâmicos (NUSSENZVEIG, 2018). O enunciado da terceira lei para buracos negros postula que *é impossível reduzir a gravidade superficial  $\kappa$  a zero, num tempo avançado finito* (POISSON, 2004), onde a coordenada  $v$  dada por (2.17) é o tempo avançado.

Exploramos a termodinâmica do buraco de Schwarzschild nessa seção, porém tais leis são válidas para buracos negros gerais, conforme demonstrado em (BARDEEN; CARTER; HAWKING, 1973). De fato, a seguir iremos explorar um buraco negro estático mais geral que o de Schwarzschild.

### 3.3 Termodinâmica do buraco negro de Reissner-Nordström no espaço Anti-de Sitter

O buraco negro de Reissner-Nordström no espaço Anti-de Sitter (RN-AdS) possui massa  $M$ , simetria esférica, carga elétrica  $Q$  e constante cosmológica  $\Lambda < 0$  (o caso  $\Lambda > 0$  corresponde ao espaço de Sitter). A métrica associada ao buraco negro RN-AdS é dada por (JAWAD et al., 2020)

$$ds^2 = -f(r)dt^2 + f(r)^{-1}dr^2 + r^2d\Omega^2, \quad (3.30)$$

onde definimos a função  $f(r)$

$$f(r) = 1 - \frac{2M}{r} + \frac{Q^2}{r^2} - \frac{1}{3}\Lambda r^2. \quad (3.31)$$

A geometria RN-AdS é uma solução da equação de Einstein com o termo da constante cosmológica:

$$G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}Rg_{\mu\nu} + g_{\mu\nu}\Lambda = 8\pi T_{\mu\nu}. \quad (3.32)$$

O buraco negro RN-AdS possui dois horizontes de eventos, que são os raios externo e internos. Para determinar o raio de cada um dos horizontes deve-se utilizar a condição  $f(r) = 0$ . No que segue não precisaremos da solução explícita desta equação; simplesmente usaremos a notação  $r_+$  como referência ao horizonte externo.

Usando  $f(r_+) = 0$  podemos obter a massa do buraco negro em função de outras variáveis termodinâmicas:

$$M = \frac{r_+}{2} + \frac{Q^2}{2r_+} - \frac{1}{6}\Lambda r_+^3. \quad (3.33)$$

Essa é a massa delimitada pelo horizonte  $r_+$ . A partir da expressão (3.33), podemos definir as quantidades termodinâmicas relevantes. Começemos pela temperatura da superfície do buraco negro, definida por

$$T = \frac{1}{4\pi} \left[ \frac{\partial f(r)}{\partial r} \right]_{r=r_+}. \quad (3.34)$$

Utilizando a (3.31) em (3.34), após o cálculo da derivada temos:

$$T = \frac{1}{4\pi} \left[ \frac{1}{r_+} - \frac{Q^2}{r_+^3} - \Lambda r_+ \right]. \quad (3.35)$$

A entropia pode ser encontrada através da expressão

$$dS = \left[ \frac{dM}{T} \right]_{Q,\Lambda}, \quad (3.36)$$

que podemos integrar na forma

$$S = \int_0^{r_+} \frac{1}{T(\tilde{r}_+)} \frac{dM(\tilde{r}_+)}{d\tilde{r}_+} d\tilde{r}_+ = \pi r_+^2 = \frac{A}{4}. \quad (3.37)$$

Como o buraco negro é dotado de carga elétrica, definimos um potencial elétrico  $\phi$  associado a sua carga. Usando a (3.33), obtemos

$$\phi = \left[ \frac{\partial M}{\partial Q} \right]_{S,\Lambda} = \frac{Q}{r_+}. \quad (3.38)$$

O símbolo  $\left[\frac{\partial M}{\partial Q}\right]_{S,\Lambda}$ , indica que a derivada deve ser calculada mantendo a entropia e a constante cosmológica constantes, onde  $S$  é função apenas de  $r_+$ .

A inclusão da termodinâmica do espaço de fase estendido - ou seja, com a presença da constante cosmológica - permite definir uma quantidade chamada de volume termodinâmico (KUBIZŇÁK; MANN; TEO, 2017; JOHNSON, 2014):

$$V = \left[\frac{\partial M}{\partial P}\right]_{S,Q}, \quad (3.39)$$

em que  $P$  é a pressão do buraco negro e é proporcional à constante cosmológica. A interpretação de  $P$  como uma pressão termodinâmica está associada a uma constante cosmológica negativa que, por sua vez, induz a uma pressão positiva no espaço-tempo. Este é um tipo de comportamento oposto o que ocorre no espaço de de-Sitter, em que a constante cosmológica é positiva.

De fato, como o buraco negro de RN-AdS está no vácuo, tem-se  $T_{\mu\nu} = 0$  na expressão (3.32). Nessa situação, costuma-se interpretar a contribuição de  $\Lambda$  como associada a um fluido perfeito com equação de estado  $P = -\rho$  (HOBSON; EFSTATHIOU; LASENBY, 2006). Com efeito, a equação de Einstein é dada por

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}Rg_{\mu\nu} = -\Lambda g_{\mu\nu} \equiv 8\pi T_{\mu\nu}^{\Lambda}, \quad (3.40)$$

em que  $T_{\mu\nu}^{\Lambda} = -\Lambda g_{\mu\nu}/8\pi$  é interpretado como uma contribuição do tensor energia-momento associado com a constante cosmológica. Uma vez que o tensor energia-momento para um fluido perfeito com densidade  $\rho$  e pressão  $P$  que se move com quadrivelocidade  $u_{\mu}$  é dado por (POISSON, 2004)

$$T_{\mu\nu} = (\rho + P)u_{\mu}u_{\nu} + Pg_{\mu\nu}, \quad (3.41)$$

pode-se concluir que  $T_{\mu\nu}^{\Lambda}$  corresponde a um fluido perfeito com equação de estado (HOBSON; EFSTATHIOU; LASENBY, 2006)

$$P_{\Lambda} = -\rho_{\Lambda} = -\frac{\Lambda}{8\pi}. \quad (3.42)$$

Desta forma, substituindo (3.42) na (3.33) e usando a definição (3.39) obtemos o volume termodinâmico:

$$V = \frac{4}{3}\pi r_+^3, \quad (3.43)$$

que é equivalente ao volume Euclidiano de uma esfera de raio  $r_+$ . Agora que determinamos as grandezas termodinâmicas, poderíamos obter a expressão da 1ª lei da termodinâmica para o BN RN-ADS, seguindo os mesmos passos de Schwarzschild.

Contudo, seguindo a analogia com a termodinâmica usual, a identificação da massa como uma quantidade termodinâmica permite escrever a primeira lei compatível com a transformação de Legendre na representação da energia (SALINAS, 1997)

$$dM = TdS + \phi dQ + VdP, \quad (3.44)$$

em que as variáveis termodinâmicas  $T$ ,  $\phi$  e  $V$  foram dadas, respectivamente, em (3.35), (3.38) e (3.39). Perceba que, agora, a massa do buraco negro não é a energia interna, mas é a *entalpia*  $H$  do sistema. A tabela 3.2 mostra uma comparação dos observáveis da primeira lei da termodinâmica com a versão (3.44) para o buraco negro de RN-AdS.

Tabela 3.2 – Analogia entre a termodinâmica e a mecânica do buraco negro de RN-AdS

1ª Lei da termodinâmica	Análogo para RN-AdS
$dH$	$dM$
$T$	$\kappa/2\pi$
$dS$	$dA/4$
$Q$	$Q$
$d\phi$	$d\phi$
$V$	$4\pi r_+^3/3$
$dP$	$-d\Lambda/8\pi$

### 3.3.1 Criticalidade e Transição de Fase

As transições de fase são caracterizadas pela existência de temperatura e raio críticos a partir dos quais a pressão deixa de ser uma função monotonicamente decrescente do raio do horizonte (volume). Podemos fazer este estudo através do seguinte sistema de equações

$$\begin{aligned} \left[ \frac{\partial P}{\partial r_+} \right]_{T,Q} &= 0 \\ \left[ \frac{\partial P^2}{\partial^2 r_+} \right]_{T,Q} &= 0, \end{aligned} \quad (3.45)$$

no qual fazemos o uso da equação de estado

$$P = \frac{Q^2}{8\pi r_+^4} - \frac{1}{8\pi r_+^2} + \frac{T}{2r_+}, \quad (3.46)$$

que pode ser encontrada através das equações (3.34) e (3.42). A solução do sistema de equações (3.45) nos fornece a temperatura crítica  $T_c$  e o raio crítico  $r_+^c$  os quais nos permitem calcular a pressão crítica  $P_c = P(T_c, r_+^c)$ , a carga elétrica constante. Tais quantidades assumem os seguintes valores

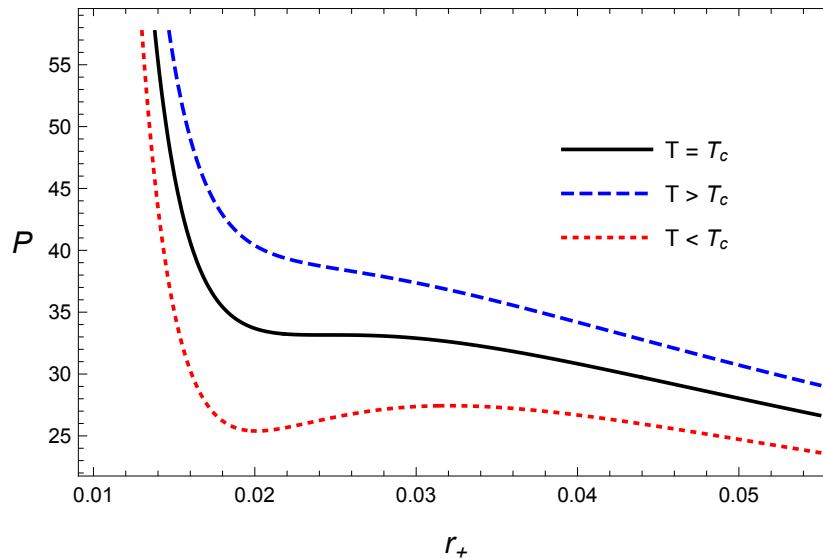
$$r_+^c = \sqrt{6}Q, \quad (3.47)$$

$$P_c = \frac{1}{96\pi Q^2}, \quad (3.48)$$

$$T_c = \frac{1}{3\sqrt{6}\pi Q}. \quad (3.49)$$

Note que estas quantidades só existem devido a presença da carga elétrica. Tal sistema guarda semelhanças com o gás de Van der Waals conforme discutido em (KUBIZŇÁK; MANN; TEO, 2017). Esse comportamento pode ser verificado na figura (3.1).

Figura 3.1 – Pressão como função do raio do horizonte assumindo  $Q = 0.01$ .

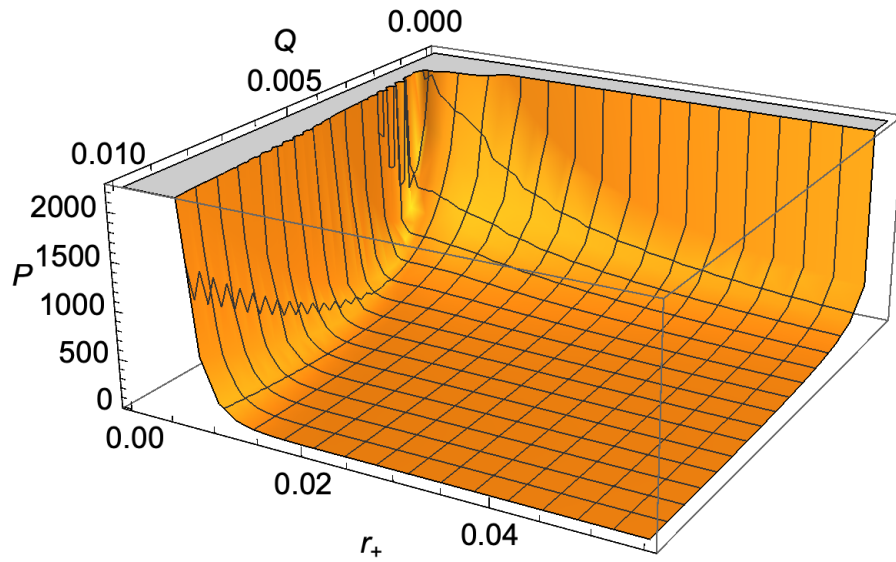


Fonte: Alfaia, 2021

Para temperaturas maiores que a temperatura crítica não há transição de fase, como pode ser visto na curva azul tracejada na figura (3.1). Por outro lado, para temperaturas menores que a temperatura crítica, as transições de fase são permitidas devido à presença de intervalo no qual  $dP/dr_+ > 0$ , que no caso da curva vermelha pontilhada corresponde a  $0.02 < r_+ < 0.03$ .

Na figura (3.2), permitimos a variação da carga elétrica. Curvas do tipo da figura (3.1) serão curvas de nível para  $Q = const.$

Figura 3.2 – Pressão versus raio do horizonte versus carga elétrica para o buraco negro de RN-AdS.



Fonte: Alfaia, 2021

## 4 BURACO NEGRO DE KISELEV

Neste capítulo será apresentado a solução de Kiselev para o buraco negro estático com simetria esférica. Esta solução tem a particularidade de que o buraco negro está imerso em um fluido exótico. Na primeira seção apresentaremos a solução quadridimensional e deixaremos para a última seção a solução em  $D$  dimensões. Na seção dois e três apresentamos, respectivamente, a termodinâmica e o estudo das transições de fase em quatro dimensões.

### 4.1 Solução em 4 dimensões

O tensor energia-momento de um buraco negro estático e esfericamente simétrico imerso em um fluido chamado de quintessência é dado por (KISELEV, 2003):

$$T_t^t = T_r^r = \rho_q \quad (4.1)$$

$$T_\phi^\phi = T_\theta^\theta = \frac{1}{2}\rho_q(3\omega + 1), \quad (4.2)$$

onde  $\rho_q$  é a densidade de energia e  $p_q$  a pressão associada à quintessência, dada pela equação de estado  $p_q = \omega\rho_q$ , em que  $\omega$  é um parâmetro no intervalo  $-1 < \omega < \frac{1}{3}$  que caracteriza o fluido.

Considerando as simetrias do buraco negro, temos o elemento de linha

$$ds^2 = -e^v dt^2 + e^\lambda dr^2 + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2), \quad (4.3)$$

em que  $v = v(r)$  e  $\lambda = \lambda(r)$  são funções a serem determinadas através das equações de Einstein, obtidas pelas componentes não nulas do tensor de Einstein:

$$G_t^t = -e^{-\lambda} \left( \frac{1}{r^2} - \frac{\lambda'}{r} \right) + \frac{1}{r^2}, \quad (4.4)$$

$$G_r^r = -e^{-\lambda} \left( \frac{1}{r^2} + \frac{v'}{r} \right) + \frac{1}{r^2}, \quad (4.5)$$

$$G_\theta^\theta = G_\phi^\phi = -\frac{1}{2}e^{-\lambda} \left( v'' + \frac{v'^2}{2} + \frac{v' - \lambda'}{r} - \frac{v'\lambda'}{2} \right). \quad (4.6)$$

Dada a igualdade (5.32), podemos igualar a (4.4) e (4.5) de modo que segue das equações de Einstein que

$$\lambda(r) + v(r) = \text{constante}. \quad (4.7)$$



A constante pode ser fixada como sendo zero pela imposição de que a geometria é assintoticamente plana, ou seja,  $\lambda \rightarrow 0$  e  $\nu \rightarrow 0$  para  $r \rightarrow \infty$ , desse modo  $\lambda = -\nu$ .

Fazendo a substituição

$$\lambda = -\ln(1+f) \quad (4.8)$$

nas equações (4.4) - (4.6) e utilizando a (4.7) (em que utilizamos  $4\pi G = 1$ ) com a condição assintótica, temos

$$G_t^t = G_r^r = -\frac{1}{2r^2} (f + rf') \quad (4.9)$$

e

$$G_\theta^\theta = G_\phi^\phi = -\frac{1}{4r} (2f' + rf''). \quad (4.10)$$

Substituindo as equações (4.9), (4.6) e (4.10) nas equações de Einstein, obtemos a equação diferencial

$$(3\omega + 1)f + 3(1 + \omega)rf' + r^2f'' = 0, \quad (4.11)$$

cujas soluções particulares são

$$f_1(r) = \frac{A}{r} \quad (4.12)$$

e

$$f_2(r) = \frac{b}{r^{1+3\omega}}. \quad (4.13)$$

Desse modo, a solução geral é dada por

$$f(r) = \frac{A}{r} + \sum_i \left( \frac{b_i}{r^{1+3\omega_i}} \right), \quad (4.14)$$

em que quando  $\omega_i$  é definido no intervalo  $-1 < \omega < -\frac{1}{3}$ , temos a chamada quintessência e  $b_i$  constante. Impondo que a função  $f_1$  seja a solução de Schwarzschild para o limite do buraco negro sem quintessência ( $b_i \rightarrow 0$ ) obtemos  $A = -2M$ , em que  $M$  é a massa do buraco negro.

Substituindo a (4.14) na (4.8), o elemento de linha (4.3) torna-se

$$ds^2 = - \left( 1 - \frac{2M}{r} + \sum_i \frac{b_i}{r^{1+3\omega_i}} \right) dt^2 + \left( 1 - \frac{2M}{r} + \sum_i \frac{b_i}{r^{1+3\omega_i}} \right)^{-1} dr^2 + r^2 d\Omega^2, \quad (4.15)$$

em que  $d\Omega^2 = d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2$ . A solução para o caso do buraco de Reissner-Nordström-Anti-de Sitter é obtida mantendo apenas dois termos do somatório

em (4.15) com as escolhas  $b_1 = Q^2$ ,  $\omega_1 = \frac{1}{3}$  (Reissner-Nordström) e  $b_2 = -\frac{\Lambda}{3}$ ,  $\omega_2 = -1$  (anti de Sitter). Voltaremos a essa solução na próxima seção.

Calculando as derivadas das soluções particulares (4.12) e (4.13) e substituindo em (4.9) encontramos a densidade de energia

$$\rho_q = \frac{3}{2} \frac{b\omega}{r^{3(1+\omega)}}. \quad (4.16)$$

Como esperado, somente a função  $f_2$  contribui para a densidade de energia. Como  $\rho_q \geq 0$ , a partir da expressão (4.16) concluímos que

$$b\omega \geq 0. \quad (4.17)$$

Portanto, o sinal da constante  $b$  deve coincidir com o sinal do parâmetro  $\omega$ .

## 4.2 Relação de Smarr para o buraco negro de Kiselev em 4 dimensões

Nesta seção, faremos o estudo da termodinâmica do buraco negro de Kiselev para o caso Reissner-Norström Anti-de Sitter com a adição de um fluido de quintessência caracterizado por valores  $-1 \leq \omega \leq -\frac{1}{3}$ . Assim, basta adicionar o termo de quintessência em (3.31), ou seja, a métrica é dada em termos de<sup>1</sup>

$$f(r) = 1 - \frac{2M}{r} + \frac{Q^2}{r^2} - \frac{b}{r^{3\omega+1}} - \frac{\Lambda r^2}{3}, \quad (4.18)$$

onde  $M$  é a massa,  $Q$  é a carga elétrica,  $b > 0$  é o parâmetro de densidade do fluido,  $\Lambda$  a constante cosmológica e  $\omega$  é o parâmetro associado a quintessência.

Assim como fizemos no capítulo anterior, vamos obter a massa do buraco negro em função do raio externo ( $r_+$ ). Para isso, usamos a condição quando  $f(r_+) = 0$ , o que resulta em

$$M = \frac{r_+}{2} + \frac{Q^2}{2r_+} - \frac{b}{2r_+^{3\omega}} - \frac{\Lambda r_+^3}{6}. \quad (4.19)$$

<sup>1</sup> Note que já estamos assumindo  $b_i < 0$  nessa expressão ao inverter o sinal do termo do fluido de Kiselev em comparação à Eq.(4.15).

Substituindo a (4.18) em (3.34) e utilizando a (4.19) determinamos a temperatura do buraco negro:

$$T = \frac{1}{4\pi} \left( \frac{1}{r_+} - \frac{Q^2}{r_+^3} + \frac{3b\omega}{r_+^{2+3\omega}} - \Lambda r_+ \right). \quad (4.20)$$

A partir da expressão (4.19) podemos obter as demais variáveis termodinâmicas: potencial elétrico, entropia, pressão e volume termodinâmico. Estas variáveis possuem os mesmos valores apresentados, respectivamente, nas equações (3.38), (3.37), (3.42) e (3.43). Além disso, o espaço estendido de variáveis termodinâmicas incorpora a variável associada com o parâmetro  $b$ , cuja variável conjugada é indicada por  $B$  (JAWAD et al., 2020):

$$B = \left[ \frac{\partial M}{\partial b} \right]_{S,Q,P} = -\frac{1}{2r_+^{3\omega}}. \quad (4.21)$$

Através destas definições, escrevemos a primeira lei da termodinâmica do seguinte modo

$$dM = TdS + Vdp + \phi dQ + Bdb, \quad (4.22)$$

em que <sup>2</sup>

$$T = \frac{\partial M}{\partial S}, \quad V = \frac{\partial M}{\partial P}, \quad \phi = \frac{\partial M}{\partial Q}, \quad B = \frac{\partial M}{\partial b}. \quad (4.23)$$

Desta forma, devido a ocorrência do termo de pressão associado com a constante cosmológica na identidade acima, vemos que a massa do buraco negro deve ser interpretada como o análogo da entalpia do sistema <sup>3</sup>.

Como  $f(r)$  na (4.18) é adimensional e a dimensão de  $[r] = L$  (dimensão de espaço), para que a dimensão de cada termo seja preservada, as dimensões das quantidades de (4.18) são

$$[M] = L, \quad [Q] = L, \quad [b] = L^{3\omega+1}, \quad [\Lambda] = L^{-2}. \quad (4.24)$$

<sup>2</sup> Em cada derivada, as variáveis que não aparecem no denominador são mantidas constantes.

<sup>3</sup> A entalpia  $H$  de um sistema termodinâmico satisfaz a relação

$$dH = TdS + Vdp + \sum_i \mu_i dN_i,$$

em que cada termo do somatório representa  $N_i$  moles de uma substâncias com potencial químico  $\mu_i$  (OLIVEIRA, 2005).

Além disso, da (3.37), (3.42), (4.20) e (4.21) temos, respectivamente,

$$[S] = L^2, \quad [P] = L^{-2}, \quad [T] = L^{-1}, \quad [B] = L^{-3\omega}. \quad (4.25)$$

A partir da relação termodinâmica (4.22) podemos obter a relação de Smarr (SMARR, 1973) entre a massa e as demais variáveis termodinâmicas. Para a determinação desta relação, utilizamos o teorema de Euler (LEMONS, 2007) para funções homogêneas. Uma função homogênea de grau  $s$  é definida por

$$\alpha^s F(x_1, x_2, \dots, x_n) = F(\alpha^{p_1} x_1, \alpha^{p_2} x_2, \dots, \alpha^{p_n} x_n), \quad (4.26)$$

onde  $x_1 \rightarrow \alpha^{p_1} x_1$ ,  $x_2 \rightarrow \alpha^{p_2} x_2$ , ...,  $x_n \rightarrow \alpha^{p_n} x_n$ , com  $\alpha > 0$ , representam reescalonamento das variáveis que definem a função  $f$ . É simples verificar que  $M$  é uma função homogênea<sup>4</sup> de grau  $s = 1$ . Para isso basta observar que todas as grandezas que aparecem no argumento de  $M$  escalonam com a dimensão de comprimento  $L$  de acordo com (4.24) e (4.25):

$$r \rightarrow \alpha r \quad Q \rightarrow \alpha Q, \quad b \rightarrow \alpha^{3\omega+1} b, \quad \Lambda \rightarrow \alpha^{-2} \Lambda, \quad (4.27)$$

Dessa forma, implementando esse reescalonamento na (4.19) obtemos explicitamente que

$$\alpha M(r, Q, b, \Lambda) = M(\alpha r, \alpha Q, \alpha^{3\omega+1} b, \alpha^{-2} \Lambda). \quad (4.28)$$

comparando esta expressão com a (4.26), concluímos que  $M$  é uma função homogênea de grau  $s = 1$ .

O resultado correspondente ao teorema de Euler para funções homogêneas é obtido derivando (4.26) com relação a  $\alpha$  e tomando  $\alpha = 1$ :

$$sF(x_1, x_2, \dots, x_n) = p_1 x_1 \frac{\partial F}{\partial x_1} + p_2 x_2 \frac{\partial F}{\partial x_2} + \dots + p_n x_n \frac{\partial F}{\partial x_n}. \quad (4.29)$$

Para obter a fórmula de Smarr, fazemos a correspondência

$$F(x_1, x_2, x_3, x_4) = M(S, P, Q, b) \quad (4.30)$$

<sup>4</sup> É aquela que ao sofrer transformações em suas variáveis, resulta em outra função proporcional à original

e utilizamos o fato de que  $M$  é uma função homogênea de grau  $s = 1$ , ou seja,

$$\alpha M(S, P, Q, b) = M(\alpha^2 S, \alpha^{-2} P, \alpha Q, \alpha^{3\omega+1} b). \quad (4.31)$$

Na expressão acima utilizamos o fato de que o grau de homogeneidade independe das variáveis utilizadas no argumento de  $M$ , já que todas escalonam com a dimensão  $L$ . Aplicando o teorema de Euler (4.29) em (4.31) obtemos

$$M = 2S \frac{\partial M}{\partial S} - 2P \frac{\partial M}{\partial P} + Q \frac{\partial M}{\partial Q} + (3\omega + 1)b \frac{\partial M}{\partial b}, \quad (4.32)$$

em que as derivadas nesta expressão são dadas em (4.23). Portanto a relação de Smarr é dada por

$$M = 2ST - 2PV + Q\phi + (3\omega + 1)bB. \quad (4.33)$$

Esta relação é válida para o buraco negro de Kiselev no caso Reissner-Nordström- anti-de Sitter na presença de um fluido de quintessência.

### 4.3 Transição de fase do buraco negro de Reissner-Nordström anti-de Sitter na presença de um fluido de quintessência

Nesta seção, faremos a análise dos pontos críticos do sistema termodinâmico associado ao buraco negro de Reissner-Nordström anti-de Sitter na presença de um fluido de quintessência. Em particular, adotaremos o fluido de quintessência com  $-1 \leq \omega \leq -\frac{1}{3}$  (ALFAIA; LOBO; BRITO, 2021).

Como discutido anteriormente, as transições de fase caracterizam-se pela existência de uma temperatura e raio críticos. Como veremos, na criticalidade a pressão deixa de ser uma função monotonicamente decrescente do raio do horizonte  $r_+$  (volume do buraco negro). Utilizando a relação (3.42) da pressão em função da constante cosmológica na (4.20) obtemos a equação de estado

$$P = \frac{T}{2r_+} - \frac{1}{8\pi r_+^2} + \frac{Q^2}{8\pi r_+^4} - \frac{3b\omega}{8\pi r_+^{3(1+\omega)}}. \quad (4.34)$$

Utilizando esta expressão para a pressão, a solução de (3.45) nos fornece a temperatura crítica  $T_c$  e o raio crítico  $r_+^c$  que, por sua vez, determinam a pressão crítica  $P_c(T_c, r_+^c)$ , mantida a carga elétrica constante.

Assim, usando a equação de estado (4.34), a solução do sistema de equações (3.45) fornece:

- Caso  $\omega = -1/3$ :

$$r_+^c = \frac{\sqrt{6}Q}{\sqrt{1-b}}, \quad (4.35)$$

$$P_c = \frac{(1-b)^2}{96\pi Q^2}, \quad (4.36)$$

$$T_c = \frac{1-b}{3\pi Q \sqrt{\frac{6}{1-b}}}. \quad (4.37)$$

- Caso  $\omega = -2/3$ :

$$r_+^c = \sqrt{6}Q, \quad (4.38)$$

$$P_c = \frac{1}{96\pi Q^2}, \quad (4.39)$$

$$T_c = \frac{\sqrt{6}}{18\pi Q} - \frac{b}{2\pi}. \quad (4.40)$$

- Para  $\omega = -4/3$ : Ao contrário dos casos anteriores, para esse valor de  $\omega$  não é possível encontrar a solução analítica. O sistema que determina as variáveis críticas  $(r_+^c, T_c)$  é dado por

$$6Q^2 - (r_+^c)^2 + 4b(r_+^c)^5 = 0 \quad (4.41)$$

e

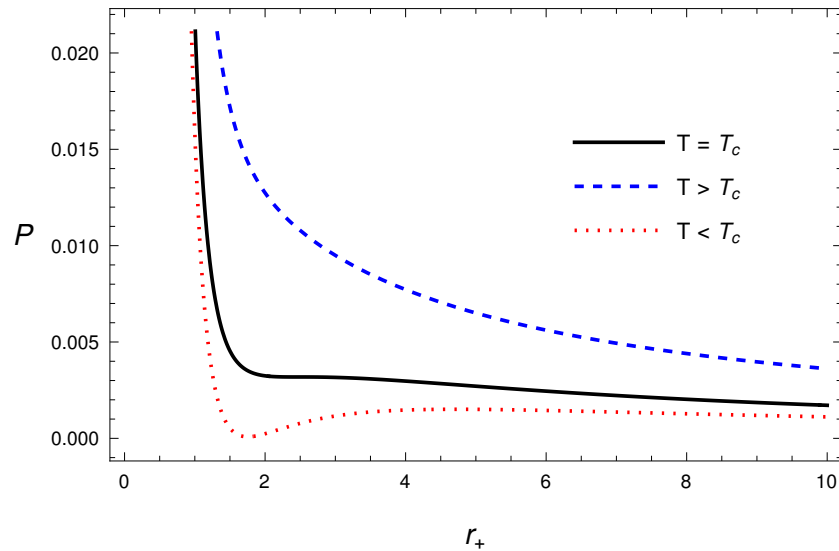
$$T_c = \frac{r_+^c + 30bQ^2(r_+^c)^2 - 4b(r_+^c)^4}{18\pi Q^2}. \quad (4.42)$$

A partir da solução do sistema acima fica determinada a pressão crítica  $P_c = P(r_+^c, T_c)$ .

A partir das equações (4.37)-(4.42), percebemos que as quantidades críticas dependem da carga  $Q$  do buraco negro. No entanto, a contribuição do parâmetro  $b$  para cada valor de  $\omega$  conduz a diferentes comportamentos críticos, servindo como um parâmetro que fornece um vínculo para a ocorrência de transições de fase. Para o caso  $\omega = -1/3$ , como  $b > 0$ , podemos ver da equação (4.37) a criticalidade ocorre se  $0 < b < 1$ . Enquanto que para  $\omega = -2/3$ , uma vez que  $T_c > 0$ , da equação (4.40) concluímos que a ocorrência de um comportamento crítico ocorre se  $b < \sqrt{6}/9Q$ , mostrando que o valor de  $b$  é limitado superiormente.

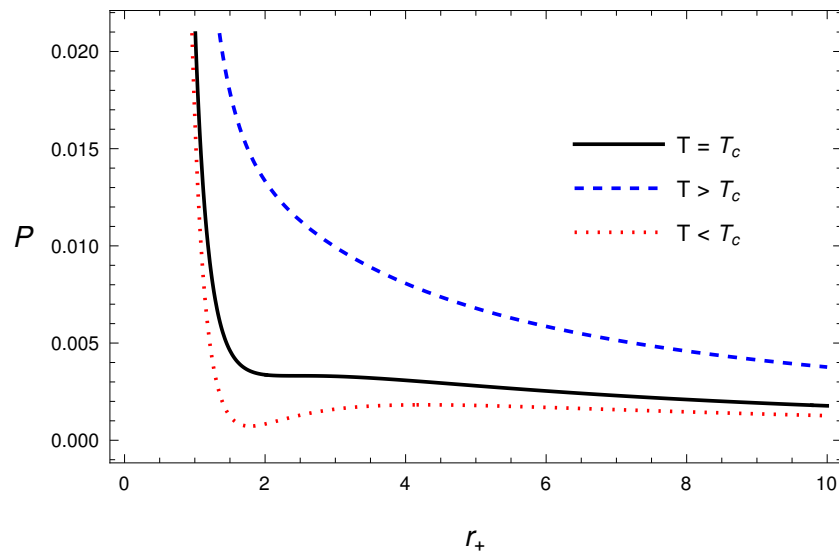
As figuras (4.1) e (4.2), obtidas de (4.34), representam as isotermas do buraco negro de Kiselev com  $\omega = -1/3$  e  $\omega = -2/3$  para diferentes valores de temperatura.

Figura 4.1 – Pressão como função do raio do horizonte assumindo  $\omega = -1/3$ ,  $Q = 1$  e  $b = 0.02$



Fonte: Alfaia, 2021

Figura 4.2 – Pressão como função do raio do horizonte assumindo  $\omega = -2/3$ ,  $Q = 1$  e  $b = 0.02$



Fonte: Alfaia, 2021

A linha central (preta) indica a temperatura crítica ( $T = T_c$ ), enquanto que a linha mais acima (azul) e mais abaixo (vermelha) indicam as temperaturas acima ( $T > T_c$ ) e abaixo ( $T < T_c$ ) da temperatura crítica, respectivamente.

#### 4.4 Solução em $D$ dimensões

Assim como na seção anterior, faremos um estudo do buraco negro de Kiselev para o caso em  $D$  dimensões. Neste caso, o tensor energia-momento de um buraco negro estático e esfericamente simétrico e imerso em um fluido de quintessência é dado por (CHEN; WANG; SU, 2008)

$$T_t^t = T_r^r = \rho_q \quad (4.43)$$

$$T_{\theta_1}^{\theta_1} = T_{\theta_1}^{\theta_1} = \dots T_{\theta_{D-2}}^{\theta_{D-2}} = \frac{1}{D-2} \rho_q [(D-1)\omega_q + 1], \quad (4.44)$$

onde  $\rho_q$  é a densidade de energia,  $p_q = \omega\rho_q$  é a pressão associada à quintessência, em que  $\omega$  é o parâmetro no intervalo  $-1 < \omega < 0$  definido por

$$\omega = \frac{\alpha}{D-1}, \quad (4.45)$$

com  $\alpha < 0$ .

O elemento de linha do buraco negro com simetria estática e esférica em  $D$  dimensões é

$$ds^2 = -e^v dt^2 + e^\lambda dr^2 + r^2(d\theta_1^2 + \sin^2 \theta_1 d\theta_2^2 + \dots + \sin^2 \theta_1 \dots \sin^2 \theta_{D-3} d\theta_{D-2}^2), \quad (4.46)$$

onde  $\theta_1, \dots, \theta_{D-2}$  são coordenadas angulares em  $D$  dimensões, e  $v = v(r)$  e  $\lambda = \lambda(r)$  são funções a serem determinadas através das equações de Einstein, obtidas pelas componentes não nulas do tensor de Einstein:

$$G_t^t = \frac{D-2}{2} \left[ -e^{-\lambda} \left( \frac{D-3}{r^2} - \frac{\lambda'}{r} \right) + \frac{D-3}{r^2} \right], \quad (4.47)$$

$$G_r^r = \frac{D-2}{2} \left[ -e^{-\lambda} \left( \frac{D-3}{r^2} + \frac{v'}{r} \right) + \frac{D-3}{r^2} \right], \quad (4.48)$$

$$G_{\theta_1}^{\theta_1} = G_{\theta_1}^{\theta_1} = \dots G_{\theta_{D-2}}^{\theta_{D-2}} = -\frac{e^{-\lambda}}{2} \left[ v'' + \frac{v'^2}{2} - \frac{\lambda'v'}{2} + \frac{(D-3)(v' - \lambda')}{r} + \frac{(D-3)(D-4)}{r^2} \right] + \frac{(D-3)(D-4)}{2r^2}. \quad (4.49)$$



Seguindo os mesmos passos para do caso  $D = 4$ , desenvolvido na seção 4.1, temos:

$$G_t^t = G_r^r = -\frac{(D-2)}{4r^2} [rf' + (D-3)f], \quad (4.50)$$

$$G_{\theta_1}^{\theta_1} = G_{\theta_2}^{\theta_2} = \dots G_{\theta_{D-2}}^{\theta_{D-2}} = -\frac{1}{4r^2} [r^2 f'' + 2(D-3)rf' + (D-4)(D-3)f]. \quad (4.51)$$

Neste caso, as equações conduzem à equação diferencial

$$r^2 f'' + [(D-1)\omega + 2D - 5]rf' + (D-3)[(D-1)\omega + D - 3]f = 0, \quad (4.52)$$

que possui a solução geral

$$f = -\frac{A}{r^{D-3}} + \frac{b}{r^{(D-1)\omega + D-3}}, \quad (4.53)$$

onde  $A$  e  $b$  são constantes de normalização. Para o caso em que  $A = 2M$  e  $b = 0$ , a solução  $f$  será a solução de Schwarzschild em  $D$  dimensões.

Substituindo (4.53) e sua derivada em (4.50) e utilizando  $G_r^r = T_r^r$ , determinamos a densidade de energia (4.43)

$$\rho_q = \frac{b}{4} \frac{\omega(D-1)(D-2)}{r^{(D-1)(\omega+1)}} > 0. \quad (4.54)$$

O elemento de linha (4.46) será

$$\begin{aligned} ds^2 = & - \left( 1 - \frac{2M}{r^{D-3}} + \sum_i \frac{b_i}{r^{(D-1)\omega_i + D-3}} \right) dt^2 \\ & + \left( 1 - \frac{2M}{r^{D-3}} + \sum_i \frac{b_i}{r^{(D-1)\omega_i + D-3}} \right)^{-1} dr^2 + r^2 d\Omega_{D-2}^2, \end{aligned} \quad (4.55)$$

onde  $M$  é a massa do buraco negro. Tomando  $b_1 = Q^2$ ,  $b_2 = \frac{\Lambda}{3}$ ,  $\omega_1 = \frac{D-3}{D-1}$  e  $\omega_2 = 1$ , com todos os demais  $b_i = 0$ , teremos a solução para o caso de Reissner-Nordström Anti-de Sitter  $D$ -dimensional.

## 5 CRITICALIDADE DE UM BURACO NEGRO ANTI-DE SITTER IMERSO EM DIFERENTES FLUIDOS

O propósito deste capítulo é apresentar a termodinâmica do buraco negro de Kiselev em  $D$  dimensões, introduzindo a constante Newtoniana  $G$  como uma variável termodinâmica. Na primeira seção, discutiremos a termodinâmica do buraco negro de Kiselev em  $D$  dimensões quando  $G$  é mantido constante. Na segunda seção faremos o desenvolvimento da termodinâmica com  $G$  variável e faremos a conexão com a abordagem holográfica por meio da introdução da carga central  $C$ . Nas duas últimas seções, aplicaremos a termodinâmica com  $G$  variável ao caso quadridimensional e, além disso, ao estudo do comportamento crítico das grandezas termodinâmicas relacionadas.

### 5.1 Termodinâmica com $G$ constante em $D$ dimensões

Para termos sucesso nessa análise, vamos recuperar a constante Newtoniana nas quantidades geométricas. A solução para o buraco negro de Kiselev em  $D$  dimensões corresponde à métrica (3.1) com  $f(r)$  definido por (ALFAIA; LOBO; BRITO, 2021)

$$f(r) = 1 - \frac{16\pi GM}{(D-2)\Omega_{D-2}r^{D-3}} + \frac{32\pi^2(\sqrt{G}Q)^2}{(D-2)(D-3)\Omega_{D-2}^2r^{2(D-3)}} - \frac{2\Lambda r^2}{(D-1)(D-2)} - \frac{Gb}{r^{(D-1)\omega+D-3}}, \quad (5.1)$$

em que  $G$  é a constante gravitacional universal,  $\Omega_{D-2} = 2\pi^{D-1/2}\Gamma((D-1)/2)$  é a área da esfera unitária em  $D$  dimensões ( $\mathbf{S}^{D-2}$ ). Para  $D = 4$  a métrica (5.1) reproduz a solução (4.18).

Como anteriormente, obtemos a massa do buraco negro como função do raio do horizonte. De fato, tomando  $f(r_+) = 0$ , em (5.1), temos

$$M = \frac{(D-2)\Omega_{D-2}r_+^{(D-3)}}{16\pi G} + \frac{2\pi Q^2}{(D-3)\Omega_{D-2}r_+^{D-3}} - \frac{\Lambda\Omega_{D-2}r_+^{2(D-3)}}{(D-1)8\pi G} - \frac{Gb(D-2)\Omega_{D-2}}{r_+^{(D-1)\omega}}. \quad (5.2)$$

Nesta seção expressaremos as quantidades termodinâmicas, em que a constante gravitacional  $G$  é constante. A partir da massa do buraco negro (5.2), assim como nos casos anteriores, determinaremos as quantidades termodinâmicas. Substituindo (5.1) em (3.34), obtemos a

temperatura

$$T = \frac{1}{4\pi} \left[ \frac{D-3}{r_+} - \frac{32\pi^2 G Q^2}{(D-2)\Omega_{D-2}^2 r_+^{2D-5}} - \frac{2\Lambda}{D-2} r_+ + (D-1) \frac{Gb\omega}{r_+^{D-2+\omega(D-1)}} \right]. \quad (5.3)$$

Substituindo a expressão da massa (5.2) em (3.37) e tomando sua integral, encontramos a entropia

$$S = \frac{\Omega_{D-2} r_+^{D-2}}{4G} = \frac{A}{4G}, \quad (5.4)$$

onde  $A$  é a área da esfera em  $D$  dimensões. O potencial elétrico (3.38) é obtido tomando a derivada de (5.2) em relação a carga elétrica  $Q$

$$\phi = \left[ \frac{\partial M}{\partial Q} \right]_{S,b,\Lambda} = \frac{4\pi Q}{(D-3)\Omega_{D-2}} r_+^{3-D}, \quad (5.5)$$

em que se  $D = 4$ , teremos a expressão exata do potencial eletrostático em unidades gaussianas.

Definimos que a pressão do buraco negro está diretamente associada a contribuição da constante cosmológica  $\Lambda$ . Portanto, a partir de (3.42), temos

$$P = -\frac{\Lambda}{8\pi G} = \frac{(D-1)(D-2)}{16\pi G} l^{-2}, \quad (5.6)$$

que é a pressão termodinâmica do buraco negro escrita em função da escala holográfica  $l$  de acordo com a relação (CONG; KUBIZNAK; MANN, 2021)

$$\Lambda = -\frac{1}{2}(D-1)(D-2) l^{-2}. \quad (5.7)$$

A partir da expressão (3.39) determinamos o volume termodinâmico para o espaço de fase estendido

$$V = \left[ \frac{\partial M}{\partial P} \right]_{S,Q,b} = \frac{\Omega_{D-2} r_+^{D-1}}{D-1}, \quad (5.8)$$

que é equivalente ao volume Euclidiano de uma esfera em  $D$  dimensões. Através da (4.21) obtemos o parâmetro conjugado de  $b$ , denominado de potencial de Kiselev

$$B = \left[ \frac{\partial M}{\partial b} \right]_{S,Q,P} = -\frac{(D-2)}{D-1} r_+^{D-1}. \quad (5.9)$$

Se  $D = 4$ , o potencial de Kiselev se reduziria ao potencial obtido em (4.21). Por meio dessas grandezas, a primeira lei da termodinâmica é expressa da seguinte forma:

$$dM = TdS + VdP + \phi dQ + Bdb. \quad (5.10)$$

Através das relações obtidas, vamos descrever a relação de Smarr, pela utilização da fórmula de Euler (4.29), de modo que as dimensões devem ser preservadas. Logo, como  $G$  está sendo mantido constante, as quantidades termodinâmicas calculáveis a partir de (5.1) escalam espacialmente como

$$[M] = [Q] = L^{D-3}, \quad [S] = L^{D-2}, \quad [\Lambda] = L^{-2}, \quad [b] = L^{(D-1)\omega+(D-3)}. \quad (5.11)$$

Portanto, temos o escalonamento  $M \rightarrow \alpha^{D-3}M$ ,  $Q \rightarrow \alpha^{D-3}Q$ ,  $S \rightarrow \alpha^{D-2}S$ ,  $\Lambda \rightarrow \alpha^{-2}\Lambda$  e  $b \rightarrow \alpha^{(D-1)\omega+(D-3)}b$ . Desta forma, obtemos que as dimensões de escala são  $M = Q = D - 3$ ,  $S = D - 2$ ,  $\Lambda = -2$  e  $b = (D - 1)\omega + (D - 3)$ .

Comparando (4.29) com (5.10) e substituindo as dimensões de escala, determinamos que

$$(D - 3)M = (D - 2)TS + (D - 3)\phi Q - 2VP + [(D - 1)\omega + (D - 3)]Bb, \quad (5.12)$$

é a relação de Smarr para o buraco negro carregado ADS imerso em diferentes fluidos.

## 5.2 Termodinâmica com $G$ variável em $D$ dimensões

Até aqui consideramos  $G$  constante. A partir de agora, iremos investigar os efeitos obtidos quando  $G$  torna-se variável. A motivação para fazermos isso está em recentes tentativas de fazer tal termodinâmica de buracos negros compatível com o princípio holográfico e a conjecturada dualidade entre Teorias de Campos Conformes e gravitação no espaço Anti-de Sitter (correspondência AdS/CFT), conforme discutiremos abaixo. Isso introduzirá modificações na primeira lei da termodinâmica. Para isso, vamos inicialmente propor uma reincorporação da constante gravitacional  $G$  na expressão da primeira lei (4.22), o que de fato já foi feito nas quantidades termodinâmicas (5.3)-(5.9). Substituindo estes resultados na (5.10) obtemos e mantendo o escalonamento das grandezas  $M$ ,  $Q$  e  $b$  conforme aparece na métrica

(5.1), temos

$$d(GM) = \frac{\kappa}{8\pi} dA - \frac{V}{8\pi} d\Lambda + \sqrt{G}\phi d(\sqrt{G}Q) + Bd(Gb). \quad (5.13)$$

Como próximo passo, vamos agora introduzir em nossa análise uma nova variável termodinâmica crucial nessa nova abordagem de buracos negros. Recentemente, tem-se argumentado que para que a correspondência AdS/CFT seja preservada com uma constante cosmológica de anti-de Sitter variável, deve-se também variar os graus de liberdade da teoria conforme relacionada (VISSER, 2021). Tais graus de liberdade são usualmente determinados pela chamada carga central  $C$ , que está relacionada com a constante cosmológica  $\Lambda$  e com a constante gravitacional  $G$  por (CONG; KUBIZNAK; MANN, 2021)

$$C = k \frac{l^{D-2}}{16\pi G}, \quad (5.14)$$

onde  $k$  é uma constante que depende da especificidade do modelo holográfico (KARCH; ROBINSON, 2015; CONG; KUBIZNAK; MANN, 2021);  $l$  é uma escala holográfica característica em  $D$  dimensões relacionada com a constante cosmológica pela relação (5.6). Por esse motivo, para que se possa assumir uma variação de graus de liberdade de uma teoria conforme, isto é, que uma carga central varie de maneira independente da constante cosmológica, faz-se necessário assumir que a constante gravitacional  $G$  seja uma variável termodinâmica. Essa é principal motivação dessa análise, que foi inicialmente proposta em (CONG; KUBIZNAK; MANN, 2021), e que aprofundaremos nesta dissertação através da inclusão do termo de Kiselev.

Partindo da hipótese de que  $G$  é variável, a equação (5.13) nos conduz a

$$MdG + GdM = \frac{\kappa}{8\pi} dA - \frac{V}{8\pi} d\Lambda + \frac{1}{2}\phi QdG + \phi GdQ + BbdG + BGdb, \quad (5.15)$$

que equivale a

$$dM = \frac{\kappa}{8\pi G} dA - \frac{V}{8\pi G} d\Lambda + \phi dQ + Bdb + \left( \frac{1}{2}\phi Q + bB - M \right) \frac{dG}{G}. \quad (5.16)$$

Para descrevermos a 1ª lei da termodinâmica com  $G$  variável em conexão com o princípio holográfico, precisamos encontrar a relação entre a variação de  $G$  com relação a

pressão e a carga central. Como  $C = C(P, G)$ , podemos calcular a diferencial

$$\frac{dC}{C} = \frac{1}{C} \left[ \left( \frac{\partial C}{\partial P} \right)_G dP + \left( \frac{\partial C}{\partial G} \right)_P dG \right] \quad (5.17)$$

a partir da substituição de  $l$  dado em (5.6) na expressão (5.14) obtemos  $C(P, G)$ :

$$C = \frac{k[(D-1)(D-2)]^{(D-2)/2}}{4^D \pi^{D/2}} G^{-D/2} P^{-(D-2)/2}. \quad (5.18)$$

Ao substituirmos (5.18) em (5.17) e calculando as derivadas, chegamos ao resultado

$$\frac{dG}{G} = -\frac{2}{D} \frac{dC}{C} - \frac{(D-2)}{D} \frac{dP}{P}, \quad (5.19)$$

que ao ser substituído em (5.16), nos fornece

$$\begin{aligned} dM &= T dS + \phi dQ + B db \\ &+ \left[ PV - \frac{(D-2)}{D} \left( TS + PV + \frac{1}{2} \phi Q + Bb - M \right) \right] \frac{dP}{P} \\ &- \frac{2}{D} \left[ TS + PV + \frac{1}{2} \phi Q + Bb - M \right] \frac{dC}{C}. \end{aligned} \quad (5.20)$$

Note que também fazemos uma derivação por partes (pois  $G$  é variável) para expressarmos a primeira lei em termos da entropia, ao invés da área, em (5.16). Neste ponto necessitamos da relação de Smarr para o caso de  $G$  variável em  $D$  dimensões. Ao introduzir  $G$  como uma variável termodinâmica, modificamos o escalonamento das grandezas de (5.1) em relação ao caso (4.18) em que  $G$  é constante. Podemos considerar isso ao explicitar as potências em dimensão espacial de tais quantidades.

De fato, adotando as dimensões das quantidades de  $f(r)$  com  $[G] = L^{D-2}$  (que realmente é a escala de  $G$  num espaço-tempo arbitrário (CONG; KUBIZNAK; MANN, 2021)), as dimensões das demais grandezas em (5.1) tornam-se

$$[M] = L^{-1}, \quad [A] = L^{D-2}, \quad [\Lambda] = L^{-2}, \quad [Q] = L^{(D-4)/2}, \quad [b] = L^{\omega(D-1)-1}. \quad (5.21)$$

Da (5.2) verifica-se explicitamente que  $M$  torna-se uma função homogênea de grau  $s = -1$ .

Adotando

$$F(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = M(A, \Lambda, Q, b, G), \quad (5.22)$$

podemos aplicar a (4.26) para escrever

$$\alpha^{-1}M(A, \Lambda, Q, b, G) = M(\alpha^{D-2}A, \alpha^{-2}\Lambda, \alpha^{(D-4)/2}Q, \alpha^{\omega(D-1)-1}b, \alpha^{D-2}G). \quad (5.23)$$

Aplicando o teorema de Euler (4.29) em (5.23) obtemos

$$\begin{aligned} -M = (D-2)A \frac{\partial M}{\partial A} - 2\Lambda \frac{\partial M}{\partial \Lambda} + \left(\frac{D-4}{2}\right)Q \frac{\partial M}{\partial Q} \\ + [\omega(D-1) - 1]b \frac{\partial M}{\partial b} + (D-2)G \frac{\partial M}{\partial G}. \end{aligned} \quad (5.24)$$

Substituindo os potenciais termodinâmicos (5.4)-(5.9) em (5.24), encontramos

$$-M = (D-2)TS - 2PV + \left(\frac{D-4}{2}\right)Q\phi + [\omega(D-1) - 1]bB + (D-2)G \frac{\partial M}{\partial G}. \quad (5.25)$$

Para a determinação da variação da massa com relação a  $G$ , utilizamos a (5.16), que nos fornece  
Substituindo esta expressão em (5.25), obtemos

$$(D-3)M = (D-2)TS + (D-3)\phi Q - 2VP + [(D-1)\omega + (D-3)]Bb, \quad (5.26)$$

que é a relação de Smarr em  $D$  dimensões com  $G$  variável. É importante notar que, apesar de incorporarmos a constante gravitacional  $G$  como uma variável termodinâmica, a relação (5.12) para o caso de  $G$  constante é preservada quando diferentes fluidos são incorporados à métrica (ALFAIA; LOBO; BRITO, 2021; CONG; KUBIZNAK; MANN, 2021). Isso pode ser verificado pela simples comparação entre (5.26) e (5.12).

Obtida a relação de Smarr, podemos retornar à expressão (5.20) e substituir  $TS$  obtida de (5.26), o que nos conduz a

$$dM = T dS + \phi dQ + B db + V_N dP + \mu dC, \quad (5.27)$$

em que  $V_N$  é definido como o novo volume termodinâmico, dado por

$$V_N = \frac{2M + (D-4)\phi Q + 2[\omega(D-1) - 1]bB}{2DP} \quad (5.28)$$

e

$$\mu = \frac{2P(V_N - V)}{C(D-2)} \quad (5.29)$$

expressa o potencial químico relacionado com a variação da carga central (ALFAIA; LOBO; BRITO, 2021). Assim, a expressão (5.27) de  $dM$  é a primeira lei da termodinâmica acrescida com um potencial químico e um novo volume  $V_N$ . Como esperado, recuperamos a primeira lei da termodinâmica (5.10) para  $G$  constante quando  $dG = 0$ , uma vez que  $dC$  e  $dP$  relacionam-se pela (5.19).

### 5.3 Classificação de buracos negros e a termodinâmica estendida em $D = 4$

Nesta seção aplicaremos a termodinâmica construída anteriormente à classificação de um buraco negro de Kiselev. Faremos isto a partir dos parâmetros  $V_N$  e  $\mu$ , definidos em (5.29) e (5.28): um buraco negro grande é definido por  $\mu < 0$  ( $V > V_N$ ), enquanto que um buraco negro pequeno corresponde à  $\mu > 0$  ( $V < V_N$ ). Utilizaremos a métrica (5.1) para  $D = 4$ :

$$f(r) = 1 - \frac{2GM}{r} + \frac{GQ^2}{r^2} + \frac{r^2}{l^2} - \frac{Gb}{r^{3\omega+1}}. \quad (5.30)$$

A expressão (5.2) nos fornece a massa do buraco negro

$$M = \frac{r_+}{2G} + \frac{Q^2}{2r_+} + \frac{r_+^3}{2Gl^2} - \frac{b}{2r_+^{3\omega}}, \quad (5.31)$$

e a partir de (5.3), a temperatura

$$T = \frac{1}{4\pi} \left[ \frac{1}{r_+} - \frac{GQ^2}{r_+^3} + \frac{3r_+}{l^2} + \frac{3Gb\omega}{r_+^{2+3\omega}} \right]. \quad (5.32)$$

Nas equações acima utilizamos que a área da esfera unitária é  $\Omega_2 = 4\pi$  e a escala holográfica é dada por (5.7). A entropia (5.4), a pressão (5.6), o potencial elétrico (5.5), o volume termodinâmico (5.8) e o potencial de Kiselev (quintessência) (5.9) serão, respectivamente:

$$S = \frac{\pi r_+^2}{G}; \quad P = \frac{3}{8\pi Gl^2}; \quad \phi = \frac{Q}{r_+}; \quad V = \frac{4\pi r_+^3}{3}; \quad B = -\frac{1}{2r_+^{3\omega}}. \quad (5.33)$$

Substituindo as quantidade termodinâmicas (5.33) em (5.28) e (5.29), encontramos a expressão para o novo volume termodinâmico

$$V_N = \frac{\pi}{3r_+} (r_+^2 l^2 + GQ^2 l^2 + r_+^4 - 3Gl^2 b \omega r_+^{-3\omega+1}), \quad (5.34)$$



e da quantidade conjugada

$$\mu = \frac{2\pi}{kl^4 r_+} (l^2 r_+^2 + GQ^2 l^2 - 3r_+^4 - 3Gl^2 b \omega r_+^{-3\omega+1}). \quad (5.35)$$

Para que  $V_N$  seja interpretado como um volume deve-se ter  $V_N > 0$ . Desse modo, a expressão (5.34) será positiva, por consistência, para  $b\omega \leq 0$ , o que coincide com o requerimento para positividade da energia do fluido de Kiselev (lembre que invertemos o sinal do parâmetro  $b$  em (5.1) em comparação à forma original da métrica (4.55)). No que segue adotaremos os valores  $\omega = -1/3, -2/3, -4/3$ . Cada um destes casos será analisado individualmente. Para esta discussão, uma relação importante é a desigualdade isoperimétrica reversa (KUBIZŇÁK; MANN; TEO, 2017; CVETIČ et al., 2011; CONG; KUBIZNAK; MANN, 2021)

$$\left[ \frac{(D-1)V}{\Omega_{D-2}} \right]^{\frac{1}{D-1}} \geq \left( \frac{A}{\Omega_{D-2}} \right)^{\frac{1}{D-2}}, \quad (5.36)$$

que é válida para buracos negros pequenos (CONG; KUBIZNAK; MANN, 2021). Buracos negros que não satisfazem a relação (5.36) são chamados de super-entrópicos (KUBIZŇÁK; MANN; TEO, 2017). Conforme mostrado na referência (CONG; KUBIZNAK; MANN, 2021), buracos negros grandes do tipo AdS carregados pertencem a esta classe. Em nosso caso, faremos uma análise da relação entre o tamanho do buraco negro e a desigualdade isoperimétrica para o buraco negro de Kiselev classificado por diferentes valores de  $\omega$  (diferentes fluidos). Usaremos para isso a relação (5.35) como uma função  $\mu = \mu(r_+)$ . Em particular, a desigualdade isoperimétrica reversa (5.36) para buracos negros de Kiselev pequenos é dada por (AZREG-AINO, 2015)

$$1 \geq (-\omega)^{1/3}. \quad (5.37)$$

Passemos à discussão de cada fluido considerado.

- **Caso  $\omega = -1/3$**

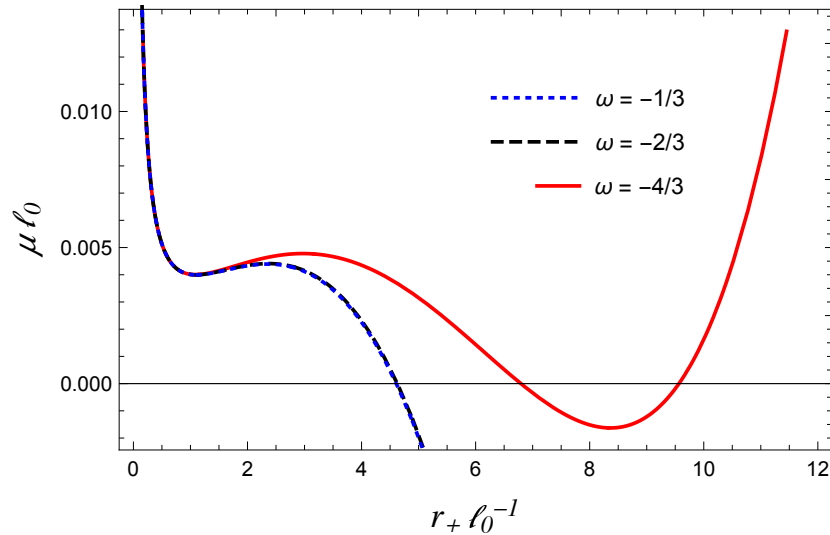
A desigualdade isoperimétrica (5.37) é satisfeita. A relação entre o tamanho do buraco negro e o sinal do potencial químico pode ser obtido diretamente da (5.35). Uma vez que este caso trata de um buraco negro pequeno, a (5.35) fornece o vínculo de que o raio do buraco negro  $r_+$  satisfaz a desigualdade

$$r_+^2 < \frac{l^2}{6} \left[ (1 + Gb) + \sqrt{1 + Gb + 12 \frac{GQ^2}{l^2}} \right], \quad (5.38)$$

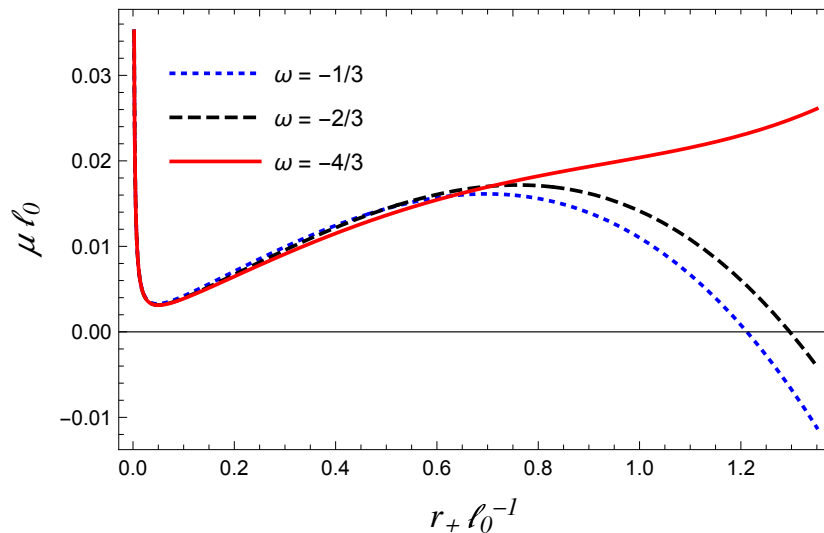
que também satisfaz a desigualdade (5.36) para volume termodinâmico  $V_N$ . O comportamento do potencial químico  $\mu(r_+)$  para  $\omega = -1/3$  é representado pela linha pontilhada azul nas figuras 5.0a e 5.0b para diferentes valores dos parâmetros  $Q$ ,  $G$ ,  $l$  e  $b$ . Os eixos do gráfico foram escritos em termos de variáveis adimensionais pela introdução de um comprimento característico arbitrário  $l_0$ . As regiões de variáveis para buraco negro grande correspondem à região do gráfico em que  $\mu < 0$ . A partir do gráfico, notamos que quando  $r_+$  tende a zero todos os fluidos apresentam o mesmo comportamento. No caso particular de  $\omega = -1/3$  nota-se

Figura 5.1 – Gráfico de  $\mu(r_+) \times r_+$  em unidades do comprimento característico  $l_0$ .

(a) Curvas para  $Q = Gl_0^{-2} = 1$ ,  $l/l_0 = 7.8$ ,  $bl_0^{1-3\omega} = 10^{-3}$  e parâmetro  $k = 16\pi$ .



(b) Curvas para  $Q = 0.05$ ,  $Gl_0^{-2} = 1$ ,  $l/l_0 = 2$ ,  $bl_0^{1-3\omega} = 10^{-1}$  e parâmetro  $k = 16\pi$ . A curva contínua em vermelho cresce indefinidamente.



a diminuição do potencial químico com o aumento do tamanho do buraco negro ( $r_+$  cresce), sendo que o buraco negro torna-se grande a partir do ponto em que  $\mu = 0$ . E partir desse ponto o buraco negro torna-se super-entrópico.

• **Caso  $\omega = -2/3$**

Como no caso anterior, a desigualdade isoperimétrica (5.37) é satisfeita. Conforme ilustrado nas figuras 5.0a e 5.0b pela linha tracejada em preto, este tipo de fluido possui essencialmente o mesmo comportamento do caso anterior. Para  $\omega = -2/3$  o análogo da desigualdade (5.38) separando os valores positivos e negativos de  $\mu(r_+)$  é bastante complicada. No entanto, é simples verificar que teremos  $\mu < 0$  para  $r_+$  muito grande, uma vez que nesse limite o termo dominante em (5.35) é  $-3r_+^4$ . Como antes, buracos negros grandes tornam-se super-entrópico neste limite. Este comportamento ocorrerá sempre que tivermos

$$-1 < \omega \leq 0, \quad (5.39)$$

preservando a relação entre o sinal do potencial químico e o tamanho do buraco negro uma vez que a desigualdade isoperimétrica sempre será satisfeita.

• **Caso  $\omega = -4/3$**

Neste caso, a desigualdade isoperimétrica (5.37) é violada, de modo que a classificação do tamanho do buraco negro pelo sinal do potencial químico  $\mu$  já não é válida. Realmente, aplicando a (5.35) para este valor de  $\omega$  obtemos

$$\mu(r_+) = \frac{2\pi}{kl^4 r_+} \left( GQ^2 l^2 + l^2 r_+^2 - 3r_+^4 + 4Gbl^2 r_+^5 \right). \quad (5.40)$$

Esta função está representada nas figuras 5.0a e 5.0b pela linha contínua em vermelho. Os gráficos mostram comportamentos diferentes para o sinal do potencial químico. Enquanto que no gráfico 5.0a temos transições entre regiões com  $\mu > 0$  e  $\mu < 0$  nos pontos em que o gráfico corta o eixo horizontal, no gráfico 5.0b o potencial químico permanece positivo para todos os valores de  $r_+$ . Essa dependência do sinal de  $\mu$  com a escolha dos parâmetros mostra que o potencial químico não é adequado para classificar o tamanho do buraco negro de Kiselev para esse tipo de fluido.

#### 5.4 Comportamento crítico

Assim como na formulação original da química do buraco negro (KUBIZŇÁK; MANN; TEO, 2017), é possível implementar o estudo das transições de fase induzidas pela presença da carga central no buraco negro. Como na termodinâmica usual, as quantidades críticas são definidas pelos pontos de sela das funções termodinâmicas. Neste caso, tal função será a temperatura expressa como uma função  $T = T(r_+, l, C)$ . Para introduzir a dependência da carga central  $C$  em (5.32), utilizamos a relação (5.14) para  $D = 4$  e  $k = 16\pi$ :

$$C = \frac{l^2}{G}. \quad (5.41)$$

A relação acima juntamente com as condições de ponto de sela

$$\frac{\partial T(r_c, l_c, C_c)}{\partial r_+} = 0 \quad (5.42)$$

$$\frac{\partial^2 T(r_c, l_c, C_c)}{\partial r_+^2} = 0, \quad (5.43)$$

permitem determinar os pontos críticos  $r_c$ ,  $l_c$ ,  $C_c$  e  $T_c$ . No que segue apresentamos dos valores destas variáveis no ponto crítico para cada um dos fluidos considerados na seção anterior.

- **Caso  $\omega = -1/3$**

O raio, a temperatura, a carga central e a escala holográfica no ponto crítico são

$$r_+^c = \frac{\sqrt{6GQ}}{\sqrt{1-Gb}}; \quad (5.44)$$

$$l_c = \frac{6\sqrt{GQ}}{|1-Gb|}; \quad (5.45)$$

$$T_c = \frac{\sqrt{6}(1-Gb)^{3/2}}{18\pi\sqrt{GQ}}; \quad (5.46)$$

$$C_c = \frac{36Q^2}{(1-Gb)^2}. \quad (5.47)$$

Observe que quando o acoplamento com os fluidos é retirada por meio da escolha  $b = 0$  obtemos o mesmo resultado da referência (CONG; KUBIZNAK; MANN, 2021) para o buraco negro de Reissner-Nordström AdS, em que foi mostrada a universalidade da carga central (dependência apenas com a carga  $Q$  do buraco negro). Por outro lado, vemos na equação (5.47) a dependência explícita da variável  $G$ . Isso pode indicar que na geometria de Kiselev ocorre

a violação da universalidade da carga central apresentada em (CONG; KUBIZNAK; MANN, 2021).

• **Caso  $\omega = -2/3$**

Para este valor de  $\omega$  temos as seguintes quantidade críticas:

$$r_+^c = \sqrt{6GQ}; \quad (5.48)$$

$$l_c = 6\sqrt{GQ}; \quad (5.49)$$

$$C_c = 36Q^2; \quad (5.50)$$

$$T_c = \frac{\sqrt{6}}{18\pi\sqrt{GQ}} - \frac{Gb}{2\pi}. \quad (5.51)$$

Para este tipo de fluido os valores das variáveis (5.48)-(5.50) são exatamente as mesmas obtidas em (CONG; KUBIZNAK; MANN, 2021), recuperando a universalidade da carga central. Contudo, a temperatura crítica (5.51) é modificada pela presença do fluido. Este resultado é análogo ao encontrado na referência (JAWAD et al., 2020), em que o buraco negro de Kiselev foi analisado na presença do termo de Gauss-Bonnet.

• **Caso  $\omega = -4/3$**

Não é possível encontrar uma solução analítica para esse tipo de fluido. Neste caso, as variáveis termodinâmicas no ponto crítico são

$$l_c = \frac{\sqrt{2}\sqrt{3Q^2r_c^2 + 2br_c^7}}{\sqrt{Q^2 + 4br_c^5}}, \quad (5.52)$$

$$T_c = \frac{2Q^2 + 3br_c^5}{6\pi Q^2 r_c + 4\pi br_c^6}, \quad (5.53)$$

$$C_c = \frac{k(3Q^2 + 2br_c^5)^2}{4\pi(Q^2 + 4br_c^5)}, \quad (5.54)$$

onde  $r_c$  satisfaz a equação

$$4Gb(r_+^c)^5 - (r_+^c)^2 + 6GQ^2 = 0. \quad (5.55)$$

A universalidade da carga central é violada uma vez que  $r_+^c$  é sensível à variações em  $G$ .

Finalizando este capítulo, apresentamos agora a discussão sobre o comportamento crítico do buraco negro de Kiselev para os diferentes fluidos considerados acima. As transições de fase podem ser melhor visualizadas através do gráfico 5.2 da energia livre

$$F = M - TS \quad (5.56)$$

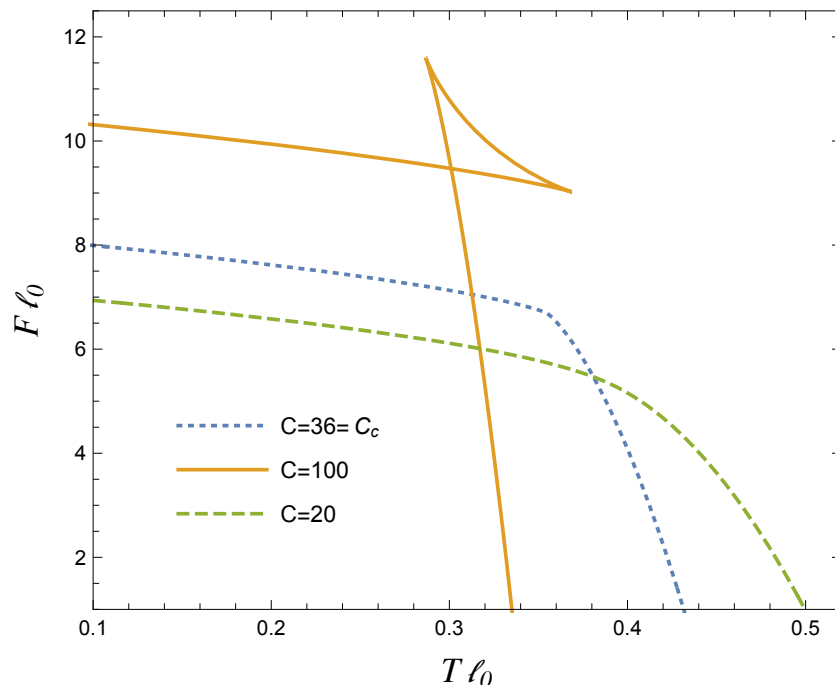
em função da temperatura. Para construir o gráfico, utilizamos a dependência de  $M$ ,  $T$  e  $S$  em relação à variável  $r_+$ , conforme exposto nas equações (5.31) para a massa  $M$ , (5.32) para a temperatura e a expressão da entropia em (5.33). Os valores de  $G$ ,  $Q$  e  $b$  são mantidos fixos. Em particular, as constantes  $G$  e  $l$  podem ser substituídas na expressão da energia livre por valores fixos da carga central  $C$  e da pressão. Para isso basta utilizar as equações (5.41) e a expressão da pressão dada em (5.33), que permite escrever

$$G = \frac{1}{8\pi} \sqrt{\frac{24\pi}{PC}}. \quad (5.57)$$

Desse modo, para cada valor de  $r_+$  obtemos um ponto no plano  $F \times T$ .

O gráfico 5.2 representa o comportamento crítico correspondente ao fluido  $\omega = -2/3$  para três valores distintos da carga central  $C$ <sup>1</sup>. Os eixos estão representados em termos de grandezas adimensionais, escalonadas pelo comprimento fiducial  $l_0$

Figura 5.2 – Representação da energia livre em função da temperatura para o fluido  $\omega = -2/3$ . Os demais parâmetros foram fixados como  $b = 0,3$ ,  $Q = 1$ ,  $P = 15$  e  $k = 16\pi$ . Os valores de  $C$  estão indicados na figura.



A linha pontilhada azul descreve a curva crítica que separa o plano  $F \times T$  em duas regiões em que ocorrem ou não as transições de fase. De fato, o gráfico da linha laranja sólida possui um comportamento típico de uma transição de fase de primeira ordem. O gráfico

<sup>1</sup> Para  $\omega = -1/3$  o comportamento crítico é similar ao da figura (5.2). O caso  $\omega = -4/3$  viola a desigualdade isoperimétrica. Por essas razões, apresentamos somente o gráfico para  $\omega = -2/3$ .

tracejado em verde, abaixo da curva crítica, possui um comportamento suave. Isso indica a ausência de transição de fase nessa região.

## 6 CONCLUSÃO

A proposta desta dissertação foi explorar a criticalidade de um buraco negro de Kiselev em  $D$  dimensões imerso em diferentes fluidos. Com base nos resultados apresentados em (CONG; KUBIZNAK; MANN, 2021), analisamos o espaço de fase estendido pela introdução de uma nova variável termodinâmica: a constante newtoniana  $G$ . Mostramos que a termodinâmica nesse novo espaço de fase é compatível com o princípio holográfico.

Generalizamos a 1ª lei da termodinâmica definindo um volume  $V_N$  e um potencial químico  $\mu$  conjugado à carga central  $C$ . Para isso, deduzimos a relação de Smarr em  $D$  dimensões e verificamos a equivalência com o caso da termodinâmica em que  $G$  é constante. Este resultado remete a ideia de dualidade existente no princípio holográfico. Como aplicação, analisamos a termodinâmica de Kiselev em 4 dimensões para diferentes fluidos, caracterizados pelos valores do parâmetro  $\omega = -1/3, -2/3, -4/3$ . Avaliamos em cada caso a relação entre o sinal do potencial químico e o tamanho do buraco negro, utilizando o vínculo estabelecido pela desigualdade isoperimétrica reversa.

Quando a desigualdade isoperimétrica reversa é satisfeita, podemos classificar o tamanho dos buracos negros de acordo com o sinal do potencial químico:  $\mu < 0$  para buracos negros grandes, e  $\mu > 0$  para buracos negros pequenos. Mostramos que essa classificação é válida nos casos em que  $\omega = -1/3, -2/3$ . Por outro lado, para  $\omega = -4/3$  a desigualdade isoperimétrica é violada e a classificação não é aplicável. Neste caso, a variação do sinal do potencial químico no espaço de fase torna-se diversificada.

Finalizando, analisamos o comportamento crítico do buraco negro de Kiselev. Verificamos que, de modo geral, a universalidade obtida em (CONG; KUBIZNAK; MANN, 2021) é violada devido a dependência de  $G$  no valor crítico da carga central. A dependência é introduzida pelo fluido que compõe o buraco negro, sendo a universalidade recuperada para  $\omega = -2/3$ . Através do gráfico  $F \times T$ , observamos que o espaço de fase é separado em duas regiões. Para valores  $C_c < 36Q^2$  o buraco negro de Kiselev possui um comportamento regular, enquanto que para  $C_c > 36Q^2$  desenvolverá uma transição de fase de 1ª ordem.



## REFERÊNCIAS

- ABBOTT, B. P. et al. Observation of gravitational waves from a binary black hole merger. **Physical review letters**, APS, v. 116, n. 6, p. 061102, 2016.
- AKIYAMA, K. et al. First M87 Event Horizon Telescope Results. I. The Shadow of the Supermassive Black Hole. **Astrophys. J. Lett.**, v. 875, p. L1, 2019.
- ALFAIA, R.; LOBO, I.; BRITO, L. Central charge criticality of charged ads black hole surrounded by different fluids. **arXiv preprint arXiv:2109.06599**, 2021.
- AZREG-AINOUE, M. Charged de sitter-like black holes: quintessence-dependent enthalpy and new extreme solutions. **The European Physical Journal C**, Springer, v. 75, n. 1, p. 1–13, 2015.
- BARDEEN, J. M.; CARTER, B.; HAWKING, S. W. The four laws of black hole mechanics. **Communications in mathematical physics**, Springer, v. 31, n. 2, p. 161–170, 1973.
- BEKENSTEIN, J. D. Black holes and entropy. In: **JACOB BEKENSTEIN: The Conservative Revolutionary**. [S.l.]: World Scientific, 2020. p. 307–320.
- CHEN, S.; WANG, B.; SU, R. Hawking radiation in a d-dimensional static spherically symmetric black hole surrounded by quintessence. **Physical Review D**, APS, v. 77, n. 12, p. 124011, 2008.
- CONG, W.; KUBIZNAK, D.; MANN, R. B. Thermodynamics of AdS Black Holes: Critical Behavior of the Central Charge. **Phys. Rev. Lett.**, v. 127, n. 9, p. 091301, 2021.
- CVETIČ, M. et al. Black hole enthalpy and an entropy inequality for the thermodynamic volume. **Physical Review D**, APS, v. 84, n. 2, p. 024037, 2011.
- D'INVERNO, R. A. **Introducing Einstein's relativity**. [S.l.]: Clarendon Press, 1992.
- FERNANDO, S. Massive gravity with lorentz symmetry breaking: black holes as heat engines. **Modern Physics Letters A**, World Scientific, v. 33, n. 31, p. 1850177, 2018.
- GHEZ, A. M. et al. High proper-motion stars in the vicinity of sagittarius a\*: Evidence for a supermassive black hole at the center of our galaxy. **The Astrophysical Journal**, IOP Publishing, v. 509, n. 2, p. 678, 1998.
- HAWKING, S. W. Particle creation by black holes. **Communications in mathematical physics**, Springer, v. 43, n. 3, p. 199–220, 1975.
- HOBSON, M. P.; EFSTATHIOU, G. P.; LASENBY, A. N. **General relativity: an introduction for physicists**. [S.l.]: Cambridge University Press, 2006.
- JAWAD, A. et al. Effects of gauss-bonnet entropy on thermodynamics of kiselev black hole. **International Journal of Modern Physics D**, v. 29, n. 15, p. 2050101, 2020.
- JOHNSON, C. V. Holographic heat engines. **Classical and Quantum Gravity**, IOP Publishing, v. 31, n. 20, p. 205002, 2014.
- KARCH, A.; ROBINSON, B. Holographic black hole chemistry. **Journal of High Energy Physics**, Springer, v. 2015, n. 12, p. 1–15, 2015.

- KISELEV, V. Quintessence and black holes. **Classical and Quantum Gravity**, IOP Publishing, v. 20, n. 6, p. 1187, 2003.
- KUBIZŇÁK, D.; MANN, R. B.; TEO, M. Black hole chemistry: thermodynamics with lambda. **Classical and Quantum Gravity**, IOP Publishing, v. 34, n. 6, p. 063001, 2017.
- LEMOS, N. A. **Mecânica analítica**. [S.l.]: Editora Livraria da Física, 2007.
- MUKHANOV, V. F.; WINITZKI, S. Introduction to quantum fields in classical backgrounds. **Lecture notes-2004**, 2007.
- NUSSENZVEIG, H. M. **Curso de Física Básica: fluidos, oscilações e ondas, calor**. [S.l.]: Editora Blucher, 2018. v. 2.
- OLIVEIRA, M. J. de. **Termodinâmica**. [S.l.]: Editora Livraria da Física, 2005.
- POISSON, E. **A relativist's toolkit: the mathematics of black-hole mechanics**. [S.l.]: Cambridge university press, 2004.
- SALINAS, S. R. **Introdução a física estatística vol. 09**. [S.l.]: Edusp, 1997.
- SCHÖDEL, R. et al. A star in a 15.2-year orbit around the supermassive black hole at the centre of the milky way. **Nature**, Nature Publishing Group, v. 419, n. 6908, p. 694–696, 2002.
- SMARR, L. Mass formula for kerr black holes. **Physical Review Letters**, APS, v. 30, n. 2, p. 71, 1973.
- VISSER, M. R. Holographic thermodynamics requires a chemical potential for color. **arXiv preprint arXiv:2101.04145**, 2021.
- WEINBERG, S. Gravitation and cosmology: principles and applications of the general theory of relativity. 1972.