



LUCAS MARQUES FAGUNDES SILVA

LEIS DE ESCALA EM SISTEMAS URBANOS

LAVRAS – MG

2022

LUCAS MARQUES FAGUNDES SILVA

LEIS DE ESCALA EM SISTEMAS URBANOS

Dissertação apresentada à Universidade Federal de Lavras, como parte das exigências do Programa de Pós-Graduação em Física, área de concentração em Física de sistemas complexos, para a obtenção do título de Mestre em Física.

Prof. Dr. Fabiano Lemes Ribeiro
Orientador

LAVRAS – MG

2022

**Ficha catalográfica elaborada pelo Sistema de Geração de Ficha Catalográfica da Biblioteca
Universitária da UFLA, com dados informados pelo(a) próprio(a) autor(a).**

Silva, Lucas Marques Fagundes.

Leis de escala em sistemas urbanos / Lucas Marques Fagundes
Silva. - 2022.
87 p. : il.

Orientador(a): Fabiabo Lemes Ribeiro.

Dissertação (mestrado acadêmico) - Universidade Federal de
Lavras, 2022.
Bibliografia.

1. Planejamento territorial urbano. 2. Urbanização. 3. Sistema
dinâmicos. I. Ribeiro, Fabiabo Lemes. II. Título.

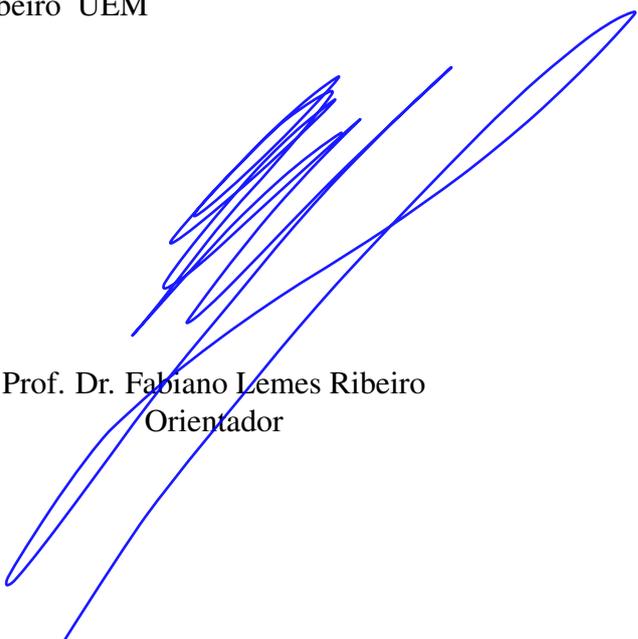
LUCAS MARQUES FAGUNDES SILVA

**LEIS DE ESCALA EM SISTEMAS URBANOS
SCALING LAWS FOR URBAN SYSTEMS**

Dissertação apresentada à Universidade Federal de Lavras, como parte das exigências do Programa de Pós-Graduação em Física, área de concentração em Física de sistemas complexos, para a obtenção do título de Mestre em Física.

APROVADA em 26 de Maio de 2022.

Prof. Dr. Camilo Rodrigues Neto USP
Prof. Dr. Haroldo Valentin Ribeiro UEM



Prof. Dr. Fabiano Lemes Ribeiro
Orientador

**LAVRAS – MG
2022**

*Aos meus pais, Rosângela e Rogério,
aos meus irmãos Fábio e Laura
à Jesus Cristo e sua Santíssima Mãe Maria
Dedico.*

AGRADECIMENTOS

Agradecimentos a todos que me fortaleceram e fizeram que esse trabalho fosse realizado:

Agradeço ao meu professor e orientador Dr. Fabiano Lemes Ribeiro, que com muitos ensinamentos e incentivos permitiu que eu fosse capaz de chegar até aqui. Me ensinando e motivando em todo momento durante esses dois anos. Me apresentando esse rico mundo das cidades. Um grande carinho e meus sinceros agradecimentos.

Agradeço meus companheiros de trabalho Raphael e Letícia que estavam sempre disponíveis para discussões e ajudas rotineiras. Assim como todas as pessoas que sabem que contribuíram para este trabalho de alguma forma.

Agradecimento ao grupo de pesquisa da UFLA pela discussão. Ao Vitor pela ajuda em minha caminhada pela programação, a Renan e Felipe pelas valiosas discussões.

Agradeço também a Fundação de Amparo à Pesquisa do Estado de Minas Gerais (FAPEMIG), por financiar o presente trabalho.

Agradeço a Deus por ter guiado tantas pessoas ao meu caminho que me auxiliaram, assim como aos meus pais, Rosangela e Rogério, por todo o apoio.

Todos àqueles que de alguma forma, direta ou indiretamente, contribuíram para minha formação e caminho tem minha profunda gratidão.

RESUMO

Evidências empíricas sugerem uma relação não linear entre algumas variáveis urbanas e o tamanho da população de uma cidade. Na verdade, os dados mostram lei de potência com um expoente de escala bem característico e válido para diferentes sistemas urbanos. Introduzimos algumas teorias sobre formações dessas relações de escala em cidades, além das propriedades das leis de potências. Estudamos o modelo gravitacional de mobilidade urbana com dados do movimento pendular brasileiro utilizando formalismo de redes complexas. Nossos resultados consistem em uma nova relação de escala para o expoente de decaimento gravitacional e comparação do mesmo expoente vindo de leis de potência da relação trabalhador-distância das cidades. Nossa outra abordagem consiste no estudo das hierarquias urbanas da rede do movimento pendular brasileiro geradas por um método chamado *Stochastic Blocking Model* (SBM). Nessas hierarquias, estudamos as distribuições de recursos artificiais e a distribuição do expoente dos indicadores urbanos, bem como a estrutura das comunidades formadas por métricas de redes complexas. Por fim, estudamos a distribuição de recursos reais distribuídos pela União aos demais entes federativos chamado Fundo de Participação dos Municípios (FPM). Propomos também novos critérios para as distribuições de recursos tendo em vista parâmetros socioeconômicos dos municípios, analisando a renda per capita e coeficiente de Gini.

Palavras-chave: Leis de escalas urbana, redes complexas, hierarquias urbanas

ABSTRACT

Empirical evidence suggests a non-linear relationship between some urban variables and the size of cities (population). The data show a power law with a very characteristic and valid scale exponent for different urban systems. We introduce some theories about the formation of these scaling relations in cities, in addition to the properties of power laws. We study the gravitational model of urban mobility with data from the Brazilian commuting movement using complex network formalism, our results consist of a new scaling relationship for the gravitational decay exponent and a comparison of the same exponent coming from power laws of the worker-distance relationship of the cities. Our other approach consists in the study of urban hierarchies of the Brazilian commuting movement network generated by a method called Stochastic Blocking Model (SBM). In these hierarchies, we study the distribution of artificial resources and the distribution of the exponent of urban indicators, as well as the structure of communities formed by metrics of complex networks. Finally, we study the distribution of real resources distributed by the Nation to the other federative entities called the *Fundo de Participação dos Municípios* (FPM), we also propose new criteria for the distribution of resources given the socio-economic parameters of the municipalities, analyzing the per capita income and Gini Coefficient

Keywords: Urban scaling laws, complex networks, urban hierarquies

LISTA DE FIGURAS

Figura 2.1 – As redes podem ser agrupadas em termos das camadas de interação. Primeiramente temos as redes socioeconômicas. A segunda camada das redes são as de infraestrutura, elas mediam os serviços urbanos, mobilidade urbana, estrutura e espaços. A terceira camada de redes são as cidades que estão conectadas entre sí, sobre um fluxo de pessoas, recursos e informação. . . .	16
Figura 2.2 – Auto-organização é uma característica fundamental de sistemas complexos. Os indivíduos que compõem esse sistema interagem entre sí, sem o intermédio de um controle central e são observados fenômenos emergentes. Estas emergências são observadas em qualquer escala, causando efeito de autossimilaridade. Toda geometria desses sistemas se comporta como fractais e possui leis de potência associadas.	17
Figura 2.3 – Metabolismo em função da massa corpórea para diferentes tipos de homeotermos.	18
Figura 2.4 – Indicadores urbanos em função do tamanho da população para diferentes tipos de variáveis.	19
Figura 2.5 – Valores de alguns expoente de escala para as cidades brasileiras calculado por meio do método de Mínimos Quadrados Ordinários (MMQ).	19
Figura 2.6 – Log da população em função do rank das cidades brasileiras.	20
Figura 2.7 – Relações de Kaya para o estado de São Paulo	22
Figura 3.1 – A esquerda a representação da região de Königsberg, a direita simplificação do problema em forma de um grafo	24
Figura 3.2 – Os nós são representados por bolas coloridas e os vértices por segmento de reta. As redes podem ser direcionadas ou não-direcionadas. A rede pode possuir uma matriz A_{ij} adjacente ou estar associada a uma matriz W_{ij}	26
Figura 3.3 – À esquerda temos um nó $k_i = 3$ de uma rede não direcionada, à direita uma rede direcionada, e o nó em destaque com grau $k_{in,i} = 2$ e $k_{out,i} = 1$	27
Figura 3.4 – Três redes de Erdos-Renyi com $N = 5$, para três tipos diferentes de probabilidade. Observe que para $p = 1$ todos os nós estão conectados com todos os demais.	28
Figura 3.5 – Formato da distribuição normal gaussiana ou normal.	30
Figura 3.6 – Comportamento de uma distribuição de lei de potência.	30

Figura 3.7 – Distribuição de grau (k) para a rede do movimento pendular brasileira ($\gamma = 2.87$).	31
Figura 3.8 – Uma centralidade de rede alta significa que poucos nós possuem um grau maior em comparação aos outros. Se a rede possui baixa centralização, todos os graus de centralidade são mais similares.	32
Figura 3.9 – Exemplo de comunidades formadas em uma rede não-direcionada	34
Figura 3.10 – Exemplo de uma rede social, caso duas pessoas A e B, tenham um amigo em comum C, é provável que A,B também sejam amigos.	35
Figura 3.11 – Propriedades de leis de potência para redes hierárquicas. O gráfico mostra que o <i>clustering coefficient</i> é inversamente proporcional ao grau.	37
Figura 3.12 – Dado uma rede G_0 sobre uma transformação de renormalização R_B , com um fator de escala b , após várias interações dessa rede chegamos a um ponto fixo G^*	38
Figura 3.13 – Os gráficos mostram vértices vindo de uma mesma matriz adjacente, organizado de 3 foram diferentes de acordo com suas propriedades.	39
Figura 3.14 – Exemplificação da matriz de probabilidade p_{rs} (a) e a estrutura de rede formada por essa matriz b)	41
Figura 4.1 – Cada ponto na figura representa uma cidade, as arestas são direcionadas, elas indicam para onde o trabalhador se desloca, o ponto de origem representa a cidade natal.	43
Figura 4.2 – Relação do <i>commuter</i> em função da distância para algumas capitais brasileiras, junto com o modelo teórico correspondente a uma função exponencial	44
Figura 4.3 – Os gráficos mostram a relação dos <i>commuters</i> que vão para uma cidade j em função da distância r_{ij}	45
Figura 4.4 – Diagrama de caixa ou <i>boxplot</i> para o expoente de escala m para as cidades com tamanho de população maiores que 200.000 habitantes	45
Figura 4.5 – Relação entre a quantidade de <i>commuter</i> que sai de uma cidade i com o tamanho da população N_i	46
Figura 4.6 – Relação entre a quantidade de <i>commuters</i> que entra de uma cidade i com o tamanho da população N_i	47

Figura 4.7 – Dimensão fractal das regiões brasileiras calculado por meio do algoritmo de <i>box-counting</i>	50
Figura 4.8 – Gráfico da Lei de Zipf para a região brasileira e as cinco regiões separadamente.	51
Figura 4.9 – Gráficos da distribuição de grau para a região brasileira como um todo e individualmente.	51
Figura 4.10 – Cálculos do expoente m para os modelos de lei de potência e modelo <i>fitness</i>	52
Figura 4.11 – Três casos para o expoente m , quanto menor o expoente m maior será a distância de interação. Para m maiores temos cidade altamente acopladas em uma curta distância.	53
Figura 5.1 – As hierarquias urbanas formadas pelo SBM. No raio maior temos todas as 5549 cidades, posteriormente as comunidades são agregadas e forma um nova hierarquia, partir disso temos 5 níveis hierárquicos contando com o inicial.	55
Figura 5.2 – As hierarquias formadas pelo Método SBM em representação geográfica.	55
Figura 5.3 – Expoente β_{PIB} para as hierarquias do SBM. Por ser tratar de um método estocástico, a cada interação obtemos hierarquias levemente diferentes.	56
Figura 5.4 – Distribuição de frequência dos β_{PIB} para as comunidade de cada uma das hierarquias.	57
Figura 5.5 – Relação entre os β_{PIB} de cada comunidade que a transitividade da rede.	57
Figura 5.6 – Tipos de distribuição para diferentes β_1 , onde foram agregados nas mesmas hierarquias.	59
Figura 5.7 – a) Tipo 1 - distribuição pelos critérios atuais do FPM no ano de 2010 b) Tipo 2 - distribuição do FPM para os municípios levando em conta um fator PIB como indicado pela Tabela 5.4, mas mantendo o fator estadual η_k c) Tipo 3 - distribuição do FPM levando em conta o Fator PIB e desconsiderando o fator estadual η_k	62
Figura 5.8 – Distribuição do Montante do FPM para o Tipo 2 para cada estado.	62
Figura 5.9 – Distribuição per capita do FPM por estado para os três tipos de distribuições.	63
Figura 5.10 – Curva de Lorenz para os três tipos de distribuições.	64
Figura B.1 – Construção da arvore pitagórica.	76
Figura B.2 – Variação dos parâmetros p e q para um certo objeto fractal (quadrado central).	78

Figura C.1 – Relação entre <i>commuter</i> e a distância r_{ij} para algumas cidades capitais. . .	80
Figura C.2 – Expoente β em função do coeficiente de agrupamento.	81
Figura C.3 – Expoente β em função densidade.	81
Figura C.4 – Expoente β em função da densidade pesada.	81
Figura C.5 – Expoente β em função do coeficiente do expoente α	82
Figura C.6 – Expoente β em função do PIB.	82

LISTA DE TABELAS

Tabela 4.1 – Tabela com valores dos expoentes expostos nos gráficos anteriores	51
Tabela 5.1 – Valores p das relações indicadas para cada uma das hierarquias	58
Tabela 5.2 – Tabela de coeficientes estaduais do Fundo de Participação dos Municípios (FPM) - interior.	60
Tabela 5.3 – Tabela de coeficientes do Fundo de Participação dos Municípios (FPM) - interior.	61
Tabela 5.4 – Critérios dos coeficiente λ para as faixas de PIB das cidades.	63
Tabela 5.5 – Valores do coeficiente de Gini para cada método.	64
Tabela C.1 – Cidades da região azul na Figura 4.5. Dentre elas se encontram todas as cidades capitais.	79
Tabela C.2 – Cidades da região azul na Figura 4.5. Dentre elas se encontram todas as cidades capitais.	80

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	13
1.1	Estrutura da dissertação	14
2	Ciências das cidades	15
2.1	Leis de escala em cidades	15
2.2	Modelagem de sistemas urbanos	20
2.2.1	Modelo de escala urbana <i>distance-dependent interactions</i>	20
2.2.2	Modelo <i>Origins of Scaling in Cities</i>	21
2.2.3	Análise de geometria fractal	21
2.2.4	Leis de escala e meio ambiente	22
3	REDES COMPLEXAS	24
3.1	Teoria de Grafos	25
3.1.1	Caminho estatístico	26
3.1.2	Grau	27
3.2	Redes Aleatórias	28
3.3	Redes de pequeno-mundo	29
3.4	Redes livres de escala	29
3.5	Métricas de redes	31
3.5.1	Centralidade	31
3.6	Comunidades	34
3.7	Grupo de Renormalização em redes complexas	37
4	MOBILIDADE URBANA	42
4.1	Movimento pendular urbano	42
4.2	Modelo Gravitacional de Mobilidade Urbana	43
4.3	Estudo de <i>Fitness</i> na rede urbana	47
4.4	Discussão	52
5	Hierarquias Urbanas	54
5.1	Hierarquias Urbanas	54
5.2	Estrutura das hierarquias	56
5.3	Distribuições de recursos	58
5.4	Fundo de Participação dos Municípios	59

5.5	Discussão	64
6	CONCLUSÃO	67
	REFERÊNCIAS	68
	APENDICE A – Propriedade das leis de potência	72
A	Propriedade das Leis de Potência	73
A.1	Normalização	73
A.2	Momentos	73
A.3	Distribuição livre de escala	74
B	Fractais	75
C	Dados complementares	79
C.1	Dados sobre grupos de commuters	79
C.2	Lei de potência para os commuters	80
C.3	Estrutura da comunidade	80
D	Algoritmos	83

1 INTRODUÇÃO

As cidades são os centros da economia, produção, conhecimento, trabalho e desenvolvimento pessoal; elas proporcionam os mecanismos para interação social e a colaboração, em consequência, para a inovação e produção de riquezas. Por outro lado, também são os centros de crimes, poluição, pobreza e doenças (OLIVEIRA; MENEZES, 2017; WEST, 2017). O tamanho da população ressalta uma das mais importantes métricas para os indicadores socioeconômicos e a análise das variações dessa e de outras métricas urbanas constitui a área de estudo chamada *urban scaling* (escalonamento urbano) (LOBO et al., 2013). Rybski et al. constata que as discussões dessa área são tratadas em três diferentes tópicos: alometria urbana, economia urbana e morfologia urbana; todas tratadas com ferramentas da ciência da complexabilidade (RYBSKI; ARCAUTE; BATTY, 2019).

Nesta perspectiva, as cidades podem ser observadas como sistemas complexos adaptativos que manifestam suas características emergentes por diferentes escalas espaciais e temporais (LOBO et al., 2013). Buscamos na ciência da complexabilidade as ferramentas necessárias para investigar esses fenômenos emergentes, em especial, as redes complexas. Veremos ao longo do trabalho, como elas possuem a capacidade de relacionar as interações do meio urbano.

As cidades surgiram espontaneamente em diversos locais do mundo: Mesopotâmia, Índia, Egito, América Central e Peru. As mais antigas conhecidas foram localizadas na Macedônia e no Vale do Indo (4000 a.C.), mais tarde no Egito (3100 a.C.), na China por volta de 2500 a.C., além das pré-colombianas (1500 a.C.). Algumas teorias apontam que o surgimento das cidades está centrado em duas atividades comuns em todas as civilizações: agricultura e guerra (READER, 2004). Ambos itens então centrados na ideia da interação humana e no agrupamento como forma de sobrevivência, como bem sintetiza Reader em seu livro *Cities*,

a teoria é simples: depois que a agricultura se tornou um modo de vida viável e as pessoas começaram a viver em comunidades estabelecidas, algumas inevitavelmente se tornariam mais ricas do que outras. Agricultores bem-sucedidos se reuniram e construíram compostos defensivos como proteção contra vizinhos potencialmente agressivos; isso, por sua vez, levou a novas formas de organizar a sociedade. (READER, 2004)

Vemos que a natureza das cidades está nos habitantes e suas organizações sociais. Elas têm sido descritas como "*as manifestações físicas das interações das pessoas e da agregação e agrupamento de indivíduos*", (WEST, 2017); "*um meio para coordenarmos um número de ações e decisões pessoais e aparentemente caóticas*" (NETTO, 2020) e ainda como "*pessoas*

com diferentes habilidades, experiências e ocupações interagindo para construí-lá." (SUGAR, 2019). Nesse sentido, vemos que as cidades são a própria conexão entre as pessoas e o compartilhamento da infraestrutura para o desenvolvimento pessoal.

1.1 Estrutura da dissertação

Discutimos as leis de escala para sistemas urbanos no capítulo 2, bem como uma breve introdução a algumas teorias sobre o escalonamento urbano. O capítulo 3 trata-se de uma revisão de literatura sobre redes complexas, onde introduzimos o ferramental teórico utilizado no trabalho, como as métricas de redes complexas e o algoritmo *Stochastic Blocking Model (SBM)* para o estudo de hierarquias em redes. No capítulo 4, introduzimos o modelo gravitacional de mobilidade urbana, onde estudamos o movimento pendular brasileiro por meio de redes complexas utilizando *fitness model*. No capítulo 5, utilizamos o SBM para geração das hierarquias urbanas na rede do movimento pendular, estudamos alguns fatores socioeconômicos gerados por essas hierarquias, como a distribuições de expoente de escala do PIB e a distribuições de recursos artificiais nas hierarquias formadas. Realizamos estudo de distribuição de recursos nas hierarquias reais utilizando o Fundo de Participação dos Municípios, reformulando-o por meio da introdução de critérios que levam em conta fatores socioeconômicos de acordo com as leis de escala em cidades.

2 CIÊNCIAS DAS CIDADES

Bettencourt descreve as redes complexas como uma ferramenta teórica capaz de modelar distintos fenômenos urbanos e, portanto, as interações humanas (BETTENCOURT, 2019). Ele as aborda por três estruturas hierárquicas diferentes (Figura(2.1)). A primeira e mais fundamental, é representada pelas redes de interação socioeconômicas. Bettencourt argumenta que estas interações antecedem a infraestrutura e a espacial, pois a relações pessoal, em primeira instância, busca o desenvolvimento da infraestrutura, sendo historicamente observado em cidades em desenvolvimento (READER, 2004), além de nos permitir compreender os chamados *efeitos de redes*. Estes efeitos mostram que as propriedades das cidades, não estão relacionadas ao tamanho da população ou à distribuição espacial, mas sim pela conexão entre os elementos, que são empiricamente uma função superlinear do número de indivíduos conectados (BETTENCOURT, 2013; BETTENCOURT, 2010).

Em segundo estão as redes de infraestrutura, elas expressam a topologia e os padrões das organizações sociais, permitindo que as atividades se materializam de forma reconhecível e acessível (NETTO, 2018). Podemos diferenciar dois tipos de espaço interconectado: os *locais* (praças, lugares públicos) e as rede de acesso (ruas, fibra óptica, cabo telefônicos, dentre outros). A interação entre as duas, socioeconômica e de infraestrutura, nos permite analisar e compreender as deficiências de ambas e, portanto, diagnostica-las quando não estão bem otimizadas (JACOBS, 1962; BETTENCOURT, 2019; WEST, 2017).

A terceira estrutura de rede são as interurbanas, trata-se de observar as cidades como um fluxo; objetos não isolados que também interagem entre si, similarmente observado pela primeira lei da geografia:

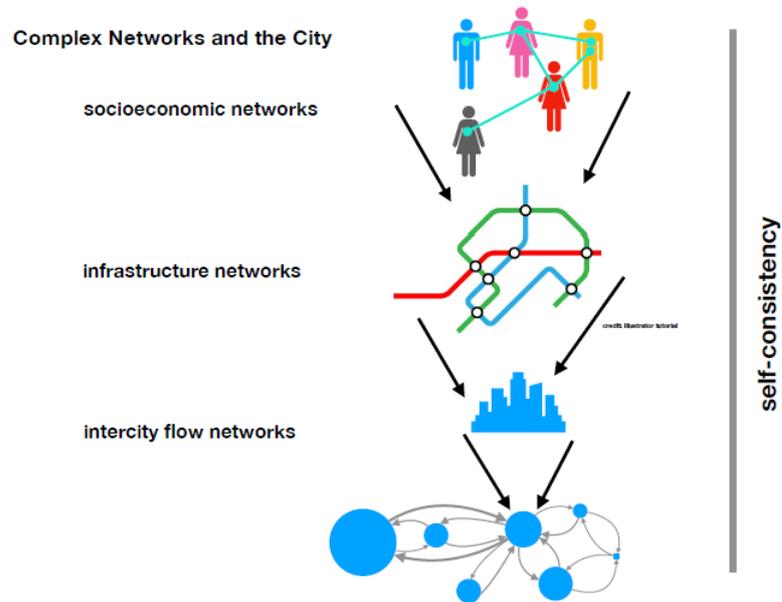
todas as coisas estão relacionadas com todas as outras, mas coisas próximas estão mais relacionadas do que coisas distantes (MILLER, 2004).

Trataremos de estruturas de redes semelhantes quando estudarmos o movimento pendular de brasileiros, que consiste em trabalhadores que exercem suas profissões em cidades diferentes das que residem.

2.1 Leis de escala em cidades

Apesar das cidades serem um fenômeno unicamente humano, as manifestações de seus padrões não são únicos na natureza (SUGAR, 2019). Os sistemas urbanos, assim como diversos outros eventos no universo, podem ser classificados como sistemas complexos (BATTY,

Figura 2.1 – As redes podem ser agrupadas em termos das camadas de interação. Primeiramente temos as redes socioeconômicas. A segunda camada das redes são as de infraestrutura, elas mediam os serviços urbanos, mobilidade urbana, estrutura e espaços. A terceira camada de redes são as cidades que estão conectadas entre si, sobre um fluxo de pessoas, recursos e informação.



Fonte: (BETTENCOURT, 2019)

2009) e apresentam diversas características em comum: são problemas de muitos-corpos, padrões emergentes e auto-organização (PORTUGALI, 1997), alguns possuem dinâmica caótica, além de muitas outras (JACOBS, 1962). Em *Fractal Cities*, Batty e Longley investigam a distribuição de objetos fractais para estudar diversos aspectos da morfologia urbana (BATTY, 1994), geometrias semelhantes são encontrados em diversos sistemas como as ramificações dos canais vasculares em sistemas nervosos (BATTY, 1994), ramificação das árvores (ZEIDE; PFEIFER, 1991), canais fluviais (BATTY, 1994), distribuição de matéria no universo (IOVANE, 1992). Análogo a economia de energia por célula em biologia (Lei de Kleiber) (KLEIBER, 1932), as cidades também possuem certas otimizações de escala: cidades maiores gastam menos por habitante com infraestrutura em relação às menores (BETTENCOURT, 2010). Todos esses processos formam um conjunto de mecanismos que justificam a existências das cidades e formam uma base para compreendermos esse fenômeno. Nas palavras de Jane Jacobs:

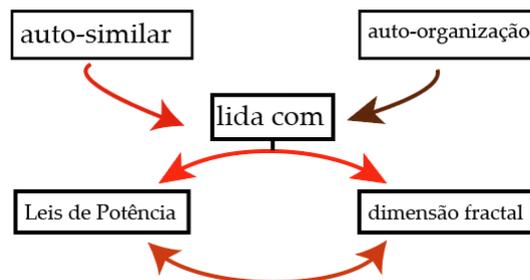
As cidades são um imenso laboratório de tentativa e erro, fracasso e sucesso, em termos de construção e desenho urbano. É nesse laboratório que o planejamento urbano deveria aprender, elaborar e testar suas teorias (JACOBS, 1962).

As escalas estão associadas com as magnitudes das grandezas em que um fenômeno é descrito, elas retratam as relações entre propriedades macroscópicas de um dado sistema e seu tamanho (BARENBLAT, 2003). Leis de escala são relações do tipo

$$y = Ax^\alpha, \quad (2.1)$$

onde A e α são constantes, x e y as variáveis. Essas relações são frequentemente observadas em diversas áreas das ciências, como biologia, economia e engenharia. As leis de escala apresentam um caráter especial, pois revelam uma propriedade importante dos fenômenos associados: *autossimilaridade* (BARENBLAT, 2003). A "*autossimilaridade*" significa que o fenômeno é o mesmo em qualquer escala de tempo e/ou espaço e apresenta uma geometria fractal (BARENBLAT, 2003; KOMULAINEN, 2004). Como veremos ao longo do trabalho, as leis de potência, quando relacionadas à distribuição espacial das variáveis em questão, possuem ligação direta com as dimensões fractais (Figura (2.2)) (KOMULAINEN, 2004).

Figura 2.2 – Auto-organização é uma característica fundamental de sistemas complexos. Os indivíduos que compõem esse sistema interagem entre si, sem o intermédio de um controle central e são observados fenômenos emergentes. Estas emergências são observadas em qualquer escala, causando efeito de autossimilaridade. Toda geometria desses sistemas se comporta como fractais e possui leis de potência associadas.



Fonte: Modificado de (KOMULAINEN, 2004)

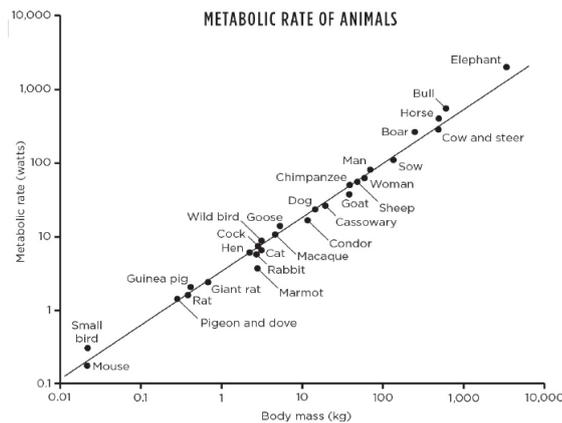
A Figura (2.3) mostra a relação da massa corpórea dos animais homeotermos com a sua taxa metabólica, conhecida como Lei de Kleiber (KLEIBER, 1932). O gráfico nos fornece uma lei de potência do tipo

$$B \sim M^\beta, \quad (2.2)$$

onde B é a taxa metabólica, M a massa corpórea e β o expoente de escala. O β reflete qual a geometria do problema, ou seja, como o sistema circulatório está distribuído em uma rede de distribuição hierárquica de padrão fractal (SUGAR, 2019; BARENBLAT, 2003). Experimentos

mostram que para a maioria dos animais vasculares temos $\beta = 3/4$. O fato de $\beta < 1$ reflete um caráter sublinear, isto é, quanto maior a massa corpórea, menor o consumo energético por célula, representando uma economia de escala.

Figura 2.3 – Metabolismo em função da massa corpórea para diferentes tipos de homeotermos.



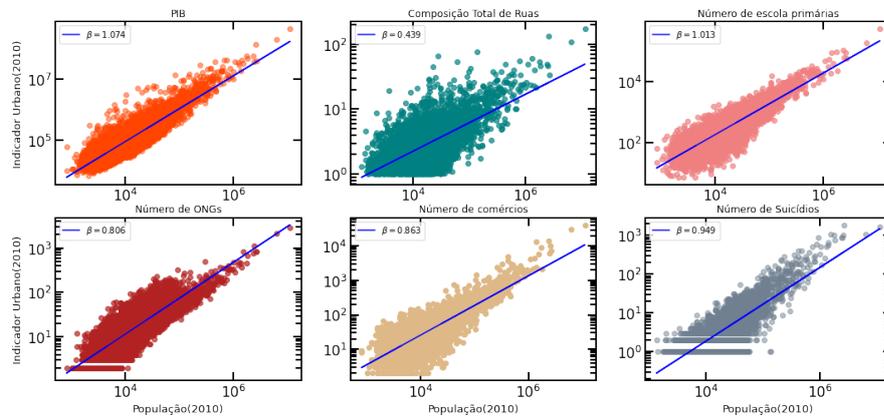
Fonte: (WEST, 2017)

Em sistemas urbanos também encontramos relações matemáticas semelhantes

$$Y(t) = N_0(t)N^\beta, \quad (2.3)$$

onde Y é um certo indicador urbano, $N_0(t)$ uma constante de normalização temporal, N o tamanho da população e β o expoente de escala urbano. Na literatura encontramos diferentes comportamento para β , geralmente para variáveis urbanas de infraestrutura temos $\beta < 1$ (sublinear), necessidades individuais $\beta \approx 1$ (linear) e $\beta > 1$ (superlinear) variáveis socioeconômicas (BETTENCOURT, 2013). A Figura 2.4 mostra alguns exemplos de indicadores urbano para o brasil

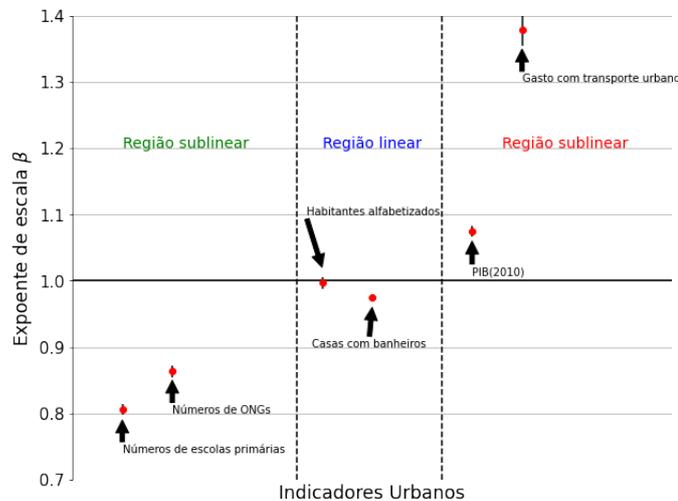
Figura 2.4 – Indicadores urbanos em função do tamanho da população para diferentes tipos de variáveis.



Fonte: produção do autor
 Dados: Censo IBGE 2010

A Figura (2.5) mostra alguns outros exemplos de expoentes de escala para esses três tipos de casos para as cidades brasileiras, e suas respectivas regiões de escala esperada.

Figura 2.5 – Valores de alguns expoente de escala para as cidades brasileiras calculado por meio do método de Mínimos Quadrados Ordinários (MMQ).



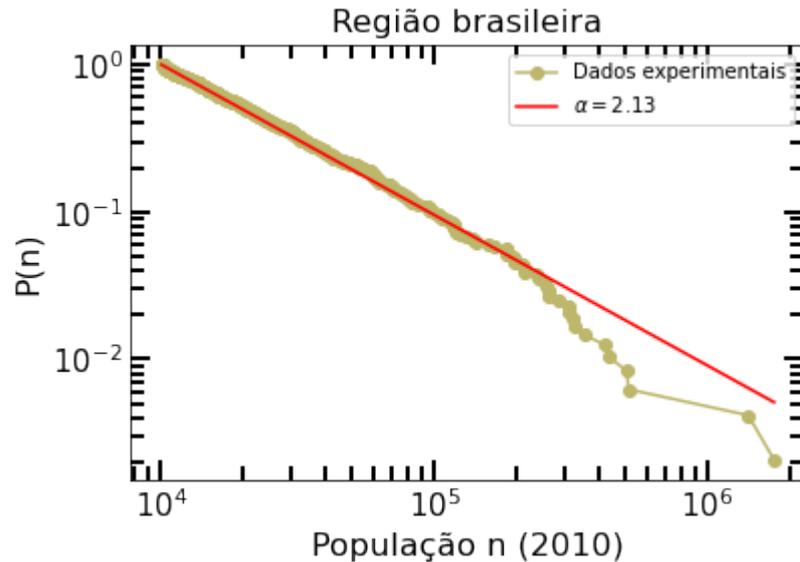
Fonte: produção do autor
 Dados Censo IBGE 2010

Outra relação de escala observada em cidades é a Lei de Zipf (SOO, 2005), ela indica que a maior cidade, em termos populacionais, é duas vezes maior que a segunda, três vezes maior que a terceira, e assim por diante. Matematicamente, indica uma lei de potência com o tamanho populacional de acordo com a Equação (2.4)

$$p(n) = n^{-\alpha}, \tag{2.4}$$

onde n é o n -ésima população de uma cidade, $p(n)$ a probabilidade acumulada. A Literatura nos mostra um $\alpha = 2$ para este caso (NEWMAN, 2004). Na Figura (2.6) podemos observar a Lei de Zipf para das cidades brasileiras.

Figura 2.6 – Log da população em função do rank das cidades brasileiras.



Fonte: produção do autor
Dados: Censo IBGE 2010

2.2 Modelagem de sistemas urbanos

Existem diversos modelos matemáticos para diferentes tipos de métricas urbanas. Temos discussões cujo foco são explicações e desdobramentos das leis de escalas dos indicadores urbanos, crescimento populacional e espacial, topologia urbana, leis de escala e meio ambiente, geração de riquezas e produtividade, dentre muitas outras.

2.2.1 Modelo de escala urbana *distance-dependent interactions*

Ribeiro et al. propuseram uma explicação para relações de escala baseada nas propriedades fractais das cidades e a interação da população que possuem certos estímulos para a troca de informações e recursos (RIBEIRO et al., 2017), resultando em leis de potências para indicadores sociais e de infraestrutura. Estes estímulos (*stimulus*) foram formalizados em termo de uma função de interação entre os indivíduos i e j , separados por uma distância r_{ij} , dado por $f(r_{ij})$, que decai com um expoente γ . Eles mostraram resultados empíricos para β para diferentes cidades ao redor do mundo com modelagem baseados em agentes.

2.2.2 Modelo *Origins of Scaling in Cities*

No artigo *The Origins of Scale in Cities*, (BETTENCOURT, 2013) propõe um modelo para explicar as formações das relações de escala em cidades por meio de um modelo de rede, tanto para variáveis socioeconômicas quanto para infraestrutura. A do primeiro tipo, são descritas por meio de um grafo $p(k)F_{ij}$, onde i e j são indivíduos em uma probabilidade de interação $p(k)$ do tipo k e F_{ij} é uma rede social. O valor do indicador urbano é

$$Y = \sum_{i,j;k} g_k p(k) F_{ij} \quad (2.5)$$

onde g_k é a força de interação entre duas ligações de tipo k no grafo.

Cada indivíduo possui uma área de interação a_0 , um caminho de comprimento l na rede, sobre uma área pública A_n . A média de interação entre os indivíduos são

$$\bar{I}_{i,k} = p(k) a_0 l \frac{N}{A_n} \quad (2.6)$$

onde N é o tamanho da população e as interações $I_{i,k} = \sum_j F_{ij}^k$, portanto podemos escrever o indicador urbano como

$$Y = \sum_k p(k) g(k) \frac{a_0 l}{A_n} N \quad (2.7)$$

Somente essas variáveis são capazes de explicar o comportamento socioeconômico, encontrando valores próximos para o expoente de escala β . Para as variáveis de infraestrutura, Bettencourt considera o comportamento fractal das cidades. Na literatura, há várias modelagens para o estudo dessa teoria, como modelagem baseadas em agentes (MIRANDA, 2015) e modelagem termodinâmica de cidade (SUGAR, 2019).

2.2.3 Análise de geometria fractal

Um engenhoso modelo de crescimento de cidade foi desenvolvido por Batty e Longley, chamada *Diffusion-Limited Aggregation* (DLA), baseado no problema de difusão bi-dimensional (BATTY, 1994). A fonte de difusão é modelada em um círculo onde as partículas são lançadas uma de cada vez, sobre influência de um certo potencial, iniciando um caminho aleatório com 4 sentidos possíveis. Com analogia, as partículas geralmente modelam a densidade de população e os potenciais mensuram o campo de interação urbano. Essa abordagem é capaz de explicar

vários fatores geométricos e temporais das cidades. As análises de geometrias fractais vem sendo utilizado para modelos livres-de-escala e análises de escala, sendo bastante explorado em ciências de cidade (CHEN, 2020; BENGUIGUI et al., 2000).

2.2.4 Leis de escala e meio ambiente

Urban Kaya Relation são um conjunto de leis de escala que relacionam a produtividade das cidade, a energia consumida e a emissão de CO_2 . As emissões de CO_2 escalam com o tamanho da população e estão associadas a relação do PIB com o tamanho da população, a energia relacionada com o PIB e a emissão com a energia (GUDIPUDI et al., 2019) conforme descrito pelas equações

$$C \sim N^\phi, \quad (2.8)$$

$$G \sim N^\beta, \quad (2.9)$$

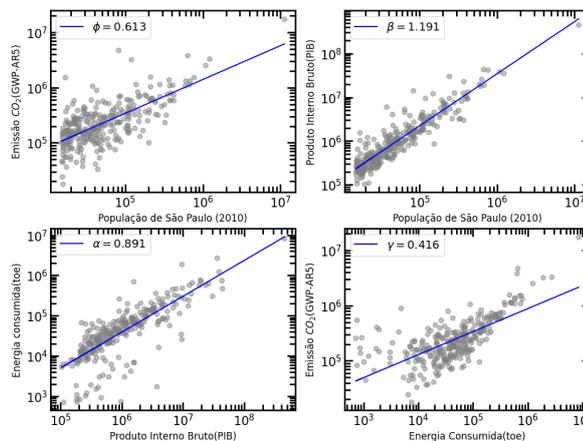
$$E \sim G^\alpha, \quad (2.10)$$

$$C \sim E^\gamma, \quad (2.11)$$

$$(2.12)$$

a Figura 2.7 mostra as relações para o estado de São Paulo.

Figura 2.7 – Relações de Kaya para o estado de São Paulo



Fonte: IBGE, SEEG ECO, Dados Energéticos São Paulo

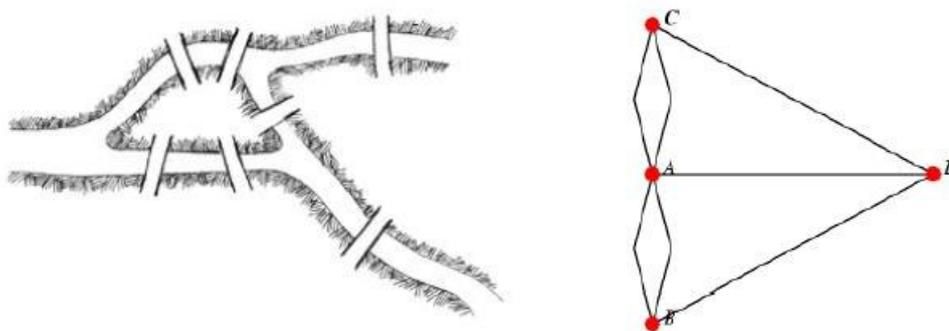
Os modelos citados anteriormente são somente alguns exemplos de como é possível fundamentar e compreender os sistemas urbanos de uma maneira que seja possível prever como

as mudanças nas organizações sociais e o funcionamento das diversas estruturas das cidades podem ser relevantes na vida prática.

3 REDES COMPLEXAS

O estudo de redes complexas teve início com o desenvolvimento da teoria de grafos, iniciada por Leonard Euler ao resolver um famoso problema chamado "*as 7 pontes de Königsberg*" em 1736 (ZHANG, 2013). A questão consistia de um rio que passava pela cidade e dividia em quatro partes, havendo 7 pontes interligando-as (Figura 3.1). A dúvida levantada, era se poderia visitar todas as regiões, passando somente uma só vez por cada ponte. Engenhosamente, Euler simplificou o problema introduzindo símbolos matemáticos representando os locais e as pontes, que consistia nada mais de vértices e arestas, respectivamente. Rigorosamente, Euler provou que o caminho não poderia ser feito, publicando seus resultados na *Academia de Ciências de São Petersburgo*.

Figura 3.1 – A esquerda a representação da região de Königsberg, a direita simplificação do problema em forma de um grafo



Fonte: (QUEIROZ, 2006)

Nos anos subsequentes foram desenvolvidos diversos avanços na teoria de grafos, como os estudos de ciclos em políedros por Kirkman e os *grafos Hamiltonianos* de William Hamilton (ZHANG, 2013). Porém, somente no século XX quando se deu a percepção que os grafos eram uma ferramenta ideal para a descrição dos chamados sistemas complexos (GLERIA; SILVA, 2004).

Os conceitos básicos por trás dos sistemas complexos são a *emergência* e a *auto-organização*. Como são sistemas compostos por um grande número de componentes, sem nenhum controle externo, isto é, não existe algo que possua a informação dos componentes a todo instante, as próprias partículas se auto-organizam por meio das próprias interações resultando em estruturas complexas denominadas padrões emergentes.

A complexidade é encontrada em diversos fenômenos: nas interações sociais, no trânsito urbano, colônias de inseto, na dinâmica climática, em diversos sistemas físicos e biológicos (TOVOLLI, 2015). É uma área que vem ganhando destaque desde o início do século XXI. Em 2021, o Prêmio Nobel de física foi dedicado à área: Sykuro Manabe, Klauss Hasselmann (física climática) e Giorgio Parisi (materiais complexos e desordenados).

Em vista disso, os sistemas complexos podem ser conceituados como redes, modelando as entidades e suas interações, formando assim as redes complexas. Veremos os principais conceitos na descrição matemática dessas redes.

3.1 Teoria de Grafos

Um grafo $G(V, E)$ é um objeto matemático composto por uma coleção de vértices ($V = \{1, 2, \dots, N\}$) com N elementos conectados a E arestas representado por ($\mathcal{E} = \{e_1, e_2, \dots, e_N\}$). Considerando i e j comi vértices de $G(V, N)$, podemos dizer que $e = \langle u, v \rangle$ é **adjacente**, caso $i, j \in E$. Podemos definir uma matriz adjacente de acordo com Equação 3.1 que estabelece se um elemento está conectado com outro

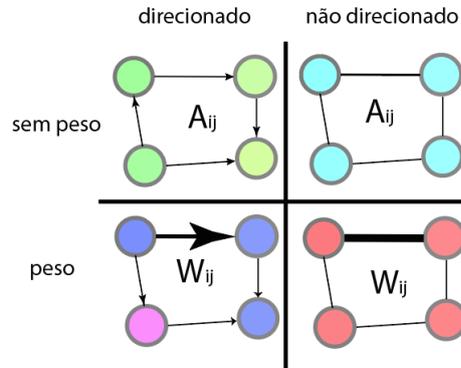
$$A_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{se } (i, j) \in \mathcal{E}, \\ 0 & \text{se } (i, j) \notin \mathcal{E}. \end{cases} \quad (3.1)$$

As arestas também podem estar associadas à uma matriz de peso W_{ij} compostas por valores reais, onde

$$W_{ij} = \begin{cases} \text{peso da conexão entre } (i, j) \in \mathcal{E}, \\ 0 & \text{se } (i, j) \notin \mathcal{E}. \end{cases} \quad (3.2)$$

Para ambos os casos, podemos ter arestas direcionadas ou não direcionadas. A figura 3.2 mostra as combinações possíveis das matriz adjacentes com o direcionamento das arestas.

Figura 3.2 – Os nós são representados por bolas coloridas e os vértices por segmento de reta. As redes podem ser direcionadas ou não-direcionadas. A rede pode possuir uma matriz A_{ij} adjacente ou estar associada a uma matriz W_{ij} .



Fonte: produção do autor

É importante a identificação da natureza das arestas na rede, pois a maioria das métricas só fazem sentido em determinado tipo. Enquanto que algumas propriedades só existem para um, algumas são de fáceis generalização, outras nem tanto, no geral, redes direcionadas necessitam de um tratamento mais rigoroso.

3.1.1 Caminho estatístico

Definimos a distância ℓ entre um nó i e j considerando que não há nenhum comprimento menor que ℓ entre i e j para redes direcionadas e não direcionadas. Caso i e j não sejam conectados, dizemos que $\ell \rightarrow \infty$. É definido o *caminho mínimo médio* $\langle \ell \rangle$, correspondente a uma medida global sobre a rede, como a média de todos os mínimos caminhos, ℓ_{ij} , sobre todos pares de vértices

$$\langle \ell \rangle = \frac{1}{N(N+1)} \sum_{i \geq j}^N \ell_{ij}. \quad (3.3)$$

Medidas de distância em redes também são usados para mostrar alguns indicadores da importância de um vértice na rede, por exemplo, a medida de *excentricidade* de um vértice i indica o quão distante está o vértice mais longe de i . O *raio* de uma rede indica o mínimo entre todas as *excentricidade*, enquanto que o *diâmetro* fornece a distância máxima entre dois vértices (STEEN, 2010).

3.1.2 Grau

O grau k de um nó i mede a quantidade de ligação do nó, caso a rede for dirigida contabiliza um grau de saída ($k_{out,i}$) e grau de entrada ($k_{in,i}$). Em termos da matriz adjacente teremos

$$k_{in,i} = \sum_{j=1}^N A_{ij}, \quad (3.4)$$

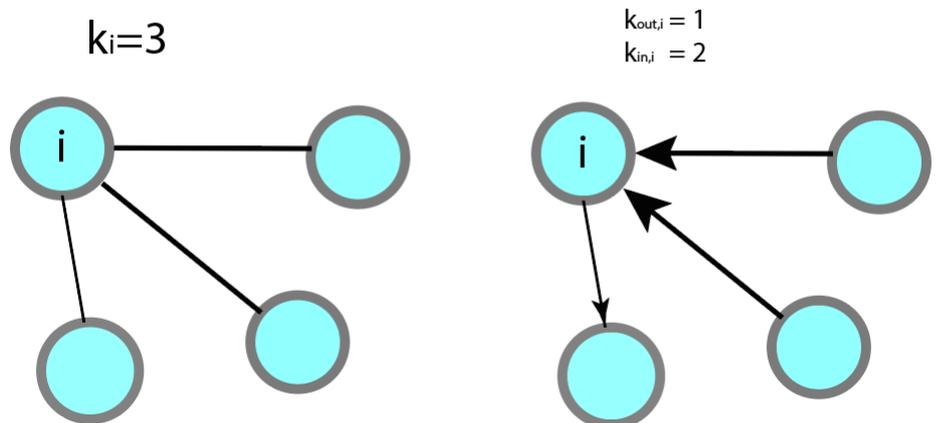
$$k_{out,i} = \sum_{j=1}^N A_{ij}, \quad (3.5)$$

o grau médio de uma rede não-direcionada é

$$\langle k \rangle = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N K_i. \quad (3.6)$$

A figura 3.3 mostra o grau de um nó i para arestas direcionadas e não-direcionadas.

Figura 3.3 – À esquerda temos um nó $k_i = 3$ de uma rede não direcionada, à direita uma rede direcionada, e o nó em destaque com grau $k_{in,i} = 2$ e $k_{out,i} = 1$



Ativ

Fonte: produção do autor

A distribuição de grau $P(k)$ de uma rede é a probabilidade de um nó escolhido aleatoriamente possuir grau k é

$$P(k) = \frac{N_k}{N}. \quad (3.7)$$

Posteriormente veremos como a natureza da rede pode ser caracterizado pela distribuição de probabilidade de grau.

3.2 Redes Aleatórias

Os modelos de redes aleatórias iniciou-se com os trabalhos de Rapoport (RAPOPORT, 1957), Erdős e Renyi (ERDOS, 1960). Esses artigos continham a primeira tentativa de modelagem de redes reais, apesar de ser um modelo simplificado, é de grande valia para alguns aspectos estatísticos de redes, como os grafos nulos para formação de comunidades, redes de pequeno-mundo e historicamente possuem uma grande papel no desenvolvimento de redes complexas.

Dado um grafo $G(N, p)$, onde N é o número de vértice e p a probabilidade de conectar quaisquer dois nós no grafo, sendo $0 \leq p \leq 1$. Como os números de arestas é dado por $\binom{N}{2}$, a distribuição de grau segue uma Distribuição Binomial

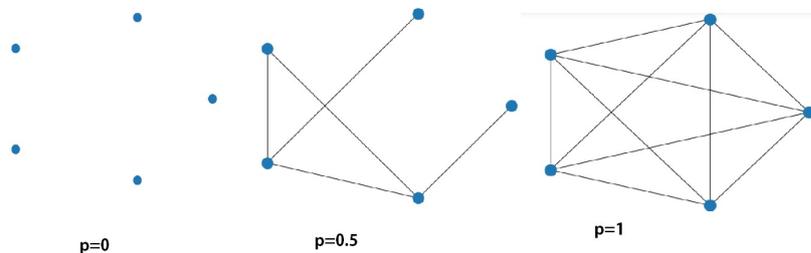
$$p(k) = \frac{N!}{k!(N-k)!} p^k (1-p)^{N-k}. \quad (3.8)$$

Quando $\langle k \rangle \ll N$, podemos aproximar para uma Distribuição de Poisson

$$p(k) = e^{-\langle k \rangle} \frac{\langle k \rangle^k}{k!}. \quad (3.9)$$

A Figura mostra redes aleatórias para um mesmo número de vértice, variando a probabilidade p . Veja que para $p = 1$, todos os nós ligados entre si.

Figura 3.4 – Três redes de Erdos-Renyi com $N = 5$, para três tipos diferentes de probabilidade. Observe que para $p = 1$ todos os nós estão conectados com todos os demais.



Fonte: produção do autor

O grande empecilho do modelo de redes aleatórias na descrição de redes reais é a forma na homogeneidade das conexões. Barabasi e Albert (BARABÁSI; ALBERT, 1999) mostram

que as conexões em redes reais não são aleatórias, nós com grande conectividade tende a criar ainda mais conexões do que os demais, levando ao chamado *preferential attachment*.

3.3 Redes de pequeno-mundo

Em 1969 Milgram e Travers realizaram um experimento para investigar as redes sociais no intuito observar com quantas amizades estamos separados de qualquer pessoal ao redor do mundo (TRAVERS; MILGRAM, 1977). O experimento consistia em enviar uma carta da Nebraska para um corretor do outro lado do país, em Boston. Milgram recrutou pessoas que não possuíam nenhum tipo de vínculo social com o corretor, e a mensagem era repassada somente para amigos ou conhecidos próximos que o indivíduo julgava ter ligações com Boston. Os resultados foram certas correntes de amigos ligando as pessoas de Nebraska ao corretor, a média de amigos que compunha essa corrente era aproximadamente 6 pessoas. Posteriormente, esse efeito viria a ser chamado de "*seis grau de separação*", a ideia é que qualquer pessoa no mundo estão separadas socialmente, em média, por 6 contatos.

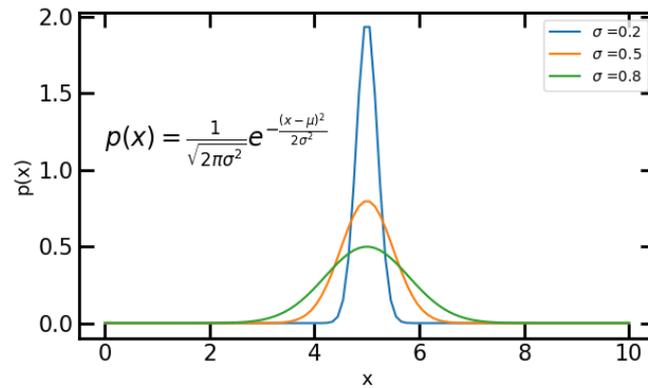
Mais tarde, em 1998, Watts e Strogatz, com um formalismo matemático, observaram que algumas redes reais possuíam comportamento de "pequeno-mundo" (WATTS; STROGATZ, 1998), porém somente com o desenvolvimento das redes livres de escala por Barabasi e Albert é que deu um parecer sobre essa propriedade, sobretudo com a caracterização dos chamados "*hubs*", que nada mais são nós que possuem relativamente um grau maior do que o restante da rede, algo que não estava presentes nas redes aleatórias. Os "*hubs*" possuem a capacidade de "encurtar" as distância entre os nós da rede.

3.4 Redes livres de escala

Após a leitura dos artigos de Wattz e Strogatz, o físico Albert Barabási, enviou um e-mail para Watts, requisitando os dados usados no artigo, no qual teve seu pedido concebido. Um ano depois, Barabási e Reka Albert publicaram um artigo na *Science* que iria mudar os estudos de redes complexas enormemente (BARABÁSI; ALBERT, 1999). O que Watts e Strogatz não haviam estudado era a distribuição de grau de uma rede de pequeno-mundo. Muitas distribuições de redes seguem uma distribuição normal, no qual possui um formato descrito no Figura (3.5). Apesar das redes aleatórias seguirem uma distribuição de Poisson como vimos na

Seção (3.2), elas são bem semelhantes as distribuições gaussianas e podem ter suas distribuições generalizadas pelo Teorema do Limite Central.

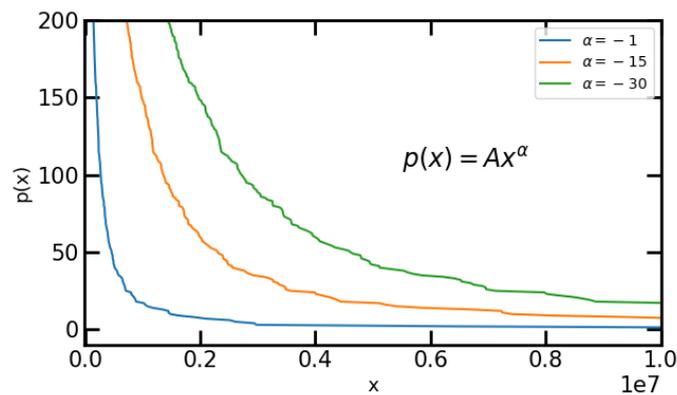
Figura 3.5 – Formato da distribuição normal gaussiana ou normal.



Fonte: produção do autor

Em redes de pequeno-mundo, a distribuição de grau para todos os nós segue uma distribuição de lei de potência, conforme a Figura (3.6). Começando pelo máximo valor, seguindo por um rápido declínio como uma cauda-longa (*long-tail*), e por não ter um pico como as gaussianas, a cauda-longa se estende continuamente, sem nenhuma escala característica, em razão disso, essas distribuições são chamadas de livre de escala (*scale-free*). Essas propriedades são discutidas matematicamente no Apêndice (A).

Figura 3.6 – Comportamento de uma distribuição de lei de potência.



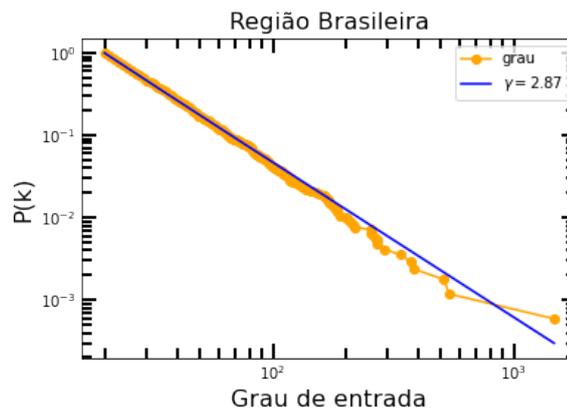
Fonte: produção do autor

Portanto, a distribuição de grau de redes livres de escala é dado pela equação (3.10)

$$P(k) \sim k^{-\gamma}, \quad (3.10)$$

onde k é grau de um nó escolhido aleatoriamente e γ o expoente da lei de potência. A Figura 3.7 mostra a distribuição de grau da rede de movimento pendular. Estudaremos-a nos próximos capítulos.

Figura 3.7 – Distribuição de grau (k) para a rede do movimento pendular brasileira ($\gamma = 2.87$).



3.5 Métricas de redes

3.5.1 Centralidade

Nesta seção iremos descrever as métricas de centralidades, elas indicam o quão "importante" é um nó em uma dada rede. Iremos introduzir diferentes tipos de métricas de centralidade.

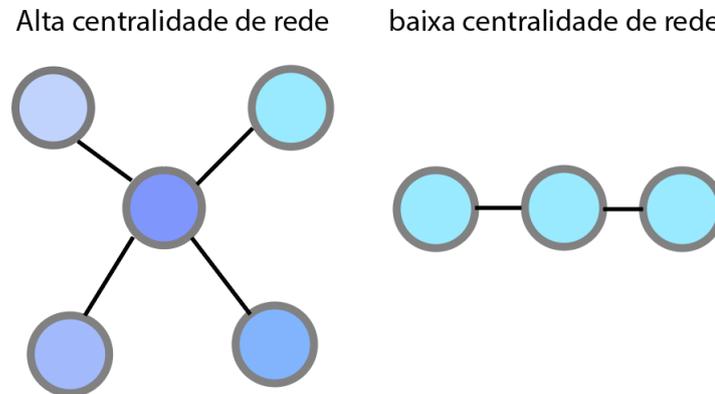
Centralidade de grau

A centralidade de grau $k_{c,i}$ de um certo nó é definida por

$$k_{c,i} = \frac{k_i}{N-1}, \quad (3.11)$$

onde k_i é o grau do nó e N é o número total de vértice na rede. A variância da centralidade de grau é chamada de "*centralidade da rede*". Como ilustrado na Figura 3.8, redes que possui uma alta centralidade contém poucos vértices com um número elevado de grau, enquanto para redes de baixa centralidade os vértices tende a possuir graus semelhantes.

Figura 3.8 – Uma centralidade de rede alta significa que poucos nós possuem um grau maior em comparação aos outros. Se a rede possui baixa centralização, todos os graus de centralidade são mais similares.



Fonte: produção do autor

Centralidade Recursiva

A centralidade recursiva utiliza a "importância" dos vizinhos de um vértice i para computar a "importância" do vértice i , porém a importância dos vizinhos também depende de i , isso irá originar um problema recursivo. Para formalizar essa ideia, iremos chamar de x_i , um número real, que captura a "importância" do vértice i para uma rede não direcionada

$$x_i = \sum_{j=1}^N A_{ij}x_j, \quad (3.12)$$

onde A_{ij} são os elementos da matriz adjacente. Para calcular x_i preciso saber a importância de cada vértice da rede, para isso iremos utilizar um processo iterativo.

- I. Computar a importância com um vetor $x(0) = (x_1(0), \dots, x_n(0))$, inicialmente computamos uma certa importância para cada vértice da rede.
- II. Calcular $x(1) = Ax(0)$, utilizando a equação (3.12), onde A é uma matriz.
- III. Calcular para t passos onde $x(t) = A^t x(0)$

Esse processo é conhecido como *interação de Gauss-Jacobi*, a convergência do método é garantida, se e somente se, $\max\{|\kappa_i|\} < 1$, onde

$$Ax = \kappa_1 x \quad (3.13)$$

sendo κ_1 o maior autovalor associado à A

Centralidade de Katz

Caso a rede seja direcionada e sem peso, a importância de um vértice i pode ser mensurada pelo número de vértices que apontam para i . Há dois problemas nessa abordagem. O primeiro é que os vértices sem graus de entradas (k_{in}) não possuem importância, o segundo é o cálculo da importância para vértices que possuem mais de uma entrada.

Para resolver o primeiro problema, iremos assumir que cada vértice da rede possui uma importância mínima intrínseca β , já o segundo problema, pode ser resolvido ao introduzir uma constante α que irá determinar a relação da importância estrutural da rede determinada pelo β e a importância individual dada pelo somatório de x_j , teremos assim

$$x_i = \alpha \sum_{j=1}^N a_{ji} x_j + \beta. \quad (3.14)$$

A equação (3.14) é conhecida como centralidade de Katz, definida em 1953 por Leo Katz em estudos de redes sociais (KATZ, 1953).

Geralmente definimos $\beta = 1$ e precisamos determinar um valor de α . Caso α seja muito grande, o processo iterativo diverge, já para α muito pequeno, centralidade será determinada por β . A condição de convergência será dada por

$$\alpha < \frac{1}{\kappa_1}, \quad (3.15)$$

onde κ_1 é o maior auto-valor associado a A .

Centralidade de PageRank

Existem algumas desvantagens no uso da Centralidade de Katz, uma delas é que os vértices de uma rede estão conferindo a importância igualmente aos seus vizinhos, em outras palavras, a importância de vértice é contabilizada somente pelo número de vizinhos não se contabilizando pelo k_{out} . A Centralidade de PageRank consegue englobar a importância proporcional ao grau de saída do vizinho, resultando em

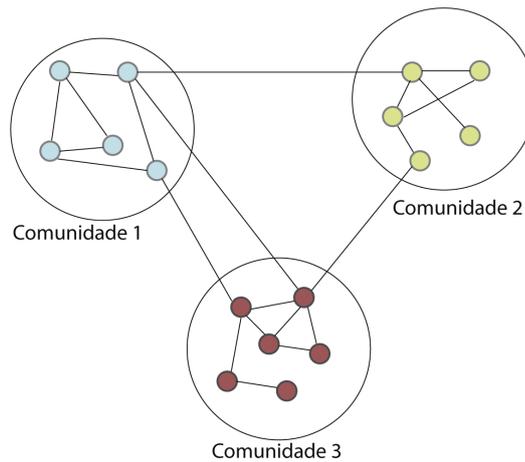
$$x_j = \alpha \sum_{i=1}^N a_{ji} \frac{x_i}{k_{out,i}} + \beta \quad (3.16)$$

onde $\beta = (1 - \alpha)/N$

3.6 Comunidades

Não há uma definição precisa para *comunidades* em redes complexas, a mais conhecida é dada por Newman e Girvan: são conjunto de vértice que possuem um número de conexão entre sí, relativamente maiores, do que o restante da rede como exemplificado na Figura 3.9.

Figura 3.9 – Exemplo de comunidades formadas em uma rede não-direcionada



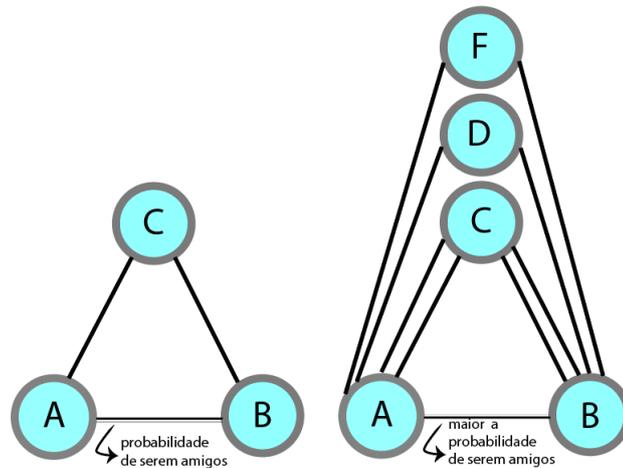
Fonte: produção do autor

As comunidades formam um conceito importante para o estudo de grafos e existem diversos esforços para buscar algoritmo que as descreva, como veremos nos próximos tópicos.

Coefficiente de Agrupamento

Suponha uma rede social onde nós são indivíduos e as arestas são as amizades entre eles. Suponha a rede social como a Figura 3.10, onde os vértices representam pessoas e as arestas amizades. Se dois amigos A e B, possuem um amigo em comum C, então temos alta probabilidade de A e B também serem amigos, quanto maior o número de amigos em comum entre A e B, maior é a probabilidade deles também serem amigos. Essa ideia advém das propriedades de transitividade de uma rede e é mensurada utilizando o *coeficiente de agrupamento*.

Figura 3.10 – Exemplo de uma rede social, caso duas pessoas A e B, tenham um amigo em comum C, é provável que A,B também sejam amigos.



Fonte: produção do autor

Para uma rede não direcionada, podemos medir o coeficiente de agrupamento utilizando uma razão entre o número de pares conectados entre os vizinho de i , denotado de e_i , e o número máximo de possíveis pares entre eles (COTA, 2020)

$$C_i = \frac{2e_i}{k_i(k_i - 1)} \quad (3.17)$$

Para $k_i = 1$, $C_i \equiv 0$. Podemos definir também o coeficiente médio da rede como

$$\langle C \rangle = \frac{1}{N} \sum_i C_i. \quad (3.18)$$

Há ocorrência de triângulo exatamente como a Figura ?? é conhecido como transitividade. Uma forma de quantificar isso é fazendo a razão entre o número de triângulo formados pelo número total de tríplexes de vértices

$$C = 3 \cdot \frac{\text{número de triângulos}}{\text{número total de tríplexes}}, \quad (3.19)$$

onde tríplexes são vértices do conectados a outros dois.

Modularidade

Uma métrica por Newman para a detecção das comunidades é a *modularidade*, inicialmente proposta para redes não-direcionadas. A ideia é identificar as comunidades como

subgrafos dentro da rede, como se fossem ligações entre pessoas pertencentes a certos grupos. A função modularidade é

$$Q = \frac{1}{2N} \sum_{ij} \left[A_{ij} - \frac{k_i k_j}{2N} \right] \delta(c_i, c_j), \quad (3.20)$$

onde

$$\delta(c_i, c_j) = \begin{cases} 1 & \text{se } i \text{ e } j \text{ pertencer a mesma comunidade} \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases} \quad (3.21)$$

O conceito por trás da função modularidade para a detecção de comunidade está na criação do chamado *grafo nulo*. Esse grafo corresponde a um grafo de mesmo vértice e arestas de um certo grafo de interesse, no entanto, as conexões são feitas de forma aleatórias. Com isso, podemos comparar ambos os grafos e inferir se certas estruturas na rede são conectados aleatoriamente ou se possui um fator oculto que faz com que certos grupos de nós se conectem mais entre si.

Hierarquias

É evidente que as redes reais apresentam alta modularidade, isso significa que observamos a aparição de grupos ou comunidades bem coesos, por exemplo, em uma rede de co-autores, uma comunidade pode representar pesquisadores como o mesmo interesse. Como membros de uma mesma comunidade apresentam um comportamento em comum, é mais fácil enxergar as características da comunidade do que seus componentes. Quando fazemos isso, estamos observando o sistema por meio de uma outra hierarquia.

Como forma ilustrativa, as hierarquias das divisões políticas do território brasileiro seguem pelos municípios, as microrregiões, as meso-regiões e as regiões. Também podemos pensar em hierarquias de redes sociais, as interações individuais compondo uma hierarquia inicial, as comunidades de indivíduos formando uma nova hierarquia, semelhante as municipais, e assim por diante. No capítulo 6, estudaremos hierarquias urbanas formadas pelas redes do movimento pendular brasileiro.

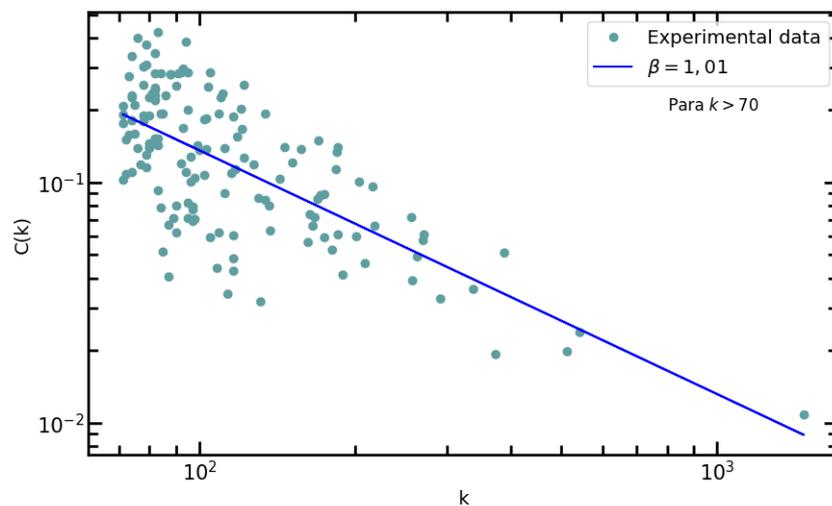
Barabasi e Ravasz mostraram que redes que possuem organizações hierárquicas podem ser identificadas pela caracterização do coeficiente de agrupamento (BARÁBÁSI; RAVASZ, 2003), onde segue uma lei de potência com o grau da rede dado por

$$C(k) = k^{-1}. \quad (3.22)$$

A equação 3.22 indica que o coeficiente de agrupamento que caracteriza os *hubs* diminui linearmente com o grau, isso implica que, enquanto os pequenos nós são partes de *clusters* (grupos) altamente coesos e densamente interligados, os *hubs* não são, pois seus vizinhos tem uma pequena chance de se conectarem uns aos outros. Essa lei mostra que diversas comunidades são formadas com diferentes tipos de grau de agrupamento, redes que possuem essa características são chamadas de redes hierárquicas.

De acordo com a Equação 3.22, a rede de *commuters* se mostrou uma rede hierárquica, como podemos observar na Figura 3.11

Figura 3.11 – Propriedades de leis de potência para redes hierárquicas. O gráfico mostra que o *clustering coefficient* é inversamente proporcional ao grau.



Fonte: produção do autor

Conclui-se que este método possui a existência de estruturas hierárquicas em redes, porém não é possível identificá-las. Na próxima seção ocuparemos no método de identificação dessas hierarquias em redes reais.

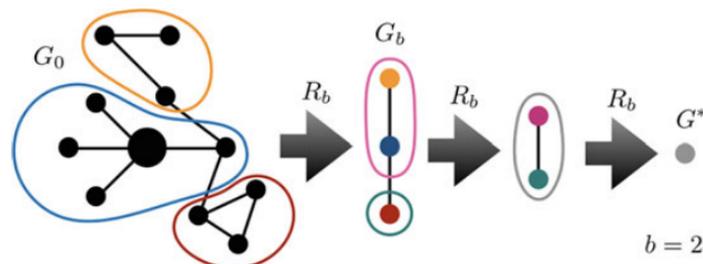
3.7 Grupo de Renormalização em redes complexas

Os *Grupos de Renormalização em Redes Complexas* (RGN) foram introduzido por Song et al. (SONG; HAVLIN; MAKSE, 2005), eles formam um conjunto de ferramentas geométricas capaz de explicar várias propriedades em comuns em redes complexas que métodos topológicos,

até então, eram incapazes de explicar, como a propriedade de "pequeno-mundo", distribuição livre dos graus, *clustering*, entre outras (GARCÍA-PÉREZ; BOGUÑÁ; SERRANO, 2018).

Considerando um grafo G_0 com N_0 nós e E_0 arestas, onde a transformação de renormalização é R . Após t sucessivas transformações de renormalização, o grafo será $G_t = R^t(G_0)$, com N_t e E_t vértices, como exemplificado na Figura 3.12. A cada renormalização resulta em uma nova hierarquia. Na prática, utilizaremos o método de *Stochastic Blocking Model* para encontrar as hierarquias da rede de *commuters*.

Figura 3.12 – Dado uma rede G_0 sobre uma transformação de renormalização R_B , com um fator de escala b , após várias interações dessa rede chegamos a um ponto fixo G^* .



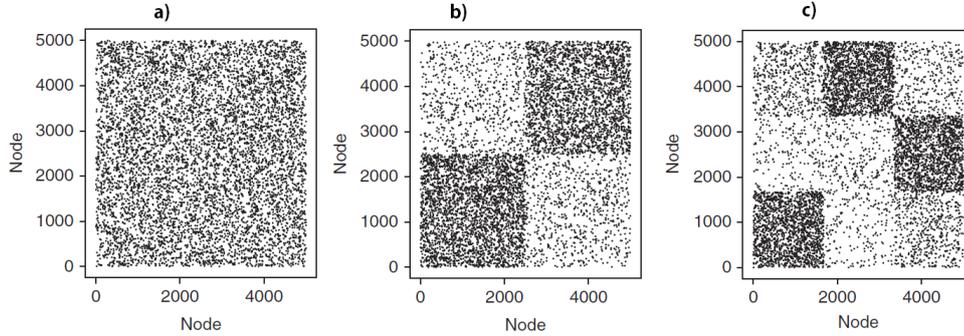
Fonte: (MISTANI; PAKRAVAN; GIBOU, 2019)

Stochastic Blocking Model

Desenvolveremos o método *Stochastic Blocking Model* (SBM) para a detecção das hierarquias da rede de *commuters* estudadas no Capítulo 6. Essa seção é baseado no conjunto de artigos de Tiago Peixoto (PEIXOTO, 2014; PEIXOTO, 2017; PEIXOTO, 2020), que não somente desenvolveu ferramental teórico, mas também a aplicação por meio do módulo *graph-tool* para linguagem Python.

A Figura 3.13 mostra três redes com a mesma matriz adjacente, entretanto os nós foram organizados de maneira diferentes. Imagine que em cada bloco formado nas Figuras 3.13 b) e c) foram colocados nós com *clustering* semelhantes, não necessariamente precisar ser essa medida, mas a ideia é agrupar nós com propriedades semelhantes.

Figura 3.13 – Os gráficos mostram vértices vindo de uma mesma matriz adjacente, organizado de 3 formas diferentes de acordo com suas propriedades.



Fonte: (PEIXOTO, 2020)

Supondo uma rede com N nós onde teremos B blocos, introduziremos um vetor \mathbf{b} que especifica qual grupo o nó i pertence

$$b_i \in \{1, \dots, B\} \quad (3.23)$$

Os parâmetros da rede irá depender das divisões dos nós gerado pela probabilidade

$$P(\mathbf{A}|\mathbf{b}), \quad (3.24)$$

onde $\mathbf{A} = A_{ij}$ é a matriz adjacente.

Antes de continuarmos em nossa análise, precisamos fazer um adendo sobre o tratamento estatísticos da redes sobre um olhar na mecânica estatística. As interações são análogas aos grau de liberdade de um sistema físico, levando a interpretação das arestas como partículas reais. O número máximo de arestas é equivalente ao volume. Para redes com nós fixos, ensemble canônico é definido fixando o número de arestas, enquanto que o ensemble gran-canônico, o número de arestas flutuam em torno do valor esperado (GABRIELLI et al., 2019).

Para descobrirmos o formato de $P(\mathbf{A}|\mathbf{b})$, consideraremos que os nós de um mesmo grupo são estatisticamente indistinguíveis, isso faz com que o ensemble de redes sejam inteiramente caracterizado pelo número de arestas que conectam dois grupos r e s

$$e_{rs} = \sum_{ij} A_{ij} \delta_{b_i,r} \delta_{b_j,s} \quad (3.25)$$

O objetivo é utilizar o Princípio da Máxima Entropia para encontrar a probabilidade do sistema que represente a probabilidade com a menor informação possível. A entropia de Shannon é dada por

$$S = - \sum_{\mathbf{A}} P(\mathbf{A}|\mathbf{b}) \ln P(\mathbf{A}|\mathbf{b}), \quad (3.26)$$

maximizaremos a entropia com os vínculos de Lagrange (média de arestas bem comportada e probabilidade normalizada)

$$\langle e_{rs} \rangle = \mathcal{E}, \quad (3.27)$$

$$\sum_{\mathbf{A}} P(\mathbf{A}|\mathbf{b}) = 1, \quad (3.28)$$

maximizando pelo método de multiplicadores de Lagrange teremos

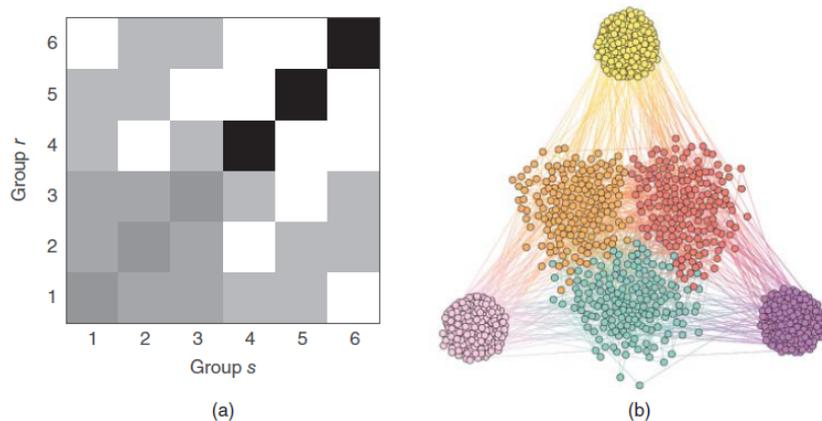
$$\mathcal{L}(P, \lambda, \mu) = S - \sum_{r \leq s} \mu_{rs} \left(\sum_{\mathbf{A}} P(\mathbf{A}|\mathbf{b}) \sum_{i < j} A_{ij} \delta_{b_i, r} \delta_{b_j, s} - \langle e_{rs} \rangle \right) - \lambda \left(\sum_{\mathbf{A}} P(\mathbf{A}|\mathbf{b}) - 1 \right) \quad (3.29)$$

onde λ e μ são os multiplicadores. Observe que caso os vínculos forem satisfeitos, o segundo e terceiro termos dão zero. Encontraremos a probabilidade que maximiza a entropia por meio da condição $\frac{\partial}{\partial \mu} \mathcal{L} = 0$ e $\frac{\partial}{\partial \lambda} \mathcal{L} = 0$. Com isso teremos para dois grupos r e s

$$p_{rs} = \frac{e^{-\mu_{rs}}}{1 + e^{-\mu_{rs}}} \quad (3.30)$$

Este modelo é o chamado *Stochastic Blocking Model*. A figura mostra a matriz de probabilidade p_{rs} que define a estrutura da rede e ao lado a rede correspondente a essa matriz.

Figura 3.14 – Exemplificação da atriz de probabilidade p_{rs} (a) e a estrutura de rede formada por essa matriz b)



Fonte: (PEIXOTO, 2014)

Este é o método que utilizaremos para a construção das hierarquias urbanas no Capítulo 6, faremos iterativamente até restar uma rede com um único grupo, no intuito de encontrarmos mais de uma hierarquia.

4 MOBILIDADE URBANA

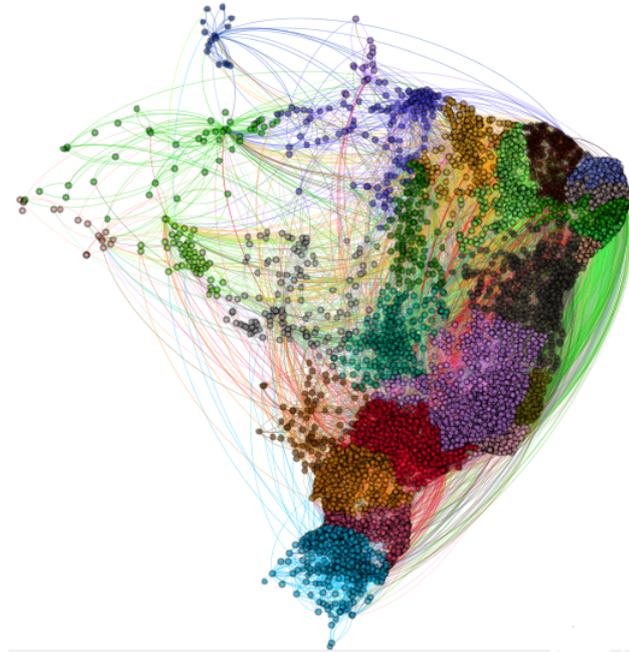
Neste capítulo estudaremos o modelo gravitacional utilizando a abordagem chamada *fitness model*, nesta abordagem trazemos uma nova relação de escala para o expoente de decaimento gravitacional e estudaremos-a com dados vindo da rede do movimento pendular.

4.1 Movimento pendular urbano

Movimento pendular urbano consiste em trabalhadores e estudantes que buscam bens e serviços em outros municípios temporariamente. Fenômenos como esse são muito utilizados nas pesquisas sobre hierarquias urbanas e influência de cidades. Um das pesquisas mais completas na área sobre a região urbana brasileira chamasse Regiões de Influência realizada pelo IBGE (IBGE, 2018), a última edição sendo em 2018. O IBGE utiliza dados de fenômenos como movimentos migratórios, pendulares e relações de empresas-filiais dentre outros para definir as hierarquias e vínculos urbanos, além de vários estudos temáticos da rede urbana como gestão do território, comércio, serviços e saúde.

O movimento pendular brasileiro que estudaremos é formado somente por trabalhadores e vem de dados de 5549 cidades, referente ao ano de 2010 coletados por meio do IBGE. Em termos de redes, temos um grafo com 5549 vértices e 54852 arestas direcionadas com peso inteiro não-nulo associado ao número de trabalhadores ou *commuters*. A Figura 4.1 mostra uma representação geográfica dessa rede.

Figura 4.1 – Cada ponto na figura representa uma cidade, as arestas são direcionadas, elas indicam para onde o trabalhador se desloca, o ponto de origem representa a cidade natal.



Fonte: produção do autor

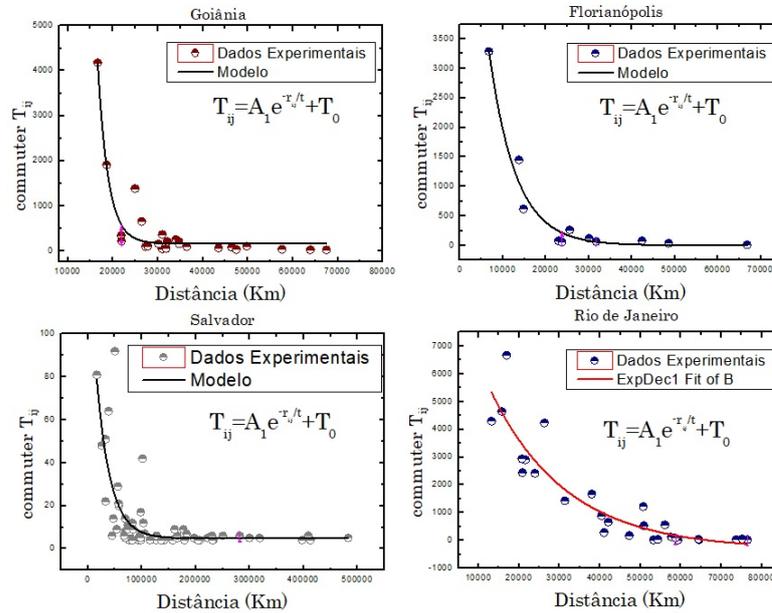
4.2 Modelo Gravitacional de Mobilidade Urbana

Nesta seção ocuparemos em estudar o modelo de gravitacional de mobilidade e alguns casos especiais. Análoga a Lei da Gravitação Geral de Newton, temos a lei da gravitação de mobilidade urbana (SIMINI et al., 2012), construída de forma empírica, dada por certo número de indivíduos T_{ij} que move de uma localização i para j , com população m_i e n_j respectivamente, separados por uma distância r_{ij} é dada por

$$T_{ij} = \frac{m_i^\alpha n_j^\beta}{f(r_{ij})} \quad (4.1)$$

onde α e β são parâmetros a se determinar e $f(r_{ij})$ uma função da distância. Não há solução analítica para $f(r_{ij})$, porém é utilizado como *fitting* funções exponencial ($f(r) = e^{-rd}$) e polinomial ($f(r) = r^m$). Dados experimentais sugerem um comportamento exponencial, a Figura 4.2 mostra a relação de *commuter* T_{ij} em função da distância para algumas cidades.

Figura 4.2 – Relação do *commuter* em função da distância para algumas capitais brasileiras, junto com o modelo teórico correspondente a uma função exponencial

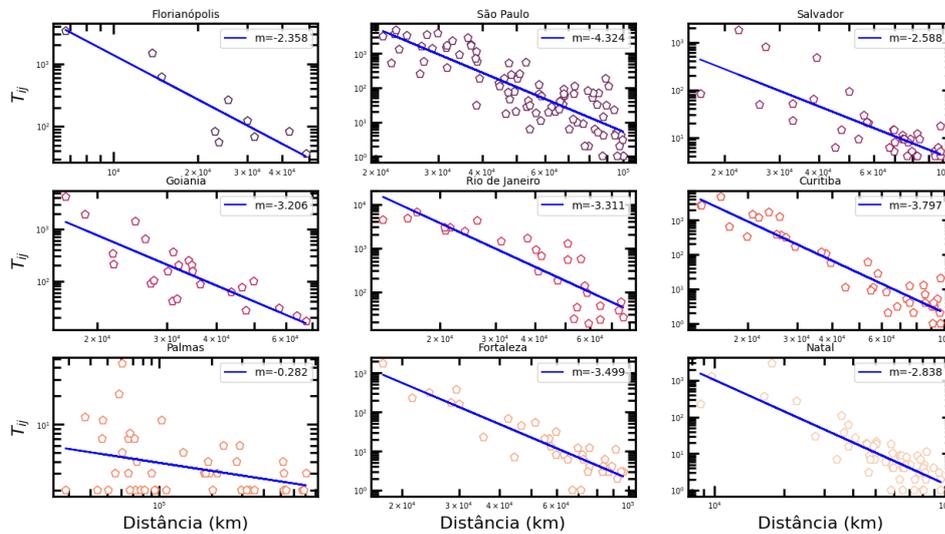


No caso em que $\alpha \neq \beta \neq 1$ e $f(r_{ij})$ assume uma lei de potência, o expoente de decaimento não possui carácter universal, para cada localização apresenta valores diferentes (MASUCCI et al., 2013). Calculamos o expoente de decaimento m para algumas capitais, utilizando uma relação linear com os *commuters* que para certas cidades j por

$$\log(T_{ij}) = \log(C) + m \cdot \log(r_{ij}), \quad (4.2)$$

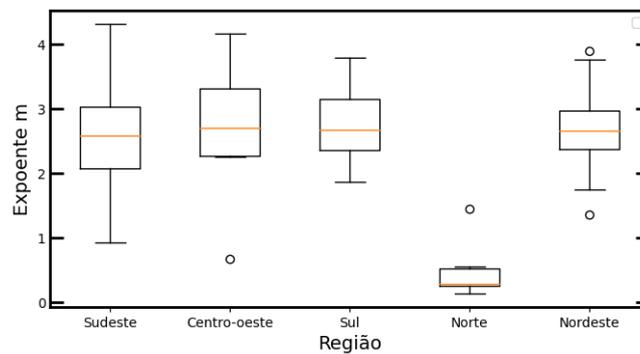
os dados experimentais podem ser visto na Figura 4.3, m corresponde à inclinação da reta.

Figura 4.3 – Os gráficos mostram a relação dos *commuters* que vão para uma cidade j em função da distância r_{ij} .



A Figura 4.4 mostra os diagramas de caixa para os expoente de cada região considerando somente cidades com tamanho de população maiores que 200.000 habitantes.

Figura 4.4 – Diagrama de caixa ou *boxplot* para o expoente de escala m para as cidades com tamanho de população maiores que 200.000 habitantes



Os cálculos dos expoentes da figura anterior foram calculados considerando somente as regiões de lei de potência, ignorando os valores pequenos de T_{ij} que, para grandes distâncias, não possuíam correlações notáveis. Ao todo formam um grupo de 133 cidades.

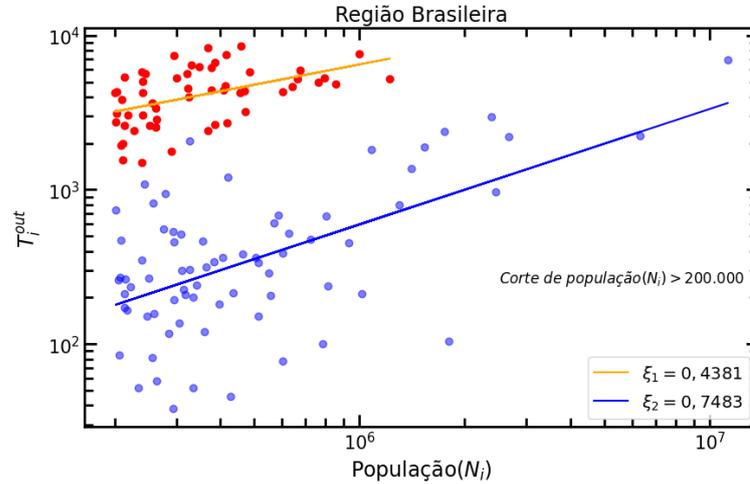
Casos especiais

Veremos alguns casos especiais do modelo de migração. Primeiro caso em que estudaremos é quando o *commuter* de saída de uma certa cidade T_{ij}^{out} depende somente da população de origem de acordo com a equação

$$T_i^{out} \propto N_i^{\xi_{out}}, \quad (4.3)$$

onde ξ_{out} expoente de escala sublinear, observado experimentalmente por meio da Figura 4.5.

Figura 4.5 – Relação entre a quantidade de commuter que sai de uma cidade i com o tamanho da população N_i



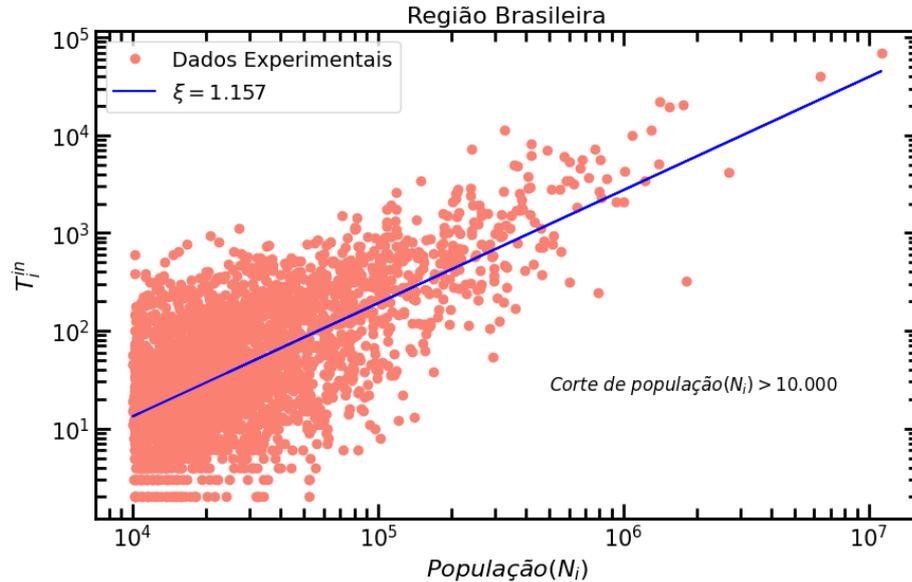
No grupo de cidades com tamanho de população (N_i) $>$ 200.000 podemos observar dois comportamentos distintos, os pontos em azuis que representam as capitais e grandes centros urbanos e o grupo em vermelho, que também são grandes centros urbanos de metropolitanas, porém possuem uma maior fluxo externo de *commuter* que as demais cidades. A relação de cidades podem ser observadas no Apêndice C.

Considerando o caso em que o número de *commuter* que entram em uma cidade T_i^{in} depende somente do tamanho da população local i , conforme a equação

$$T_i^{out} \propto N_i^{\xi_{in}}, \quad (4.4)$$

a Figura 4.6 mostra essa relação para as cidades brasileiras.

Figura 4.6 – Relação entre a quantidade de *commuters* que entra de uma cidade i com o tamanho da população N_i



Como ξ_{in} se mostrou um expoente superlinear, isso conduz a um fator atrativo dos *commuter* para as grandes cidades. Diferente dos *commuter* de saída, pois há cidades que exportam diferentes números do que outras para uma mesma faixa populacional.

4.3 Estudo de *Fitness* na rede urbana

Em 2003 Caldarelli et al. introduziram uma propriedade chamada *fitness*, uma característica intrínseca aos vértices (CALDARELLI et al., 2002), que possuem a capacidade de criarem ligações, onde para redes livres de escala, não necessariamente atreladas ao *preferential attachment*. Uma aresta formada pelos vértices i e j tem uma probabilidade de ser criada dada pela função $f(x_i, x_j)$, onde x_i e x_j são quantidades de *fitness* dos vértices, o grau de um certo nó i é dado por

$$k(x_i) = N \int_0^{\infty} f(x_i, x_j) \rho(x_j) dx_j, \quad (4.5)$$

onde N é o total de vértices e $\rho(x_i)$ a distribuição de *fitness* da rede e $p(k)$ é dado por

$$P(k) = \rho(x(k)) \cdot x'(k). \quad (4.6)$$

As análises de Yakubo et al. consistem em observar o *fitness* de uma rede com nós distribuídos de maneira fractal (objetos e dimensões fractais são discutidas no Apêndice B),

onde está interação depende da distância euclidiana r_{ij}^m entre os nós i e j , onde m é um valor positivo que quantifica os efeitos geográficos da rede (YAKUBO; KOROAK, 2011). Nossa proposta é utilizar o tamanho da população como *fitness* no modelo de Yakubo, ou seja, a população na rede urbana atribuída a um vértice, faz o papel da atratividade e leva criação das conectividades da rede.

A correlação do tamanho da população com fatores de atratividade já é foco de muito estudo em ciências de cidades (WEST, 2017; LI et al., 2021; BETTENCOURT, 2013), podemos citar diversos fatores que cidades grandes possuem para incitar tal fenômeno: as empresas multinacionais, atraindo trabalhadores, além das expansões com as suas filiais; as universidades que englobam estudantes do país inteiro; além de diversas outras instituições e localidades que possuem tais características desse tipo de cidade. O próprio Candarelli comenta que o *fitness* modela propriedade intrínsecas aos vértices capazes de criar conexões como amizades, sucesso social, relevância científica, forças de intenções, etc. (CALDARELLI et al., 2002).

Dada as considerações sobre o *fitness* na rede urbana de *commuters*, comecemos a descrição do modelo de Yakubo. O número total de vértices está distribuídos em um espaço fractal S_D com dimensional fractal D , sobre um espaço com comprimento L

$$N = \rho \Omega \int_0^L l^{D-1} dl, \quad (4.7)$$

onde ρ é a densidade de vértices e $\Omega = 2\pi^{D/2}/\Gamma(D/2)$ o ângulo-sólido.

Para dois vértices i e j temos que a relação de *fitness* entre os nós é dado por

$$\frac{F(x_i, x_j)}{r_{ij}^m} > \mathbb{T}, \quad (4.8)$$

onde r_{ij} a distância euclidiana entre os vértices, \mathbb{T} um certo valor liminar e $m \geq 0$ um parâmetro que quantifica a força de interação da rede, Yakubo nomeia-o como parâmetro da força de interação geográfica, veremos como esse nome é perfeito para nosso caso.

Iremos fazer algumas constatações sobre esse modelo:

1. Cada vértice possui uma probabilidade de distribuição de *fitness* $s(x)$, como essa grandeza é o tamanho da população de cada vértice, a distribuição nada mais é que a Lei de Zipf dada por $s(x) = x^{-\alpha}$.

2. Iremos considerar o caso mais simples para $F(x_i, x_j)$ em que a função de *fitness* assume $F(x, y) = xy$.
3. Considerando o caso anterior, faz a Equação 4.8 reduzir-se ao modelo Gravitacional para os casos em que os expoentes $\beta = \alpha = 1$ (Equação 4.1), portanto, o que estudaremos são os efeitos geográficos de m para a rede de *commuter* e \mathbb{T} é um valor limiar de *commuter*.

Considerando $k_i(l)dl$ o número de vértice conectados ao vértice i e incluso em uma esfera de raio l centrado no vértice i , a distância do vértice i a um outro vértice é l . A equação 4.8 fornece o vínculo do *fitness* $x_j > \mathbb{T}l^m/x_i$, portanto teremos

$$k_i(l)dl = \rho\Omega l^{D-1} dl \int_{\mathbb{T}l^m/x_i}^{\infty} \overbrace{(\alpha-1)x_{min}^{\alpha-1}x^{-\alpha}}^{\text{Lei de Zipf normalizada}} dx, \quad (4.9)$$

assumindo $\mathbb{T}l^m/x_i > x_{min}$, é equivalente dizer que $l > l_{min}(x_i)$ dado por

$$l_{min}(x_i) = \left(\frac{x_{min}x_i}{\mathbb{T}} \right)^{1/m}. \quad (4.10)$$

Integrando teremos em x teremos

$$k_i(l)dl = \begin{cases} \rho\Omega \left(\frac{x_{min}}{\mathbb{T}} \right)^{\alpha-1} x_i^{\alpha-1} l^{D-1-m(\alpha-1)} dl, & l > l_{min}(x_i), \\ \rho\Omega l^{D-1} dl, & l \leq l_{min}(x_i). \end{cases} \quad (4.11)$$

Integrando $k_i(l)$ em l de 0 a L para encontrar o número de vértice conectados ao vértice i , temos

$$k_i = \frac{\rho\Omega x_{min}^{\alpha-1} L^{D-m(\alpha-1)}}{[D-m(\alpha-1)]\mathbb{T}^{\alpha-1}} x_i^{\alpha-1} + \frac{\rho\Omega x_{min}^{D/m}}{\mathbb{T}^{D/m}} \left[\frac{1}{D} - \frac{1}{D-m(\alpha-1)} \right] x_i^{D/m}. \quad (4.12)$$

No caso em que $D-m(\alpha-1) > 0$ e L grande, o primeiro termo da Equação 4.12 domina, portanto teremos $k_i \propto x_i^{\alpha-1}$, pela equação 4.6 temos $P(k) = k^{-2}$ independente de m , α e D . Para o caso em que $D-m(\alpha-1) < 0$, o segundo termo domina e teremos $k_i \propto x_i^{D/m}$, portanto $P(k) = k^{-m(\alpha-1)D-1}$. A distribuição de probabilidade para este modelo é

$$P(k) = \begin{cases} k^{-2}, & m \leq m_c, \\ k^{-m(\alpha-1)D-1}, & m > m_c, \end{cases} \quad (4.13)$$

onde

$$m_{c0} = \frac{D}{\alpha - 1}, \quad (4.14)$$

assim, as relações de escala para o modelo de *fitness* será

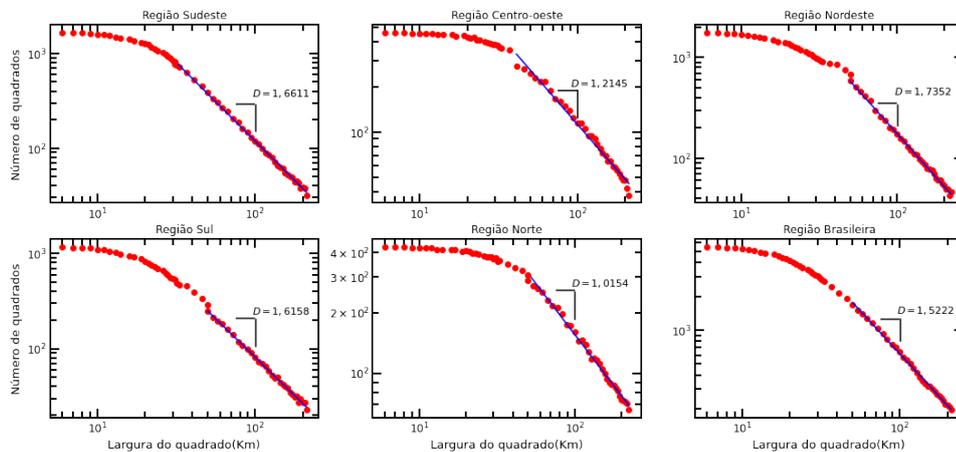
$$\gamma = \begin{cases} 2, & m \leq m_{c0} \\ m(\alpha - 1)/D + 1, & m > m_{c0} \end{cases} \quad (4.15)$$

como as condições de $m > m_{c0}$ quase sempre é realizado, estudaremos o caso em que γ depende de D e os efeitos de m na rede são consideráveis dado pela relação

$$m = \frac{(\gamma - 1)}{(\alpha - 1)} D. \quad (4.16)$$

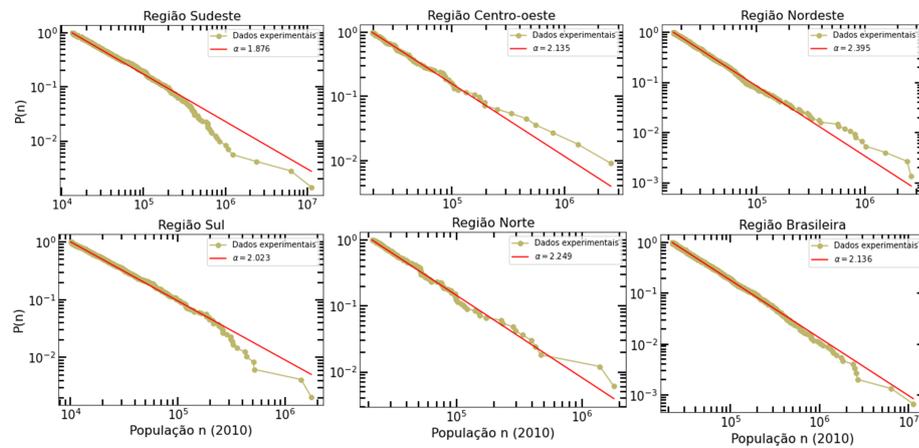
Os próximos passos será calcular os expoente para cada região brasileira para encontrar o expoente da força de interação m . Começando pela dimensão fractal D das regiões, calculamos-a por meio do método *box-counting*, o algoritmo pode ser observado no Apêndice D e o resultado na Figura 4.7

Figura 4.7 – Dimensão fractal das regiões brasileiras calculado por meio do algoritmo de *box-counting*.



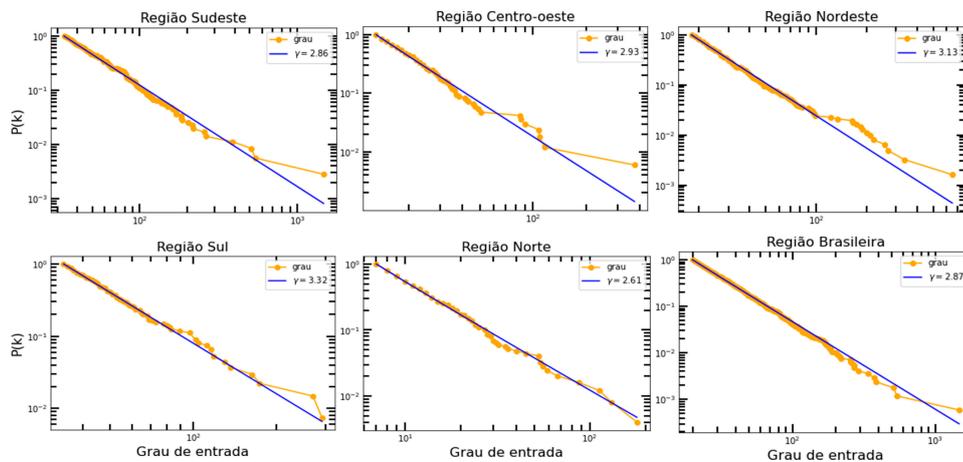
A Figura 4.8 contém a Lei de Zipf e portanto o expoente α para as regiões brasileiras

Figura 4.8 – Gráfico da Lei de Zipf para a região brasileira e as cinco regiões separadamente.



A Figura 4.9 contém a distribuição de grau da rede de *commuters* por região e portanto o expoente γ

Figura 4.9 – Gráficos da distribuição de grau para a região brasileira como um todo e individualmente.



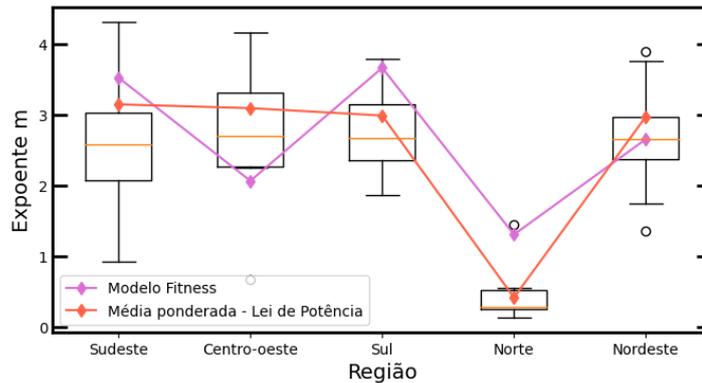
A Tabela 4.1 mostra os resultados obtidos nos gráficos anteriores e o cálculo do expoente m para cada região.

Tabela 4.1 – Tabela com valores dos expoentes expostos nos gráficos anteriores

Região	γ	D	α	m_{c0}	m
Brasileira	2,877	1,533	2,136	1,35	2,53
Sudeste	2,866	1,661	1,879	1,89	3,53
Sul	3,321	1,616	2,023	1,58	3,67
Centro-oeste	2,933	1,214	2,135	1,07	2,07
Norte	2,613	1,015	2,250	0,81	1,31
Nordeste	3,139	1,735	2,395	1,24	2,66

Para a região temos $m = 2,53$, enquanto que a média sobre todas as regiões temos $\bar{m} = 2,64$. A Figura 4.10 mostra o expoente m calculado para ambos os métodos: modelo de lei de potência e modelo de *fitness*.

Figura 4.10 – Cálculos do expoente m para os modelos de lei de potência e modelo *fitness*



A média do modelo de lei de potência não mostrou um bom indicador comparado-se ao valores do modelo de *fitness*, desconsiderando somente os valores do nordeste, onde em ambos os modelos coincidiram. Em ambos os modelos, o norte mostrou-se a região com menor expoente m , indicado a fraca interação entre as cidades. O valor do modelo *fitness* para o norte coincidiu com o valor do expoente do *outlier* (cidade de Manaus), gerando uma predominância da cidade.

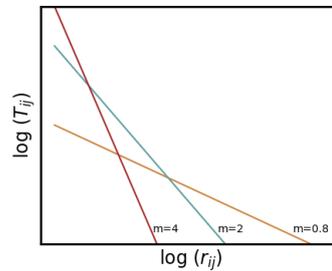
4.4 Discussão

Primeiramente introduzimos modelo gravitacional de mobilidade urbana, observamos que, para as grandes cidades, os *commuters* de entrada são função das distâncias, mostrando um comportamento exponencial. Podemos observar uma lei de potência dado por $T_{ij} \propto R_{ij}^m$ para alguns casos específicos: calculamos somente para as cidades maiores de 200.000 habitantes e removemos valores de *commuters* para grande distância, na média, consideramos $r_{ij} < 100.000km$ para observar o comportamento de lei de potência. Os casos sem filtros podem ser observado na Figura C.1 Apêndice C.

Decidimos realizar os cálculos do expoentes separados por região devido a vasta heterogeneidade da morfologia brasileira, por exemplo, a dimensão fractal da região norte tende a ser próximo de 1 uma vez que as cidades se organizam em torno do rio Amazonas, praticamente estamos lidando como uma distribuição uni-dimensional, por isso $D = 1,015$, enquanto para

as demais temos cidades distribuídas próximas à dimensão bi-dimensional, e que também possui suas especificidades, como as distribuições de cidades litorâneas. Podemos observar essa dependência da dimensão fractal da região com o expoente de interação m , como ele é proporcional a dimensão fractal, as regiões que menos mostram fluxos de *commuters* são Norte e Centro-oeste. Valores de expoente m altos indicam relações de curto alcance com cidades altamente acopladas, enquanto que valores de m menores indicam relações de longo alcance, como exemplificado na Figura 4.11.

Figura 4.11 – Três casos para o expoente m , quanto menor o expoente m maior será a distância de interação. Para m maiores temos cidade altamente acopladas em uma curta distância.



Vale ressaltar uma relação de escala encontrada na literatura por vias totalmente diferentes para o expoente gravitacional m é extremamente similar à encontrada pelo método de *fitness*. Os estudos de Hong et. al. consistem na comparação do modelo de gravitação em *population landscape* (população de cidades modeladas artificialmente) com o modelo de radiação *in population landscape* (RoL) (HONG; JUNG; JO, 2019). O modelo de radiação é uma outra proposta de modelo de mobilidade urbana baseada no conceito de difusão (SIMINI et al., 2012). A relação de escala encontrada no trabalho foi

$$m = \begin{cases} 2D/(\alpha - 1), & \alpha < 3 \\ 2D, & \alpha > 3 \end{cases} \quad (4.17)$$

Este modelo m também é proporcional a D e difere somente por um fator 2. Veja que, para $\gamma - 1 \approx 2$, recuperamos o modelo *RoL*, e experimentalmente é realmente próximo $\gamma \approx 3$ para a rede de *commuters*. Como relata Masuci et. al., o modelo de radiação apresenta uma propensão a um caráter universal, isso significa que o modelo pode ser aplicado em qualquer escala espacial, temporal e em diferentes lugares (MASUCCI et al., 2013).

5 HIERARQUIAS URBANAS

Neste capítulo estudaremos as hierarquias urbanas geradas pelas rede de *commuters* a partir do método Stochastic Blocking Model. Investigaremos as estruturas das comunidades formadas. Estudaremos as distribuições de grandezas socioeconômicas nas hierarquias formadas, veremos a distribuição de recursos nas hierarquias políticas atuais, com ênfase no Fundo de Participação dos Municípios (FPM) e por fim, discutimos resultados obtidos.

5.1 Hierarquias Urbanas

As organizações hierárquicas estão relacionadas com as escalas de observações e com os níveis de organizações de certas entidades. Em sistemas urbanas, o nível mais fundamental consiste nas relações individuais, firmas e instituições, e suas ações que vão organizar e tomar decisões no nível local (PUMAIN, 2006), como a organização de atividades, gerir a infraestrutura e todas as interações em diversas escalas temporais.

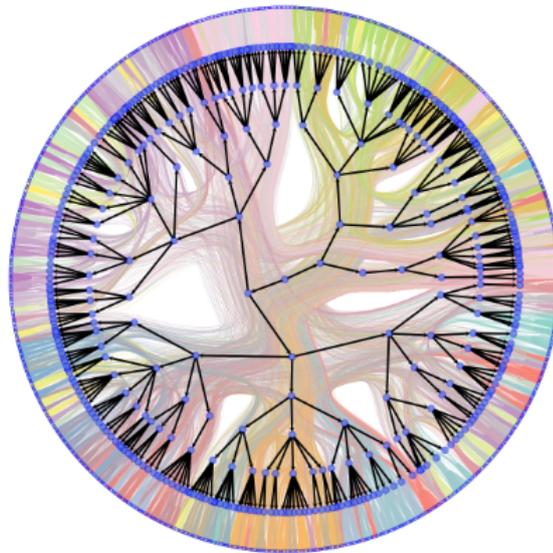
O segundo nível hierárquico urbano é representado por cidades como objetos, precisamos considerar este nível por que nesta visão surgem propriedades que não podemos associá-las nem a indivíduos separadamente, nem a instituição. Por exemplo, quando observamos a morfologia urbana em uma visão de satélite, podemos associar as distribuições das ruas como certos objetos fractais e atribuímos essa propriedade diretamente a cidade, apesar desse padrão fractal ter surgido da ação humana, e assim também para os indicadores urbanos como PIB, comprimento de rua, taxa de criminalidade, etc.

Por último, teremos os sistemas de cidades, onde enquadramos as cidades como entidades individuais interagindo com outras, na qual esse sistema também possui propriedades próprias que não poderemos atribuir a uma única cidade. Tais características dependerão do tipo de ordenação que se define este sistema de cidade, nisso, a diversas formas como por exemplo, agrupação das cidades em estado advindo de contextos históricos e geopolíticos; a definição de região de influência das cidades posta pelo IBGE que define quais cidades são metrópoles, megalópoles e outras classificações; organização hierárquica da Lei de Zipf e Gibrat, e outras inúmeras categorias de sistemas de cidade.

As hierarquias que iremos propor vem da interação entre os *commuters* e as cidades, geradas em diversos níveis de sistemas urbanos através do método *Stochastic Blocking Model*, descrito no capítulo anterior. A Figura 5.1 mostra uma representação das hierarquias geradas

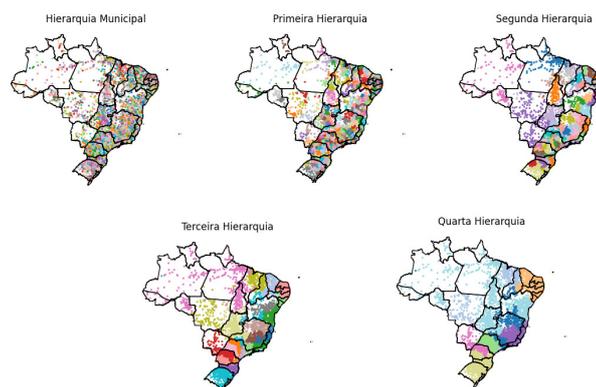
em formato de uma rede hierárquica circular, onde o raio do círculo maior representa as 5549 cidades brasileiras, as demais hierarquias são formadas pela agregação de uma mesma comunidade.

Figura 5.1 – As hierarquias urbanas formadas pelo SBM. No raio maior temos todas as 5549 cidades, posteriormente as comunidades são agregadas e forma um nova hierarquia, partir disso temos 5 níveis hierárquicos contando com o inicial.



A Figura 5.2 mostra a representação espacial destas hierarquias

Figura 5.2 – As hierarquias formadas pelo Método SBM em representação geográfica.

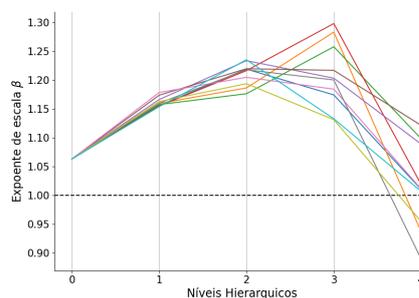


Dada certas hierarquias geradas, estamos interessados em como as leis de escalas se comportam nas estruturas da rede de *commuters*. Daremos ênfase no indicador urbano PIB, pois posteriormente usaremos como critério na divisão de recursos no FPM. Anterior a isso, veremos como se dão a distribuição de recursos fictícios nas próprias hierarquias do SBM, também como os expoentes β_{PIB} se comportam nas comunidades de cada hierarquia.

5.2 Estrutura das hierarquias

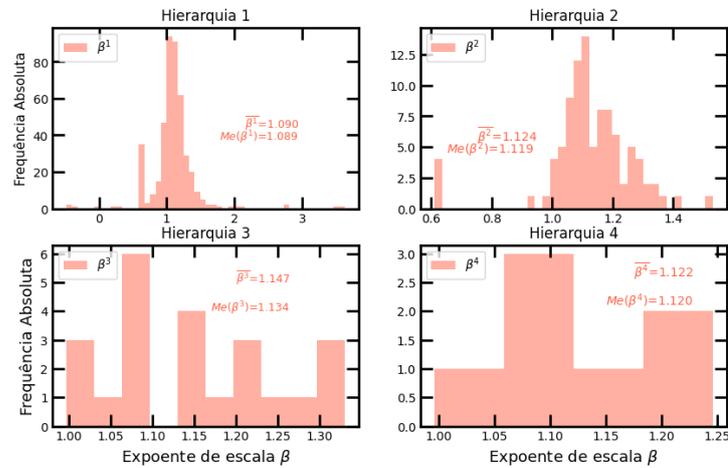
Calculamos o expoente de escala β_{PIB} para cada hierarquia, considerando a população de uma comunidade como a soma das populações de cada cidade que as compõem, assim também para o indicador urbano PIB. A Figura 5.3 mostra a variação do expoente β_{PIB} em função das hierarquias, cada linha corresponde há uma nova hierarquia formada no SBM.

Figura 5.3 – Expoente β_{PIB} para as hierarquias do SBM. Por ser tratar de um método estocástico, a cada interação obtemos hierarquias levemente diferentes.



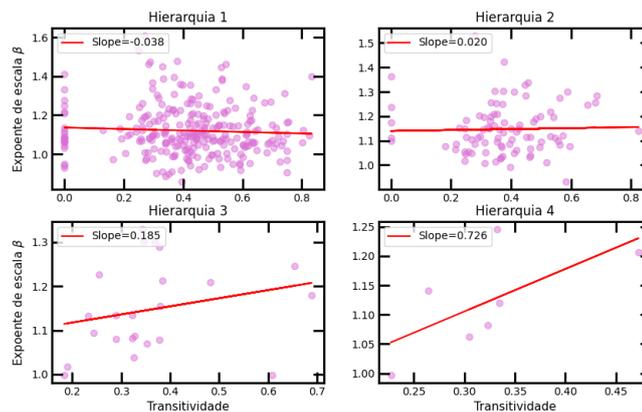
Uma questão que emerge é pensar qual valor é o ideal para um expoente β_{PIB} para um grupo de cidades. Conjuntos de cidades que produzem valores lineares do expoente do indicado PIB β_{PIB} , possuem uma melhor distribuição de riquezas, no mesmo tempo que não possuem nenhum mecanismo de geração de produtividade, já que grandezas que aglomeram rendimentos e riquezas, através do modelo de leis de escala, podem ser usados para avaliar como a produtividade de uma cidade. Já para valores β_{PIB} superlineares teremos o chamado *inscreasing return to scale* (retorno crescente de escala), e assim teremos um acréscimo na produção e riquezas, seguido de uma péssima distribuição. A Figura 5.4 mostra a distribuição do β_{PIB} para cada comunidade de cada uma das quatro hierarquias.

Figura 5.4 – Distribuição de frequência dos β_{PIB} para as comunidade de cada uma das hierarquias.



No intuito de investigar as estruturas das comunidades, decidimos observar qual a relação do expoente β_{PIB} da comunidade de cada hierarquia com certas métricas globais de redes. Para isso utilizamos a densidade e densidade pesada de vértices, transitividade, coeficiente de agrupamento, além do PIB e expoente α da Lei de Zipf. A Figura 5.5 mostra a relação do β_{PIB} com a transitividade da comunidade.

Figura 5.5 – Relação entre os β_{PIB} de cada comunidade que a transitividade da rede.



As demais relações podem ser visualizadas no Apêndice C.3. O resultado dessa investigação foi que não podemos explicar o expoente β ou não mostrou relação com as métricas globais de redes complexas. A Tabela 5.1 mostra o valor p de todas as métricas de cada hierarquia. Esse valor tratasse de uma estatística de teste cuja hipótese nula é uma inclinação nula dada duas variáveis, é conveniente aceita-lá em casos que $p > 0,05$.

Tabela 5.1 – Valores p das relações indicadas para cada uma das hierarquias

Relação	p_1	p_2	p_3	p_4
β_{PIB} vs PIB	0,519	0.0052	0.9618	0.106
β_{PIB} vs densidade pesada	0.603	0.697	0.015	0.200
β_{PIB} vs clustering coefficient	0.058	0.082	0.43	0.91
β_{PIB} vs transitividade	0.35	0.78	0.26	0.11

5.3 Distribuições de recursos

Iremos trabalhar uma forma de distribuição de recursos de hierarquias superiores para as demais, posteriormente veremos como essa distribuição é atualmente realizada utilizando como exemplo o Fundo de Participação dos Municípios (FPM) e seus critérios. Por hora, ocuparemos em estudar nas hierarquias geradas e quais são os estados desejados, isto é, distribuir de tal forma que um grupo de cidades busque um β_{PIB} linear ou β_{PIB} superlinear. Os casos em que ocuparemos consideraremos tanto os fatores socioeconômicos da hierarquia quanto dos municípios.

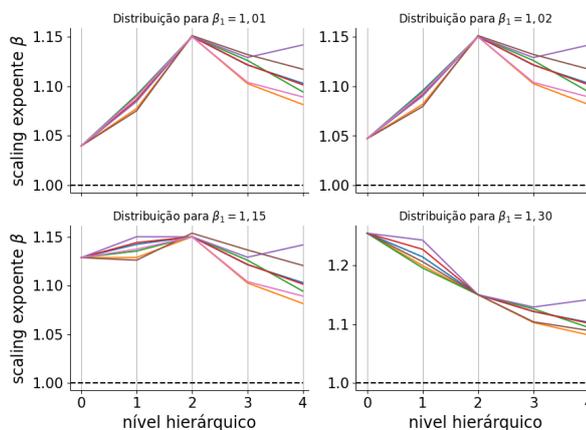
Definimos a segunda hierarquia obtida pelo SBM na qual seus recursos agrupados serão redistribuídos para as demais, levando em conta os critérios socioeconômicos tanto das cidades indicadas por um expoente β_1 quanto das hierarquias intermediadas por um expoente β_2 . Assim definimos o recurso na hierarquia 2 dado pela população somada da comunidade elevado a 1,15, portanto $Y_c = N_c^{1,15} = N_c^{\beta_2}$, estes são os recursos que serão redistribuídos. A equação seguinte mostra como uma certa cidade i receberá seu recurso

$$y_i = \frac{N_i^{\beta_1}}{\sum N_i^{\beta_1}} \left(\sum_{i \in C, H=2}^n N_i^{\beta_2} \right),$$

$$y_i = \frac{N_i^{\beta_1}}{\sum N_i^{\beta_1}} Y_c, \quad (5.1)$$

onde N_i é o tamanho da população da cidade i , o somatória $\sum_{i \in C, H=2}^n$ corresponde a soma da população pertencente a uma comunidade em que a cidade i pertence na hierarquia 2 e, portanto, Y_c é o indicador urbano na hierarquia 2. Veja que, caso agreguemos novamente, na hierarquia 2 teremos $y_i \propto N_c^{\beta_2}$. A Figura 5.6 mostra alguns casos de distribuição dessa variável fictícia para 4 casos diferentes de β_{PIB} e o agrupamento novamente nas próprias hierarquias.

Figura 5.6 – Tipos de distribuição para diferentes β_1 , onde foram agregados nas mesmas hierarquias.



5.4 Fundo de Participação dos Municípios

O Brasil possui dois tipos de repartições de recursos federativos da União: as repartições diretas e indiretas. As repartições diretas consistem na utilização do recurso público sem intermediação de instituições federais exercidas por entes políticos. Um exemplo é o que ocorre com o IPVA e o IR retido na fonte pertencendo 100% aos municípios. As repartições indiretas consistem de fundos de participações e compensatórios, nos quais ocorrem as divisões com seus membros. Os fundos dos União repartidos para os estados, DF e municípios são:

- Fundo de Participação dos Estados e DF;
- Fundo de Participação dos Municípios;
- Fundo das Agências Regionais de Fomento;
- Fundo de Compensação à desoneração das exportações.

Iremos estudar em mais detalhes o FPM, pois se trata de um fundo que embarca todos os municípios brasileiros e as questões tratadas nos critérios de distribuições estão ligadas as hierarquias brasileiras e a distribuição de população.

O FPM corresponde 22,5% da arrecadação líquida do IPI e IR, em 2010 o fundo distribuiu 53,3 bilhões de reais para os municípios. Os critérios de divisões são definidos pelo Tribunal de Contas da União (TCU), sendo dividido em três classes de cidades, onde cada um com respectivas porcentagem são as capitais (10%), cidades do interior (86,4%) e reserva (3,6%).

Os critérios de divisão do interior consideram o fator populacional (λ_j) indicado na Tabela 5.3 e participação do estado k no FPM (η_k) de acordo com a Tabela 5.2. Os valores de

ambas as tabelas são fixos, atualizados em 1997 pelo TCU (portaria 242/1997). O montante que uma cidade do interior j em um estado k irá receber é

$$FPM_j^k = V_T \cdot 0,864 \cdot \eta_k \left(\frac{\lambda_j}{\sum_j^J \lambda_j} \right) \quad (5.2)$$

onde J são os municípios do estado k e V_T o montante total do FPM.

Tabela 5.2 – Tabela de coeficientes estaduais do Fundo de Participação dos Municípios (FPM) - interior.

Estado	Coeficiente(η_k)	Estado	Coeficiente(η_k)
Acre	0,263	Paraíba	3,1942
Alagoas	2,0883	Paraná	7,2857
Amapá	0,1392	Pernambuco	4,7952
Amazonas	1,2452	Piauí	2,4015
Bahia	9,2695	Rio de Janeiro	2,7379
Ceará	4,5864	Rio Grande do Norte	2,4324
Espírito Santo	1,7595	Rio Grande do Sul	7,3011
Goiás	3,7318	Rondônia	0,7464
Maranhão	3,9715	Roraima	0,0851
Mato Grosso	1,8949	Santa Catarina	4,1997
Mato Grosso do Sul	1,5004	São Paulo	14,262
Minas gerais	14,1846	Sergipe	1,3342
Pará	3,2948	Tocantins	1,2955

Fonte: Decisão Normativa - TCU nº 72/2005, Disponível em (GASPARINI; MIRANDA, 2006)

Tabela 5.3 – Tabela de coeficientes do Fundo de Participação dos Municípios (FPM) - interior.

Faixa de Habitantes	Coeficiente(λ_j)
Até 10188	0,6
De 10188 a 13584	0,8
De 13584 a 16980	1
De 16980 a 23772	1,2
De 23733 a 30564	1,4
De 30564 a 37356	1,6
De 37356 a 44148	1,8
De 44148 a 50940	2
De 50941 a 61128	2,2
De 61128 a 71316	2,4
De 71316 a 81504	2,6
De 81504 a 91692	2,8
De 91693 a 101880	3
De 101880 a 115464	3,2
De 115464 a 129048	3,4
De 129048 a 142632	3,6
De 142632 a 156216	3,8
Acima de 156216	4

Fonte: Decreto nº 1881, de 1981, Disponível em (GASPARINI; MIRANDA, 2006)

Dado o estado atual da distribuição do FPM, verificamos a distribuição do fundo de acordo com critérios socioeconômicos, considerando faixas de PIB municipais de acordo com a Tabela 5.4. Veja que o que estamos fazendo é distribuir os recursos considerando um expoente de escala β na população

$$FPM_j^k \propto V_t \cdot 0,864 \left(\frac{n_j^\beta}{\sum_i^J n_j^\beta} \right) \quad (5.3)$$

onde n_j é o tamanho da população de j . A Tabela 5.4 é somente uma forma prática de utilizarmos as divisões de PIB, poderíamos simplesmente utilizar o PIB sem categorização.

A busca por distribuições de recursos da união que levam em conta fatores socioeconômicos ao invés de critérios somente populacionais já é alvo de discussões. Discorreremos sobre as vantagens e desvantagens de cada método na próxima seção. A Figura 5.7 mostra três tipos de distribuições do FPM sendo um montante anual de 53,3 bilhões, o mesmo utilizado no ano de 2010.

O montante do FPM por PIB para os cada estado de acordo a distribuição Tipo 2 pode ser visualizado na Figura 5.8.

Figura 5.7 – a) Tipo 1 - distribuição pelos critérios atuais do FPM no ano de 2010 b) Tipo 2 - distribuição do FPM para os municípios levando em conta um fator PIB como indicado pela Tabela 5.4, mas mantendo o fator estadual η_k c) Tipo 3 - distribuição do FPM levando em conta o Fator PIB e desconsiderando o fator estadual η_k .

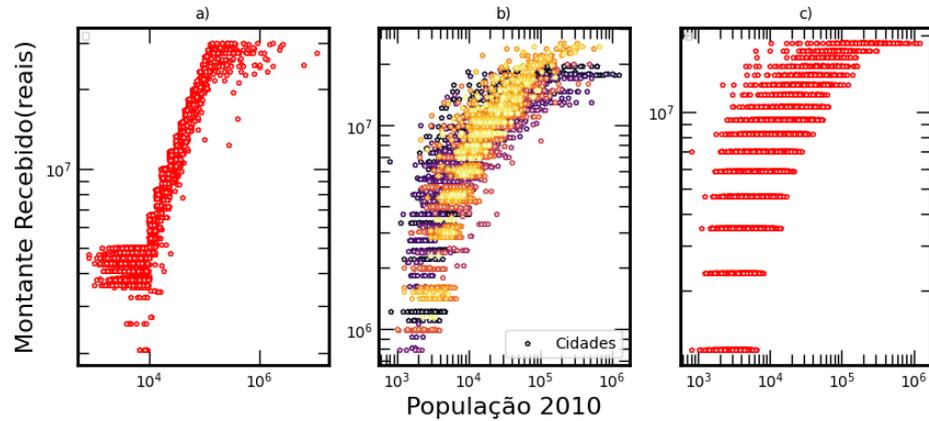
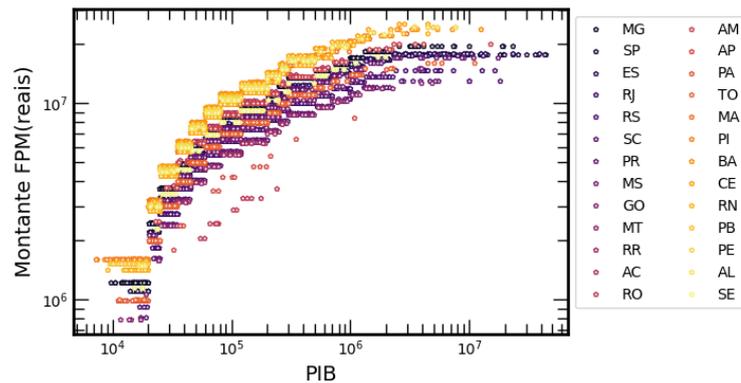


Figura 5.8 – Distribuição do Montante do FPM para o Tipo 2 para cada estado.

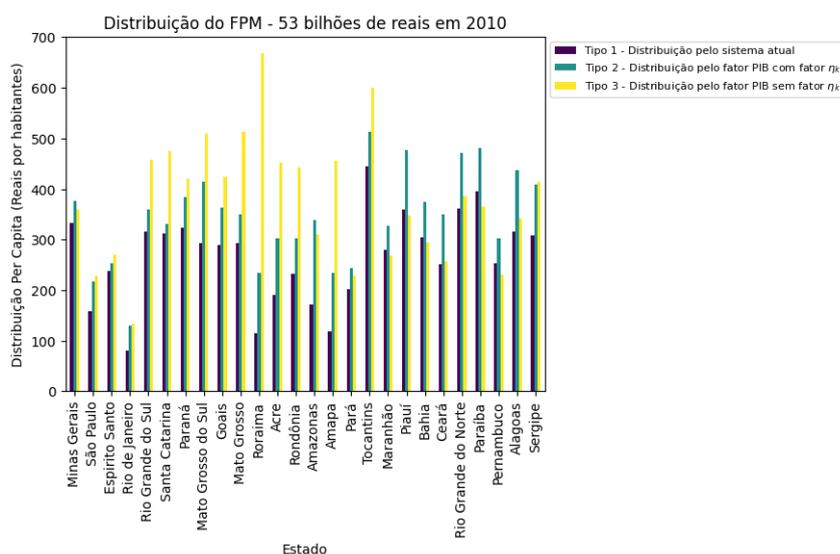


Comparando a renda per capita distribuída por estado para os três tipos, houve um aumento significativo quando consideramos fator PIB nos critérios de distribuições conforme Figura 5.9.

Tabela 5.4 – Critérios dos coeficiente λ para as faixas de PIB das cidades.

Faixa inicial(PIB)	Faixa final(PIB)	Coeficiente λ_j
0	15000	1
20000	25000	2
25000	35000	3
35000	45000	4
45000	60000	5
60000	80000	6
80000	120000	7
120000	200000	8
200000	250000	9
250000	300000	10
300000	400000	11
500000	700000	12
700000	1000000	13
1000000	1300000	14
1300000	1900000	15
2300000	acima	16

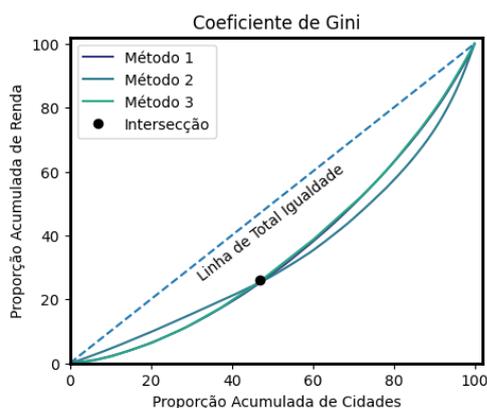
Figura 5.9 – Distribuição per capita do FPM por estado para os três tipos de distribuições.



Para verificar qual tipo de distribuição do FPM contribui para uma melhor igualdade de renda entre as cidades, utilizamos o coeficiente de Gini. Trata-se de um índice que mede a desigualdade de distribuição de renda considerando a relação da proporção de renda com proporção da população com certa renda (no nosso caso cidades) denominada de curva de Lorenz. Se a renda está igualmente distribuída temos um comportamento linear. O coeficiente de Gini é, em termos geométricos, a área da região de total igualmente menos a área da curva de Lorenz.

O resultado é um valor entre 0 e 1, onde zero indica total igualdade e 1 total desigualdade de renda. A Figura 5.10 mostra as curvas de Lorenz para as distribuições do FPM.

Figura 5.10 – Curva de Lorenz para os três tipos de distribuições.



Os coeficientes de Gini de cada métodos estão na Tabela 5.5.

Tabela 5.5 – Valores do coeficiente de Gini para cada método.

Método	Coeficiente de Gini
Tipo 1 - FPM atual	0,32744
Tipo 2 - FPM por PIB/fator estado	0,30987
Tipo 3 - FPM por PIB/sem fator estado	0,30466

5.5 Discussão

Nas investigações sobre as hierarquias da rede *commuters* nossos esforços foram estudar como os expoente de escalas se relacionam com as estruturas formadas. Ao analisar as estruturas das comunidades com métricas das redes cogitamos que as formas que as cidades se organizam podiam estar relacionadas com os próprios expoentes de escala das comunidades. Por exemplo, uma rede que possui um alto coeficiente de agrupamento tende a criar grupos bem coesos, todos bem interligados, i.e., uma comunidade com cidades bem conectadas e isso, pelo que constatamos não possui ligação com o expoente de escala do PIB e, portanto, com a produção de riqueza daquela região e assim, também para todas as métricas mostradas na Tabela 5.1. Por outro lado, podemos interpretar que as interações das redes de *commuters* não possuem a capacidade de capturar as interações que produzem as riquezas das cidades, já que o PIB é uma grandeza agregada apresentando diversas naturezas na cadeia de produção, que não necessariamente estão ligadas com a interações entre as cidades realizada pelos *commuters*.

As análises de distribuição do FPM se concentraram nas cidades do interior justamente porque elas são dependentes de recursos federais, já que não possuem mecanismo de coleta de impostos suficientes para se autossustentarem, e promoverem todas as políticas públicas a nível municipal, como as escolas municipais, parques, esporte e turismo, etc. O trabalho de Massardi et al. caminha nessa linha (MASSARDI; ABRANTES, 2016), relatando o quanto as cidades são dependentes do FPM. Além disso, nosso trabalho sobre a distribuição FPM diz a respeito somente de como os recursos são distribuídos, já o uso e o próprio conceito de distribuição intergovernamental são outras questões complexas que merecem devida atenção que não trataremos. Brollo et al. mostram como o recurso do FPM contribui para um aumento da alfabetização e os índices educacionais (BROLLO et al., 2013), além de analisar os níveis de corrupção devido ao aumento do fundo e outras formas de desvio de dinheiro.

Ao considerar somente a população como um fator de divisão do FPM, temos a ocorrência de algumas incoerências na verba que cada uma das cidades irá receber. Em primeiro lugar, duas cidades do mesmo estado com a mesma faixa populacional recebem valores diferentes e, dependendo do fator estadual em que se encontram, podem ter essa diferença acentuada já que o fator estadual não contém nenhuma métrica socioeconômica, somente o número de cidades e população do estado, além de ser um valor fixo ao longo dos anos, definido em 1997 pelo TCU. Em segundo lugar, a distribuição atual do FPM não possui nenhum mecanismo que compense as cidades a utilizarem o recurso de maneira a promover desenvolvimento socioeconômico, recebendo sempre um certo montante fixo caso mantenham numa mesma faixa populacional, independentemente dos benefícios gerados. Até mesmo quando consideramos o PIB das cidades existem casos em que a cidade pode ser prejudicada caso o fundo não vise desenvolvimento puramente econômico, como é o caso de instituição de ensino e infraestrutura, que possuem um longo tempo de retorno. Quando propomos o PIB como um desses critérios, não necessariamente precisa ser o único dos critérios socioeconômicos.

Analisando as distribuições per capita do FPM para cada estado descrito na Figura 5.9, tivemos um aumento considerável para os tipos 2 e 3 em relação à distribuição atual para todos os estados. No caso da região nordeste, o fator estado η_k se mostrou relevante para o aumento da renda per capita em relação aos outros dois. Para analisar a distribuição individual utilizamos o coeficiente de Gini. Neste caso as distribuições por PIB tipo 2 e 3 tiveram uma melhor performance para diminuir a desigualdade na distribuição do FPM por apresentarem um coeficiente menor de acordo com a Tabela 5.5. Já para as curvas de Lorenz, temos que o método

do tipo 1 possui uma melhor distribuição de recursos para os 47% das cidades menos recebem o fundo em relação aos outros dois tipos por estar mais próxima da linha de igualdade, como pode ser visto no valor da intersecção, tendo em vista que por meio dessas curvas não é possível identificar as características das cidades como a população e o PIB.

6 CONCLUSÃO

Os estudos realizados com o modelo gravitacional de mobilidade urbana por meio do *fitness model* proporcionaram uma nova interpretação do expoente de decaimento dada por uma relação de escala, que agora depende de parâmetros topológicos, como a dimensão fractal D , organização hierárquicas do tamanho da população (expoente α) e natureza das conexões da rede (expoente γ), além de encontramos na literatura relação de escala similar chamada modelo *Radiation on Landscape (RoL)*, que reforçam os resultados e nos auxiliam a entender as interações urbanas, já que o modelo *RoL* é uma comparação direta entre o modelo gravitacional e o de radiação. Comparamos os resultados do expoente pelo modelo de lei de potência, que apesar de realizarmos certas aproximações, são coerentes com os dados experimentais dos *commuters*.

Nos estudos das hierarquias da redes de *commuters*, vimos como os expoentes de escala do PIB se comportam para cada comunidade, analisando suas distribuições para cada hierarquia. Tivemos uma resposta negativa em relacionar o expoente β com as métricas de redes complexas. Em nenhuma das diversas escalas e filtros que utilizamos obtemos resultados plausíveis de acordo com os p-valores. Estudamos as distribuições de recursos fictícios dadas a população dependentes de expoentes β de várias naturezas (sublinear, linear, superlinear) e vimos como os montante dos recursos se comportam nas hierarquias geradas pelo SBM. Como forma de aplicações de recursos dependentes de critérios socioeconômicos, propomos uma nova forma de distribuições nos critérios do FPM baseado no PIB das cidades. Para os critérios que propomos, tivemos um aumento na renda per capita dos estados e um aumento na igualdade de distribuição do recursos de acordo com os coeficiente de Gini.

REFERÊNCIAS

- ASSIS, T. A. de. Geometria fractal: propriedades e característica de fractais ideais. **Revista Brasileira do Ensino de Física**, v. 30, n. 2, p. 2304–2314, 2008.
- BARABÁSI, A.; ALBERT, R. Emergence of scaling in random networks. **SCIENCE**, v. 286, p. 509–512, 1999.
- BARENBLAT, G. I. **Scaling**. 1. ed. United Kingdom: Cambridge University Press, 2003.
- BARROS, M. M. **A dimensão fractal de fenômenos físicos dos sistemas geométricos fractais**. 2011. Tese (Doutor em Ciências em modelagem computacional), LNCC (Laboratório Nacional de Computação Científica), Rio de Janeiro, Brasil.
- BARÁBÁSI, A.; RAVASZ, E. Hierarchical organization in complex networks . **Physics Reviews E**, v. 67, 2003.
- BATTY, M. Cities as complex systems: Scaling, interaction, networks, dynamics and urban morphologies. In: _____. **Encyclopedia of Complexity and Systems Science**. New York, NY: Springer New York, 2009. p. 1041–1071. ISBN 978-0-387-30440-3. Disponível em: <https://doi.org/10.1007/978-0-387-30440-3_69>.
- BATTY, P. L. M. **Fractal Cities**. 1. ed. London: Academic Press, 1994.
- BENGUIGUI, L. et al. When and where is a city fractal? **Environment and Planning B: Planning and Design**, v. 27, n. 4, p. 507–519, 2000.
- BETTENCOURT, G. W. L. M. A. A unified theory of urban living. **Nature**, v. 340, n. 6139, p. 1438–1441, 2010.
- BETTENCOURT, L. M. A. The origins of scaling in cities. **Science**, v. 340, n. 6139, p. 1438–1441, 2013.
- BETTENCOURT, L. M. A. Complex networks and fundamental urban process. **Mansueto Institute for Urban Innovation Research Paper**, n. 8, 2019.
- BROLLO, F. et al. The political resource curse. **American Economic Review**, v. 103, n. 5, p. 1759–1796, 2013.
- CALDARELLI, G. et al. Scale-Free Networks from Varying Vertex Intrinsic Fitness. **Physical Review Letters**, v. 89, n. 25, p. 1–4, 2002.
- CHEN, Y. Fractal modeling and fractal dimension description of urban morphology. **Entropy**, v. 22, n. 9, 2020.
- COTA, W. F. C. **Spreading phenomena on complex networks and social systems**. 2020. Thesis (Phd in Physics), Physics Graduate Program, Universidade de Federal de Viçosa, Viçosa.
- ERDOS, A. R. P. On the evolution of random graphs. **Hungarian Academy of Sciences**, 1960.
- ERNEST, G. Lewis fry richarson - 1881 - 1953. **The Royal Society**, 1954. <https://doi.org/10.1098/rsbm.1954.0015>.

- GABRIELLI, A. et al. Grand canonical ensemble of weighted networks. **Physics Review E**, American Physical Society, v. 99, p. 030301, Mar 2019. Disponível em: <<https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevE.99.030301>>.
- GARCÍA-PÉREZ, G.; BOGUÑÁ, M.; SERRANO, M. Á. Multiscale unfolding of real networks by geometric renormalization. **Nature Physics**, Springer US, v. 14, n. 6, p. 583–589, 2018. Disponível em: <<http://dx.doi.org/10.1038/s41567-018-0072-5>>.
- GASPARINI, C. E.; MIRANDA, R. B. Evolução dos aspectos legais e dos montantes de transferências realizadas pelo Fundo de Participação dos Municípios. p. 45, 2006.
- GLERIA, R. M. I.; SILVA, S. da. Sistemas complexos, criticalidade e leis de potência. **Revista Brasileira do Ensino de Física**, v. 26, n. 2, p. 99–108, Fev 2004.
- GUDIPUDI, R. et al. The efficient, the intensive, and the productive: Insights from urban Kaya scaling. **Applied Energy**, v. 236, p. 155–162, 2019.
- HONG, I.; JUNG, W. S.; JO, H. H. Gravity model explained by the radiation model on a population landscape. **PLoS ONE**, v. 14, n. 6, p. 1–13, 2019.
- IBGE. **Regiões de Influência 2018**. 4. ed. [S.l.]: Governo Brasileiro, 2018.
- IOVANE, G. The fractal structure of the universe. **Physics Reports**, v. 213, n. 6, p. 311–389, 1992. Disponível em: <<https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/037015739290112D>>.
- JACOBS, J. **The death and life of great american cities**. 3. ed. Nova Iorque: Vintage Books, 1962.
- KATZ, L. a New Status Index Derived From Sociometric. **Psychometrika**, v. 18, n. 1, p. 39–43, 1953.
- KLEIBER, M. Body size and Metabolism. **Hilgardia**, p. 315–353, 1932.
- KOMULAINEN, T. **Self-similarity and power laws**. [S.l.], 2004.
- LI, R. et al. Assessing the Attraction of Cities on Venture Capital from a Scaling Law Perspective. **IEEE Access**, v. 9, p. 48052–48063, 2021. ISSN 21693536.
- LOBO, J. et al. Urban Scaling and the Production Function for Cities. **PLoS ONE**, v. 8, n. 3, 2013.
- MANDELBROT, B. How long is the coast of britain? statistical self-similarity and fractional dimension. **Science**, v. 156, n. 3775, p. 636–638, May 1967.
- MASSARDI, W. de O.; ABRANTES, L. A. Dependência dos municípios de Minas Gerais em relação ao FPM. p. 45, 2016.
- MASUCCI, A. P. et al. Gravity versus radiation models: On the importance of scale and heterogeneity in commuting flows. **Physical Review E - Statistical, Nonlinear, and Soft Matter Physics**, v. 88, n. 2, p. 1–8, 2013.

MILLER, H. J. Tobler's first law and spatial analysis. **Annals of the Association of American Geographers**, Routledge, v. 94, n. 2, p. 284–289, 2004. Disponível em: <<https://doi.org/10.1111/j.1467-8306.2004.09402005.x>>.

MIRANDA, J. V. M. **Leis de Escala em cidades**. 2015. Dissertação (Mestre em Ciências), Programa de Pós-Graduação em Modelagem de Sistemas Complexos, Universidade de São Paulo, São Carlos.

MISTANI, P.; PAKRAVAN, S.; GIBOU, F. Tensor network renormalization as an ultra-calculus for complex system dynamics. **Studies in Systems, Decision and Control**, v. 186, p. 87–106, 2019.

NETTO, V. M. City and interaction: the role of space in social organization. **Revista Brasileira de Gestão Urbana**, 2018. DOI: 10.1590/2175-3369.010.002.AO06.

NETTO, V. M. Da forma urbana à cidade como informação. **Revista Brasileira de Gestão Urbana**, n. 12, 2020.

NEWMAN, M. E. J. Power laws, pareto distributions and zipf's law. **AirXiv**, v. 3, n. 1, p. 1–28, Dec 2004.

OLIVEIRA, C. B.-f. M.; MENEZES, R. The scaling of crime concentration in cities. **PLOS ONE**, 2017. <https://doi.org/10.1371/journal.pone.0183110>.

PEIXOTO, T. Bayesian stochastic blockmodeling . **Arxiv**, v. 1, 2020.

PEIXOTO, T. P. Hierarchical block structures and high-resolution model selection in large networks. **Physics Review X**, American Physical Society, v. 4, p. 011047, Mar 2014. Disponível em: <<https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevX.4.011047>>.

PEIXOTO, T. P. Nonparametric bayesian inference of the microcanonical stochastic block model. **Physics Review E**, American Physical Society, v. 95, p. 012317, Jan 2017. Disponível em: <<https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevE.95.012317>>.

PORTUGALI, J. Self-organizing cities. **Futures**, v. 29, n. 4, p. 353–380, 1997. Time and Space Geographic Perspectives on the Future. Disponível em: <<https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0016328797000220>>.

PUMAIN, D. Alternative Explanations of Hierarchical Differentiation in Urban Systems. **Hierarchy in Natural and Social Sciences**, p. 169–222, 2006.

QUEIROZ, G. R. Tutorial de Bancos de Dados Geográficos. **Instituto Nacional de Pesquisa Espaciais**, 2006.

RAPOPORT, A. Contribution to the theory of random and biased nets. **The bulletin of mathematical biophysics**, v. 19, p. 257–277, 1957. Disponível em: <<https://link.springer.com/article/10.1007/BF02478417>>.

READER, J. **Cities**. New York: Grove Press, 2004.

RIBEIRO, F. L. et al. A model of urban scaling laws based on distancedependent interactions. **Royal Society Open Science**, v. 4, n. 3, 2017.

- RYBSKI, D.; ARCAUTE, E.; BATTY, M. Urban scaling laws. **Environment and Planning B: Urban Analytics and City Science**, v. 46, n. 9, p. 1605–1610, 2019. Disponível em: <<https://doi.org/10.1177/2399808319886125>>.
- SIMINI, F. et al. A universal model for mobility and migration patterns. **Nature**, v. 484, n. 7392, p. 96–100, 2012.
- SONG, C.; HAVLIN, S.; MAKSE, H. A. Self-similarity of complex networks. **Nature**, v. 433, n. 7024, p. 392–395, 2005.
- SOO, K. T. Zipf's law for cities: a cross-country investigation. **Regional Science and Urban Economics**, v. 35, n. 3, p. 239–263, 2005. ISSN 0166-0462. Disponível em: <<https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S016604620400033X>>.
- STEEN, M. V. **Graph Theory and Complex Networks: An Introduction**. 1. ed. [S.l.]: Maartem van Steen, 2010.
- SUGAR, L. **Urban Scaling and the Dynamics of Cities**. 2019. Theses (Doctor in Doctor of Philosophy), Department of Civil Engineering, University of Toronto, Canadá.
- TOVOLLI, B. A. F. P. A. M. S. M. H. **Modelagem de sistemas complexos para políticas públicas**. 1. ed. Brasília: Ipea, 2015.
- TRAVERS, J.; MILGRAM, S. An experimental study of the small world problem. In: LEINHARDT, S. (Ed.). **Social Networks**. Academic Press, 1977. p. 179–197. ISBN 978-0-12-442450-0. Disponível em: <<https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/B9780124424500500183>>.
- WATTS, D.; STROGATZ, S. Collective dynamics of 'small-world' networks. **Nature**, v. 393, p. 440–442, 1998.
- WEST, G. **Scale: The universal laws of growth, innovation, sustainability, and the pace of life in organisms, cities, economies, and companies**. New York: Penguin Press, 2017.
- YAKUBO, K.; KOROAK, D. Scale-free networks embedded in fractal space. **Physical Review E**, v. 83, n. 6, 2011.
- ZEIDE, B.; PFEIFER, P. A Method for Estimation of Fractal Dimension of Tree Crowns. **Forest Science**, v. 37, n. 5, p. 1253–1265, 11 1991. Disponível em: <<https://doi.org/10.1093/forestscience/37.5.1253>>.
- ZHANG, J. L. G. . J. Y. P. **History of Graph Theory**. 1. ed. [S.l.]: Theory CRC Press, 2013.

APÊNDICE A – Propriedade das leis de potência

A PROPRIEDADE DAS LEIS DE POTÊNCIA

A.1 Normalização

Encontrando a constante de normalização, teremos:

$$\int_{x_{min}}^{\infty} f(x)dx = C \int_{x_{min}}^{\infty} x^{-\alpha} dx = 1$$

$$C \frac{x^{-\alpha+1}}{-\alpha+1} \Big|_{x_{min}}^{\infty} = 1 \Rightarrow C = (\alpha-1)x_{min}^{\alpha-1}$$

$$f(x) = \frac{\alpha-1}{x_{min}} \left(\frac{x}{x_{min}} \right)^{-\alpha}. \quad (\text{A.1})$$

A.2 Momentos

Momento de primeira ordem é dado por:

$$\langle x \rangle = \int_{x_{min}}^{\infty} xp(x)dx = C \int_{x_{min}}^{\infty} x^{\alpha-1} dx. \quad (\text{A.2})$$

A média é divergente para $\alpha \leq 2$, mas é perfeitamente definida para $\alpha \geq 2$ (NEWMAN, 2004):

$$\langle x \rangle = x_{min} \frac{\alpha-1}{\alpha-2} \quad (\text{A.3})$$

O momento de segunda ordem é divergente para $\alpha \leq 3$, mas é perfeitamente definido para $\alpha \geq 3$

$$\langle x^2 \rangle = x_{min}^2 \frac{\alpha-1}{\alpha-3}. \quad (\text{A.4})$$

No geral, o m -ésimo momento existe quando $m < \alpha - 1$:

$$\langle x^m \rangle = x_{min}^m \frac{\alpha-1}{\alpha-1-m}. \quad (\text{A.5})$$

A.3 Distribuição livre de escala

Vamos provar por que as leis de potência são livres de escala, isso significa são as únicas distribuições onde, para qualquer escala, elas permanecem as mesmas fora uma constante qualquer. Suponha uma distribuição $f(x)$, onde queremos reescaloná-la por um certo valor b , assim teremos:

$$f(bx) = g(b)f(x). \quad (\text{A.6})$$

Fazendo $x = 1$, teremos $g(b) = f(b)/f(1)$, a equação (A.6), fica como

$$f(bx) = \frac{f(b)}{f(1)}f(x). \quad (\text{A.7})$$

Considerando que a equação (A.7) seja diferenciável, vamos derivar e avaliar para $b = 1$. Temos a seguinte equação diferencial:

$$x \frac{d}{dx} f(x) = \frac{f'(1)}{f(1)} f(x). \quad (\text{A.8})$$

Integrando (A.8) por separação de variável, considerando $x = 1$ para encontrar a constante de integração, teremos por fim:

$$f(x) = f(1)^{-\alpha}, \quad (\text{A.9})$$

onde $\alpha = -p'(1)/p(1)$. Temos uma lei de potência que é a mesma para qualquer escala que observemos, diferente somente a menos de uma constante.

B FRACTAIS

Os estudos de Mandelbrot não ficaram somente nas distribuições das leis de potências, ele se interessou em suas interpretações geométricas. Em 1967, em seu artigo “*How to long is the coast of Britain?*” (MANDELBROT, 1967) em respostas ao chamado paradoxo litorâneo, gerado por Lewis Fry Richardson em 1951, onde observou que países diferentes tem medidas diferentes para uma mesma fronteira. O paradoxo litorâneo nada mais é que o tamanho do litoral depende do tamanho da unidade de medida escolhida (ERNEST, 1954). Quanto maior a precisão da “régua” maior será o tamanho do litoral, caso a precisão tender ao infinito, teríamos um litoral de comprimento infinito. Obviamente não temos litorais de comprimento infinito na natureza, mas como resolver esse paradoxo? A resposta de Mandelbrot em relação a isso é: qualquer medida em qualquer precisão está correta, porém, como o litoral é composto por figuras auto-semelhantes menores, como penínsulas, praias, grãos de areias, moléculas, átomo e por aí vai, cada vez que olhamos de perto a medida do comprimento aumenta, assim como os objetos fractais. Isso levou os objetos fractais serem chamados de "monstros" matemáticos e culminou no desenvolvimento de uma geometria diferente da euclidiana para descrição destes objetos.

Fractais são objetos autossimilares, isso significada que eles são feitos por cópias menores de si mesmo (ASSIS, 2008). Um exemplo é a árvore pitagórica, começando com um quadrado, construímos um triângulo isósceles cuja hipotenusa é o lado superior, construímos dois quadrados cujos os lados são os outros dois lados do triângulo, o resultado pode ser visto na Figura (B.1).

$$\lambda_k = \lambda_0 q^{-k}. \quad (\text{B.4})$$

Encontrando k nas equações (B.3) e (B.4) e igualando teremos:

$$\log \left(\frac{N_k}{N_0} \right) = -\frac{\log p}{\log q} \log \left(\frac{\lambda_k}{\lambda_0} \right) = -D \log \left(\frac{\lambda_k}{\lambda_0} \right), \quad (\text{B.5})$$

onde $D = \log p / \log q$, é chamado de dimensão fractal geométrica. Diferente da dimensão euclidiana que assume somente valores inteiro, D pode assumir valores fracionários, entre $1 < D < 3$. O significado de D pode ser compreendido como o grau de ocupação do objeto fractal no espaço, quanto maior for D maior será sua ocupação, de acordo com a interpretação de Hausdorff (BARROS, 2011).

Para duas ordens subsequentes temos:

$$\frac{N_{k+1}}{N_k} = \left(\frac{\lambda_{k+1}}{\lambda_k} \right), \quad (\text{B.6})$$

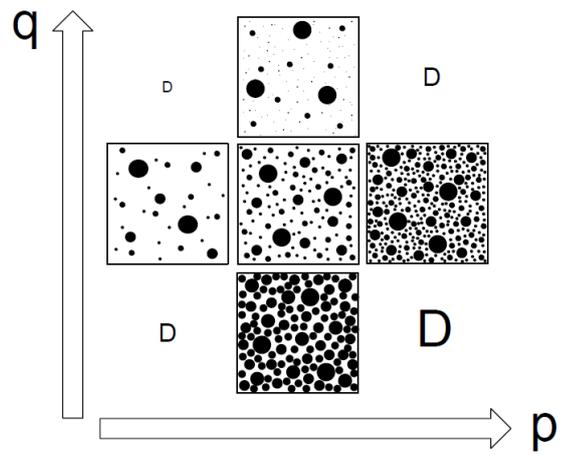
ou

$$p = q^D. \quad (\text{B.7})$$

Observe mesmo que a equação (B.7) diz a respeito do aumento de uma unidade da ordem k , ela é mais abrangente pois admite que p e q alterem-se ao longo das ordem subsequentes.

A figura (B.2) mostra qual é a alteração dos parâmetros p e q para um certo tipo de fractal representado pelo quadrado central. O p está relacionado com o número de cópias e o q com o tamanho de acordo com as ordem. Com isso, quanto maior o p e maior o q , teremos muitas cópias de tamanhos pequenos, quanto maior o p e menor o q , teremos muitas cópias de tamanhos maiores, portanto uma maior ocupação do espaço maior, este fator está representado também pelo tamanho da letra D , onde é proporcional a taxa de ocupação do fractal.

Figura B.2 – Variação dos parâmetros p e q para um certo objeto fractal (quadrado central).



Fonte: (BARROS, 2011)

C DADOS COMPLEMENTARES

C.1 Dados sobre grupos de commuters

A tabela mostra a relação das cidades na região azul de acordo com a Figura C.1

Tabela C.1 – Cidades da região azul na Figura 4.5. Dentre elas se encontram todas as cidades capitais.

<i>Cidades do grupo azul</i>			
<i>São Paulo</i>	<i>Rio Branco</i>	<i>Fortaleza</i>	<i>Taubaté</i>
<i>Belo Horizonte</i>	<i>Boa Vista</i>	<i>Teresina</i>	<i>Limeira</i>
<i>Curitiba</i>	<i>Palmas</i>	<i>São Luís</i>	<i>Petrolina</i>
<i>Rio de Janeiro</i>	<i>Santarém</i>	<i>Belém</i>	<i>Blumenau</i>
<i>Florianópolis</i>	<i>Governador Valadares</i>	<i>Macapá</i>	<i>Ponta Grossa</i>
<i>Porto Alegre</i>	<i>Foz do Iguaçu</i>	<i>Manaus</i>	<i>Bauru</i>
<i>Campo Grande</i>	<i>Macaé</i>	<i>Indaiatuba</i>	<i>Piracicaba</i>
<i>Vitória</i>	<i>Imperatriz</i>	<i>Camaçari</i>	<i>Campina Grande</i>
<i>Cuiabá</i>	<i>Mossoró</i>	<i>São José dos Campos</i>	<i>São José do Rio Preto</i>
<i>Goiânia</i>	<i>Santa Maria</i>	<i>Araraquara</i>	<i>Caxias do Sul</i>
<i>Brasília</i>	<i>Cascavel</i>	<i>Divinópolis</i>	<i>Campos dos Goytacazes</i>
<i>Porto Velho</i>	<i>Vitória da Conquista</i>	<i>Arapiraca</i>	<i>Londrina</i>
<i>Salvador</i>	<i>Montes Claros</i>	<i>São Carlos</i>	<i>Joinville</i>
<i>Aracaju</i>	<i>Anápolis</i>	<i>Sete Lagoas</i>	<i>Feira de Santana</i>
<i>Maceió</i>	<i>Franca</i>	<i>Itabuna</i>	<i>Juiz de Fora</i>
<i>Recife</i>	<i>Uberaba</i>	<i>Presidente Prudente</i>	<i>Uberlândia</i>
<i>João Pessoa</i>	<i>Caruaru</i>	<i>Volta Redonda</i>	<i>Campo Grande</i>
<i>Natal</i>	<i>Marília</i>	<i>Petrópolis</i>	<i>Campinas</i>
<i>Ipatinga</i>	<i>Ribeirão Preto</i>	<i>Maringá</i>	<i>Marabá</i>
<i>Juazeiro do Norte</i>	<i>Pelotas</i>	<i>Sorocaba</i>	

Enquanto que a região vermelha possui as cidades da Tabela C.2.

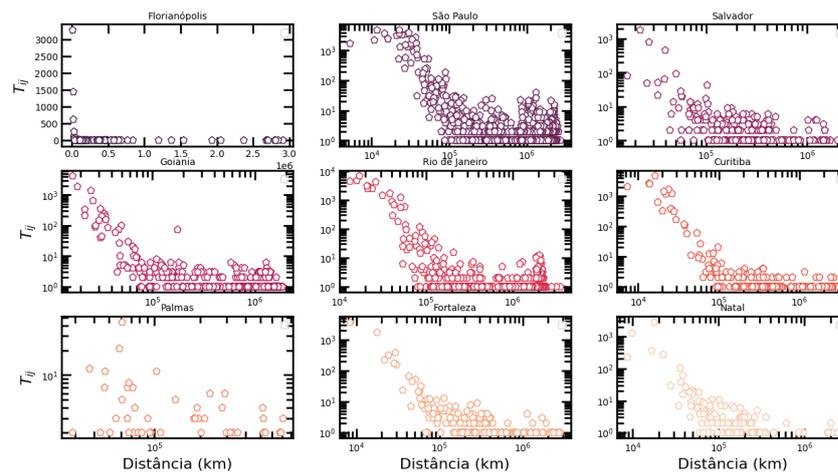
Tabela C.2 – Cidades da região azul na Figura 4.5. Dentre elas se encontram todas as cidades capitais.

<i>Cidades em Vermelho</i>		
<i>Guarulhos</i>	<i>Santos</i>	<i>Taboão da Serra</i>
<i>São Gonçalo</i>	<i>Mogi das Cruzes</i>	<i>Sumaré</i>
<i>Duque de Caxias</i>	<i>Guarujá</i>	<i>Gravataí</i>
<i>Nova Iguaçu</i>	<i>Novo Hamburgo</i>	<i>Suzano</i>
<i>São Bernardo do Campo</i>	<i>Americana</i>	<i>Praia Grande</i>
<i>Santo André</i>	<i>Jacareí</i>	<i>Ribeirão das Neves</i>
<i>Osasco</i>	<i>Magé</i>	<i>Paulista</i>
<i>Jaboatão dos Guararapes</i>	<i>Cotia</i>	<i>Canoas</i>
<i>Contagem</i>	<i>São José</i>	<i>Betim</i>
<i>Ananindeua</i>	<i>Itapevi</i>	<i>Olinda</i>
<i>Niterói</i>	<i>Santa Luzia</i>	<i>Mauá</i>
<i>Belford Roxo</i>	<i>Colombo</i>	<i>Carapicuíba</i>
<i>Aparecida de Goiânia</i>	<i>Itaboraí</i>	<i>Diadema</i>
<i>Vila Velha</i>	<i>São Leopoldo</i>	<i>Viamão</i>
<i>Embu</i>	<i>São João de Meriti</i>	

C.2 Lei de potência para os commuters

A Figura C.1 mostra a relação entre *commuters* que entram uma cidade em função da distância.

Figura C.1 – Relação entre *commuter* e a distância r_{ij} para algumas cidades capitais.



C.3 Estrutura da comunidade

Os gráficos mostram a relação do expoente β_{PIB} com algumas métricas globais das rede, além do PIB e do expoente α da Lei de Zipf.

Figura C.2 – Expoente β em função do coeficiente de agrupamento.

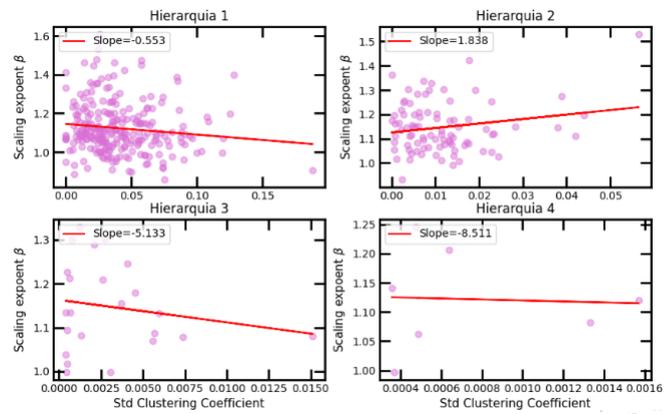


Figura C.3 – Expoente β em função densidade.

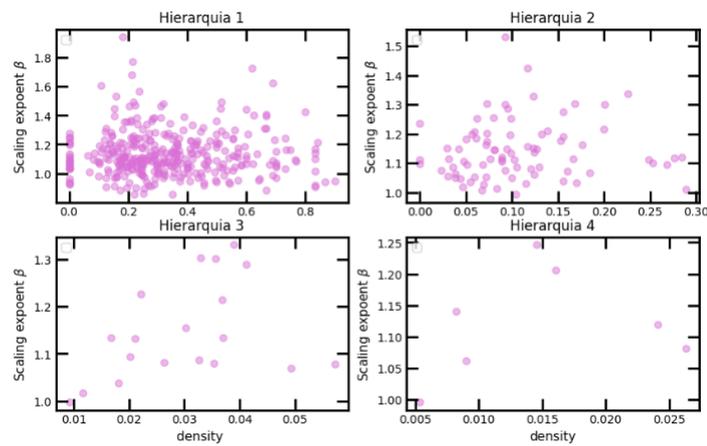


Figura C.4 – Expoente β em função da densidade pesada.

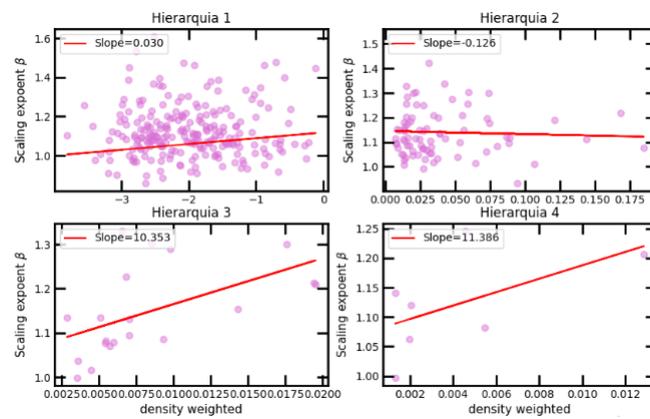


Figura C.5 – Expoente β em função do coeficiente do expoente α .

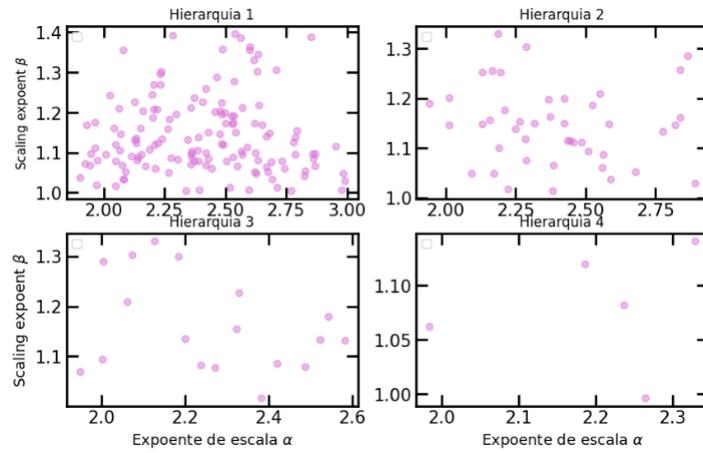
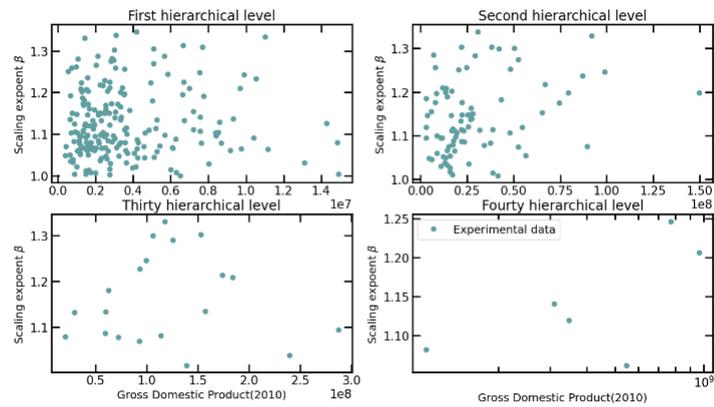


Figura C.6 – Expoente β em função do PIB.



D ALGORITMOS

Algoritmo de box-couting.

```

import geopandas as gpd
import pandas as pd
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
import folium
from folium import Choropleth, Circle, Marker
from folium.plugins import HeatMap, MarkerCluster
import pandas as to_csv
#import PyQt5
import fiona

#mapa para o geodataframe
ufs = gpd.read_file('mapa.gpkg', layer="lim_unidade_federacao_a") \
ufsAbr = ufs[['nome', 'sigla', 'geometry']]

plan = pd.read_csv("joao-planilha-2018-03-08-corrigida.csv")
#plan = pd.read_csv("analise.csv")
planAbr = plan[['ibge_id', 'uf', 'lon', 'lat', 'new_pib', 'no_accents']]

planAbr = planAbr[planAbr['new_pib'].notna()]

pontoInicial = [-70,3]
#análise do pib começou em 0.05
pontoA = 1.9

listaX = []
listaY = []
limiteLat = -34.79172058959999 #ultima cidade em latitude
limiteLon = -32.4351863281 #ultima cidade em longitude

```

```

#while((pontoInicial[1]>=limiteLat) & (pontoInicial[0]<=limiteLon)):
    #listaX.append(pontoInicial[0])
    #listaY.append(pontoInicial[1])
    # pontoInicial[0] += pontoA
    # pontoInicial[1] -= pontoA

while((pontoInicial[1]>=limiteLat) & (pontoInicial[0]<=limiteLon)):
    listaX.append(pontoInicial[0])
    listaY.append(pontoInicial[1])
    pontoInicial[0] += pontoA
    pontoInicial[1] -= pontoA

    listaDfs = []
dfFinal = pd.DataFrame(columns=['ibge_id', 'uf', 'lon', 'lat',
    'populacao_2010', 'no_accents'])

i=1
j=1
for i in range(len(listaX)):
    for j in range(len(listaY)):
        dfQuadrado = planAbr[((planAbr['lon']<listaX[j])&
        (planAbr['lon']>listaX[j-1])&
        (planAbr['lat']>listaY[i])&
        (planAbr['lat']<listaY[i-1]))]
        dfQuadrado['idQuadrado'] = (len(listaX)*i)+j
        dfQuadrado['x1'] = listaX[j-1]
        dfQuadrado['x2'] = listaX[j]
        dfQuadrado['y1'] = listaY[i-1]
        dfQuadrado['y2'] = listaY[i]
        dfQuadrado.dropna()
        listaDfs.append(dfQuadrado)

```

```

dfCidades = pd.DataFrame()

for i in range(len(listaDfs)):
    if(not(listaDfs[i].empty)):
        dfCidades = pd.concat([dfCidades,listaDfs[i]])

dfSort = dfCidades.sort_values(by=['new_pib'], ascending=False)

dfSort['centerSquareX'] = dfSort['x1']+(pontoA/2)
dfSort['centerSquareY'] = dfSort['y1']-(pontoA/2)

dfSort.drop(columns=['x1','x2','y1','y2'], inplace=True)

agg = dfSort.groupby(['idQuadrado'], as_index=False).aggregate(
{'ibge_id':'first','uf':'first','lon':'first',
'lat':'first','new_pib':'sum',
'no_accents':'first','centerSquareX':
'first','centerSquareY':
'first'})

agg.sort_values(by=['new_pib'], ascending=False)

# O numero de coluna nos fornece
#a quantidade de cidades enquadradas,
#a inclinacao entre o
#tamanho do quadrado(PontoA) e o
#numero de coluna(cidades) em um
#grafico loglog forcene a dimensão fractal

```