



JÉSSICA RENATA NOGUEIRA

**UMA REVISÃO DA TRIANGULAÇÃO DE
DELAUNAY COM MALHAS GERADAS
PELO ALGORITMO DE GREEN-SIBSON**

LAVRAS – MG

2013

JÉSSICA RENATA NOGUEIRA

**UMA REVISÃO DA TRIANGULAÇÃO DE DELAUNAY COM MALHAS
GERADAS PELO ALGORITMO DE GREEN-SIBSON**

Monografia apresentada ao Colegiado do Curso de
Ciência da Computação, para a obtenção do título
de Bacharel em Ciência da Computação.

Orientador

Prof. D.Sc. Sanderson L. Gonzaga de Oliveira

LAVRAS – MG

2013

JÉSSICA RENATA NOGUEIRA

**UMA REVISÃO DA TRIANGULAÇÃO DE DELAUNAY COM MALHAS
GERADAS PELO ALGORITMO DE GREEN-SIBSON**

Monografia apresentada ao Colegiado do Curso de
Ciência da Computação, para a obtenção do título
de Bacharel em Ciência da Computação.

APROVADA em 19 de abril de 2013.

Prof. Dr. André Vital Saúde

DCC/UFLA

Prof. Dr. Wilian Soares Lacerda

DCC/UFLA



Prof. D.Sc. Sanderson L. Gonzaga de Oliveira

(Orientador)

LAVRAS – MG

2013

Dedico esta monografia a minha irmã e aos meus pais. Que mesmo não entendendo grande parte do que aqui escrevi, nunca deixaram de dizer: “vá em frente, vai dar tudo certo”.

AGRADECIMENTOS

Agradeço inicialmente a Deus, por tudo que realiza em minha vida e por Sua infinita misericórdia.

Agradeço a minha irmã e melhor amiga Bruna, a principal motivação para as minhas conquistas. Por sua força, pela alegria e amizade. Pelo bem que só ela me faz. Agradeço também aos meus pais, pelo carinho e paciência. Por não medirem esforços para me educarem.

Agradeço ao meu orientador e amigo Sanderson, por colaborar no desenvolvimento desse trabalho e por toda paciência. Agradeço aos professores e demais funcionários do departamento de Ciência da Computação da UFLA. Agradeço também ao Frederico por colaborar no desenvolvimento deste trabalho. Agradeço aos amigos de laboratório, em especial ao Talles, Guilherme e Jaqueline, pela amizade e por promoverem discussões que ajudaram na elaboração dessa monografia.

Agradeço a Ana Carolina e Lívia, minhas grandes amigas e ao meu companheiro e amigo Breno. Agradeço aos meus avós Júlio, Renato e Almerinda. De maneira especial, à minha querida “vó Merinda” (*in memorian*), a mulher mais forte e guerreira que pude conhecer. Por ser minha melhor lembrança e meu maior exemplo.

Agradeço também ao Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico (CNPq) e à Fundação de Amparo à Pesquisa do Estado de Minas Gerais (Fapemig) pelo apoio financeiro.

RESUMO

Nesta monografia, apresentam-se características e propriedades da triangulação de Delaunay. A aplicação da triangulação de Delaunay pode contribuir no desenvolvimento de esquemas numéricos em uma grande variedade de disciplinas. Também é apresentado o diagrama de Voronoi, uma estrutura dual da triangulação de Delaunay. Será mostrado, ainda, o algoritmo de Green-Sibson e os resultados obtidos ao realizar a implementação desse algoritmo para a geração da triangulação de Delaunay.

Palavras-Chave: geração de malhas; geração de malhas triangulares; triangulação de Delaunay; diagrama de Voronoi.

ABSTRACT

In this monograph, we present character and properties about the Delaunay triangulation. The application of the Delaunay triangulation can contribute on the development of numerical schemes in a wide variety of disciplines. It also shows the Voronoi diagram, a dual structure of Delaunay triangulation. In this research, will also be shown, the Green-Sibson algorithm's and the results obtained to perform the implementation of this algorithm to generate the Delaunay triangulation.

Keywords: mesh generation; triangular mesh generation; Delaunay triangulation; Voronoi diagram.

SUMÁRIO

1	Introdução	13
1.1	Objetivos	13
1.2	Motivações	14
1.3	Organização do Trabalho	14
2	Referencial Teórico	16
2.1	Geração de malhas	16
2.2	Introdução à triangulação de Delaunay	18
2.3	Diagrama de Voronoi	28
2.4	Algoritmos para gerar a triangulação de Delaunay e o diagrama de Voronoi	33
2.4.1	Algoritmos por <i>divisão e conquista</i> para gerar a triangulação de Delaunay ou o diagrama de Voronoi	33
2.4.2	Algoritmo para gerar a triangulação de Delaunay por <i>mudança de arestas</i>	34
2.4.3	Algoritmos por <i>inserção incremental de pontos</i> para gerar a triangulação de Delaunay ou o diagrama de Voronoi	35
2.4.4	Algoritmos por <i>construção incremental</i> para gerar a triangulação de Delaunay ou o diagrama de Voronoi	37
2.4.5	Algoritmos por <i>lift mapping</i> para gerar a triangulação de Delaunay ou o diagrama de Voronoi	38

2.4.6	Algoritmo por <i>sweep</i> para gerar a triangulação de Delaunay e por <i>sweep</i> para gerar o diagrama de Voronoi	39
2.4.7	Algoritmos por <i>gift wrapping</i> para gerar a triangulação de Delaunay ou o diagrama de Voronoi	39
3	Metodologia	41
3.1	Classificação para o tipo de pesquisa	41
3.2	Ferramentas utilizadas	42
3.3	Métodos	42
4	Algoritmo de Green-Sibson para a geração da triangulação de Delaunay	44
4.1	Algoritmo de Lawson	47
4.2	Malhas obtidas com o algoritmo de Green-Sibson	47
5	Conclusões	51

LISTA DE FIGURAS

- 2.1 Dado um conjunto de vértices em (a), é construída uma triangulação de Delaunay, em (b), para esse conjunto de pontos. Triangulação de Delaunay para um conjunto de nove vértices. Em (c), os círculos que passam sobre os triângulos são círculos inscritos (circuncírculos) que passam pelos vértices de um triângulo. Não devem haver vértices interiores aos circuncírculos que passam sobre os triângulos para que seja atendida a condição de Delaunay. A figura foi adaptada de Nogueira e Gonzaga de Oliveira (2011a). 19
- 2.2 Dado um conjunto de pontos em (a), a saída apresentada em (b) é o fecho convexo para esse conjunto de pontos. A imagem foi retirada de Nogueira e Gonzaga de Oliveira (2011a). 20
- 2.3 Exemplos de arestas locais de Delaunay. 20
- 2.4 Em (a), ilustra-se uma aresta ilegal. Em (b), ilustra-se a troca de arestas e a maximização dos ângulos mínimos. 21
- 2.5 Em (a), não ocorre a triangulação de Delaunay, pois o ponto e é interior ao circuncírculo que passa por a , b e c . Em (b), ocorre a triangulação de Delaunay, pois o ponto e é exterior ao circuncírculo que passa por a , b e c . A imagem foi retirada de Nogueira e Gonzaga de Oliveira (2011a). 22
- 2.6 Exemplo para a não ocorrência da triangulação de Delaunay, pois a soma dos ângulos α e γ resulta em um ângulo maior que 180° . A imagem foi retirada de Nogueira e Gonzaga de Oliveira (2011a). 23
- 2.7 Ocorre a triangulação de Delaunay, pois e é exterior ao circuncírculo que passa por a , b e c . A imagem foi retirada de Nogueira e Gonzaga de Oliveira (2011a). 23

2.8	Exemplo para a ocorrência da triangulação de Delaunay, pois e pertence ao circuncírculo que passa por a, b e c . A imagem foi retirada de Nogueira e Gonzaga de Oliveira (2011a).	24
2.9	Em (a), nota-se um caso de $Determinante(a,b,c,e) > 0$. Em (b), observa-se um caso que contém o plano H que passa por \bar{a}, \bar{b} e \bar{c} . Note que \bar{e} está abaixo do plano que passa por $\triangle \bar{a}\bar{b}\bar{c}$. A Figura (b) é adaptada de Vigneron (2004).	25
2.10	Em (a), verifica-se um caso de $Determinante(a,b,c,e) < 0$. Em (b), observa-se um caso que contém o plano H que passa por \bar{a}, \bar{b} e \bar{c} . Observe que \bar{e} está acima do plano que passa por $\triangle \bar{a}\bar{b}\bar{c}$. A Figura (b) é adaptada de Vigneron (2004)	25
2.11	Em (a), verifica-se um caso de $Determinante(a,b,c,e) = 0$. Em (b), observa-se o caso que contém o plano H que passa por \bar{a}, \bar{b} e \bar{c} . Observe que \bar{e} pertence ao plano que passa por $\triangle \bar{a}\bar{b}\bar{c}$. A Figura (b) é adaptada de Vigneron (2004)	26
2.12	O ponto e não é visível à aresta \bar{ac} por causa da <i>aresta restrita</i> \bar{ab} . Figura adaptada de Nogueira e Gonzaga de Oliveira (2011a).	27
2.13	Propriedade do confinamento do círculo mínimo. Em (a), não ocorre a triangulação de Delaunay, pois há triângulos que rompem o teste do circuncírculo. Em (b), note que, após a troca da aresta inválida, há uma triangulação de Delaunay e ocorre uma minimização do círculo de confinamento que contém os triângulos.	27
2.14	Decomposição do espaço proposta por Descartes. A decomposição do espaço se assemelha a um diagrama de Voronoi. A imagem foi retirada de Descartes (1644, pág. 55).	29

2.15	Triangulação de Delaunay e diagrama de Voronoi. Representação da dualidade entre ambos.	30
2.16	Exemplo para eixo medial.	32
4.1	Exemplo do processo de execução do algoritmo de Green-Sibson. Em (a), tem-se a malha inicial, com a inserção de um novo ponto p . Em (b), ocorre a criação de novas arestas. Em (c), ocorrem os testes dos circuncírculos. Em (d), ocorre trocas de arestas para a geração da triangulação de Delaunay. Em (e), ocorre a inserção de um novo ponto p . Em (f), ocorre a divisão da aresta que contém p . Em (g), ocorrem os testes dos circuncírculos. Em (h), ocorre trocas de arestas para a geração da triangulação de Delaunay. . . .	45
4.2	Triangulação de Delaunay para um conjunto de cinco mil pontos. . . .	49
4.3	Triangulação de Delaunay com circuncírculos.	49
4.4	Triangulação de Delaunay com cem pontos e o diagrama de Voronoi correspondente.	50

LISTA DE TABELAS

2.1	Complexidade dos algoritmos por divisão e conquista para a triangulação de Delaunay.	34
2.2	Complexidade de algoritmos por inserção incremental de pontos para a triangulação de Delaunay.	36
2.3	Complexidade de algoritmos por inserção incremental de pontos para o diagrama de Voronoi.	36
2.4	Complexidade dos algoritmos por construção incremental para a triangulação de Delaunay.	37
2.5	Complexidade dos algoritmos por construção incremental para o diagrama de Voronoi.	38
2.6	Tempo de execução dos algoritmos que geram o diagrama de Voronoi por <i>lift mapping</i>	39

1 INTRODUÇÃO

Este trabalho trata da geração de malhas triangulares. Esse tópico compõe a vasta quantidade de temas de pesquisa abordados em geometria computacional. Grosso modo, em geometria computacional, estudam-se algoritmos e suas complexidades para a solução de problemas geométricos. Uma área de pesquisa intensa na geometria computacional é a geração de malhas. Em especial, as malhas triangulares são as mais adequadas para diversos domínios computacionais.

A triangulação de Delaunay permite a obtenção de triângulos cujos ângulos máximos da triangulação são minimizados. A utilização de uma malha cujos elementos mínimos são maximizados pode levar a bons resultados nos métodos que utilizam essa malha. A aplicação da triangulação de Delaunay pode contribuir no desenvolvimento de esquemas numéricos em uma grande variedade de disciplinas. Também é apresentado o diagrama de Voronoi, sendo que este diagrama é uma estrutura dual da triangulação de Delaunay.

Será mostrado, ainda, o algoritmo de Green-Sibson para a construção da triangulação de Delaunay. Após a descrição desse algoritmo, serão apresentados os resultados das execuções do algoritmo de Green-Sibson para diferentes conjuntos de dados. Será mostrada também a malha resultante ao utilizar esse algoritmo.

1.1 Objetivos

O objetivo deste trabalho é apresentar a triangulação de Delaunay e as propriedades dessa triangulação. Além disso, será apresentado o diagrama de Voronoi, que é a estrutura dual da triangulação de Delaunay.

Os algoritmos propostos para a geração dessas duas estruturas serão apresentados. O algoritmo de Green e Sibson (1977) será descrito para a geração da tri-

angulação de Delaunay. Finalmente, as malhas geradas ao utilizar esse algoritmo serão apresentadas.

1.2 Motivações

O uso de malhas pode ser uma maneira interessante para obtenção de soluções estimadas para simulação de problemas físicos. Isso porque existem situações em que encontrar uma solução exata para um dado problema não é possível ou é inviável.

Malhas em que não é necessário que os elementos que a compõem possuam formato regular apresentam características interessantes, pois são adaptáveis a geometrias diversas. Essas malhas são classificadas como malhas irregulares.

Uma malha irregular que apresenta resultados interessantes ao ser utilizada é a triangulação de Delaunay. Em conjunto com o diagrama de Voronoi, a triangulação de Delaunay pode ser utilizada na modelagem de domínios diversos.

Um algoritmo para a construção da triangulação de Delaunay é o algoritmo de Green-Sibson. O algoritmo de Green-Sibson foi o primeiro algoritmo por inserção incremental de pontos para a geração do diagrama de Voronoi. Esse algoritmo foi utilizado como fundamento para o algoritmo de Watson (1981), Bowyer (1981) e Sloan (1987). O algoritmo de Green-Sibson foi implementado neste trabalho.

1.3 Organização do Trabalho

Este trabalho é dividido em quatro partes, que são referencial teórico, metodologia, resultados e conclusão.

O referencial teórico é apresentado no capítulo 2. Já a metodologia adotada para a elaboração do trabalho é apresentada no capítulo 3. Os resultados obtidos são encontrados no capítulo 4. Conclusões para este trabalho podem ser encontradas no capítulo 5.

2 REFERENCIAL TEÓRICO

2.1 Geração de malhas

Uma das áreas estudadas em geometria computacional é o processo de geração de malhas. Similarmente a Floriani, Kobbelt e Puppo (2004), considere M como um conjunto finito de células conectadas no espaço Euclidiano E^2 homeomórficas a um disco fechado. Então, M será uma *malha* bidimensional se e, somente se, os interiores de qualquer par de células bidimensionais de M são disjuntos. Além disso, qualquer célula (bidimensional) de M possui limite com, no mínimo, uma célula (bidimensional) de M . Ao haver homeomorfismo entre as células, tem-se que há uma função contínua entre os espaços topológicos que têm uma função contínua inversa. Homeomorfismos são mapeamentos que preservam todas as propriedades topológicas de um dado espaço. A geração de malhas contribui na solução de problemas oriundos de Matemática, Ciência da Computação e Engenharia.

A geração de malhas é um componente fundamental para a simulação computacional de problemas físicos e de engenharia. No processo de geração de malha, encontra-se uma divisão apropriada para um domínio contínuo.

Malhas podem ser utilizadas para simulações de problemas físicos e de engenharia. A seguir, serão apresentados métodos para desenvolvimento ou análise de problemas físicos ou de engenharia, introduzindo o uso de malhas computacionais. Segundo Maliska (2004), existem, fundamentalmente, três tipos de resoluções de problemas:

- métodos analíticos,
- métodos numéricos ou (experimentação numérica),
- experimentação em laboratório.

Segundo Maliska (2004), métodos analíticos e métodos numéricos são desenvolvidos com o objetivo de se resolver equações diferenciais que formam um modelo matemático. Porém, segundo o mesmo autor, métodos analíticos podem ser aplicados em geometrias simples, cujas condições de contorno são também simples. Já a utilização de experimentações numéricas, segundo Maliska (2004), pode ser aplicado a diversos problemas de simulação, pois esses métodos podem ser adaptáveis a condições de contornos gerais e a geometrias complexas. A experimentação em laboratório é relevante, pois trata da configuração real. Mas, em algumas situações, sua utilização é inviável. Maliska (2004) afirma que a tendência é realizar experimentos sofisticados em laboratório e esses resultados são utilizados para a elaboração de modelos matemáticos e numéricos, na investigação e entendimento de fenômenos e na avaliação final de um projeto.

Exemplos de métodos numéricos para a solução de equações diferenciais parciais são o método dos elementos finitos, o método das diferenças finitas e o método dos volumes finitos. De maneira similar à apresentada por Teng e Wong (2000), a seguir, serão apresentados passos básicos seguidos, normalmente, para as simulações numéricas, com enfoque na geração de malha.

1. **Modelagem matemática:** definição de um domínio e de uma equação diferencial sobre o domínio que representa o problema.
2. **Modelagem geométrica:** aproximação do domínio contínuo com uma descrição discreta.
3. **Aproximação numérica:** construção de um sistema linear ou não linear sobre a malha com a utilização de um método numérico aplicado a uma equação diferencial.
4. **Solução numérica:** resolução de um sistema de equações e realização da estimativa do erro da solução.

5. **Refinamento adaptativo:** se necessário, realizar o refinamento da malha e retornar ao passo 2.

Segundo Maliska (2004), existem dois níveis de erros que podem estar presentes na solução numérica. No primeiro nível, encontram-se os erros numéricos. Esses erros ocorrem devido a uma solução inadequada da equação diferencial. Já no segundo nível, encontram-se os erros de utilização inadequada de equações diferenciais para a modelagem do problema. Um dos métodos para a geração de malhas é utilizando triangulações.

2.2 Introdução à triangulação de Delaunay

Nesta seção, apresenta-se a triangulação de Delaunay. Descrições e propriedades da triangulações de Delaunay apresentadas nesta seção também são encontradas em Nogueira e Gonzaga de Oliveira (2011a), Nogueira e Gonzaga de Oliveira (2011b), Nogueira e Gonzaga de Oliveira (2012).

Uma triangulação de Delaunay (TD) para um conjunto P de vértices deve atender à condição de Delaunay, que é: $TD(P)$ é uma triangulação de Delaunay, tal que nenhum vértice de P permanece dentro do circuncírculo de qualquer triângulo em $TD(P)$. Na Figura 2.1, pode-se observar um exemplo para uma triangulação de Delaunay para um conjunto de nove vértices. Dado um conjunto de vértices, que pode ser observado na Figura 2.1a, na Figura 2.1b, pode-se observar a triangulação de Delaunay obtida para esse conjunto de pontos. Na Figura 2.1c, pode-se observar os triângulos com seus circuncírculos correspondentes.

A triangulação de Delaunay maximiza o ângulo mínimo de todo triângulo da triangulação. Essa propriedade é conhecida como MaxMin. Segundo Shewchuk (1997, pág. 18), a propriedade MaxMin foi inicialmente notada por Lawson (1977) e essa propriedade contribuiu na popularização da triangulação de Delaunay para

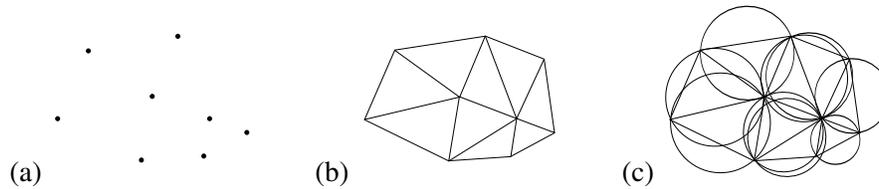


Figura 2.1: Dado um conjunto de vértices em (a), é construída uma triangulação de Delaunay, em (b), para esse conjunto de pontos. Triangulação de Delaunay para um conjunto de nove vértices. Em (c), os círculos que passam sobre os triângulos são círculos inscritos (circuncírculos) que passam pelos vértices de um triângulo. Não devem haver vértices interiores aos circuncírculos que passam sobre os triângulos para que seja atendida a condição de Delaunay. A figura foi adaptada de Nogueira e Gonzaga de Oliveira (2011a).

a geração de malhas. A propriedade MaxMin, segundo Shewchuk (1997, pág. 18) não pode ser estendida para dimensões maiores que dois.

Uma triangulação é estritamente de Delaunay se todas as arestas que a compõem são *arestas locais* de Delaunay. Segundo Edelsbrunner (2000), uma aresta de Delaunay é local se:

- pertencer somente a um triângulo e pertencer à fronteira do fecho convexo da triangulação. O fecho convexo para um conjunto de pontos no plano é a menor região convexa no \mathfrak{R}^2 que contém o conjunto P . Na Figura 2.2a, pode-se observar um conjunto de pontos. Na Figura 2.2b, encontra-se o fecho convexo para esse conjunto de pontos; ou
- é compartilhada por dois triângulos, digamos $\triangle abc$ e $\triangle abe$ e e está fora do circuncírculo que passa por a , b e c .

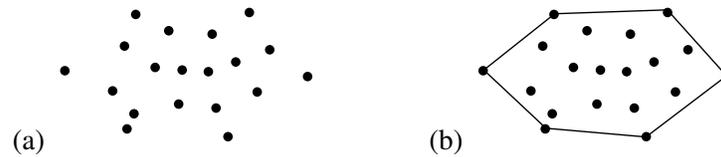


Figura 2.2: Dado um conjunto de pontos em (a), a saída apresentada em (b) é o fecho convexo para esse conjunto de pontos. A imagem foi retirada de Nogueira e Gonzaga de Oliveira (2011a).

Considere a Figura 2.3. Na Figura 2.3a, a aresta \overline{ab} é local de Delaunay, pois \overline{ab} pertence a somente a um triângulo e esse triângulo pertence à fronteira do fecho convexo da triangulação. Na Figura 2.3b, a aresta \overline{ab} é local de Delaunay, pois \overline{ab} é compartilhada por dois triângulos e e está fora do circuncírculo que passa por a , b e c .

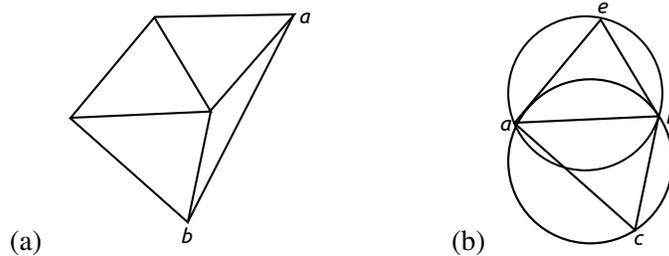


Figura 2.3: Exemplos de arestas locais de Delaunay.

Um triângulo da borda é um triângulo que contém uma aresta que está na fronteira da triangulação de Delaunay. Um triângulo da borda sempre será um triângulo de Delaunay. Isso porque o circuncírculo que passa sobre qualquer triângulo da borda nunca conterá um ponto da triangulação em seu interior. Isso torna uma triangulação de Delaunay não necessariamente composta somente por triângulos de boa qualidade, uma vez que uma triangulação de Delaunay pode conter triângulos de má qualidade nas bordas.

Caso uma aresta não seja localmente de Delaunay, uma maneira utilizada nos algoritmos para transformá-la em uma aresta válida para a triangulação de Delau-

nação é a troca (*flip*) dessa aresta. Para a realização da troca de arestas, verifica-se o quadrângulo formado pelos pontos a , b , c e e , se \overline{ab} é uma aresta local de Delaunay. Caso não seja, a aresta \overline{ab} é trocada por \overline{ce} . Caso a troca nas arestas melhore a triangulação local, a primeira aresta é considerada ilegal para a triangulação de Delaunay. Na Figura 2.4, pode ser observado uma troca na aresta inválida para a triangulação de Delaunay.

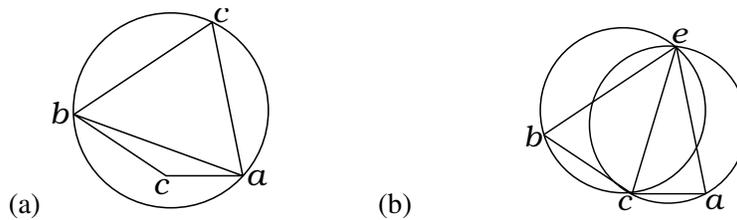


Figura 2.4: Em (a), ilustra-se uma aresta ilegal. Em (b), ilustra-se a troca de arestas e a maximização dos ângulos mínimos.

A seguir, serão apresentadas propriedades e métodos de melhoramento da triangulação de Delaunay. Algumas dessas propriedades são baseadas em Barth (1995, pág. 20). Convencionou-se que pontos são representados por letras minúsculas e conjuntos de pontos são representados por letras maiúsculas.

Propriedade 1.

A triangulação de Delaunay é única, exceto em casos degenerados. Um caso degenerado ocorre quando quatro ou mais pontos são cocirculares. Quatro ou mais pontos são cocirculares quando pertencem a um mesmo circuncírculo. Por exemplo, quando houver exatamente quatro pontos no mesmo circuncírculo, a triangulação de Delaunay não é única. Para um caso como esse, as duas triangulações possíveis satisfazem a condição de Delaunay. Quando houver mais de quatro pontos pertencentes ao seu circuncírculo, não ocorre uma triangulação de Delaunay.

Propriedade 2.

No *critério de circuncírculo*, para que ocorra uma triangulação de Delaunay, é necessário que o circuncírculo que passa sobre qualquer triângulo não contenha pontos em seu interior. Considere que o teste do circuncírculo verifica se o ponto e está interno ao $\triangle abc$. Considere ainda uma aresta \overline{bc} compartilhada pelos triângulos $\triangle abc$ e $\triangle bce$. Na Figura 2.5a, pode ser observado um ponto interior ao circuncírculo de a, b e c . Na Figura 2.5b, pode-se observar o teste do circuncírculo aplicado no $\triangle abc$ sem pontos em seu interior.

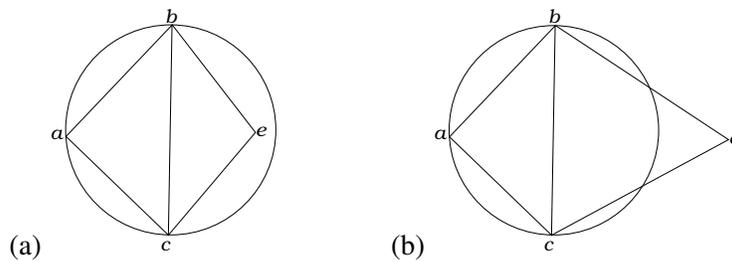


Figura 2.5: Em (a), não ocorre a triangulação de Delaunay, pois o ponto e é interior ao circuncírculo que passa por a, b e c . Em (b), ocorre a triangulação de Delaunay, pois o ponto e é exterior ao circuncírculo que passa por a, b e c . A imagem foi retirada de Nogueira e Gonzaga de Oliveira (2011a).

A aplicação prática do teste do circuncírculo é escolher as duas combinações que determinem dois triângulos cuja soma dos ângulos mínimos seja a máxima. A seguir, há duas maneiras de verificação do teste do circuncírculo.

1. Soma dos ângulos opostos a uma aresta.

Considere uma aresta \overline{bc} compartilhada pelos triângulos $\triangle abc$ e $\triangle bce$. Quando realizada a soma dos ângulos opostos a \overline{bc} , digamos α e γ , são três as classificações possíveis dessa soma, dadas a seguir.

- Quando a soma dos ângulos α e γ for maior que 180° , não haverá uma triangulação de Delaunay. Essa propriedade é observada na Figura 2.6: a soma dos ângulos α e γ resulta em um ângulo maior que 180° .

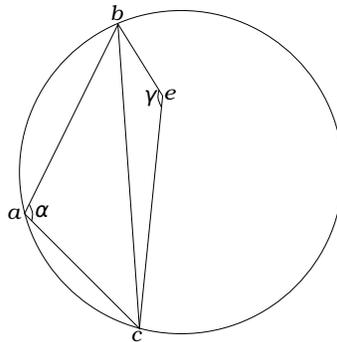


Figura 2.6: Exemplo para a não ocorrência da triangulação de Delaunay, pois a soma dos ângulos α e γ resulta em um ângulo maior que 180° . A imagem foi retirada de Nogueira e Gonzaga de Oliveira (2011a).

- Quando a soma dos ângulos α e γ for menor que 180° , haverá uma triangulação de Delaunay. Essa propriedade pode ser observada na Figura 2.7: a soma dos ângulos α e γ é menor que 180° .

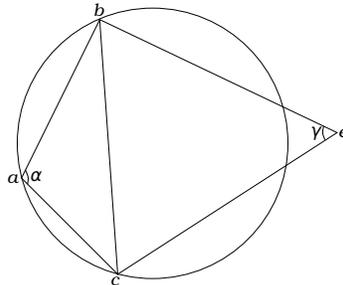


Figura 2.7: Ocorre a triangulação de Delaunay, pois e é exterior ao circuncírculo que passa por a , b e c . A imagem foi retirada de Nogueira e Gonzaga de Oliveira (2011a).

- Quando a soma dos ângulos α e γ for igual a 180° , os pontos são cocirculares e haverá uma triangulação de Delaunay. Na Figura 2.8, esse caso pode ser observado.

2. Resolução por determinante.

Esse método é apresentado em Guibas e Stolfi (1985) e baseia-se nas coordenadas dos pontos a , b , c e e .

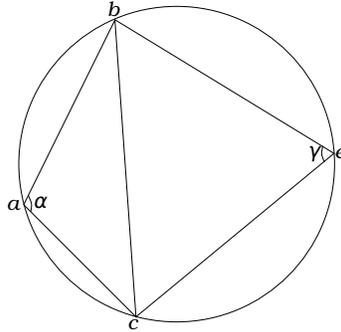


Figura 2.8: Exemplo para a ocorrência da triangulação de Delaunay, pois e pertence ao circuncírculo que passa por a , b e c . A imagem foi retirada de Nogueira e Gonzaga de Oliveira (2011a).

$$Determinante(a,b,c,e) = \begin{vmatrix} x_a & y_a & x_a^2 + y_a^2 & 1 \\ x_b & y_b & x_b^2 + y_b^2 & 1 \\ x_c & y_c & x_c^2 + y_c^2 & 1 \\ x_e & y_e & x_e^2 + y_e^2 & 1 \end{vmatrix}$$

São três os resultados possíveis do determinante. Nas Figuras 2.9b, 2.10b e 2.11b, considere que $\bar{a} = (a_x, a_y, a_x^2 + a_y^2)$, $\bar{b} = (b_x, b_y, b_x^2 + b_y^2)$, $\bar{c} = (c_x, c_y, c_x^2 + c_y^2)$, $\bar{e} = (e_x, e_y, e_x^2 + e_y^2)$, H é um plano que passa por \bar{a} , \bar{b} , \bar{c} e, no terceiro caso, H também passa por \bar{e} . Essas figuras são baseadas em Vigneron (2004).

- $Determinante(a,b,c,e) > 0$: o quarto ponto e está dentro do circuncírculo de $\triangle abc$. Nesse caso, não ocorre a triangulação de Delaunay. Na Figura 2.9, esse caso pode ser observado.
- $Determinante(a,b,c,e) < 0$: o quarto ponto e está fora do circuncírculo de $\triangle abc$. Nesse caso, ocorre a triangulação de Delaunay. Na Figura 2.10, pode ser observado o ponto e exterior ao circuncírculo de $\triangle abc$.
- $Determinante(a,b,c,e) = 0$: o quarto ponto e pertence ao circuncírculo. Nesse caso, ocorre a triangulação de Delaunay. Na Figura 2.11, esse caso pode ser observado.

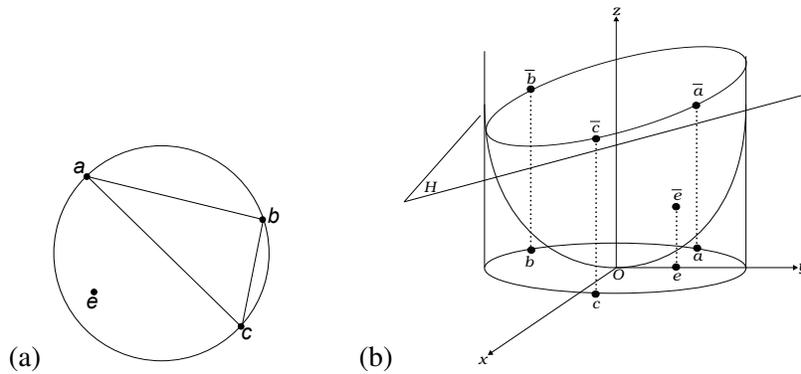


Figura 2.9: Em (a), nota-se um caso de $Determinante(a,b,c,e) > 0$. Em (b), observa-se um caso que contém o plano H que passa por \bar{a} , \bar{b} e \bar{c} . Note que \bar{e} está abaixo do plano que passa por $\triangle \bar{a}\bar{b}\bar{c}$. A Figura (b) é adaptada de Vigneron (2004).

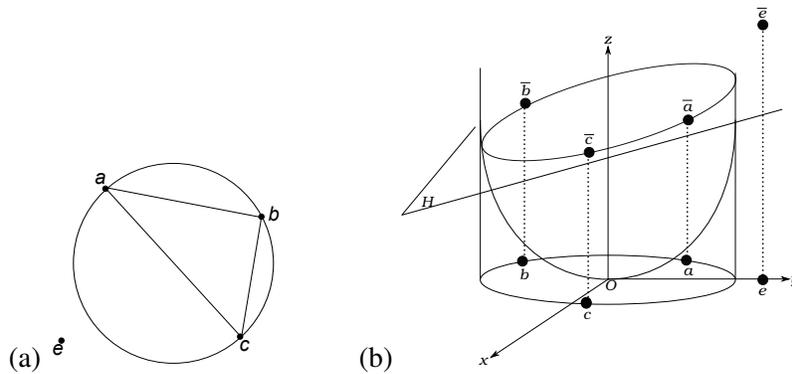


Figura 2.10: Em (a), verifica-se um caso de $Determinante(a,b,c,e) < 0$. Em (b), observa-se um caso que contém o plano H que passa por \bar{a} , \bar{b} e \bar{c} . Observe que \bar{e} está acima do plano que passa por $\triangle \bar{a}\bar{b}\bar{c}$. A Figura (b) é adaptada de Vigneron (2004)

Propriedade 3.

Sibson (1978) observou que as triangulações de Delaunay maximizam o ângulo mínimo de qualquer triângulo, chamada de propriedade MaxMin. Para isso, utiliza-se a propriedade MaxMin a fim de que os ângulos mínimos de uma triangulação sejam maximizados. Essa propriedade pode ser alcançada ao longo de

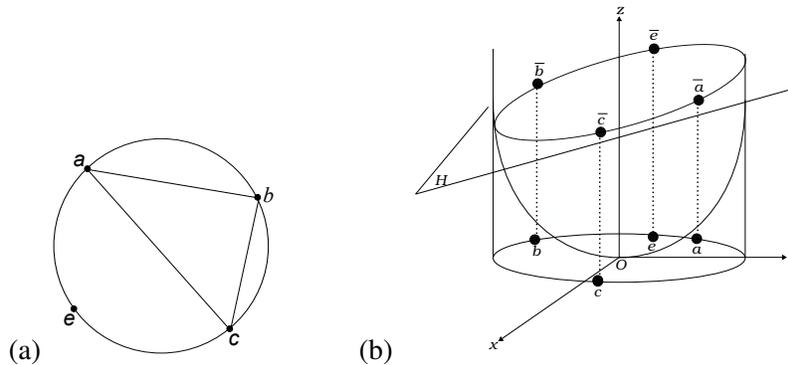


Figura 2.11: Em (a), verifica-se um caso de $\text{Determinante}(a,b,c,e) = 0$. Em (b), observa-se o caso que contém o plano H que passa por \bar{a} , \bar{b} e \bar{c} . Observe que \bar{e} pertence ao plano que passa por $\triangle \bar{a}\bar{b}\bar{c}$. A Figura (b) é adaptada de Vigneron (2004)

toda triangulação por meio de troca das arestas inválidas para a triangulação de Delaunay.

Propriedade 4.

Em uma triangulação de Delaunay *restrita*, certas arestas são descritas *a priori*. Uma triangulação de Delaunay é restrita se e, somente se, para qualquer aresta a da malha, existe um círculo diametral (que passa pelos vértices de a) e esse círculo não contém outros vértices da triangulação que seja *visível* à aresta a . Um vértice e não será visível à aresta \bar{ac} , se existe algum círculo que passa por \bar{ac} que contenha um vértice e , mas entre o vértice e e a aresta \bar{ac} , há uma aresta restrita \bar{ab} . Além disso, caso seja traçado um segmento de reta que ligue a a e e c a e , ao menos um desses segmentos intercepta uma outra aresta da triangulação. Essa propriedade é conhecida como *círculo da aresta*. Na Figura 2.12, o ponto e não é visível à aresta \bar{ac} por causa da aresta restrita \bar{ab} .

Propriedade 5.

A triangulação de Delaunay é uma malha irregular. Entretanto, apresenta uma triangulação com irregularidade mínima. Veja Rippa (1990), para detalhes.

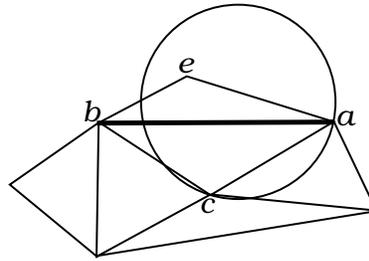


Figura 2.12: O ponto e não é visível à aresta \overline{ac} por causa da *aresta restrita* \overline{ab} . Figura adaptada de Nogueira e Gonzaga de Oliveira (2011a).

Propriedade 6.

Na *propriedade do confinamento do círculo mínimo*, em relação a toda a triangulação, a obtenção de triângulos com ângulos mínimos maximizados, ocorre a minimização do circuncírculo do triângulo. Essa propriedade é apresentada em Barth (1995, pág. 21).

Na Figura 2.13, pode ser observada essa propriedade. Na Figura 2.13a, mostra-se que não ocorre a triangulação de Delaunay, pois há triângulos que não passam no teste do circuncírculo. Na Figura 2.13b, note que, após a troca de arestas, obviamente, há a obtenção de uma triangulação de Delaunay e ocorre a minimização do círculo máximo que contém os vértices dos triângulos de Delaunay.

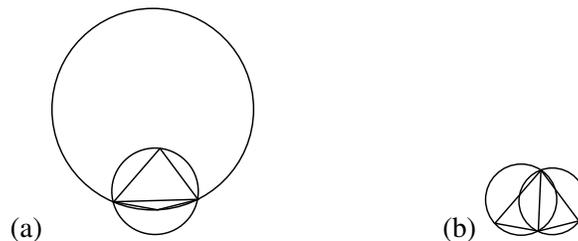


Figura 2.13: Propriedade do confinamento do círculo mínimo. Em (a), não ocorre a triangulação de Delaunay, pois há triângulos que rompem o teste do circuncírculo. Em (b), note que, após a troca da aresta inválida, há uma triangulação de Delaunay e ocorre uma minimização do círculo de confinamento que contém os triângulos.

Propriedade 7.

Na *propriedade do vizinho mais próximo*, tem-se que uma aresta formada ao se ligar um vértice ao seu vizinho mais próximo é uma aresta da triangulação de Delaunay. Essa propriedade faz com que a triangulação de Delaunay possa ser utilizada para resolver o problema do vizinho mais próximo. Por outro lado, as arestas do vizinho mais próximo não descrevem todas as arestas da triangulação de Delaunay. Essa propriedade também é apresentada em Barth (1995, pág. 22).

Note que o grafo do vizinho mais próximo para um conjunto P que contém n pontos vincula cada vértice com seu vizinho mais próximo. Esse grafo é um subgrafo da triangulação de Delaunay e pode ser computado em tempo $O(n \lg n)$. Veja Skiena (2008, pág. 582), para detalhes.

Propriedade 8.

Lamber (1994) mostrou que triangulações de Delaunay maximizam a média aritmética dos raios inscritos dos triângulos.

2.3 Diagrama de Voronoi

O diagrama de Voronoi foi nomeado dessa maneira por Delaunay (1934), pois Delaunay (1934) dedicou suas notas sobre *esferas vazias* a Voronoi (1908). O diagrama de Voronoi é utilizado em áreas diversas, tais como epidemiologia, geofísica, meteorologia, computação gráfica e robótica.

No século XVII, ocorreram estudos iniciais que utilizavam essa estrutura. No livro de Descartes (1644) sobre princípios de filosofia, Descartes (1644) afirmou que o sistema solar consistia de vértices. Na Figura 2.14, pode ser observada a decomposição do espaço proposta por Descartes. Essa decomposição do espaço se assemelha a um diagrama de Voronoi. Segundo Aurenhammer e Klein (1996),

nessa mesma figura, considera-se que cada região que subdivide o domínio é composta por matéria e essa matéria gira em torno de estrelas fixas. Conceitos semelhantes aos apresentados por Voronoi também foram discutidos por Dirichlet (1850).

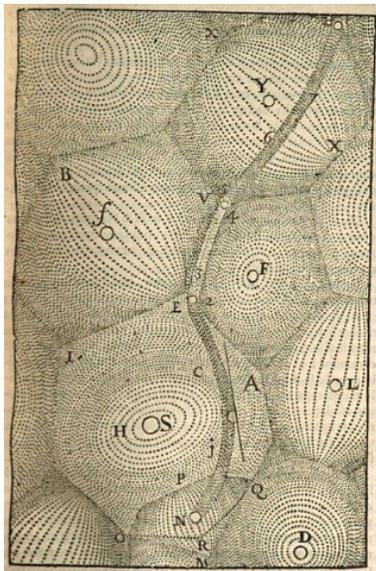


Figura 2.14: Decomposição do espaço proposta por Descartes. A decomposição do espaço se assemelha a um diagrama de Voronoi. A imagem foi retirada de Descartes (1644, pág. 55).

Um diagrama de Voronoi é um tipo específico de decomposição (em partições) de um espaço, determinado pelas distâncias para um conjunto de objetos no espaço. No espaço euclidiano, essas partições são polígonos convexos em torno de pontos geradores. Pode-se considerar a decomposição do diagrama de Voronoi, estritamente em relação à região finita $V_p \subset \mathbb{R}^2$, como $V_p = \{P_1, P_2, \dots, P_n\}$, em que P_1, P_2, \dots, P_n são polígonos de Voronoi (ou as partições ou as regiões do plano) e o restante do diagrama é delimitado por arestas infinitas. Considere um conjunto $P \subset \mathbb{R}^2$ de n pontos, isto é, $P = \{p_1, p_2, \dots, p_n\}$. Cada polígono do diagrama de Voronoi em V_p compreende a região de pontos mais próximos a determinado ponto gerador $p_i \in P$ do que qualquer outro ponto $p_j \in P$, em que $i \neq j$ e $1 \leq i, j \leq n$. Cada polígono de Voronoi P_i , para $1 \leq i \leq n$, é um conjunto de pontos $P_i = \{p \in$

$\mathbb{R}^2 : \{\exists p_i \in P\} (\forall p_j \in P) \|p - p_i\| \leq \|p - p_j\|$, para $i \neq j \wedge 1 \leq i, j \leq n$. Nessa definição, uma aresta é $\overline{ab} = \{p \in \mathbb{R}^2 : \|p - p_i\| = \|p - p_j\|, \text{ para } i \neq j \wedge 1 \leq i, j \leq n\}$ (NOGUEIRA; Gonzaga de Oliveira, 2011a).

Isso significa que a aresta \overline{ab} é o conjunto de pontos que delimitam os polígonos de Voronoi P_i e P_j na região finita $V_p \subset \mathbb{R}^2$. Ainda, os pontos a e b são circuncentros de triângulos adjacentes da triangulação de Delaunay que contém intersecção com os polígonos de Voronoi P_i e P_j . Note ainda que os segmentos de reta \overline{ab} e $\overline{p_i p_j}$ são retos. Veja a Figura 2.15. Nessa figura, pode ser observado o diagrama de Voronoi e a triangulação de Delaunay.

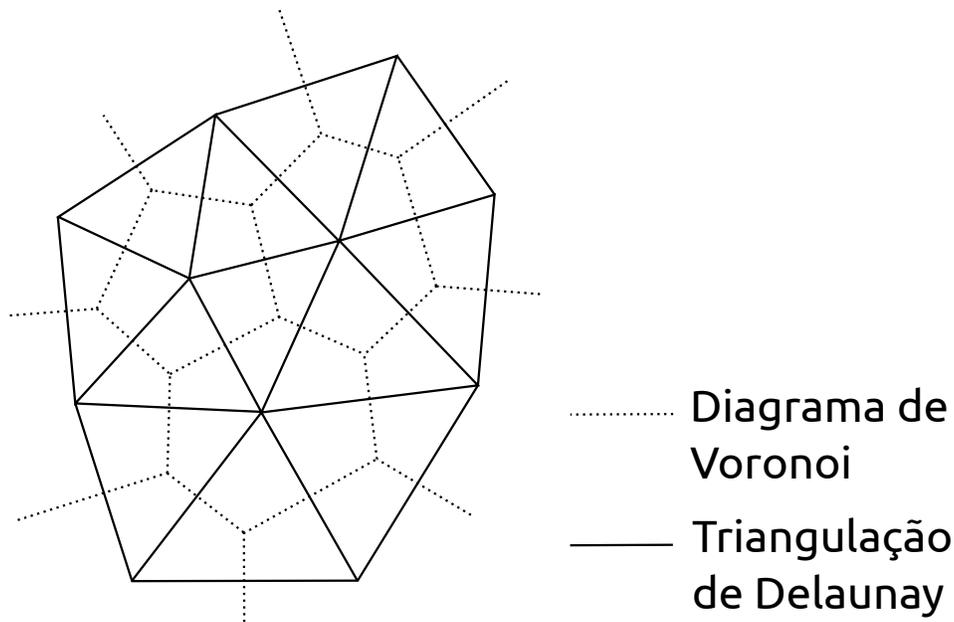


Figura 2.15: Triangulação de Delaunay e diagrama de Voronoi. Representação da dualidade entre ambos.

Uma triangulação de Delaunay só ocorrerá se dois pontos a serem conectados forem pontos terminais de um segmento de reta perpendicular a uma aresta no diagrama de Voronoi. Considerando-se que $\triangle abc$ pertença a uma triangulação de Delaunay, o centro do circuncírculo que passa por a , b e c corresponde a um vértice de Voronoi.

Com isso, o diagrama de Voronoi é definido como uma estrutura dual da triangulação de Delaunay. Dessa maneira, é possível a transformação da triangulação de Delaunay em diagrama de Voronoi e vice-versa. Dado o diagrama de Voronoi de um conjunto de n pontos, a triangulação de Delaunay pode ser obtida em tempo $O(n)$. O mesmo ocorre para a transformação da triangulação de Delaunay em diagrama de Voronoi. A utilização da triangulação de Delaunay e do diagrama de Voronoi também pode ocorrer em superfícies em que os pontos são móveis. Para detalhes sobre a triangulação de Delaunay e o diagrama de Voronoi em malhas móveis, veja Albers *et al.* (1998).

O grau dos vértices geradores da triangulação de Delaunay pode ser variável. Já o grau do vértice gerador do diagrama de Voronoi é fixo, exceto em casos em que há uma triangulação de Delaunay degenerada, em que quatro ou mais pontos são cocirculares.

A seguir, aborda-se a aplicação do diagrama de Voronoi em áreas diversas. Thiessen (1911) aplicou a estrutura proposta por Voronoi em problemas geográficos. Os polígonos de Voronoi foram utilizados por Thiessen para subdividir grandes áreas. Essas subdivisões foram utilizadas para gerar boas estimativas sobre as médias de precipitação. Pode-se encontrar a expressão polígonos de Thiessen com a mesma definição de polígonos de Voronoi. A utilização da expressão polígonos de Thiessen é, geralmente, associada a problemas geográficos.

Associa-se também o diagrama de Voronoi tridimensional aos físicos Weigner e Seitz. A célula de Weigner-Seitz é uma célula de Voronoi utilizada em estudos de materiais cristalinos em estado físico sólido. A estrutura de Voronoi passou a ser associada a esses físicos após a publicação de Wigner e Seitz (1934). Além disso, os diagramas de Voronoi podem ser utilizados na modelagem de estruturas policristalinas.

Uma aplicação para o diagrama de Voronoi é a computação do eixo medial. Um polígono simples é um polígono fechado, cujas arestas que o geram não se intersectam. Dado um objeto, representado por um polígono simples G , Lee (1982) define o eixo medial $M(G)$ como o conjunto de pontos $P=\{p_1, p_2, \dots, p_n\}$ internos a G de forma que há ao menos dois pontos no fecho convexo do objeto que são equidistantes a um particular ponto p e são mais próximos a p do que a qualquer outro ponto. As expressões esqueleto e eixo simétrico também referem-se ao eixo medial. De acordo com Lee (1982), para o cálculo do eixo medial, é utilizada uma função raio r , em que se define, para cada ponto que pertence ao eixo, sua distância para a borda do objeto. Utilizando-se das informações armazenadas pelo eixo medial e pela função raio, pode-se reconstruir a figura original por meio da união de todos os círculos de raio r centrados sobre todos os pontos que compõem o eixo. Um exemplo para eixo medial pode ser observado na Figura 2.16.

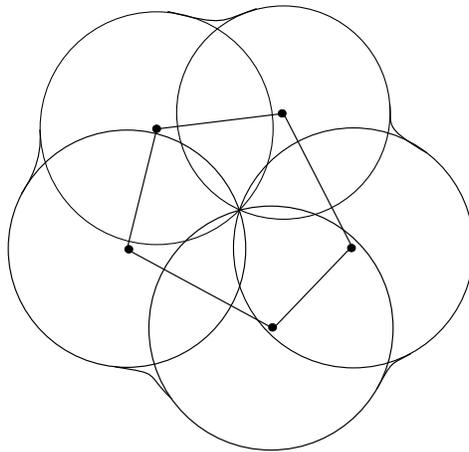


Figura 2.16: Exemplo para eixo medial.

Segundo Dey e Zhao (2003), o eixo medial permite uma representação compacta das formas. Aplica-se o eixo medial em áreas como processamento de imagens, visão computacional, modelagem sólida, geração de malhas, planejamento de movimento, robótica e animação.

Em algumas aplicações na mecânica das fraturas, prefere-se utilizar malhas de Voronoi se comparado à utilização de outras malhas para a discretização do domínio. Isso porque, segundo Jr. e Saito (1998), o diagrama de Voronoi possui propriedades estatísticas desejáveis e as fraturas se propagam, ao utilizar o diagrama de Voronoi, de maneira realística. Para uma revisão sobre fraturas lagrangeanas sobre uma estrutura de Voronoi, incluindo formulação do elemento e movimento de célula, veja Bishop (2009).

2.4 Algoritmos para gerar a triangulação de Delaunay e o diagrama de Voronoi

Nesta seção, serão apresentados algoritmos que geram a triangulação de Delaunay ou geram o diagrama de Voronoi. Esses algoritmos foram separados em diferentes abordagens. Essas abordagens referem-se a características comuns a esses algoritmos. Algoritmos por divisão e conquista são citados na subseção 2.4.1. Um algoritmo por mudança global de arestas é citado na subseção 2.4.2. Na subseção 2.4.3, são citados algoritmos que ocorrem por inserção incremental de pontos. Na subseção 2.4.4, são citados algoritmos que ocorrem por construção incremental. Na seção 2.4.5, são citados algoritmos que ocorrem por *lift mapping*. Na subseção 2.4.6, são citados algoritmos que ocorrem por *sweep hull* e por *sweep line*. Na subseção 2.4.7, são citados algoritmos que ocorrem por *gift wrapping*.

2.4.1 Algoritmos por *divisão e conquista* para gerar a triangulação de Delaunay ou o diagrama de Voronoi

Em algoritmos para a geração da triangulação de Delaunay ou do diagrama de Voronoi por *divisão e conquista*, ocorre uma divisão do conjunto inicial de pontos ou do domínio, em geral, em subconjuntos menores. A fase de conquista dos

algoritmos é realizada por recursão até que a subproblema contenha um ponto. No retorno da recursão, os subproblemas são combinados. Isso é realizado até que se obtenha a solução do problema inicial. Na Tabela 2.1, podem ser observados algoritmos por divisão e conquista que constroem a triangulação de Delaunay. O algoritmo proposto por Chew (1987) é utilizado para construir uma triangulação de Delaunay restrita.

Tabela 2.1: Complexidade dos algoritmos por divisão e conquista para a triangulação de Delaunay.

Algoritmo	Complexidade
Lee-Schachter por divisão e conquista	pior caso: $O(n \lg n)$ (LEE; SCHACHTER, 1980)
Guibas-Stolfi por divisão e conquista	pior caso: $O(n \lg n)$ (GUIBAS; STOLFI, 1985)
Chew por divisão e conquista	pior caso: $O(n \lg n)$ (CHEW, 1987)
Katajainen-Koppinen	pior caso: $O(n \lg n)$ (KATAJAINEN; KOPPINEN, 1988)
Dwyer por divisão e conquista	tempo esperado: $O(n \lg \lg n)$; pior caso: $O(n \lg n)$ (DWYER, 1989)
Cignoni-Montani-Scopigno	pior caso: $O(n^2)$ (CIGNONI; MONTANI; SCOPIGNO, 1998)

O algoritmo de Shamos e Hoey (1975) foi proposto para a construção do diagrama de Voronoi por divisão e conquista. Segundo Shamos e Hoey (1975), esse algoritmo é $O(n \lg n)$ no pior caso.

2.4.2 Algoritmo para gerar a triangulação de Delaunay por *mudança de arestas*

Um algoritmo em que ocorrem sucessivas *mudanças nas arestas* da triangulação para gerar uma triangulação de Delaunay foi proposto por Lawson (1977). Segundo Lawson (1977), esse algoritmo é $O(n^2)$.

O algoritmo de Lawson (1977) é útil em algoritmos em que é necessário manter a triangulação de Delaunay. Exemplos de algoritmos que utilizam o algoritmo de Lawson (1977) incluem o algoritmo de Green e Sibson (1977) e de Watson (1981).

2.4.3 Algoritmos por *inserção incremental de pontos* para gerar a triangulação de Delaunay ou o diagrama de Voronoi

Em algoritmos por *inserção incremental de pontos*, tem-se uma triangulação de Delaunay ou um diagrama de Voronoi e, a cada iteração, um novo ponto é inserido na estrutura. Em uma triangulação de Delaunay, para verificar se o ponto inserido é inválido para a triangulação de Delaunay, é necessário realizar o teste do circuncírculo.

Caso os pontos sejam adicionados de maneira aleatória, Guibas, Knuth e Sharir (1990) mostram que o número esperado de troca de arestas será linear, não importando como está a distribuição dos pontos. Algoritmos que utilizam essa abordagem para a geração da triangulação de Delaunay são listados na Tabela 2.2. Algoritmos que utilizam essa abordagem para a geração do diagrama de Voronoi são listados na Tabela 2.3.

Tabela 2.2: Complexidade de algoritmos por inserção incremental de pontos para a triangulação de Delaunay.

Algoritmo	Complexidade
Lee-Schachter por inserção incremental	pior caso: $O(n^2)$ (LEE; SCHACHTER, 1980)
Guibas-Stolfi por inserção incremental	pior caso: $O(n^2)$ (GUIBAS; STOLFI, 1985)
Green-Sibson	pior caso: $O(n^2)$ (SLOAN, 1987)
Watson	pior caso: $O(n^2)$ (SLOAN, 1987)
Sloan	tempo esperado: $O(n^{\frac{5}{4}})$ (SLOAN, 1987)
primeiro de Devillers	tempo de execução não encontrado (DEVILLERS, 1992)
Devillers-Meiser-Teillaud	tempo de execução não encontrado (DEVILLERS; MEISER; TEILLAUD, 1992)
Boissonnat-Teillaud	tempo esperado: $O(n \lg n)$ (BOISSONNAT; TEILLAUD, 1993)
Barth	pior caso: $O(n \lg n)$ (BARTH, 1995)
segundo de Devillers	tempo de execução não encontrado (DEVILLERS, 2002)
Zhou-Jones	pior caso: $O(n^2)$ (ZHOU; JONES, 2005)
Buchin-Mulzer por inserção incremental	tempo esperado: $O(n)$ (BUCHIN; MULZER, 2009)

Tabela 2.3: Complexidade de algoritmos por inserção incremental de pontos para o diagrama de Voronoi.

Algoritmo	Complexidade
Ohya-Iri-Murota	tempo de execução não encontrado (OHYA; IRI; MUROTA, 1984)
Bowyer	pior caso: $O(n^2)$ (SLOAN, 1987)
Tipper	pior caso: $O(n^2)$ (TIPPER, 1990)
Sugihara-Iri	tempo de execução não encontrado (SUGIHARA; IRI, 1992)

2.4.4 Algoritmos por *construção incremental* para gerar a triangulação de Delaunay ou o diagrama de Voronoi

Dado um conjunto de pontos definido previamente, em um algoritmo por *construção incremental*, a geração da triangulação de Delaunay é realizada por meio de sucessivas inserções desses pontos na triangulação. Ao contrário dos algoritmos por inserção incremental, em que novos pontos são inseridos a cada iteração no algoritmo, em algoritmos em que se utiliza a construção incremental, há um conjunto de pontos e a partir desse conjunto, será construída a triangulação de Delaunay. Os algoritmos que utilizam essa abordagem para construir a triangulação de Delaunay são listados na Tabela 2.4. Os algoritmos que constroem o diagrama de Voronoi por essa abordagem são apresentados na Tabela 2.5.

Tabela 2.4: Complexidade dos algoritmos por construção incremental para a triangulação de Delaunay.

Algoritmo	Complexidade
McCullagh-Ross	tempo de execução não encontrado (MCCULLAGH; ROSS, 1980)
Maus	tempo esperado: $O(n)$ (MAUS, 1984)
Cline-Renka	pior caso: $O(n^2)$ (SLOAN, 1987)
Guibas-Knuth-Sharir para triangulação de Delaunay	pior caso: $O(n \lg n)$ (GUIBAS; KNUTH; SHARIR, 1990)
Ruppert	(RUPPERT, 1995)
Su-Drysdale por construção incremental	tempo esperado: $O(n)$ (SU; DRYSDALE, 1996)
Isenburg-Liu-Shewchuk-Snoeyink	pior caso: $O(n^2)$ (ISENBURG <i>et al.</i> , 2006)
Leda	tempo de execução não encontrado (LEDA, 2008)
Buchin-Mulzer por construção incremental	tempo esperado: $O(\text{sort}(n))$ (BUCHIN; MULZER, 2011)

Tabela 2.5: Complexidade dos algoritmos por construção incremental para o diagrama de Voronoi.

Algoritmo	Complexidade
Brassel-Reif	tempo de execução não encontrado (BRASSEL; REIF, 1979)
Guibas-Knuth-Sharir para o diagrama de Voronoi	tempo esperado: $O(n \lg n)$ (GUIBAS; KNUTH; SHARIR, 1990)
Djidjev-Lingas	sob restrições, pode ocorrer em $O(n)$ (DJIDJEV; LINGAS, 1995)
Chew-Fortune	sob restrições, pode ocorrer em $O(n \lg \lg n)$ (CHEW; FORTUNE, 1997)

2.4.5 Algoritmos por *lift mapping* para gerar a triangulação de Delaunay ou o diagrama de Voronoi

Em algoritmos por *lift mapping*, os pontos que estão em uma estrutura de dimensão d são projetados para uma estrutura cuja dimensão seja $d+1$. Logo após essa projeção, calcula-se o fecho convexo desses pontos. O próximo passo é a projeção do fecho convexo para a dimensão d . O fecho convexo construído na estrutura de dimensão $d+1$ auxilia na construção da triangulação de Delaunay ou na construção do diagrama de Voronoi. Na Tabela 2.6, pode-se observar o tempo de execução assintótico dos algoritmos que geram o diagrama de Voronoi utilizando *lift mapping*. O algoritmo de Aggarwal *et al.* (1989) terá complexidade linear caso o conjunto de pontos consistirem dos vértices de um polígono convexo, dados em ordem em torno do polígono.

O algoritmo de Barber-Dobkin-Huhdanpa é utilizado para a geração da triangulação de Delaunay utilizando a técnica de *lift mapping*. Segundo Barber, Dobkin e Huhdanpa (1996), o tempo de execução desse algoritmo é proporcional ao tempo necessário para a construção do fecho convexo em uma estrutura $d+1$ dimensional.

Tabela 2.6: Tempo de execução dos algoritmos que geram o diagrama de Voronoi por *lift mapping*.

Algoritmo	Complexidade
Brown	pior caso: $O(n \lg n)$ (BROWN, 1979)
Aggarwal-Guibas-Saxe-Shor	tempo esperado: $O(n)$; tempo não encontrado para o pior caso (AGGARWAL <i>et al.</i> , 1989)

2.4.6 Algoritmo por *sweep* para gerar a triangulação de Delaunay e por *sweep* para gerar o diagrama de Voronoi

Em algoritmos por *sweep* (ou por varredura do fecho), ocorre uma propagação do fecho. Os pontos são incorporados na triangulação de acordo com uma ordenação prévia. Um algoritmo que utiliza essa abordagem é de Sinclair (2010). Segundo Sinclair (2010), para um conjunto P que contém n pontos no plano, esse algoritmo é $O(n \lg n)$.

Em algoritmos por *sweep* (ou linha de varredura), utiliza-se uma linha que percorre o plano. Quando a linha passa sobre um determinado ponto, esse ponto é incorporado ao diagrama de Voronoi. O algoritmo de Fortune (1986) utiliza essa técnica. Segundo Fortune (1986), esse algoritmo é $O(n \lg n)$, para n pontos no plano.

2.4.7 Algoritmos por *gift wrapping* para gerar a triangulação de Delaunay ou o diagrama de Voronoi

Considerando-se n pontos previamente definidos, em algoritmos por *gift wrapping*, inicialmente, descobre-se um triângulo que atenda à propriedade de Delaunay. Incrementalmente, triângulos de Delaunay válidos são encontrados. Cada novo triângulo é gerado considerando-se uma aresta pertencente a um triângulo

previamente descoberto. Em seguida, devem-se buscar novos pontos que possam ser unidos aos pontos finais dessa aresta para formar um novo triângulo cujo circuncírculo seja vazio.

Um algoritmo por *gift wrapping* foi proposto por Dwyer (1989) para a geração do diagrama de Voronoi. Segundo Dwyer (1989), o tempo esperado para esse algoritmo é $O(n)$, para n pontos. Um algoritmo semelhante ao algoritmo de Dwyer (1989) foi proposto por Su e Drysdale (1996), para a geração da triangulação de Delaunay. Segundo Su e Drysdale (1996), resultados empíricos mostram que esse algoritmo parece ser $O(n)$ para n , pontos distribuídos de maneira uniforme no plano.

3 METODOLOGIA

Neste capítulo, será explicada a metodologia utilizada para o desenvolvimento deste trabalho. Serão explicados os materiais utilizados para a elaboração desse trabalho e a forma de obtenção dos mesmos.

A realização da pesquisa ocorreu em laboratório. Para obtenção de informação, foram utilizados livros, artigos e periódicos. A principal base de pesquisa de periódicos foi a CAPES.

3.1 Classificação para o tipo de pesquisa

Quanto à natureza, essa pesquisa se caracteriza como uma pesquisa aplicada. Segundo Jung (2009), trabalhos teóricos e experimentais sobre fundamentos de fenômenos e fatos com finalidade de aplicação em particular adequam-se a uma pesquisa aplicada. Nesse trabalho, o uso de uma triangulação de Delaunay, das propriedades dessa triangulação e a aplicação de um algoritmo para a geração de uma triangulação de Delaunay faz com que essa pesquisa seja classificada como aplicada.

Quanto aos objetivos, essa pesquisa é classificada como descritiva, pois tem como finalidade observar, registrar e analisar os fenômenos ou sistemas técnicos de características, fatores e ou variáveis. Quanto aos procedimentos, essa pesquisa classifica-se como experimental. Isso porque assim como nesse trabalho, em uma pesquisa experimental ocorrem simulações e modelagens.

O local de realização da pesquisa é em laboratório. Isso porque as variáveis utilizadas que podem intervir no decorrer da pesquisa podem ser controladas. O tempo de aplicação do estudo é transversal, pois esse estudo é realizado em determinado instante de tempo.

Além disso, ocorre a aplicação de métodos quantitativos de investigação nessa pesquisa. Esses métodos permitem chegar a verdades universais. Sob esta ótica os resultados da pesquisa são reprodutíveis e generalizáveis (HAYATI; KARAMI; SLEE, 2006).

3.2 Ferramentas utilizadas

Para a geração das malhas que serão apresentadas no próximo capítulo, utilizou-se um computador HP[®] Core[™] i3-550 Processor 3.20GHz, 3.6Gb de memória RAM DDR3 1333MHz, 4Mb de cache. O sistema operacional utilizado foi o Ubuntu 12.04 LTS 64 bits com *kernel* versão 3.2.0-38-generic. Utilizou-se o CodeBlocks 10.5 com *plugin* para C/C++ para a implementação dos projetos computacionais.

Para a realização deste trabalho, foram estudados algoritmos que geram a triangulação de Delaunay ou o diagrama de Voronoi. Além disso, as características comuns a esses algoritmos e o tempo de execução para esses algoritmos foram agrupados. Para os algoritmos, buscou-se os tempos de execução e esses tempos foram mostrados no capítulo anterior.

3.3 Métodos

Para a geração das malhas, que serão apresentadas no próximo capítulo, utilizou-se o projeto computacional desenvolvido por Oliveira e Gonzaga de Oliveira (2012). O algoritmo de Green e Sibson (1977) foi utilizado para a geração das malhas computacionais. Esse algoritmo é descrito no próximo capítulo.

Como ocorre nos demais algoritmos por inserção incremental de pontos, o algoritmo de Green e Sibson (1977) parte de uma triangulação de Delaunay inicial.

Para esta implementação, a triangulação de Delaunay continha dois triângulos. A cada passo de tempo, um novo ponto era inserido na triangulação de Delaunay e o algoritmo de Green e Sibson (1977) era executado. O algoritmo encerrava a execução quando o número de pontos definido previamente pelo usuário era alcançado. Os resultados obtidos e a descrição para o algoritmo de Green e Sibson (1977) são apresentados no próximo capítulo.

4 ALGORITMO DE GREEN-SIBSON PARA A GERAÇÃO DA TRIANGULAÇÃO DE DELAUNAY

Neste capítulo, será apresentado o algoritmo de Green e Sibson (1977) para a geração da triangulação de Delaunay. Esse algoritmo foi o primeiro algoritmo proposto para gerar o diagrama de Voronoi ou a triangulação de Delaunay utilizando a técnica de inserção incremental de pontos. Além disso, o algoritmo de Green e Sibson (1977) foi utilizado como base para os algoritmos de Watson (1981), Bowyer (1981) e Sloan (1987).

O algoritmo de Green e Sibson (1977) foi proposto, inicialmente, por Green e Sibson (1977) para construir o diagrama de Voronoi. Segundo Green e Sibson (1977), esse algoritmo é $O(n^2)$.

Embora esse algoritmo foi sugerido, inicialmente, para a geração do diagrama de Voronoi, a ideia desse algoritmo também pode ser aplicada para a geração da triangulação de Delaunay. Essa abordagem utilizando a triangulação de Delaunay foi utilizada na explicação desse algoritmo e na implementação do algoritmo de Green-Sibson.

Para a utilização desse algoritmo, é necessário que se tenha, inicialmente, uma triangulação de Delaunay. O próximo passo para o algoritmo de Green-Sibson é a inserção de um ponto p nessa triangulação de Delaunay. Caso p posicione-se sobre uma aresta já existente, digamos \overline{ab} , suponha que essa aresta componha os triângulos $\triangle abc$ e $\triangle abe$. A aresta \overline{ab} será excluída e deverão ser geradas novas arestas que ligam p aos pontos do quadrângulo a, b, c e e . Caso contrário, se o ponto não cair em uma aresta já existente, ligam-se os vértices do triângulo que contém p a p . Em ambos os casos, é necessário realizar o teste do circuncírculo, após a geração de novas arestas. Nesse caso, utiliza-se o algoritmo de Lawson para a manutenção da malha. Esse algoritmo é detalhado na seção 4.1. Caso seja

necessário, haverá uma troca nas arestas que compõem a triangulação. O processo termina quando todos os pontos forem inseridos na triangulação e todas as arestas passarem no teste do circuncírculo.

Ao utilizar o algoritmo de Lawson (1977) para manutenção da malha, o algoritmo de Green-Sibson pode ocorrer em tempo $O(n^2)$. O algoritmo de Lawson (1977) ocorre em $O(n^2)$ quando há troca em todas as arestas que compõem a triangulação inicial para se obter uma triangulação de Delaunay. Na Figura 4.1, observa-se o processo de execução do algoritmo de Green-Sibson para uma triangulação de Delaunay. No algoritmo 1, é apresentado um pseudocódigo para o algoritmo de Green-Sibson.

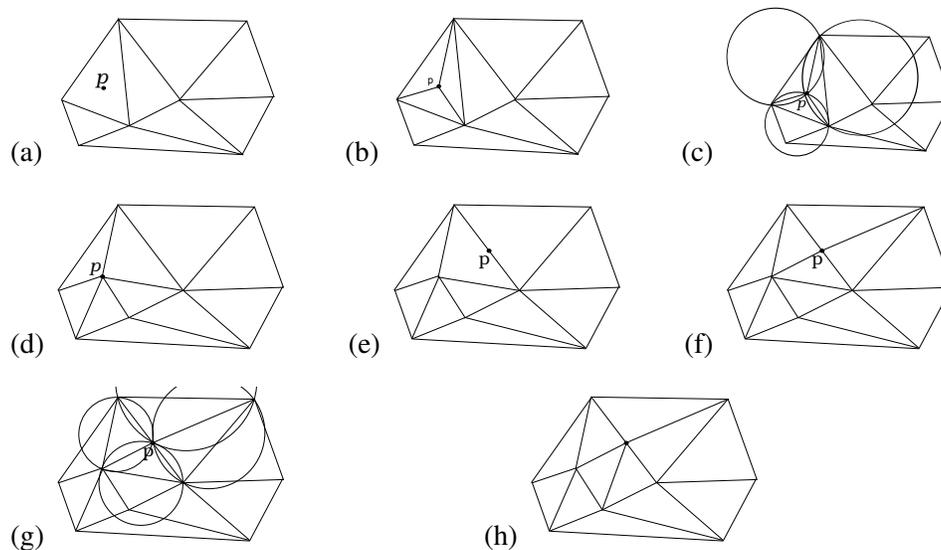


Figura 4.1: Exemplo do processo de execução do algoritmo de Green-Sibson. Em (a), tem-se a malha inicial, com a inserção de um novo ponto p . Em (b), ocorre a criação de novas arestas. Em (c), ocorrem os testes dos circuncírculos. Em (d), ocorre trocas de arestas para a geração da triangulação de Delaunay. Em (e), ocorre a inserção de um novo ponto p . Em (f), ocorre a divisão da aresta que contém p . Em (g), ocorrem os testes dos circuncírculos. Em (h), ocorre trocas de arestas para a geração da triangulação de Delaunay.

Algoritmo 1: Green-Sibson.

Entrada: triangulação de Delaunay T_P ; conjunto P de pontos, em que $P = \{p_1, p_2, \dots, p_n\}$.

Saída: triangulação de Delaunay alterada.

```

1 início
2   para (  $i \leftarrow 1$  até  $n$  ) faça
3     insira  $p_i$  em  $T_P$ ;
4     se (  $p_i$  cai em uma aresta  $\overline{ab}$  que pertence a um quadrângulo
5        $abcd$  de  $T_P$  ) então
6       remova  $\overline{ab}$  de  $T_P$ ;
7       insira  $\overline{ap_i}$ ,  $\overline{bp_i}$ ,  $\overline{cp_i}$  e  $\overline{dp_i}$  em  $T_P$ ;
8     senão
9       insira  $\overline{ap_i}$ ,  $\overline{bp_i}$  e  $\overline{cp_i}$  em  $T_P$ , em que  $a$ ,  $b$  e  $c$  são os vértices
10      do triângulo que contém  $p_i$ ;
11     fim-se;
12   para cada ( novo triângulo  $\triangle abc$  gerado ) faça
13     Lawson( $\triangle abc$ );
14   fim-para-cada;
15 fim-se;
16 retorna  $T_P$ ;
17 fim.
```

Na seção 4.1, é apresentado o algoritmo de Lawson, um algoritmo auxiliar para o algoritmo Green-Sibson na geração da triangulação de Delaunay. Na seção 4.2, são apresentadas as malhas geradas pela implementação do algoritmo de Green-Sibson.

4.1 Algoritmo de Lawson

Esse algoritmo foi proposto por Lawson (1977) e também é conhecido como algoritmo de *flip* de arestas. Esse algoritmo pode realizar uma mudança global de arestas de uma triangulação e é utilizado para construir ou para manter uma triangulação de Delaunay. Em geral, os algoritmos para a inserção de novos pontos em uma triangulação de Delaunay o utilizam para manter a triangulação de Delaunay (NOGUEIRA; Gonzaga de Oliveira, 2011).

O passo inicial para a realização do algoritmo de Lawson é a verificação de todas as arestas que compõem a triangulação. Se qualquer aresta que compõe a triangulação não é localmente de Delaunay, essa aresta sofrerá um *flip*. Para saber sobre o *flip* de arestas, leia a seção 2.2. O algoritmo de Lawson será executado enquanto houver arestas na triangulação a serem verificadas. Pode ser que, ao se realizar o *flip* de alguma aresta da triangulação, seja necessário realizar, novamente, o teste do circuncírculo para arestas já verificadas (NOGUEIRA; Gonzaga de Oliveira, 2011). No algoritmo 2, é apresentado um pseudocódigo para o algoritmo de Lawson.

4.2 Malhas obtidas com o algoritmo de Green-Sibson

Utilizou-se o projeto computacional implementado em Oliveira e Gonzaga de Oliveira (2012) para a geração das malhas a serem apresentadas a seguir. O objetivo do projeto computacional utilizado em Oliveira e Gonzaga de Oliveira (2012) é resolver a equação de Laplace por discretizações de volumes finitos com o diagrama de Voronoi e refinamento de Delaunay. Nesse projeto computacional, também foi implementado o algoritmo de Green-Sibson para a geração da triangulação de Delaunay. Alterou-se o projeto computacional de Oliveira e Gonzaga de Oliveira

Algoritmo 2: Lawson.

Entrada: triangulação T .

Saída: triangulação de Delaunay T modificada (se houver *flips*).

```

1 início
2   para cada ( aresta  $\overline{ab}$  de  $T$  ) faça
3     se (  $\overline{ab}$  não é local de Delaunay pelo teste do circuncírculo e
         $\overline{ab}$  pertence ao quadrângulo  $abce$  ) então
4       realize a troca da aresta  $\overline{ab}$  por  $\overline{ce}$ ;
5     fim-se;
6   fim-para-cada;
7   retorna  $T$ ;
8 fim.
```

(2012) para que o critério de parada, na geração da triangulação de Delaunay pelo algoritmo de Green-Sibson, fosse uma quantidade de pontos estabelecida *a priori* e para que o conjunto de pontos fosse gerado previamente de maneira aleatória.

Uma triangulação de Delaunay com 5000 pontos, obtida ao se utilizar o algoritmo de Green-Sibson, é apresentada na Figura 4.2. Na Figura 4.3, pode-se observar a triangulação de Delaunay para um conjunto de cem pontos. Nessa figura, pode-se observar, em verde, os circuncírculos correspondentes a cada um dos triângulos gerados.

Na Figura 4.4, pode-se observar uma triangulação de Delaunay para um conjunto de cem pontos. Além disso, nessa figura, pode-se observar, em linhas vermelhas, o diagrama de Voronoi correspondente a essa triangulação de Delaunay.

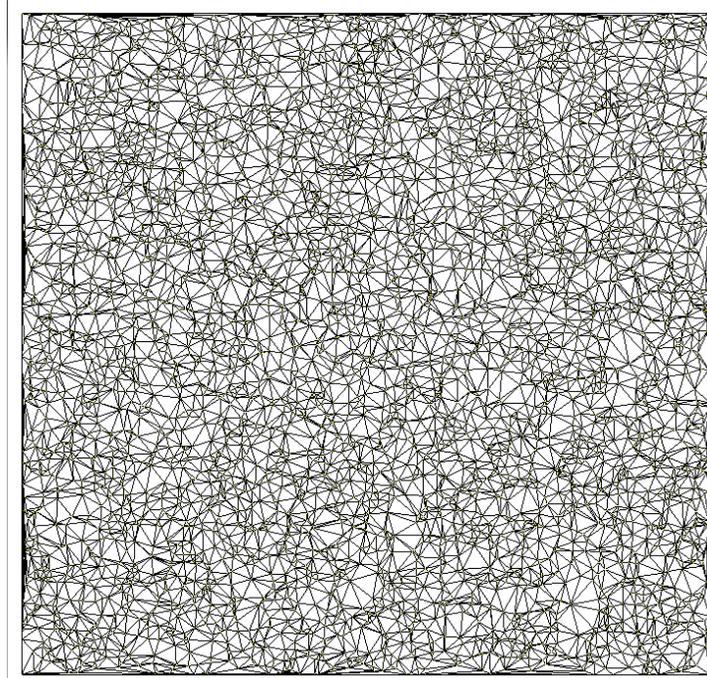


Figura 4.2: Triangulação de Delaunay para um conjunto de cinco mil pontos.

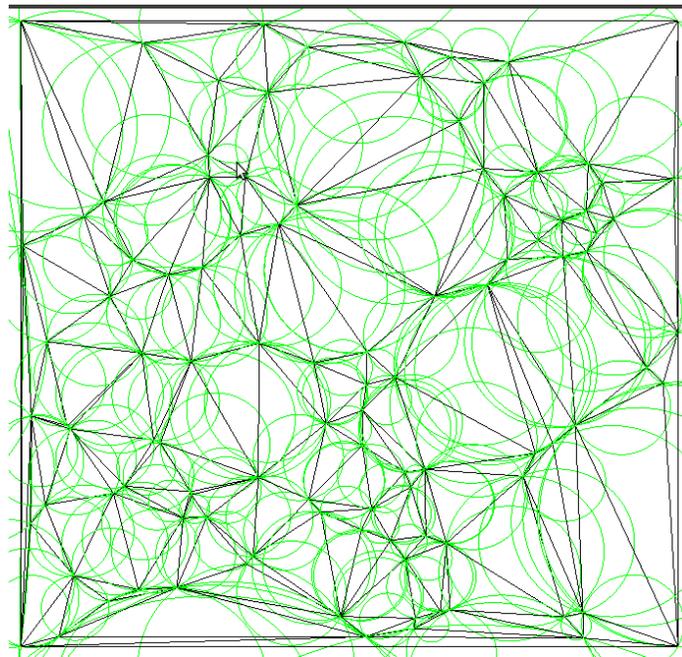


Figura 4.3: Triangulação de Delaunay com circuncírculos.

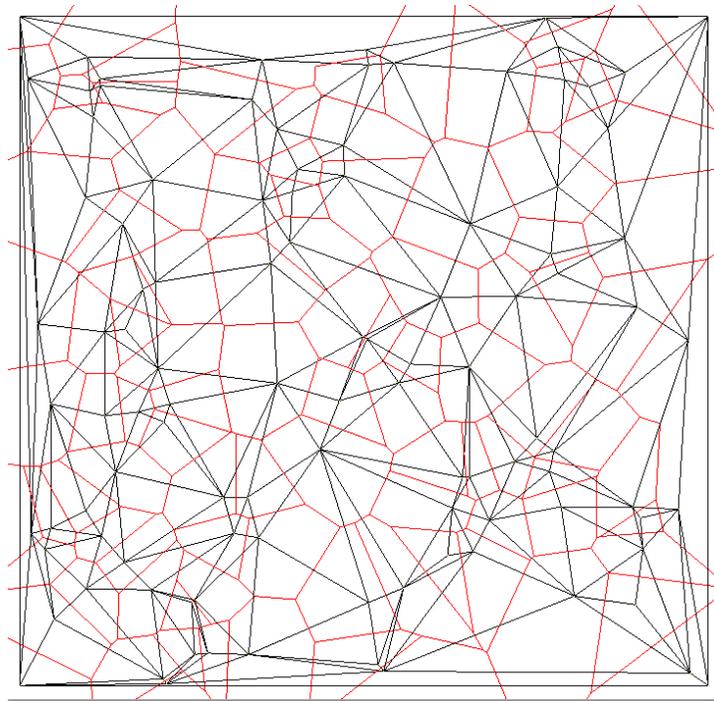


Figura 4.4: Triangulação de Delaunay com cem pontos e o diagrama de Voronoi correspondente.

5 CONCLUSÕES

Existem diversos métodos de criação de malha e, dentre esses métodos, neste trabalho, descreveu-se o processo de geração de malhas. Foi dado enfoque ao processo de geração de malha utilizando a triangulação de Delaunay. Além disso, foram apresentadas propriedades da triangulação de Delaunay e o diagrama de Voronoi. Algoritmos que geram essas estruturas foram abordados. Foi mostrado o algoritmo de Green e Sibson (1977) para a criação da triangulação de Delaunay e malhas resultantes ao se utilizar esse algoritmo.

Próximos passos referem-se a implementar alguns algoritmos descritos para a geração da triangulação de Delaunay e descrever as estruturas de dados que representam malhas triangulares. Pretende-se implementar os algoritmos que têm tempo esperado linear ou que as análises assintóticas não foram encontradas. Os algoritmos que se pretende codificar são o primeiro e o segundo algoritmos de Devillers, os algoritmos de Devillers-Meiser-Teillaud, o algoritmo de Buchin-Mulzer por inserção incremental, o algoritmo de Su-Drysdale por construção incremental, o algoritmo LEDA e o algoritmo de Aggarwal-Guibas-Saxe-Shor.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

AGGARWAL, A.; GUIBAS, L.; SAXE, J.; SHOR, P. A linear-time algorithm for computing the Voronoi diagram of a convex polygon. *Discrete and Computational Geometry*, Springer New York, v. 4, p. 591–604, 1989.

ALBERS, G.; GUIBAS, L. J.; MITCHELL, J. S. B.; ROOS, T. Voronoi diagrams of moving points. *International Journal of Computational Geometry and Applications*, v. 8, n. 3, 1998.

AURENHAMMER, F.; KLEIN, R. Voronoi diagrams. In: *Handbook of Computational Geometry*. SFB Report F003-092, TU Graz, Austria: Elsevier Science Publishing, 2000, 1996. p. 201–290.

BARBER, C. B.; DOBKIN, D. P.; HUHDANPA, H. The quickhull algorithm for convex hulls. *ACM Transactions on Mathematical Software*, v. 22, n. 4, p. 469 – 483, 1996.

BARTH, T. B. Aspects of unstructured grids and finite - volume solvers for the Euler and Navier-Stokes equations. *Von Karman Institute for Fluid Dynamics Lecture Series, NASA Ames Research Center*, 1995.

BISHOP, J. Simulating the pervasive fracture of materials and structures using randomly close packed Voronoi tessellations. *Computational Mechanics*, v. 44, p. 455–471, 2009.

BOISSONNAT, J.-D.; TEILLAUD, M. On the randomized construction of the Delaunay tree. *Theoretical Computer Science*, v. 112, p. 339–354, 1993.

BOWYER, A. Computing dirichlet tessellations. *The Computer Journal*, v. 24, n. 2, p. 162–166, 1981.

- BRASSEL, K.; REIF, D. A procedure to generate thiesen polygons. *Geographical Analysis*, Blackwell Publishing Ltd, v. 11, n. 3, p. 289–303, 1979.
- BROWN, K. Q. Voronoi diagrams from convex hulls. *Information processing letters*, v. 9, n. 5, p. 223–228, 1979.
- BUCHIN, K.; MULZER, W. Linear-time Delaunay triangulations simplified. In: *Proceedings of 25th European Workshop on Computational Geometry (EWCG)*. ULB, Brussels, Belgium: North-Holland Publishing Co., 2009. p. 235–238.
- BUCHIN, K.; MULZER, W. Delaunay triangulations in $O(\text{sort}(n))$ time and more. *J. ACM*, ACM, New York, NY, v. 58, n. 2, p. 1–27, 2011.
- CHEW, L.; FORTUNE, S. Sorting helps for Voronoi diagrams. *Algorithmica*, v. 18, p. 217–228, 1997.
- CHEW, L. P. Constrained Delaunay triangulations. In: *Proceedings of the third annual symposium on Computational geometry*. New York, NY: ACM, 1987. (SCG '87), p. 215–222.
- CIGNONI, P.; MONTANI, C.; SCOPIGNO, R. Dewall: A fast divide and conquer Delaunay triangulation algorithm in E^d . *Computer-aided Design*, v. 30, n. 5, p. 333–341, 1998.
- DELAUNAY, B. N. Sur la sphere vide. *Izvestia Akademii Nauk SSSR, Otdelenie Matematicheskikh i Estestvennykh Nauk*, v. 7, p. 793–800, 1934.
- DESCARTES, R. *Principia Philosophiae*. 3. ed. Amsterdam: Ludovicus Elzevirius, 1644. Disponível em http://books.google.com.br/books?id=JQs_AAAcAAJ&printsec=frontcover&hl=pt-BR&source=gbs_ge_summary_r&cad=0#v=onepage&q&f=false. Acessado em 13 fevereiro 2013.
- DEVILLERS, O. *Robust and efficient implementation of the Delaunay tree*. Valbonne, France, February 1992.

- DEVILLERS, O. The Delaunay hierarchy. *International Journal of Foundations of Computer Science*, v. 13, p. 163–180, 2002.
- DEVILLERS, O.; MEISER, S.; TEILLAUD, M. Fully dynamic Delaunay triangulation in logarithmic expected time per operation. *Computational Geometry: Theory and Applications*, v. 2, n. 2, p. 55–80, 1992.
- DEY, T. K.; ZHAO, W. Approximating the medial axis from the Voronoi diagram with a convergence guarantee. *Algorithmica*, v. 38, p. 179–200, 2003.
- DIRICHLET, G. L. Über die reduktion der positiven quadratischen formen mit drei unbestimmten ganzen zahlen. *Journal für die Reine und Angewandte Mathematik*, v. 40, p. 209–227, 1850.
- DJIDJEV, H. N.; LINGAS, A. On computing the Voronoi diagram for sorted point sets. *International Journal of Computational Geometry and Applications*, v. 5, n. 3, p. 327–337, 1995.
- DWYER, R. A. Higher-dimensional Voronoi diagrams in linear expected time. In: *Proceedings of the fifth annual symposium on Computational geometry, SCG 89*. New York, NY: ACM, 1989. p. 326–333.
- EDELSBRUNNER, H. Triangulations and meshes in computational geometry. *Acta Numerica*, v. 9, p. 133–213, 2000.
- FLORIANI, L. D.; KOBBELT, L.; PUPPO, E. A survey on data structures for level-of-detail models. In: DODGSON, N.; FLOATER, M.; SABIN, M. (Ed.). *Advances in Multiresolution for Geometric Modeling and Visualization, Mathematics*. New York: Springer Verlag, 2004. (Series in Mathematics and Visualization), p. 49–74.
- FORTUNE, S. A sweepline algorithm for Voronoi diagrams. In: *Proceedings of the second annual symposium on Computational geometry*. New York, NY: ACM, 1986. (SCG' 86), p. 313–322.

GREEN, P. J.; SIBSON, R. R. Computing dirichlet tessellations in the plane. *The Computer Journal*, v. 21, n. 2, p. 168–173, 1977.

GUIBAS, L. J.; KNUTH, D. E.; SHARIR, M. Randomized incremental construction of Delaunay and Voronoi diagrams. In: *Proceedings of the seventeenth international colloquium on Automata, languages and programming*. New York, Inc., New York, NY: Springer-Verlag, 1990. p. 414–431.

GUIBAS, L. J.; STOLFI, J. Primitives for the manipulation of general subdivisions and the computation of Voronoi diagrams. *ACM Transactions on Graphics*, v. 4, n. 2, p. 74–123, 1985.

HAYATI, D.; KARAMI, E.; SLEE, B. Combining qualitative and quantitative methods in the measurement of rural poverty. *Social Indicators Research*, Springer, v. 75, p. 361–394, 2006.

ISENBURG, M.; LIU, Y.; SHEWCHUK, J.; SNOEYINK, J. Streaming computation of Delaunay triangulations. *ACM Transactions on Graphics*, ACM, New York, NY, v. 25, n. 3, p. 1049–1056, 2006.

JR., J. E. B.; SAITO, S. Fracture analyses using spring networks with random geometry. *Engineering Fracture Mechanics*, v. 61, p. 569–591, 1998.

JUNG, C. F. *Metodologia aplicada a projetos de pesquisa: Sistemas de Informação e Ciência da Computação*. 2009. Disponível em http://www.google.com.br/url?sa=t&rct=j&q=&esrc=s&source=web&cd=1&cad=rja&ved=0CDUQFjAA&url=http%3A%2F%2Fwww.jung.pro.br%2Fmoodle%2Fmod%2Fresource%2Fview.php%3Fid%3D102&ei=RQEtUbitMoSs8ASupYHwDw&usg=AFQjCNFRrix4NNXuNH04q_lwPT-iPSInWg&bvm=bv.42965579,d.eWU.

Acessado em 26 de fevereiro de 2013.

KATAJAINEN, J.; KOPPINEN, M. Constructing Delaunay triangulations by merging buckets in quadtree order. *Annales Societatis Mathematicae Polonae, Series IV, Fundamenta Informaticae*, v. 3, p. 275–288, 1988.

LAMBER, T. The Delaunay triangulation maximize the mean inradius. In: *Proceedings of 6th Canadian Conference on Computational Geometry*. School of Computer Science and Engineering, University of New South Wales, Kensington, Australia: CCCG, 1994. p. 201–206.

LAWSON, C. L. Software for C^1 surface interpolation. In: RICE, J. R. (Ed.). *Mathematical Software III*. NATIONAL AERONAUTICS AND SPACE ADMINISTRATION, Washington, D.C: Academic Press, 1977. p. 161–194.

LEDA. *The LEDA User Manual*. 2008. Disponível em http://www.algorithmic-solutions.info/leda_manual/manual.html. Acessado em 11 setembro 2012.

LEE, D. T. Medial axis transformation of a planar shape. *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, v. 4, n. 4, p. 363–369, 1982.

LEE, D. T.; SCHACHTER, B. J. Two algorithms for constructing a Delaunay triangulation. *International Journal of Computer and Information Sciences*, Springer, v. 9, n. 3, p. 219–242, 1980.

MALISKA, C. *Transferência de calor e mecânica dos fluidos*. Rio de Janeiro: LTC, 2004. ISBN 9788521613961.

MAUS, A. Delaunay triangulation and the convex hull of n points in expected linear time. *BIT Numerical Mathematics, Springer Netherlands*, v. 24, n. 2, p. 151–163, 1984.

MCCULLAGH, M.; ROSS, C. Delaunay triangulation of a random data set for isarithmic mapping. *The Cartographic Journal*, v. 17, n. 2, p. 93–99, 1980.

NOGUEIRA, J. R.; Gonzaga de Oliveira, S. Introduction to triangular mesh generation and the Delaunay triangulation. In: *Proceedings of the XXXII Iberian Latin-American Congress on Computational Methods in Engineering - XXXII CILAMCE (Mini-symposia Research Beginners on Computational Methods in Engineering)*. Ouro Preto: ABMEC, 2011.

NOGUEIRA, J. R.; Gonzaga de Oliveira, S. Introdução sucinta à triangulação de Delaunay e suas propriedades. In: *Anais do I Congresso de Matemática Aplicada e Computacional - CMAC-SE 2011*. Uberlândia: SBMAC, 2011.

NOGUEIRA, J. R.; Gonzaga de Oliveira, S. Algoritmos para a geração da triangulação de Delaunay por meio de inserção incremental de pontos. In: *Anais do XXV CIUFLA*. Lavras: PRP-UFLA, 2012.

NOGUEIRA, J. R.; Gonzaga de Oliveira, S. L. Geração da triangulação de Delaunay através do algoritmo de Lawson. In: *Anais do I Encontro Mineiro de Modelagem Computacional*. Juiz de Fora: UFJF, 2011.

OHYA, T.; IRI, M.; MURATA, K. Improvements of the incremental method for the Voronoi diagram with computational comparison of various algorithms. *Journal of Operations Research Society of Japan*, v. 27, p. 306–337, 1984.

OLIVEIRA, T. H.; Gonzaga de Oliveira, S. Uma resolução da equação de Laplace por volumes finitos e diagrama de Voronoi com refinamento adaptativo e de Ruppert. In: *Proceedings of the International Conference on Graphics, Patterns and Images (SIBGRAPI 2012) - Workshop of Undergraduate Works (WUW)*. Ouro Preto: SBC, 2012.

RIPPA, S. Minimal roughness property of the Delaunay triangulation. *Computer Aided Geometric Design*, Elsevier Science Publishers B. V., Amsterdam, The Netherlands, The Netherlands, v. 7, n. 6, p. 489–497, 1990.

RUPPERT, J. A Delaunay refinement algorithm for quality 2-dimensional mesh generation. In: *Selected papers from the fourth annual ACM SIAM symposium on Discrete algorithms*. Orlando, Florida: Academic Press, Inc., 1995. p. 548–585.

SHAMOS, M. I.; HOEY, D. Closest-point problems. In: *Proceedings of the 16th Annual Symposium on Foundations of Computer Science*. Washington, DC: IEEE Computer Society, 1975. p. 151–162.

SHEWCHUK, J. R. *Delaunay Refinement Mesh Generation*. Tese (Doutorado) — School of Computer Science, Carnegie Mellon University, Pittsburgh, Pennsylvania, 1997. Available as Technical Report CMU-CS-97-137.

SIBSON, R. Locally equiangular triangulations. *The Computer Journal*, v. 21, p. 243–245, 1978.

SINCLAIR, D. A. *S-hull: a fast radial sweep-hull routine for Delaunay triangulation*. UK 2010. Disponível em http://www.s-hull.org/paper/s_hull.pdf. Acessado em 17 de fevereiro de 2012.

SKIENA, S. S. *The Algorithm Design Manual*. 2th. ed. London: Springer-Verlag, 2008.

SLOAN, S. W. A fast algorithm for constructing Delaunay triangulations in the plane. *Advances in Engineering Software*, Elsevier Science Ltd., Oxford, UK, v. 9, p. 34–55, January 1987.

SU, P.; DRYSDALE, R. L. S. *A Comparison of Sequential Delaunay Triangulation Algorithms*. 1996. Disponível em <http://www.cs.berkeley.edu/~jrs/meshpapers/SuDrysdale.pdf>. Acessado em 16 de março de 2012.

SUGIHARA, K.; IRI, M. Construction of the Voronoi diagram for one million generators in single-precision arithmetic. *Proceedings of the IEEE*, v. 80, n. 9, p. 1471–1484, 1992.

TENG, S.-H.; WONG, C. W. Unstructured mesh generation: Theory, practice, and perspectives. *International Journal of Computational Geometry and Applications*, p. 227–266, 2000.

THIESSEN, A. H. Precipitation average for large area. *Monthly Weather Review*, v. 39, p. 1082–1084, 1911.

TIPPER, J. A straightforward iterative algorithm for the planar Voronoi diagram. *Information Processing Letters*, v. 34, n. 3, p. 155–160, 1990.

VIGNERON, A. *Computing a Delaunay Triangulation*. National of University of Singapore: INRA, 2004. Disponível em <http://www.docstoc.com/docs/46656668/Computing-a-Delaunay-triangulation>. Acessado em 10 de fevereiro de 2012.

VORONOI, G. F. Nouvelles applications des parametres continus a la theorie des formes quadratiques. *Journal fur die Reine und Angewandte Mathematik*, v. 133, p. 97–178, 1908.

WATSON, D. F. Computing the n-dimensional Delaunay tessellation with application to Voronoi polytopes. *The Computer Journal*, v. 24, n. 2, p. 167–172, 1981.

WIGNER, E.; SEITZ, F. On the constitution of metallic sodium. II. *Physical Review*, American Physical Society, v. 46, p. 509–524, 1934.

ZHOU, S.; JONES, C. B. Hcpo: an efficient insertion order for incremental Delaunay triangulation. *Information Processing Letters*, v. 93, n. 1, p. 37–42, 2005.