



CONRADO JENSEN TEIXEIRA

**A ORGANIZAÇÃO DO ENSINO DE TRIGONOMETRIA A
PARTIR DA ESSÊNCIA DO OBJETO DA ATIVIDADE DE
ENSINO**

**LAVRAS – MG
2022**

CONRADO JENSEN TEIXEIRA

**A ORGANIZAÇÃO DO ENSINO DE TRIGONOMETRIA A PARTIR DA ESSÊNCIA
DO OBJETO DA ATIVIDADE DE ENSINO**

Dissertação apresentada à Universidade Federal de Lavras, como parte das exigências do Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Educação Matemática para obtenção do título de Mestre.

Prof. Dr. José Antônio Araújo Andrade
Orientador

**LAVRAS – MG
2022**

**Ficha catalográfica elaborada pelo Sistema de Geração de Ficha Catalográfica da Biblioteca
Universitária da UFLA, com dados informados pelo(a) próprio(a) autor(a).**

Teixeira, Conrado Jensen.

A Organização do Ensino de Trigonometria a partir da essência do
Objeto da Atividade de Ensino / Conrado Jensen Teixeira. - 2022. 128 p.

Orientador(a): José Antônio Araújo Andrade.

Dissertação (mestrado profissional) - Universidade Federal de Lavras,
2022.

Bibliografia.

1. Ensino de Trigonometria. 2. Lógico-Histórico. 3. Teoria da
Atividade. I. Andrade, José Antônio Araújo. II.

CONRADO JENSEN TEIXEIRA

**A ORGANIZAÇÃO DO ENSINO DE TRIGONOMETRIA A PARTIR DA ESSÊNCIA
DO OBJETO DA ATIVIDADE DE ENSINO**

**THE ORGANIZATION OF TRIGONOMETRY TEACHING FROM THE ESSENCE
OF THE OBJECT OF THE TEACHING ACTIVITY**

Dissertação apresentada à Universidade Federal de Lavras, como parte das exigências do Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciência e Educação Matemática para obtenção do título de Mestre.

APROVADO em 28 fevereiro de 2022.

Prof. Dr. José Antônio Araújo Andrade UFLA
Prof. Dr. Iraziet da Cunha Charret UFLA
Prof. Dr. Maria do Carmo de Sousa UFSCAR

Prof. Dr. José Antônio Araújo Andrade
Orientador

**LAVRAS – MG
2022**

AGRADECIMENTOS

Agradeço primeiramente a Deus pela vida, por minha saúde e a de meus familiares e pelas bênçãos concedidas para finalizar este trabalho.

À Universidade Federal de Lavras (UFLA), ao Instituto de Ciências Exatas e Tecnológicas (ICET) e ao Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Educação Matemática (PPGECM) por concederem e manterem um espaço físico excelente, além de um corpo docente e funcionários de alta competência.

À minha noiva, amiga e namorada, Letícia de Paula Castro, com quem compartilhei toda trajetória desta pesquisa e que aguentou todo meu falatório teórico e deslumbres que tive com as leituras, além de, por vezes, condicionar o ambiente perfeito para meus estudos e por me fazer perceber as contradições teóricas em diversas ocasiões.

À minha pequena e amada filha, Cecília de Paula Jensen, que é a minha motivação e fonte de alegria. Que mesmo ainda não tendo consciência de muita coisa, precisou aguentar minhas ausências e se sacrificar para que eu pudesse concluir o trabalho. Além do mais, foi minha inspiração no desenvolvimento da Unidade Didática.

À minha mãe que concedeu a minha vida, lutou muito para me fornecer o fundamental para existência e que, mesmo viúva com três filhos, encontrou forças para nos criar, financiar e amar.

Ao meu irmão, Henrique Jensen Teixeira, que se dispôs a ficar diversas horas me ouvindo, indagando-me e se encantando com os conhecimentos que eu obtive graças ao mestrado.

Ao meu professor e orientador Dr. José Antônio Araújo Andrade pela orientação, ensinamentos, acolhimento e por ter sido responsável por me mostrar uma linha filosófica e pedagógica que ressignificou minha prática e refratou minha visão sobre a vida.

Ao grupo de estudos em Práticas Pedagógicas orientadas pela Teoria Histórico-Cultural (PPTHC) que incitou diversas contradições as quais permitiram o desenvolvimento do meu pensamento.

Às amigas do grupo “clandestino” do PPTHC: Suhelen Sales Souto Souza, Isabely Melo da Silva e Sueli Valim, que me mobilizaram a entrar em atividade em diversas ocasiões devido às discussões teóricas, fizeram-me ouvir áudios intermináveis em meu *WhatsApp* e que deixaram a trajetória mais leve e alegre.

Aos membros de minha banca de qualificação e defesa pelas grandes contribuições: Dr. Iraziet da Cunha Charret, Dr. Mário Henrique Cláudio, Dr. José Antônio Araújo Andrade e Dra. Maria do Carmo de Sousa.

A todos que contribuíram de forma indireta com minhas significações, tais como professores da minha formação acadêmica, colegas de profissão (professores) e alunos, assim como todos que irão ler este trabalho.

GRATIDÃO!

*“A tarefa do professor é a mesma da cozinheira: antes de dar a faca e o queijo ao aluno, provocar a fome.”
(Rubem Alves)*

RESUMO

O objeto de investigação nesta pesquisa é a organização de ensino que foi proposta em uma Unidade Didática (UD) em Trigonometria. Esta pesquisa é de abordagem qualitativa e tem a seguinte questão como orientadora da investigação: **que implicações a compreensão da essência do objeto da atividade de ensino têm para a organização do ensino de Trigonometria?** Para responder a essa questão, buscou-se analisar as potencialidades de uma Unidade Didática desenvolvida para o ensino de Trigonometria e fundamentada metodologicamente pela unidade dialética lógico-histórico. Para conduzir a evolução da pesquisa, definiram-se os seguintes objetivos específicos: revelar os sentidos pessoais do professor/pesquisador; analisar o movimento do pensamento (empírico ao concreto, do geral ao particular) objetivado na Unidade Didática; desvelar o extrato teórico da UD sintetizando como elementos de mediação produzidos pela cultura humana podem desencadear o processo de significação e contribuir para o avanço do pensamento teórico em Trigonometria; analisar como as necessidades históricas engendradas no desenvolvimento da Trigonometria contribuíram para a composição das Situações Desencadeadoras de Atividade (SDA), cuja intencionalidade foi mobilizar os nexos conceituais do campo de conceitos da Trigonometria, suscitar a atividade de aprendizagem e criar a zona de desenvolvimento iminente. Como suporte teórico para a investigação tem-se a Teoria Histórico-Cultural de Lev Semenovitch Vigotski, a Teoria da Atividade de Alexei N. Leontiev e a Teoria do Ensino Desenvolvidor de Vasili Vasilievich Davidov. Os dados foram obtidos por meio da investigação do movimento lógico-histórico do campo de conceitos da Trigonometria, do produto educacional, além das notas de estudos e reflexões advindas da prática pedagógica. Por sua vez, as categorias do materialismo histórico-dialético foram definidas como propostas metodológicas para análise e interpretação dos dados de pesquisa. Da análise, foi possível entender que a busca pela essência do objeto, na atividade de ensino, favorece o desenvolvimento do pensamento do professor, organiza e enriquece sua prática docente e permite entender os pontos de contradição do próprio objeto de ensino, o que beneficia o planejamento das SDA. Além disso, torna-se um importante instrumento para suscitar a atividade de aprendizagem e possibilitar o desenvolvimento do pensamento teórico dos estudantes.

Palavras-chave: Histórico-Cultural. Ensino de Trigonometria. Lógico-Histórico. Teoria da Atividade.

ABSTRACT

The object of investigation in this research is a teaching organization that was proposed in a Didactic Unit (UD) in Trigonometry. This research has a qualitative approach and has the following question as an investigation guide: **what does understanding the essence of the object of the teaching activity have for the organization of Trigonometry teaching?** To answer this question, we seek to analyze the potential of a Didactic Unit developed for the teaching of Trigonometry and methodologically based on the logical-historical dialectical unit. To follow the evolution of the research, the following specific objectives were defined: to reveal the personal meanings of the professor/researcher; analyze the movement of thought (empirical to concrete, from general to particular) objectified in the Didactic Unit; develop the theoretical extract of the UD by synthesizing how mediation elements produced by human culture can have the process of meaning and contribute to the advancement of theoretical thinking in Trigonometry; to analyze how the historical needs engendered in the development of enthusiastic Trigonometry for the composition of Activity Triggering Situations (SDA), whose intention was to mobilize the conceptual links of the field of concepts of Trigonometry, encourage learning activity and create the original development zone. As theoretical support for the investigation there is the Historical-Cultural Theory of Lev Semenovich Vygotsky, the Activity Theory of Alexei N. Leontiev and the Developmental Teaching Theory of Vasili Vasilevich Davidov. The data were obtained through the investigation of the logical-historical movement in the field of concepts of Trigonometry, the educational product, in addition to the study notes and reflections arising from the pedagogical practice. In turn, the categories of historical-dialectical materialism were defined as methodological proposals for analysis and interpretation of research data. From the analysis, it was possible to understand that the search for the essence of the object, in the teaching activity, favors the development of the teacher's thinking, organizes and enriches his/her teaching practice and allows understanding the points of deficiencies of the teaching object itself, which benefits the SDA planning. In addition, it becomes an important tool to encourage learning activity and enable the development of students' theoretical thinking.

Keywords: Historical-cultural. Trigonometry teaching. Logical-historical. Activity theory

LISTA DE FIGURAS

Figura 1 - Apropriação dos conceitos e significações segundo Vigotski.....	32
Figura 2 - Componentes da atividade	39
Figura 3 - A esfera celeste, o equador e a eclíptica	51
Figura 4 - Modelo epiciclo	53
Figura 5 - Excentricidade da órbita do Sol	54
Figura 6 - Relações de cordas elementares	57
Figura 7 - Cálculo da meia corda de Arquimedes.....	59
Figura 8 - Crd 36° e Crd 72°	60
Figura 9 - A corda quebrada.....	61
Figura 10 - Círculo para a corda da diferença e da soma	62
Figura 11 - Projeções das sombras de um gnômon.....	66
Figura 12 - A função seno e sua forma na Índia antiga	68
Figura 13 - Primeira avaliação do bimestre I no ano de 2019	81
Figura 14 - Segunda avaliação do bimestre I do ano de 2019	82
Figura 15 - Esboço do trabalho para a disciplina de Processos e Sequências	83
Figura 16 - A primeira tentativa de desenvolver a UD	84
Figura 17 - Concessão gratuita do livro pela Princeton University Press	86
Figura 18 - A primeira versão da rota de ensino	87
Figura 19 - Folheto de divulgação da oficina em Trigonometria (versão 3)	89
Figura 20 - Rota de ensino	97

LISTA DE TABELAS

Tabela 1 - Tábua de cordas com intervalos de $7,5^\circ$	59
Tabela 2 - Tábua de cordas com intervalos de $0,5^\circ$	63
Tabela 3 - Tábua de seno de Varāhamihira e Ariabata I	68

LISTA DE QUADROS

Quadro 1 - Organização da UD	90
------------------------------------	----

LISTA DE ABREVIATURAS

SDA	Situação Desencadeadora de Aprendizagem
MD	Momento Didático
UD	Unidade Didática
THC	Teoria Histórico-Cultural
ZDI	Zona de Desenvolvimento Iminente

LISTA DE SIGLAS

PPTHC	Grupo de Estudos e Pesquisas em Práticas Pedagógicas orientadas pela Teoria Histórico-Cultural
UFLA	Universidade Federal de Lavras

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO.....	15
2	MOTIVAÇÃO	20
2.1	O papel do ensino	22
2.2	A escola	24
2.2.1	A escola moderna: influência econômica e política.....	26
2.2.2	O professor	28
3	CONSTRUCTOS DA TEORIA HISTÓRICO-CULTURAL.....	31
3.1	Teoria Histórico-Cultural	31
3.2	Teoria da Atividade	35
3.3	Teoria do Ensino Desenvolvimental	41
3.4	Materialismo Histórico-Dialético	44
4	DESENVOLVIMENTO LÓGICO-HISTÓRICO DA TRIGONOMETRIA	48
4.1	Ângulo.....	48
4.2	Elementos da Astronomia Antiga	49
4.3	Hiparco	51
4.4	Excentricidade da Órbita do Sol	54
4.5	Raio do Círculo Trigonométrico	55
4.6	Tábua de Cordas	56
4.7	Fórmulas da Corda da Diferença e da Soma	60
4.8	A Corda de 1°	62
4.9	Gnômon	64
4.10	Tábuas de Sombra	65
4.11	Tábua de Seno	66
4.12	Contribuições Islâmicas e Europeias	69
5	MÉTODO DE PESQUISA.....	74
5.1	A Dialética como Lógica e Teoria do Conhecimento.....	75
6	DO ABSTRATO AO CONCRETO: O PENSAMENTO EM MOVIMENTO.....	80
6.1	Os sentidos pessoais.....	80
6.1.1	O objeto em sua forma abstrata	81
6.1.2	A maturação do objeto.....	85
6.1.3	O objeto concreto	87
6.1.4	A negação da negação.....	88

6.2 A Unidade Didática	89
6.2.1 Momentos didáticos	91
6.2.1 O estrato teórico	92
6.2.2 Rota de ensino.....	95
7 CONCLUSÃO	98
REFERÊNCIAS.....	101
APÊNDICE A – O desenvolvimento lógico-histórico da Trigonometria: versão 1	106

1 INTRODUÇÃO

Como acontece a concepção do conhecimento e como o homem torna isso um conteúdo da sua própria mente? Que importância o conhecimento científico tem para o ser humano e como ele se difere do conhecimento obtido fora do espaço escolar? Como posso defender minha visão de que não existe “gente burra”, mas pessoas com conhecimentos diferentes e que estão em momentos históricos diferentes? “Matemática é para aqueles que estão dispostos e não para poucos”, será que consigo fortalecer essa visão ideológica? Foi a partir dessas perguntas, da busca para uma didática não estática e no intuito de contribuir para a democratização da Matemática que surgiu o interesse em interromper um caminho de formação na Matemática Abstrata para me orientar à Educação Matemática. Necessariamente, optei por linhas filosófica, psicológica e pedagógica, que me exigissem profundos estudos nas Teorias de Aprendizagem e que me guiassem a entender a transformação do pensamento empírico para o teórico.

Nessa necessidade pessoal ocorreu a parceria com o meu atual orientador, o professor José Antônio, o qual em seus interesses de estudos e uma conversa franca me indicou a atual fundamentação teórica, a Teoria Histórico-Cultural (THC). Assim, a partir dos estudos iniciais e de uma visão empírica da dificuldade que se apresenta no ensino e aprendizagem no campo de conceitos da Trigonometria é que formulamos a questão de investigação: **como a busca pela essência do objeto da Atividade de Ensino pode favorecer a organização do ensino de Trigonometria?** A busca pela essência do objeto da Atividade de Ensino visava contribuir para a satisfação da minha necessidade pessoal de entender a evolução do pensamento empírico para o epistemológico, além de possibilitar o entendimento sobre a importância do conhecimento científico e ter a possibilidade de organizar minha prática. Dessa forma, para que a questão seja respondida, traçamos o objetivo geral da pesquisa: **analisar as potencialidades de uma Unidade Didática (UD) desenvolvida para o ensino de Trigonometria e fundamentada metodologicamente pela unidade dialética lógico-histórico.**

O objetivo faz-se importante para um direcionamento, para que as energias, as quais se converterão em trabalho, sejam aproveitadas de forma eficaz e com o mínimo de perda. Contudo, existe um longo caminho com diversos obstáculos antes de

atingirmos um propósito pré-determinado. Nesse sentido, para que se tenha um desenvolvimento eficiente da tarefa, surge a importância de definir-se metas, ou seja, objetivos específicos. Assim sendo, definimos os objetivos específicos dessa pesquisa orientados pelo objetivo geral e fundamentados pela teoria escolhida, os quais são: (i) revelar os sentidos pessoais do professor/pesquisador, (ii) analisar o movimento do pensamento (empírico ao concreto, do geral ao particular) objetivado na Unidade Didática, (iii) desvelar o extrato teórico da UD sintetizando como elementos de mediação produzidos pela cultura humana podem desencadear o processo de significação e contribuir para o avanço do pensamento teórico em Trigonometria; (iv) analisar como as necessidades históricas engendradas no desenvolvimento da Trigonometria contribuíram para a composição das Situações Desencadeadoras de Atividade (SDA), cuja intencionalidade foi mobilizar os nexos conceituais do campo de conceitos da Trigonometria, suscitar a atividade de aprendizagem e criar a zona de desenvolvimento iminente.

Por essência do objeto entende-se a sua estrutura mais profunda e sólida, a estrutura dos conceitos de sua formação. O sujeito cognoscente que se apropria da essência é capaz de entender o objeto, ou seja, de ter um conceito sobre ele.

Ter um conceito sobre um objeto significa saber reproduzir mentalmente seu conteúdo, construí-lo. A ação mental de construção e transformação do objeto constitui o ato de sua compreensão e explicação, a descoberta de sua essência (DAVYDOV, 1988, p. 128).

O sujeito que se apropria da essência tem a possibilidade de reproduzir mentalmente o conteúdo do objeto, o sistema de suas relações internas e mobilizar essas relações para atuação externa. O entendimento, o alcance da essência, orienta-se à separação e à comparação das propriedades dos objetos de modo a abstrair a generalidade formal. Descobrir a essência dos objetos permite ao ser humano superar o pensamento empírico e formar um novo nível de pensamento, o pensamento teórico.

O pensamento teórico reflete a superação da contemplação do objeto em suas relações e manifestações exteriores, ele incide nas leis internas e no movimento sócio-histórico desse objeto. Esse tipo de pensamento se configura a partir de um concatenamento de argumentos vindos de dados empíricos captados por meio da atividade sensorial prática, a qual engendra o plano ideal que em seu desenvolvimento torna-se independente do plano sensorial objetivo. E, no movimento dialético com que

está idealizado e do que está objetivado, há a reorganização e desenvolvimento do próprio pensamento.

A atividade humana consciente dirigida intencionalmente a uma finalidade é um processo complexo engendrado da ação do homem em sua relação com o mundo; distinguimos duas ou mais atividades pelo objeto às quais se orientam. Portanto, o conceito tem um caráter particular, podendo dois sujeitos estarem em uma mesma ação, porém em atividades distintas. Isso respalda a existência de uma prática específica ao estudante cuja ação intencional busca se apropriar teoricamente da realidade; essa prática é definida como Atividade de Aprendizagem ou Atividade de Estudos.

Na investigação da relevância acadêmica para o nosso tema de pesquisa, fizemos uma revisão bibliográfica no Ibict¹ em seu banco de teses e dissertações. As palavras-chave escolhidas foram: história da Trigonometria, sócio-histórico, histórico-cultural, Teoria da Atividade e lógico-histórico. Foram analisados trabalhos cujas datas de defesa encontravam-se entre 2016 e 2019. Esses termos foram escolhidos, pois carregam consigo conceitos-chave, construtos da teoria que são muito relevantes e que se adéquam aos objetivos estabelecidos. Dentre os trabalhos listados na busca avançada, surgiram os trabalhos de Silva (2016), Silva (2018), Reis (2016) e Lochucki (2016).

Silva (2016) considerou em seu trabalho a história da Trigonometria para buscar situações-problemas para produzir um produto educacional que contribua para que o estudante consiga "analisar e intervir no mundo real, com sentimentos e opiniões favoráveis sobre Trigonometria" (SILVA, 2016, p. 14). Sua fundamentação teórica deu-se pela Teoria da Aprendizagem Significativa de David Ausubel.

Silva (2018) buscou compreender de que modo uma sequência didática elaborada sob a perspectiva da Engenharia Didática, proposta por Michèle Artigue, e mediada, principalmente, pelo *software* GeoGebra, pode contribuir no processo de ensino e aprendizagem de funções trigonométricas. A autora ainda utilizou da história da Trigonometria para realizar análises prévias, um dos requisitos de sua fundamentação metodológica. Ela concluiu que ao "[...] estabelecer o confronto entre a Análise à Priori e à Posteriori de cada atividade, podemos concluir que o uso do

¹ <http://bdtd.ibict.br/vufind/>

software Geogebra contribuiu para a aprendizagem de trigonometria" (SILVA, 2018, p. 122).

Reis (2016) apresenta um levantamento histórico sobre o surgimento da Trigonometria, inclui algumas definições, propriedades, demonstrações e as funções trigonométricas para melhorar a prática sobre o tema. Seu trabalho conclui que a Trigonometria apresentada no Ensino Básico teve contribuições de muitas pessoas e seu progresso foi lento, além disso percebeu que "[...] cada conceito surgiu da necessidade do homem no dia a dia" (REIS, 2016, p. 77).

Por sua vez, Iochucki (2016) exhibe a Trigonometria por meio dos programas de computador GeoGebra e Máxima, e elabora um roteiro de aula por meio de uma costura lógica concebida pela história da Matemática. A autora conclui que uma "[...] estratégia importante deste trabalho foi introduzir em cada etapa a abordagem histórica. O aluno precisa ter claro que os conteúdos matemáticos surgiram de uma necessidade, e não o contrário, como tem sido ensinado" (IOCHUCKI, 2016, p. 94).

Desse modo, é possível observar que os trabalhos prescritos buscaram na história da Trigonometria inspirações e orientações para o desenvolvimento do trabalho e de um produto educacional que contribua para o ensino desse conteúdo. Assim, entendemos que esta pesquisa pode contribuir com uma estratégia metodológica diferente das vistas na revisão bibliográfica ao se fundamentar e se instrumentar metodologicamente pela Teoria Histórico-Cultural da Atividade para buscar no desenvolvimento histórico da Trigonometria a promoção de situações desencadeadoras de aprendizagem e a formatação de uma Unidade Didática. Este projeto de pesquisa está organizado do seguinte modo:

No capítulo 2 há uma tentativa de expor mais detalhadamente os motivos que me fizeram entender que o mestrado em Ensino de Ciências e Educação Matemática, por meio dos estudos teóricos, é o objeto capaz de satisfazer minhas necessidades engendradas na minha prática docente. Além disso, na exposição do conteúdo do meu pensamento e como parte do processo de apreensão do objeto, houve uma necessidade de dissertar sobre o ensino, a escola e o papel do professor, e como isso naturalmente me conduziu para estudar a Teoria Histórico-Cultural e seus desmembramentos.

No capítulo 3 dissertamos sobre os constructos da Teoria Histórico-Cultural, e teorias que dão continuidade e suporte para sua total apropriação; que nos instrumentalizam na pesquisa (escrita do texto, produção e análise dos dados) e na

docência (organização da aula, modo de agir em aula, elaboração das tarefas e do produto educacional). Esses estudos são: a Teoria da Atividade e a Teoria do Ensino Desenvolvimental – que se encontram no campo da Psicologia e da Pedagogia – e o materialismo histórico-dialético de Karl Marx, no campo filosófico.

No capítulo 4 há a apresentação do desenvolvimento histórico da Trigonometria dado pela minha lógica, na qual se engendra sobre o estudo de livros, artigos e vídeos da história da humanidade, da Matemática e da ciência, além da consulta de materiais históricos. Com isso, destaca-se que o início do estudo, assim como seu fim, foi a compreensão de que a Trigonometria, em sua forma mais madura, é a disciplina que apresenta meios de transformar medidas de ângulos em medidas lineares.

Tendo isso como orientação, foi realizada uma análise dos momentos, situação e necessidades históricas das civilizações que contribuíram para o desenvolvimento da disciplina, além do modelo econômico e pensamento filosófico/religioso predominante. Desse modo, foi possível realizar uma síntese da marcha histórica da Trigonometria, determinar um ponto de início do seu surgimento e produzir a Unidade Didática, estabelecer seus momentos de ensino e as Situações Desencadeadoras de Aprendizagem.

No capítulo 5 anunciamos a metodologia da pesquisa, seu caráter qualitativo, o objeto de investigação e o delineamento do produto educacional elaborado e desenvolvido.

No capítulo 6 há a análise do movimento do pensamento do professor/pesquisador – compreendido em três principais momentos - partindo de suas manifestações abstratas e concluindo em sua forma mais elevada, o pensamento concreto.

No capítulo 7 têm-se as considerações finais do trabalho desenvolvido e os sentidos pessoais do pesquisador.

Ressaltamos que a Unidade Didática foi elaborada para um contexto histórico e cultural singular, sobre uma exposição das experiências teórico-práticas do professor/pesquisador. Dessa maneira, esperamos que esse produto seja um orientador da Atividade de Ensino e que contribua para o surgimento da Atividade de Aprendizagem, além de um instrumento para a docência. Todavia, considerando a mutabilidade das coisas, a impermanência dos objetos, acreditamos que sua implementação em outros contextos precisa considerar toda dinâmica do local e dos sujeitos, além do momento histórico vivenciado.

2 MOTIVAÇÃO

Durante meus anos como estudante de Licenciatura em Matemática, incomodava-me o fato de eu ter muita dificuldade em entender certos assuntos, isso se acentuou durante um curto período em um mestrado acadêmico em Matemática. Ainda estudante, tive experiências em aulas particulares que foram o despertar para algumas reflexões e observações. A primeira observação foi: os alunos e pais tinham dificuldades grandes em assuntos básicos da Matemática, ao passo que quase a totalidade dos estudantes que tinham dificuldade não acreditavam serem capazes de aprender os diversos conteúdos que pertencem à disciplina. O simples fato de estudar Matemática deixava um sentimento de que eu tinha uma espécie de superpoder; atualmente ainda percebo esse sentimento nas falas e ações de pessoas que me conhecem. A segunda observação realizou-se sobre o seguinte entendimento da experiência prática: a grande maioria se preocupa em obter métodos milagrosos que priorizam o resultado imediato à verdadeira apreensão do conceito. Esses alunos e pais procuravam (e procuram) algo como um ensino *fast-food*: rápido, que satisfaz momentaneamente, que entrega um produto de aparência indiscutível, mas por uma análise nutricional, principalmente quando é frequente esse tipo de alimentação, trazem malefícios irreversíveis.

Diante disso, sendo eu mesmo o objeto da reflexão, emergiram algumas questões: por que alguns colegas aprendem determinados assuntos com facilidade e eu tenho tanta dificuldade? Será mesmo que a Matemática é uma disciplina voltada para poucos como muitos colegas e professores afirmam? No aspecto pedagógico, eu me questionava: como fazer com que os alunos e pais percebam que o aprendizado é um processo que demanda tempo e não é compatível com o ensino *fast-food*? Como organizar minha prática de forma que conteúdos estejam nas possibilidades de apropriação dos estudantes? Quando posso considerar que o aluno aprendeu de fato?

Depois de graduado, quase a totalidade dessas reflexões ainda existiam. Minha única certeza era de que a Matemática era, sim, para todos. No entanto, num choque de realidade, essa certeza quase foi impugnada ao ser professor particular de um aluno que precisou de ao menos seis meses para conseguir resolver equações de segundo grau. De forma a sair desse impasse, teorizei que se eu entendesse a forma como ocorre o percurso do conhecimento em sua forma socializada até a apropriação

individual, eu poderia ajudar os alunos atuando exatamente nesse caminho. Esse foi o impulso necessário para decidir entrar no mestrado profissional em Ensino de Ciências e Educação Matemática na Universidade Federal de Lavras (UFLA) ao invés do mestrado acadêmico em Matemática em outra instituição, por entender que o programa me forneceria instrumentos e condições para resolver minhas questões que surgiram na vida prático-reflexiva.

Concomitante à entrada no mestrado em 2019, entrei no grupo de estudos e pesquisas em Práticas Pedagógicas orientadas pela Teoria Histórico-Cultural (PPTHC) e tive meu início na Educação Básica como professor da rede pública. As formações teóricas que construí no papel de estudante de licenciatura em Matemática e professor particular iam se resignificando a partir dos estudos e debates do grupo de estudos e da prática como professor da escola pública. Da escola é possível dizer que a diversidade de personalidades, condições internas e externas dos sujeitos que ali se encontravam no papel de estudante eram as principais causas de repensar minhas práticas. Assim, passou a ser desafiador para mim ter uma prática inclusiva² que alcançasse o maior número de pessoas nessa pluralidade que constitui a sala de aula.

De forma a entender minhas observações e obter respostas às minhas questões engendradas na experiência ativa, eu precisava me propor um objetivo o qual tinha potencial de satisfazer minhas necessidades. Nesse sentido, a proposta foi “entender de que maneira os conhecimentos socializados tornavam-se conhecimentos próprios dos indivíduos cognoscentes”. Atingindo este objetivo, eu poderia me debruçar em como organizar minha prática docente para tornar o trajeto do geral ao individual eficaz e mais eficiente.

Foi orientando-me por esse objeto, muito turvo em sua forma inicial, que escrevi meu pré-projeto para entrar no mestrado na UFLA. As curvas do objeto, sua forma única e suas múltiplas facetas foram se manifestando ao passo que acontecia minha experiência com a Teoria Histórico-Cultural da Atividade, tanto em sua forma teórica quanto prática, a qual se revelava em minha docência e relações pessoais. Assim,

² Entende-se aqui como incluir todos os sujeitos em questões de vulnerabilidades sociais díspares, condições de conhecimentos teóricos distintos, sujeitos que não completaram a escolaridade na idade própria, em sistemas de recuperações sociais, etnias e orientação sexual; além dos que possuem deficiências físicas e psíquicas.

esse objeto saiu de um estado caótico, não nítido, para uma forma mais concreta e com capacidades de suprir minhas necessidades.

Antes de tudo, é necessário enfatizar que a dissertação em si se orienta por um objeto próprio: “analisar a Unidade Didática produzida pelo professor/pesquisador”. Enquanto a ação do meu eu, não mestrando, orienta-se em entender como os conhecimentos socializados tornam-se conhecimentos próprios dos indivíduos cognoscentes.

São duas versões do meu eu, as quais me constituem e que não podem ser dissociadas, a não ser pela atividade em que se encontram. Atividades fundamentadas e instrumentalizadas pela Teoria Histórico-Cultural da Atividade, mas que se diferenciam pelo motivo. De um lado, o eu pesquisador materializa-se na análise dos dados da pesquisa, do outro lado o eu professor materializa-se na ressignificação da prática e no produto educacional desenvolvido.

É no esforço de sintetizar meu desenvolvimento como mestrando, como professor, e mesmo pessoal, que organizei esta dissertação. Nesse sentido, o lógico teve papel fundamental; ele é o instrumento da tentativa de acompanhar esse desenvolvimento sem seus zigue-zagues e excessos. A partir do meu eu mais maduro, em que a forma do meu pensamento se encontrava mais desenvolvida, é que dei início a uma análise de como organizar o presente texto. Assim, a síntese dessa análise não ocorreu no formato histórico das minhas leituras e compreensões, mas se efetuou sobre o momento em que a forma do objeto se manifestou de maneira mais cristalina, em que o objeto tomou concreticidade.

2.1 O papel do ensino

Entender o papel social do professor demarca o início da síntese, pois isso assume que estou partindo do meu exercício profissional para captar o processo de aprendizagem, no qual o professor atua e é fundamental. Todavia, o professor demarca uma singularidade num sistema coletivo que se estrutura a partir das relações daqueles que o constituem e que se apresenta como instituição social, digo aqui do sistema educacional. Saviani (1999, 2008, 2010) entende por sistema educacional a unidade dos diversos constituintes que se compõe intencionalmente sob normas próprias e objetivos educacionais comuns orientados à população a que se destina.

O desenvolvimento da sociedade moderna corresponde ao processo em que a educação passa do ensino individual ministrado no espaço doméstico por preceptores privados para o ensino coletivo ministrado em espaços públicos denominados escolas. Assim, a educação sistematizada própria das instituições escolares tende a se generalizar impondo, em consequência, a exigência de se sistematizar também o funcionamento dessas instituições, dando origem aos sistemas educacionais organizados pelo poder público. Com efeito, no referido processo foi se impondo o entendimento de que a educação é uma questão de interesse público, devendo ser situada no âmbito da esfera estatal. (SAVIANI, 2008, p. 2).

Dessa forma, o sistema educacional, materializado na forma de escola cujo objeto é o ensino do conhecimento teórico, é formado por uma relação complexa que se estende de leis federais a acordos coletivos locais, de agentes da superestrutura a agentes da infraestrutura, o que resumidamente poderíamos unir em agentes do sistema educacional. “Dá-se o nome de AGENTES DA PRODUÇÃO a todos os indivíduos que de uma maneira ou de outra participam no processo de produção de bens materiais” (HARNECKER, 1983, p. 45).

No processo de ensino do ser social, o trabalhador individual, o qual se insere também o professor, não é capaz por si só de pôr em marcha o processo; isso só acontece por meio do trabalhador coletivo.

Todo processo baseado na cooperação em grande escala implica, portanto, que os trabalhadores individuais percam o controle e o domínio do processo de trabalho. Produz-se, assim, uma separação entre o trabalho individual e o conjunto do processo de trabalho. Quem põe em marcha este processo já não é o trabalhador individual, mas o trabalhador coletivo que exige, como um de seus elementos, um grupo de trabalhadores que execute funções de direção e controle do processo de produção. Juntamente com a função de transformação direta da matéria-prima surge a função de direção e controle de trabalho em seu conjunto (HARNECKER, 1983, p. 47).

A matéria-prima no contexto educacional se caracteriza pelas percepções superficiais da realidade, pela visão unilateral de um todo, por um conhecimento empírico ou até mesmo pela intenção de se apropriar de técnicas de produção. A transformação dessa matéria-prima no processo educacional visa à obtenção de um produto definido, o conhecimento teórico.

Da mesma maneira que no processo de produção material se pretende transformar uma matéria-prima determinada (por exemplo, o cobre) em um produto determinado (por exemplo, tubos, cabos elétricos, etc.)

mediante a utilização, por parte dos trabalhadores, de meios de trabalho especializados (máquinas, instrumentos, etc.); no processo de produção de conhecimento pretende-se transformar uma matéria-prima determinada (uma percepção superficial, deformada, da realidade) em um produto determinado (um conhecimento científico, rigoroso, dessa realidade). (HARNECKER, 1983, p. 18).

Aranha (2012), Ribeiro *et al.* (2017) e Piletti e Piletti (2018) demonstram como a educação se transforma ao longo do desenvolvimento humano. Os autores destacam os momentos da mudança no modo de ensinar com os períodos da história: antigo, subdividido em primitivo, antigo e medieval; e período moderno, no qual destaca o renascimento e o período contemporâneo. “Como algo inerentemente humano, a educação se transforma e o processo educacional segue as normas e os padrões de cada período histórico, respondendo às necessidades de cada sociedade” (RIBEIRO *et al.*, 2017).

Dessa maneira, observamos que em qualquer momento histórico humano, independente do sistema econômico dominante, a humanidade se organizou de forma a promover o ensino. Isso posto, entende-se que a sociedade percebe o ensino como fundamental para sua formação e continuidade. Por essa razão, é interessante compreender o papel do ensino, o espaço característico onde ele ocorre, a importância atual desse espaço e analisar a relevância do trabalhador individual que quando em estado de ação laboral é uma **unidade** do todo, o professor. “Subentendemos por unidade um produto da análise que, diferente dos elementos, possui todas as propriedades que são inerentes ao todo e, concomitantemente, são partes vivas e indecomponíveis dessa unidade” (VIGOTSKI, 2009, p. 8).

2.2 A escola

Diante de um tempo que tem rápida propagação da informação e comunicação facilitada, cujos relacionamentos e as subjetividades estão cada vez mais mediados pelas mídias sociais, em que o desenvolvimento da microeletrônica - um objeto da produção que tem função de instrumento de trabalho mas que também incita uma necessidade de consumo - provoca a reorganização dos processos de produção e nas demandas de qualificação profissional, tem-se questionado o papel da educação escolar na organização social. “Quanto mais progride a humanidade, mais rica é a

prática sócio-histórica acumulada por ela, mais cresce o papel específico da educação e mais complexa é a sua tarefa” (LEONTIEV, 2004, p. 291).

Podemos dizer que a internet é o maior expoente da sociedade moderna, pois proporcionou um ambiente onde se pode acessar com certa facilidade as informações científicas e não-científicas, um ambiente em que a distância física já não é um grande obstáculo para interações humanas e que permite organizações sociais de toda natureza. Como enfatiza Karlberg (2016), “as redes sociais [...] hoje ganham força para protestos, coberturas de conflitos, guerras, política, assuntos polêmicos, conflitos étnicos, manifestações, encontros sociais e amorosos, relacionamento e informação de todo tipo”. Ao passo que a internet é de grande valor para a humanidade moderna, ela é uns dos pilares de uma certa crise da educação e da profissão de professor.

Têm sido frequentes afirmações de que a profissão de professor está fora de moda, de que ela perdeu seu lugar numa sociedade repleta de meios de comunicação e informação. Estes seriam muito mais eficientes do que outros agentes educativos para garantir o acesso ao conhecimento e a inserção do indivíduo na sociedade. Muitos pais já admitem que melhor escola é a que ensina por meio de computadores, porque prepararia melhor para a sociedade informacional. As questões de aprendizagem seriam resolvidas com a tecnologização do ensino. Desse modo, não haveria mais lugar para a escola e para os professores. (LIBÂNEO, 2013, p. 6).

Dessa forma, a função social da escola torna-se uma incógnita para muitos, pois uns consideram o ensino escolar defasado na preparação dos estudantes para as demandas da modernidade, para a nova reorganização do mundo social e do trabalho, outros já julgam que o espaço escolar já não é mais útil, uma vez que a internet, associada a alguns elementos externos, mostra-se como uma forte candidata a substituir integralmente a escola como conhecemos.

Embora o sujeito possa se apropriar dos mais diferentes elementos da cultura humana de modo não intencional, não abrangente e não sistemático, de acordo com suas próprias necessidades e interesses, é no processo de educação escolar que se dá a apropriação de conhecimentos aliada à questão da intencionalidade social. [...] (MOURA *et al.*, 2010, p. 213).

A escola não é apenas um espaço onde estão dispostos os meios para livre apropriação dos conhecimentos humanos pelos estudantes, ela organiza e promove esse processo por meio de seus agentes. A escola funciona como instrumento do

homem na continuidade da sua própria história, socializa, integra e desenvolve membros imaturos na intenção de que eles compreendam o contexto de sua existência e se tornem agentes históricos, além de democratizar os conhecimentos históricos acumulados.

Depois do âmbito familiar, a escola se configura como o mais importante meio social frequentado pelos indivíduos. Disso, tem-se que a escola é uma instituição social de extrema relevância na sociedade, pois além de possuir o papel de fornecer preparação intelectual e moral dos alunos, ocorre também a inserção social (SILVA; FERREIRA, 2014).

Ademais, a singularidade da escola é a transmissão intencional do conhecimento socialmente sistematizado, o qual também advém das relações sociais, porém é formal, essencial no progresso humano e seu domínio sobre a natureza.

Independente das novas funções sociais que a escola assume, decorrentes da complexidade da sociedade atual, permanece a sua função precípua: socialização do saber sistematizado. A escola, como instituição social, não se encarrega daquele saber empírico, espontâneo, do senso comum, que surge da experiência cotidiana dos indivíduos. Este tipo de conhecimento é doxa e diz respeito a opinião, conseqüentemente não deve ser objeto de trabalho escolar [...] o conhecimento que diz respeito a escola é episteme, é ciência, o conhecimento metódico, conhecimento sistematizado. Assim, o papel da escola como instituição é precisamente o de socializar o saber sistematizado. (SANTOS, 1992, p. 19).

2.2.1 A escola moderna: influência econômica e política

No espectro da organização econômica e política, temos o neoliberalismo exercendo fortes influências no contexto educacional, seja de forma expressa ou oculta em leis e ações indiretas. “Em poucas palavras, [...] o neoliberalismo é um conjunto de ideias políticas e econômicas capitalistas que defende a não participação do estado na economia” (LOPES; CAPRIO, 2008, p. 2). Além disso, é importante destacar que “[...] o neoliberalismo se constitui como uma ideologia, uma corrente de pensamento e um modo diverso de ver o mundo social” (DIEHL, 2018). Marrach (1996, p. 45) diz que no “discurso neoliberal a educação deixa de ser parte do campo social e político para ingressar no mercado e funcionar à sua semelhança”.

A proposta neoliberal na educação fomenta um ensino tecnicista. Os problemas da realidade objetiva intrínsecos ao modo de organização social convertem-se em

problemas administrativos, técnicos e de reengenharia. A escola transforma-se em um estabelecimento comercial e o aluno em consumidor de um produto específico ofertado por ela, no caso o ensino. Por sua vez, o professor converte-se em um prestador de serviços (MARRACH, 1996, p. 54).

O papel estratégico da educação no modelo neoliberal de sociedade pode ser destacado em três objetivos:

1. Atrelar a educação escolar à preparação para o trabalho e a pesquisa acadêmica ao imperativo do mercado ou às necessidades da livre iniciativa.

Assegurar que o mundo empresarial tem interesse na educação porque deseja uma força de trabalho qualificada, apta para a competição no mercado nacional e internacional. [...]

2. Tornar a escola um meio de transmissão dos seus princípios doutrinários. O que está em questão é a adequação da escola à ideologia dominante. Esta precisa sustentar-se também no plano das visões do mundo, por isso, a hegemonia passa pela construção da realidade simbólica. Em nossa sociedade a função de construir a realidade simbólica é, em grande parte, preenchida pelos meios de comunicação de massa, mas a escola tem um papel importante na difusão da ideologia oficial. [...]

3. Fazer da escola um mercado para os produtos da indústria cultural e da informática, o que, aliás, é coerente com a ideia de fazer a escola funcionar de forma semelhante ao mercado, mas é contraditório porque, enquanto, no discurso, os neoliberais condenam a participação direta do Estado no funcionamento da educação, na prática, não hesitam em aproveitar os subsídios estatais para divulgar seus produtos didáticos e paradidáticos no mercado escolar (MARRACH, 1996, p. 46-48).

Conseqüentemente, nesse sistema o professor perde sua autonomia na mediação do processo de aprendizagem, dado que as ações serão limitadas pelo empregador e o currículo organizado sobre interesses particulares e indicadores de rendimentos com vistas a fazer a escola um local atrativo para os potenciais consumidores e competitiva no mercado. Desse modo, compromete-se a democratização do ensino e o progresso de uma sociedade cujos valores, juízos, moral e ética formaram-se histórica e socialmente.

O próprio conceito de ensino (educação) é contraposto, pois a apropriação do conhecimento estará nas possibilidades daqueles que podem arcar financeiramente e limitada sob uma esfera formada segundo a conveniência dos interesses dos personagens que lucram com o produto educacional. Sendo assim, apresentados

somente conhecimentos que corroboram esses interesses, implicando na desconfiguração da transmissão cultural aos sujeitos futuros.

Os educadores são unânimes em reconhecer o impacto das atuais transformações econômicas, políticas, sociais e culturais na educação e no ensino, levando a uma reavaliação do papel da escola e dos professores. Entretanto, por mais que a escola básica seja afetada nas suas funções, na sua estrutura organizacional, nos seus conteúdos e métodos, ela mantém-se como instituição necessária à democratização da sociedade (LIBÂNEO, 2013, p. 3).

A escola como local privilegiado e socialmente concebido para a apropriação de conhecimentos produzidos historicamente implica que a ação dos seus constituintes, principalmente o professor, deve estar organizada intencionalmente para esse fim (MOURA *et al.*, 2010, p. 212).

2.2.2 O professor

A figura do professor no processo de ensino esteve presente desde os primórdios sociais, surgiu cristalizada na ação de um membro do clã medieval ou da família nuclear, nas atividades dos catequistas, em ações particulares de mestres, mentores e preceptores, que se encontram, atualmente, institucionalizadas como função docente. É visto que o professor é o elo principal entre o aluno e o conhecimento teórico, pois ele que organiza as ferramentas pedagógicas e põe em marcha o currículo escolar.

Para que a aprendizagem se concretize para os estudantes e se constitua efetivamente como atividade, a atuação do professor é fundamental. Ele é responsável em mediar a relação dos estudantes com o objeto do conhecimento, orientando e organizando o ensino. As ações do professor visam criar no estudante a necessidade de apropriação do conceito, fazendo coincidirem os motivos das ações com o objeto de estudo. O professor, como aquele que concretiza objetivos sociais objetivados no currículo escolar, organiza o ensino: define ações, elege instrumentos e avalia o processo de ensino e aprendizagem (MOURA *et al.*, 2010, p. 216).

Ninguém consegue receber um conteúdo como um depósito em sua mente, nenhum ser humano busca se apropriar de um conceito sem necessidade. A partir da experiência prática particular e sensível torna-se remota a chance de generalizar e

teorizar os conhecimentos obtidos. Ademais, a funcionalidade do conceito no meio social também é limitada ou até impossível num contexto não socializado.

Disso, associado com intenções políticas, econômicas e sociais, reside a atividade do professor, ou seja, sua função social encontra-se na incitação de uma necessidade no aluno e o condicionamento de um objeto (conhecimento teórico ou técnica) com potencial de satisfazer a necessidade engendrada de forma que aluno adentre em uma atividade própria e específica - a atividade de aprendizagem -, além de auxiliar o aluno a promover o conhecimento para um estado de generalidade e alcançar o conhecimento teórico. “O *modus faciendi* dessa mediação cultural, pelo trabalho dos professores, é o provimento aos alunos dos meios de aquisição de conceitos científicos e de desenvolvimento das capacidades cognitivas e operativas, dois elementos da aprendizagem escolar interligados e indissociáveis” (LIBÂNEO, 2004).

Portanto, no mundo contemporâneo da tecnologia e da informação, o professor ainda é uma figura insubstituível no contexto do ensino escolar, e talvez sempre o seja pelo papel que exerce diante do processo de apropriação dos conhecimentos socializados. Contudo, como salienta Libâneo (2013), o professor precisa ajustar sua prática e atitudes diante da nova realidade e adotar os novos meios de comunicação e informação como instrumentos de trabalho. “Mas é insuficiente ver os meios de comunicação meramente como recursos didáticos. Os meios de comunicação social (mídias e multimídias) fazem parte do conjunto das mediações culturais que caracterizam o ensino” (LIBÂNEO, 2013, p. 18).

Não só o professor tem o seu lugar, como sua presença torna-se indispensável para a criação das condições cognitivas e afetivas que ajudarão o aluno a atribuir significados às mensagens e informações recebidas das mídias, das multimídias e formas variadas de intervenção educativa urbana a valor da aprendizagem escolar está justamente na sua capacidade de introduzir os alunos nos significados da cultura e da ciência por meio de mediações cognitivas e interacionais providas pelo professor. Essa escola, concebida como espaço de síntese, estaria buscando atingir aqueles objetivos mencionados anteriormente para uma educação básica de qualidade: formação geral e preparação para o uso da tecnologia, desenvolvimento de capacidades cognitivas e operativas, formação para o exercício da cidadania crítica, formação ética (LIBÂNEO, 2013, p. 12).

Em conclusão, a apropriação é um processo ativo e mediado, do qual se viabiliza e se desenvolve o pensamento. É o processo que permite a continuidade da história por meio da transmissão da herança cultural material e espiritual, pois engendra a reprodução das capacidades humanas acumuladas. Mas para que os sujeitos, em sua individualidade, possam apropriar-se da riqueza cultural humana histórica e socialmente produzida são necessários meios de mediação e organização. Nesse caso, a comunicação destaca-se como principal meio de mediação externo, conseqüentemente a cooperação humana é fundamental, sucedendo disso a imprescindível presença do professor. Tem-se no ensino a maneira como a humanidade organiza essa apropriação e propicia o desenvolvimento das funções e faculdades psíquicas. Em sua forma sistematizada, o ensino concebe o sistema educacional. Na forma mais elevada, o ensino ocorre nos espaços coletivos e públicos, devido ao seu caráter de relevância para o meio social, uma vez que, em sua forma privada, o produto do processo de apropriação torna-se mercadoria, o que contradiz o aspecto de socializar e democratizar o acesso ao conhecimento.

3 CONSTRUCTOS DA TEORIA HISTÓRICO-CULTURAL

Entre 1924 e 1934, na União das Repúblicas Socialistas Soviéticas (URSS), um grupo de investigadores, sob a liderança do psicólogo Lev Semenovich Vigotski (1896-1934), realizou diversos estudos para tentar explicar o desenvolvimento psicológico humano a partir de princípios e métodos do materialismo histórico-dialético. Como resultado, obteve-se a base teórica para o desenvolvimento da psicologia Histórico-Cultural da Atividade. Importantes colaboradores fizeram parte desse grupo, dentre eles estavam Alexei N. Leontiev (1903-1979) e Alexander Romanovich Luria (1902-1977).

Após a morte de Vigotski, Leontiev prosseguiu com estudos sobre um importante conceito da Teoria Histórico-Cultural: a atividade humana. A partir desses estudos procedeu-se à Teoria da Atividade. Por sua vez, na área pedagógica, mas também sob o conceito de atividade, o psicólogo russo Vasili Vasilievich Davidov (1930-1998) formulou a Teoria do Ensino Desenvolvidor.

Neste capítulo dissertaremos sobre os construtos teóricos da Teoria Histórico-Cultural. Além disso, discorreremos sobre alguns desdobramentos dessa teoria: a Teoria da Atividade e do Ensino Desenvolvidor.

3.1 Teoria Histórico-Cultural

Lev Semenovich Vigotski nasceu na pequena cidade de Orsha, na Rússia Ocidental, dia 17 de novembro de 1896. Vítima de tuberculose, morreu precocemente aos 37 anos em 11 de junho de 1934. Formou-se em direito e filosofia pela Universidade de Moscou em 1917, tendo ainda, mais tarde, se graduado em medicina e se especializado em literatura.

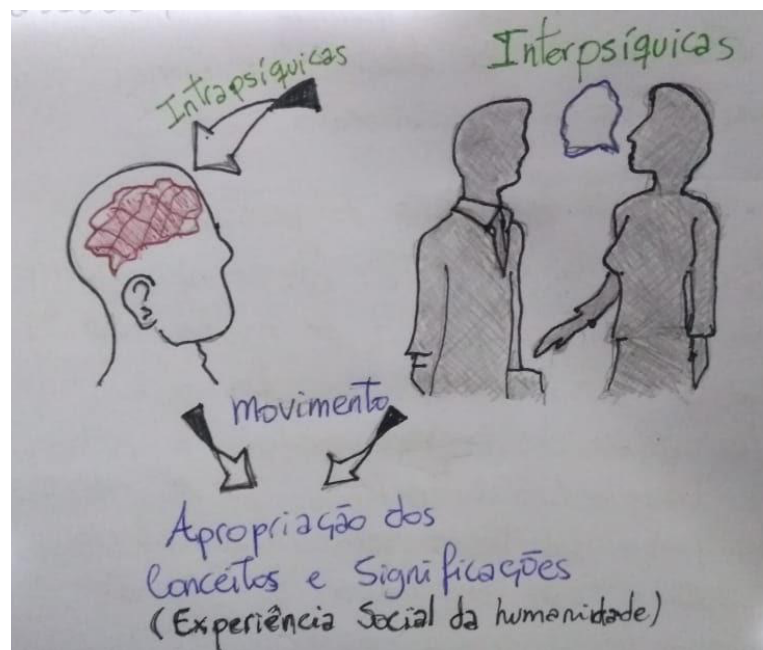
Com a proposta de realizar uma análise histórico-crítica da situação da psicologia na Rússia e no resto do mundo, Vigotski liderou um grupo de jovens cientistas no Instituto de Psicologia de Moscou, o qual entre os colaboradores estavam Alexander R. Luria e A. N. Leontiev. Sua finalidade era apresentar um modelo mais completo sobre os processos psicológicos humanos. Dessa forma, o grupo desenvolve o que hoje conhecemos por Teoria Histórico-Cultural.

Logo, era preciso desenvolver um novo método que possibilitasse a compreensão da natureza do comportamento humano como parte do desenvolvimento histórico geral da espécie. Para construí-lo, Vigotski

buscou subsídios na abordagem dialético-materialista, por acreditar que, em seus princípios, estava a solução para os paradoxos científicos com que se defrontavam seus contemporâneos (PALANGANA, 2015, p. 74).

Por meio dessa teoria, Vigotski apresentou a constituição histórico-social do desenvolvimento psicológico humano no processo de apropriação da cultura mediante a comunicação com outras pessoas. O psicólogo russo superou os estudos de outro grande estudioso contemporâneo, ou seja, sintetizou sua tese ao se apropriar e apontar as contradições internas dos trabalhos realizados por Jean Piaget. Para Piaget, o processo de aquisição da verdade seguia uma linha idealista, em que o movimento de apropriação da realidade dava-se da relação intrapsíquica para a relação intersíquica. Por sua vez, Vigotski alinha-se à filosofia materialista ao entender que o desenvolvimento das funções psíquicas superiores se origina a partir das dependências intersíquicas, acontece do meio social, para as dependências intrapsíquicas (Figura 1). No movimento dessas dependências ocorre a apropriação da realidade e a constituição dos significados e sentidos pelo homem, os quais são mediados pela linguagem. “Vigotski acreditava que é da relação entre a fala e a inteligência prática, da combinação entre o instrumento e o signo, que emergem as funções cognitivas superiores” (PALANGANA, 2015, p. 78).

Figura 1 - Apropriação dos conceitos e significações segundo Vigotski



Fonte: Do autor (2021).

Vigotski entende que para ocorrer esse movimento da atividade interpsíquica para a atividade intrapsíquica deve haver disponibilidade de **instrumentos**, os quais podem ter caráter físico ou simbólico. A função principal desses instrumentos é afetar o estado inicial do objeto, ou seja, desempenhar uma força que impacta o comportamento do indivíduo ou que altera o estado do objeto. Nesse sentido, os instrumentos físicos têm a função de ser um meio pelo qual o homem modifica a natureza, isto é, o meio externo. Já os instrumentos simbólicos, entendidos como os **signos**, têm a função de modificar o meio interno, a operação psicológica do homem.

O domínio da **linguagem** humana dá condições à criança de organizar a percepção da realidade. Por meio de orientações de um adulto, a criança inicia um processo de apreender as manifestações irrelevantes e relevantes do mundo objetivo, o que proporciona um controle do ambiente e no seu desenvolvimento tem-se a possibilidade de manejo do seu comportamento. “Daí a importância da linguagem no desenvolvimento do pensamento: ela sistematiza a experiência direta da criança e orienta seu comportamento, propiciando-lhe condições de ser tanto sujeito como objeto desse comportamento” (PALANGANA, 2015).

A apropriação do sistema linguístico permite, assim, organizar os processos mentais e ajuda a dar forma ao pensamento. Além de ser um dos principais meios pelo qual o indivíduo ressignifica seu conhecimento.

Em síntese, o domínio da fala, atributo do ser humano, permite à criança a utilização de instrumentos auxiliares, o planejamento da ação, o controle de seu próprio comportamento e, ainda, possibilita-lhe o acesso a uma forma de contato social privilegiada. Como se pode perceber, para Vigotski, a história da socialização da inteligência seria definida pela história do processo de internalização da fala social (PALANGANA, 2015, p. 80).

O desenvolvimento das funções psíquicas superiores do indivíduo é separado, por Vigotski, em dois principais estados: o desenvolvimento atual (real) e o desenvolvimento potencial. O desenvolvimento real caracteriza-se pela independência do sujeito, revela-se nas tarefas em que o ser realiza sem o auxílio de uma outra pessoa mais capaz, ou de outro tipo de mediação. Por sua vez, o desenvolvimento potencial descreve as tarefas que a criança realiza junto a um adulto ou um colega que já se apropriou dos conceitos necessários para a realização da tarefa. Dessa forma, há a fase em que a criança necessita de ajuda de outro indivíduo e outra que ela tem (ou há uma possibilidade de ter) uma autonomia sobre a tarefa.

[...] podemos afirmar que, ao realizarmos juntos uma tarefa, com uma criança ou um adolescente, ou adulto, há uma possibilidade de, em algum momento no futuro, ele fazer independentemente o que fazia com a nossa ajuda. Ou seja, aquilo que fazíamos juntos estará na iminência de fazerem de forma autônoma. A atividade coletiva colaborativa (com colegas ou outras pessoas) cria condições para essa possibilidade (PRESTES, 2013, p. 299).

A distância entre essas duas fases de desenvolvimento foi descrita por Vigotski como **Zona de Desenvolvimento Iminente (ZDI)**, também vista em algumas bibliografias como Zona de Desenvolvimento Proximal (ZDP) ou Zona de Desenvolvimento Imediato (ZDI).

É apoiando-se no conceito de Zona Blijaichego Razvitia que Vigotski diz que é preciso estudar as possibilidades da criança e não o que ela já tem ou sabe (nível real), pois, investigando o que faz de forma autônoma, estamos estudando o desenvolvimento do ontem, aquilo que a criança ou a pessoa já tem ou sabe.

Então, ele introduz o conceito de Zona Blijaichego Razvitia, afirmando que a atividade colaborativa pode criar essa zona que põe em movimento uma série de processos internos de desenvolvimento que são possíveis na esfera de relação com outras pessoas, mas que, ao percorrerem essa marcha orientada para o sentido interno, tornam-se patrimônio da criança. Isso não quer dizer que Vigotski vê o desenvolvimento apenas como maturação, ou que valoriza somente o ponto de chegada da criança. Ao contrário, seu desenvolvimento é uma possibilidade, então é imprevisível e não obrigatório; uma vez desencadeado, pode mudar de rumo e depende de múltiplos aspectos (PRESTES, 2013, p. 300).

Isso posto, na escola o professor é quem tem a responsabilidade de criar a ZDI, devido ao seu papel em sala de aula. A possibilidade de criação da ZDI acontece por meio de Situações Desencadeadoras de Aprendizagem, por serem situações intencionalmente concebidas a colocar o estudante em Atividade de Estudo. Em vista disso, considera-se que a atividade do professor deve ser intencionalmente dirigida para a criação da ZDI, e esta pode ser vista como o momento ativo de apreensão dos conceitos pelos estudantes. Leontiev (1978) identifica na ZDI as atividades humanas externa e interna.

3.2 Teoria da Atividade

O conceito atividade da teoria vigotskiana é introduzido a partir da concepção marxista do termo. Para Marx, “[...] a atividade em sua forma primária e básica era uma atividade sensorial, prática, na qual as pessoas entram em contato prático com objetos do mundo circundante, testam sua resistência e agem sobre ela, reconhecendo suas propriedades objetivas” (LEONTIEV, 1983, p. 17). Marx provoca uma ressignificação na teoria da cognição ao colocar a prática humana como base do aprendizado.

A prática é o processo em cujo desenvolvimento surgem problemas cognitivos, as percepções e o pensamento humanos se originam e se desenvolvem, e que ao mesmo tempo contém em si critérios de adequação e verdade do conhecimento: Marx diz que o homem deve provar a verdade, a atividade e poder e a universalidade de seu pensamento na prática [...] a descoberta filosófica de Marx consiste não em identificar a prática com a cognição, mas em reconhecer que a cognição não existe fora do processo da vida que, por sua própria natureza, é um processo prático e material. O reflexo da realidade surge e se desenvolve no processo de desenvolvimento de laços reais das pessoas cognitivas com o mundo humano que as cerca; é definido por esses laços e, por sua vez, afeta o desenvolvimento deles (LEONTIEV, 1983, p. 17).

A essência do conceito de atividade está em que ele reflete “[...] a relação entre o sujeito humano como ser social e a realidade externa - uma relação mediatizada pelo processo de transformação e modificação desta realidade externa” (DAVYDOV, 1988, p. 13).

Na concepção histórico-cultural, a atividade é um conceito-chave, explicativo do processo de mediação. A atividade mediatiza a relação entre o homem e a realidade objetiva. O homem não reage mecanicamente aos estímulos do meio, ao contrário, pela sua atividade, põe-se em contato com os objetos e fenômenos do mundo circundante, atua sobre eles e transforma-os, transformando também a si mesmo. Centrada na categoria teórica da atividade, a teoria histórico-cultural da atividade (ou teoria da atividade) surgiu como desdobramento da concepção histórico-cultural e foi desenvolvida por Leontiev (1903-1979) e depois por seus seguidores (LIBÂNIO; FREITAS, 2006, p. 3).

Além disso, o conceito de atividade está intrinsecamente ligado ao conceito de **ideal** que, por sua vez, é o vir a ser de um objeto que vai se transformando pela

atividade prática humana que surge na forma de necessidade e se materializa na ação do sujeito orientado pelas finalidades da atividade. A imagem ideal de um objeto existe no plano ideal do ser social, esse plano “[...] existente graças aos significados linguísticos e outras formações semióticas e simbólicas, lhe permite prever, predizer e provar as ações possíveis para chegar realmente ao resultado objetual que corresponda a uma necessidade” (DAVYDOV, 1988, p. 13). É um plano que só existe devido à ação do homem no plano real, mas ao surgir não se submete a esse plano; pelo contrário, em toda atividade prática-subjetiva os planos do ideal e o real entram numa relação dialética que determina a significação e a forma do produto da atividade.

Segundo Leontiev, a atividade interna é secundária: ela se forma no processo de interiorização da atividade objetual externa. É importante ter em conta que a interiorização não consiste em um simples deslocamento da realidade externa para o plano interno da consciência que existe anteriormente, mas na formação deste próprio plano (DAVYDOV, 1988, p. 31).

A existência do plano ideal permite ao homem, ao utilizar de instrumentos intrapsíquicos, apartar-se da sua atividade prática e representar o objeto que orienta suas ações de forma ideal. Com isso, é possível analisar, avaliar e questionar a atividade sensível por meio da atividade ideal. No entanto, o caráter social do homem também acomete essa representação no pensamento, uma vez que as posições de outros membros do coletivo causam um movimento de contradição na posição individual.

Sendo assim, a atividade particular “[...] não pode ser entendida fora dos laços sociais ou dos contatos que inevitavelmente vinculam os participantes do trabalho” (LEONTIEV, 1983, p. 24). “A reprodução pessoal da imagem ideal da sua atividade e da representação ideal nela das posições de outras pessoas, pode ser chamada de consciência” (DAVYDOV, 1988, p. 13).

A consciência tem que ser considerada juntamente com o ideal e a atividade; já que formam uma unidade indissolúvel, tendo a atividade importância predominante no processo. Porém, cada destas formações e todas juntas só podem ser compreendidas através da revelação do conjunto das relações sociais, que é a essência do ser humano.

O desenvolvimento mental de um indivíduo é, antes de tudo, o processo de formação de sua atividade, de sua consciência e, claro, de todos os processos mentais que as “servem” (processos cognitivos,

emoções, etc.). A psique se desenvolve durante toda a vida da pessoa, do nascimento à morte (DAVYDOV, 1988, p. 13-14).

Para a formulação de sua teoria, Alexis Leontiev tomou a compreensão materialista dialética da atividade visto como o reflexo da relação entre o sujeito humano e a realidade externa, relação dada pela transformação dessa realidade, mas que também implica na mudança de estado da própria realidade interna. Sua forma inicial é a atividade laboral e coletiva no mundo sensível-objetal, transformadora do meio natural e do pensamento individual e social. “A atividade é a substância da consciência humana” (DAVYDOV, 1988, p. 28). A atividade é, além de tudo, um processo eliciado e dirigido por um motivo, no qual uma necessidade se materializa. Mas essa necessidade só aparece a partir de seu conteúdo objetivo, por meio da própria ação prática do homem no mundo sensível, assim a conexão atividade e necessidade acontece por um modelo cíclico: atividade > necessidade > atividade.

Leontiev vê no objeto concreto o organizador e o propósito da atividade, ou seja, a atividade tem um caráter objetal. O objeto concreto não necessariamente pertence ao mundo sensível, ele é aquilo para o qual a ação se direciona e o sujeito se relaciona, seja ele interno ou externo. Esse objeto se revela quando, a partir da prática, o homem carece de algo experimentado, sendo assim fruto da própria necessidade. É da necessidade de algo que o homem pode se propor a busca por um objeto com potenciais de satisfazê-lo, no entanto, isso se relaciona a uma gama de objetos conhecidos da experiência prática.

Nesse sentido, a atividade humana obtém um caráter plástico, uma vez que ela se direciona, de fato, às propriedades do objeto inicialmente experimentados. Por meio da experimentação, na prática, essas propriedades podem se revelar em outros objetos, o que faz com que o objeto inicialmente concebido assuma uma forma distinta, fazendo com que atividade faça um certo desvio. Além disso, é a partir da experimentação que ocorre a transformação da necessidade em seu motivo. “A busca e a prova dos objetos concretos, que correspondem à necessidade, levam ao aparecimento dos motivos da atividade” (DAVYDOV, 1988, p. 44).

A atividade do sujeito está sempre associada a certa necessidade. Sendo uma expressão da carência de algo experimentado pelo sujeito, a necessidade provoca sua tendência à busca, na qual se manifesta a plasticidade da atividade: sua semelhança às propriedades dos objetos existentes independentemente dela. Nesta subordinação ao

objeto, nessa semelhança a ele consiste na determinação da atividade humana por parte do mundo externo. Neste processo tem lugar a “palpação” (percepção) de seu objeto por parte da necessidade, sua objetivação, sua conversão no motivo concreto da atividade.

Posteriormente, a atividade do sujeito já não é dirigida ao próprio objeto, mas à sua imagem, que surge na situação de busca, no processo do qual a atividade do homem se assemelha às propriedades do objeto. A geração da imagem não é um processo unilateral de ação do objeto sobre o sujeito, mas um processo bilateral. Na essência, a imagem é o resultado de um tipo de “prova” do próprio objeto.

As propriedades essencialmente importantes da atividade como sua plasticidade e capacidade de assemelhar-se, manifestadas nas ações de busca-prova que o sujeito efetua, estão intimamente ligadas à construção da imagem do objeto. Ou seja, as ações de busca-prova do sujeito com os objetos externos geram o reflexo psíquico destes objetos (DAVYDOV, 1988, p. 29-30).

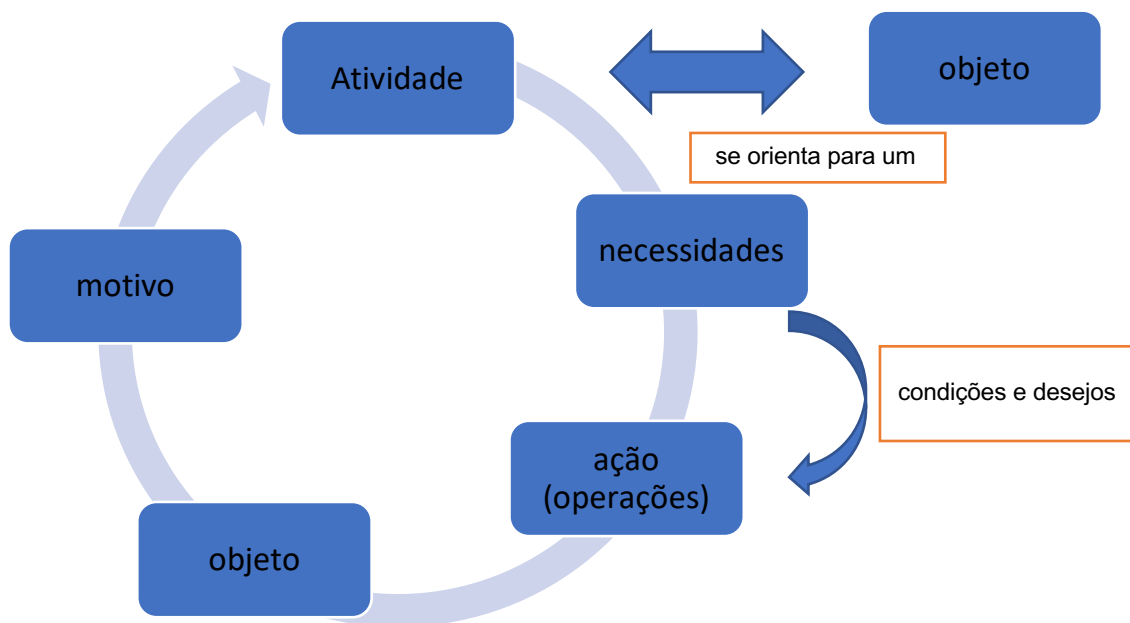
Dessa maneira, é possível verificar que não há atividade sem um objeto, uma necessidade e o motivo da atividade. Conforme Leontiev, uma atividade contém os seguintes componentes (Figura 2): necessidades, motivos, objeto e as condições para a apropriação do objeto que em seu conteúdo contém o motivo que pode satisfazer a necessidade; os quais estão em uma constante conexão de conversão mútua. Além dos componentes correlatos: atividade, ação e operações.

Um determinado motivo incita uma pessoa a propor-se uma tarefa para assegurar a finalidade que, quando apresentada sob certas condições, requer a realização de uma ação para que a pessoa consiga criar ou adquirir o objeto que responde às demandas do motivo e satisfaça a necessidade. O procedimento e o caráter do cumprimento da ação dirigida a resolver a tarefa estão determinados pela finalidade desta. Por sua vez, as condições da tarefa determinam as operações concretas na execução da ação (DAVYDOV, 1988, p. 33).

A primeira condição de uma atividade é o surgimento de uma necessidade, no entanto, a necessidade não é a força motriz para que o sujeito entre em ação e não determina sua orientação. É no objeto que a necessidade se materializa, quando encontra sua determinação nesse objeto. Mas o objeto com potencial de satisfazer essa necessidade tem em primeira instância uma forma não revelada; somente na primeira satisfação que suas formas emergem para o nível consciente. “Só como resultado dessa revelação, é que a necessidade adquire sua objetividade e o objeto percebido (representado, imaginado) vem a adquirir sua atividade provocativa e diretiva como função; isto é, torna-se um motivo” (LEONTIEV, 1983, p. 203).

[...] as necessidades, enquanto força interna, só podem ser realizadas na atividade. Em outras palavras, a necessidade aparece, em princípio, só como uma condição, um pré-requisito para a atividade, porém, assim que o sujeito começa a agir, ocorre imediatamente sua transformação, e a necessidade deixa de ser aquilo que era virtualmente, “em si mesma”. Quando mais prossegue o desenvolvimento da atividade, mais esse pré-requisito é convertido em seu resultado (LEONTIEV, 1983, p. 209).

Figura 2 - Componentes da atividade



Fonte: Do autor (2021).

Na tentativa de apropriação do objeto dada na atividade do homem, vale destacar o importante papel do instrumento e da linguagem.

O instrumento não é para o homem um simples objeto de forma exterior determinada e possuindo propriedades mecânicas definidas; ele manifesta-se-lhe como um objeto no qual se gravam modos de ação, operações de trabalho socialmente elaborados (LEONTIEV, 2004, p. 180).

Por sua vez, a linguagem é através da qual se “[...] generaliza e se transmite a experiência da prática sócio-histórica da humanidade: por consequência, é igualmente um meio de comunicação, a condição de apropriação dos indivíduos desta experiência e a forma da sua existência na consciência” (LEONTIEV, 2004, p. 184). Portanto, a

atividade humana carrega consigo, acontece e se modifica nos instrumentos histórica e culturalmente desenvolvidos e por meio da comunicação.

Ademais, dos componentes da atividade, entendemos o “motivo” como “[...] aquilo em que a necessidade se concretiza de objetivo nas condições consideradas e para as quais a atividade se orienta, o que a estimula” (LEONTIEV, 2004, p. 103). Já o termo ação “[...] é um processo cujo motivo não coincide com o seu objeto (isto é, com aquilo que visa), pois pertence à atividade em que entra a ação considerada” (LEONTIEV, 2004, p. 316). Por sua vez, entendemos operação como

[...] o modo de execução de uma ação. A operação é conteúdo indispensável de toda a ação, mas não se identifica com a ação. Uma só e mesma ação pode realizar-se por meio de operações diferentes, e inversamente, ações diferentes podem ser realizadas pelas mesmas operações (LEONTIEV, 2004, p. 323).

A ação é determinada pelo seu fim, que quando coincide com o motivo torna-se uma atividade. Por sua vez, as operações se vinculam diretamente com as condições em que é dado o objeto.

Por fim, temos a unidade dialética prático-reflexiva (práxis) que permite a apropriação da realidade pelos sujeitos, vê-se a atividade como estado primeiro, ou seja, a atividade é antecessora e motor do desenvolvimento de qualquer faculdade humana, logo a teoria é da Atividade. A apreensão da realidade, i.e., a apropriação do conhecimento é um processo. No primeiro momento, por meio da atividade prática, há o contato do sujeito com o objeto concreto, o que permite que o homem assimile o objeto, engendre necessidades e inicie a interiorização. A interiorização concebe a construção de imagens no plano ideal do indivíduo, o que acarreta numa atividade com caráter mental. Dessa forma, o sujeito tem a possibilidade de conscientizar a verdade e transformá-la em conhecimento e linguagem, com vistas à socialização e afirmação desse conhecimento. Dentro da perspectiva do materialismo histórico-dialético, essa construção humana é consequência, insere-se e modifica-se no trabalho. A atividade “[...] cuja expressão maior é o trabalho, é a principal mediação que os sujeitos estabelecem com o mundo objetivo” (LIBÂNEO, 2004, p. 7).

3.3 Teoria do Ensino Desenvolvimental

Vasili Vasilovich Davidov nasceu em 31 de agosto de 1930 em Moscou, na União das Repúblicas Socialistas Soviéticas (URSS), e faleceu no dia 19 de março de 1998 na pacata Kogalym da Federação Russa. Pós-graduado em filosofia, doutorou-se em psicologia no ano de 1970 com a dissertação “Tipos de generalización en la enseñanza” (1972). Davidov tem mais de setenta produções científicas, dentre elas: Problemas do Ensino Desenvolvimental (1988), The Age Limits of Assimilating Knowledge (1966), Psychological Capacities of Elementary Schoolchildren in Learning Mathematics (1969) e Psychological Conditions of the Origin of Ideal Actions (1979). Foi professor titular da Academia de Ciências Pedagógicas e diretor do Instituto de Psicologia Geral e Pedagógica da URSS. É da terceira geração de um grupo de psicólogos russos que compõem a chamada escola científica de Vigotski (LEONTIEV, 1983).

Foi colega de trabalho e orientado por Daniil Borisovich Elkonin (1904-1984), pesquisador ucraniano contemporâneo de Vigotski e um dos contribuidores de seu pensamento. Ambos os pesquisadores foram responsáveis pelo desenvolvimento da Teoria do Ensino Desenvolvimental. Junto de outros colaboradores, eles equiparam a pedagogia com os conceitos da Teoria Histórico-Cultural da Atividade ao desenvolverem as conjecturas da Atividade de Estudo como componente basilar do Ensino Desenvolvimental. À exceção de seguirem as propostas teóricas de Vigotski, alicerçaram-se sobre os princípios dos estudos da Teoria da Atividade de Alexis N. Leontiev e tiveram no Materialismo Histórico-Dialético da filosofia marxista-lenista uma maneira de interpretar a realidade e se munirem metodologicamente.

Davydov (1988) revela que a apropriação (processo de educação e ensino) dos produtos da cultura é condição fundamental para o desenvolvimento das capacidades e qualidades mentais humanos, corroborando os postulados de Vigotski e seus seguidores.

Primeiro, no sentido mais amplo, a educação e o ensino de uma pessoa não é nada mais que sua “apropriação”, a “reprodução” por ela das capacidades desenvolvidas histórica e socialmente. Segundo, a educação e o ensino (“apropriação”) são as formas universais de desenvolvimento mental do homem. Terceiro, a “apropriação” e o desenvolvimento não podem ser dois processos independentes, pois se correlacionam como a forma e o conteúdo de um único processo do desenvolvimento mental humano (DAVYDOV, 1988, p. 57).

O estudioso russo considera as formas culturais como “[...] a expressão lógica, universal da história da consciência humana” (DAVYDOV, 1988, p. 64), ligando-as dessa maneira à esfera do ideal coletivo. Essas formas culturais são produtos da consciência coletiva, produzidas pelas ações dos sujeitos no meio social e em suas relações com a natureza. Ademais, as formas culturais propõem maneiras de se comportar, de se comunicar, reproduzir ferramentas e objetos a um sujeito cognoscente com vontades próprias; e em sua apropriação tem-se a repetição sucinta do caminho histórico trilhado pelo desenvolvimento da consciência coletiva.

Assim, a apropriação pelos indivíduos das formas culturais aparece como reprodução abreviada, no desenvolvimento do indivíduo, dos aspectos essenciais da história da consciência. Portanto, os problemas da história da consciência e sua ontogênese estão internamente ligados aos problemas do desenvolvimento histórico da cultura e de sua apropriação pelo indivíduo (DAVYDOV, 1988, p. 64).

Uma vez exposta e aceita a proposta de que, durante o processo de aquisição de conhecimento socialmente produzido e formalizado, o estudante também reproduz, de forma breve, a história do próprio conhecimento, tem-se que a tarefa essencial da ciência

[...] será a de determinar como o conteúdo do desenvolvimento espiritual da humanidade se transforma em suas formas de desenvolvimento espiritual e como a apropriação destas formas pelo indivíduo se transforma no conteúdo do desenvolvimento de sua consciência (DAVYDOV, 1988, p. 65).

No reconhecimento das atividades reprodutivas, Davidov destaca a peculiaridade da atividade da aprendizagem, cujo conteúdo é o conhecimento teórico, o qual engendra o pensamento teórico “[...] que visa, por meio da análise, da reflexão e por ações mentais de planificação, alcançar as relações existentes entre os elementos que constituem um dado fenômeno, **compreendendo-o em sua essência** [...]” (CLARINDO; MILLER, 2018, p. 246, grifo nosso).

Em seus trabalhos, Davidov expõe as contradições internas do ensino tradicional, que se define como um ensino com foco no conteúdo empírico, que apresenta os conceitos em sua forma estática, de forma acabada, cujos alunos são

passivos no processo de aprendizagem. O estudioso soviético entende que a Teoria do Ensino Desenvolvimental é um instrumento que visa à superação desse ensino.

Entende-se como ensino desenvolvimental o ensino que desenvolve ativamente os fundamentos do pensamento contemporâneo, que ensina aos estudantes maneiras de agir de forma independente, consciente e intencional sobre as demandas e contínuas mudanças da realidade social. O ensino é considerado desenvolvimental quando o estudante desenvolve capacidades de lidar com o grande volume de informações da mídia, das redes sociais, do banco de dados da internet, de livros científicos e do *mainstream*, além de conseguir assimilar as demandas causadas pelo desenvolvimento dos instrumentos dos processos de produção. O ensino desenvolvimental é aquele que cumpre o objetivo de possibilitar o alcance do pensamento teórico, a essência da coisa em si.

Os pedagogos começam a compreender que a tarefa da escola contemporânea não consiste em dar às crianças uma soma de fatos conhecidos, mas em ensiná-las a orientar-se independentemente na informação científica e em qualquer outra. Isto significa que a escola deve ensinar os alunos a pensar, quer dizer, desenvolver ativamente neles os fundamentos do pensamento contemporâneo para o qual é necessário organizar um ensino que impulse o desenvolvimento. Chamemos esse ensino de “desenvolvimental” (DAVYDOV, 1988, p. 3).

Os conceitos basilares das teorias davidovianas oferecem aportes teóricos e metodológicos para a pesquisa, organização e Atividade de Ensino, pois oferece meios de favorecer a reflexão sobre o ensino tradicional e seu conteúdo, o conhecimento empírico, o qual “não têm conseguido dar conta de uma educação que busque empreender uma relação vital dos estudantes com o mundo dos conhecimentos científicos pensados” (CLARINDO; MILLER, 2018, p. 246). Em contrapartida, é exposto que a superação desse ensino reside em um modelo educacional que favorece a Atividade de Estudo dos escolares, por meio da atuação intencional do professor (e agentes educacionais) orientados para o estabelecimento de uma aprendizagem autônoma, criadora, produtiva, que transforma tanto o meio intersíquico quanto o intrapsíquico, uma atuação que possibilite o pensamento teórico e o desenvolvimento das capacidades psíquicas superiores do homem.

3.4 Materialismo Histórico-Dialético

“Indaga-se, pois: o que é a Vida? O que é o Ser? Nada mais que uma sucessão de ação e reação? Nascer, viver, morrer é mudar de formas. Predomina, destarte, a impermanência das formas.”
(SANTANA, 2015, p. 135)

Ao entender e expor sobre os problemas teóricos-metodológicos que abarcavam a psicologia mundial e que acarretavam num problema para o objeto desse campo de estudo, Vigotski propõe um método fundamentado no materialismo histórico-dialético do filósofo prussiano Karl Marx. O psicólogo entendia que, instrumentalizado dessa teoria, haveria possibilidade da compreensão real da natureza do comportamento humano como parte do desenvolvimento histórico-social além de uma maneira de solucionar paradoxos científicos que os métodos empiristas e experimentalistas do seu tempo enfrentavam. Nesse sentido, para entender a Teoria Histórico-Cultural é necessário um estudo das raízes do seu desenvolvimento, um estudo sobre o materialismo histórico-dialético.

O termo **materialismo** tem correspondência com a interpretação objetiva da realidade (verdade), atribui que a existência da realidade se encontra na matéria, que por sua vez é mutável. Dessa forma, só é possível ter contato com a realidade, conhecê-la, quando temos contato com o objeto real, e na mutabilidade da matéria tem-se a manifestação de uma verdade dinâmica, sempre se transformando. Nesse aspecto, é possível entender o materialismo como uma contraposição ao idealismo, que entende que a existência começa nas ideias, ou seja, o mundo real é construído a partir de uma relação subjetiva para a objetiva. Para o idealismo, a realidade depende do observador e seu julgamento sobre ela, depende das sensações que a observação realizada para o objeto lhe oferece, objeto esse visto como imutável.

Materialismo é toda concepção filosófica que aponta a matéria como substância primeira e última de qualquer ser, coisa ou fenômeno do universo. Para os materialistas, a única realidade é a matéria em movimento, que, por sua riqueza e complexidade, pode compor tanto a pedra quanto os extremamente variados reinos animal e vegetal, e produzir efeitos surpreendentes como a luz, o som, a emoção e a consciência. O materialismo contrapõe-se ao idealismo, cujo elemento primordial é a ideia, o pensamento ou o espírito (ALVES, 2010).

O conceito de **história** é entendido como atemporal (em relação ao tempo de relógio ou calendário), sua conceituação e seu desenvolvimento dependem da transformação e das relações sociais que existem vinculadas ao objeto material. Isso é, a história se define, se transforma e se desenvolve a partir das mutações materiais da sociedade; portanto, há uma concepção materialista da história. Do entendimento materialista da evolução da história, subentende-se a sua impermanência pela ação humana objetiva. Spirkin e Yakhov (1975, p. 9) afirmam que a “história da sociedade distingue-se da história da natureza, em primeiro lugar, pelo facto de que a primeira é feita pelos homens enquanto ninguém faz a segunda”.

A história da humanidade exprime-se a partir das mudanças dos instrumentos que permitem o estabelecimento das relações, das práticas sociais e mediatiza o contato sensorial e objetivo com o objeto concreto. A história evolui nas transformações que os objetos sofrem devido às ações dos homens. O homem em contato com a natureza apropria-se do objeto e o modifica segundo uma possibilidade de satisfazer uma necessidade. As necessidades sociais também podem acarretar a ação do homem para a reorganização das relações sociais vigentes, e dessas metamorfoses inicia e desenvolve-se a história.

[...] a história nada mais é do que o resultado, as consequências e as mudanças geradas pelas ações do homem sobre a natureza e sobre os próprios homens. À medida que o homem modifica suas necessidades materiais, sua maneira de pensar e agir, ele gera mudanças no seu ser social que irá resultar em outras mudanças na forma de organização da sociedade, são essas mudanças que darão origem à história (PEREIRA; FRANCIOLI, 2011).

O significado de **dialética** passou por diversas transformações durante o tempo, tendo desse modo uma historicidade na concepção materialista. Inicialmente era entendida como a arte de argumentar no diálogo e transformou-se na arte de sustentar uma tese por meio de argumentos. Nos Diálogos platônicos, duas pessoas estabeleciam um diálogo a partir de um entendimento particular acerca de determinado tema, e cada um pleiteava de modo a distanciar-se da simples opinião (doxa) (imaginação e crença) para ascender ao verdadeiro conhecimento (episteme) da realidade (SILVA; SILVA, 2009, p. 97).

Para nós, dialética é o que permite a apropriação da manifestação real do objeto, da verdade. A dialética se manifesta a partir das contraposições no movimento real de ideias coexistentes que finalizam o objeto. Como visto em Kopnin (1978, p. 84)

a “[...] dialética estuda a relação entre as formas do pensamento, a subordinação destas no processo de movimento do conhecimento no sentido da verdade”.

Dialética é contrapor ideias contrárias, ideias que coexistem e se contradizem, que fazem com que o objeto sofra um movimento de alteração e seja sintetizado a um novo estado, a uma nova compreensão. Perceba que nesse movimento o objetivo obtém uma marcha histórica. Dialética é entender que a manifestação real do objeto reside em sua mutabilidade, no conflito entre seu *ser* e seu *não ser*. A dialética “[...] trata da "coisa em si". Mas a "coisa em si" não se manifesta imediatamente ao homem. Para chegar à sua compreensão, é necessário fazer não só um certo esforço, mas também um *détour*” (KOSIK, 1976, p. 9).

Portanto, temos que a dialética é materialista por seu caráter objetivo, entendendo que a história evolui pelas transformações que o objeto sofre e que a dialética é o modo em que se busca compreender essas mudanças, mudanças resultantes de um conflito entre o que se entende naquilo que o objeto é e naquilo que ele não é. Dessa forma, o "ser histórico do homem é estudado pelo materialismo histórico, que, junto com a dialética materialista, forma um todo único indivisível.” (KOPNIN, 1978, p. 64). Além disso, como movimento é mudança e mudança resulta em história, tem-se que “[...] nenhum problema do materialismo dialético se resolve sem a concepção materialista da história” (KOPNIN, 1978, p. 64).

A unidade entre o materialismo dialético e o materialismo histórico resulta no materialismo histórico-dialético. O **materialismo histórico-dialético** é uma teoria desenvolvida pelo filósofo prussiano Karl Marx (1818-1883), sua gênese provém do filósofo grego Heráclito de Éfeso, alcunhado de “O Obscuro” e considerado o “pai da dialética”. Heráclito entendia que tudo estava sujeito ao *devenir* a partir do cisalhamento dos seus opostos que são coexistentes. A filosofia marxista corrobora com essa visão ao entender o mundo como dialético e desenvolve um método para apreender o mundo dialético objetivo. “Se o mundo é dialético (se movimenta e é contraditório) é preciso um Método, uma teoria de interpretação, que consiga servir de instrumento para a sua compreensão, e este instrumento lógico pode ser o método dialético tal qual pensou Marx” (PIRES, 1997).

O método desenvolvido por Marx é o materialismo histórico-dialético. Para defini-lo podemos nos apoiar em Pires (1997):

O método materialista histórico-dialético caracteriza-se pelo movimento do pensamento através da materialidade histórica da vida dos homens em sociedade, isto é, trata-se de descobrir (pelo movimento do pensamento) as leis fundamentais que definem a forma organizativa dos homens em sociedade através da história (PIRES, 1997, p. 83).

Nesse contexto, surge a **práxis** como conceito fundamental do marxismo para se apropriar da realidade. A práxis é a unidade prático-intelectual, entre a atividade prática (agir) e a atividade do pensamento (pensar). A práxis é crucial para o desenvolvimento do homem. “A práxis na sua essência e universalidade é a revelação do segredo do homem como ser ontocriativo, como ser que cria a realidade (humano-social) e que, portanto, compreende a realidade (humana e não-humana, a realidade na sua totalidade)” (KOSIK, 1976, p. 202).

A práxis revela o caráter construtivo, ativo e intencional do homem. Diferentemente de qualquer outro animal, o homem percebe a natureza, apropria-se de seus recursos e não se limita a ela. O homem, por meio da práxis, consegue atuar sobre a natureza e modificá-la para atender a suas necessidades. Dispõe-se com a práxis a ascensão do animal que é ator e escritor da sua própria história, do animal que atua de forma teórica e prática. A práxis revela o *homo sapiens*. “De acordo com esse conceito, ação e consciência estão intimamente ligadas, e os homens, apesar de viverem em estruturas sociais já estabelecidas, não são objetos passivos dessas estruturas, mas sujeitos ativos de sua própria história” (SILVA; SILVA, 2009, p. 270).

Por meio da práxis o homem evolui, desenvolve relações sociais e concebe a própria história, produzindo e acumulando conhecimento.

A práxis é ativa, é atividade que se produz historicamente - quer dizer, que se renova continuamente e se constitui praticamente -, unidade do homem e do mundo, da matéria e do espírito, de sujeito e objeto, do produto e da produtividade. Como a realidade humano-social é criada pela práxis, a história se apresenta como um processo prático no curso do qual o humano se distingue do não-humano: o que é humano e o que não é humano não são já predeterminados; são determinados na história mediante uma diferenciação prática (KOSIK, 1976, p. 202).

4 DESENVOLVIMENTO LÓGICO-HISTÓRICO DA TRIGONOMETRIA

Se fôssemos formular uma hipótese sobre a necessidade que originou a disciplina Trigonometria, não seria absurdo pensarmos em um problema o qual para a devida solução se confere como instrumento o triângulo retângulo na razão dos seus lados em função de um ângulo, visto que as funções conhecidas como trigonométricas - seno, cosseno, tangente, cotangente, secante e cossecante - têm uma íntima relação com esse tópico da matemática em sua forma moderna. Mais ainda, numa análise etimológica, temos as palavras gregas *trigōnon* (triângulo) e *metron* (medida) na formação do vocábulo Trigonometria, conseqüentemente a palavra significa medição (dos lados e ângulos) de triângulo, o que traz muita coerência à hipótese realizada.

No entanto, no estudo do desenvolvimento histórico do conceito, somos surpreendidos ao verificar que essa ciência tem sua gênese nas relações dos arcos e cordas de circunferência, as quais ajudaram a solucionar problemas de caráter astronômico sob um modelo geocêntrico do Sistema Solar. A sua forma mais moderna começa a se configurar só a partir do século XVI, devido aos avanços dos estudos de Nicolau Copérnico, os quais validavam o modelo heliocêntrico.

Se quisermos verificar como se deu o desenvolvimento lógico-histórico da Trigonometria, precisamos entender que a capacidade de transformar medidas de ângulos em comprimentos é o que transforma a Trigonometria em uma ciência. Tem-se no trabalho de Hiparco com cordas de circunferência o primeiro exemplo nesse sentido (VAN BRUMMELEN, 2009).

Intentamos neste capítulo apresentar o que determinou o surgimento da grandeza Ângulo - conceito que tem fundamental contribuição no surgimento da Trigonometria -, além de descrevermos as necessidades e os instrumentos que permitiram a Hiparco desenvolver sua tábua de cordas, a qual mais tarde foi aprimorada por Ptolomeu e propiciou a tábua dos senos pelos matemáticos indianos.

4.1 Ângulo

O homem primitivo, ao deixar de ser coletor de alimentos vegetais e caçador de animais, passando a ter como atividades principais o cultivo e a criação dos seus alimentos, cria um marco histórico que dá origem a outras necessidades e por conseqüência a outras atividades. O domínio da contagem, por exemplo, surgiu devido à necessidade de controlar a quantidade de ovelhas, bois e demais animais de

pasto. Foi então que se começou progressivamente a sentir outras carências sociais, em virtude da primeira permitir melhor comodidade e organização coletiva. “É só quando o nível da civilização se vai elevando e, em particular, quando o regime de propriedade se vai estabelecendo, que aparecem novos problemas - determinações de comprimentos, áreas, etc., - os quais exigem a introdução de novos números” (CARAÇA, 2010, p. 5).

A necessidade de produzir sua própria alimentação, por meio das atividades de cultivo de vegetais e criação de rebanhos, somada a questões religiosas e místicas, fez com que o ser humano fosse exigido a entender os ciclos da natureza associados às regularidades e ciclos dos astros observáveis no nosso Universo, o que levou à criação do calendário (HOGBEN, 1950). Notou-se que os animais e o próprio ser humano obedeciam a um determinado ciclo de reprodução e que os vegetais dispunham de um ciclo característico para seu cultivo e amadurecimento integral. Além disso, percebeu-se que a própria natureza da mulher e o nosso tempo desperto eram cíclicos, este último acompanha geralmente o alvorecer e o anoitecer.

A assimilação dos fenômenos descritos fez com que a grandeza Tempo surgisse no consciente humano. Os instrumentos desenvolvidos para mensurar as estações do ano, fracionar o dia e analisar a órbita lunar em torno da Terra, dependeram da cognição da grandeza Ângulo. Esta grandeza ainda proporcionou sistematizar a organização de um calendário, o qual é um importante instrumento para organização das relações sociais e aperfeiçoamento da agricultura (HOGBEN, 1950; VAN BRUMMELEN, 2009).

4.2 Elementos da Astronomia Antiga

A relação Tempo e Ângulo, assim como Ângulo e Comprimento, situa-se inicialmente na análise dos corpos celestes e seus movimentos aparentes. Foi preciso antes de tudo algumas formulações sobre a configuração dos astros no espaço sideral, só assim o ser humano foi capaz de dar continuidade em certos aspectos do seu desenvolvimento social. O pressuposto da Terra situar-se no centro do Universo com todos os demais astros, inclusive o Sol, girando ao seu redor ficou conhecido como sistema geocêntrico e prevaleceu como verdade humana até ser contrastado pelos estudos de Nicolau Copérnico no século XVI e ser substituído de vez pelo sistema heliocêntrico em virtude de demais cientistas confirmarem sua consistência.

Os trabalhos de astrônomos antigos, tais como Eudoxus, Apolônio e Hiparco, favoreceram o desenvolvimento e a afirmação do modelo geocêntrico, enquanto apenas Aristarco sugeriu o sistema heliocêntrico. No entanto, foi devido a Claudio Ptolomeu (90 – 168 d.C.) apresentar o modelo mais sofisticado, mais bem sucedido e verdadeiramente científico, que a visão geocêntrica conseguiu prevalecer no pensamento humano até o século XVI, por esse motivo a teoria do geocentrismo é também conhecida como teoria Ptolomaica. O sistema proposto por Ptolomeu foi capaz de se ajustar aos movimentos dos planetas, prever eclipses com precisão além de outras variedades de outros fenômenos astronômicos (VAN BRUMELLEN, 2009).

Claudio Ptolomeu viveu em Alexandria, no Egito, na época parte do reino grego. É o autor de uma das obras mais influentes da história da humanidade: *Almagesto* - em árabe *Kitab al-majisti* -, cujo significado é “o grande tratado”. O *Almagesto* “[...] é, em essência, uma compilação baseada em Hiparco e seus contemporâneos” (HOGBEN, 1950, p. 246). Nessa obra, uma coleção de treze livros, o objetivo do astrônomo é gerar um modelo matemático para os movimentos de todos os objetos celestes (as estrelas fixas, os planetas, o Sol e a Lua), a partir das observações coletadas. Dessa forma, Ptolomeu pretendia prever as posições e fenômenos dos corpos celestes.

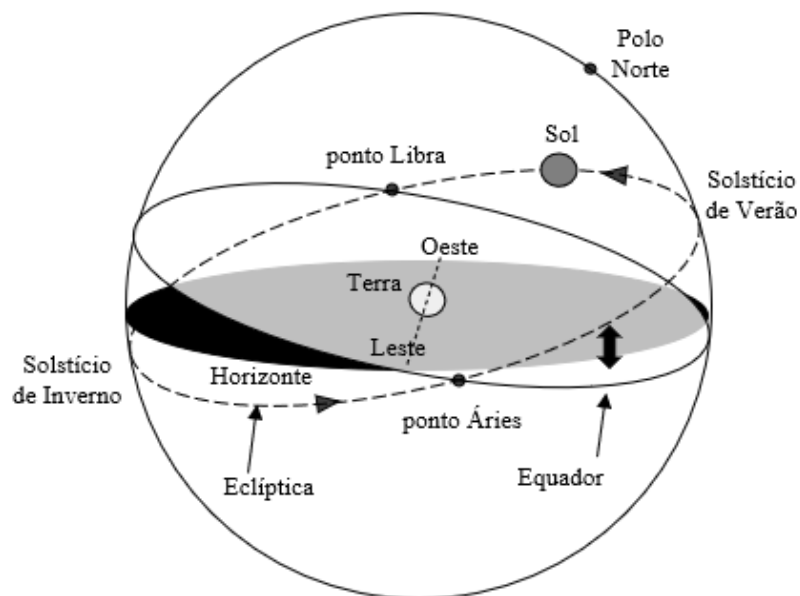
No modelo geocêntrico a Terra situa-se no centro de um globo muito maior no qual os demais astros se fixavam. Esse globo, visto na Figura 3, era conhecido como esfera celeste ou firmamento. Ao longo de um dia, a esfera celeste girava em torno de um eixo que passava pelo polo celeste. Esse giro que vai de leste a oeste, carrega consigo o Sol e as demais estrelas, assim provocando dia e noite na Terra. As estrelas permanecem no mesmo lugar, uma em relação a outra, por isso o nome estrelas fixas. Para qualquer observador, o equador celeste permanece no mesmo lugar no céu, transformando-se em si mesmo com sua rotação diária. Sete corpos (o Sol, a Lua e os cinco planetas visíveis) também participam desse movimento, mas se movem lentamente em relação às estrelas fixas. Por exemplo, o deslocamento do Sol performa um grande círculo na esfera celeste, conhecida como eclíptica.

Além disso, o astro rei completa uma revolução por ano na direção oposta ao movimento diário da esfera celeste, essa revolução é aproximadamente 1° por dia. A eclíptica não permanece fixa no lugar; é conduzida pela rotação diária da esfera celeste. Duas vezes por ano o Sol cruza o equador celeste e, nessas horas, dia e noite são do mesmo comprimento; esse cruzamento dá origem ao equinócio de primavera,

localizado no ponto Gama (também chamado ponto Áries) e equinócio de outono, localizado no ponto Ômega (igualmente conhecido como ponto Libra).

Os babilônicos dividiam a eclíptica em quatro regiões e notaram que o Sol despendia de três órbitas lunares em cada uma, dessa maneira cada região foi dividida em três meses. Logo, havia doze regiões que eram identificadas com uma constelação no zodíaco ou próximo a ele, dando origem aos signos do zodíaco Áries, Touro, etc. Os signos ficaram divididos em tamanhos iguais de 30 dias na correspondência atual, esse valor é muito conveniente para uma civilização com um sistema de numeração sexagesimal. O zodíaco ficou segmentado em 360 unidades, assim como o ano babilônico foi estimado em trezentos e sessenta dias. Cada divisão natural de um dia dado pelo passeio circular do Sol na eclíptica originou o grau, simbolizado hoje por $^{\circ}$ (HOGBEN, 1950; VAN BRUMMELEN, 2009).

Figura 3 - A esfera celeste, o equador e a eclíptica



Fonte: Do autor (2020).

4.3 Hiparco

Uma tentativa de tentar traçar o desenvolvimento lógico-histórico da Trigonometria pode ser feita a partir das realizações do astrônomo grego Hiparco de Niceia (190 – 120 a.C.), considerado o fundador da Trigonometria (HOGBEN, 1950;

VAN BRUMMELEN, 2013). A única obra desse astrônomo que sobreviveu aos infortúnios do tempo foi “Introdução aos Fenômenos de Aratus e Eudoxus”, sua vida e demais obras são um mistério. As referências que se têm de Hiparco são de autores posteriores, muitas delas fornecidas por Cláudio Ptolomeu em sua obra *Almagesto*, escrita três séculos depois de Hiparco. Dessa forma, sabe-se que o astrônomo estudou sobre diversos tópicos científicos, como astronomia, ótica, análise combinatória, astrologia e geografia – uma crítica ao trabalho de Eratóstenes. Cabe enfatizar que a obra de Ptolomeu não foi escrita como obra de história, embora os historiadores tenham usado o *Almagesto* para fazer algumas inferências sobre a astronomia grega anterior, o que exatamente aconteceu durante o período de Hiparco a Ptolomeu permanece um enigma (VAN BRUMMELEN, 2013).

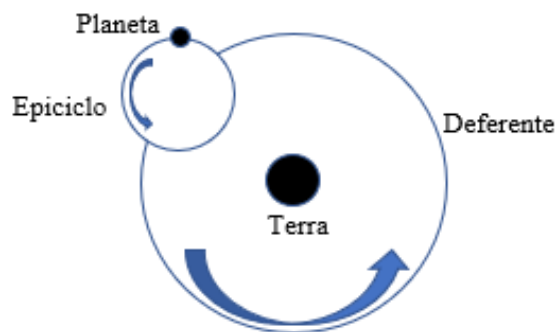
Reconstruções recentes de alguns trabalhos perdidos de Hiparco sugerem o uso de uma trigonometria rudimentar. Em ensaios para se definir a distância do Sol e da Lua há a demanda do conhecimento de cordas de certos arcos que surgem no problema, para os quais os métodos de Aristarco (310 - 230 a.C.) seriam insuficientes (VAN BRUMMELEN, 2009). Hiparco foi um dos interessados em contribuir para um modelo geométrico que explicasse as anomalias nos movimentos dos planetas, já que o princípio aristotélico do movimento uniforme sobre um círculo com a Terra no centro era contestado pelo próprio passeio anual do Sol na esfera celeste, ou seja, era contestado pelos acontecimentos reais. “Não há dúvida de que Hiparco construiu modelos dos movimentos do Sol e da Lua, já que Ptolomeu nos diz isso” (VAN BRUMMELEN, 2009, p. 36, tradução nossa)³.

Antes de Hiparco surgiram alguns modelos para determinar a configuração das posições e movimentos dos astros. Eudoxo de Cnido (quarto século a.C.) apresentou uma proposta na qual os movimentos dos planetas se davam em um sistema de esferas aninhadas, também chamada de esferas homocêntricas. Seu modelo conseguiu prever qualitativamente os movimentos complexos dos planetas, tais como movimentos retrógrados, porém não quantitativamente. Apolônio de Perga, cognominado “o grande geômetra”, no final do século III a.C., é o primeiro autor que conhecemos a discutir a simples teoria dos epiciclos (HOGBEN, 1950; O'CONNOR; ROBERTSON, 2000; VAN BRUMMELEN, 2009). Na Figura 4 temos o plano que

³ There is no doubt that Hipparchus constructed models of the motions of the Sun and Moon, since Ptolemy tells us as much.

contém a eclíptica, o centro de um pequeno círculo (o epiciclo) que viaja a uma taxa uniforme em torno da borda de um círculo grande (o deferente). Ao mesmo tempo, o planeta viaja uniformemente ao redor do epiciclo. Variando os tamanhos dos círculos e as proporções das duas velocidades adequadamente, pode produzir acelerações, desacelerações ou movimentos retrógrados, conforme desejado.

Figura 4 - Modelo epiciclo



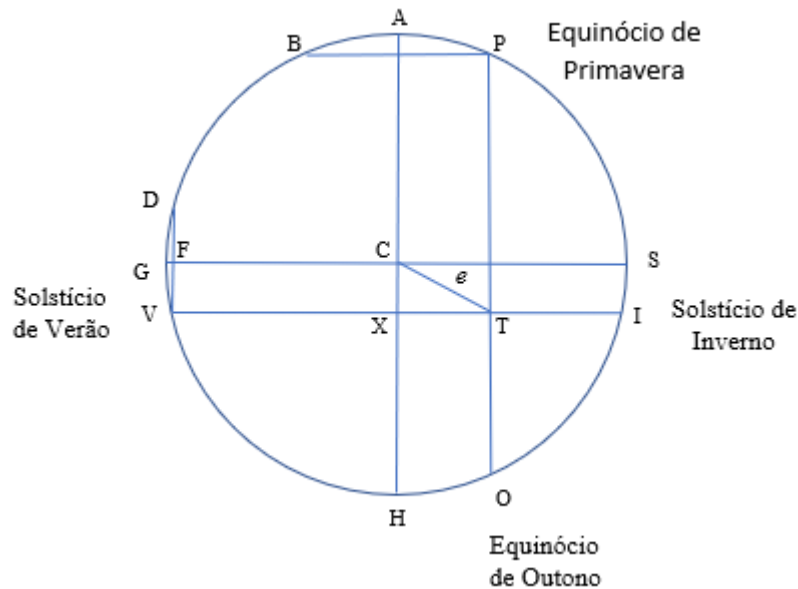
Fonte: Do autor (2020).

Apolônio de Perga, até onde se sabe, não tentou ajustar o modelo às observações quantificando os parâmetros, assim conservou seus epiciclos aos modelos geométricos; isso poderia ter fornecido à astronomia sua primeira teoria precisa (VAN BRUMMELEN, 2009). Hiparco possivelmente percebeu algumas inconstâncias que esse modelo reproduz, por exemplo, os movimentos retrógrados dos planetas; cada movimento retrógrado percorria arcos de mesmo tamanho, discordando do que se percebia. No entanto, o astrônomo se limitou aos movimentos aparente do Sol e da Lua, com isso pode ter reunido a aritmética babilônica e a geometria grega disponíveis à época (VAN BRUMMELEN, 2009).

O modelo epicíclico é idêntico ao modelo excêntrico, onde o Sol gira uniformemente em um círculo não centrado na Terra. Saber exatamente onde posicionar a Terra dentro desse círculo, com intuito de corresponder às mudanças percebidas na velocidade do Sol, foi um dos principais objetivos de Hiparco (VAN BRUMMELEN, 2009). Esse problema pode ser resolvido a partir dos dados que o astrônomo fornece: os comprimentos da primavera e do verão ($94 \frac{1}{2}$ e $92 \frac{1}{2}$ dias,

respectivamente) e a duração do ano ($365 \frac{1}{4}$ dias). A solução de Hiparco está perdida, contudo existe uma solução no livro *Almagesto* de Ptolomeu.

Figura 5 - Excentricidade da órbita do Sol



Fonte: Do autor (2020).

4.4 Excentricidade da Órbita do Sol

Segundo Ptolomeu, o resultado da excentricidade do Sol foi resolvido com muito esmero por Hiparco (PTOLEMY; TOOMER, 1984, p. 153). Vamos reproduzir, com adaptações, a conjectura da excentricidade da órbita do Sol, o qual encontra-se na obra de Ptolomeu. Para simplificar esta demonstração matemática, tomaremos como referência a Figura 5. Destacamos que a demonstração é realizada sobre o sistema sexagesimal. Os astrônomos gregos o adotaram por entenderem que o sistema de numeração babilônico facilita operar frações, números extensos e realizar cálculos (PTOLEMY; TOOMER, 1984, p. 6). Assim, os números⁴ são representados como o exemplo a seguir:

$$8,3;5,12,10 = 8 \cdot 60 + 3 + \frac{5}{60} + \frac{12}{60^2} + \frac{10}{60^3}.$$

Considere na Figura 5 os pontos P , O , V , I os equinócios de primavera e de outono, e os solstícios de verão e inverno, respectivamente. Além disso, considere o

⁴ Ao longo do capítulo podemos apresentar a parte inteira do número no formato decimal.

ponto C o centro da órbita solar deslocado por uma distância e do ponto T , o centro da Terra. O objetivo é encontrar o valor de e .

Agora, seja o raio $R = 60^P$, em que o expoente P indica partes, e denote por Crd a função corda. Considere os segmentos BP, FC e VI paralelos entre si, e perpendiculares aos segmentos DV, AH e PO . Hiparco supõe que o Sol se move com velocidade constante pelo arco $PVOI$, assim temos que o astro gastará $94\frac{1}{2}$ dias em \widehat{PV} e $92\frac{1}{2}$ dias em \widehat{VI} . Sabendo que o arco de uma volta é igual a 360^0 , temos que $94\frac{1}{2}$ dias equivale a aproximadamente $93^09'$, por sua vez $92\frac{1}{2}$ dias são cerca de $91^011'$.

Portanto,

$$\widehat{PVO} = 184^020'.$$

Então, $\widehat{PVO} - \widehat{AVH} = 184^020' - 180^0 = 4^020'$. Desse modo, $\widehat{PA} + \widehat{HO} = 4^020'$. Utilizando de suas tabelas de cordas, Hiparco obteve o resultado a seguir

$$\widehat{PB} = 2\widehat{PA} = 4^020'.$$

Logo, $PB = Crd \widehat{PAB} \approx 4; 32^P$. Similarmente, $VFD = Crd \widehat{VGD} = 2; 4^P$.

Sabendo que $CX = VFD / 2$, basta aplicar o Teorema de Pitágoras no triângulo CXT para se obter a excentricidade da órbita do Sol: $e \approx 2; 29\frac{1}{2}^P$. Arredondando para $2; 30^P$, temos o equivalente a $\frac{1}{24}$ do raio do círculo excêntrico.

Note que Hiparco pode ter enfrentado a tarefa de encontrar os comprimentos das cordas \widehat{PAB} e \widehat{VGD} em função dos ângulos obtidos e isso pode ter sido o primeiro problema realmente trigonométrico da humanidade (VAN BRUMMELEN, 2020, p. 110). Como os arcos obtidos são resultados de observações reais do resultado prático do homem em relação ao mundo, seus valores não são agradáveis para o sistema de numeração babilônico. Por essa razão, Hiparco teve de superar os valores de cordas que correspondiam aos lados de polígonos regulares de Aristarco, os quais concedem valores de fácil uso para o sistema de base 60; isso fez com que Hiparco tabulasse comprimentos de cordas para arcos arbitrários (VAN BRUMMELEN, 2009, p. 41).

4.5 Raio do Círculo Trigonométrico

É importante ressaltar que no desenvolvimento das tábuas de cordas os astrônomos gregos não operaram sobre um círculo de raio 1, conhecido por círculo unitário. Ao invés disso, eles usaram um círculo de raio 60, devido a uma influência

dos babilônicos que utilizavam a base sexagesimal em seus trabalhos astronômicos (VAN BRUMMELEN, 2020, p. 112). Raios de diversos tamanhos foram usados ao decorrer dos séculos; um valor comum e extremamente peculiar foi o raio de tamanho 3438. Esse valor é encontrado a partir da divisão da circunferência em arcos de um minuto. Como um arco de comprimento de $1'$ (um minuto) equivale a $\frac{1}{60}^{\circ}$, temos em um arco de uma volta $360^{\circ} \times 60 = 21600'$. Da fórmula do comprimento⁵ da circunferência obtemos o raio: $\frac{21600}{2\pi} \approx 3438$ partes.

O valor do raio igual a 3438 foi utilizado por astrônomos indianos da antiguidade, cujos estudos resultaram na tábua de seno, chamada inicialmente de tábua de meia corda. Além do mais, trabalhos de reconstrução dos estudos de Hiparco conduziram pesquisadores à conclusão de que houve o uso do raio com valor de 3438 (VAN BRUMMELEN, 2009, p. 43). Nos séculos XV e XVI, trabalhos de cientistas da Europa usaram raios de tamanho 100 000 e até mesmo 10 000 000 (VAN BRUMMELEN, 2020, p. 112). Os valores gigantescos para o raio permitem a representação de senos como números inteiros e evitam cálculos com frações.

O círculo de raio unitário apareceu pela primeira vez no século X no Iraque (VAN BRUMMELEN, 2020, p. 112). Devido à variação que o raio do círculo trigonométrico sofreu ao longo do tempo, o seno foi por muito tempo entendido como o comprimento do lado oposto ao ângulo considerado no triângulo, não a razão entre o cateto oposto pela hipotenusa como aceito atualmente (VAN BRUMMELEN, 2020).

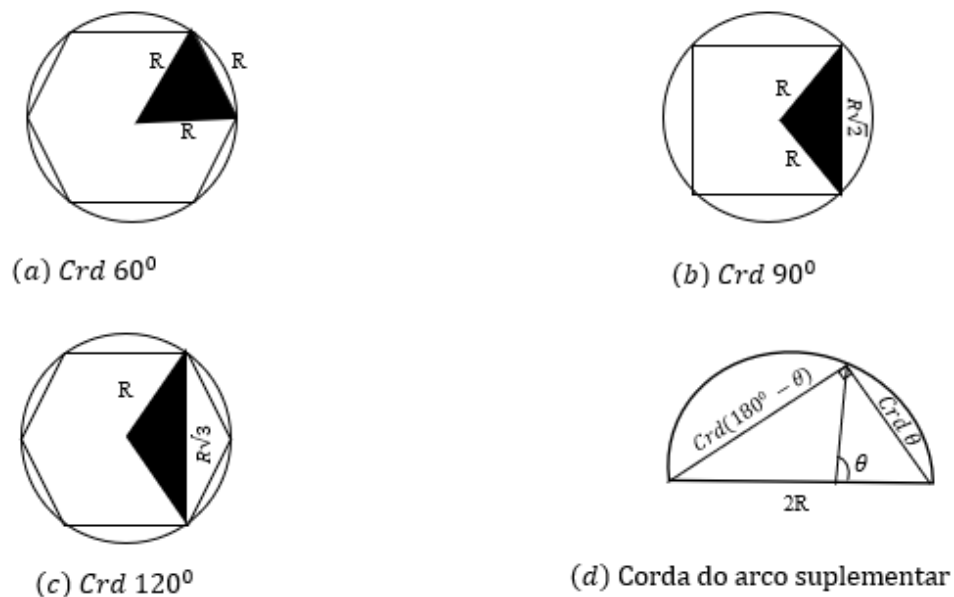
4.6 Tábua de Cordas

Para reproduzir a maneira primitiva de se confeccionar uma tábua de cordas, podemos consultar o Almagesto. A trigonometria primitiva baseada em cordas do círculo foi um importante instrumento para Ptolomeu alcançar seus objetivos. Com isso, o cientista grego nos fornece no primeiro livro do Almagesto todas as instruções necessárias para desenvolver uma tábua de cordas a partir de um círculo dividido em 360 partes, cujo diâmetro é fixado em 120 partes.

⁵ O comprimento da circunferência é expresso por: $C = 2\pi r$, em que C é o comprimento e r é o raio.

Apresentaremos a construção da tábua de cordas em dois momentos. No primeiro momento construiremos a tábua de cordas cujos intervalos⁶ são $7\frac{1}{2}^0$, atribuída a Hiparco (HOGBEN, 1950; VAN BRUMMELEN, 2009). No segundo momento desenvolveremos a tábua de cordas para cada ângulo de $\frac{1}{2}^0$, realizada por Ptolomeu.

Figura 6 - Relações de cordas elementares



Fonte: Do autor (2020).

Utilizando a Figura 6 como referência, verificamos que por meio de um hexágono regular inscrito no círculo de raio 60, obtemos $Crd\ 60^0 = R = 60$ e $Crd\ 120^0 = R\sqrt{3} \approx 103;55,23^P$. Fazendo um quadrado inscrito logramos $Crd\ 90^0 = 2\sqrt{2} \approx 84;51,10^P$. Pelo Teorema de Pitágoras é possível calcular a corda do arco suplementar.

$$Crd(180^0 - \theta) = \sqrt{(2R)^2 - (Crd\ \theta)^2} \quad (1)$$

⁶ Não há certeza dos parâmetros estabelecidos na tábua de cordas desenvolvida por Hiparco, tais como intervalos de arcos, sistema de numeração, arredondamento de números, etc. Alguns cientistas sugerem que a tábua de Ptolomeu é muito similar à de Hiparco e serviu como fonte para a tábua de seno na Índia (VAN BRUMMELEN, 2009).

O último teorema necessário para completar a tábua de Hiparco é o cálculo da corda da metade de um arco (equivalente ao seno do arco metade). Em seu livro “Medida do Círculo”, Arquimedes de Siracusa (287 – 212 a.C.), ao utilizar o método da exaustão, encontrou o resultado: $3\frac{10}{71} < \pi < 3\frac{1}{7}$. Para isso, Arquimedes inscreve e circunscreve hexágonos em um círculo, divide os lados sucessivamente e calcula seus comprimentos; faz o mesmo para outros polígonos: dodecágonos, polígonos de 24, 48 e 96 lados. Os polígonos se aproximam cada vez mais do formato do círculo, o que permite a Arquimedes aproximar o valor π . Esse mesmo método, dividir os lados dos polígonos, permitiu a Hiparco calcular a corda da metade de um arco conhecido (VAN BRUMMELEN, 2009).

Da Figura 7 temos que $BD = DC = Crd\left(\frac{\theta}{2}\right)$, então $B\hat{A}D = D\hat{A}C$. Construindo $AB = AE$, obtemos $\triangle ABD \sim \triangle AED$ (visto que AD é um lado comum); implicando em $BD = DE = DC$. Dessa forma, $\triangle EDC$ é isósceles. Fazendo $DF \perp EC$, então

$$CF = \frac{1}{2}CE = \frac{1}{2}(AC - AE) = \frac{1}{2}(AC - AB) \quad (2).$$

Mas $\triangle ACD \sim \triangle DCF$, uma vez que ambos são retângulos e tem o ângulo em C e o lado DC comum entre si. Com efeito $\frac{AC}{CD} = \frac{CD}{CF}$ e

$$CD^2 = AC \cdot CF \quad (3).$$

Da equação (2) e (3) segue que $CD^2 = AC \cdot \frac{1}{2}(AC - AB)$. Como $AC = 2R$, $AB = Crd(180^\circ - \theta)$ e $CD = Crd\left(\frac{\theta}{2}\right)$; a corda da metade do arco é dada por

$$Crd\left(\frac{\theta}{2}\right) = \sqrt{R(2R - Crd(180^\circ - \theta))} \quad (4)$$

A fórmula (4) pode ser equivalentemente expressa pela função seno, desde que consideremos as seguintes igualdades

$$Crd\left(\frac{\theta}{2}\right) = 2Rsen\left(\frac{\theta}{4}\right) \text{ e } Crd(180^\circ - \theta) = 2Rcos\left(\frac{\theta}{2}\right).$$

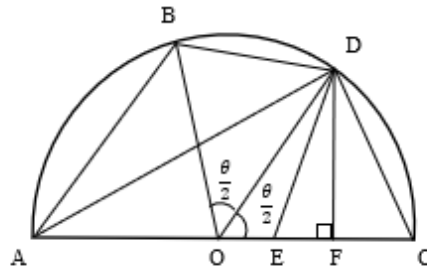
Desse modo,

$$\left[2Rsen\left(\frac{\theta}{4}\right)\right]^2 = R\left(2R - 2Rcos\left(\frac{\theta}{2}\right)\right) \Rightarrow sen^2\left(\frac{\theta}{4}\right) = \frac{1}{2}\left(1 - cos\left(\frac{\theta}{2}\right)\right)$$

fazendo $\alpha = 2\theta$, segue que

$$sen^2\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \frac{1}{2}(1 - cos\alpha).$$

Figura 7 - Cálculo da meia corda de Arquimedes.



Fonte: Do autor (2020).

A partir do que foi desenvolvido é possível desenvolver uma tábua de cordas parecida com a que comumente se atribui a Hiparco, Tabela 1.

Tabela 1 - Tábua de cordas com intervalos de $7,5^\circ$

Arco	Corda	Arco	Corda
0	0	$82\frac{1}{2}^\circ$	4533
$7\frac{1}{2}^\circ$	450	90°	⋮
15°	897	$97\frac{1}{2}^\circ$	5169
$22\frac{1}{2}^\circ$	1341	⋮	⋮
30°	1780	120°	5954
$37\frac{1}{2}^\circ$	2210	⋮	⋮
45°	2631	135°	6352
$52\frac{1}{2}^\circ$	3041	⋮	⋮
60°	3438	165°	6817
$67\frac{1}{2}^\circ$	3820	$172\frac{1}{2}^\circ$	6861
75°	4186	180°	6875

Fonte: Adaptado de Van Brumellen (2009, p. 44).

Para a tábua de cordas com intervalo de $\frac{1}{2}^\circ$, iniciaremos com o cálculo da $Crd\ 36^\circ$ e $Crd\ 72^\circ$. Para isso, considere duas proposições que constam no livro “Os elementos”⁷.

- XIII.9: Se os lados de um hexágono regular e um decágono regular inscritos em um mesmo círculo formam um único segmento, então esses

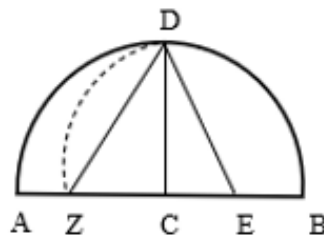
⁷ Uma reprodução dos livros que constituem “Os elementos” de Euclides pode ser vista em <https://mathcs.clarku.edu/~djoyce/java/elements/bookI/bookI.html>

segmentos estão em média e extrema razão. Isto é, a razão do maior para o menor segmento é igual à razão entre o maior e o segmento todo; esta razão é conhecida como razão áurea ($\varphi = 1,6180339 \dots$).

- XIII.10: O quadrado de um pentágono regular inscrito em um círculo é igual a soma dos quadrados do hexágono e do decágono inscrito no mesmo círculo, ou seja, constituem os lados de um triângulo retângulo.

Considere C o centro do semicírculo da Figura 8, CD o segmento perpendicular ao diâmetro AB . Seja E o ponto médio do raio CB e escolha um ponto Z sobre AB tal que $EZ = ED$. Então $EZ^2 = EC^2 + BZ \cdot ZC$ (ver Elementos II.6).

Figura 8 - Crd 36° e Crd 72°



Fonte: Do autor (2020).

Como $EZ^2 = DZ^2 = EC^2 + CD^2$, então $CD^2 = CB^2 = BZ \cdot ZC$. Dessa maneira, $ZC/CB = CB/BZ$. Sabendo que CB e ZC formam a razão áurea, conseqüentemente CB (o raio do semicírculo) é o lado de um hexágono. Pela proposição XIII.9, ZC é o lado de um decágono e seu comprimento é $\text{Crd}(360^\circ/10) = \text{Crd } 36^\circ$. Dado que CD é um raio, ΔCDZ satisfaz XIII.10, o que implica em DZ o lado de um pentágono com $\text{Crd } 72^\circ$. Portanto,

$$\text{Crd } 36^\circ = CZ = EZ - EC = ED - EC = \sqrt{R^2 + \frac{R^2}{2}} - \frac{R}{2} \approx 37; 4,55^P$$

$$\text{Crd } 72^\circ = DZ = \sqrt{CZ^2 + CD^2} = \sqrt{(\text{Crd } 36^\circ)^2 + R^2} \approx 70; 32,3^P.$$

4.7 Fórmulas da Corda da Diferença e da Soma

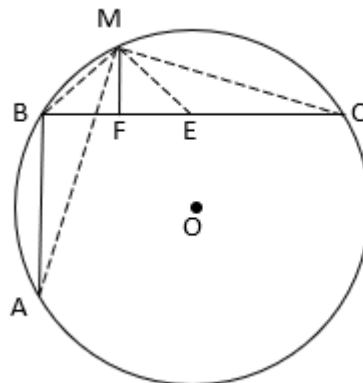
Tendo a necessidade de encontrar mais valores de cordas, Ptolomeu desenvolveu um método que o permitia extrair cordas a partir de quantidades já conhecidas. Para isso precisou do seguinte teorema:

Teorema de Ptolomeu: em um quadrilátero $ABCD$ inscrito em círculo, o produto das diagonais ($AC \cdot BD$) é igual à soma dos produtos dos lados opostos ($AB \cdot CD + AD \cdot BC$).

Para enunciar o teorema anterior é bem provável que Ptolomeu tenha utilizado de outro conhecido teorema, o qual o matemático muçulmano *Abu Rayhan al-Biruni* (973 – 1048 d.C.), em “Um tratado sobre desenhos de cordas em um círculo”⁸, atribui o desenvolvimento ao grego Arquimedes: o Teorema da Corda Quebrada (VAN BRUMMELEN, 2009, p. 31).

Teorema da Corda Quebrada⁹: Se AB e BC formam uma corda quebrada ABC (Figura 9), em que $BC > AB$ e M é o ponto médio do arco \widehat{ABC} , então o pé da perpendicular F de M sobre BC é o ponto médio da corda quebrada, ou seja, $FC = FB + AB$.

Figura 9 - A corda quebrada



Fonte: Do autor (2020).

Com esse teorema, a corda da diferença de dois arcos é obtida naturalmente. Considere AD o diâmetro do círculo na Figura 10. Assuma $\alpha = \widehat{AC}$ e $\beta = \widehat{AB}$. Aplicando o Teorema de Ptolomeu juntamente com algumas manipulações, obtemos:

$$Crd(\alpha - \beta) = \frac{Crd \alpha \cdot Crd(180^\circ - \beta) - Crd \beta \cdot Crd(180^\circ - \alpha)}{2R} \quad (5)$$

A equação (5) é equivalente ao seno da diferença de arcos:

$$\text{sen}(\alpha - \beta) = \text{sen} \alpha \cdot \text{cos} \beta - \text{sen} \beta \cdot \text{cos} \alpha.$$

⁸ Uma versão em Árabe está disponível em: <https://www.wdl.org/pt/item/7469/view/1/1/>.

⁹ Uma demonstração pode ser vista em: <http://www.rpm.org.br/cdrpm/78/8.html>.

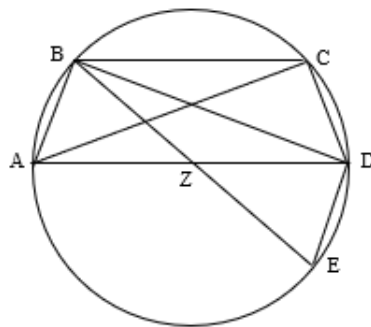
Agora considere o segmento BE na figura 8. Se Z é o centro do círculo, então teremos $\alpha = \widehat{AB} = \widehat{DE}$. Fixando $\beta = BC$, o Teorema de Ptolomeu nos fornecerá

$$\text{Crd}(180^\circ - (\alpha + \beta)) = \frac{\text{Crd}(180^\circ - \alpha) \cdot \text{Crd}(180^\circ - \beta) - \text{Crd } \alpha \cdot \text{Crd } \beta}{2R}. \quad (6)$$

Dessa maneira, conseguimos $\text{Crd}(\alpha + \beta)$ utilizando da fórmula do suplementar de um arco; equação (1). A equação (5) é equivalente ao cosseno da soma de arcos:

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos\alpha \cdot \sin\beta - \sin\alpha \cdot \cos\beta.$$

Figura 10 - Círculo para a corda da diferença e da soma



Fonte: Do autor (2020).

4.8 A Corda de 1°

Com o desenvolvido até aqui, só é possível desenvolver uma tábua de cordas cujos arcos são valores inteiros e múltiplos de 3, além de arcos que equivalem a $\frac{1}{2^n}$ parte de 3, em que $n \in \mathbb{N}$. Para demais valores nos deparamos com o problema de trisseção de um ângulo, um dentre os três clássicos problemas gregos – os outros são a quadratura do círculo e a duplicação do cubo. Euclides, no postulado I.9 do livro “Os elementos”, demonstra como fazer a bisseção de um ângulo utilizando régua e compasso, no entanto nada cita sobre a trisseção. De fato, esse problema foi provado impossível em 1837 pelo matemático francês Pierre Laurent Wantzel (1814-1848) em “*Recherches sur les moyens de reconnaître si un problème de Géométrie peut se résoudre avec la règle et le compas*”¹⁰. No mesmo artigo ainda há a demonstração da

¹⁰ Disponível em http://sites.mathdoc.fr/JMPA/PDF/JMPA_1837_1_2_A31_0.pdf.

impossibilidade da duplicação do cubo. O matemático francês somente conseguiu esse feito devido ao aporte de outra área da Matemática, a Álgebra.

É evidente que Ptolomeu não poderia avançar com sua tábua de cordas por métodos geométricos, com isso a solução foi por meio de aproximações numéricas. O astrônomo grego utilizou uma desigualdade de razões similar à que Aristarco e Arquimedes já haviam enunciado (VAN BRUMMELEN, 2009):

$$\text{se } \beta < \alpha < 90^{\circ}, \text{ então } \frac{\text{Crd } \alpha}{\text{Crd } \beta} < \frac{\alpha}{\beta}. \#(7)$$

Substituindo $\alpha = 1^{\circ}, \beta = \frac{3^{\circ}}{4}$ e depois $\alpha = \frac{3^{\circ}}{2}, \beta = 1^{\circ}$ na condição (7), Ptolomeu obteve a desigualdade

$$\frac{2}{3} \text{Crd } \frac{3^{\circ}}{2} < \text{Crd } 1^{\circ} < \frac{4}{3} \text{Crd } \frac{3^{\circ}}{4};$$

ambos os extremos são iguais a $1; 2,50^P$. Em posse desse valor, das cordas múltiplos de 3° , das identidades de soma e diferença de arcos, e metade de um arco, Claudio Ptolomeu desenvolveu uma tábua de cordas de $\frac{1^{\circ}}{2}$ em $\frac{1^{\circ}}{2}$, REF_Ref88436712 \ h Tabela 2.

Tabela 2 - Tábua de cordas com intervalos de $0,5^{\circ}$

Arco	Corda	Arco	Corda
1°	0;31,25	60°	60;0,0
$\frac{1^{\circ}}{2}$			
1°	1;2,50	:	:
:	:	:	:
3°	3;8,28	90°	84;51,10
:	:	:	:
12°	12;32,36	120°	103;55,23
:	:	:	:
24°	24;56,58	179°	119;59,44
:	:		
		$179\frac{1^{\circ}}{2}$	119;59,56
36°	37;34,47	180°	120;0,0

Fonte: adaptado de Ptolemy e Toomer (1984, p. 57).

4.9 Gnômon

Olhar diretamente para o Sol a olho nu foi e ainda é uma tarefa arduosa para o ser humano, e quanto maior o período que se mantém o olhar, mais próxima do impossível a tarefa torna-se. O entendimento do comportamento do astro rei, mais tarde sua localização na estrutura do cosmo, era essencial para o sujeito cognoscente se apropriar da configuração do universo e das condutas dos astros, ou até mesmo da não tão simples tarefa de confeccionar um calendário. Entrar em ação ativa com o objeto foi fundamental. Observações elementares forneciam as primeiras indagações, as primeiras abstrações. No entanto, somente com o surgimento de um instrumento capaz de mediar a interação do homem com o objeto que se pretende conscientizar é que a humanidade foi capaz de superar a limitação própria dos órgãos dos sentidos e continuar sua marcha do desenvolvimento.

Difícil seria imaginar um instrumento que permitisse essa interação, visto que não apenas o Sol estava tão longe do alcance humano, mas qualquer corpo celeste. As ferramentas produzidas pelos homens, que potencializam os órgãos dos sentidos humanos, não tinham a capacidade de os fazerem enxergar, tocar ou sentir os objetos localizados em distâncias astronômicas. Por isso, é de se surpreender que o instrumento autodesignado para aproximar o *homo sapiens* de objetos de tamanhos e distâncias colossais tenha sido um apetrecho tão tênue. O dispositivo, conhecido por gnômon, não passa de uma vareta (ou qualquer coisa similar) fincada verticalmente no solo terrestre que intercepta a luz solar e que se decompõe em sombra sobre o solo, ou seja, é o instrumento que - por projeção - tem sua forma espacial representada no plano.

O gnômon é tão simples que chega a ser duvidoso acreditar que esconde tanto potencial. Esse utensílio que permite aos humanos se darem conta do movimento retilíneo da luz, contribuiu para que o jônico Tales de Mileto (624 - 548 a.C.) fosse capaz de medir a pirâmide de Quéops, por homotetia. Séculos depois o bibliotecário Eratóstenes de Cirene (276 - 194 a.C.) teve no gnômon o instrumento que o permitiu calcular o comprimento da Terra. “O ponteiro do quadrante solar ou gnómon projecta sombras sobre o solo ou o plano de leitura, consoante as posições, no decurso do ano, dos astros e do Sol. Desde Anaximandro, diz-se, que os físicos gregos sabem reconhecer nestas projeções alguns acontecimentos do céu” (SERRES, 1995, p. 78).

Como o gnômon projeta as sombras no plano terrestre em diferentes tamanhos dependendo do horário do dia e da altitude do Sol, o seu uso pode ser significativo em problemas geográficos. E com esse viés que o apetrecho surge no Almagesto: para uma latitude φ , determine o comprimento da sombra do gnômon ao meio-dia nos dias de equinócios ou solstícios. Isso possibilita a criação de tabelas de comprimento de sombras para uma vareta de tamanho fixo; de fato existem algumas tabelas egípcias que datam 1300 a.C. Não se pode afirmar que tabelas de sombras que surgiram antes das tabelas dos islâmicos tenham caráter trigonométrico devido ao seu uso exclusivo na determinação da altitude do Sol, por não possuírem a noção de mensuração de ângulo, pelos intervalos de tempo não serem confiáveis e devido ao entendimento sobre a dependência da sombra segundo a localização e a estação do ano não existir em muitas tabelas antigas (KENNEDY, 1992; VAN BRUMMELEN, 2009).

4.10 Tábuas de Sombra

O interesse principal pelas sombras descende do estudo dos relógios de sol, usados no Egito já em 1500 a.C. (KENNEDY, 1992; VAN BRUMMELEN, 2009). “A ideia básica era de que uma elevação maior do Sol produzia uma sombra menor (essencialmente o conceito de cotangente)” (KENNEDY, 1992, p. 42). As tabelas de cotangente, conhecidas como função sombra, são encontradas em antigos zījes¹¹, muitas das vezes omitindo a importância dos arcos; o Zīj do matemático persa Al-Khwārizmi (750 – 850 d.C.) contém um dos primeiros exemplos de funções sombras (VAN BRUMMELEN, 2009).

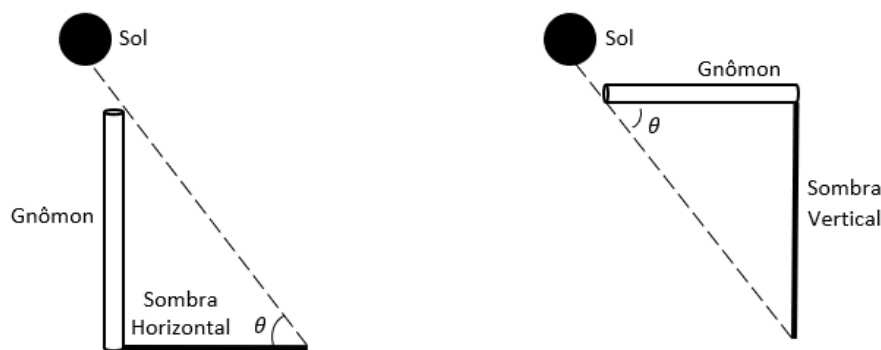
Na primeira parte da Figura 11, considerando o argumento θ , o tamanho da “sombra direta” representa a cotangente enquanto a hipotenusa a secante. Por sua vez, a segunda parte da Figura 11 tem a hipotenusa da “sombra reversa” como cossecante e o comprimento da sombra como a tangente. O tamanho do gnômon para o cálculo de tábuas de sombra variou muito com o tempo. O comprimento de 12, que também fora escolhido por Al-Khwārizmi, foi o mais comum. Valores como $6\frac{1}{2}$ e 7 (que estabelece a razão da altura de uma pessoa pelo comprimento do seu pé), o valor de 60 por volta de 830 d.C., pelo matemático Habash al-Hāsib e, cerca de

¹¹ Um zīj é um livro islâmico que tabula parâmetros astronômicos.

cinquenta anos depois, o valor de 1, pelos matemáticos Abū'l-Wafā e al-Bīrūnī (KENNEDY, 1992, p. 42; VAN BRUMMELEN, 2009, p. 151).

Abū'l-Wafā em seu *Almagesto*, trouxe a função tangente, cotangente, secante e cossecante para além de problemas gnomônicos. Essas funções, junto das funções seno e cosseno, permitiriam ao astrônomo resolver problemas da astronomia de forma bem mais eficiente. Foi o matemático Rheticus (1514 – 1574 d.C.), em 1551, o responsável por definir a função tangente e cotangente como razões (KENNEDY, 1992, p. 42).

Figura 11 - Projeções das sombras de um gnômon



Fonte: Do autor (2020).

4.11 Tábua de Seno

Após Ptolomeu, tanto a Trigonometria quanto a Astronomia pouco avançaram na Grécia. O campo de estudos astrológicos não conseguiu se adaptar bem aos estudos do astrônomo grego e continuaram a utilizar esquemas aritméticos até o século IV d.C. (VAN BRUMMELEN, 2009, p. 93). Os indianos, cujos interesses em astronomia (principalmente lidando com calendários) já datavam um milênio a.C., foram responsáveis por continuarem o desenvolvimento da Trigonometria, e os islâmicos aqueles por se apropriarem muito bem do conteúdo do *Almagesto* (VAN BRUMMELEN, 2009).

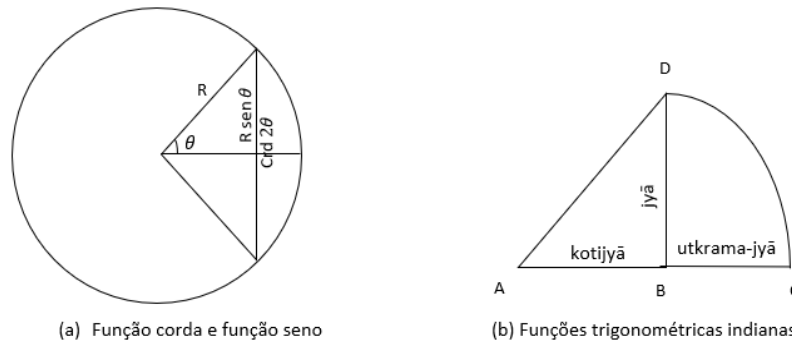
Os indianos foram habilidosos em cálculos computacionais tanto quanto os gregos foram em geometria. Por volta do terceiro e quarto séculos d.C., provavelmente devido às rotas comerciais, o conhecimento grego em astronomia começou a se propagar na Índia; surgem assim trabalhos indianos que combinaram a aritmética

abilônica com técnicas gregas (VAN BRUMMELEN, 2009). “Um fato notável dessa transmissão é que a teoria astronômica recebida na Índia não era de Ptolomeu, mas algo mais rudimentar” (VAN BRUMMELEN, 2009, p. 94, tradução nossa).

Em 499 d.C., o matemático hindu Ariabata I (476 – 550 d.C.) publicou o seu livro “Aryabhatiya”, um livro referência na história da matemática e astronomia indiana (CLARK, 1930). Em 575 d.C., o astrólogo indiano Varāhamihira divulgou “Pañcasiddhāntikā”, seu mais importante trabalho, que além de um tratado sobre matemática na astronomia também é um importante recurso para a história da astronomia hindu antes de “Aryabhatiya” (O'CONNOR; ROBERTSON, 2000). Esses trabalhos contribuíram para os astrônomos indianos estabelecerem todo conhecimento grego em seu país (VAN BRUMMELEN, 2009). Os tópicos de interesses astronômicos dos trabalhos indianos se assemelhavam muito aos dos gregos: determinar as posições do Sol, da Lua e de planetas, prever eclipses, converter coordenadas celestiais, encontrar o comprimento da sombra de um gnômon e assim por diante (VAN BRUMMELEN, 2009).

Pela cultura de difundir o conhecimento por versos, usual na Índia naquele tempo, os enunciados dispensavam as demonstrações ou maiores detalhes. Por esse motivo, não se sabe quando a função corda tornou-se a função seno (VAN BRUMMELEN, 2009). Muito embora, dada a relação entre essas funções – veja Figura 12 (a) - não fica difícil conjecturar que isso pode ter sido um processo natural. Assim como feito no cálculo da excentricidade do Sol, em que a corda de \widehat{PAB} foi encontrada e dividida pela metade, astrônomos indianos ao calcularem valores de cordas podem ter percebido que havia uma maneira mais simplista para a relação comprimento e ângulo; donde surgiu a *jyā-ardha* (ou *ardha-jyā*, sânscrito para meia corda), mais tarde abreviada para *jyā* (VAN BRUMMELEN, 2009). A relação entre a função *jyā* e a função seno moderna é dada pela igualdade: $jyā(\theta) = R \sin \theta$, em que R é o raio do círculo base. No século V d.C., outras funções apareceram. A *kotijyā*, ou cosseno, que representa o comprimento AB na Figura 12 (b), além da *utkrama-jyā*, algo como o seno reverso, uma função não usada atualmente que fornece o tamanho da flecha de um arco (comprimento BC). Todas as funções indianas são R vezes maiores que as funções trigonométricas modernas.

Figura 12 - A função seno e sua forma na Índia antiga



(a) Função corda e função seno

(b) Funções trigonométricas indianas

Fonte: Do autor (2020).

Os astrônomos indianos variavam o valor de R , no entanto, alguns valores eram mais comuns que outros. É possível inferir no *Pañcasiddhāntikā* que o valor estabelecido para o raio por Varāhamihira foi de 120 (NEUGEBAUER; PINGREE, 1970, 1971). Muitas tábuas de senos da Índia usaram o valor de R igual a 3438 (BRUMMELEN, 2009, p. 97), como por exemplo a tábua de Ariabata I. Varāhamihira e Ariabata I forneceram o cálculo de 24 senos em intervalos de $3^{\circ}45'$. Na Tabela 3 reproduzimos valores dos senos de alguns arcos calculados por Varāhamihira (NEUGEBAUER; PINGREE, 1971, p. 38) e Ariabata I (CLARK, 1930, p. 48).

Tabela 3 - Tábua de seno de Varāhamihira e Ariabata I

Arco (em graus)	Varāhamihira	Ariabata I
3;45	7;51	225
7;30	15;40	449
11;15	23;25	671
15	31;4	890
⋮	⋮	⋮
30	1,0;0	1719
⋮	⋮	⋮
60	1,43;55	2978
⋮	⋮	⋮
75	1,55;55	3321
⋮	⋮	⋮
86;15	1,59;44	3431
90	2,0;0	3438

Fonte: Do autor (2020).

Bhāskara II (1114 – 1185 d.C.) é considerado um dos mais célebres e conhecidos cientistas da Índia medieval, famoso no Brasil pela fórmula que estabelece as raízes de uma equação quadrática. Ao escrever o “Jyotpatti” (Fundamentação dos Senos), um apêndice do Siddhāntasiromani¹², o qual é dedicado à Trigonometria, Bhāskara II apresenta pela primeira vez o seno do arco de 18° na Índia; isso no século XII d.C. (VAN BRUMMELEN, 2009, p. 105). O matemático indiano assegurou que $\text{sen } 18^\circ = \frac{\sqrt{5R^2 - R}}{4}$ e $\text{sen } 36^\circ = \sqrt{\frac{R^2 \cdot 5 - \sqrt{R^4 \cdot 5}}{8}}$, os quais para $R = 1$ fornecem valores corretos e atuais; porém Bhāskara II não demonstrou como chegou a esse resultado. Ao estabelecer $\text{sen } 60' = 60$, indicar a fórmula do seno da soma e da diferença de arcos, o cientista indiano conseguiu definir todo valor de seno para arcos entre 1° e 90°, tal como Ptolomeu já havia realizado.

4.12 Contribuições Islâmicas e Europeias

No início do século VII, por meio de Muhammad (conhecido em português como Maomé), surge na península arábica a civilização islâmica. Na época, a Arábia não tinha unidade política e era habitada por diferentes povos semitas organizados em tribos (árabes, hebreus, assírios, fenícios e aramaicos), dividida em clãs familiares. Esses povos politeístas e que compartilhavam entre si a adoração ao templo de Caaba, na cidade de Meca, foram unificados pela religião emergente e se organizaram sob um sistema político teocrático. Durante cerca de um século o islamismo se expandiu e construiu um grande império que abrangia os territórios que hoje são conhecidos como Palestina, Irã, Índia, Síria, Iraque, Espanha, Egito, África do Norte e algumas ilhas do Mediterrâneo. O império começou a se desintegrar no século XIII, o que deu origem a outros impérios que mantiveram a religião islâmica como elo.

Foi nessa civilização que a Astronomia, conseqüentemente a Trigonometria, encontrou espaço para o seu desenvolvimento. Os primórdios da transmissão do conhecimento da Índia para o Islã deram-se após uma delegação política de Sind (hoje Paquistão) conseguir desenvolver - como fruto da viagem - o “Zij al-Sindhind”, um texto astronômico em sânscrito que trouxe muito da técnica computacional e

¹² Uma versão do Siddhāntasiromani está disponível em:
https://ia800200.us.archive.org/34/items/Bibliotheca_Indica_Series/SuryaSiddhantaSiddhantaSiromaniEnglishTranslation-BapudevaSastriLancelotWilkinson1861bis.pdf.

astronômica indiana (VAN BRUMELLEN, 2009). Baseado nesse trabalho, um dos grandes matemáticos muçulmanos, Abū Ja'far Muhammad ibn Mūsū al-Khwārizmī (780 – 850 d.C.) desenvolveu seu próprio *Zīj al-Sindhind*, o qual exerceu muita influência na Espanha muçulmana contribuindo para a elaboração das Tábuas de Toledo.

Uma outra contribuição para a ciência dessa civilização emergente ocorreu a partir das traduções de grandes livros gregos. Livros de autores como Euclides, Apolônio, Aristarco, Arquimedes e outros apareceram para os muçulmanos por volta do século IX. Sem dúvidas, entre os livros astronômicos, o mais influente foi o *Almagesto* de Ptolomeu (VAN BRUMELLEN, 2009). “Uma vez que a Trigonometria servia à Astronomia quase que exclusivamente no mundo islâmico medieval, as identidades básicas da trigonometria plana eram geralmente encontradas em capítulos preliminares de trabalhos astronômicos, especialmente o *zīj*” (VAN BRUMELLEN, 2009, p. 137).¹³

Os islâmicos enfrentaram o mesmo problema visto desde o tempo de Ptolomeu, o cálculo para o seno de 1°. Jamshid al-Kāshī (? – 1429 d.C.) quem introduziu a solução definitiva. O astrônomo iraniano reconheceu que o seno do arco de 1° era raiz de uma equação cúbica $Sen3\theta = 3Sen\theta - 0,4Sen^3\theta$ (em forma moderna $sen3\theta = 3sen\theta - 4sen^3\theta$). Por meio de iterações, al-Kāshī apresentou a solução $Sen 1^\circ = 1; 2,49,43,11,14,44,16,19,16$. Este valor está correto exceto pelas duas últimas frações, as quais deveriam ser 26 e 18, porém é um resultado muito além de qualquer uso astronômico, portanto, muito bem aceito (VAN BRUMELLEN, 2009).

Dentre os cinco pilares do Islã (os deveres religiosos de cada praticante muçulmano), está o requisito de jejuar durante o dia todo durante o mês sagrado do Ramadã. Para a prática do Ramadã, há a necessidade de determinar as posições corretas do Sol e da Lua. A posição do Sol há muito tempo já havia sido determinada, todavia, a posição da Lua exigia mais conhecimentos. Outro pilar da religião, as cinco orações diárias, requerem a precisa determinação do comprimento das sombras, devido aos cinco horários para essa prática serem orientados por isso. Além disso, a posição do fiel islâmico – conhecida como quibla - enquanto ora é importante, pois ela

¹³ Since trigonometry served astronomy almost exclusively in early Islam, the basic identities of plane trigonometry were generally found in the preliminary chapters of astronomical works, especially the *zīj*.

deve ser direcionada à Caaba em Meca, o edifício que representa o centro geográfico da religião.

Essas necessidades de cunho religioso deram grandes contribuições para um campo da matemática chamado de geografia matemática. Essa área do conhecimento divide-se em dois campos principais: a cartografia e a geodesia; ambos requerem muito conhecimento trigonométrico. Al-Bīrūnī foi um dos matemáticos que se debruçaram sobre os problemas da geodesia a fim de determinar as posições de cidades como Bagdá, Gázni e Meca. Os islâmicos foram dessa forma um dos primeiros povos a trazerem a Trigonometria para além de problemas astronômicos.

No início do período medieval as ciências exatas tinham pouco uso para os europeus, por isso pouco conteúdo técnico foi produzido ou preservado (VAN BRUMELLEN, 2009). As demandas matemáticas se concentravam na aritmética para uso no comércio e agricultura, mas mesmo nessas áreas nada de muito importante seria feito até o século XIII quando o sistema de numeração decimal desafiou o sistema romano. Para a Astronomia, o problema mais relevante estava na determinação exata da Páscoa, que não exigia o emprego de Trigonometria. As coisas começaram a mudar a partir do *quadrivium*¹⁴ proposto na corte de Carlos Magno, no século IX, mas a atenção à Astronomia apenas ocorreu a partir das influências do Islã.

O conhecimento antigo chegou à Europa por meio de várias vias, porém a Astronomia foi filtrada principalmente pela Espanha, devido à forte presença dos muçulmanos. No século X, um conjunto de tratados científicos de Andaluzia na Espanha circulava ao menos até a Áustria. No século XI era possível encontrar livretos com base na astronomia árabe na Alemanha (VAN BRUMELLEN, 2009). As Tábuas de Toledo, que eram voltadas para solucionar problemas astronômicos, surgiram no século XI; eram fundamentadas principalmente nos trabalhos de al-Khwārizmī e al-Battānī. Essas tábuas tiveram grande importância nos trabalhos em Astronomia na Europa até serem substituídas pelas Tabelas Alfonsinas no fim do século XIII e início do século XIV. No século XII, com as traduções de trabalhos astronômicos gregos e islâmicos, o continente europeu viveu uma revolução na ciência de estudos dos corpos celestes, conseqüentemente os métodos trigonométricos fixaram presença na ciência europeia. Foi em uma tradução inglesa do Zīj de al-Khwārizmī que apareceu a palavra

¹⁴ Nome dado ao conjunto de quatro matérias ([Aritmética](#), [Geometria](#), [Astronomia](#) e [Música](#)) ensinadas nas [universidades](#) da Idade Média na Europa na fase inicial do percurso educativo.

“sine”, o seno em português. O escritor Gerardo de Cremona (1114 – 1187 d.C.) foi quem mais deu contribuições para a matemática astronômica devido a suas traduções, dentre as quais estava o *Almagesto*.

Em um estudo do filósofo Hugo de São Vitor (1096 – 1141 d.C.) sobre altimetria (o livro “*Pratica Geometriae*”) é que aparece o uso do astrolábio para determinar a distância de um objeto distante da superfície: uma árvore, montanha ou prédio, por exemplo (VAN BRUMMELEN, 2020). Abraham bar Hiyya (1070 – 1136 d.C.), um oficial judeu de Barcelona na Espanha, escreveu um tratado sobre medições baseado nos métodos islâmicos disponíveis. O tratado foi traduzido para o francês, o que levou a França a ter seu primeiro relato da Álgebra árabe (VAN BRUMELLEN, 2009, p. 228).

O tratado de Abraham foi um importante recurso no trabalho “*Pratica Geometriae*”, uma coleção sobre geometria e trigonometria, de Leonardo de Pisa (1170 – 1250 d.C.), também conhecido como Leonardo Fibonacci. Apesar da originalidade de Fibonacci, seu trabalho teve mais importância na disseminação da Matemática na Europa do que em novidades teóricas (VAN BRUMELLEN, 2009); inclusive foi um importante precursor do sistema de numeração indo-arábico por meio da sua obra “*Liber Abaci*” (LUCHETA, 2003). Um importante resultado da Trigonometria, a Lei dos Senos, aparece pela primeira vez na Europa por meio das publicações do matemático francês Levi ben Gershon (1288 – 1344 d.C.).

Com os interesses comerciais em atravessar os mares com mais eficiência e que não se limitassem a navegações costeiras, várias técnicas de navegações apareceram a partir do século XIII; inclusive Fibonacci produziu seus trabalhos muito voltado para beneficiar o comércio e a navegação (VAN BRUMELLEN, 2009, p. 242). Desses interesses surge o *marteloio*, uma ferramenta trigonométrica que visava determinar a posição do navio a partir das posições, direções, velocidades e horários de viagem. Assim, a navegação marítima ofereceu à Trigonometria uma nova e poderosa aplicação, a qual a manteve em atividade por muitos séculos.

Na idade média, a informação não tinha uma boa taxa de disseminação, o que dificultava as rápidas trocas de conhecimentos entre os países, além de um desenvolvimento mais fluido. Por isso, as comunidades universitárias aparecem como diferencial na produção intelectual. Foi dessa maneira que três grandes nomes para a astronomia conseguiram grandes feitos na Universidade de Viena: os astrônomos Johannes von Gmunden (1380 – 1442 d.C.), George von Peurbach (1423 – 1461 d.C.) e seu discípulo Johannes Müller von Königsberg (1436 – 1476 d.C.), também

conhecido por Regiomontanus. Foi a partir dos trabalhos de Gmunden e Peurbach que Regiomontanus conseguiu realizar e publicar em 1464 a obra “De Triangulis Omnimodis”, a primeira exposição sistemática sobre triângulos planos e esféricos, com a demonstração dos teoremas mais relevantes. Esse trabalho serviu como base para diversos outros estudos trigonométricos e foi fonte de inspiração para Copérnico, Rheticus e Braho (VAN BRUMELLEN, 2009).

Com o trabalho “Tabulae Directionum”, Regiomontanus mostra a importância e a vantagem da função tangente; também foi a primeira tábua de tangentes publicada na Europa, porém não foi a primeira tábua a ser realizada no continente, além de ter dado grande contribuição na disseminação das demais funções trigonométricas. Onze edições foram públicas, as quais influenciaram diretamente os trabalhos de Copérnico e Kepler (VAN BRUMELLEN, 2009). Por sua vez, a relação direta entre os ângulos dos triângulos e as funções trigonométricas, sem o auxílio dos arcos de uma circunferência, apareceu pela primeira vez em 1551 na publicação “Canon Doctrinae Triangulorum”, de George Joachim Rheticus (1514 – 1576 d.C.), em cujo trabalho todas as seis funções modernas aparecem, embora com outro nome.

A partir das contribuições de François Viète (1540 – 1603 d.C.) para Álgebra, a Matemática encontra uma forma mais fácil de se desenvolver. A Álgebra cooperou para a coordenação da geometria e depois para o surgimento do cálculo. Além disso, as identidades trigonométricas ficaram menos penosas em suas demonstrações. Leonhard Euler (1707 – 1783 d.C.) foi quem estabeleceu a linguagem atual de funções, e em 1730 o matemático suíço observou o papel fundamental das funções trigonométricas em soluções de equações diferenciais, além de perceber a conexão entre o seno (cosseno) e as funções exponenciais, o que favoreceu a agregação da Trigonometria na Análise Matemática e o aparecimento das funções trigonométricas hiperbólicas.

5 MÉTODO DE PESQUISA

Neste capítulo apresentaremos o caráter, o contexto, os sujeitos, o objeto da pesquisa e os instrumentos de produção de dados.

A presente pesquisa é exploratória, em cunho de estudo bibliográfico, e tem abordagem qualitativa, a qual difere-se da pesquisa quantitativa por seus aspectos essenciais: “[...] escolha adequada dos métodos e teorias convenientes; no reconhecimento e na análise de diferentes perspectivas; nas reflexões dos pesquisadores e na variedade de abordagens e métodos” (FLICK, 2009, p. 23).

A pesquisa qualitativa não se baseia em um conceito teórico e metodológico unificado. Diversas abordagens teóricas e seus métodos caracterizam as discussões e a prática da pesquisa. Os pontos de vista subjetivos constituem um primeiro ponto de partida. Uma segunda corrente de pesquisa estuda a elaboração e o curso das interações, enquanto uma terceira busca reconstruir as estruturas do campo social e o significado latente de práticas (FLICK, 2009, p. 25).

Fundamentados na Teoria Histórico-Cultural e em seus desmembramentos (Teoria da Atividade e a Teoria do Ensino Desenvolvimental), temos como questão orientadora de investigação: **que implicações a compreensão da essência do objeto da atividade de ensino têm para a organização do ensino de Trigonometria?** O objetivo geral de pesquisa é analisar as potencialidades de uma Unidade Didática (UD) desenvolvida para o ensino de Trigonometria e fundamentada metodologicamente pela unidade dialética lógico-histórico. Desse objetivo geral idealizamos os seguintes objetivos específicos: revelar os sentidos pessoais do professor/pesquisador; desvelar o extrato teórico da UD sintetizando como elementos de mediação produzidos pela cultura humana podem desencadear o processo de significação e contribuir para o avanço do pensamento teórico em Trigonometria; analisar como as necessidades históricas engendradas no desenvolvimento da Trigonometria contribuíram para a composição das Situações Desencadeadoras de Atividade (SDA), cuja intencionalidade foi mobilizar os nexos conceituais do campo de conceitos da Trigonometria, suscitar a atividade de aprendizagem e criar a zona de desenvolvimento iminente.

5.1 A Dialética como Lógica e Teoria do Conhecimento

A dialética como lógica e teoria do conhecimento fundamenta nossas ações intersíquicas e intrapsíquicas, as quais podemos destacar: a análise e síntese dos materiais históricos sobre a Trigonometria; e a construção da dissertação e o entendimento teórico dos conceitos do materialismo histórico-dialético e seus desmembramentos. Além disso, a dialética nos serviu como instrumento metodológico para organização dos dados e sua análise, cujo objetivo é analisar o movimento do pensamento professor/pesquisador a partir da sua forma abstrata para a concreta.

A dialética é materialista e histórica, busca compreender as formas de pensamento e sua transição do objetivo para o subjetivo. Kopnin (1978) salienta que a dialética considera importante a análise da linguagem humana, uma vez que é uma forma aproximada e exterior do pensamento, no entanto, a lógica dialética não se detém apenas à forma objetiva do pensamento, ela busca penetrar em seu processo.

Para o marxismo, o lógico (movimento do pensamento) é o reflexo do histórico (movimento dos fenômenos da realidade objetiva). Para representar a dialética objetiva de modo pleno e profundo, as formas do pensamento devem, por si mesmas, ser dialéticas - móveis, flexíveis, inter-relacionadas. A dialética estuda a relação entre as formas do pensamento, a subordinação destas no processo de movimento do conhecimento no sentido da verdade (KOPNIN, 1978, p. 84).

A lógica dialética se apresenta como superação da lógica formal no sentido de ter se apropriado dos principais pontos e a enriquecido com outros. Enquanto método científico de obtenção do conhecimento, a dialética materialista não se reduz a observar, analisar e verificar. Esses passos limitam a capacidade humana e reduzem a análise do objeto a uma superficialidade, a do exterior à relação intersíquica.

Contrastando o método filosófico burguês que reduz a obtenção de conhecimento científico em três momentos: indução, dedução e verificação. " Enquanto método, a dialética materialista elaborou uma infinidade de formas inter-relacionadas, modos e procedimentos que "trabalham" à base de categorias como as de abstrato e concreto, lógico e histórico, razão e juízo, análise e síntese, etc. (KOPNIN, 1978, p. 100).

A dialética materialista tem suas leis as quais explicam o conhecimento como um processo em evolução "que incorpora necessariamente saltos, interrupções do processo de graduação, a aquisição dos resultados basicamente novos à base da

solução das contradições que surgem entre o sujeito e o objeto” (KOPNIN, 1978, p. 100). Dentre essas leis, destacam-se três leis básicas:

- a) lei da unidade e luta dos contrários;
- b) lei da transformação das mudanças quantitativas em qualitativas; e a
- c) lei da negação da negação.

Para interpretar o mundo objetivo, a dialética concebe suas categorias, que “partindo do dado imediato do objeto, refletem a natureza deste com plenitude e profundidade e na necessária universalidade” (KOPNIN, 1978, p. 114). As leis e categorias da lógica materialista firmam-se em método de interpretação da realidade material, “situada fora da consciência do homem, ou do próprio pensamento enquanto atividade subjetiva voltada para o conhecimento das coisas, processos, relações e leis” (KOPNIN, 1978, p. 112).

Portanto, a lógica dialética nos indica um ponto de início do conhecimento das coisas, dos processos, das relações e leis, a qual contempla-se na categoria sensorial-concreto. “O movimento do sensorial-concreto ao concreto através do abstrato no pensamento é a lei universal do desenvolvimento do conhecimento humano, a qual ocupa posição especial na dialética materialista” (KOPNIN, 1978, p. 163). O sensorial-concreto nos indica tomar o objeto inicialmente pela sua aparência fenomênica e pelas interpretações sociais finais que sobre ele se tem.

O estudioso deve começar o estudo do objeto pelo fim, a partir de sua forma mais madura, do estágio do seu desenvolvimento em que aspectos essenciais estão suficientemente desenvolvidos e não estão disfarçados por casualidades que não têm relação direta com ela. À base do estudo da fase superior, madura de desenvolvimento do objeto, fazem-se as definições primárias de sua essência. Essas definições têm caráter abstrato, são insuficientemente profundas, mas indispensáveis como linha no estudo do processo histórico de desenvolvimento do objeto elas atuam como ponto de partida no estudo do objeto, porquanto refletem em certa medida o processo de afirmação e desenvolvimento do objeto estudado (KOPNIN, 1978, p. 185).

Dessa maneira, para entender a coisa em si, deve-se estar em ação com o objeto, conectando-se à sua forma fenomênica a qual tem capacidade de nos despertar as primeiras impressões, sensações e conclusões.

Para conhecer realmente o objeto, é preciso abrangê-lo, estudar todos os seus aspectos [...] A lógica dialética exige que se tome o objeto em

seu desenvolvimento, em seu "automovimento", em mudança [...] Toda prática humana deve incorporar-se à plena definição do objeto quer como critério da verdade, quer como determinante prático da relação entre o objeto e aquilo que o homem necessita (KOPNIN, 1978, p. 82).

O início da apropriação do objeto, do seu entendimento, se dá a partir do próprio objeto, da empiria, da imagem abstrata no plano interior constituída na Atividade com sua forma final no plano exterior. Além disso, deve-se considerar todas as interpretações conceituais sociais mais evoluídas do objeto, pois são apreciações do estágio mais maduro que a sociedade concebeu. O concreto objetivo e a forma abstrata que demarcam os primórdios da revelação da coisa em si.

Por sua vez, o ponto de chegada é dado também pelo objeto, mas em sua forma concreta subjetiva, conceitual, em consonância com sua apresentação material. “A dialética materialista considera o concreto ponto de partida e chegada do conhecimento” (KOPNIN, 1978, p. 157).

O concreto no pensamento é o conhecimento mais profundo e substancial dos fenômenos da realidade, pois reflete com o seu conteúdo não as definibilidades exteriores do objeto em sua relação imediata, acessível a contemplação viva, mas diversos aspectos substanciais, conexões, relações em sua vinculação interna necessária. Abstrações isoladas elevam o nosso conhecimento da apreensão do geral empírico ao universal, enquanto o concreto no pensamento fundamenta a conexão do singular com o universal, fornece não uma simples unidade de aspectos diversos, mas a identidade dos contrários (KOPNIN, 1978, p. 162).

Na transição da forma abstrata para a concreta tem-se uma das mais importantes categorias da dialética materialista: a categoria abstrato-concreto. Essa categoria reflete a transição da imagem cognitiva, é a passagem da imagem desanuviada do objeto para sua forma nítida. A ascensão do abstrato ao concreto é o método de assimilação do objeto, da passagem do geral, particular e social ao singular, universal e pessoal.

O abstrato e o concreto são categorias da dialética materialista elaboradas para refletir a mudança da imagem cognitiva tanto no que concerne às multilateralidades da abrangência do objeto nessa imagem quanto à profundidade da penetração na essência dele. Eles expressam as leis da mudança que se opera no conteúdo do conhecimento ao longo de toda sua evolução (KOPNIN, 1978, p. 154).

No entanto, o conhecimento sobre o objeto não passa apenas por entender o início e o final da análise. São necessárias outras categorias, é necessário apreciar o objeto em seu movimento real, revelar sua essência. Para a contemplação desse movimento tem-se a unidade do lógico com o histórico.

A lógica do movimento do pensamento tem como uma de suas leis principais a ascensão do simples ao complexo, do inferior ao superior, e esse movimento do pensamento expressa a lei do desenvolvimento dos fenômenos do mundo objetivo. A lógica fornece a forma de desenvolvimento em aspecto puro, que, literalmente, em toda sua pureza, não se realiza em nenhum processo histórico. No entanto, a forma lógica de desenvolvimento reflete o processo histórico, daí ser ela necessária para interpretá-lo. Para revelar a essência do objeto, é necessário reproduzir o processo histórico real de seu desenvolvimento, mas este é possível somente se conhecermos a essência do objeto. Por exemplo, o conhecimento da essência do Estado pressupõe o conhecimento da história de seu surgimento e desenvolvimento, mas deve-se estudar a história do Estado tendo-se certo conhecimento da essência deste enquanto fenômeno social, pois do contrário pode-se tomar por Estado a organização gentilícia do sistema comunitário primitivo. A dialética materialista rompe esse círculo à base da unidade do histórico e do lógico, define o início do conhecimento e o sucessivo caminho de seu movimento (KOPNIN, 1978, p. 184).

O lógico é um meio do conhecimento do processo histórico, revela-nos os momentos, as facetas do objeto, sua multilateralidade. Permite-nos desfazer dos desvios, dos excessos existentes na constituição do objeto e concede-nos as conexões interiores.

O lógico atua como meio de conhecimento do histórico, fornece o princípio para o estudo multilateral deste. Quando se toma por base da explanação da história do objeto o conhecimento da essência, tornam-se então compreensíveis e explicáveis todas as demandas históricas, causalidades e desvios, que, se obscurecem a necessidade, encontram seu lugar na manifestação e complementação desta. A história do objeto se manifesta viva, vigorosa no nosso pensamento (KOPNIN, 1978, p. 185).

Por sua vez, o histórico conecta o estudioso ao objeto, pois este reflete a transformação, as conexões exteriores e nos dá suporte para as conexões interiores. “O estudo da história do desenvolvimento do objeto cria, por sua vez, as premissas indispensáveis para uma compreensão mais profunda de sua essência [...]” (KOPNIN, 1978, p. 186).

Por fim, para a revelação da essência do objeto, é necessário captar sua passagem do mundo interior para exterior, tomar sua forma material e a consciência social de forma a se conectar e captar a forma subjetiva e particular. O sujeito cognoscente precisa relacionar-se com as formas de pensamento, com as contradições internas e externas do objeto, entender o que ele é, mas também o que não é. “[...] as contradições constituem não apenas o conteúdo, mas também a forma do próprio pensamento. Daí a necessidade da análise das formas do pensamento para mostrar a sua dialética” (KOPNIN, 1978, p. 177).

E para revelar toda particularidade, as contradições, a essência da coisa em si, as ações vinculadas ao pensamento são essenciais.

O limite entre a experiência propriamente sensorial e o pensamento teórico não passa pela via de “admitir” o objeto dado tal como é em si mesmo ou na conexão observada com outros objetos, mas pela via de esclarecer as causas internas e as condições de sua origem (para que e por que, sobre que base, devido a que possibilidade se tornou no que é e não em outra coisa). A experiência sensorial de primeiro tipo se apoia nas observações e representações. A experiência de segundo tipo, incluindo de maneira peculiar a observação, se apoia na ação cognoscitiva, que revela as conexões internas como fonte dos fenômenos observados. As ações que estabelecem as conexões entre o externo e o interno (singular e universal) constituem a base para a compreensão do objeto. A continuação do processo de formação do concreto, com ajuda destas ações, é o pensamento realizado em forma de conceitos, isto é, o pensamento teórico. As ações cognitivas sensório-objetais são a verdadeira base dos conceitos que possuem forma simbólico-semiótica. Os conceitos, apoiando-se nestas ações, revelam o conteúdo universal dos objetos, sistematiza-os e formam uma teoria, a qual corresponde ao conteúdo interno dos objetos (DAVYDOV, 1988, p. 139).

Dessa forma, nota-se que a dialética como lógica e teoria do conhecimento é um instrumento filosófico, psicológico, pedagógico e metodológico para alcançar e revelar a essência.

6 DO ABSTRATO AO CONCRETO: O PENSAMENTO EM MOVIMENTO

Neste capítulo tentaremos desvelar as potencialidades da Unidade Didática, produto da atividade de estudos do professor e pesquisador, de forma a explicitar sua ascensão do abstrato ao concreto e responder à questão orientadora desta pesquisa: **que implicações a compreensão da essência do objeto da atividade de ensino têm para a organização do ensino de Trigonometria?** Para isso, tomaremos como metodologia a dialética como lógica e teoria do conhecimento. De forma a atingir nosso objetivo tentaremos revelar os sentidos pessoais do professor/pesquisador, o movimento do pensamento (empírico ao concreto, do geral ao particular) objetivado na Unidade Didática, desvelar o extrato teórico da UD e buscaremos apresentar como as necessidades históricas engendradas no desenvolvimento da Trigonometria contribuíram para a composição das SDA.

6.1 Os sentidos pessoais

Revelar os sentidos pessoais não é uma tarefa fácil e se confunde com a subjetividade do pensamento. Não é possível dizer se o que será evidenciado situa-se no passado ou é um estado presente da consciência. Na tentativa de diminuir a subjetividade, tomamos como ponto de partida a forma mais madura da Unidade Didática e o atual estado de pensamento do professor/pesquisador, e com isso foi possível captar as primeiras impressões do objeto. Além disso, tomamos como apoio uma análise superficial sobre uma parte do material constituído e de estudos, os quais se encontravam no armazenamento interno do computador pessoal, em aplicativos de armazenamento em nuvem e em notas de cadernos e folhas de sulfite.

Dessa análise, junto das reflexões do professor/pesquisador, foi possível realizar a organização dos dados e revelar três momentos de contrastes no movimento do pensamento: o pensamento em sua forma final, materializado na UD final; o pensamento inicial, visto pelas anotações e materiais antes do projeto de pesquisa; e o pensamento que marca a transição de uma forma mais concreta, um estado do pensamento que se verifica na iminência de sua forma mais madura atual.

Esses momentos foram escolhidos porque demarcam diferentes formas das atitudes do professor/pesquisador, das escritas nas anotações e as significações teóricas. São momentos em que o pensamento evidencia contradições e aparenta evolução e clareza do objeto orientador da Atividade.

6.1.1 O objeto em sua forma abstrata

O primeiro momento se caracteriza pelas primeiras leituras e tentativas de se apropriar do campo conceitual da Trigonometria e desenvolver uma sequência didática. Essa fase inicia-se sobre conhecimentos adquiridos ao longo da formação acadêmica e da experiência profissional, ela transita entre a percepção de que a Trigonometria surge a partir de um problema que se instrumentaliza do triângulo retângulo para a solução de um problema social para uma fase em que surge a percepção que a Trigonometria se desenvolve instrumentalizada inicialmente pelo uso de círculos e de unidades do pensamento (conceitos), tais como tempo, movimento, comparação, regularidade, orientação e ângulo.

Além disso, tendo como base minhas reflexões¹⁵ e os sentidos pessoais que os materiais fatuais emergem em minha consciência, o primeiro estágio do objeto coincide com o início da minha carreira docente no Ensino Básico na esfera pública, no ano de 2019. Ano que lecionei para turmas do Ensino Médio e estava matriculado na disciplina de Processos e Sequências do Mestrado. Como uma das turmas que eu lecionava era do 2º ano do Ensino Médio, concluí que um dos tópicos que eu deveria ensinar era a Trigonometria (Figura 13).

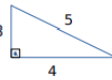

Figura 13 - Primeira avaliação do bimestre I no ano de 2019

1ª AVALIAÇÃO BIMESTRAL


1) Classifique as afirmações abaixo com V (verdadeiro) ou F (falso)

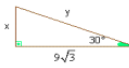
() Um triângulo equilátero é um triângulo com todos os lados e ângulos internos congruentes.
 () Um triângulo retângulo nunca pode ser isósceles.
 () Um triângulo equilátero não é um triângulo isósceles.
 () Um triângulo com um dos ângulos internos medindo $90^{\circ}01'$ é, de fato, um triângulo retângulo.
 () É possível construir um triângulo com ângulos internos de 90° , 78° e 22° .
 () Dados três valores distintos x , y e z . De tal forma que toda vez que somarmos dois deles, a soma é um valor maior do que o terceiro valor, e toda vez que subtraímos dois valores, essa subtração retorna um valor menor que o terceiro valor. Então podemos afirmar que esses três valores (x , y e z) podem constituir os lados de um triângulo.
 () Um triângulo obtusângulo é um triângulo que tem um dos seus ângulos internos com medida maior que um ângulo reto.
 () Um triângulo acutângulo é um triângulo com, pelo menos, um dos seus ângulos internos medindo menos que 90° .
 () Um triângulo escaleno nunca pode ter ângulos internos congruentes.
 () Um triângulo retângulo nunca pode ser um triângulo escaleno.

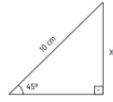
2) Classifique os triângulos em relação aos seus ângulos e lados. Caso seja possível, indique a hipotenusa e os catetos.

a)  b) 

3) Utilize de seus conhecimentos em razões trigonométricas para encontrar os valores de x e y , nos triângulos a seguir.

a) 

b) 

c) 

4) Em um triângulo retângulo, determine as medidas dos ângulos agudos e da hipotenusa, sabendo que um dos catetos mede 3cm e o outro mede $\sqrt{3}$ cm.

5) Apresente as fórmulas para o seno, cosseno, tangente e para o Teorema de Pitágoras, levando em consideração um triângulo retângulo com hipotenusa de tamanho a , e com catetos cujos tamanhos são b e c .

Fonte: Dados da pesquisa (2022).

¹⁵ A partir desse momento utilizaremos a primeira pessoa do singular para indicar a narrativa e as memórias do professor/pesquisador da pesquisa com vistas a expressar os sentidos pessoais.

De fato, eu me sentia preparado para lecionar e desenvolver um trabalho sobre o assunto, que no caso seria apresentado para a disciplina de Processos e Sequências. No entanto, como o campo conceitual da Trigonometria foi escolhido desde o princípio como tema da dissertação, as leituras para o desenvolvimento do trabalho de mestrado junto dos conhecimentos previamente adquiridos começaram a entrar em contradição.

Essa contradição aparece nos dados da pesquisa ao se notar que a primeira avaliação (Figura 13) para o 2º ano do Ensino Médio se desenvolve sobre os triângulos retângulos, cobrindo alguns teoremas fundamentais e saltando para as razões trigonométricas. Naquele ano, deixei para a segunda avaliação (Figura 14) qualquer envolvimento do ciclo trigonométrico. Esse tipo de organização se fundamentou em livros didáticos e na minha vivência como estudante.

Figura 14 - Segunda avaliação do bimestre I do ano de 2019

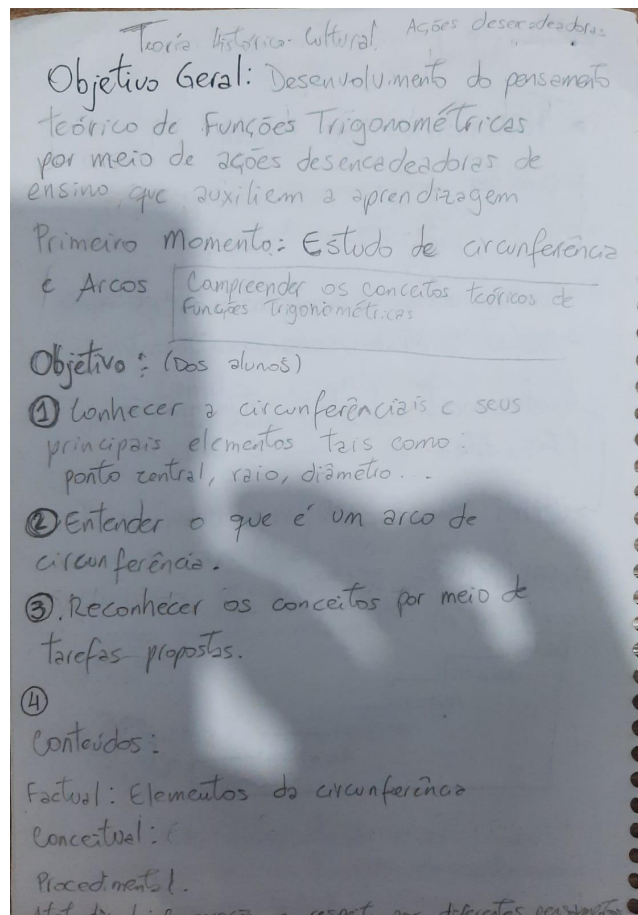
2ª AVALIAÇÃO BIMESTRAL	
1) Defina cada item abaixo: a) Arco de circunferência: b) Arco nulo de uma circunferência: c) Arco de uma volta: 2) Quais são as duas formas de medir um arco? Defina cada uma e dê sua unidade de medida. 3) Relacione os itens abaixo de acordo com sua definição. a) Circunferência b) Centro de uma circunferência c) Raio de circunferência d) Diâmetro e) Corda f) Secante g) Tangente h) Círculo	<div style="border: 1px solid black; padding: 5px; margin-bottom: 10px;"> ATENÇÃO: As questões a seguir só serão consideradas se os cálculos estiverem expressos, ou seja, NÃO QUERO APENAS RESPOSTA ;) </div> 4) Expresse os arcos em radianos: a) $30^\circ =$ b) $210^\circ =$ c) $720^\circ =$ 5) Expresse os arcos em graus a) $3rad =$ b) $\frac{\pi}{9} =$ 6) Expresse em graus e em radianos as medidas dos arcos de circunferência. a) $\frac{1}{3}$ da medida da circunferência b) $\frac{3}{6}$ da medida da circunferência

Fonte: Dados da pesquisa (2022).

Por sua vez, na disciplina de Processos e Sequências, a sequência didática desenvolvida (requisito para aprovação) teve seu início no estudo das circunferências, como visto na Figura 15. Essa mudança se deu pelas percepções obtidas na leitura nos trabalhos de Hogben (1950) e Kennedy (1992), os quais revelam que a Trigonometria se manifestou com auxílio da circunferência, ao contrário do entendimento inicial que assegurava o triângulo como instrumento de revelação do

conceito. Todavia, eu ainda estava tentando compreender os motivos que conduziram a projeção da Trigonometria por meio da circunferência. Assim, realizei a sequência didática para a disciplina de Processos e Sequências apenas em torno da circunferência, de modo a estudá-la mais a fundo. Depois me desdobrei em buscar a primeira manifestação da Trigonometria na história social.

Figura 15 - Esboço do trabalho para a disciplina de Processos e Sequências



Fonte: Dados da pesquisa (2022).

Lembro-me de que as leituras em livros e *sites* não estavam satisfazendo minha necessidade, posso afirmar que até me confundiam mais. Visto que a minha dissertação tinha um título definido (“O desenvolvimento do pensamento teórico em Trigonometria em Situações Desencadeadoras de Atividade”), um objeto e uma questão orientadora, e que mudou para versão atual apenas após a qualificação por sugestão da banca avaliadora, busquei no trabalho de Pimenta (2019) uma maneira de organizar o desenvolvimento do meu pensamento e da minha prática.

O trabalho de Pimenta (2019) foi recomendação do meu orientador José Antônio, o autor foi também seu orientando e membro do grupo de pesquisas PPTHC. A leitura da dissertação de Pimenta (2019) me trouxe mais elementos, muitos dos quais, inicialmente, eu não havia captado nas leituras. Ele apontou um início diferente de qualquer outro que eu havia concebido, no entanto, não estava claro em seu trabalho em que momento o triângulo e a circunferência aparecem no tópico de estudo. Em seu trabalho, algumas SDA não indicavam um caminho lógico de transição e não apontavam de forma satisfatória o desenvolvimento da Trigonometria.

De toda forma, por ser um trabalho bem construído e que me deu sinais para realizar leituras em momentos históricos anteriores aos quais estava realizando, tomei a dissertação de Pimenta (2019) como início. Isso fez com que eu descartasse minhas considerações iniciais, como pode ser observado na Figura 16. Até o momento, podemos perceber que a lei de luta dos contrários da dialética manifestava nessa tentativa de abstração do objeto.

Ter partido do trabalho de Pimenta (2019) foi uma boa escolha por ser a versão mais madura que eu poderia ter no momento, além de ter contribuído para o desenvolvimento do pré-projeto de pesquisa, um requisito para ser aprovado na disciplina de Metodologia Científica. Todavia, as contradições do texto desenvolvido com meus conhecimentos e a falta de conexão entre as SDA não me fizeram ficar satisfeitos com o que eu tinha realizado.

Figura 16 - A primeira tentativa de desenvolver a UD

Essas 12 horas serão divididas em quatro encontros, os quais pretendemos desenvolver seis Situações Desencadeadoras de Aprendizagem (SDA) descritas no Quadro 3.1. Pimenta (2019), produziu quatro SDA com intuito de investigar as elaborações conceituais de Trigonometria realizadas por estudantes do nono ano. Devido ao bom resultado obtido em seu trabalho, optamos por nos apropriar de suas SDA e adaptá-las ao nosso contexto, além de complementá-las com outras duas. Essas situações irão compor um produto educacional em forma de sequência didática.

Quadro 3.1 – Situações Desencadeadoras de Aprendizagem

(continua)

Situação Proposta	Objetivo Geral	Desenvolvimento	Recursos Didáticos
			Tempo da Tarefa
(I) Analisar os conceitos Medida e Número	Discutir a necessidade do estabelecimento das unidades, incluindo múltiplos e submúltiplos (cm, m, km etc.)	A aula terá como tarefas principais o estabelecimento da distância real entre duas cidades e depois precisar a medida de uma bactéria microscópica. Isso será estipulado	<ul style="list-style-type: none"> • Bloco de Anotações • 1 h

Fonte: Dados da pesquisa (2022).

6.1.2 A maturação do objeto

Devido a ter continuado com as leituras para escrever a fundamentação teórica da dissertação e ter que desenvolver um capítulo teórico sobre o assunto, que inicialmente era exigência do orientador, o objeto começou a tomar uma forma mais cintilante para o pensamento e deu um salto em qualidade. Mais do que isso, foi possível sair do estado quantitativo de registros e estudos para a qualidade e ter sua forma objetiva, o que representa a lei das mudanças quantitativas em qualitativas da evolução do pensamento.

Na leitura teórica dos fundamentos do materialismo histórico-dialético e nos encontros do grupo de pesquisa PPTHC tivemos conhecimento que o estudo da coisa em si deve partir do seu estado mais maduro – algo extremamente estranho de se entender inicialmente. Dessa maneira, cogitei que se eu entendesse qual era a forma mais madura da Trigonometria, poderia cobrir os saltos das SDA, melhorar minha prática no ensino de Trigonometria e satisfazer demais necessidades.

Depois de realizar diversos estudos e postular alguns estados mais maduros da Trigonometria, percebi que não estava chegando ao objeto com potenciais de me satisfazer. Os triângulos retângulos, o instrumento mais usado em sala de aula quando se ensina o assunto, pouco ajudava. Contudo, colocava-me em momentos da história que eram essenciais em problemas da vida social prática.

Foi na associação dos materiais que eu havia desenvolvido, e que tinha ao alcance, que percebi que o início dado por Pimenta (2019) conduzia às necessidades que levaram o homem a desenvolver a Trigonometria. E, ao mesmo tempo em que o homem, em sua atividade, carecia de instrumentos para suprir suas necessidades, acontece as apropriações dos conceitos relativos à circunferência. Com essa associação consegui desenvolver meu primeiro capítulo sobre o desenvolvimento lógico histórico da Trigonometria, visto no Apêndice A.

Inicialmente fiquei satisfeito com o desenvolvimento do capítulo, isso me ajudou nas aulas ministradas presencialmente e de forma remota no ano de 2020, pois me enriqueceu didaticamente ao me fornecer um material histórico em minhas aulas. Além disso, os problemas históricos e sociais sobre os quais dissertei no capítulo (Apêndice A) me conduziram a produzir situações semelhantes em sala de aula e nas aulas *online*.

Contudo, havia carências no desenvolvimento do capítulo e as SDA ainda não tinham boa conexão. Foi graças a um livro em versão digital fornecido de maneira gratuita (após certa persistência) pela Princeton University Press (Figura 17) que consegui outro momento em que a forma de pensamento adquire mudança.

Figura 17 - Concessão gratuita do livro pela Princeton University Press

Dear Conrado –

Due to the current circumstances, the Press is willing to forward you a PDF of the book *THE MATHEMATICS OF THE HEAVENS AND THE EARTH: The Early History of Trigonometry* by Glen Van Brummelen for your personal and academic use. We do not typically do this, but we would like to assist with your scholarship. We also rely on your integrity to not distribute this file to anyone else. This file is the property of Princeton University Press and any distribution beyond your personal use will be a violation of the US Copyright Act.

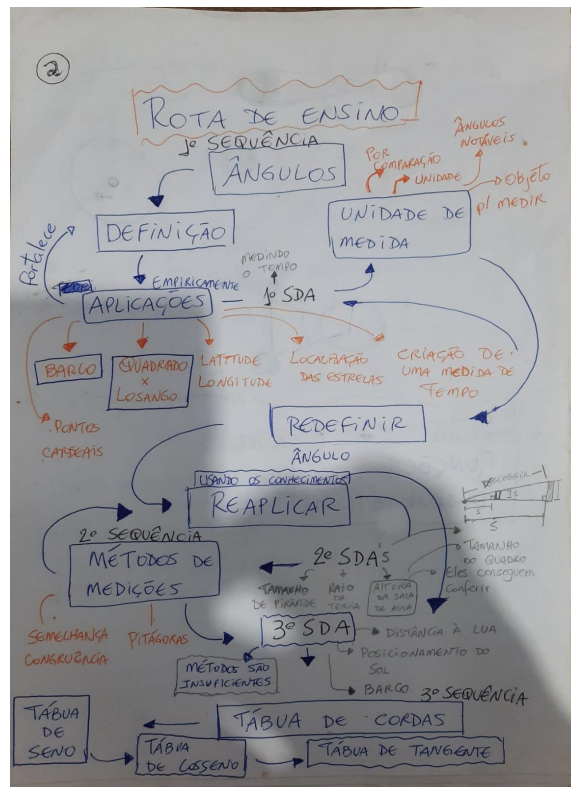
Best wishes,
Lisa Black

Fonte: Dados da pesquisa (2022).

Na leitura do livro de Glen Van Brummelen (*The Mathematics of the Heavens and the Earth: The Early History of Trigonometry*, 2009) entendi a forma mais madura da Trigonometria, a capacidade de transformar ângulos em comprimentos, e descobrir o momento da história da humanidade que esse fato ocorreu pela primeira vez com mais evidência tornou-se meu objetivo. O próprio Glen Van Brummelen, por meio de suas obras (*The Mathematics of the Heavens and the Earth: The Early History of Trigonometry*, 2009), (*Trigonometry: A Very Short Introduction*, 2020) e (*Heavenly Mathematics: The Forgotten Art of Spherical Trigonometry*, 2013), fez-me alcançar meu objetivo com maestria, pois apontou que foi nos trabalhos de Hiparco que provavelmente ocorreu pela primeira vez, de forma mais evidente, a transformação de ângulos em comprimentos.

A partir desse momento, realizei uma releitura de livros que me serviam como base teórica na construção do capítulo histórico e consegui formatar a primeira versão do esquema (Figura 18), que se tornou a espinha dorsal para desenvolver a Unidade Didática em sua forma final.

Figura 18 - A primeira versão da rota de ensino



Fonte: Dados da pesquisa (2022).

Apesar da coisa em si estar na evidência de sua apropriação, havia ainda insuficiências. A carência que surgira nesse momento é a fase em que as tábuas trigonométricas se tornam funções. Mesmo com toda leitura que eu já havia realizado, eu não tinha entendido as necessidades históricas que fizeram com que a humanidade percebesse as relações entre ângulos e comprimentos como função.

6.1.3 O objeto concreto

Esse talvez tenha sido o objeto mais difícil de compreender. Comecei a conjecturar hipóteses, tais como: há falta de material histórico, o desenvolvimento está em outro tópico da Matemática, etc. Foi no movimento do histórico da Trigonometria e da Matemática, na releitura das minhas produções e das referências, que comecei a apreensão dessa faceta.

O objeto tornou-se concreto para o pensamento, saiu da iminência, quando percebi que, quando surge a função trigonométrica, a Matemática estava em seu desenvolvimento mais sólido, uma vez que a evolução da Álgebra estava em evidência. A Matemática tomava corpo como disciplina das funções superiores

humanas, tornando-se linguagem e uma forma de pensamento. Com isso, ela produz suas próprias crises, suas próprias necessidades teóricas, desvincula-se de certa forma do mundo objetivo e sensível de forma a residir apenas nas concepções do pensamento humano.

Nessa transformação da Matemática, há a verificação de toda produção anterior da disciplina. Visto que as relações contidas nas tábuas trigonométricas respeitavam as condições de função, houve a naturalidade de se formalizar as razões trigonométricas como função. Com esse escopo a tangente, cosseno e o seno formaram a trinca mais famosa desse tópico. Tendo isso como base, consegui produzir o último Momento Didático da Unidade Didática, o qual chamei de Matemática por ela mesma.

A partir das leituras do histórico das Ciências, Matemática, Humanidade e da Trigonometria dei logicidade para o desenvolvimento da própria Trigonometria. Percebi os pontos de contradições, os quais favoreceram as produções das situações desencadeadoras de aprendizagem, reformulei de forma completa o capítulo do lógico-histórico. Consegui captar o movimento do simples ao complexo e formatar um objeto concreto para meu pensamento e formalizar a rota de ensino em sua forma final. Mais do que isso, ressignifiquei minha prática, enriqueci o ensino do tópico de Trigonometria e também diversos outros conteúdos, já que o desenvolvimento das coisas acontece de forma caótica e por vezes as coisas se encontram.

6.1.4 A negação da negação

Mesmo tendo finalizado o capítulo teórico da forma como consta nessa dissertação e me sentir satisfeito com a forma que ele tem, identifiquei com a práxis que o texto desenvolvido no Apêndice A surge com frequência em minhas aulas, seja em narrativa da história ou em momentos de formular situações-problema.

Além disso, na oficina que inicialmente produziria os dados para a pesquisa apresentada na qualificação do mestrado (Figura 19), houve o uso da Unidade Didática produzida em caráter de sua análise e ressignificação pela prática. No decurso da oficina consegui ajustar a UD, mas sua maior contribuição foi me mostrar que a negação da versão 1 do capítulo lógico-histórico não deveria ser descartado e muito menos substituir o capítulo que consta na dissertação; é na unidade dos

capítulos que a Trigonometria toma sua forma mais madura para o ensino e revela sua essência.

Figura 19 - Folheto de divulgação da oficina em Trigonometria (versão 3)



Fonte: Dados da pesquisa (2022).

Assim, os problemas com as pirâmides e as produções dos egípcios no uso dos triângulos precisam ser incorporados na ascensão do abstrato ao concreto. Além disso, é possível verificar que a Trigonometria não se desenvolve unicamente no triângulo ou na circunferência, seu progresso ocorre instrumentalizando-se e movimentando-se sobre os dois assuntos ao mesmo tempo. Pelo movimento dos astros e pelo gnômon, a disciplina necessita da circunferência, mas em problemas terrestres, o triângulo é que a equipa de forma mais segura.

6.2 A Unidade Didática

A Unidade Didática, que está em anexo, se divide em quatro partes, cada uma de uma cor para melhor organização: Ângulo (em vermelho), Técnicas de Medições (em roxo), Tábuas Trigonométricas (em azul) e a Matemática por ela mesma (em verde). Cada parte da UD denominamos de momentos didáticos. Esses momentos

didáticos objetivam-se na apropriação de um conceito ou técnica que carregam consigo uma relação de inseparabilidade e constituição do todo, no caso a Trigonometria. Por sua vez, os momentos didáticos se dividem em submomentos que visam - em sua unidade - incitar a manifestação do conceito ou técnica historicamente desenvolvidos e propostos para a apropriação do aprendiz.

Cada momento didático pretende produzir situações desencadeadoras de aprendizagem, que por sua vez, tem como objetivo mobilizar o aluno a entrar em Atividade de Aprendizagem. Espera-se que o aluno em Atividade de Aprendizagem sinta a necessidade e o desejo de buscar a apropriação do conceito ou técnica sugerida. O fim do MD se apresenta na percepção do professor sobre a apropriação do conceito ou das técnicas por parte dos estudantes, ou seja, na satisfação da necessidade gerada inicialmente.

Além disso, a Unidade Didática desenvolvida contém textos suportes. Esses textos surgem como uma forma de tornar a intenção em cada sugestão de desenvolvimento dos submomentos mais compreensíveis para o leitor e é uma tentativa de aproximar o idealizado pelos autores com a apreensão e ação docente. Cada texto suporte tem sua existência única, ou seja, não há uma continuidade em seu formato fenomênico, apenas na essência. Na relação histórica no campo conceitual da Trigonometria apresentamos na Figura 20 a organização da Unidade Didática. Em sequência dissertaremos sobre as ideias gerais de cada momento didático.

Quadro 1 - Organização da UD

Momento Didático	Situação Desencadeadora de Aprendizagem	Submomentos
Ângulos	SDA 1: Fracionando o dia	(i) Percepção das regularidades naturais. (ii) Apropriação das regularidades.
Técnicas de Medições	SDA 2: O raio da Terra	(i) Produções elementares. (ii) O que se pode fazer com ângulos?
Tábuas Trigonométricas	SDA 4: Situando a Terra no modelo Ptolomaico SDA 5: Construindo um relógio de sol	(i) Tábuas de cordas. (ii) Jyā – as tábuas de Seno e Cosseno. (iii) Cadê a Tangente?
A Matemática por ela mesma	SDA 6: A Matemática pura	(i) A função trigonométrica. (ii) Gráficos trigonométricos.

Fonte: Do autor (2022).

6.2.1 Momentos didáticos

- **ÂNGULOS**

O foco desse MD é a manifestação do conceito de Ângulo e sua apropriação pelos estudantes. É o cerne de toda produção teórica e sensível para a constituição do pensamento teórico no campo conceitual da Trigonometria. A manifestação do conceito de Ângulo depende da ação objetiva dos alunos, isto é, no estudo e contato com os objetos naturais. Também depende da percepção das regularidades da natureza e do caráter instrumental dessas regularidades ao ser humano para a satisfação de certa necessidade surgida diante de um problema social.

Ao tentar se apropriar dessa grandeza, o ser humano necessitou produzir instrumentos que em suas respectivas evoluções permitiram a apreensão de mais regularidades e de outros conceitos e técnicas. Com isso em vista, espera-se que as mesmas necessidades surjam ao longo do desenvolvimento do momento didático.

- **TÉCNICAS DE MEDIÇÕES**

As Técnicas de Medições são constituídas por conteúdos práticos com suporte teórico, tais como o Teorema de Pitágoras, a propagação retilínea da luz, o Teorema de Tales, semelhança e congruência de triângulos etc. Essas técnicas, em sua singularidade ou em conjunto, permitiram ao ser humano uma melhor organização social, além de entendimento e domínio sobre a natureza. Espera-se que o estudante perceba a relação e interdependência do conceito de Ângulo para o surgimento e desenvolvimento das técnicas propostas.

- **TÁBUAS TRIGONOMÉTRICAS**

Esse momento didático demarca o ponto central da Unidade Didática, uma vez que é nesse momento que a Trigonometria aparece de forma explícita, reunindo e mobilizando todo material teórico e prático anteriormente desenvolvido. Sua forma inicial “Tábuas de Cordas” visa mostrar aos aprendizes que o conhecimento humano também depende de maturação para se apresentar na forma mais evoluída. Além

disso, intencionamos exibir os motivos das razões trigonométricas serem da maneira como são atualmente.

• A MATEMÁTICA POR ELA MESMA

Em “A Matemática por ela mesma” procuramos incitar nos estudantes a percepção de que na evolução histórica da sociedade a própria produção teórica do homem produz necessidades que permitem o desenvolvimento de certas disciplinas. No caso, planeamos confrontar diversos conceitos da Matemática para sintetizarmos o conhecimento das funções trigonométricas, e esperamos que eles constatem que a forma pura da Matemática é natural, uma vez que ela irá se desenvolver sobre suas próprias necessidades.

6.2.1 O estrato teórico

A elaboração da Unidade Didática contou com um estudo sobre materiais históricos disponíveis, houve um cuidado para que a análise e a síntese do material histórico pudessem manifestar em sua essência os conceitos do materialismo histórico-dialético.

A essência do conceito filosófico-psicológico materialista dialético da atividade está em que ele reflete a relação entre o sujeito humano como ser social e a realidade externa - uma relação mediatizada pelo processo de transformação e modificação desta realidade externa. A forma inicial e universal desta relação são as transformações e mudanças instrumentais dirigidas a uma finalidade, realizadas pelo sujeito social, sobre a realidade sensorial e corporal ou sobre a prática humana material produtiva. Ela constitui a atividade laboral criativa realizada pelos seres humanos que, através da história da sociedade, tem propiciado a base sobre a qual surgem e se desenvolvem as diferentes formas da atividade espiritual humana (cognitiva, artística, religiosa, etc.). Entretanto, todas estas formas derivadas da atividade estão invariavelmente ligadas com a transformação, pelo sujeito, de um ou outro objeto que tem forma ideal (sob a forma ideal). O sujeito individual, por meio da apropriação, reproduz em si mesmo as formas histórico-sociais da atividade. O tipo geneticamente inicial da apropriação é a participação do indivíduo na realização coletiva, socialmente significativa, da atividade, organizada de forma objetiva externa. Graças ao processo de interiorização a realização desta atividade se converte em individual e os meios de sua organização em internos. Uma particularidade importante da atividade humana externa e interna é seu caráter objetivo, já que durante o processo de satisfazer suas necessidades, o sujeito coletivo e individual da atividade transforma a esfera objetiva da sua vida. A atividade humana tem uma estrutura complexa que inclui componentes como: necessidades,

motivos, objetivos, tarefas, ações e operações, que estão em permanente estado de interligação e transformação.

O conceito de atividade está internamente ligado ao conceito de ideal. O ideal é o vir-a-ser do objeto, que se torna real pela atividade do sujeito na forma de necessidades e finalidades, imagens que surgem no sujeito. O plano do ideal existente no homem como ser social, graças aos significados linguísticos e outras formações semióticas e simbólicas, lhe permite prever, predizer e provar as ações possíveis para chegar realmente ao resultado objetivo que corresponda a uma necessidade. O procedimento e o caráter destas ações determinam sua finalidade consciente (DAVYDOV, 1988, p. 13).

A primeira preocupação no desenvolvimento da Unidade Didática e na apresentação textual para professores e estudantes é o caráter do início ativo sobre a realidade. Nesse sentido, ao se entender que o conceito Ângulo é uma unidade da Trigonometria, buscamos desenvolver a primeira situação desencadeadora de atividade sobre as necessidades históricas e sociais dos povos que perceberam a manifestação dessa grandeza. Em vista disso, sintetizamos que foi a partir da tentativa de domínio das regularidades naturais que o homem sentiu necessidade de se apropriar do conceito Ângulo.

O desenvolvimento da Unidade Didática respeita o pressuposto de que a história só ocorre por meio das transformações instrumentais dirigida a uma finalidade. Com isso, a cada SDA proposta há os submomentos didáticos objetivando manifestar a necessidade de produção de instrumentos e conhecimentos para a plena apropriação de um determinado objeto. No entanto, o próprio desenvolvimento de instrumentos é aproveitado para surgir uma SDA, no caso a SDA 2. A situação desencadeadora de aprendizagem 2 “Técnicas de Medições” é uma manifestação do desenvolvimento dos instrumentos possibilitados pela apreensão do conceito Ângulo.

O gancho, ou seja, o encerramento de uma SDA para o início de outra SDA, também ocorre na plena satisfação da necessidade, precursora da busca pelo objeto idealizado, junto da insuficiência dos instrumentos e conhecimentos apropriados em satisfazer novas necessidades humanas. Desse modo, surge, por exemplo, a SDA 3, uma vez que as técnicas de medições se mostram insuficientes para alcançar novos objetos do desejo humano.

O processo de ascensão do abstrato ao concreto é uma categoria do materialismo histórico-dialético presente na construção da UD, tanto na formação dos MD quanto na UD no todo.

O conceito é um conjunto de definições diversas, em seu desenvolvimento vai do abstrato ao concreto [...] para a lógica dialética marxista o método de ascensão do abstrato ao concreto é apenas um meio através do qual o pensamento assimila o concreto, o reproduz intelectualmente, mas não o cria (KOPNIN, 1978, p. 156).

Nos MD as sugestões das ações em direção a um objeto visam inicialmente o engendramento de um objeto abstrato, que em sua evolução e na capacidade de generalização e mobilização dos conceitos apropriados pode vir a ser concreto.

O conceito do abstrato tem várias características: o abstrato é simples, privado de diferenças, não desenvolvido. Estas características designam os aspectos do abstrato real com certa parte autônoma, apartada do todo. Esta parte pode ser, pelo já visto, só o relativamente simples, homogêneo, carente de diferenças qualitativas, não desenvolvido internamente (DAVYDOV, 1988, p. 144).

Ao passo que na apreensão e generalização de cada técnica ou conceito proposto nos MD temos o surgimento de um conceito abstrato do todo, ou seja, da Trigonometria.

No processo de generalização se dá, por um lado, a busca e a designação com a palavra de certo invariante na multiplicidade de objetos e suas propriedades; por outro, o reconhecimento dos objetos da multiplicidade dada com ajuda do invariante separado. Na literatura psico-didática e sobre métodos de ensino, a generalização se caracteriza como a via fundamental para a formação de conceitos nos escolares (DAVYDOV, 1988, p. 104).

A generalização é um conteúdo do pensamento teórico, que por sua vez é o pensamento que se objetiva atingir ao final de todo o percurso. Mas para seu alcance precisamos partir da realidade objetiva e explorar o objeto em seu desenvolvimento. “A lógica dialética exige que se tome o objeto em seu desenvolvimento, em seu "automovimento", em mudança” (KOPNIN, 1978, p. 82).

No pensamento empírico o objeto é representado no aspecto das suas relações e manifestações exteriores acessíveis à contemplação viva. A forma lógica do empírico é constituída pelo juízo tomado isoladamente, que constata o fato ou por certo sistema de fatos que descreve um fenômeno. A aplicação prática do conhecimento empírico é restrita, sendo, no sentido científico, um ponto de partida qualquer para a construção da teoria.
O pensamento teórico reflete o objeto no aspecto das relações internas e leis do movimento deste, cognoscíveis por meio da

elaboração racional dos dados do conhecimento empírico. Sua forma lógica é constituída pelo sistema de abstrações que explica o objeto. A aplicação prática do conhecimento teórico é quase ilimitada, enquanto no sentido científico a construção da teoria se manifesta como um resultado, como conclusão do processo de conhecimento (KOPNIN, 1978, p. 152, grifo nosso).

Nesse sentido, a estrutura adotada na Unidade Didática foi realizada por entendermos que essa é a marcha do desenvolvimento da Trigonometria, o automovimento da disciplina, o qual reflete suas relações internas, contradições e leis de constituição. E tudo que foi dissertado nesta seção materializou-se no esquema encontrado na Figura 20.

Na Figura 20 há a tentativa de destacar as unidades que compõem o campo conceitual da Trigonometria e o movimento histórico da evolução das unidades, apropriação, além da apreensão dessa disciplina. O caráter das contradições que permitem o avanço do pensamento pode ser percebido na passagem de um MD para o outro.

6.2.2 Rota de ensino

A Figura 20 foi denominada rota de ensino, um esquema que tenta sintetizar a proposta didática apresentada, além de apontar o percurso idealizado e objetiva-se a auxiliar a atividade de estudo do professor. É possível verificar que esse esquema se divide em quatro principais momentos: ângulo, técnicas de medições, tábuas trigonométricas e funções trigonométricas. Cada momento tem sua subdivisão e todos iniciam por uma SDA, as quais foram elaboradas na tentativa de suscitar a atividade de aprendizagem. Nos próximos parágrafos tentaremos expor os caminhos elucidados pelas setas do esquema.

A primeira SDA (fracionando o dia) carece do pleno desenvolvimento da definição da grandeza Ângulo. Historicamente, no instante em que o problema de fracionamento do tempo surge, sua solução é impossível com as ferramentas até então desenvolvidas. Assim, despertam-se as primeiras tentativas em direção à apropriação do conceito. Além disso, essa grandeza exige manifestações em diversas situações da prática cotidiana para seu completo amadurecimento. Por ser uma grandeza, é necessária uma unidade de medida, historicamente o grau surge como

primeiro quantificador para o ângulo. Essa unidade fica mais precisa à medida que as ferramentas evoluem. Por conseguinte, no movimento de todo material prático e teórico desenvolvido, tem-se a possibilidade da organização social a partir da solução da primeira SDA. Essa ideia é esquematizada nas conexões em vermelho na Figura 20.

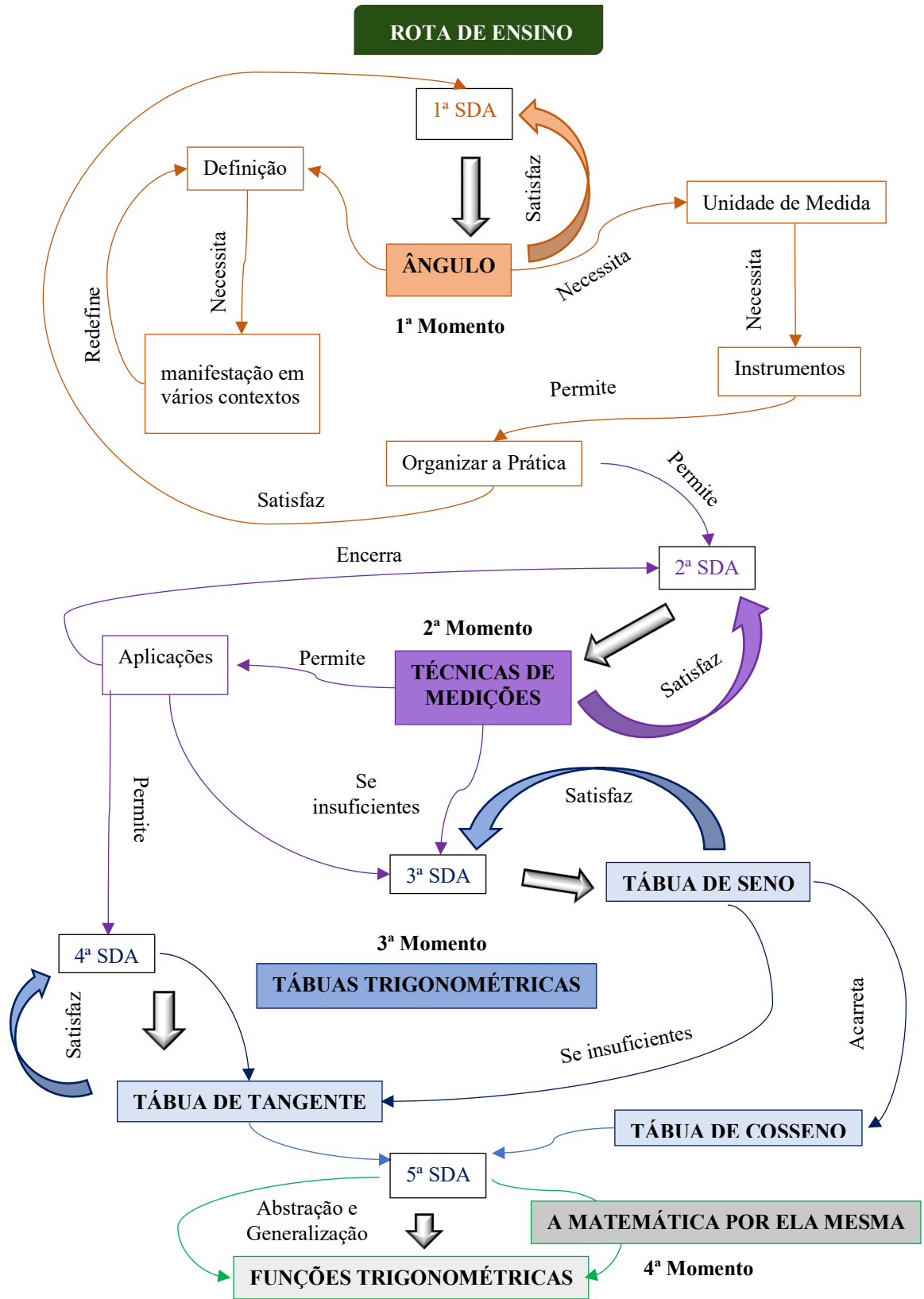
A segunda SDA (técnicas de medições) emerge a partir da continuidade da atividade prática do homem e da grandeza Ângulo. O aprendizado dessa grandeza permite o desenvolvimento de instrumentos de medidas, fundamentados em formas geométricas. Consequentemente, a capacidade cognitiva também evolui. É no ato de medir e de contextos sociais da época que o homem tem a necessidade de aprimorar os equipamentos disponíveis do período. Em virtude disso que em sala de aula são imprescindíveis situações em que os alunos precisam medir e sejam estimulados a refinar as medidas.

É ainda no ato de medir que os instrumentos vão se tornando insuficientes e, em certa condição, é possível ter as primeiras manifestações do seno e, em outra ocasião, eleva-se a tangente. Assim, tem-se a terceira SDA: as tábuas trigonométricas. Para a ampla evolução das tábuas trigonométricas é essencial muito empenho prático e teórico. Esse empenho prático começa a se voltar para dentro dos instrumentos teóricos, os quais produzem suas próprias necessidades.

Em razão dessas necessidades interiores têm-se as condições para a quinta SDA: as funções trigonométricas. O movimento de maturação das funções trigonométricas percorre por todo campo teórico e prático desenvolvido pelas SDA anteriores, além de outros conteúdos da Matemática. Devido à SDA estar condicionada aos problemas da própria disciplina, ao contrário das anteriores que foram incitadas a partir de assuntos de interesse massivamente social, a quinta SDA também recebe a alcunha de “a Matemática por ela mesma”.

Portanto, a Figura 20 é uma tentativa de tornar mais próximo e acessível o objeto pensado e materializado na Unidade Didática para os potenciais sujeitos que se servirão dela. Assim se espera, pois foi a partir da sua elaboração que todo texto da UD ocorreu. Apenas com a rota de ensino pronta, da maneira como se apresenta na Figura 20, foi possível a organização do pensamento do autor e, como consequência, o processo de dissertação da UD.

Figura 20 - Rota de ensino



Fonte: Do autor (2022).

7 CONCLUSÃO

A presente pesquisa buscou investigar a organização de ensino que foi proposta em uma Unidade Didática em Trigonometria. Esse objeto foi concebido a partir da seguinte questão: **que implicações a compreensão da essência do objeto da atividade de ensino têm para a organização do ensino de Trigonometria?** Para responder à questão de investigação analisamos as potencialidades de uma UD desenvolvida para o ensino de Trigonometria. Com esse intuito, tivemos que (i) revelar os sentidos pessoais do professor/pesquisador, (ii) analisar o movimento do pensamento (empírico ao concreto, do geral ao particular) objetivado na Unidade Didática, (iii) desvelar o extrato teórico da Unidade Didática sintetizando como as necessidades históricas para o desenvolvimento da Trigonometria contribuíram para a composição das situações desencadeadoras de aprendizagem, cuja intencionalidade é de mobilizar os nexos conceituais do campo de conceitos da Trigonometria, suscitar a atividade de aprendizagem e criar a ZDI; e (iv) analisar como as necessidades históricas engendradas no desenvolvimento da Trigonometria contribuíram para a composição das SDA.

O desencadeamento da pesquisa surgiu da práxis pedagógica, nos instantes em que eu, enquanto professor, observava que os resultados dos alunos, as significações produzidas, não coincidiam com o objeto da minha atividade de ensino. Esse incômodo me fez refletir sobre a minha formação escolar, sobre algumas falas elitistas que são comumente propagadas na área de Matemática, tal como: “Matemática é para poucos”. Minhas reflexões me fizeram lembrar um fato ocorrido enquanto eu estava na 8^o série do Ensino Fundamental quando, certa vez, questionei o professor “onde usarei isso em minha vida?” e a resposta foi “se você for caixa de supermercado, nunca usará”.

Enquanto professor, vejo com mais força a crise que a escola, enquanto instituição, vive, visto que a sociedade moderna desacredita que os conteúdos escolares sejam de extrema importância, uma vez que muita informação e conhecimento é de fácil alcance por meio da internet. Muitos veem a escola como defasada em relação às novas relações sociais, em face das tecnologias disponíveis. E mesmo após uma pandemia, em que a necessidade de um ambiente escolar físico se mostrou evidente, as concepções pouco mudaram. Pouca valorização existe no meio político e na sociedade em relação à Educação. Os descasos com professores

e profissionais da área, a má remuneração, a péssima infraestrutura e a superlotação de salas de aula apontam um sucateamento e desdém.

A partir da defesa de um ensino democrático, de uma escola pública de qualidade, de valorização da produção acadêmica e da Educação no geral, além do desejo de obter uma didática mais eficiente que supra a necessidade de ensino e aprendizagem, busquei o mestrado profissional em Ensino de Ciências e Educação Matemática. Foi a fim de combater o sentimento de impotência que os alunos sentem em relação aos conceitos de Matemática e desfazer o mito de que Matemática é para poucos sortudos que entendi que deveria abiscoitar uma linha teórica cujo potencial me ressignificasse, desenvolvesse e me fizesse acreditar na educação.

E para que a marcha do meu pensamento iniciasse e se conectasse logicamente, necessitei compreender o espaço e o objeto da minha profissão, além de entender o ofício docente. Precisei ter acesso a teorias que apontassem como ocorre a transformação do conhecimento já fixo na cultura humana para um aspecto particular. Esse todo, que se conecta diretamente a necessidades da minha vida particular e laboral, coincidiu com as necessidades acadêmicas, com a busca da resposta da pergunta norteadora.

Pois foi na investigação da essência do objeto da atividade de ensino em Trigonometria que a mobilização do meu próprio pensamento, sua ascensão do abstrato ao teórico, deu início e se encerrou. Ao tentar produzir a Unidade Didática em Trigonometria que inicialmente seria um instrumento que orientaria a produção de dados geradas em uma oficina *online* com estudantes e professores hospedada pela Universidade Federal de Lavras, houve a necessidade de se realizar uma marcha lógica-histórica do campo de conceitos da Trigonometria, entender as conexões internas da disciplina e suas contradições.

Enquanto eu, como professor/pesquisador, lia, analisava, deduzia, sintetizava a fundamentação teórica desta pesquisa e o movimento histórico dessa teoria e da Trigonometria, eu me posicionava sobre contradições teóricas e práticas, as quais impulsionavam a evolução da dissertação, da minha atuação profissional e meu pensamento.

Nesse percurso, a partir da análise dos dados da pesquisa e da descrição da Unidade Didática, nota-se que a busca pela essência do objeto permite o pensamento ascender do abstrato ao concreto, do geral ao particular. Permite uma captação das conexões internas e externas dos conceitos e avançar sobre suas contradições. É da

apropriação da essência que o pensamento se aproxima do todo e as possibilidades na atuação docente se multiplicam, se enriquecem. Apoiado na investigação da essência que se engendra a possibilidade do salto quantitativo ao qualitativo, de apreensão dos conceitos e compreensão de sua manifestação nos diversos contextos.

Em vista disso, podemos concluir que a busca pela essência favorece o desenvolvimento do pensamento do professor, organiza e enriquece sua prática docente, permite entender os pontos de contradições do próprio objeto de ensino, o que o conduz a planejar de maneira mais eficaz e eficiente situações desencadeadoras de aprendizagem. Além disso, torna-se um importante instrumento para incitar a atividade de aprendizagem e auxiliar os estudantes a conquistarem o pensamento teórico.

O resultado da nossa jornada teórica e prática se materializa numa contribuição ao ensino de Matemática com o produto educacional e nas páginas desta dissertação. Além do mais, seu produto oculto encontra-se na minha prática docente, pois durante as aulas no Ensino Básico percebo que consigo transições de conteúdo, conexões históricas e relacionar o conteúdo de Ensino com o cotidiano do aprendiz, graças a todo arcabouço teórico apropriado. É durante a ação no mundo material que é possível a compreensão do valor da busca pela essência do objeto, na importância que existe de se modificar o pensamento de sua forma empírica para a teórica.

As minhas necessidades, minhas perguntas iniciais e de pesquisa foram satisfeitas com o objetivo conquistado. Por mais que ainda imperfeito, cumpre suas finalidades. Vejo-me saciado por entender que o objeto sempre vai se apresentar na sua incompletude, por mais fundo que mergulhamos em sua essência. Finalmente, gostaria de salientar que nada disso seria possível sem as interações sociais ocorridas antes e durante o desenvolvimento da pesquisa, sem as discussões com membros dos grupos, sem as orientações, as produções bibliográficas e sem a atuação profissional em sala de aula.

REFERÊNCIAS

- ALVES, Alvaro Marcel. O método materialista histórico dialético: alguns apontamentos sobre a. **Revista de Psicologia da UNESP**, São Paulo, v. 9, n. 1, p. 1-13, mar. 2010. Disponível em: https://www.google.com/url?esrc=s&q=&rct=j&sa=U&url=https://revpsico-unesp.org/index.php/revista/article/download/103/106&ved=2ahUKEwiMh8XOmJj_AhXpLrkGHQ0FD34QFnoECAkQAg&usg=AOvVaw3UvTqbCJyC04vyGFD2mtwX. Acesso em: 15 out. 2021.
- ARANHA, Maria Lúcia de Arruda. **História da educação e da pedagogia: geral e Brasil**. 3. ed. São Paulo: Moderna, 2012.
- CARAÇA, Bento de Jesus. **Conceitos fundamentais da matemática**. 7. ed. Lisboa: Grandiva, 2010.
- CLARINDO, Cleber Barbosa da Silva; MILLER, Stela. Atividade de estudo e superação do modelo tradicional de ensino: contribuições davidovianas. **Educação em Foco**, Belo Horizonte, v. 21, n. 33, p. 243-262, jan. 2018. Disponível em: <https://revista.uemg.br/index.php/educacaoemfoco/article/view/1304>. Acesso em: 08 nov. 2021.
- CLARK, Walter Eugene. **The Aryabhatiya of Aryabhata**. Chicago: University of Chicago Press, 1930.
- DAVYDOV, Vasili Vasilievich. **Problemas do ensino desenvolvimental: a experiência da pesquisa teórica e experimental na psicologia**. Tradução de José Carlos Libâneo e Raquel A. M. da Madeira Freitas. Moscú: Progresso, 1988.
- DIEHL, Rodrigo Cristiano. **Estado, neoliberalismo e educação pública**. Observatório Latino Americano (ODELA), set. 2018. Disponível em: <https://www.ufrgs.br/odela/2018/09/23/estado-neoliberalismo-e-educacao-publica/>. Acesso em: 15 out. 2021.
- FLICK, Uwe. **Introdução à pesquisa qualitativa**. 3. ed. Porto Alegre: Artmed, 2009.
- HARNECKER, Marta. **Os conceitos elementares do materialismo histórico**. 2. ed. São Paulo: Global, 1983.
- HOGBEN, Lancelot. **Maravilhas da matemática: influência e função da matemática nos conhecimentos humanos**. 2. ed. Porto Alegre: Editora Globo, 1950.
- IOCHUCKI, Suellen Karina Palhano. **Propostas para o Ensino da Trigonometria: Introdução à aproximação de funções periódicas por polinômios trigonométricos**. 2016. 101 p. Dissertação (Mestrado em Matemática) - Universidade Estadual de Ponta Grossa, Ponta Grossa, 2016.

KARLBERG, Luísa Galvão Lessa. Papel da internet na vida das pessoas. **A Gazeta do Acre**, 2016. Disponível em: <https://agazetadoacre.com/2016/11/artigos/papel-da-internet-na-vida-das-pessoas/>. Acesso em: 15 out. 2021.

KENEDDY, Edward S. **Tópicos de história da matemática para uso em sala de aula**: Trigonometria. Tradução de Hygino H. Domingues. São Paulo: Editora Atual, 1992.

KOPNIN, Pavel V. **A dialética como lógica e teoria do conhecimento**. Tradução de Paulo Bezerra. Rio de Janeiro: Civilização Brasileira S.A., 1978. 354 p.

KOSIK, Karel. **Dialética do concreto**. São Paulo: Paz e Terra, 1976.

LEONTIEV, Aleksei. **Actividade, conciencia, personalidad**. La Habana: Pueblo y Educación, 1983.

LEONTIEV, Aleksei. **O desenvolvimento do psiquismo**. Lisboa: Livros Horizonte, 1978.

LEONTIEV, Aleksei. **O desenvolvimento do psiquismo**. 2. ed. São Paulo: Centauro, 2004.

LIBÂNEO, José Carlos. A didática e a aprendizagem do pensar e do aprender: a teoria histórico-cultural da atividade e a contribuição de Vasili Davydov. **Revista Brasileira de Educação**, Rio de Janeiro, v. 27, p. 5-24, set./out./nov./dez. 2004. Disponível em: <https://www.scielo.br/j/rbedu/a/ZMN47bVm3XNDsJKyJvVqtx/?format=pdf&lang=pt>. Acesso em: 17 out. 2021.

LIBÂNEO, José Carlos. **Adeus professor, adeus professora? Novas exigências educacionais e profissão docente**. São Paulo: Cortez, 2013.

LIBÂNEO, José Carlos; FREITAS, Raquel A. M. da M. Vygotsky, Leontiev, Davydov – três aportes teóricos para a teoria histórico-cultural e suas contribuições para a didática. **IV Congresso Brasileiro de História da Educação-SBHE**, 2006. Disponível em: <https://docplayer.com.br/11604458-Vygotsky-leontiev-davydov-tres-aportes-teoricos-para-a-teoria-historico-cultural-e-suas-contribuicoes-para-a-didatica.html>. Acesso em: 09 nov. 2021.

LOPES, Ediane Carolina Peixoto Marques; CAPRIO, Marina. As influências do modelo neoliberal na educação. **Revista on line de Política e Gestão Educacional**, Araraquara, n. 5, p. 1-16, dez. 2008. Disponível em: <https://periodicos.fclar.unesp.br/rpge/article/view/9152>. Acesso em: 15 out. 2021.

LUCHETTA, Valéria Ostete Jannis. Leonardo de Pisa (Fibonacci). **IMÁTICA**: a matemática interativa na internet, 2003. Disponível em: <https://www.ime.usp.br/~leo/imatica/historia/fibonacci.html>. Acesso em: 27 jul. 2020.

MARRACH, Sonia Alem. **Neoliberalismo e educação**. São Paulo: Cortez, 1996.

MOURA, Manoel Oriosvaldo de *et al.* Atividade orientadora de ensino: unidade entre ensino e aprendizagem. **Revista Diálogo Educacional**, Curitiba, v. 10, n. 29, p. 205-229, jan./abr. 2010. Disponível em: <https://periodicos.pucpr.br/dialogoeducacional/article/view/3094/3022>. Acesso em: 30 out. 2021.

NEUGEBAUER, Otto; PINGREE, David. **The Pañcasiddhantika of Varahamihira**. Copenhagen: Munksgaard, 1970.

NEUGEBAUER, Otto; PINGREE, David. **The Pañcasiddhantika of Varahamihira**. Copenhagen: Munksgaard, 1971.

O'CONNOR, John Joseph; ROBERTSON, Edmund Frederick. **Mac Tutor: Varahamihira**. MacTutor History of Mathematics Archive, 2000. Disponível em: <https://mathshistory.st-andrews.ac.uk/Biographies/Varahamihira/>. Acesso em: 8 jul. 2020.

PALANGANA, Isilda Campaner. **Desenvolvimento e aprendizagem em Piaget e Vigotski: A relevância**. 6. ed. São Paulo: Summus, 2015.

PEREIRA, João Júnior Bonfim Joia; FRANCIOLI, Fátima Aparecida de Souza. Materialismo histórico-dialético: Contribuições. **Germinal: Marxismo e Educação em Debate**, Londrina, v. 3, n. 2, p. 93-111, jun. 2011. Disponível em: <https://periodicos.ufba.br/index.php/revistagerminal/article/view/9456>. Acesso em: 15 ago. 2021.

PILETTI, Claudino; PILETTI, Nelson. **História da educação: de Confúcio a Paulo Freir**. São Paulo: Contexto Editora, 2018.

PIMENTA, Gustavo Venancio. **O desenvolvimento do campo conceitual da Trigonometria em situações desencadeadoras de aprendizagem mediadas por tecnologias digitais**. 2019. 92 p. Dissertação (Mestrado Profissional em Educação) – Universidade Federal de Lavras, Lavras, 2019.

PIRES, Marília Freitas de Campos. O materialismo histórico-dialético e a educação. **Interface - Comunicação, Saúde, Educação**, São Paulo, v. 1, n. 1, p. 83-94, ago. 1997. Disponível em: <https://repositorio.unesp.br/handle/11449/30353>. Acesso em: 17 ago. 2021.

PRESTES, Zoia. A sociologia da infância e a teoria histórico-cultural: algumas considerações. **Revista de Educação Pública**, Cuiabá, v. 22, n. 49, p. 295-304, 2013. Disponível em: <https://periodicoscientificos.ufmt.br/ojs/index.php/educacaopublica/article/view/916>. Acesso em: 15 dez. 2020.

PTOLEMY, C.; TOOMER, G. J. **Ptolemy's Almagest**. Translated and Annotated by TOOMER, G. J. Londres: Gerald Duckworth, 1984. 693 p.

REIS, Fabiana dos. **Uma visão geral da Trigonometria: história, conceitos e aplicações**. 2016. 84 f. Dissertação (Mestrado em Matemática) - Universidade Estadual de Ponta Grossa, Ponta Grossa, 2016.

RIBEIRO, Elisabete da Silveira *et al.* Breve história da educação. **Revista Gestão Universitária**, [s.l.], nov. 2017. Disponível em: <http://gestaouniversitaria.com.br/artigos/breve-historia-da-educacao>. Acesso em: 16 out. 2021.

SANTANA, Edilson. **Filosofar é preciso**. 1. ed. São Paulo: DPL Editora, 2015. 176 p.

SANTOS, Oder José dos. **Pedagogia dos conflitos sociais**. Campinas: Papirus, 1992.

SAVIANI, Dermeval. Sistemas de ensino e planos de educação: o âmbito dos municípios. **Educação & Sociedade**, [s.l.], n. 69, p. 119-136, dez. 1999. Disponível em: <https://www.scielo.br/j/es/a/J56mswq8VnMPzwWwPJSKvJG/?format=pdf&lang=pt>. Acesso em: 16 out. 2021.

SAVIANI, Dermeval. **Sistemas educacionais**. Gestrado UFMG, Belo Horizonte, 2010. Disponível em: <https://gestrado.net.br/verbetes/sistemas-educacionais/>. Acesso em: 16 out. 2021.

SAVIANI, Dermeval. **Trabalho, Educação e Saúde**, Rio de Janeiro, out. 2008. Disponível em: <https://www.tes.epsjv.fiocruz.br/index.php/tes/article/view/1708>. Acesso em: 21 out. 2021.

SERRES, Michel. **Elementos para uma História das Ciências**. Lisboa: Terramar, 1995.

SILVA, Derli Santos da. **Ensino de Trigonometria na formação do técnico em Agropecuária: superando desafios e construindo significados**. 2016. 130 p. Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências e Matemática) - Universidade de Caxias do Sul, Caxias do Sul, 2016.

SILVA, Kalina Vanderlei; SILVA, Maciel Henrique. **Dicionário de conceitos históricos**. São Paulo: Contexto, 2009.

SILVA, Kalina Vanderlei. **Uma sequência didática para o ensino de funções trigonométricas: uma investigação sobre as contribuições do geogebra**. Santa Maria: UFSM, 2018.

SILVA, Luis Gustavo Moreira da; FERREIRA, José Ferreira. O papel da escola e suas demandas sociais. **Projeção e docência**, [Brasília], v. 5, n. 2, p. 6-23, 2014. Disponível em: <http://revista.faculdadeprojecao.edu.br/index.php/Projecao3/article/view/415>. Acesso em: 15 out. 2021.

SPIRKINE, Alexadr; YAKHOT, Ovshy. **Princípios do materialismo histórico**. São Paulo: Estampa, 1975.

VAN BRUMELLEN, Glen. **The mathematics of the heavens and the earth: the early history of trigonometry**. Princeton: Princeton University Press, 2009.

VAN BRUMMELEN, Glen. **Heavenly mathematics: the forgotten art of spherical trigonometry**. Princeton: Princeton University Press, 2013.

VAN BRUMMELEN, Glen. **Trigonometry: a very short introduction**. Oxford: Oxford University Press, 2020.

VIGOTSKI, Lev Semenovitch. **A construção do pensamento e da linguagem**. 2. ed. São Paulo: WMF Martins Fontes, 2009.

APÊNDICE A – O desenvolvimento lógico-histórico da Trigonometria: versão 1

A importância de intentar descrever o amadurecimento do conhecimento dá-se na conveniência de buscar abranger a coisa em si, estudar todos os seus aspectos. É a tentativa em percorrer seu automovimento, sua história. Contudo, há a impossibilidade de se retratar plenamente a transformação do objeto. Assim, tem-se o importante papel do **lógico**. “O lógico reflete não só a história do próprio objeto como também a história do seu conhecimento. Daí a unidade entre o lógico e o histórico ser premissa necessária para a compreensão do processo de pensamento, da criação da teoria científica” (KOPNIN, 1978, p. 186).

O pensamento não deve simplesmente fotografar o processo histórico real com todas as suas causalidades, ziguezagues e desvios. O pensamento não é obrigado a seguir cegamente o movimento do objeto em toda parte. Por isso o lógico é o histórico liberado das casualidades que o perturbam. “De onde começa a história deve começar também a marcha das ideias, cujo movimento sucessivo não será mais que o reflexo do processo histórico em forma abstrata e teoricamente coerente; o reflexo é corrigido, mas corrigido de acordo com as leis dadas pelo próprio processo histórico real, sendo que cada momento pode ser examinado no ponto de seu desenvolvimento onde o processo atinge plena maturidade, sua forma clássica” (KOPNIN, 1978, p. 185).

Neste capítulo pretende-se apresentar a marcha das ideias que permitiram o avanço da Trigonometria. Dessa forma, iremos tentar reproduzir as necessidades; momento social e político; os principais instrumentos e teorias disponíveis na efervescência dos principais nexos conceituais do assunto; delinear um movimento lógico do processo do conceito com finalidade de entender as diferentes formas que este assumiu em sua ascensão de seu estado mais simples ao estado mais complexo.

Isso posto, espera-se que apreensão desse movimento lógico-histórico nos permita, em nossa atividade de ensino, inter-relacionar as necessidades históricas do desenvolvimento da Trigonometria à construção de uma SDA que enseje o processo de significação dos estudantes e os sensibilizem a entrarem em Atividade de Aprendizagem.

1.1 Elementos lógico-históricos que permitiram o surgimento da Trigonometria

É comum estudar Trigonometria no ensino básico brasileiro da mesma forma em que ela se apresenta nos livros didáticos. Inicia-se por razões trigonométricas num triângulo retângulo; nesse estudo inicial desenvolve-se o seno, cosseno e tangente sobre os ângulos notáveis. Então, parte-se para o estudo da circunferência trigonométrica, em que são estudadas as grandezas e as diferentes unidades de medida envolvendo arco. Após, faz-se uma ponte para funções trigonométricas. E, por fim, trata-se das relações trigonométricas fundamentais, redução ao 1º quadrante, as operações com arcos, equações e inequações trigonométricas e encerra-se pela trigonometria num triângulo qualquer (GIOVANNI, 2002; IEZZI, 2007, 2016). Mostraremos nas próximas seções que há uma sutil divergência entre o desenvolvimento histórico da Trigonometria com a forma de apresentação do conteúdo para os estudantes do ensino básico.

1.1.1 Prelúdio

Duas grandezas mostraram-se importantes para o despertar da Trigonometria: Tempo e Comprimento (linear e angular). O homem primitivo, ao deixar de ser coletor de alimentos vegetais e caçador de animais, passando a ter como atividades principais o cultivo e a criação dos seus alimentos, realiza um marco histórico que dá origem a outras necessidades e por consequência a outras atividades. O domínio da contagem, por exemplo, surgiu devido à necessidade de controlar a quantidade de ovelhas, bois e demais animais de pasto. Foi então que se começou progressivamente a sentir outras carências sociais, em virtude da primeira permitir melhor comodidade e organização coletiva. “É só quando o nível da civilização se vai elevando e, em particular, quando o regime de propriedade se vai estabelecendo, que aparecem novos problemas - determinações de comprimentos, áreas, etc., - os quais exigem a introdução de novos números” (CARAÇA, 1951, p. 5).

A necessidade de produzir sua própria alimentação, por meio das atividades de cultivo de vegetais e criação de rebanhos, somados a questões religiosas e místicas, fez com que o ser humano fosse exigido a entender os ciclos da natureza associados às regularidades e ciclos dos astros observáveis no nosso Universo, o que levou a criação do calendário e, mais especificamente, perceber a grandeza Tempo. Notou-se que os animais e o próprio ser humano obedeciam a um determinado ciclo de

reprodução e que os vegetais dispõem de um ciclo característico para seu cultivo e amadurecimento integral. Além disso, percebeu-se que a própria natureza da mulher e o nosso tempo desperto eram cíclicos, este último acompanha geralmente o alvorecer e o anoitecer. Para dominar esses períodos naturais e desenvolver um utensílio de medida, a humanidade recorreu aos corpos celestes.

Não resta dúvida, porém, de que foi ao aprendermos a semear vegetais e a criar animais, que só reproduzem em determinadas épocas do ano, que sentimos a necessidade de fazer um registro das estações. Só então o homem observou que a lua nasce e se põe um pouco mais tarde a cada noite, entre duas luas cheias, e começou a agrupar os dias em luas, ou meses de trinta dias. Observou também - como quase todos os povos primitivos - que as constelações do firmamento noturno variam com as estações, e que cada noite, nascem e se põe um pouco mais cedo que na precedente. Quase todos os povos primitivos sabiam reconhecer as estações, observando quais as primeiras constelações que se viam nascer logo após o pôr do sol, e também contar o número de luas transcorridos entre as estações secas e chuvosas (HOGBEN, 1950, p. 44).

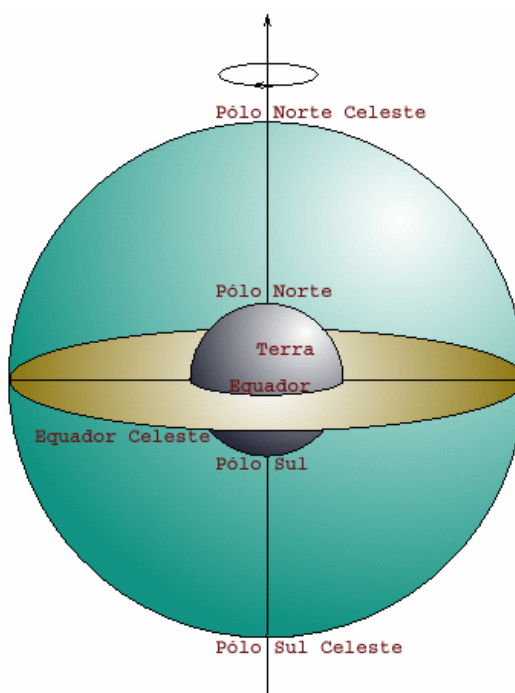
A análise dos corpos celestes perpassou pelo pressuposto da Terra situar-se no centro de um globo muito maior que envolvia todos os outros astros. Esse globo era conhecido como firmamento, ou esfera celeste - visto na Figura 1 -, girava em torno de um eixo que passava pelo polo celeste, ou seja, havia uma visão heliocentrista e de finitude em relação ao espaço sideral. Porém, essa primeira constatação humana não impediu os avanços científicos.

O fascínio com o cosmos conduziu o homem a situar as estrelas no firmamento. Para essa tarefa três distâncias angulares importantes foram estabelecidas: a distância que o corpo celeste forma com o zênite do observador, ou seja, distância zenital; a que esse corpo forma com o horizonte, isso é, sua altura; e, por fim, a que o astro forma com o meridiano, partindo do Norte, intitulada distância azimutal.

A partir da observação das fases da Lua, do posicionamento das estrelas e da variação da sombra dos objetos pelo posicionamento do Sol, foi possível determinar o agrupamento de dias que compreende o ano, as estações e até mesmo fracionar os dias em horas. O helíaco da estrela Sirius auxiliou na determinação da quantidade de dias no ano, logo que se estabeleceram as cidades no Nilo (HOGBEN, 1950, p. 55). Por sua vez, a silhueta dos objetos gerada pelos raios solares contribuiu para a criação dos pontos cardeais: norte, sul, leste e oeste. Com o reconhecimento desses pontos, fundamentais para a orientação humana no globo terrestre, o homem determinou duas

linhas elementares de referência, o primeiro meridiano, que liga os pontos norte e sul; e o paralelo principal, linha perpendicular ao meridiano que liga os pontos leste e oeste. Hoje o primeiro meridiano é adotado pelo meridiano de Greenwich e o paralelo principal é dado pela linha do Equador. Hogben (1950, p. 55) diz que a “descoberta destas duas referências foi o primeiro problema matemático da experiência social da humanidade”.

Figura 1 - Representação da esfera celeste.



Fonte: <<http://www.astro.iag.usp.br/~ronaldo/intrcosm/Glossario/EsferaCel.html>>.

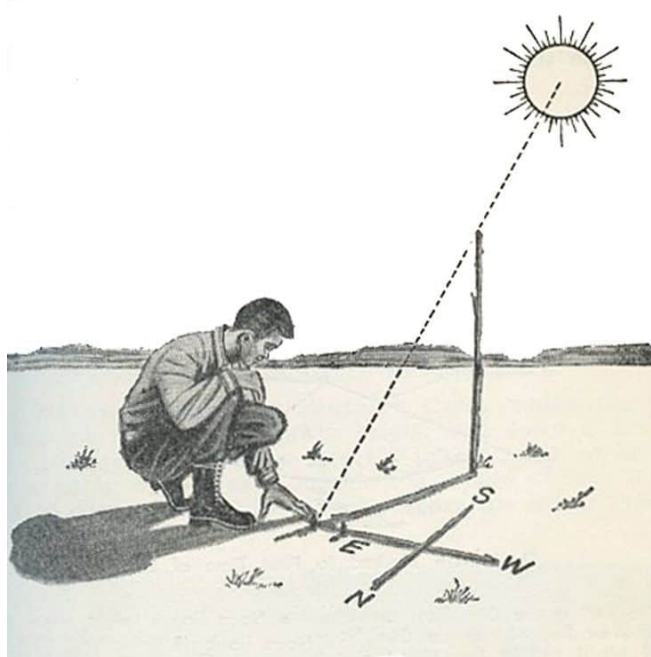
Acesso em: 03 de dez. de 2019.

O meridiano norte-sul foi escolhido pela posição da sombra ao meio-dia, momento que atinge seu tamanho mínimo. “Esta sombra, além de indicar o primeiro meridiano, assinala também o ponto do céu em torno do qual giram as estrelas durante a noite” (HOGBEN, 1950, p. 55). Por se tratar de um ponto, determinar sua localização exata apenas pelo exame do tamanho da sombra é tarefa quase impossível. Nesse sentido, valeu-se de um método geométrico já conhecido pela humanidade.

Vários documentos nos revelam como se fixou a localização exata da sombra do meio-dia. Na areia ou terra fofa que rodeava o obelisco (então relógio público), traçou-se, com o auxílio de um pedaço de corda, uma circunferência. Depois, marcaram-se os dois pontos em

que a sombra tangenciava a circunferência e traçou-se a bissetriz do ângulo por eles formado, primeiramente, unindo-os por uma corda e dobrando-a ao meio, mais tarde traçando-se arcos de raio idênticos com centro nos dois pontos (HOGBEN, 1950, p. 55).

Figura 2 - Determinação dos pontos cardeais pela sombra de um gnômon.



Fonte: <<https://www.artofmanliness.com/articles/find-direction-without-compass/>>.

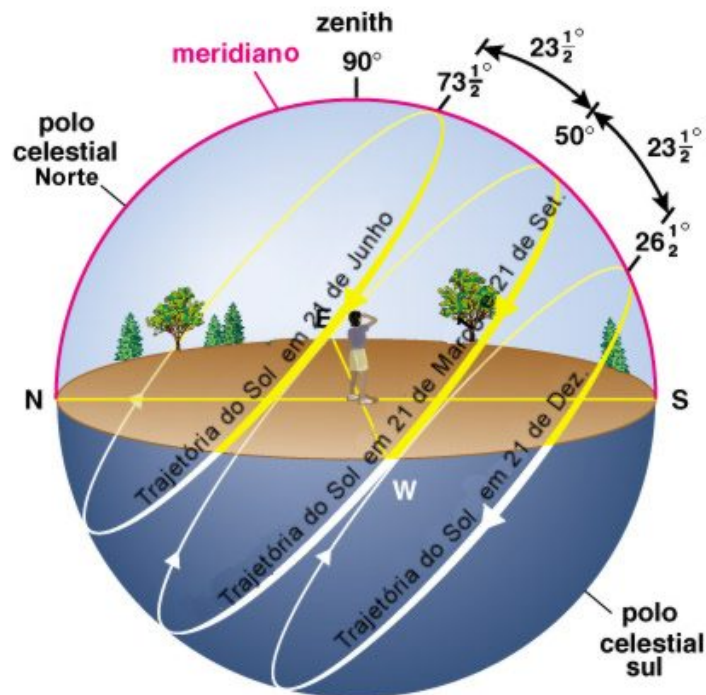
Acesso em: 04 de dez. de 2019.

Atualmente, crianças de pouca idade tem conhecimento sobre o modo de localizar os pontos cardeais, mesmo que bem imprecisamente. Basta, para isso, atentar-se à aurora solar e apontar o braço direito para o local onde surge o sol; com isso determina-se o leste. Assim, o braço esquerdo nos indicará o oeste, nossa parte frontal apontará o norte e a retaguarda revelará o sul. Todavia, uma curiosidade que escapole desse conhecimento empírico é a não atenção ao fato de que o sol nasce exatamente a leste e se põe a oeste em apenas dois dias do ano, nos dias de equinócio. Nessa ocasião o dia e a noite têm igual duração. Os equinócios também marcam as chegadas da primavera e do outono. Por esse motivo, o equinócio vernal era considerado uma data especial para os povos antigos, logo era muito comemorado.

Já as estações - verão e inverno - são iniciadas no dia em que o Sol surge mais a leste e se esvaece mais a oeste. Esses dias são conhecidos como solstícios de verão e de inverno, bem como a característica de apresentarem o dia (com presença

de luz) mais longo e a noite mais longa do ano, respectivamente. Além disso, esses momentos foram responsáveis por definir os trópicos de Câncer e de Capricórnio. No solstício de verão do hemisfério sul, os raios solares incidem perpendicularmente à superfície da Terra no Trópico de Capricórnio. No solstício de inverno do mesmo hemisfério, ocorre um fenômeno equivalente no Trópico de Câncer. Para o hemisfério norte a relação é simétrica.

Figura 3 - Movimento do sol nos equinócios e



solstícios. Copyright © Addison Wesley

Fonte: <<https://surfguru.com.br/noticias/2011/06/solsticio-marca-o-inicio-do-inverno-nesta-terca.html>>. Acesso em: 04 de dez. de 2019.

O reconhecimento desses períodos foi responsável pela divisão do ano em trezentos e sessenta dias (calendários babilônico e egípcio), cada dia representando o ciclo natural entre a alternância do dia e a noite. “Não resta dúvida de que, dessas trezentas e sessenta divisões naturais do passeio do sol pelo arco descrito em sua trajetória circular, completa, originou o **grau**” (HOGBEN, 1950, p. 59, grifo nosso).

Um importante apetrecho que mediu o mapeamento estelar pelo homem foi “[...] um instrumento muito semelhante ao astrolábio, espécie de teodolito rudimentar usado até a invenção do telescópio. Com estes instrumentos eles representavam o céu local, com seus círculos de altura e azimute” (HOGBEN, 1950, p. 61).

Em consequência das crenças religiosas, os egípcios edificaram grandes monumentos, e em decorrência da busca pela perfeição dessas obras foi necessária a apropriação do conhecimento sobre variação angular para medidas e não apenas posicionamento. Na arte de medir sombras houve um progresso nas relações existentes entre os lados dos triângulos e na precisão de medir ângulos.

Há cinco ou seis mil anos os Egípcios e Babilônios já haviam descoberto ao menos um teorema (ou regra geral) sobre os lados do triângulo retângulo. Os modernos livros de geometria assim o enunciam: O quadrado do lado maior (hipotenusa) de um triângulo retângulo é igual à soma dos quadrados dos outros dois lados (ou catetos) (HOGBEN, 1950, p. 63).

Os babilônios conheciam há tempos como traçar os ângulos notáveis, sabiam criar ainda o ângulo de noventa graus a partir da construção de um triângulo cujos lados medem 3, 4 e 5. Além disso, “egípcios e babilônios já sabiam da existência de uma relação constante entre a circunferência de um círculo e seu diâmetro. Esta relação, representada pela letra grega, vale aproximadamente $22/7$, isto é, 3,1416 na representação decimal” (HOGBEN, 1950, p. 64).

Apesar de fascinantes, as colossais obras egípcias demandaram investidores, e não existe melhor financiador, nem nos tempos atuais, do que o povo. As gentilhas calam-se em virtude da restrição ao conhecimento e ao amedrontamento efetuado pelas forças de segurança da pátria, o que os torna propícios para aceitar tacitamente abusos, principalmente em relação aos seus bens. Foi em razão dessa necessidade da elite que iniciaram rígidas taxações nas terras do Egito, e diante do confronto entre aqueles que cobravam e aqueles que pagavam pelo direito à terra deram-se avanços cruciais no *modus operandi* em medidas lineares e de áreas, consequentemente requereu a progressão da Geometria. Assim, foi necessário acrescentar as medições de superfície às medições de ângulos (HOGBEN, 1950).

Nesse ponto, nota-se que importantes elementos para a apreensão do conhecimento em Trigonometria já surgiram: os ângulos, o reconhecimento e um valor aproximado para as relações de semelhanças de triângulos e algumas razões trigonométricas. Além disso, nesse tempo embrionário inicia-se a reivindicação desses diversos conhecimentos, desenvolvidos sem muita correspondência, para a formação de algo uno.

1.1.2 A aurora da Trigonometria

Sob forte influência do pensamento de Platão, uma visão imutável que consubstanciou o mundo nas ideias, a matemática grega atingiu seu ápice e se materializou, principalmente, nas realizações de Euclides. Oferecendo um olhar apropriado, a matemática sistematizada na Grécia Antiga foi e continua sendo essencial, mas para dar conta do dinamismo dos fenômenos naturais do mundo outras perspectivas filosóficas se fazem, no entanto, carece em prescrever o dinamismo do nosso mundo necessário, como é o caso da filosofia do devir. Assim, considera-se que

não existem verdades eternas, das quais devemos partir. As regras enunciadas sobre as figuras planas, como sobre as figuras sólidas, são todas verdades aproximadas, quando aplicadas à medição de um mundo em mutação. São todas excelentes modelos para orientar-nos nas obras de construção e de divisão de terras. Até certo ponto, prestam-se muito bem para a descrição do macrocosmo das estrelas (HOGBEN, 1950, p. 125).

Somente com base na consideração da inconstância dos objetos, principalmente em relação à sua posição, é que a matemática - em especial a geometria - voltou a progredir. Esse atento à filosofia do devir aconteceu, em essência, devido à consideração da grandeza Tempo, a qual logo associou-se às considerações do estudo da geometria. “Foi só quando a determinação do ponto de um navio no mar inspirou uma nova geometria, que o fator tempo se incorporou definitivamente à ciência geométrica” (HOGBEN, 1950, p. 127).

Utilizando de meios arcaicos (riscos na areia) mas poderosos no auxílio ao pensamento, o matemático antigo avançou sobre os princípios de existência de um triângulo e sua boa definição, ademais desenvolveu as determinações para equivalência desse simplex no plano. O geômetra jônico Tales foi um dos grandes contribuintes para esse progresso; um de seus legados é o Teorema de Tales, além disso “[...] demonstrou que a relação existente entre os lados correspondentes de dois triângulos semelhantes é sempre a mesma, independente do comprimento desses lados” (HOGBEN, 1950, p. 130).

Entre essas razões no triângulo, existe uma que toma a divisão do tamanho da altura pelo comprimento que se estende apoiado em uma superfície, também

conhecido como base do triângulo. Esse quociente, entendido por muitos como declividade, é definido como a tangente de um ângulo no triângulo retângulo. A Trigonometria tratou de incorporar essa razão e a tabulou, fixando como variável de consulta meramente o arco compreendido entre os lados supracitados. Assim também o fez com outras razões conhecidas: seno, cosseno e suas variantes.

São muito poucas regras geométricas que permitiram aos sucessores dos gregos inventar linguagens de grandezas mais úteis e menos trabalhosas tais como a trigonometria e a álgebra. Para nós, será suficiente uma dúzia delas. Dispô-la-emos em três classes, segundo o contexto social em que se originaram. Euclides dominava teorema a apresentação de uma regra acerca de figuras. Segundo o materialista Demócrito, chamá-la-emos demonstração. Agrupá-las-emos, segundo o modo pelo qual foram primeiro usadas e reconhecidas, assim: Quatro demonstrações de agrimensura, quatro demonstrações de medições de sombras, com propósitos arquitetônicos e quatro demonstrações de astronomia, ou da ciência calendária (HOGBEN, 1950, p. 137).

Os doze teoremas que Hogben (1950) traz no último excerto são os que seguem. As quatro demonstrações de agrimensura: (i) a diagonal do retângulo divide-o em dois triângulos retângulos equivalentes; (ii) a área de um retângulo é igual à soma das áreas de suas subdivisões; (iii) a área de um triângulo é igual à metade do produto do tamanho da base pela altura; e (iv) a área de um quadrado dividido em quadrados e retângulos é igual à soma das áreas dessas subdivisões.

As quatro demonstrações de medição de sombras: (i) as somas dos três ângulos de um triângulo são iguais a 180° ; (ii) com base em um triângulo isósceles, se dados dois lados equivalentes, então os ângulos que não são adjacentes aos dois ao mesmo tempo são congruentes, a recíproca é verdadeira; (iii) a razão dos lados correspondentes de um triângulo é a mesma; e (iv) o quadrado da hipotenusa é igual à soma dos quadrados dos catetos.

As quatro demonstrações de astronomia: (i) a reta tangente à circunferência é perpendicular ao raio com extremidade no ponto de tangência; (ii) o ângulo inscrito cujos lados secantes que o definem distanciam-se um diâmetro, no arco maior, é um ângulo reto; (iii) a medida do ângulo inscrito é metade da medida do arco que ele estabelece na circunferência; e (iv) a relação entre a circunferência e seu diâmetro é a mesma em todos os círculos. De posse desses teoremas, a matemática transcende ao dar corpo para a Trigonometria e a Álgebra.

1.1.3 Como medir o que não podemos alcançar

Tales de Mileto foi um dos grandes nomes da antiguidade que abrangeu com certa maestria os conhecimentos sociais sobre geometria; é facultado a ele a primeira determinação da altura da pirâmide de Quéops no Egito.

Há duas versões para este fato. Hicrônimos, discípulo de Aristóteles, diz que Tales mediu o comprimento da sombra da pirâmide quando nossas sombras são iguais a nossa altura, assim medindo a altura da pirâmide. A de Plutarco diz que ficando uma vara vertical no extremo da sombra projetada pela pirâmide, construímos à sombra projetada da vara, formando no solo dois triângulos semelhantes (LUCHETTA, 2008, s.p.).

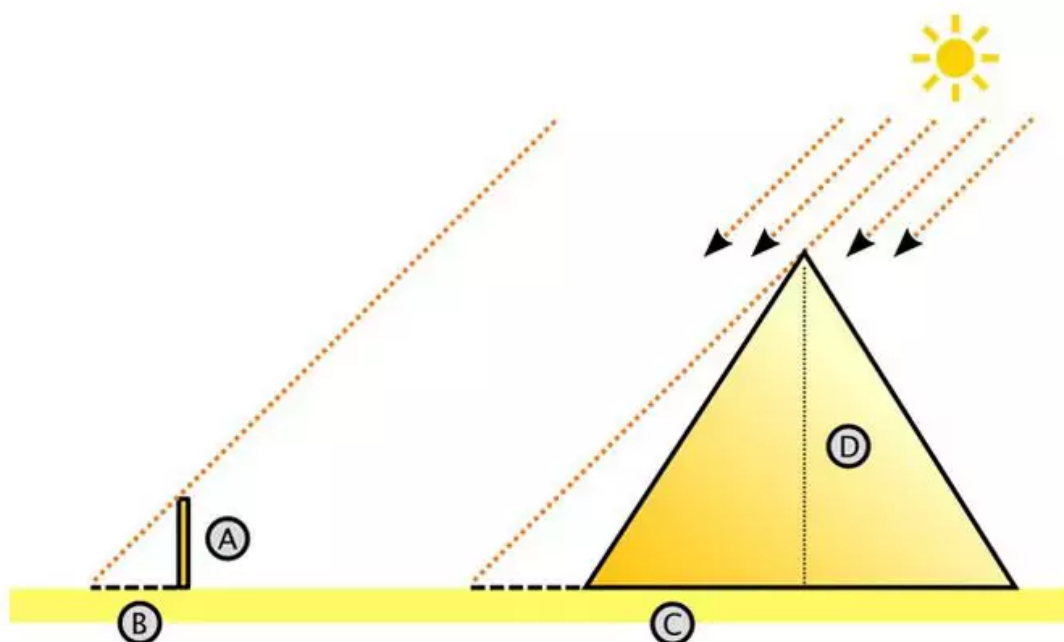
Em ambas as versões, Tales recorreu a um instrumento simples para realizar seu feito. Esse instrumento é o gnômon: um bastão que com uma das pontas fixas sobre a terra fornece ao homem um simples e poderoso entendimento sobre a variação da sombra durante o dia e os meses. Por sua vez, teoricamente ele serviu-se do entendimento de antanho sobre o paralelismo dos raios solares, além do conhecimento sobre triângulos isósceles, na versão de Hicrônimos e do Teorema de Tales, na versão de Plutarco. Este último teorema discorre que: “a interseção entre duas retas paralelas e transversais formam segmentos proporcionais”. Um terceiro teorema que une os dois problemas é o de semelhança de triângulos.

Versão de Hicrônimos

Para aferir o comprimento da altura da pirâmide finca-se o gnômon no chão em certa proximidade com a construção histórica, aguarda-se até que o comprimento e a sombra do instrumento tenham o mesmo comprimento. Dessa forma, a linha imaginária que liga o topo do objeto com o fim de sua sombra nos fornece um triângulo

isósceles. Conseqüentemente, pelo paralelismo dos raios solares, conclui-se que nesse momento a altura da pirâmide é do tamanho da sua sombra.

Figura 4 - O cálculo da altura da pirâmide pela versão de Hicrônimos.



Fonte: <<https://www.educamaisbrasil.com.br/enem/matematica/teorema-de-tales>>. Acesso em: 10 de dez. de 2019.

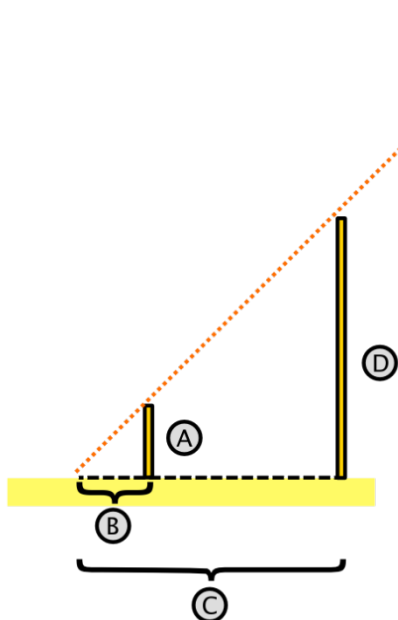
Uma vez que o bastão forma 90° com sua sombra, temos como efeito da igualdade do comprimento dos catetos dois ângulos de 45° , ou seja, havia apenas um único arco que resolveria o problema proposto. “Acontece, porém, que na região em que se edificaram as pirâmides, o sol só alcança 45° de altura ao meio-dia, em dois dias do ano. Naturalmente, era impossível esperar estas duas raras ocasiões, para tomar a altura das pirâmides” (HOGBEN, 1950, p. 156).

Versão de Plutarco

Nessa versão, a estimativa do comprimento da altura dessa edificação ocorre enterrando uma das pontas do gnômon no extremo da sombra da pirâmide. Destarte, a linha imaginária que une o topo da pirâmide à ponta do apetrecho, bem como a sombra desses objetos, corta dois segmentos paralelos entre si: a altura da construção e do bastão. Portanto, é possível utilizar do atual Teorema de Tales para

solucionar a problemática ou a proporção dos lados a partir da semelhança de triângulos.

Figura 5 - O cálculo da altura da pirâmide pela versão de Plutarco.



Fonte: <https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Thales_theorem_7.png>.

Acesso em: 10 de dez. de 2019.

A abordagem de Tales para o problema da pirâmide torna-se de fácil aplicação para qualquer outro objeto que não se tenha acesso fácil à altura. No entanto, os dois métodos carecem de eficiência, o primeiro já foi comentado; o segundo tem-se o problema das frações. Naquele tempo ainda não se tinha domínio sobre as partes de um inteiro, quanto mais operações as envolvendo.

A maneira mais rudimentar de determinar esses elementos, é fazer uma figura em escala. Era este método displicente dos gregos. Mas existe um método melhor que o precedente: o da geometria socializada, ou trigonometria (tal como costumamos chamar) dos alexandrinos. Consiste em organizar de uma vez para todas, uma tabela das razões entre o bastão e a sombra, para vários ângulos de inclinação (HOGBEN, 1950, p. 160).

A tabela trigonométrica era uma consequência natural do já corrente domínio sobre a proporcionalidade entre lados de triângulos semelhantes. A razão entre altura e base do triângulo fornecia uma única dependência: o ângulo a ser considerado. Naquele tempo em que a filosofia da imutabilidade era predominante, os gregos tentaram buscar a relação entre os catetos do triângulo, principalmente para ângulos notáveis

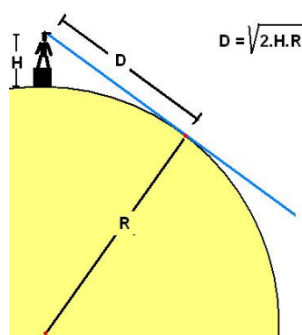
(30°, 45° e 60°), os quais sabiam construir, mas se limitavam apenas a esses ângulos. Hogben (1950) escreve que os geômetras gregos nunca tiveram a ideia de estruturar uma tábua das relações trigonométricas, e menos ainda de estendê-la aos demais graus devido às questões relativas ao problema da incomensurabilidade.

Nesse momento histórico havia-se dado um importante passo para a constituição do conhecimento matemático, mas faltavam ainda ferramentas teóricas para continuar a percorrer o caminho de ascensão, pois não se podia ficar cativo a atingir um ângulo fixo para determinar o tamanho de um barranco ou de qualquer outro objeto. Em vista disso, a circunferência exerceu papel primordial. “A geometria do círculo é obra dos fazedores de calendário. Não se sabe, com certeza, o quanto os gregos lhes devem” (HOGBEN, 1950, p. 169).

1.1.4 Terra à vista

Em posse da afirmação que definimos como uma das quatro demonstrações de problemas astronômicos: “a reta tangente à circunferência é perpendicular ao raio com extremidade no ponto de tangência”, o homem pôde determinar a distância de objetos cujas alturas eram conhecidas e precisar o quão afastado encontrava-se um navio da costa.

Figura 6 - Distância da visada do observador ao horizonte.



Fonte: <<https://www.if.ufrgs.br/novocref/?contact-pergunta=distancia-ao-horizonte-navio-afundado>>. Acesso em: 11 dez. 2019.

Na Figura 6 tem-se que a linha tangente ao arco é um segmento de reta, dado que a luz obedece ao princípio de propagação retilínea. Sabe-se ainda que esse segmento é perpendicular ao raio com extremo no ponto de tangência. Pode-se, inclusive, notar que a reta suporte do conjunto observador-base - com tamanho H -

tem o centro da Terra como elemento, desse modo existe um segmento de reta que une o centro da Terra ao comprimento do conjunto mencionado cujo tamanho é $H+R$, em que R é o raio do globo terrestre. Portanto, há um triângulo retângulo com hipotenusa $H+R$, catetos de tamanho D e R . Logo,

$$\begin{aligned}(H + R)^2 &= D^2 + R^2 \\ D^2 &= H^2 + 2HR \\ D^2 &= H (H + 2R).\end{aligned}$$

Dado que o tamanho H é deveras insignificante próximo ao dobro do raio da circunferência do nosso planeta, podemos fazer uma igualdade grosseira $H+2R = 2R$. Então

$$D^2 = 2HR$$

Vê-se dessa forma que o único valor conhecido é H , carecendo da determinação de R para se determinar a distância dos objetos no horizonte do globo. Historicamente, o primeiro a estabelecer esse valor foi um bibliotecário e matemático alexandrino, Erastóstenes (276 - 194 a.C.).

A medição da Terra, por Erastóstenes, liga as regras da geometria à geografia e à astronomia. O que de mais extraordinário existe nesta empresa é a sua simplicidade. Não exige outros conhecimentos matemáticos, a não ser quatro considerações elementares: (a) Os raios de luz provindos de grandes distâncias parecem paralelos, experiência familiar na existência de antanho [...] (b) Qualquer reta que corte duas paralelas, forma com elas ângulos correspondentes equivalentes; (c) Quando um corpo celeste se encontra exatamente sobre a cabeça do observador (isto é, no Zenith), a reta que une o observador passa necessariamente pelo centro da Terra; (d) Ao meio-dia, o sol está sempre em um ponto meridiano de longitude do observador (HOGBEN, 1950, p. 247).

O matemático alexandrino obteve a informação, por meio de um livro, de que no solstício de verão, na cidade de Siena, ao meio-dia, o Sol ficava quase exatamente no zênite, fato que era facilmente verificado ao observar o reflexo do Sol em um poço e perceber que não havia sombra projetada pelas paredes. Contudo, em Alexandria - aproximadamente 800 km de distância ao norte de Siena - na mesma data e hora, o Sol encontrava-se a $7,2^\circ$ ou $1/50$ da circunferência completa. Dessa maneira, o comprimento da Terra é cerca de 50 vezes 800 quilômetros, ou seja, 40.000 quilômetros.

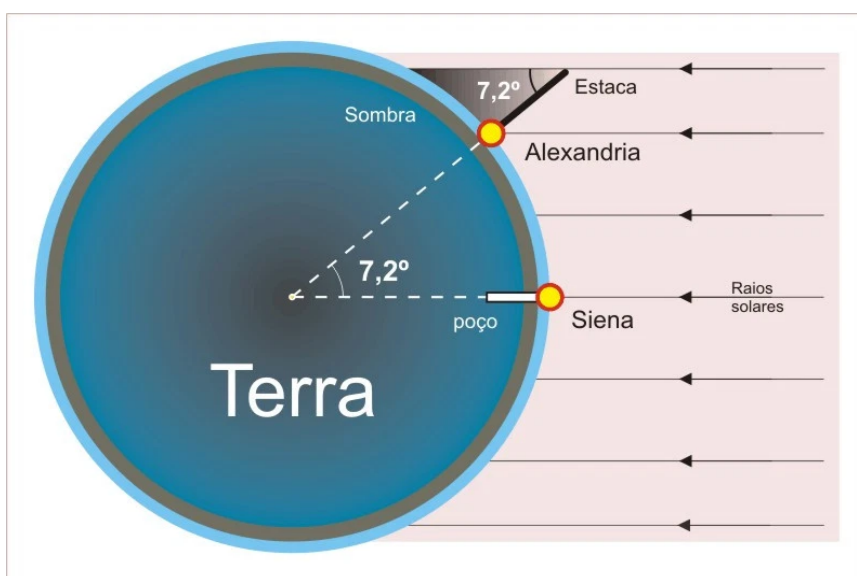
Ao se utilizar da aproximação fracionária $3\frac{1}{7}$ realizada por Arquimedes para o número irracional e o fato de que o comprimento de uma circunferência é 2 vezes maior que seu raio, fica simples precisar o raio da Terra. De modo que, sendo R o valor para o raio

$$40.000 = 2 \times 3\frac{1}{7} \times R$$

$$R = \frac{7 \times 40\,000}{22 \times 2} = \frac{280\,000}{44}$$

Isso é, R tem um valor próximo de 6.400 quilômetros. Com esses dados em sua posse o homem conseguiu determinar com mais precisão a distância de um navio à costa e estimar o quanto de terra havia para se descobrir.

Figura 7 - Representação do arco terrestre determinado por Erastóstenes.



Fonte: <<https://astrociencianet.wordpress.com/2016/05/17/httpastrociencianet-worpress-compostagenscienciasexatas/>>. Acesso em: 11 dez. 2019.

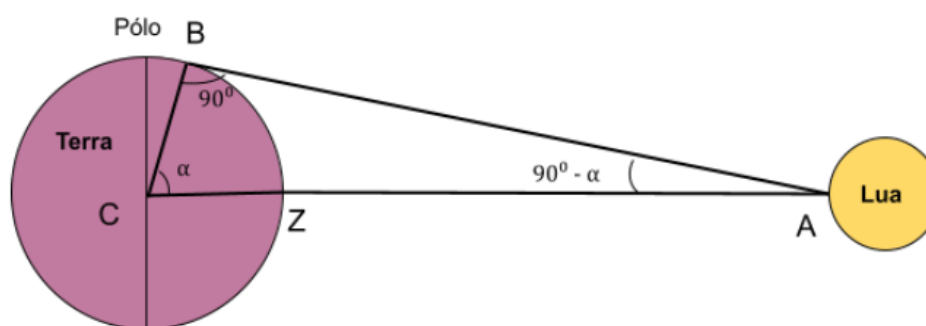
1.1.5 Alcançando os astros

Outra contribuição de grande relevância para a Trigonometria foi dada pelo matemático e astrônomo alexandrino Hiparco (190 - 120 a.C.), o qual foi pioneiro na construção da tabela trigonométrica. Por meio da aproximação já obtida para seno e cosseno dos ângulos notáveis, bem como a definição dessas razões para os ângulos 00 e 900, Hiparco, em suma, desenvolveu a tabela encontrando a razão trigonométrica para arcos metade e com isso permitiu com que a humanidade obtivesse diversas

vantagens. “Para começar, tornamos possíveis a cartografia e a agrimensura numa escala adequada aos grandes trabalhos geográficos” (HOGBEN, 1950, p. 258).

Além disso, Hiparco estimou a distância do centro da Terra à Lua em 402.500 quilômetros. Basicamente, para tal feito, suponha que em certo ponto Z do planeta você consiga visualizar a Lua no zênite e nesse mesmo momento sob a mesma latitude (mesmo meridiano) e a graus de longitude de Z encontra-se outro observador, o qual está situado em um ponto B que assiste o surgir do luar. Essa descrição pode ser vista na Figura 8.

Figura 8 - Esquema para se medir a distância à Lua.



Fonte: Do autor (2019).

Dessa maneira, obtemos um triângulo que é retângulo em B . Como o tamanho \overline{CZ} e \overline{CB} é dado pelo raio da Terra, é natural a maneira de se encontrar o ângulo uma vez conhecida a distância entre B e Z . Conseqüentemente, podemos escrever

$$\begin{aligned} \operatorname{sen}(90^\circ - \alpha) &= \frac{\text{raio da Terra}}{\text{distância à Lua}} \\ \cos \alpha &= \frac{\text{raio da Terra}}{\text{distância à Lua}} \end{aligned}$$

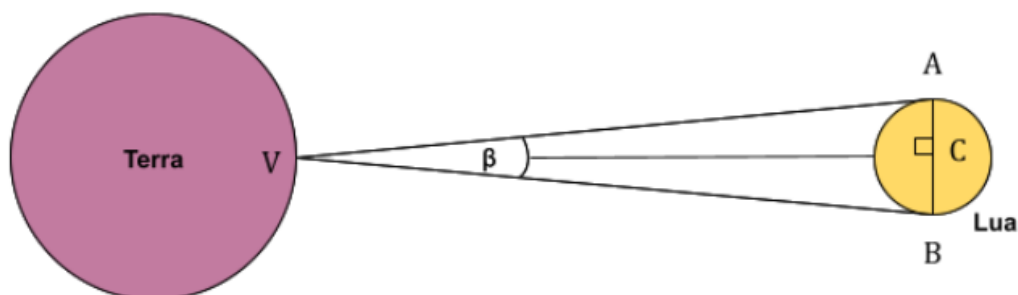
Nessa situação, considerando o ângulo próximo de $84,3^\circ$, temos para \overline{CA} um valor próximo do que Hiparco encontrou, ou seja, com um erro em torno de 5% do que se aceita atualmente.

$$\cos 84,3^\circ = \frac{6400}{\text{distância à Lua}}$$

$$\begin{aligned} \text{dist\~ancia \~a lua} &= \frac{6400}{\cos 84,3^\circ} \\ \text{dist\~ancia \~a lua} &= 402.739,88. \end{aligned}$$

Com esse valor estimado é quase um corolário o cômputo do raio do satélite natural terrestre, assim como seu comprimento. Para isso, mede-se o ângulo β entre duas visadas tangentes ao círculo lunar em sua fase cheia. O segmento $= d - R + r$, em que d é a distância entre o planeta à Lua, R é o raio da Terra e r é raio da Lua, que por sua vez tem mesmo comprimento que o segmento \overline{AC} . Assim, podemos fixar $= r$.

Figura 9 - Esquema para se medir o raio da Lua



Fonte: Do autor (2019).

Assim, fixando $d - R = 396\,340$ e $\beta = 0,5^\circ$ temos:

$$\begin{aligned} \operatorname{tg}(0,25^\circ) &= \frac{r}{396\,340 + r} \\ r &= \operatorname{tg}(0,25^\circ)(396\,340 + r) \\ r &= 1729,37 + 0,0044r \\ r - 0,0044r &= 1729,37 \\ r &= \frac{1729,37}{0,9956} \\ r &= 1737 \end{aligned}$$

Portanto, o raio da Lua conjecturado por Hiparco tem em torno de 1737 quilômetros. Utilizando do método para se calcular o comprimento de uma circunferência, com aproximado em $3\frac{1}{7}$, logra-se a dimensão desse astro.

$$\begin{aligned} c &= 2 \times 3\frac{1}{7} \times 1737 \\ c &= 10.918,30. \end{aligned}$$

1.1.6 Um resumo

A Trigonometria tem seus primórdios em "como medir o que não podemos alcançar". Inicia-se pela medição das pirâmides (por meio das sombras), depois a medida do raio da Terra, a medida da distância do objeto no horizonte do navio e, por fim, a distância das estrelas.

A principal premissa para se medir qualquer das distâncias acima é o paralelismo dos raios solares e sua trajetória retilínea (Princípio da Propagação Retilínea da Luz). Isso posto, alguns conhecimentos em semelhança de triângulos, propriedades de triângulos (isósceles, escaleno, equilátero) e propriedades da circunferência permitiram os cálculos matemáticos.

Torna-se evidente que para esses cálculos o homem médio precisou de um valor estimado para o fantástico irracional denotado por π , o domínio sobre algumas razões trigonométricas razoáveis e observações dos movimentos de objetos da natureza.

REFERÊNCIAS

CARAÇA, Bento de Jesus. **Conceitos fundamentais da matemática**. Lisboa: Tipografia Matemática, 1951.

CARAÇA, Bento de Jesus. **Conceitos fundamentais da matemática**. 7. ed. Lisboa: Grandiva, 2010.

GIOVANNI, José Ruy *et al.* **Matemática completa**: ensino médio: volume único. São Paulo: FTD, 2002.

HOGBEN, Lancelot. **Maravilhas da matemática**: influência e função da matemática nos conhecimentos humanos. 2. ed. Porto Alegre: Editora Globo, 1950.

IEZZI, Gelson *et al.* **Matemática**: ciência e aplicações: ensino médio. 9. ed. São Paulo: Saraiva, 2016.

IEZZI, Gelson *et al.* **Matemática**: volume único. 4. ed. São Paulo: Atual, 2007.

KOPNIN, Pavel V. **A dialética como lógica e teoria do conhecimento**. Tradução de Paulo Bezerra. Rio de Janeiro: Civilização Brasileira S.A., 1978. 354 p.

LUCHETTA, Valéria Ostete Jannis. O cálculo da altura das pirâmides. **IMÁTICA**: a matemática interativa na internet, 2008. Disponível em: <https://www.ime.usp.br/~leo/imatica/historia/calpiramide.html>. Acesso em: 05 dez. 2019.