



**THALIS JOSÉ GIRARDI**

**ASPECTOS DA ELETRODINÂMICA  
QUÂNTICA EM DIMENSÕES  
ESPACIAIS EXTRAS**

**LAVRAS - MG  
2015**

**THALIS JOSÉ GIRARDI**

**ASPECTOS DA ELETRODINÂMICA  
QUÂNTICA EM DIMENSÕES  
ESPACIAIS EXTRAS**

Dissertação apresentada à Universidade Federal de Lavras, como parte das exigências do Programa de Pós-Graduação física Universidade Ampla, área de concentração em Física de Partículas e Campos, para a obtenção do título de Mestre.

Orientador  
Dr. Orimar Antônio Battistel

**LAVRAS - MG  
2015**

**Ficha catalográfica elaborada pelo Sistema de Geração de Ficha Catalográfica da Biblioteca  
Universitária da UFLA, com dados informados pelo(a) próprio(a) autor(a).**

Girardi, Thalís José.

Aspectos da Eletrodinâmica Quântica em dimensões espaciais  
extras. / Thalís José Girardi. – Lavras : UFLA, 2015.

96 p. : il.

Dissertação (mestrado acadêmico)—Universidade Federal de  
Lavras, 2015.

Orientador: Orimar Antonio Battistel.

Bibliografia.

1. Eletrodinâmica Quântica. 2. Cálculo Perturbativo Preditivo.  
3. Renormalização. 4. Dimensões extras. 5. Dimensões ímpares. I.  
Universidade Federal de Lavras. II. Título.

**THALIS JOSÉ GIRARDI**

**ASPECTOS DA ELETRODINÂMICA  
QUÂNTICA EM DIMENSÕES  
ESPACIAIS EXTRAS**

Dissertação apresentada à Universidade Federal de Lavras, como parte das exigências do Programa de Pós-Graduação em Física, área de concentração em Física de Partículas e Campos, para a obtenção do título de Mestre.

APROVADO em 31 de julho de 2015.

Dr. Orimar Antonio Battistel                      UFLA

Dr. Gilson Dallabona                              UFLA

Dr. José Abdalla Helayël Neto                  CBPF



Dr. Orimar Antônio Battistel  
Orientador

**LAVRAS - MG  
2015**

## AGRADECIMENTOS

À Universidade Federal de Lavras (UFLA) e ao departamento de Pós-Graduação em Física, pela oportunidade concedida para a realização do mestrado.

À Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (Capes) pela concessão da bolsa de estudos.

A todos os professores e funcionários do departamento de Pós-Graduação em Física, especialmente aos professores Dr. Gilson Dallabona, Dr. Helvécio Geovani Fagnoli Filho e Dr. Luiz Cleber Tavares de Brito, que, com ensinamentos, orientação e amizade, ajudaram-me nesse projeto.

Ao meu orientador, Prof. Dr. Orimar Antonio Battistel, por todos os ensinamentos e discussões, que não ficaram restritos apenas aos assuntos de natureza científica. E por abrir as portas para que eu ingressasse nesta área que me cativa tanto.

Aos meus colegas, Luciana, Giuliano e Laysa, por nossas discussões científicas e acadêmicas, por nossas madrugadas cheias de divagações e, principalmente, por serem meus grandes amigos.

À minha família e aos meus amigos, por comemorarem comigo nos bons momentos e por me apoiarem nas dificuldades. Foi o apoio de vocês que me permitiu chegar até aqui.

## RESUMO

No presente trabalho são investigados alguns aspectos da Eletrodinâmica Quântica formulada em dimensão espaço-temporal  $D = 4 + 1$ , ao nível *1-loop* de aproximação. Entre os aspectos considerados está a renormalização de propagadores e vértice. O cálculo das amplitudes físicas é feito de modo que todas as arbitrariedades intrínsecas envolvidas nesse tipo de problema são preservadas. Os *momenta* internos são assumidos arbitrários com o intuito de preservar a possibilidade de dependência envolvida nesse tipo de escolha. Uma escala arbitrária é introduzida na separação dos termos com diferentes graus de divergência com intuito de preservar a possibilidade de ambiguidades de escala. Os efeitos da regularização são evitados nos passos intermediários com a utilização de uma estratégia adequada para tratar o problema das divergências em soluções perturbativas de Teorias Quânticas de Campos. Com essa atitude obtivemos conclusões claras e amplas a respeito das condições de consistência envolvidas nos cálculos perturbativos em dimensão espaço-temporal  $D = 4 + 1$ . A simplicidade, aliada ao caráter geral do método, permite acreditar que este pode ser utilizado como alternativa aos métodos tradicionais de regularização, particularmente em cenários onde tais ferramentas possuem restrições de aplicabilidade ou produzem resultados inconsistentes. O método pode ser aplicado em cálculos perturbativos associados a teorias formuladas em dimensões espaço-temporais extras, relativamente à dimensão física ( $D = 3 + 1$ ), produzindo resultados consistentes tanto em dimensões pares como ímpares.

Palavras-Chaves: Eletrodinâmica Quântica. Cálculo Perturbativo Preditivo. Dimensões extras ímpares.

## ABSTRACT

In the present work are investigated some aspects of Quantum Electrodynamics, formulated in space-time dimension  $D = 4 + 1$ , *1-loop* level approach. Among the aspects considered is the renormalization of the propagators and vertex. The calculation of the physical amplitudes is done so that all the arbitrariness inherent in this type of problem involved are preserved. The internal *momenta* are assumed arbitrary in order to preserve the possibility of dependence involved in such choice. An arbitrary scale is introduced in the separation of terms with different degrees of divergence in order to preserve the possibility of scaling ambiguities. The effects of regulation are avoided in the intermediate steps with the use of an appropriate strategy to deal the problem of divergences in perturbative solutions of Quantum Field Theories. With this attitude we got clear and wide conclusions about the consistency conditions involved in perturbative calculations in space-time dimension  $D = 4 + 1$ . The simplicity, combined with the general feature of the method, allows to believe that it can be used as an alternative to traditional methods of regulation, particularly in scenarios where such tools have restrictions of applicability or produce inconsistent results. The method can be applied in perturbation calculations related to theories expressed in extra space-time dimensions, with respect to the physical dimension  $D = 3 + 1$ , producing consistent results in even and odd dimensions.

Keywords: Quantum Electrodynamics. Predictive Perturbative Calculation. Odd extra dimensions.

## SUMÁRIO

<b>1</b>	<b>INTRODUÇÃO GERAL</b> .....	09
<b>2</b>	<b>A ELETRODINÂMICA QUÂNTICA PENTADIMENSIONAL</b>	17
<b>2.1</b>	<b>Introdução</b> .....	17
<b>2.2</b>	<b>A lagrangeana para a EDQ<sub>5</sub></b> .....	18
<b>2.3</b>	<b>Processos Físicos</b> .....	22
<b>2.3.1</b>	<b>Propagador do fóton</b> .....	24
<b>2.3.2</b>	<b>Propagador do elétron</b> .....	27
<b>2.3.3</b>	<b>Vértice</b> .....	29
<b>3</b>	<b>AMPLITUDES PERTURBATIVAS E INTEGRAIS DE FEYNMAN</b>	32
<b>3.1</b>	<b>Funções de um e dois pontos vetoriais</b> .....	32
<b>3.2</b>	<b>Autoenergia do elétron</b> .....	35
<b>3.3</b>	<b>Correção de vértice</b> .....	36
<b>4</b>	<b>FORMA EXPLÍCITA DAS FUNÇÕES DE GREEN</b> .....	41
<b>4.1</b>	<b>Separação das partes finita e divergente das amplitudes físicas</b>	41
<b>4.2</b>	<b>Amplitudes físicas e ambiguidades</b> .....	45
<b>5</b>	<b>CONSISTÊNCIA DA TEORIA</b> .....	52
<b>5.1</b>	<b>Consistência</b> .....	52
<b>5.2</b>	<b>Relações de consistência</b> .....	54
<b>6</b>	<b>RENORMALIZAÇÃO</b> .....	60
<b>7</b>	<b>CONCLUSÕES</b> .....	72
	<b>REFERÊNCIAS</b> .....	74
	<b>APÊNDICE</b> .....	75

## LISTA DE FIGURAS

Figura 2.1	Representação diagramática para a propagação do fóton.	24
Figura 2.2	Representação diagramática para a propagação do elétron.	28
Figura 2.3	Representação diagramática para o vértice.	30
Figura 6.1	Representação diagramática para a propagação do fóton.	63
Figura 6.2	Representação diagramática para a propagação do elétron.	66
Figura 6.3	Representação diagramática para a propagação do fóton.	70
Figura 6.4	Representação diagramática para a propagação do elétron.	70
Figura 6.5	Representação diagramática para o vértice.	71

## 1 INTRODUÇÃO GERAL

No final do século XIX, a Física havia alcançado um sucesso notável na descrição de uma ampla classe de fenômenos, por meio das teorias que são conhecidas hoje por Mecânica Clássica e Teoria Clássica do Eletromagnetismo, formuladas por Newton e Maxwell, respectivamente. Entretanto, as duas teorias seriam questionadas nos anos seguintes diante da necessidade de explicar novas fenomenologias vindas da escala atômica e da necessidade de adequar as teorias para que suas predições não dependessem do observador. Associadas a estas necessidades surgiram a Mecânica Quântica (MQ) e a Teoria da Relatividade Restrita (TRR). Estas novas visões da Física mostraram as limitações das teorias clássicas, tanto na descrição de fenômenos em escala atômica ou menor quanto de fenômenos envolvendo valores de velocidades comparáveis à velocidade da luz.

A teoria necessária para a descrição de fenômenos em escala atômica ou menor é a MQ a qual foi desenvolvida, independentemente, por Schrödinger e Heisenberg. A prescrição de Schrödinger consiste em considerar a expressão para a energia total  $E$  de uma partícula dada por

$$E = \frac{p^2}{2m} + U, \quad (1.1)$$

em que  $m$  é a massa da partícula,  $\vec{p}$  é seu momento linear e  $U$  é a função energia potencial. A essa expressão matemática aplicamos as associações

$$\vec{p} = -i\hbar\vec{\nabla} \quad (1.2)$$

$$E = i\hbar\frac{\partial}{\partial t}, \quad (1.3)$$

em que  $\hbar$  é a constante de Planck, obtendo uma relação entre operadores diferenciais

$$\left(i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\right) = -\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2 + U. \quad (1.4)$$

A dinâmica de uma partícula, nessa teoria, é descrita por uma função de onda  $\Psi(\vec{r}, t)$  que é função da posição  $\vec{r}$  e do tempo  $t$ . Esta função de onda é solução

da equação de Schrödinger

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \Psi(\vec{r}, t) = \left[ -\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 + U(\vec{r}, t) \right] \Psi(\vec{r}, t), \quad (1.5)$$

ou simplesmente

$$H\Psi(\vec{r}, t) = i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \Psi(\vec{r}, t), \quad (1.6)$$

em que  $H$  é o operador hamiltoniano. As soluções aceitáveis desta equação devem ser tais que o módulo ao quadrado da função de onda seja uma distribuição. Esta exigência estabelece uma interpretação probabilística para as implicações da MQ a respeito de observáveis físicos. Nesse ponto, temos uma grande diferença entre a MQ e as teorias clássicas. Não é possível determinar um valor para um observável físico, mas apenas a probabilidade de um observável assumir certo valor em uma condição experimental específica. Com a prescrição de Schrödinger, somada à interpretação probabilística, surge, naturalmente, o Princípio da Incerteza de Heisenberg, o qual estabelece limitações para a precisão com que alguns observáveis físicos podem ser conhecidos simultaneamente (em um mesmo experimento) quando estes se referem a fenômenos na escala atômica ou menor. Essa limitação está diretamente relacionada ao comportamento ondulatório das partículas estabelecido na MQ.

Fenômenos envolvendo velocidades comparáveis à da luz no vácuo, passaram a ser descritos do ponto de vista da TRR, desenvolvida por Einstein. Na visão clássica, que utiliza o conceito de ação à distância, a transmissão de uma informação ocorre instantaneamente. Por exemplo, em um sistema composto por um próton e um elétron, se a posição relativa do elétron se altera, classicamente o próton reage imediatamente em decorrência das interações eletromagnéticas entre eles. Na Mecânica Relativística a informação a respeito da mudança na posição do referido elétron é transmitida para o próton em um tempo finito associado a uma velocidade que não pode superar a velocidade da luz no vácuo  $c$ . Assim, por menor que seja o tempo de uma interação, ela não pode ser instantânea. Neste contexto, a adoção do conceito de campo permite que as interações sejam mediadas localmente. A TRR está fundamentada na exigência de que as leis físicas não devem depender da escolha do referencial inercial. Isso implica que as leis físicas devem ter formas

matemáticas invariantes frente a mudanças de sistemas de referência efetuadas por transformações de Lorentz.

Ao passo que as leis do eletromagnetismo permanecem invariantes frente a transformações de Lorentz a equação que desempenha papel de lei na MQ não satisfaz esta condição. Assim, tornou-se necessário construir formalismos para a descrição da fenomenologia de partículas fundamentais que fossem consistentes com as ideias (bem sucedidas) da MQ e com as ideias (bem sucedidas) da TRR, ou seja, uma teoria capaz de descrever fenômenos em escala pequena envolvendo velocidades comparáveis à da luz. Essa teoria viria a ser a Mecânica Quântica Relativística (MQR). Para esse fim, a equação que descreve a dinâmica de partículas deve permitir uma interpretação análoga à Equação de Schrödinger e ser invariante frente a transformações de Lorentz. A segunda condição só pode ser satisfeita se o tempo se transformar da mesma forma que as coordenadas espaciais, logo devemos ter derivadas de mesma ordem no tempo e no espaço.

Seguindo este raciocínio, Klein e Gordon propuseram uma equação, construída de modo análogo à de Schrödinger, que satisfaz a condição de invariância relativística. A ideia de Klein e Gordon foi utilizar a expressão para a energia total relativística de uma partícula dada por

$$E^2 = p^2 c^2 + m^2 c^4, \quad (1.7)$$

em que  $m$  é a massa de repouso da partícula. Deve-se aplicar sobre esta equação a prescrição de Schrödinger, transformando esta igualdade na relação entre operadores diferenciais

$$\left(i\hbar \frac{\partial}{\partial t}\right)^2 = \left(-i\hbar \vec{\nabla}\right)^2 c^2 + m^2 c^4. \quad (1.8)$$

Assim é possível construir a equação de onda (relativística)

$$\left[\square + \left(\frac{mc}{\hbar}\right)^2\right] \phi = 0, \quad (1.9)$$

em que introduzimos o operador D'lambertiano

$$\square \equiv \nabla^2 - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2}. \quad (1.10)$$

A equação de Klein e Gordon representa uma generalização relativística natural da equação de Schrödinger, mas existem dificuldades em interpretar as soluções desta equação de maneira análoga à interpretação das soluções da equação de Schrödinger. Essas dificuldades estão matematicamente associadas à presença da segunda derivada temporal, implicando que a densidade de probabilidade não seja sempre positiva definida. Elas podem ser contornadas com a interpretação da função de onda relativística como um campo o qual deve sofrer um procedimento de quantização (segunda quantização). Este campo pode descrever consistentemente apenas as propriedades de partículas de spin nulo livres.

Uma equação alternativa (apresentando derivadas espaço-temporais de primeira ordem) para a MQR foi proposta por Dirac

$$(i\gamma^\mu \partial_\mu - m) \Psi = 0, \quad (1.11)$$

onde  $\gamma^\mu$  é um conjunto de matrizes obedecendo a uma álgebra não comutativa, a álgebra de Dirac (ver Apêndice A). As soluções para esta equação mostraram-se bem sucedidas na descrição de propriedades fundamentais de partículas de spin  $\frac{1}{2}$  não interagentes. Percebeu-se que a interpretação adequada para a solução da Equação de Dirac aparece quando  $\Psi$  é considerado um campo relativístico à luz da segunda quantização, tal qual para a solução da equação de Klein-Gordon. A equação de Dirac apresenta soluções com energia total positiva e com energia total negativa. Essas soluções são associadas, respectivamente, a partículas e antipartículas; neste trabalho especificamente o elétron e o pósitron.

Acabou ficando clara a impossibilidade de construir uma equação geral para a descrição de propriedades de qualquer partícula relativística. em vez disto, para cada spin, há uma equação diferente cuja forma é determinada pela invariância de Lorentz. As soluções destas equações descrevem apenas propriedades das partículas livres. As equações relativísticas para os campos livres são originalmente definidas em um espaço-tempo de dimensão  $D = 3 + 1$ , \* mas podem ser estendidas naturalmente para um espaço-tempo de dimensão arbitrária por meio da invariância de Lorentz.

---

\*No formato  $D = E + T$  apresentamos respectivamente o número de dimensões espaciais  $E$  e o número de dimensões temporais  $T$ . Para a dimensão física temos  $D = 3 + 1$  e para a presente investigação temos  $D = 4 + 1$ .

A descrição das interações entre partículas relativísticas exigiu a construção de um novo formalismo teórico: a Teoria Quântica de Campos (TQC) (WEINBERG, 1996). A ideia essencial é a de que as soluções das equações de onda relativísticas devem ser vistas como campos relativísticos. As partículas associadas aos campos surgem de sua quantização. O procedimento de quantização consiste em aplicar as regras de quantização similares às de Heisenberg da MQ para os campos e seus momentos canonicamente conjugados. Este procedimento já havia sido aplicado na década de 20 para campos de radiação. Nesse contexto, modos normais de vibração, que emergem naturalmente do procedimento, foram associados a pacotes de energia do campo eletromagnético (GOMES, 2002). Os progressos obtidos, por meio da TQC, são, sem dúvida, notáveis tanto qualitativamente, na descrição de uma vasta classe de fenômenos (alguns preditos antes de serem observados), quanto quantitativamente, na concordância incrível obtida entre predição teórica e resultados de medições experimentais.

A visão da teoria eletromagnética, como uma teoria de campo quantizada, cujas implicações devem descrever os fenômenos de natureza eletromagnética nos domínios relativístico e quântico recebeu o nome de Eletrodinâmica Quântica (EDQ). O sucesso desta TQC levou naturalmente à tentativa de descrição das demais interações através de teorias construídas segundo o mesmo ponto de vista conceitual. Surgiram, neste contexto, a Cromodinâmica Quântica para a interação forte; a Teoria Eletrofraca, onde as interações fraca e eletromagnética foram unificadas, e então o Modelo Padrão, onde as três interações fundamentais citadas fazem parte de uma única TQC. Não há neste contexto uma teoria equivalente para as interações gravitacionais.

Ao escrevermos uma TQC vemos que as equações de movimento obtidas para os campos são em geral não lineares e acopladas. Na maior parte dos casos é necessário o uso de métodos perturbativos para resolvermos esse tipo de problema. A teoria de perturbação é um método capaz de descrever um fenômeno complicado (interação) em termos de soluções conhecidas para o caso simples (livre). Apenas em alguns casos, geralmente bidimensionais, podemos obter a solução exata. Nesse caminho, deparamo-nos com quantidades divergentes que contaminam as séries perturbativas para os processos físicos. Torna-se crucial separar estas

divergências e removê-las de modo consistente para estabelecer as implicações fenomenológicas destas teorias. A tarefa consiste em separar as partes divergentes e as partes finitas e, então, por meio da interpretação proporcionada pela renormalização, eliminar os efeitos dos infinitos nas amplitudes físicas.

As dificuldades surgem quando precisamos regularizar as quantidades divergentes para permitir manipulações e cálculos posteriores. Regularizar, por outro lado, consiste em modificar as expressões vindas da teoria segundo algum processo matemático. Somente após algum processo de expansão seguido de algum limite as quantidades calculadas voltariam a se identificar com aquelas vindas da teoria para o processo físico. Entretanto, isto somente é válido se as operações de integração e tomada do tal limite comutarem o que, a rigor, somente é válido para integrais finitas e é inválido para integrais divergentes. Deste modo não se pode garantir que as implicações da regularização desapareçam completamente quando o limite envolvido é tomado.

Neste contexto as amplitudes podem depender do método específico de regularização utilizado, assim como da sequência específica de operações efetuadas nos passos intermediários. Frequentemente os resultados obtidos violam as simetrias implementadas na teoria que gerou as amplitudes perturbativas ou violam princípios fundamentais da TQC tais como unitariedade e homogeneidade do espaço-tempo. Além disso, as amplitudes podem estar contaminadas com ambiguidades, que se manifestam na forma de dependência das amplitudes com escolhas arbitrárias feitas em passos intermediários. Isto evidentemente destrói o poder de predição da teoria, pois, deste modo, não é possível determinar um resultado único para os observáveis físicos. A situação relativa ao problema da regularização se resume de modo simples; existem métodos que produzem resultados consistentes, mas não são de aplicabilidade geral e existem métodos que não possuem restrições de aplicabilidade, mas que não são livres de inconsistência.

Mesmo para a própria EDQ, quando formulada em dimensões extras em relação a dimensão física, acabamos nos deparando com problemas. Isso se deve ao fato de que graus mais severos de divergências estão associados a dimensões espaço-temporais maiores. Esses problemas se acentuam mais ainda para dimensões ímpares, onde o método mais utilizado de regularização, a Regularização

Dimensional (RD), encontra grandes problemas ao ser aplicada <sup>†</sup>. Consequentemente é muito difícil encontrar investigações sob estas circunstâncias; em especial para dimensões extras ímpares, caso em que são encontrados poucos trabalhos publicados na literatura.

Em contrapartida, torna-se cada vez mais necessária a formulação de uma teoria nesse contexto em razão do crescente interesse por investigações em dimensões extras. A primeira proposta nesse sentido foi apresentada por Theodor Kaluza em 1919, que buscou unificar o eletromagnetismo de Maxwell com a gravitação de Einstein por meio da suposição da existência de uma dimensão espacial extra. Poucos anos depois, Oskar Klein modificou esta teoria, para que ela fosse consistente com a MQ, dando origem às chamadas teorias de Kaluza-Klein. Entretanto, ainda não era vista uma motivação para a existência de dimensões extras na época, o que fez com que esse assunto fosse retomado apenas na década de 80, quando foi visto como um possível caminho para a unificação das quatro interações fundamentais (AQUINO, 2007). A partir de então, este tópico se tornou alvo de discussões entre cientistas do mundo inteiro, em diferentes áreas, com a motivação adicional fornecida pela possibilidade de efetuar experimentos no Grande Colisor de Hádrons (LHC) envolvendo verificação de efeitos de dimensões extras.

No trabalho vamos investigar alguns problemas que aparecem no contexto da EDQ para a dimensão  $D = 4 + 1$ , a qual vamos nos referir como EDQ<sub>5</sub>. Nossa intenção é utilizar um método que seja geral e consistente para trabalhar com as expressões vindas da teoria. Para isso vamos empregar o método denominado Cálculo Perturbativo Preditivo (CPP), desenvolvido por O. A. Battistel, proposto originalmente em Battistel (1999). Este método é bastante simples de ser utilizado, por se tratar do emprego direto de uma identidade para o propagador fermiônico. Isso faz com que ele não tenha restrições de aplicabilidade, podendo ser utilizado até mesmo em discussões de teorias em dimensão extra ímpar. Essa identidade é empregada diretamente nas expressões para as amplitudes físicas provenientes da teoria e separa a parte finita da parte divergente das equações. Por separar as

---

<sup>†</sup>Na RD utilizamos o recurso chamado de continuação analítica, que consiste em estender todas as quantidades presentes na teoria para uma dimensão contínua e complexa. No caso de dimensões ímpares o tensor de Levi-Civita aparece naturalmente quando usamos a álgebra Dirac, como vemos no Apêndice A. Este tensor não pode ser estendido para uma dimensão contínua e complexa, portanto o uso da RD acaba inviabilizado.

amplitudes em várias integrais de diferentes graus de divergência, o único requisito para o uso do método é que a operação de integração seja uma operação linear. A parte finita é projetada em termos de algumas funções básicas. A parte divergente é organizada em termos de certas estruturas, que devem ser devidamente examinadas antes de renormalizarmos da teoria.

No segundo capítulo do trabalho apresentamos a  $EDQ_5$  como uma teoria de *gauge* e então passamos a dar atenção as correções de primeira ordem para os propagadores e para o vértice. Analisamos algumas propriedades que devem ser satisfeitas pelas amplitudes físicas associadas a esses processos. No terceiro capítulo escrevemos as amplitudes físicas em termos das integrais de Feynman. Isso é feito com o auxílio de algumas propriedades da álgebra das matrizes de Dirac. No quarto capítulo escrevemos as amplitudes em termos de objetos divergentes e funções finitas padronizados. Detalhes sobre o emprego do CPP são apresentados no início do capítulo. Identificamos as ambiguidades presentes nas funções calculadas. Em seguida é feita uma análise detalhada das expressões obtidas para as amplitudes. No quinto capítulo observamos que os objetos divergentes redutíveis devem se anular para que obtenhamos resultados realmente consistentes. Analisamos esses objetos do ponto de vista de regularizações. No sexto capítulo é feita a renormalização da  $EDQ_5$  para o nível *1-loop* de aproximação. Por fim, no sétimo capítulo, é apresentada a conclusão do trabalho. Alguns pontos importantes relacionados ao procedimento matemático utilizado são apresentados nos apêndices.

## 2 A ELETRODINÂMICA QUÂNTICA PENTADIMENSIONAL

### 2.1 Introdução

Para o estabelecimento do problema devemos construir uma teoria. Para tal, especificamos os campos  $\phi_i$  que farão parte da teoria e as simetrias que serão implementadas na construção do funcional que estabelecerá a teoria. Para escrever uma lagrangeana  $L$  (o funcional), separamos a mesma em duas partes distintas, uma associada à parte livre dos campos  $L_F$  e outra associada à parte de interação  $L_I$

$$L(\phi_i, \partial_\mu \phi_i) = L_F(\phi_i, \partial_\mu \phi_i) + L_I(\phi_i, \partial_\mu \phi_i). \quad (2.1)$$

Então definimos a ação para o caso em que temos quatro dimensões espaciais e uma temporal

$$S \equiv \int d^5x \mathcal{L}(\phi_i, \partial_\mu \phi_i), \quad (2.2)$$

onde

$$L(\phi_i, \partial_\mu \phi_i) \equiv \int_{x_0}^{x_1} d^4x \mathcal{L}(\phi_i, \partial_\mu \phi_i) \quad (2.3)$$

define a densidade lagrangeana  $\mathcal{L}(\phi_i, \partial_\mu \phi_i)$ .

Todos os termos da lagrangeana devem ser construídos de modo que sejam escalares frente transformações de Lorentz. Impondo a condição de extremização à ação observamos que os campos obedecem à equação de Euler-Lagrange (MANDL; SHAW, 2010). Por essa equação somos capazes de obter uma equação diferencial para cada campo presente na teoria. Devemos quantizar os campos e então solucionar as equações diferenciais. A parte livre corresponde a uma solução na forma de uma equação de onda relativística. Com a presença da interação torna-se necessário resolver um conjunto de equações acopladas que podem ser não-lineares. Apenas em algumas teorias simples as equações acopladas possuem solução exata, logo somos levados à utilização de métodos perturbativos a fim de apreciarmos as consequências dinâmicas de uma TQC.

Neste capítulo começamos introduzindo a EDQ<sub>5</sub> como sendo uma teoria de *gauge*. Falamos das regras de Feynman dessa teoria, e então, usando-as, obtemos

as funções de Green associadas as correções de primeira ordem para os propagadores e para o vértice. As amplitudes são: o tensor de polarização, a autoenergia do elétron e a correção de vértice. Nessa última parte, também, discutimos algumas propriedades que devem ser satisfeitas pelas amplitudes físicas, tais como o formato tensorial que deve ser atribuído às funções e às relações que existem entre elas.

## 2.2 A lagrangeana para a EDQ<sub>5</sub>

Por meio de uma TQC, investigamos as implicações de um conjunto de simetrias consideradas relevantes para a descrição da dinâmica de interação dos campos que dela participam. Assim, se identificarmos as correntes que se conservam na teoria, podemos entender as consequências das simetrias para um dado processo físico. Desse modo, os ingredientes necessários para escrevermos a lagrangeana \* são os campos e as simetrias que julgarmos relevantes. Esse será o nosso primeiro passo.

Na EDQ queremos descrever a dinâmica de elétrons e pósitrons, que são campos fermiônicos de spin 1/2. Quando livres, estas partículas obedecem à equação de onda relativística de Dirac, portanto, a parte livre da lagrangeana é determinada como sendo

$$\mathcal{L}_F = \bar{\psi}(x) (i\gamma^\mu \partial_\mu - m) \psi(x), \quad (2.4)$$

onde  $\psi(x)$  é o campo espinorial associado aos férmions. Em uma dimensão ímpar  $N + 1$  as matrizes de Dirac são dadas por um conjunto de  $N + 1$  matrizes  $N \times N$ . Essas matrizes correspondem às matrizes de Dirac e à matriz quirial da dimensão  $N$ . Em cinco dimensões temos um conjunto de cinco matrizes  $4 \times 4$ , composto pelas matrizes de Dirac e pela matriz quirial do caso quadridimensional.

Vamos pensar em duas classes básicas de simetrias: as globais e as locais ou simetrias de *gauge*. A lagrangeana  $\mathcal{L}_F$  tem associada a si uma simetria global  $U(1)$  correspondente a uma invariância frente uma transformação de fase, con-

\*Na verdade estamos nos referindo à densidade de lagrangeana, simplifcadamente usaremos lagrangeana.

forme indicam as transformadas

$$\begin{cases} \psi(x) \rightarrow \psi'(x) = e^{-i\alpha} \psi(x) \\ \bar{\psi}(x) \rightarrow \bar{\psi}'(x) = e^{i\alpha} \bar{\psi}(x), \end{cases} \quad (2.5)$$

onde o parâmetro  $\alpha$  é independente das coordenadas espaço-temporais. Logo as transformações são as mesmas, independentemente do ponto no espaço-tempo (é a isso que chamamos transformações globais). Se admitirmos que há dependência espaço-temporal, então obtemos simetria de *gauge*. Logo temos as transformações

$$\begin{cases} \psi(x) \rightarrow \psi'(x) = e^{-i\alpha(x)} \psi(x) \\ \bar{\psi}(x) \rightarrow \bar{\psi}'(x) = e^{i\alpha(x)} \bar{\psi}(x) \end{cases} . \quad (2.6)$$

Temos que o termo que envolve derivadas em (2.4) se transforma como

$$\bar{\psi}(x) \partial_\mu \psi(x) \rightarrow \bar{\psi}'(x) \partial_\mu \psi'(x) = \left[ e^{i\alpha(x)} \bar{\psi}(x) \right] \partial_\mu \left[ e^{-i\alpha(x)} \psi(x) \right], \quad (2.7)$$

portanto

$$\bar{\psi}'(x) \partial_\mu \psi'(x) = \bar{\psi}(x) \partial_\mu \psi(x) - i\bar{\psi}(x) [\partial_\mu \alpha(x)] \psi(x). \quad (2.8)$$

Esse termo que possui derivada destrói a invariância da lagrangeana. Desse modo, torna-se necessária a definição de um novo operador derivada  $D_\mu$ , chamada derivada covariante, que satisfaça a condição de invariância. Esse operador deve obedecer a relação

$$D_\mu \psi(x) \rightarrow [D_\mu \psi(x)]' = e^{-i\alpha(x)} D_\mu \psi(x) \quad (2.9)$$

para que esse termo seja invariante de *gauge* e vetor de Lorentz. A ação da derivada covariante não deve alterar as propriedades de transformação do campo.

Para que isso ocorra, é necessário que se admita a presença de um campo vetorial  $A_\mu(x)$ , chamado campo de *gauge*, tal que

$$D_\mu \psi(x) = [\partial_\mu + ieA_\mu(x)] \psi(x), \quad (2.10)$$

em que  $e$  é identificado, posteriormente, como a carga do elétron, que desempenhará o papel de constante de acoplamento elétron-fóton. O campo vetorial está associado ao fóton.

Para que a lei de transformação da derivada covariante seja satisfeita o campo vetorial deve satisfazer

$$A_\mu(x) \rightarrow A'_\mu(x) = A_\mu(x) + \frac{1}{e} \partial_\mu \alpha(x). \quad (2.11)$$

Usando isso, obtemos por (2.4)

$$\mathcal{L}'_F = \bar{\psi}(x) i\gamma^\mu (\partial_\mu + ieA_\mu) \psi(x) - m\bar{\psi}(x) \psi(x). \quad (2.12)$$

Para tornarmos o campo de *gauge* uma variável dinâmica, precisamos adicionar ao funcional acima um termo envolvendo a parte livre deste campo vetorial. Sabemos do eletromagnetismo que as equações de Maxwell podem ser escritas em termos do tensor  $F_{\mu\nu}$ . Portanto, escrevemos o termo invariante de *gauge* correspondente à parte livre do campo vetorial como

$$\mathcal{L}_A = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu}, \quad (2.13)$$

em que definimos o tensor de Maxwell

$$F_{\mu\nu} \equiv \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu. \quad (2.14)$$

Queremos verificar explicitamente a invariância do tensor  $F_{\mu\nu}$ , assim temos

$$F_{\mu\nu} \rightarrow F'_{\mu\nu} = \partial_\mu A'_\nu - \partial_\nu A'_\mu, \quad (2.15)$$

ou ainda, usando a propriedade de transformação do campo vetorial, temos

$$F'_{\mu\nu} \equiv \partial_\mu \left[ A_\nu(x) + \frac{1}{e} \partial_\nu \alpha(x) \right] - \partial_\nu \left[ A_\mu(x) + \frac{1}{e} \partial_\mu \alpha(x) \right], \quad (2.16)$$

o que fornece

$$F'_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu. \quad (2.17)$$

Além disso, temos a relação entre o tensor  $F_{\mu\nu}$  e as derivadas covariantes

$$(ieF_{\mu\nu}) \psi(x) = (D_\mu D_\nu - D_\nu D_\mu) \psi(x). \quad (2.18)$$

Em razão da invariância do tensor  $F_{\mu\nu}$  escrevemos

$$F'_{\mu\nu} \psi'(x) = [F_{\mu\nu} \psi(x)] e^{-i\alpha(x)}. \quad (2.19)$$

Para os procedimentos de quantização é interessante adicionar um termo de fixação de *gauge*, cuja escolha mais conveniente é

$$\mathcal{L}_{gf} = -\frac{1}{2\xi} (\partial_\mu A^\mu)^2, \quad (2.20)$$

em que o parâmetro  $\xi$  é arbitrário e não traz consequências dinâmicas à teoria.

Por fim obtemos a lagrangeana da EDQ

$$\begin{aligned} \mathcal{L} = & \bar{\psi}(x) i\gamma^\mu (\partial_\mu + ieA_\mu) \psi(x) - m\bar{\psi}(x) \psi(x) \\ & - \frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} - \frac{1}{2\xi} (\partial_\mu A^\mu)^2, \end{aligned} \quad (2.21)$$

ou ainda

$$\begin{aligned} \mathcal{L} = & \bar{\psi}(x) (i\gamma^\mu \partial_\mu - m) \psi(x) - \frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} \\ & + \bar{\psi}(x) i\gamma^\mu (ieA_\mu) \psi(x) - \frac{1}{2\xi} (\partial_\mu A^\mu)^2. \end{aligned} \quad (2.22)$$

O primeiro termo dessa lagrangeana corresponde à lagrangeana de Dirac e está associado à dinâmica livre dos campos espinoriais, ou seja, do elétron e do pósitron. O segundo termo corresponde à lagrangeana de Maxwell e está associado à dinâmica livre do campo vetorial, o campo do fóton. O terceiro termo corresponde ao termo de interação entre os campos. Por fim temos o termo de fixação de *gauge*. Nessa lagrangeana estão presentes alguns parâmetros, que são a constante de acoplamento entre os campos  $e$ , o parâmetro de fixação de *gauge*  $\xi$ , o parâmetro  $m$  e as parametrizações dos campos. Esses parâmetros não são quantidades físicas, para obtermos as quantidades físicas devemos redefini-los a cada ordem perturbativa calculada. Na seção sobre renormalização abordaremos novamente o assunto.

Após escrevermos a lagrangeana o nosso objetivo seria a quantização dos campos, que associaria os campos a partículas. Não daremos ênfase a essa etapa no trabalho. Assim, vamos direto para a próxima etapa, que corresponde ao emprego das regras de Feynman para obter as amplitudes físicas desejadas.

### 2.3 Processos Físicos

O nosso objetivo é descrever a dinâmica de interações e assim acabamos nos deparando com um conjunto de equações diferenciais acopladas que dependem dos campos  $\bar{\psi}(x)$ ,  $\psi(x)$  e  $A_\mu(x)$ . Como já mencionamos, para solucionar esse conjunto de equações devemos, na maioria dos casos, nos valer de métodos perturbativos. Nesse contexto, surgem naturalmente as chamadas regras de Feynman, as quais possibilitam escrever as amplitudes associadas aos processos físicos pertinentes à teoria em termos de expansões perturbativas. Para tal são consideradas todas as possíveis maneiras de um dado estado inicial evoluir para um dado estado final pela construção de diagramas, os denominados diagramas de Feynman. O papel das regras de Feynman é fazer a associação entre as expressões matemáticas e esses diagramas. Para construirmos os diagramas usamos propagadores e vértices <sup>†</sup>, sendo assim devemos associar estas estruturas a expressões matemáticas.

O propagador do férmion está associado aos campos espinoriais  $\bar{\psi}(x)$  e  $\psi(x)$  e carrega um *momentum*  $k$  e uma massa  $m$ . Ele é representado diagramaticamente por uma linha reta ligando dois pontos que correspondem aos dois campos spinoriais. Ao centro da linha temos uma seta; quando esta aponta para a direita temos uma partícula e quando aponta para a esquerda temos uma antipartícula, no caso são o elétron e o pósitron. A primeira regra de Feynman associa esse diagrama à equação

$$iS_f(k) = \frac{i}{\not{k} - m + i\varepsilon}, \quad (2.23)$$

em que  $\not{k} = k^\mu \gamma_\mu$ .

O propagador bosônico está associado a campos vetoriais, no caso ao fóton. Ele, também, carrega um *momentum*  $k$ , mas tem massa nula. A representação diagramática de um propagador bosônico é uma ondulação. A equação associada

<sup>†</sup>O propagador do elétron, o do fóton e o vértice são representados respectivamente pelos três gráficos abaixo:



a ele pela segunda regra é

$$iD_{\mu\nu}(k) = -\frac{i}{k^2} \left[ g_{\mu\nu} + (\xi - 1) \frac{k_\mu k_\nu}{k^2} \right]. \quad (2.24)$$

A terceira regra está associada à interação, que é representada por um vértice, que consiste na intersecção de dois propagadores fermiônicos (correspondentes ao par elétron-pósitron) e um bosônico. Para cada vértice atribui-se um fator  $-ie\gamma_\mu$ . É necessário impor a conservação do *pentamomentum* (o *momentum* é um pentavetor, com quatro componentes sendo associadas ao *momentum* propriamente dito e uma para a energia) em cada vértice.

Na presença de *loops*, que são as linhas fechadas que aparecem nos diagramas, devemos integrar sobre todos os possíveis valores de *momentum* acessíveis à partícula

$$\int \frac{d^5 k}{(2\pi)^5}.$$

Além disso, caso o *loop* seja puramente fermiônico devemos multiplicar a expressão obtida por um fator  $-1$ . Quando o produto dos propagadores for uma matriz, devemos tirar o traço.

Agora, que sabemos como associar os diagramas a estruturas matemáticas, podemos especificar os processos que queremos trabalhar. Definimos um processo pelas linhas externas dos diagramas, que são o seu estado inicial e o seu estado final. As interações que ocorrem no meio do processo são o que chamamos de linhas internas. Existem infinitas possibilidades para o que acontece nas linhas internas de um processo e é papel da teoria determinar quais são essas possibilidades. Métodos perturbativos são usados para determinar todas essas possibilidades em termos de uma série perturbativa. Nas próximas subseções vamos reconhecer os primeiros termos da série perturbativa para três processos sem efetuar os cálculos, ou seja, apenas escreveremos os diagramas. Após isso usaremos as regras de Feynman para associar equações a estes diagramas.

Um estudo para o caso da autoenergia do fóton (correção de primeira ordem para o propagador do fóton) na EDQ<sub>5</sub> foi efetuado em Fonseca et al. (2013). Aqui, pretendemos dar continuidade a este trabalho, analisando dois outros processos: a autoenergia do elétron (correção para o propagador do elétron) e a correção de vér-

tice. Para tal, começaremos usando as regras de Feynman para associar expressões matemáticas à essas correções.

### 2.3.1 Propagador do fóton

Nessa seção vamos trabalhar com a série perturbativa associada ao propagador do fóton. A figura 2.1 apresenta os diagramas de Feynman associados a esta série.

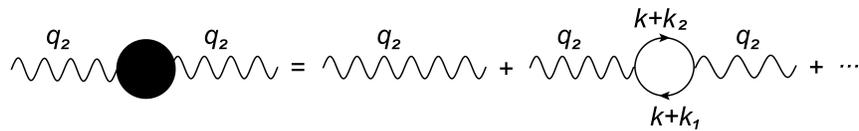


Figura 1 – Representação diagramática para a propagação do fóton.

O gráfico da esquerda está associado ao processo em si. As duas linhas externas bosônicas indicam que temos um fóton no estado inicial e um fóton no estado final, ambos com *momentum*  $q_2$ . Nesse gráfico as linhas internas estão representadas por um círculo preto que simboliza todas as possibilidades para as interações que ocorrem entre o início e o final do processo.

Do lado direito é apresentada a série perturbativa associada ao processo. O primeiro termo da série representa a propagação livre do fóton e os seguintes são as correções em ordem crescente na constante de acoplamento dos campos  $e$ . A constante de acoplamento tem um valor muito pequeno, fazendo que as contribuições para a série perturbativa diminuam termo a termo. Embora seja necessário somar todos os termos para obter a solução exata, podemos obter ótimos resultados com apenas alguns. Isso fica claro quando observamos a concordância incrível entre as previsões teóricas e os resultados experimentais no caso da EDQ.

Estamos interessados especialmente em trabalhar com o último gráfico apresentado, que corresponde a correção em primeira ordem. Também podemos dizer que esta é uma correção ao nível *1-loop* pelo fato de que temos uma única linha fechada (*loop*) no gráfico. A amplitude (que é o gráfico com as linhas externas cortadas) recebe o nome de autoenergia do fóton ou tensor de polarização do vácuo.

Através das regras de Feynman escrevemos a amplitude como

$$\Pi^{\gamma\gamma} = (-)(-ie)^2 T_{\mu\nu}^{VV}(k_1, k_2, m), \quad (2.25)$$

em que definimos a função de Green de dois pontos bivectorial

$$T_{\mu\nu}^{VV}(k_1, k_2, m) \equiv \int \frac{d^5 k}{(2\pi)^5} t_{\mu\nu}^{VV}(k_1, k_2, m), \quad (2.26)$$

com

$$t_{\mu\nu}^{VV}(k_1, k_2, m) \equiv Tr \left\{ \gamma_\mu \frac{1}{(\not{k} + \not{k}_1) - m} \gamma_\nu \frac{1}{(\not{k} + \not{k}_2) - m} \right\} \quad (2.27)$$

sendo a função para um único valor do *momentum* do *loop*.

Note que é importante observar a ordem das estruturas ao escrevermos a amplitude. Começamos por um dos vértices e seguimos o *loop* até voltar ao vértice inicial. É isso que define a forma obtida em (2.27). Sendo essa uma estrutura matricial, devemos aplicar o traço. Como temos uma linha fechada os valores para os *momenta* são arbitrários, portanto devemos integrar sobre todos os valores que eles podem assumir, não se esquecendo da condição gerada pela conservação

$$q_2 = k_2 - k_1. \quad (2.28)$$

O fato de o *loop* ser fermiônico faz com que tenhamos que multiplicar o fator  $-1$ .

É interessante avaliarmos o grau superficial de divergência do tensor de polarização. Isso pode ser feito pelo método de contagem de potências, que consiste, de maneira simplificada, em dividir a potência do *momentum* do numerador pela do denominador. Nesse caso específico temos  $k^5 k^{-2} = k^3$ , uma divergência cúbica. Esse método nos dá apenas o grau superficial de divergência da amplitude, a divergência real pode ser inferior ao calculado.

Antes de calcularmos explicitamente a amplitude estamos interessados em enfatizar algumas propriedades que esperamos que ela satisfaça. Se contraírmos a função de dois pontos  $t_{\mu\nu}^{VV}(k_1, k_2, m)$  com o *momentum* externo  $q_2^\nu$  conseguimos relacioná-la com outra função de Green, conforme segue

$$\begin{aligned} q_2^\nu t_{\mu\nu}^{VV} &= Tr \left\{ \gamma_\mu \frac{1}{(\not{k} + \not{k}_1) - m} (\not{k}_2 - \not{k}_1) \frac{1}{(\not{k} + \not{k}_2) - m} \right\} \\ &= Tr \left\{ \gamma_\mu \frac{1}{(\not{k} + \not{k}_1) - m} \right\} - Tr \left\{ \gamma_\mu \frac{1}{(\not{k} + \not{k}_2) - m} \right\}, \end{aligned}$$

ou seja,

$$q_2^\nu t_{\mu\nu}^{VV}(k_1, k_2, m) = t_\mu^V(k_1, m) - t_\mu^V(k_2, m), \quad (2.29)$$

onde definimos a função de Green de um ponto vetorial, para um único valor do *momentum* do loop,

$$t_\mu^V(k_i, m) \equiv Tr \left\{ \gamma_\mu \frac{1}{(\not{k} + \not{k}_i) - m} \right\}. \quad (2.30)$$

Analogamente, obtemos, para a contração com o outro índice:

$$q_2^\mu t_{\mu\nu}^{VV}(k_1, k_2, m) = t_\nu^V(k_1, m) - t_\nu^V(k_2, m). \quad (2.31)$$

Se integrarmos, então devemos obter as relações

$$q_2^\nu T_{\mu\nu}^{VV}(k_1, k_2, m) = T_\mu^V(k_1, m) - T_\mu^V(k_2, m) \quad (2.32)$$

e

$$q_2^\mu T_{\mu\nu}^{VV}(k_1, k_2, m) = T_\nu^V(k_1, m) - T_\nu^V(k_2, m). \quad (2.33)$$

Essas são as relações entre as funções de Green de um ponto vetorial e de dois pontos bivetorial. Para que elas sejam válidas é necessário apenas que a integração seja um processo linear. De outro modo, esperamos que essas relações permaneçam satisfeitas, mesmo após reescrevermos os integrandos, caso contrário a linearidade da integração está sendo violada.

Além disso, a função  $T_{\mu\nu}^{VV}(k_1, k_2, m)$  é um tensor de ordem dois simétrico que é construído por meio de um vetor independente, o *momentum* externo  $q_2$ , e do tensor métrico  $g_{\mu\nu}$ . Desse modo devemos ter a forma geral

$$T_{\mu\nu}^{VV} = g_{\mu\nu} [F_1(q_2^2)] + q_{2\mu} q_{2\nu} [F_2(q_2^2)], \quad (2.34)$$

onde  $F_1(q_2^2)$  e  $F_2(q_2^2)$  são duas funções escalares arbitrárias.

De acordo com o teorema de Noether, a cada simetria implementada na construção da lagrangeana de uma teoria devemos ter associada uma corrente conservada. Na EDQ a invariância de *gauge* está associada à existência de uma corrente vetorial conservada dada por  $j^\mu(x) = \bar{\psi}(x) \gamma^\mu \psi(x)$ . A conservação desta corrente pode ser vista facilmente, com a utilização da Equação de Dirac,

$$\partial_\mu j^\mu(x) = 0. \quad (2.35)$$

As implicações disso são as chamadas identidades de Ward e estão associadas, no espaço dos *momenta*, a contrações dos *momenta* com os índices vetoriais das amplitudes físicas

$$q_2^\nu T_{\mu\nu}^{VV} = q_{2\mu} \{ [F_1(q_2^2)] + q_2^2 [F_2(q_2^2)] \} = 0 \quad (2.36)$$

$$q_2^\mu T_{\mu\nu}^{VV} = q_{2\nu} \{ [F_1(q_2^2)] + q_2^2 [F_2(q_2^2)] \} = 0. \quad (2.37)$$

Assim estabelecemos que  $F_1(q_2^2) = -q_2^2 F_2(q_2^2)$ , logo o tensor de polarização deve ter o seguinte formato

$$T_{\mu\nu}^{VV} = (q_{2\mu} q_{2\nu} - q_2^2 g_{\mu\nu}) F_2(q_2^2). \quad (2.38)$$

Além disso, temos a seguinte condição

$$T_\mu^V(k_1, m) - T_\mu^V(k_2, m) = 0, \quad (2.39)$$

portanto a função de Green de um ponto vetorial deve ser nula, uma vez que  $k_1$  e  $k_2$  são independentes.

Notemos então a existência de um limite de baixas energias

$$F_1(q_2^2)|_{q_2^2=0} = -q_2^2 [F_2(q_2^2)]|_{q_2^2=0} = 0 \quad (2.40)$$

pois não se espera nenhum pólo em  $F_2(q_2^2)$  em  $q_2^2 = 0$ .

Assim, quando calcularmos explicitamente o tensor de polarização do vácuo, independentemente do fato de este ser uma quantidade divergente, esperamos que as propriedades acima sejam satisfeitas.

### 2.3.2 Propagador do elétron

Analogamente ao caso anterior, começaremos apresentando os diagramas associados à série perturbativa da propagação do elétron, conforme a figura 2.2.

O gráfico da esquerda está associado ao processo e apresenta duas linhas fermiônicas externas, indicando que o processo corresponde à propagação do elétron. O primeiro termo da série perturbativa corresponde a propagação livre do elétron.

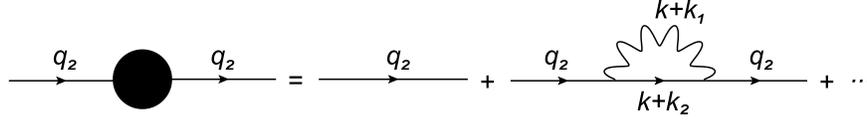


Figura 2 – Representação diagramática para a propagação do elétron.

Os termos seguintes correspondem a correções em ordem crescente na constante de acoplamento.

Denominamos a correção de primeira ordem por autoenergia do elétron por excitação de um fóton. Usando as regras de Feynman vemos que esse diagrama deve ser associado à amplitude

$$\Sigma^{1\gamma}(p) = (-ie)^2 \Sigma(k_1, k_2, m), \quad (2.41)$$

em que definimos a função de Green

$$\Sigma(k_1, k_2, m) \equiv \int \frac{d^5 k}{(2\pi)^5} \sigma(k_1, k_2, m), \quad (2.42)$$

com

$$\begin{aligned} \sigma(k_1, k_2, m) \equiv & \gamma^\mu \frac{1}{(k+k_2) - m} \gamma^\nu \frac{1}{(k+k_1)^2} \\ & \times \left[ g^{\mu\nu} + (\xi - 1) \frac{(k+k_1)^\mu (k+k_1)^\nu}{(k+k_1)^2} \right] \end{aligned} \quad (2.43)$$

sendo a autoenergia para um único valor do *momentum*. Diferentemente do caso anterior, como o *loop* não é puramente fermiônico, não é necessário multiplicar a amplitude por nenhum fator. Entretanto ainda devemos integrar sobre todos os valores acessíveis aos *momenta*, respeitando a condição de conservação

$$q_2 = k_2 - k_1. \quad (2.44)$$

Por contagem de potências vemos que a função de Green tem grau superficial de divergência quadrático. Como a autoenergia de elétron é um escalar, pode ser escrita diretamente como uma função do *momentum* externo

$$\Sigma(k_1, k_2, m) = F_3(q_2^2). \quad (2.45)$$

Ainda podemos escrever a autoenergia do elétron como

$$\Sigma(k_1, k_2, m) \equiv \Sigma_1(k_1, k_2, m) + (\xi - 1) \Sigma_2(k_1, k_2, m), \quad (2.46)$$

onde definimos a parte independente do *gauge* escolhido

$$\Sigma_1(k_1, k_2, m) \equiv \int \frac{d^5 k}{(2\pi)^5} \sigma_1(k_1, k_2, m) \quad (2.47)$$

e a parte dependente

$$\Sigma_2(k_1, k_2, m) \equiv \int \frac{d^5 k}{(2\pi)^5} \sigma_2(k_1, k_2, m). \quad (2.48)$$

Isso sugere que podemos escrever algo do tipo

$$\sigma(k_1, k_2, m) \equiv \sigma_1(k_1, k_2, m) + (\xi - 1) \sigma_2(k_1, k_2, m), \quad (2.49)$$

que pode ser associado a (2.46) uma vez que a integração é uma operação linear.

As funções para um único valor do *momentum* podem ser identificadas como

$$\sigma_1(k_1, k_2, m) = \gamma_\mu \frac{1}{(\not{k} + \not{k}_2) - m} \gamma_\nu \frac{1}{(k + k_1)^2} g^{\mu\nu} \quad (2.50)$$

e

$$\sigma_2(k_1, k_2, m) = \gamma_\mu \frac{1}{(\not{k} + \not{k}_2) - m} \gamma_\nu \frac{(k + k_1)^\mu (k + k_1)^\nu}{(k + k_1)^4}. \quad (2.51)$$

### 2.3.3 Vértice

O último processo apresentado no trabalho é caracterizado por duas linhas fermiônicas e uma linha bosônica externas, conforme a figura 2.3.

O primeiro termo da série perturbativa corresponde ao vértice da teoria. O segundo termo representa à correção ao nível 1-*loop* para o vértice. A amplitude associada a correção de primeira ordem é dada por

$$V^\mu(p, q) = -e^3 \Lambda^\mu(k_1, k_2, k_3, m), \quad (2.52)$$

onde definimos a função de Green

$$\Lambda^\mu(k_1, k_2, k_3, m) \equiv \int \frac{d^5 k}{(2\pi)^5} \lambda^\mu(k_1, k_2, k_3, m), \quad (2.53)$$

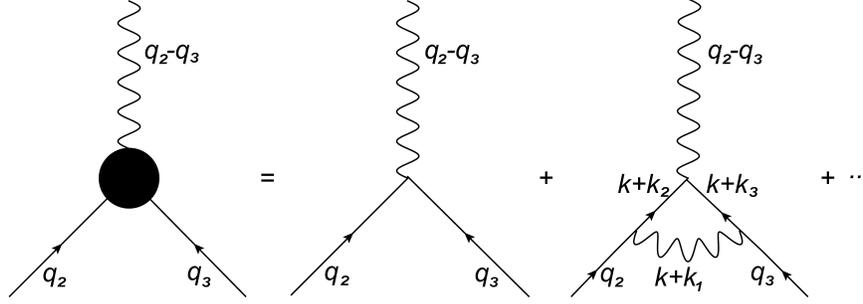


Figura 3 – Representação diagramática para o vértice.

com

$$\lambda^\mu(k_1, k_2, k_3, m) \equiv \gamma_\alpha \frac{1}{(\not{k} + \not{k}_2) - m} \gamma^\mu \frac{1}{(\not{k} + \not{k}_3) - m} \gamma_\nu \frac{1}{(k + k_1)^2} \times \left[ g^{\alpha\nu} + (\xi - 1) \frac{(k + k_1)^\alpha (k + k_1)^\nu}{(k + k_1)^2} \right]. \quad (2.54)$$

Essa amplitude possui grau superficial de divergência linear.

Nesse caso temos dois valores diferentes de *momenta* externos, gerando duas condições de conservação

$$q_2 = k_2 - k_1, \quad (2.55)$$

$$q_3 = k_3 - k_1, \quad (2.56)$$

que devem ser respeitadas na integração.

Se contraírmos os *momenta*  $q_3 - q_2$  com a função de Green não integrada obtemos que

$$(q_3 - q_2)_\mu \lambda^\mu = \gamma_\alpha \frac{1}{(\not{k} + \not{k}_2) - m} (\not{k}_2 - \not{k}_3) \frac{1}{(\not{k} + \not{k}_3) - m} \gamma_\nu \frac{1}{(k + k_1)^2} \times \left[ g^{\alpha\nu} + (\xi - 1) \frac{(k + k_1)^\alpha (k + k_1)^\nu}{(k + k_1)^2} \right], \quad (2.57)$$

que pode ser separado em dois termos:

$$(q_3 - q_2)_\mu \lambda^\mu = \left[ \gamma_\alpha \frac{1}{(\not{k} + \not{k}_3) - m} \gamma_\nu - \gamma_\alpha \frac{1}{(\not{k} + \not{k}_2) - m} \gamma_\nu \right] \frac{1}{(k + k_1)^2} \times \left[ g^{\alpha\nu} + (\xi - 1) \frac{(k + k_1)^\alpha (k + k_1)^\nu}{(k + k_1)^2} \right] \quad (2.58)$$

e reescrito como:

$$(q_3 - q_2)_\mu \lambda^\mu(k_1, k_2, k_3, m) = \sigma(k_1, k_3, m) - \sigma(k_1, k_2, m). \quad (2.59)$$

Novamente, a relação deve permanecer válida após integrarmos

$$(q_3 - q_2)_\mu \Lambda^\mu(k_1, k_2, k_3, m) = \Sigma(k_1, k_3, m) - \Sigma(k_1, k_2, m), \quad (2.60)$$

caso contrário a linearidade da integração não é preservada.

Essa é uma amplitude vetorial e deve ser escrita em termos dos vetores da teoria, que são as componentes dos *momenta* externos e as matrizes de Dirac. Sendo assim escrevemos

$$\Lambda^\mu(k_1, k_2, k_3, m) = q_2^\mu F_4 + q_3^\mu F_5 + \gamma^\mu F_6, \quad (2.61)$$

em que  $F_4$ ,  $F_5$  e  $F_6$  são funções de  $(q_2^2, q_3^2, q_2 \cdot q_3)$ .

Analogamente ao caso da autoenergia do elétron, é interessante escrevermos essa amplitude de acordo com sua dependência no parâmetro de *gauge*

$$\Lambda^\mu(k_1, k_2, k_3, m) \equiv \Lambda_1^\mu(k_1, k_2, k_3, m) + (\xi - 1) \Lambda_2^\mu(k_1, k_2, k_3, m), \quad (2.62)$$

em que definimos a parte independente

$$\Lambda_1^\mu(k_1, k_2, k_3, m) \equiv \int \frac{d^5 k}{(2\pi)^5} \lambda_1^\mu(k_1, k_2, k_3, m) \quad (2.63)$$

e a parte dependente

$$\Lambda_2^\mu(k_1, k_2, k_3, m) \equiv \int \frac{d^5 k}{(2\pi)^5} \lambda_2^\mu(k_1, k_2, k_3, m). \quad (2.64)$$

Aqui identificamos os integrandos

$$\lambda_1^\mu = \gamma_\alpha \frac{1}{(\not{k} + \not{k}_2) - m} \gamma^\mu \frac{1}{(\not{k} + \not{k}_3) - m} \gamma^\alpha \frac{1}{(k + k_1)^2} \quad (2.65)$$

e

$$\lambda_2^\mu = \gamma_\alpha \frac{1}{(\not{k} + \not{k}_2) - m} \gamma^\mu \frac{1}{(\not{k} + \not{k}_3) - m} \gamma_\nu \frac{(k + k_1)^\alpha (k + k_1)^\nu}{(k + k_1)^4} \quad (2.66)$$

que devem aparecer na forma não integrada para a relação

$$\lambda^\mu(k_1, k_2, k_3, m) \equiv \lambda_1^\mu(k_1, k_2, k_3, m) + (\xi - 1) \lambda_2^\mu(k_1, k_2, k_3, m). \quad (2.67)$$

Agora que delimitamos as amplitudes que queremos trabalhar, vamos usar a álgebra de Dirac para reescrevê-las em termos das integrais de Feynman.

### 3 AMPLITUDES PERTURBATIVAS E INTEGRAIS DE FEYNMAN

O fato de que a descrição da dinâmica de elétrons e pósitrons remete à equação de Dirac resulta na presença das matrizes de Dirac nas expressões matemáticas associadas às amplitudes físicas. No apêndice A encontramos algumas identidades associadas à álgebra das matrizes de Dirac. Utilizaremos essas identidades para escrevermos as funções de nosso interesse em termos das chamadas integrais de Feynman. Para isso também vamos adotar uma nova forma para o propagador fermiônico

$$\frac{1}{(\not{k} + \not{k}_i) - m_i} = \frac{(\not{k} + \not{k}_i) + m_i}{D_i}, \quad (3.1)$$

onde definimos a seguinte quantidade

$$\frac{1}{D_i} \equiv \frac{1}{(k + k_i)^2 - m_i^2}. \quad (3.2)$$

Quantidades do tipo  $D_i$ ,  $D_{ij} \equiv D_i D_j$  e  $D_{ijk} \equiv D_i D_j D_k$  aparecem naturalmente quando reescrevemos as amplitudes, conseqüentemente elas aparecem nos denominadores das integrais de Feynman.

#### 3.1 Funções de um e dois pontos vetoriais

Utilizando as identidades derivadas da álgebra das matrizes de Dirac queremos reescrever a função de um ponto vetorial

$$T_\mu^V = \int \frac{d^5 k}{(2\pi)^5} Tr \left\{ \gamma_\mu \frac{1}{(\not{k} + \not{k}_i) - m} \right\} \quad (3.3)$$

e a função de dois pontos bivetorial

$$T_{\mu\nu}^{VV} = \int \frac{d^5 k}{(2\pi)^5} Tr \left\{ \gamma_\mu \frac{1}{(\not{k} + \not{k}_1) - m} \gamma_\nu \frac{1}{(\not{k} + \not{k}_2) - m} \right\}. \quad (3.4)$$

Reescrevendo os propagadores fermiônicos temos as funções para um único valor do *momentum*

$$t_\mu^V(k_i, m) = Tr \left\{ \frac{1}{D_i} \gamma_\mu [(\not{k} + \not{k}_i) + m] \right\} \quad (3.5)$$

e

$$t_{\mu\nu}^{VV}(k_1, k_2, m) = Tr \left\{ \frac{1}{D_{12}} \gamma_\mu [(k + k_1) + m] \gamma_\nu [(k + k_2) + m] \right\}. \quad (3.6)$$

Como o traço é uma operação linear podemos escrever

$$t_\mu^V(k_i, m) = \frac{1}{D_i} \{ (k + k_i)^\nu Tr(\gamma_\mu \gamma_\nu) + m Tr(\gamma_\mu) \} \quad (3.7)$$

e também

$$\begin{aligned} t_{\mu\nu}^{VV}(k_1, k_2, m) &= \frac{1}{D_{12}} (k + k_1)^\alpha (k + k_2)^\beta Tr(\gamma_\mu \gamma_\alpha \gamma_\nu \gamma_\beta) \\ &\quad + \frac{1}{D_{12}} m (k + k_1)^\alpha Tr(\gamma_\mu \gamma_\alpha \gamma_\nu) \\ &\quad + \frac{1}{D_{12}} m (k + k_2)^\beta Tr(\gamma_\mu \gamma_\nu \gamma_\beta) \\ &\quad + \frac{1}{D_{12}} m^2 Tr(\gamma_\mu \gamma_\nu). \end{aligned} \quad (3.8)$$

Usando as propriedades estabelecidas para os traços temos

$$t_\mu^V(k_i, m) = \frac{1}{D_i} (k + k_i)^\nu 4g_{\mu\nu} = 4 \left\{ \frac{k_\mu}{D_i} + k_{i\mu} \frac{1}{D_i} \right\} \quad (3.9)$$

e

$$\begin{aligned} t_{\mu\nu}^{VV}(k_1, k_2, m) &= \frac{4}{D_{12}} \left\{ (k + k_1)^\alpha (k + k_2)^\beta g_{\mu\alpha\nu\beta}^{(-)} + m^2 g_{\mu\nu} \right\} \\ &= \frac{4}{D_{12}} \left[ (k + k_1)_\nu (k + k_2)_\mu + (k + k_1)_\mu (k + k_2)_\nu \right] \\ &\quad - \frac{4}{D_{12}} [(k + k_1) \cdot (k + k_2) - m^2] g_{\mu\nu}, \end{aligned} \quad (3.10)$$

em que  $g_{\mu\alpha\nu\beta}^{(-)} \equiv g_{\mu\alpha}g_{\nu\beta} - g_{\mu\nu}g_{\alpha\beta} + g_{\mu\beta}g_{\alpha\nu}$ . Nesse último passo foi feita a contração dos índices e uma reorganização dos termos. Deixamos a função de um ponto de lado por enquanto.

Reescrevendo o termo entre colchetes da função de dois pontos como

$$\begin{aligned} \frac{2}{D_{12}} [(k + k_1) \cdot (k + k_2) - m^2] &= \frac{1}{D_{12}} (D_1 + D_2 - q_2^2) \\ &= \frac{1}{D_2} + \frac{1}{D_1} - q_2^2 \frac{1}{D_{12}} \end{aligned} \quad (3.11)$$

e, abrindo os produtos no restante, podemos escrever

$$\begin{aligned}
t_{\mu\nu}^{VV}(k_1, k_2, m) &= 4 \left\{ 2 \frac{k_\mu k_\nu}{D_{12}} + Q_\nu \frac{k_\mu}{D_{12}} + Q_\mu \frac{k_\nu}{D_{12}} \right\} \\
&\quad + 4 (k_{1\nu} k_{2\mu} + k_{1\mu} k_{2\nu}) \frac{1}{D_{12}} \\
&\quad - 2g_{\mu\nu} \left\{ \frac{1}{D_2} + \frac{1}{D_1} - q_2^2 \frac{1}{D_{12}} \right\}, \quad (3.12)
\end{aligned}$$

onde definimos  $Q \equiv k_1 + k_2$ , que é uma quantidade arbitrária. Observe que as massas são iguais  $m_1 = m_2 \equiv m$ .

Se definirmos as integrais de Feynman de um ponto como

$$(I_1, I_{1\mu}) \equiv \int \frac{d^5 k}{(2\pi)^5} (i_1, i_{1\mu}), \quad (3.13)$$

onde

$$(i_1, i_{1\mu}) \equiv \frac{(1, k_\mu)}{D_i}, \quad (3.14)$$

e de dois pontos como

$$(I_2, I_{2\mu}, I_{2\mu\nu}) \equiv \int \frac{d^5 k}{(2\pi)^5} (i_2, i_{2\mu}, i_{2\mu\nu}), \quad (3.15)$$

onde

$$(i_2, i_{2\mu}, i_{2\mu\nu}) \equiv \frac{(1, k_\mu, k_\mu k_\nu)}{D_{12}}, \quad (3.16)$$

então obtemos ao integrar (3.9) e (3.12)

$$T_\mu^V(k_1, m) = 4 \{ I_{1\mu} + k_{1\mu} I_1 \} \quad (3.17)$$

e

$$\begin{aligned}
T_{\mu\nu}^{VV}(k_1, k_2, m) &= 4 \{ 2I_{2\mu\nu} + Q_\mu I_{2\nu} + Q_\nu I_{2\mu} + (k_{1\mu} k_{2\nu} + k_{1\nu} k_{2\mu}) I_2 \} \\
&\quad - 2g_{\mu\nu} [I_1(k_1) + I_1(k_2) - q_2^2 I_2]. \quad (3.18)
\end{aligned}$$

Nessa equação especificamos apenas se  $I_1$  é função de  $k_1$  ou de  $k_2$ . As integrais de Feynman de dois pontos dependem dos dois *momenta* internos.

### 3.2 Autoenergia do elétron

Para encontrarmos a autoenergia devemos conhecer duas quantidades antes:

$$\sigma_1(k_1, k_2, m) = \gamma_\mu \frac{1}{(\not{k} + \not{k}_2) - m} \gamma_\nu \frac{1}{(k + k_1)^2} g^{\mu\nu} \quad (3.19)$$

e

$$\sigma_2(k_1, k_2, m) = \gamma_\mu \frac{1}{(\not{k} + \not{k}_2) - m} \gamma_\nu \frac{(k + k_1)^\mu (k + k_1)^\nu}{(k + k_1)^4}. \quad (3.20)$$

Reescrevendo os propagadores fermiônicos temos

$$\sigma_1(k_1, k_2, m) = \frac{\gamma_\mu [(\not{k} + \not{k}_2) + m] \gamma^\mu}{P_1 D_2} \quad (3.21)$$

e

$$\sigma_2(k_1, k_2, m) = \frac{(\not{k} + \not{k}_1) [(\not{k} + \not{k}_2) + m] (\not{k} + \not{k}_1)}{P_1^2 D_2}, \quad (3.22)$$

onde definimos  $P_1 \equiv (k + k_1)^2$ .

Usando as propriedades (A.7) e (A.9) podemos reescrever o numerador de (3.21) como

$$\gamma_\mu [(\not{k} + \not{k}_2) + m] \gamma^\mu = -3(\not{k} + \not{k}_2) + 5m, \quad (3.23)$$

portanto

$$\sigma_1(k_1, k_2, m) = -3\gamma^\mu \frac{k_\mu}{P_1 D_2} + (-3\not{k}_2 + 5m) \frac{1}{P_1 D_2}. \quad (3.24)$$

Integrando essa equação e notando que quando  $m_1^2 = 0$ , temos que  $D_1 = P_1$ , podemos escrever a amplitude em termos das integrais de Feynman usando um processo de limite

$$\Sigma_1(k_1, k_2, m) = \lim_{m_1^2 \rightarrow 0} [-3\gamma^\mu I_{2\mu} + (-3\not{k}_2 + 5m) I_2]. \quad (3.25)$$

Reescrevendo o numerador de (3.22) como

$$[(\not{k} + \not{k}_2) + m] (\not{k} + \not{k}_1) = (\not{k} + \not{k}_1) (m - \not{q}_2) + D_2 - (q_2^2 - m^2) \quad (3.26)$$

obtemos

$$\begin{aligned} \sigma_2(k_1, k_2, m) &= (m - \not{q}_2) \frac{1}{P_1 D_2} + \gamma^\mu \frac{k_\mu}{P_1^2} + \not{k}_1 \frac{1}{P_1^2} \\ &\quad - (q_2^2 - m^2) \gamma^\mu \frac{k_\mu}{P_1^2 D_2} - (q_2^2 - m^2) \not{k}_1 \frac{1}{P_1^2 D_2} \end{aligned} \quad (3.27)$$

ou ainda, integrando, obtemos

$$\begin{aligned} \Sigma_2(k_1, k_2, m) &= \lim_{m_1^2 \rightarrow 0} \left( m - \not{q}_2 \right) I_2 + \gamma^\mu \lim_{m_1^2 \rightarrow 0} \frac{\partial}{\partial m_1^2} (I_{1\mu} + k_{1\mu} I_1) \\ &\quad - (q_2^2 - m^2) \gamma^\mu \lim_{m_1^2 \rightarrow 0} \frac{\partial}{\partial m_1^2} (I_{2\mu} + k_{1\mu} I_2), \end{aligned} \quad (3.28)$$

em que utilizamos

$$\lim_{m_1^2 \rightarrow 0} \frac{\partial}{\partial m_1^2} \frac{1}{D_1} = \frac{1}{P_1^2}. \quad (3.29)$$

Novamente, as integrais de Feynman de dois pontos dependem dos dois *momenta* internos. Aqui só aparecem integrais de um ponto dependentes de  $k_1$ .

### 3.3 Correção de vértice

Para trabalharmos com a correção de vértice devemos conhecer

$$\lambda_1^\mu = \gamma_\alpha \frac{1}{(\not{k} + \not{k}_2) - m} \gamma^\mu \frac{1}{(\not{k} + \not{k}_3) - m} \gamma^\alpha \frac{1}{(k + k_1)^2} \quad (3.30)$$

e

$$\lambda_2^\mu = \gamma_\alpha \frac{1}{(\not{k} + \not{k}_2) - m} \gamma^\mu \frac{1}{(\not{k} + \not{k}_3) - m} \gamma_\nu \frac{(k + k_1)^\alpha (k + k_1)^\nu}{(k + k_1)^4}. \quad (3.31)$$

Reescrevendo os propagadores fermiônicos e usando  $P_1 = (k + k_1)^2$  temos

$$\lambda_1^\mu = \frac{\gamma_\alpha [(\not{k} + \not{k}_2) + m] \gamma^\mu [(\not{k} + \not{k}_3) + m] \gamma^\alpha}{P_1 D_{23}} \quad (3.32)$$

e

$$\lambda_2^\mu = \gamma_\alpha \frac{(\not{k} + \not{k}_1) [(\not{k} + \not{k}_2) + m] \gamma^\mu [(\not{k} + \not{k}_3) + m] (\not{k} + \not{k}_1)}{P_1^2 D_{23}}. \quad (3.33)$$

O numerador de (3.32)

$$N_1 \equiv \gamma_\alpha [(\not{k} + \not{k}_2) + m] \gamma^\mu [(\not{k} + \not{k}_3) + m] \gamma^\alpha \quad (3.34)$$

pode ser reescrito, ao utilizarmos as identidades derivadas da álgebra de Dirac, como

$$\begin{aligned}
N_1 &= -6(k+k_1)^\mu (\not{k} + \not{k}_1) + 3P_1\gamma^\mu \\
&\quad - (\not{k} + \not{k}_1)\gamma^\mu \not{q}_3 - \not{q}_2\gamma^\mu (\not{k} + \not{k}_1) \\
&\quad - 2\not{q}_3\gamma^\mu (\not{k} + \not{k}_1) - 2(\not{k} + \not{k}_1)\gamma^\mu \not{q}_2 \\
&\quad - 2\not{q}_3\gamma^\mu \not{q}_2 - (\not{q}_2 - m)\gamma^\mu (\not{q}_3 - m) \\
&\quad + 2m[5(k+k_1)^\mu + 2(q_2+q_3)^\mu - m\gamma^\mu], \tag{3.35}
\end{aligned}$$

com isso obtemos

$$\begin{aligned}
\lambda_1^\mu &= -6\gamma_\alpha \frac{(k+k_1)^\mu (k+k_1)^\alpha}{P_1 D_{23}} + 3\gamma^\mu \frac{1}{D_{23}} \\
&\quad - \left( \gamma_\alpha \gamma^\mu \not{q}_3 + \not{q}_2 \gamma^\mu \gamma_\alpha + 2\not{q}_3 \gamma^\mu \gamma_\alpha + 2\gamma_\alpha \gamma^\mu \not{q}_2 - 10m\delta_\alpha^\mu \right) \frac{(k+k_1)^\alpha}{P_1 D_{23}} \\
&\quad - \left[ 2\not{q}_3 \gamma^\mu \not{q}_2 + (\not{q}_2 - m)\gamma^\mu (\not{q}_3 - m) \right. \\
&\quad \left. - 4m(q_2+q_3)^\mu + 2m^2\gamma^\mu \right] \frac{1}{P_1 D_{23}} \tag{3.36}
\end{aligned}$$

Usando as integrais de Feynman já definidas e usando as integrais de três pontos

$$(I_3, I_{3\mu}, I_{3\mu\nu}) \equiv \int \frac{d^5 k}{(2\pi)^5} (i_3, i_{3\mu}, i_{3\mu\nu}), \tag{3.37}$$

onde

$$(i_3, i_{3\mu}, i_{3\mu\nu}) \equiv \frac{(1, k_\mu, k_\mu k_\nu)}{D_{12}}, \tag{3.38}$$

podemos escrever a função integrada

$$\begin{aligned}
\Lambda_1^\mu &= 3\gamma^\mu I_2(k_2, k_3) \\
&\quad - 6\gamma_\alpha \lim_{m_1^2 \rightarrow 0} [I_3^{\mu\alpha} + k_1^\mu I_3^\alpha + k_1^\alpha I_3^\mu + k_1^\mu k_1^\alpha I_3] \\
&\quad - \left[ \gamma_\alpha \gamma^\mu \not{q}_3 + \not{q}_2 \gamma^\mu \gamma_\alpha + 2\not{q}_3 \gamma^\mu \gamma_\alpha \right. \\
&\quad \left. + 2\gamma_\alpha \gamma^\mu \not{q}_2 - 10m\delta_\alpha^\mu \right] \lim_{m_1^2 \rightarrow 0} [I_3^\alpha + k_1^\alpha I_3] \\
&\quad - \left[ 2\not{q}_3 \gamma^\mu \not{q}_2 + (\not{q}_2 - m)\gamma^\mu (\not{q}_3 - m) \right. \\
&\quad \left. - 4m(q_2+q_3)^\mu + 2m^2\gamma^\mu \right] \lim_{m_1^2 \rightarrow 0} [I_3]. \tag{3.39}
\end{aligned}$$

Aqui temos que as integrais de três pontos são funções dos três *momenta*. Como apareceu uma integral de dois pontos, escrevemos a dependência dela.

Quando abrimos os produtos do numerador de (3.33)

$$N_2 = (\not{k} + \not{k}_1) [(\not{k} + \not{k}_2) + m] \gamma^\mu [(\not{k} + \not{k}_3) + m] (\not{k} + \not{k}_1) \quad (3.40)$$

obtemos

$$\begin{aligned} N_2 &= (\not{k} + \not{k}_1) (\not{k} + \not{k}_2) \gamma^\mu (\not{k} + \not{k}_3) (\not{k} + \not{k}_1) \\ &\quad + m (\not{k} + \not{k}_1) (\not{k} + \not{k}_2) \gamma^\mu (\not{k} + \not{k}_1) \\ &\quad + m (\not{k} + \not{k}_1) \gamma^\mu (\not{k} + \not{k}_3) (\not{k} + \not{k}_1) \\ &\quad + m^2 (\not{k} + \not{k}_1) \gamma^\mu (\not{k} + \not{k}_1). \end{aligned} \quad (3.41)$$

Usando as identidades associadas à álgebra de Dirac podemos escrever para o primeiro termo de (3.41)

$$\begin{aligned} &(\not{k} + \not{k}_1) (\not{k} + \not{k}_2) \gamma^\mu (\not{k} + \not{k}_3) (\not{k} + \not{k}_1) \\ = &P_1^2 \gamma^\mu \\ &+ D_3 P_1 \gamma^\mu - (q_3^2 - m^2) (\not{k} + \not{k}_1) \not{q}_2 \gamma^\mu \\ &- (q_3^2 - m^2) P_1 \gamma^\mu + P_1 (\not{k} + \not{k}_1) \not{q}_2 \gamma^\mu + D_3 (\not{k} + \not{k}_1) \not{q}_2 \gamma^\mu \\ &- D_2 P_1 \gamma^\mu + (q_2^2 - m^2) \gamma^\mu (\not{k} + \not{k}_1) \not{q}_3 \\ &+ (q_2^2 - m^2) D_{1(0)} \gamma^\mu - P_1 \gamma^\mu (\not{k} + \not{k}_1) \not{q}_3 - D_2 \gamma^\mu (\not{k} + \not{k}_1) \not{q}_3 \\ &+ 2P_1 (\not{k} + \not{k}_2) (k + k_1)^\mu + 2P_1 \not{q}_3 (k + k_1)^\mu \\ &+ 2\not{q}_2 (\not{k} + \not{k}_1) \not{q}_3 (k + k_1)^\mu - 2P_1 (\not{k} + \not{k}_1) (k + k_1)^\mu \\ &- P_1 (\not{k} + \not{k}_1) \gamma^\mu \not{q}_3 - P_1 \not{q}_2 \gamma^\mu (\not{k} + \not{k}_1) - P_1 \not{q}_2 \gamma^\mu \not{q}_3, \end{aligned} \quad (3.42)$$

para o segundo

$$\begin{aligned} &m (\not{k} + \not{k}_1) (\not{k} + \not{k}_2) \gamma^\mu (\not{k} + \not{k}_1) \\ = &-2m P_1 (k + k_1)^\mu - 2m (k + k_1)^\mu \not{q}_2 (\not{k} + \not{k}_1) \\ &+ m P_1 \gamma^\mu (\not{k} + \not{k}_1) + m D_2 \gamma^\mu (\not{k} + \not{k}_1) \\ &- m (q_2^2 - m^2) \gamma^\mu (\not{k} + \not{k}_1) + m P_1 (\not{k} + \not{k}_2) \gamma^\mu, \end{aligned} \quad (3.43)$$

para o terceiro

$$\begin{aligned}
& m (\not{k} + \not{k}_1) \gamma^\mu (\not{k} + \not{k}_3) (\not{k} + \not{k}_1) \\
= & -2mP_1 (k + k_1)^\mu - 2m (k + k_1)^\mu (\not{k} + \not{k}_1) \not{q}_3 \\
& + mP_1 (\not{k} + \not{k}_1) \gamma^\mu + mD_3 (\not{k} + \not{k}_1) \gamma^\mu \\
& - m (q_3^2 - m^2) (\not{k} + \not{k}_1) \gamma^\mu + mP_1 \gamma^\mu (\not{k} + \not{k}_3) \quad (3.44)
\end{aligned}$$

e para o último

$$m^2 (\not{k} + \not{k}_1) \gamma^\mu (\not{k} + \not{k}_1) = 2m^2 (\not{k} + \not{k}_1) (k + k_1)^\mu - m^2 P_1 \gamma^\mu. \quad (3.45)$$

Usando essas identidades podemos escrever a segunda função como

$$\begin{aligned}
\lambda_2^\mu = & \gamma^\mu \frac{1}{D_{23}} \\
& + 2q_{2\alpha} \gamma^\mu \frac{(k + k_1)^\alpha}{P_1 D_{23}} \\
& - (\not{q}_2 - m) \gamma^\mu (\not{q}_3 - m) \frac{1}{P_1 D_{23}} \\
& + \gamma^\mu \frac{1}{P_1 D_2} - (q_3^2 - m^2) \gamma^\mu \frac{1}{P_1 D_{23}} \\
& - \gamma^\mu \frac{1}{P_1 D_3} + (q_2^2 - m^2) \gamma^\mu \frac{1}{P_1 D_{23}} \\
& + \gamma_\alpha (\not{q}_2 + m) \gamma^\mu \frac{(k + k_1)^\alpha}{P_1^2 D_2} \\
& - (q_3^2 - m^2) \gamma_\alpha (\not{q}_2 + m) \gamma^\mu \frac{(k + k_1)^\alpha}{P_1^2 D_{23}} \\
& - \gamma^\mu \gamma_\alpha (\not{q}_3 - m) \frac{(k + k_1)^\alpha}{P_1^2 D_3} \\
& + (q_2^2 - m^2) \gamma^\mu \gamma_\alpha (\not{q}_3 - m) \frac{(k + k_1)^\alpha}{P_1^2 D_{23}} \\
& + 2 (\not{q}_2 - m) \gamma_\alpha (\not{q}_3 - m) \frac{(k + k_1)^\alpha (k + k_1)^\mu}{P_1^2 D_{23}} \quad (3.46)
\end{aligned}$$

e por fim, integrando

$$\begin{aligned}
\Lambda_2^\mu &= \gamma^\mu I_2(k_2, k_3) \\
&+ \gamma^\mu \lim_{m_1^2 \rightarrow 0} [I_2(k_1, k_2) - I_2(k_1, k_3)] \\
&+ \left[ 2(q_2 \cdot k_1) \gamma^\mu - (\not{q}_2 - m) \gamma^\mu (\not{q}_3 - m) \right. \\
&\quad \left. + (q_2^2 - m^2) \gamma^\mu - (q_3^2 - m^2) \gamma^\mu \right] \lim_{m_1^2 \rightarrow 0} [I_3] \\
&+ 2q_{2\alpha} \gamma^\mu \lim_{m_1^2 \rightarrow 0} [I_3^\alpha] \\
&+ \not{k}_1 (\not{q}_2 + m) \gamma^\mu \lim_{m_1^2 \rightarrow 0} \frac{\partial}{\partial m_1^2} [I_2(k_1, k_2)] \\
&- \gamma^\mu \not{k}_1 (\not{q}_3 - m) \lim_{m_1^2 \rightarrow 0} \frac{\partial}{\partial m_1^2} [I_2(k_1, k_3)] \\
&+ \gamma_\alpha (\not{q}_2 + m) \gamma^\mu \lim_{m_1^2 \rightarrow 0} \frac{\partial}{\partial m_1^2} [I_2^\alpha(k_1, k_2)] \\
&- \gamma^\mu \gamma_\alpha (\not{q}_3 - m) \lim_{m_1^2 \rightarrow 0} \frac{\partial}{\partial m_1^2} [I_2^\alpha(k_1, k_3)] \\
&+ \left[ (q_2^2 - m^2) \gamma^\mu \not{k}_1 (\not{q}_3 - m) - (q_3^2 - m^2) \not{k}_1 (\not{q}_2 + m) \gamma^\mu \right. \\
&\quad \left. + 2k_1^\mu (\not{q}_2 - m) \not{k}_1 (\not{q}_3 - m) \right] \lim_{m_1^2 \rightarrow 0} \frac{\partial}{\partial m_1^2} [I_3] \\
&+ \left[ (q_2^2 - m^2) \gamma^\mu \gamma_\alpha (\not{q}_3 - m) - (q_3^2 - m^2) \gamma_\alpha (\not{q}_2 + m) \gamma^\mu \right. \\
&\quad \left. + 2k_1^\mu (\not{q}_2 - m) \gamma_\alpha (\not{q}_3 - m) \right. \\
&\quad \left. + 2k_1^\beta (\not{q}_2 - m) \gamma_\beta (\not{q}_3 - m) \delta_\alpha^\mu \right] \lim_{m_1^2 \rightarrow 0} \frac{\partial}{\partial m_1^2} [I_3^\alpha] \\
&+ 2 (\not{q}_2 - m) \gamma_\alpha (\not{q}_3 - m) \lim_{m_1^2 \rightarrow 0} \frac{\partial}{\partial m_1^2} [I_3^{\mu\alpha}]. \tag{3.47}
\end{aligned}$$

Nesse ponto, podemos calcular as integrais de Feynman e projetar a parte finita das amplitudes físicas em termos de algumas funções padronizadas.

## 4 FORMA EXPLÍCITA DAS FUNÇÕES DE GREEN

Nesse capítulo começamos apresentando o método que vamos utilizar para abordar as amplitudes, isso é feito em duas etapas. Primeiro separamos as partes divergentes das partes finitas das amplitudes por meio do emprego de uma identidade e depois escrevemos essas quantidades de modo conveniente. As partes divergentes são escritas em termos de uma série de objetos divergentes padronizados que não serão integrados, pois apenas precisamos reconhecer algumas propriedades deles. Já a parte finita é trabalhada com auxílio das parametrizações de Feynman e então é escrita em termos de algumas funções após efetuarmos a integração sobre os *momenta*. Feito isso, apresentamos as funções de Green em termos dos objetos divergentes e das funções finitas. Por fim, analisamos a presença de ambiguidades nas amplitudes.

### 4.1 Separação das partes finita e divergente das amplitudes físicas

Nas amplitudes aparecem termos relacionados ao propagador do elétron. Usando a notação

$$\frac{1}{(\not{k} + \not{k}_i) - m_i} = \frac{(\not{k} + \not{k}_i) + m_i}{D_i} \quad (4.1)$$

e usando algumas propriedades das matrizes de Dirac foi possível ver que o cálculo das amplitudes físicas apresentadas no capítulo anterior resulta no cálculo das seguintes integrais de Feynman

$$(I_1, I_{1\mu}) \equiv \int \frac{d^5 k}{(2\pi)^5} \frac{(1, k_\mu)}{D_1}, \quad (4.2)$$

$$(I_2, I_{2\mu}, I_{2\mu\nu}) \equiv \int \frac{d^5 k}{(2\pi)^5} \frac{(1, k_\mu, k_\mu k_\nu)}{D_{12}} \quad (4.3)$$

e

$$(I_3, I_{3\mu}, I_{3\mu\nu}) \equiv \int \frac{d^5 k}{(2\pi)^5} \frac{(1, k_\mu, k_\mu k_\nu)}{D_{123}}. \quad (4.4)$$

Essas integrais podem ser convergentes ou divergentes. É simples observar essa possibilidade se efetuarmos uma contagem de potências. Usando esse método ve-

mos que apenas a integral  $I_3$  converge. Para todas as outras existem possibilidades de divergência.

Em virtude às limitações dos métodos de regularização tradicionais utilizaremos um procedimento alternativo para tratar das divergências. Este método é o Cálculo Perturbativo Preditivo (CPP), uma evolução formal da chamada Regularização Implícita. Ele elimina completamente o papel da regularização em cálculos perturbativos de TQC's (BATTISTEL, 1999). As partes divergentes das amplitudes são separadas automaticamente em objetos padronizados. Para os propósitos da renormalização apenas propriedades gerais dos objetos são necessárias, logo não precisamos integrá-los. Neste procedimento as quantidades físicas jamais aparecem em uma expressão matematicamente indefinida. O referido método, além de gerar ganhos conceituais significativos por eliminar a necessidade de regularização, permite uma descrição transparente e universal das anomalias. As ambiguidades são automaticamente eliminadas e as amplitudes são obtidas preservando as simetrias da teoria original. Torna-se possível promover investigações conclusivas em situações onde a utilização de regularizações usuais geram resultados conflitantes. Os trabalhos de Battistel (1999), Battistel e Dallabona (2005, 2006, 2012), Battistel e Nemes (1999), Fonseca et al. (2013) e Gambin, Dallabona e Battistel (2007) atestam pela consistência do CPP. O problema pertinente ao presente trabalho é um exemplo deste tipo de situação por ser formulado em uma dimensão espaço-temporal extra e ímpar.

Com intuito de utilizarmos esse método, dividimos a implementação das regras de Feynman em duas etapas de modo conveniente. Para a primeira etapa, escrevemos todas as operações implicadas pelas regras de Feynman com exceção da regra que manda integrar sobre os *momenta* dos *loops*. Com esta atitude, separamos a operação que estabelece o caráter divergente das amplitudes e, portanto, o caráter de indefinição matemática. Então identificamos o grau superficial de divergência das integrais de Feynman e buscamos uma representação adequada para os propagadores internos. A representação adequada será aquela que, uma vez substituída nas integrais, não tornará divergente nenhum termo que contenha a dependência nos momentos internos. Nas integrais divergentes obtidas não deverá aparecer nenhuma quantidade física. Isto é possível de ser obtido reescrevendo o propagador

fermiônico com o auxílio da identidade

$$\frac{1}{D_i} = \sum_{j=0}^N \frac{(-1)^j (2k_i \cdot k + k_i^2 + \lambda^2 - m_i^2)^j}{(k^2 - \lambda^2)^{j+1}} + \frac{(-1)^{N+1} (2k_i \cdot k + k_i^2 + \lambda^2 - m_i^2)^{N+1}}{(k^2 - \lambda^2)^{N+1} D_i}, \quad (4.5)$$

onde  $N$  deve ser maior ou igual ao grau superficial de divergência da integral de Feynman. Como essa é uma identidade, ela não altera os integrandos das integrais de Feynman, isso faz com que o método não tenha quaisquer limitações de aplicabilidade. Aqui nós introduzimos o parâmetro  $\lambda$ , que é um parâmetro arbitrário e com dimensão de massa. Posteriormente veremos que esse parâmetro conecta as partes divergentes e convergentes de maneira precisa. Como  $\lambda$  é arbitrário as amplitudes físicas não podem depender dele.

Utilizando o recurso apresentado, separamos completamente as partes convergentes e divergentes das integrais de Feynman. Definindo

$$A_i \equiv 2k_i \cdot k + k_i^2 + \lambda^2 - m_i^2, \quad (4.6)$$

podemos escrever os integrandos das integrais de Feynman.

No caso de um propagador temos

$$i_1 = \frac{1}{k^2 - \lambda^2} - \frac{A_1}{(k^2 - \lambda^2)^2} + \frac{A_1^2}{(k^2 - \lambda^2)^3} - \frac{A_1^3}{(k^2 - \lambda^2)^4} + \frac{A_1^4}{(k^2 - \lambda^2)^4 D_1} \quad (4.7)$$

e

$$i_{1\mu} = \frac{k_\mu}{k^2 - \lambda^2} - \frac{A_1 k_\mu}{(k^2 - \lambda^2)^2} + \frac{A_1^2 k_\mu}{(k^2 - \lambda^2)^3} - \frac{A_1^3 k_\mu}{(k^2 - \lambda^2)^4} + \frac{A_1^4 k_\mu}{(k^2 - \lambda^2)^5} - \frac{A_1^5 k_\mu}{(k^2 - \lambda^2)^5 D_1}. \quad (4.8)$$

Para os integrandos de dois propagadores temos

$$i_2 = \frac{1}{(k^2 - \lambda^2)^2} - \frac{A_2}{(k^2 - \lambda^2)^3} + \frac{A_2^2}{(k^2 - \lambda^2)^3 D_2} - \frac{A_1}{(k^2 - \lambda^2)^3} + \frac{A_1 A_2}{(k^2 - \lambda^2)^3 D_2} + \frac{A_1^2}{(k^2 - \lambda^2)^2 D_1}, \quad (4.9)$$

$$\begin{aligned}
i_{2\mu} = & \frac{k_\mu}{(k^2 - \lambda^2)^2} - \frac{A_2 k_\mu}{(k^2 - \lambda^2)^3} + \frac{A_2^2 k_\mu}{(k^2 - \lambda^2)^4} - \frac{A_2^3 k_\mu}{(k^2 - \lambda^2)^4} D_2 \\
& - \frac{A_1 k_\mu}{(k^2 - \lambda^2)^3} + \frac{A_1 A_2 k_\mu}{(k^2 - \lambda^2)^4} - \frac{A_1 A_2^2 k_\mu}{(k^2 - \lambda^2)^4} D_2 \\
& + \frac{A_1^2 k_\mu}{(k^2 - \lambda^2)^4} - \frac{A_1^2 A_2 k_\mu}{(k^2 - \lambda^2)^4} D_2 - \frac{A_1^3 k_\mu}{(k^2 - \lambda^2)^3} D_{12}
\end{aligned} \quad (4.10)$$

e

$$\begin{aligned}
i_{2\mu\nu} = & \frac{k_\mu k_\nu}{(k^2 - \lambda^2)^2} - \frac{A_2 k_\mu k_\nu}{(k^2 - \lambda^2)^3} + \frac{A_2^2 k_\mu k_\nu}{(k^2 - \lambda^2)^4} - \frac{A_2^3 k_\mu k_\nu}{(k^2 - \lambda^2)^5} \\
& + \frac{A_2^4 k_\mu k_\nu}{(k^2 - \lambda^2)^5} D_2 - \frac{A_1 k_\mu k_\nu}{(k^2 - \lambda^2)^3} + \frac{A_1 A_2 k_\mu k_\nu}{(k^2 - \lambda^2)^4} - \frac{A_1 A_2^2 k_\mu k_\nu}{(k^2 - \lambda^2)^5} \\
& + \frac{A_1 A_2^3 k_\mu k_\nu}{(k^2 - \lambda^2)^5} D_2 + \frac{A_1^2 k_\mu k_\nu}{(k^2 - \lambda^2)^4} - \frac{A_1^2 A_2 k_\mu k_\nu}{(k^2 - \lambda^2)^5} + \frac{A_1^2 A_2^2 k_\mu k_\nu}{(k^2 - \lambda^2)^5} D_2 \\
& - \frac{A_1^3 k_\mu k_\nu}{(k^2 - \lambda^2)^5} + \frac{A_1^3 A_2 k_\mu k_\nu}{(k^2 - \lambda^2)^5} D_2 + \frac{A_1^4 k_\mu k_\nu}{(k^2 - \lambda^2)^4} D_{12}.
\end{aligned} \quad (4.11)$$

A integral  $I_3$  converge. Para os outros integrandos de três propagadores temos

$$i_{3\mu} = \frac{k_\mu}{(k^2 - \lambda^2)^3} - \frac{A_3 k_\mu}{(k^2 - \lambda^2)^3} D_3 - \frac{A_2 k_\mu}{(k^2 - \lambda^2)^2} D_{23} - \frac{A_1 k_\mu}{(k^2 - \lambda^2)} D_{123} \quad (4.12)$$

e

$$\begin{aligned}
i_{3\mu\nu} = & \frac{k_\mu k_\nu}{(k^2 - \lambda^2)^3} - \frac{A_3 k_\mu k_\nu}{(k^2 - \lambda^2)^4} + \frac{A_3^2 k_\mu k_\nu}{(k^2 - \lambda^2)^4} D_3 - \frac{A_2 k_\mu k_\nu}{(k^2 - \lambda^2)^4} \\
& + \frac{A_2 A_3 k_\mu k_\nu}{(k^2 - \lambda^2)^4} D_3 + \frac{A_2^2 k_\mu k_\nu}{(k^2 - \lambda^2)^3} D_{23} - \frac{A_1 k_\mu k_\nu}{(k^2 - \lambda^2)^4} \\
& + \frac{A_1 A_3 k_\mu k_\nu}{(k^2 - \lambda^2)^4} D_3 + \frac{A_2 A_1 k_\mu k_\nu}{(k^2 - \lambda^2)^3} D_{23} + \frac{A_1^2 k_\mu k_\nu}{(k^2 - \lambda^2)^2} D_{123}.
\end{aligned} \quad (4.13)$$

Neste ponto, se aplicarmos as integrais nos *momenta* teremos as partes finitas e divergentes das integrais de Feynman completamente separadas. Após essa separação, todos os termos que ainda dependem dos propagadores são termos convergentes. Os termos que têm apenas potências de  $(k^2 - \lambda^2)$  no denominador podem ser convergentes ou divergentes. Eles são separados quando abrimos as potências das quantidades  $A_i$ . Com isso, todas as quantidades físicas aparecem nas integrais finitas. Nesse ponto as integrais finitas podem ser avaliadas sem restrições e

organizadas em termos de certas funções padronizadas. Os termos divergentes serão organizados, após a integração de Feynman, com o uso dos seguintes objetos divergentes:

$$\Delta_{2;\mu\nu}^{(5)}(\lambda^2) \equiv \int \frac{d^5k}{(2\pi)^5} \frac{2k_\mu k_\nu}{(k^2 - \lambda^2)^2} - \int \frac{d^5k}{(2\pi)^5} \frac{g_{\mu\nu}}{(k^2 - \lambda^2)}, \quad (4.14)$$

$$\Delta_{3;\mu\nu}^{(5)}(\lambda^2) \equiv \int \frac{d^5k}{(2\pi)^5} \frac{4k_\mu k_\nu}{(k^2 - \lambda^2)^3} - \int \frac{d^5k}{(2\pi)^5} \frac{g_{\mu\nu}}{(k^2 - \lambda^2)^2}, \quad (4.15)$$

$$\begin{aligned} \square_{4;\mu\nu\alpha\beta}^{(5)}(\lambda^2) &\equiv \int \frac{d^5k}{(2\pi)^5} \frac{24k_\mu k_\nu k_\alpha k_\beta}{(k^2 - \lambda^2)^4} - g_{\mu\nu} \int \frac{d^5k}{(2\pi)^5} \frac{4k_\alpha k_\beta}{(k^2 - \lambda^2)^3} \\ &\quad - g_{\mu\alpha} \int \frac{d^5k}{(2\pi)^5} \frac{4k_\nu k_\beta}{(k^2 - \lambda^2)^3} - g_{\mu\beta} \int \frac{d^5k}{(2\pi)^5} \frac{4k_\nu k_\alpha}{(k^2 - \lambda^2)^3}, \end{aligned} \quad (4.16)$$

$$I_{lin}^{(5)}(\lambda^2) \equiv \int \frac{d^5k}{(2\pi)^5} \frac{1}{(k^2 - \lambda^2)^2}, \quad (4.17)$$

$$I_{cub}^{(5)}(\lambda^2) \equiv \int \frac{d^5k}{(2\pi)^5} \frac{1}{(k^2 - \lambda^2)}. \quad (4.18)$$

Esses objetos podem ser classificados em duas categorias. Os três primeiros objetos são combinações de integrais com um mesmo grau de divergência, mas com estruturas tensoriais distintas. Eles podem ser reduzidos em termos de  $I_{lin}^{(5)}(\lambda^2)$  e  $I_{cub}^{(5)}(\lambda^2)$ , que, por sua vez, são irredutíveis.

Agora que separarmos as integrais podemos resolver as partes finitas sem restrições, mantendo as partes divergentes sem alterações.

## 4.2 Amplitudes físicas e ambiguidades

Observando as expressões obtidas para as integrais de Feynman na seção anterior podemos identificar alguns aspectos gerais. O mais imediato é a presença de integrais do tipo

$$\int \frac{d^5k}{(2\pi)^5} \frac{(1, k_\mu, k_\mu k_\nu, k_\mu k_\nu k_\alpha, \dots)}{(k^2 - \lambda^2)^\alpha}. \quad (4.19)$$

Parte dessas integrais são divergentes e serão organizadas em termos dos objetos divergentes que já definimos. As outras são finitas e podem ser facilmente integradas se utilizarmos os resultados obtidos no Apendice C.

As outras integrais finitas estão associadas a frações do tipo

$$\frac{1}{(k^2 - \lambda^2)^\alpha D_i}, \quad (4.20)$$

$$\frac{1}{(k^2 - \lambda^2)^\alpha D_{ij}} \quad (4.21)$$

e

$$\frac{1}{(k^2 - \lambda^2)^\alpha D_{123}} \quad (4.22)$$

onde  $\alpha$  é inteiro e  $i, j = 1, 2, 3$ . Podemos usar o recurso das parametrizações de Feynman, apresentado no Apendice B, para reescrever esses termos antes de proceder com a integração nos *momenta*.

Usando estes recursos, estamos aptos a determinar a parte convergente das integrais de Feynman e, então, escrever as amplitudes físicas. Torna-se interessante projetar essas integrais por meio de algumas funções padronizadas

$$\begin{aligned} Z_k^{1/2}(q_i^2, m_j^2, m_i^2; \lambda^2) &= \int_0^1 dz (z)^k [-H^2(q_i^2, m_j^2, m_i^2)]^{1/2} \\ &\quad - \int_0^1 dz (z)^k [-\lambda^2]^{1/2}, \end{aligned} \quad (4.23)$$

$$\begin{aligned} &\xi_{nm}^{1/2}(q_i^2, m_j^2, m_i^2; q_k^2, m_j^2, m_k^2; \lambda^2) \\ &= \int_0^1 dz \int_0^{1-z} dy (z^n y^m) [-H^2(q_i^2, m_j^2, m_i^2; q_k^2, m_j^2, m_k^2)]^{1/2} \\ &\quad - \int_0^1 dz \int_0^{1-z} dy (z^n y^m) [-\lambda^2]^{1/2} \end{aligned} \quad (4.24)$$

e

$$\begin{aligned} &\xi_{nm}^{-1/2}(q_i^2, m_j^2, m_i^2; q_k^2, m_j^2, m_k^2) \\ &= \int_0^1 dz \int_0^{1-z} dy (z^n y^m) [-H^2(q_i^2, m_j^2, m_i^2; q_k^2, m_j^2, m_k^2)]^{-1/2}. \end{aligned} \quad (4.25)$$

Alguns exemplos de solução das integrais de Feynman são apresentados no Apendice D.

Substituindo os valores encontrados para as integrais de Feynman nas amplitudes, obtidas através da álgebra de Dirac, obtemos para a função de um ponto vetorial

$$T_\mu^V(k_i, m) = 4 \left\{ -k_i^\alpha \Delta_{2;\mu\alpha}^{(5)}(\lambda^2) + (k_i^2 + \lambda^2 - m^2) k_i^\alpha \Delta_{3;\mu\alpha}^{(5)}(\lambda^2) \right\} - \frac{4}{3} k_i^\rho k_i^\alpha k_i^\beta \square_{4;\mu\rho\alpha\beta}^{(5)}(\lambda^2) \quad (4.26)$$

e para a função de dois pontos bivetorial

$$T_{\mu\nu}^{VV}(k_1, k_2, m) = \frac{4}{3} (g_{\mu\nu} q_2^2 - q_{2\mu} q_{2\nu}) I_{lin}^{(5)}(\lambda^2) + \frac{i}{4\pi^2} (g_{\mu\nu} q_2^2 - q_{2\mu} q_{2\nu}) 2Z_2^{1/2}(q_2^2, m^2; \lambda^2) - \frac{i}{4\pi^2} (g_{\mu\nu} q_2^2 - q_{2\mu} q_{2\nu}) Z_0^{1/2}(q_2^2, m^2; \lambda^2) + S_{\mu\nu}^{(5)}, \quad (4.27)$$

onde definimos o objeto divergente

$$S_{\mu\nu}^{(5)} = 4\Delta_{2;\mu\nu}^{(5)}(\lambda^2) - [Q^2 + q_2^2 + 4(\lambda^2 - m^2)] \Delta_{3;\mu\nu}^{(5)}(\lambda^2) + \frac{1}{3} (q_2^\alpha q_2^\beta + 3Q^\alpha Q^\beta) \square_{4;\mu\nu\alpha\beta}^{(5)}(\lambda^2) - 2Q_\nu Q^\alpha \Delta_{3;\mu\alpha}^{(5)}(\lambda^2) - \frac{2}{3} g_{\mu\nu} q_2^\alpha q_2^\beta \Delta_{3;\alpha\beta}^{(5)}(\lambda^2) + \frac{2}{3} q_{2\mu} q_2^\alpha \Delta_{3;\nu\alpha}^{(5)}(\lambda^2). \quad (4.28)$$

A autoenergia do elétron  $\Sigma = \Sigma(k_1, k_2, m)$  possui dois termos: um independente de *gauge*

$$\Sigma_1 = \frac{3}{2} \gamma^\mu Q^\nu \Delta_{3;\mu\nu}^{(5)}(\lambda^2) + \left( 5m - \frac{3}{2} \not{q}_2 \right) I_{lin}^{(5)}(\lambda^2) - \frac{i}{16\pi^2} 3\not{q}_2 \lim_{m_1^2 \rightarrow 0} Z_1^{1/2}(q_2^2, m_1^2, m^2; \lambda^2) - \frac{i}{16\pi^2} \left( 5m - 3\not{q}_2 \right) \lim_{m_1^2 \rightarrow 0} Z_0^{1/2}(q_2^2, m_1^2, m^2; \lambda^2) \quad (4.29)$$

e outro que depende dele

$$\Sigma_2 = \left( m - \not{q}_2 \right) I_{lin}^{(5)}(\lambda^2) - \frac{1}{2} (Q - q_2)^\nu \gamma^\mu \Delta_{3;\mu\nu}^{(5)}(\lambda^2) - \frac{i}{16\pi^2} \left( m - \not{q}_2 \right) \lim_{m_1^2 \rightarrow 0} Z_0^{1/2}(q_2^2, m_1^2, m^2; \lambda^2) - \frac{i}{16\pi^2} (q_2^2 - m^2) \not{q}_2 \lim_{m_1^2 \rightarrow 0} \frac{\partial}{\partial m_1^2} Z_1^{1/2}(q_2^2, m_1^2, m^2; \lambda^2). \quad (4.30)$$

Analogamente, para a correção de vértice  $\Lambda^\mu = \Lambda^\mu(k_1, k_2, k_3, m)$  temos

$$\begin{aligned}
\Lambda_1^\mu &= \frac{3}{2}\gamma^\mu I_{lin}^{(5)}(\lambda^2) \\
&\quad - \frac{3}{2}\gamma_\alpha \Delta_3^{(5);\mu\alpha}(\lambda^2) \\
&\quad - \frac{i}{32\pi^2} 6\gamma^\mu Z_0^{1/2}((q_3 - q_2)^2, m^2, m^2; \lambda^2) \\
&\quad + \frac{i}{32\pi^2} 6\gamma^\mu \lim_{m_1^2 \rightarrow 0} \xi_{00}^{1/2} \\
&\quad - \frac{i}{32\pi^2} 6q_3^\mu \not{q}_3 \lim_{m_1^2 \rightarrow 0} \xi_{02}^{-1/2} \\
&\quad - \frac{i}{32\pi^2} 6q_2^\mu \not{q}_2 \lim_{m_1^2 \rightarrow 0} \xi_{20}^{-1/2} \\
&\quad - \frac{i}{32\pi^2} 6(q_2^\mu \not{q}_3 + q_3^\mu \not{q}_2) \lim_{m_1^2 \rightarrow 0} \xi_{11}^{-1/2} \\
&\quad + \frac{i}{32\pi^2} \left[ \not{q}_2 \gamma^\mu \not{q}_3 + 2\not{q}_3 \gamma^\mu \not{q}_2 \right. \\
&\quad \quad \left. + 3\not{q}_2 \gamma^\mu \not{q}_2 - 10mq_2^\mu \right] \lim_{m_1^2 \rightarrow 0} \xi_{10}^{-1/2} \\
&\quad + \frac{i}{32\pi^2} \left[ \not{q}_2 \gamma^\mu \not{q}_3 + 2\not{q}_3 \gamma^\mu \not{q}_2 \right. \\
&\quad \quad \left. + 3\not{q}_3 \gamma^\mu \not{q}_3 - 10mq_3^\mu \right] \lim_{m_1^2 \rightarrow 0} \xi_{01}^{-1/2} \\
&\quad - \frac{i}{32\pi^2} \left[ 2\not{q}_3 \gamma^\mu \not{q}_2 + (\not{q}_2 - m) \gamma^\mu (\not{q}_3 - m) \right. \\
&\quad \quad \left. - 4m(q_2 + q_3)^\mu + 2m^2 \gamma^\mu \right] \lim_{m_1^2 \rightarrow 0} \xi_{00}^{-1/2}, \tag{4.31}
\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
\Lambda_2^\mu &= \gamma^\mu I_{lin}^{(5)}(\lambda^2) \\
&\quad - \frac{i}{32\pi^2} 2\gamma^\mu Z_0^{1/2} \left( (q_3 - q_2)^2, m^2, m^2; \lambda^2 \right) \\
&\quad + \frac{i}{32\pi^2} 2\gamma^\mu \lim_{m_1^2 \rightarrow 0} \left[ Z_0^{1/2} (q_3^2, m_1^2, m^2; \lambda^2) - Z_0^{1/2} (q_2^2, m_1^2, m^2; \lambda^2) \right] \\
&\quad + \frac{i}{32\pi^2} \left[ - (q_2 - m) \gamma^\mu (q_3 - m) \right. \\
&\quad \quad \left. + (q_2^2 - m^2) \gamma^\mu - (q_3^2 - m^2) \gamma^\mu \right] \lim_{m_1^2 \rightarrow 0} \xi_{00}^{-1/2} \\
&\quad - \frac{i}{32\pi^2} 2\gamma^\mu \lim_{m_1^2 \rightarrow 0} \left[ q_2^2 \xi_{10}^{-1/2} + q_2 \cdot q_3 \xi_{01}^{-1/2} \right] \\
&\quad + \frac{i}{32\pi^2} 2q_2 (q_2 + m) \gamma^\mu \lim_{m_1^2 \rightarrow 0} \frac{\partial}{\partial m_1^2} Z_1^{1/2} (q_2^2, m_1^2, m^2; \lambda^2) \\
&\quad - \frac{i}{32\pi^2} 2\gamma^\mu q_3 (q_3 - m) \lim_{m_1^2 \rightarrow 0} \frac{\partial}{\partial m_1^2} Z_1^{1/2} (q_3^2, m_1^2, m^2; \lambda^2) \\
&\quad - \frac{i}{32\pi^2} \left[ (q_2^2 - m^2) \gamma^\mu q_2 (q_3 - m) \right. \\
&\quad \quad \left. - (q_3^2 - m^2) q_2 (q_2 + m) \gamma^\mu \right] \lim_{m_1^2 \rightarrow 0} \frac{\partial}{\partial m_1^2} \xi_{10}^{-1/2} \\
&\quad - \frac{i}{32\pi^2} \left[ (q_2^2 - m^2) \gamma^\mu q_3 (q_3 - m) \right. \\
&\quad \quad \left. - (q_3^2 - m^2) q_3 (q_2 + m) \gamma^\mu \right] \lim_{m_1^2 \rightarrow 0} \frac{\partial}{\partial m_1^2} \xi_{01}^{-1/2} \\
&\quad + \frac{i}{32\pi^2} 2 (q_2 - m) q_2 (q_3 - m) \lim_{m_1^2 \rightarrow 0} \frac{\partial}{\partial m_1^2} \left[ q_2^\mu \xi_{20}^{-1/2} + q_3^\mu \xi_{11}^{-1/2} \right] \\
&\quad + \frac{i}{32\pi^2} 2 (q_2 - m) q_3 (q_3 - m) \lim_{m_1^2 \rightarrow 0} \frac{\partial}{\partial m_1^2} \left[ q_3^\mu \xi_{02}^{-1/2} + q_2^\mu \xi_{11}^{-1/2} \right] \\
&\quad - \frac{i}{32\pi^2} 2 (q_2 - m) \gamma^\mu (q_3 - m) \lim_{m_1^2 \rightarrow 0} \frac{\partial}{\partial m_1^2} \xi_{00}^{1/2}, \tag{4.32}
\end{aligned}$$

em que temos as funções  $\xi_{nm}^{\pm 1/2} = \xi_{nm}^{\pm 1/2} (q_2^2, m_1^2, m^2; q_3^2, m_1^2, m^2)$ . Sendo o primeiro invariante de *gauge* e o segundo dependente.

Uma característica importante do uso de métodos perturbativos é a presença de ambiguidades. Nesta investigação elas se manifestam por meio de duas quantidades; o fator de escala  $\lambda$  e a soma dos *momenta* internos  $Q$ . A função de um

ponto vetorial depende dessas duas quantidades. Para o tensor de polarização toda a ambiguidade está no objeto  $S_{\mu\nu}^{(5)}$ , que pode ser separado em duas partes

$$\begin{aligned} \left[ S_{\mu\nu}^{(5)} \right]_{momentum} &= -Q^2 \Delta_{3;\mu\nu}^{(5)} (\lambda^2) - 2Q_\nu Q^\alpha \Delta_{3;\mu\alpha}^{(5)} (\lambda^2) \\ &\quad + Q^\alpha Q^\beta \square_{4;\mu\nu\alpha\beta}^{(5)} (\lambda^2) \end{aligned} \quad (4.33)$$

que depende das escolhas para o *momentum* e para a escala e

$$\begin{aligned} \left[ S_{\mu\nu}^{(5)} \right]_{escala} &= 4\Delta_{2;\mu\nu}^{(5)} (\lambda^2) - [q_2^2 + 4(\lambda^2 - m^2)] \Delta_{3;\mu\nu}^{(5)} (\lambda^2) \\ &\quad - \frac{2}{3} g_{\mu\nu} q_2^\alpha q_2^\beta \Delta_{3;\alpha\beta}^{(5)} (\lambda^2) + \frac{2}{3} q_{2\mu} q_2^\alpha \Delta_{3;\nu\alpha}^{(5)} (\lambda^2) \\ &\quad + \frac{1}{3} q_2^\alpha q_2^\beta \square_{4;\mu\nu\alpha\beta}^{(5)} (\lambda^2) \end{aligned} \quad (4.34)$$

que depende apenas da escala arbitrária.

Isso mostra a necessidade de usarmos valores arbitrários para os *momenta* internos. Diferentes escolhas levariam a diferentes resultados para a mesma amplitude. Vamos usar dois exemplos para ilustrar:

Fixando  $k_1 = 0$  e  $k_2 = q_2$  obtemos

$$\left[ S_{\mu\nu}^{(5)} \right]_{momentum} = -q_2^2 \Delta_{3;\mu\nu}^{(5)} (\lambda^2) + q_2^\alpha q_2^\beta \square_{4;\mu\nu\alpha\beta}^{(5)} (\lambda^2) - 2q_{2\nu} q_2^\alpha \Delta_{3;\mu\alpha}^{(5)} (\lambda^2). \quad (4.35)$$

Fixando  $k_1 = -\frac{q_2}{2}$  e  $k_2 = \frac{q_2}{2}$  obtemos

$$\left[ S_{\mu\nu}^{(5)} \right]_{momentum} = 0. \quad (4.36)$$

Os termos que são dependentes das escolhas para as linhas internas violam a homogeneidade do espaço-tempo porque uma translação nos *momenta* traria consequências físicas. Além disso, diferentes escolhas na escala também levariam a resultados diferentes. Estes termos são violadores de simetrias.

Dizer que toda a ambiguidade do tensor de polarização está no termo  $S_{\mu\nu}^{(5)}$  implica que a quantidade

$$\begin{aligned} [T_{\mu\nu}^{VV}]_{NA} &= (g_{\mu\nu} q_2^2 - q_{2\mu} q_{2\nu}) \left\{ \frac{4}{3} I_{lin}^{(5)} (\lambda^2) \right. \\ &\quad \left. + \frac{i}{4\pi^2} \left[ 2Z_2^{1/2} (q_2^2, m^2; \lambda^2) - Z_0^{1/2} (q_2^2, m^2; \lambda^2) \right] \right\} \end{aligned} \quad (4.37)$$

não depende de  $\lambda^2$ . Para comprovarmos isso devemos derivar este termo.

Ao derivarmos  $I_{lin}^{(5)}(\lambda^2)$  obtemos uma quantidade convergente que pode ser facilmente integrada

$$\frac{\partial}{\partial \lambda^2} I_{lin}^{(5)}(\lambda^2) = 2 \int \frac{d^5 k}{(2\pi)^5} \frac{1}{(k^2 - \lambda^2)^3} = \frac{i}{16\pi^2} \frac{1}{2i\lambda} \quad (4.38)$$

e derivando a parte finita obtemos

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial \lambda^2} \left[ 2Z_2^{1/2}(q_2^2, m^2; \lambda^2) - Z_0^{1/2}(q_2^2, m^2; \lambda^2) \right] \\ &= \left[ \int_0^1 dz (1 - 2z^2) \right] \frac{\partial}{\partial \lambda^2} (-\lambda^2)^{1/2} \\ &= -\frac{1}{6} \frac{1}{i\lambda} \end{aligned} \quad (4.39)$$

portanto

$$\frac{\partial}{\partial \lambda^2} [T_{\mu\nu}^{VV}]_{NA} = 0. \quad (4.40)$$

Assim, como deveria ser, o resultado não depende do parâmetro arbitrário de escala. De maneira análoga podemos verificar que toda a dependência no *momentum* e na escala da autoenergia do elétron e da correção de vértice está nos termos dependentes do objeto redutível  $\Delta_{3;\mu\nu}^{(5)}(\lambda^2)$ . A partir deste ponto podemos escolher qualquer valor para o parâmetro  $\lambda$ . O mais conveniente é a massa  $m$ .

## 5 CONSISTÊNCIA DA TEORIA

Neste capítulo observamos o que é necessário para que as funções de Green representem, de fato, quantidades físicas. São estabelecidas relações de consistência que permitem satisfazer todas as propriedades requeridas para as amplitudes. Observamos essas relações sob a perspectiva de dois métodos de regularização.

### 5.1 Consistência

Como um teste mínimo de consistência observamos que as relações entre as funções de Green de um ponto vetorial e de dois pontos bivectorial são automaticamente satisfeitas. Na contração com o *momentum* apenas o termo  $S_{\mu\nu}^{(5)}$  sobrevive, logo devemos obter

$$q_2^\nu S_{\mu\nu}^{VV}(k_1, k_2, m) = T_\mu^V(k_1, m) - T_\mu^V(k_2, m) \quad (5.1)$$

$$q_2^\mu S_{\mu\nu}^{VV}(k_1, k_2, m) = T_\nu^V(k_1, m) - T_\nu^V(k_2, m). \quad (5.2)$$

Em razão da forma como as soluções foram colocadas, é fácil ver que essas relações são satisfeitas. O fato de elas serem satisfeitas antes e depois da integração implica que a linearidade da integração é preservada.

O formato do tensor de polarização, que é dado por (2.38), só pode ser obtido se o objeto  $S_{\mu\nu}^{(5)}$  for identicamente nulo. Nesse caso teríamos

$$\begin{aligned} T_{\mu\nu}^{VV}(q_2) &= (g_{\mu\nu}q_2^2 - q_{2\mu}q_{2\nu}) \frac{4}{3} I_{lin}^{(5)}(\lambda^2) \\ &+ (g_{\mu\nu}q_2^2 - q_{2\mu}q_{2\nu}) \frac{i}{4\pi^2} 2Z_2^{1/2}(q_2^2, m^2; \lambda^2) \\ &- (g_{\mu\nu}q_2^2 - q_{2\mu}q_{2\nu}) \frac{i}{4\pi^2} Z_0^{1/2}(q_2^2, m^2; \lambda^2). \end{aligned} \quad (5.3)$$

Isso somente é satisfeito se os objetos divergentes redutíveis  $\Delta_{2;\mu\nu}^{(5)}(\lambda^2)$ ,  $\Delta_{3;\mu\nu}^{(5)}(\lambda^2)$  e  $\square_{4;\mu\nu\alpha\beta}^{(5)}(\lambda^2)$  forem identicamente nulos. Se isso é verdade, então todas as ambiguidades presentes anteriormente no tensor de polarização desaparecem e, ainda, temos que

$$q_2^\mu T_{\mu\nu}^{VV}(q_2) = q_2^\nu T_{\mu\nu}^{VV}(q_2) = 0. \quad (5.4)$$

Com isso devemos ter que

$$T_\mu^V(k_1, m) - T_\mu^V(k_2, m) = 0, \quad (5.5)$$

o que é satisfeito, se os objetos divergentes redutíveis são nulos. O mesmo vale para o limite de baixas energias

$$\left\{ \frac{4}{3} q_2^2 I_{lin}^{(5)}(\lambda^2) + \frac{i}{4\pi^2} q_2^2 \left( 2Z_2^{1/2} - Z_0^{1/2} \right) \right\}_{q_2^2=0} = 0, \quad (5.6)$$

que é satisfeito para qualquer forma regularizada de  $I_{lin}^{(5)}(\lambda^2)$ .

A autoenergia do elétron e a correção de vértice aparecem automaticamente no formato tensorial desejado. A relação entre essas duas funções de Green

$$(q_3 - q_2)_\mu \Lambda^\mu(k_1, k_2, k_3, m) = \Sigma(k_1, k_3, m) - \Sigma(k_1, k_2, m) \quad (5.7)$$

é obtida pelo uso das identidades apresentadas no Apendice E. Resta eliminar todas as ambiguidades presentes nessas quantidades, o que ocorre quando fazemos  $\Delta_{3;\mu\nu}^{(5)}(\lambda^2) = 0$ .

Chamaremos

$$\Delta_{2;\mu\nu}^{(5)}(\lambda^2) = 0, \quad (5.8)$$

$$\Delta_{3;\mu\nu}^{(5)}(\lambda^2) = 0, \quad (5.9)$$

$$\square_{4;\mu\nu\alpha\beta}^{(5)}(\lambda^2) = 0 \quad (5.10)$$

de relações de consistência uma vez que elas são necessárias para que as amplitudes sejam livres de ambiguidades e satisfaçam as condições estabelecidas no segundo capítulo do trabalho. Falaremos mais sobre elas na próxima seção.

Com isso, a autoenergia do elétron fica no formato

$$\begin{aligned} \Sigma(q_2) &= \left[ \left( 5m - \frac{3}{2} \not{q}_2 \right) + (\xi - 1) (m - \not{q}_2) \right] I_{lin}^{(5)}(\lambda^2) \\ &\quad - \frac{i}{16\pi^2} 3\not{q}_2 \lim_{m_1^2 \rightarrow 0} Z_1^{1/2}(q_2^2, m_1^2, m^2; \lambda^2) \\ &\quad - \frac{i}{16\pi^2} (5m - 3\not{q}_2) \lim_{m_1^2 \rightarrow 0} Z_0^{1/2}(q_2^2, m_1^2, m^2; \lambda^2) \\ &\quad - (\xi - 1) \frac{i}{16\pi^2} (q_2^2 - m^2) \not{q}_2 \lim_{m_1^2 \rightarrow 0} \frac{\partial}{\partial m_1^2} Z_1^{1/2}(q_2^2, m_1^2, m^2; \lambda^2) \\ &\quad - (\xi - 1) \frac{i}{16\pi^2} (m - \not{q}_2) \lim_{m_1^2 \rightarrow 0} Z_0^{1/2}(q_2^2, m_1^2, m^2; \lambda^2). \end{aligned} \quad (5.11)$$

O termo dependente de *gauge* da correção de vértice não muda. Para o termo independente temos

$$\begin{aligned}
\Lambda_1^\mu(q_2, q_3) &= \frac{3}{2} \gamma^\mu I_{lin}^{(5)}(\lambda^2) \\
&\quad - \frac{i}{32\pi^2} 6\gamma^\mu Z_0^{1/2} \left( (q_3 - q_2)^2, m^2, m^2; \lambda^2 \right) \\
&\quad + \frac{i}{32\pi^2} 6\gamma^\mu \lim_{m_1^2 \rightarrow 0} \xi_{00}^{1/2} \\
&\quad - \frac{i}{32\pi^2} 6q_3^\mu \not{q}_3 \lim_{m_1^2 \rightarrow 0} \xi_{02}^{-1/2} \\
&\quad - \frac{i}{32\pi^2} 6q_2^\mu \not{q}_2 \lim_{m_1^2 \rightarrow 0} \xi_{20}^{-1/2} \\
&\quad - \frac{i}{32\pi^2} 6 \left( q_2^\mu \not{q}_3 + q_3^\mu \not{q}_2 \right) \lim_{m_1^2 \rightarrow 0} \xi_{11}^{-1/2} \\
&\quad + \frac{i}{32\pi^2} \left[ \not{q}_2 \gamma^\mu \not{q}_3 + 2\not{q}_3 \gamma^\mu \not{q}_2 \right. \\
&\quad \quad \left. + 3\not{q}_2 \gamma^\mu \not{q}_2 - 10mq_2^\mu \right] \lim_{m_1^2 \rightarrow 0} \xi_{10}^{-1/2} \\
&\quad + \frac{i}{32\pi^2} \left[ \not{q}_2 \gamma^\mu \not{q}_3 + 2\not{q}_3 \gamma^\mu \not{q}_2 \right. \\
&\quad \quad \left. + 3\not{q}_3 \gamma^\mu \not{q}_3 - 10mq_3^\mu \right] \lim_{m_1^2 \rightarrow 0} \xi_{01}^{-1/2} \\
&\quad - \frac{i}{32\pi^2} \left[ 2\not{q}_3 \gamma^\mu \not{q}_2 + 2m^2 \gamma^\mu + (\not{q}_2 - m) \gamma^\mu (\not{q}_3 - m) \right. \\
&\quad \quad \left. - 4m(q_2 + q_3)^\mu \right] \lim_{m_1^2 \rightarrow 0} \xi_{00}^{-1/2}, \tag{5.12}
\end{aligned}$$

Vimos que as relações de consistência devem ser satisfeitas para que obtenhamos amplitudes que sejam livres de ambiguidades e que apresentem as propriedades definidas anteriormente. Nesse ponto, vamos observar essas relações por meio de prescrições diferentes.

## 5.2 Relações de consistência

Na seção precedente vimos que os objetos divergentes redutíveis devem ser nulos para que sejam obtidos resultados consistentes e, por isso, chamamo-los de

relações de consistência. Nesta seção, determinaremos, explicitamente, o valor destes objetos através de diferentes técnicas de regularização.

Vamos considerar inicialmente o recurso da continuação analítica para atribuir significado para os objetos divergentes tal qual é feito na Regularização Dimensional (RD). Neste contexto supomos que a solução da integral nos *momenta* também seja válida para o caso divergente. Para este fim admitimos que a integral é uma função analítica da variável  $\omega$ , que é contínua e complexa. Além disso, devemos substituir a função Gamma de Euler pela sua continuação analítica, a função Gamma de Weierstrass. Deste modo, as equações

$$\int \frac{d^{2\omega}k}{(2\pi)^{2\omega}} \frac{1}{(k^2 - \lambda^2)^\alpha} = \frac{i}{(4\pi)^\omega} \frac{\Gamma(\alpha - \omega)}{\Gamma(\alpha)} \frac{1}{(-\lambda^2)^{\alpha - \omega}} \quad (5.13)$$

$$\int \frac{d^{2\omega}k}{(2\pi)^{2\omega}} \frac{k_\mu k_\nu}{(k^2 - \lambda^2)^{\alpha+1}} = \frac{i}{(4\pi)^\omega} \frac{1}{2} g_{\mu\nu} \frac{\Gamma(\alpha - \omega)}{\Gamma(\alpha + 1)} \frac{1}{(-\lambda^2)^{\alpha - \omega}} \quad (5.14)$$

$$\int \frac{d^{2\omega}k}{(2\pi)^{2\omega}} \frac{k_\mu k_\nu k_\lambda k_\xi}{(k^2 - \lambda^2)^{\alpha+2}} = \frac{i}{(4\pi)^\omega} \frac{1}{4} g_{\mu\nu\lambda\xi} \frac{\Gamma(\alpha - \omega)}{\Gamma(\alpha + 2)} \frac{1}{(-\lambda^2)^{\alpha - \omega}}, \quad (5.15)$$

e outras equações do tipo, com  $g_{\mu\nu\lambda\xi} \equiv g_{\nu\lambda}g_{\mu\xi} + g_{\mu\lambda}g_{\nu\xi} + g_{\nu\mu}g_{\lambda\xi}$ , também são válidas para o caso divergente e então fica fácil estabelecer as relações

$$\int \frac{d^5k}{(2\pi)^5} \frac{2k_\mu k_\nu}{(k^2 - \lambda^2)^2} = \int \frac{d^5k}{(2\pi)^5} \frac{g_{\mu\nu}}{(k^2 - \lambda^2)} \quad (5.16)$$

$$\int \frac{d^5k}{(2\pi)^5} \frac{4k_\mu k_\nu}{(k^2 - \lambda^2)^3} = \int \frac{d^5k}{(2\pi)^5} \frac{g_{\mu\nu}}{(k^2 - \lambda^2)^2} \quad (5.17)$$

$$\begin{aligned} \int \frac{d^5k}{(2\pi)^5} \frac{24k_\mu k_\nu k_\alpha k_\beta}{(k^2 - \lambda^2)^4} &= g_{\mu\nu} \int \frac{d^5k}{(2\pi)^5} \frac{4k_\alpha k_\beta}{(k^2 - \lambda^2)^3} \\ &+ g_{\mu\alpha} \int \frac{d^5k}{(2\pi)^5} \frac{4k_\nu k_\beta}{(k^2 - \lambda^2)^3} \\ &+ g_{\mu\beta} \int \frac{d^5k}{(2\pi)^5} \frac{4k_\nu k_\alpha}{(k^2 - \lambda^2)^3}. \end{aligned} \quad (5.18)$$

Isso implica que  $\Delta_{2;\mu\nu}^{(5)}(\lambda^2) = \Delta_{3;\mu\nu}^{(5)}(\lambda^2) = \square_{4;\mu\nu\alpha\beta}^{(5)}(\lambda^2) = 0$ . Isso explica o sucesso obtido pela RD em eliminar as ambiguidades e os termos que violam simetrias. Ao reescrevermos os objetos divergentes como

$$\Delta_{2;\mu\nu}^{(5)}(\lambda^2) = \int \frac{d^5 k}{(2\pi)^5} \frac{\partial}{\partial k_\mu} \left\{ -\frac{k_\nu}{(k^2 - \lambda^2)} \right\} \quad (5.19)$$

$$\Delta_{3;\mu\nu}^{(5)}(\lambda^2) = \int \frac{d^5 k}{(2\pi)^5} \frac{\partial}{\partial k_\mu} \left\{ -\frac{k_\nu}{(k^2 - \lambda^2)^2} \right\} \quad (5.20)$$

$$\square_{4;\mu\nu\alpha\beta}^{(5)}(\lambda^2) = \int \frac{d^5 k}{(2\pi)^5} \frac{\partial}{\partial k_\mu} \left\{ -\frac{4k_\nu k_\alpha k_\beta}{(k^2 - \lambda^2)^3} \right\} \quad (5.21)$$

fica fácil ver a razão deles se anularem neste contexto. Eles devem ser nulos para que seja permitido fazer impunemente um deslocamento na variável de integração. Se, uma integral possui grau de divergência superior ao logarítmico, então, ao efetuarmos um deslocamento da origem na variável de integração, devemos compensar esta operação com os devidos termos de superfície. As formas acima mostram que as quantidades  $\Delta_{2;\mu\nu}^{(5)}(\lambda^2)$ ,  $\Delta_{3;\mu\nu}^{(5)}(\lambda^2)$  e  $\square_{4;\mu\nu\alpha\beta}^{(5)}(\lambda^2)$  são apenas termos de superfície.

Assim, o procedimento mostrado acima anula os termos de superfície e, portanto elimina os termos que dependem da escolha para os *momenta* das linhas internas dos *loops*.

Agora, vamos olhar os objetos divergentes de outro modo, com o auxílio de uma regularização pentadimensional. Para que nossos resultados sejam consistentes é necessário usarmos uma distribuição  $G(k^2, \Lambda_i^2)$  tal que os objetos divergentes regularizados

$$\Delta_{2;\mu\nu}^{(5)}(\lambda^2) = \int \frac{d^5 k}{(2\pi)^5} G(k^2, \Lambda_i^2) \frac{\partial}{\partial k_\mu} \left\{ -\frac{k_\nu}{(k^2 - \lambda^2)} \right\} \quad (5.22)$$

$$\Delta_{3;\mu\nu}^{(5)}(\lambda^2) = \int \frac{d^5 k}{(2\pi)^5} G(k^2, \Lambda_i^2) \frac{\partial}{\partial k_\mu} \left\{ -\frac{k_\nu}{(k^2 - \lambda^2)^2} \right\} \quad (5.23)$$

$$\square_{4;\mu\nu\alpha\beta}^{(5)}(\lambda^2) = \int \frac{d^5 k}{(2\pi)^5} G(k^2, \Lambda_i^2) \frac{\partial}{\partial k_\mu} \left\{ -\frac{4k_\nu k_\alpha k_\beta}{(k^2 - \lambda^2)} \right\} \quad (5.24)$$

sejam identicamente nulos. Como exemplo vamos utilizar o método covariante de Pauli-Villars (PAULI; VILLARS, 1949). Neste método uma integral com um grau arbitrário de divergência pode ser regularizada ao fazermos

$$\frac{1}{(k^2 - \lambda^2)} \rightarrow \frac{1}{(k^2 - \lambda^2)} + \lim_{\Lambda_i^2 \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^N \frac{c_i}{k^2 - \Lambda_i^2}. \quad (5.25)$$

Também podemos escrever

$$\frac{1}{(k^2 - \lambda^2)} \rightarrow \lim_{\Lambda_i^2 \rightarrow \infty} \sum_{i=0}^N \frac{c_i}{k^2 - \Lambda_i^2} \quad (5.26)$$

onde  $c_i = 1$  e  $\Lambda_i^2 = \lambda^2$ .

O número de coeficientes  $c_i$  é fixado de acordo com o grau de divergência. Condições devem ser impostas para fixar estes coeficientes tais como:

$$\sum_{i=0}^N c_i = 0 \quad (5.27)$$

$$\sum_{i=0}^N c_i \Lambda_i^2 = 0. \quad (5.28)$$

Um grau arbitrário de divergência nos leva à forma

$$\frac{1}{(k^2 - \lambda^2)} \rightarrow \lim_{\Lambda_i^2 \rightarrow \infty} \frac{1}{(k^2 - \lambda^2)} \frac{(\lambda^2 - \Lambda_1^2)(\lambda^2 - \Lambda_2^2) \cdots (\lambda^2 - \Lambda_N^2)}{(k^2 - \Lambda_1^2)(k^2 - \Lambda_2^2) \cdots (k^2 - \Lambda_N^2)}. \quad (5.29)$$

Se considerarmos que todos os parâmetros têm a mesma magnitude, podemos escrever

$$\frac{1}{(k^2 - \lambda^2)} \rightarrow \lim_{\Lambda_i^2 \rightarrow \infty} \frac{1}{(k^2 - \lambda^2)} L^N, \quad (5.30)$$

com

$$L \equiv \frac{l}{k^2 - \Lambda^2} \quad (5.31)$$

e

$$l \equiv \lambda^2 - \Lambda^2. \quad (5.32)$$

Este tipo de regularização modifica o integrando das amplitudes:

$$\int \frac{d^{2\omega} k}{(2\pi)^\omega} \frac{1}{(k^2 - \lambda^2)^\alpha} \rightarrow \int \frac{d^{2\omega} k}{(2\pi)^\omega} \frac{1}{(k^2 - \lambda^2)^\alpha} \left\{ \lim_{\Lambda_i^2 \rightarrow \infty} G(k^2, \Lambda_i^2) \right\}. \quad (5.33)$$

Após inserirmos essa função, a integral deveria ser solucionada e, então, deveríamos tomar o limite. Porém o limite e a integral não comutam, este processo seria

válido apenas para casos em que a integral convergisse absolutamente. Chamamos

$$\lim_{\Lambda_i^2 \rightarrow \infty} G(k^2, \Lambda_i^2) = 1 \quad (5.34)$$

de limite de conexão.

Usando este procedimento calculamos as integrais

$$\int \frac{d^5 k}{(2\pi)^5} \frac{k_\mu k_\nu}{(k^2 - \lambda^2)^2} L^2 = l^2 \frac{i}{32\pi^2} \frac{1}{2} g_{\mu\nu} \int_0^1 \frac{dz (1-z) z}{[Q_\lambda]^{1/2}} \quad (5.35)$$

$$\int \frac{d^5 k}{(2\pi)^5} \frac{1}{(k^2 - \lambda^2)} L^2 = l^2 \frac{i}{32\pi^2} \int_0^1 \frac{dz (z)}{[Q_\lambda]^{1/2}} \quad (5.36)$$

$$\int \frac{d^5 k}{(2\pi)^5} \frac{k_\mu k_\nu}{(k^2 - \lambda^2)^3} L = l \frac{i}{32\pi^2} \frac{1}{4} g_{\mu\nu} \int_0^1 \frac{dz (1-z)^2}{[Q_\lambda]^{1/2}} \quad (5.37)$$

$$\int \frac{d^5 k}{(2\pi)^5} \frac{1}{(k^2 - \lambda^2)^2} L = l \frac{i}{32\pi^2} \int_0^1 \frac{dz (1-z)}{[Q_\lambda]^{1/2}} \quad (5.38)$$

$$\int \frac{d^5 k}{(2\pi)^5} \frac{k_\mu k_\nu k_\alpha k_\beta}{(k^2 - \lambda^2)^4} L = l \frac{i}{32\pi^2} \frac{1}{24} g_{\mu\nu\alpha\beta} \int_0^1 \frac{dz (1-z)^3}{[Q_\lambda]^{1/2}} \quad (5.39)$$

onde definimos  $Q_\lambda \equiv (\lambda^2 - \Lambda^2) z - \lambda^2$ . Embora não tenhamos escrito explicitamente o limite deve ser efetuado. Observando essas equações podemos obter as relações

$$\begin{aligned} \int \frac{d^5 k}{(2\pi)^5} \frac{2k_\mu k_\nu}{(k^2 - \lambda^2)^2} L^2 &= \int \frac{d^5 k}{(2\pi)^5} \frac{g_{\mu\nu}}{(k^2 - \lambda^2)} L^2 \\ &\quad - l^2 \frac{i}{32\pi^2} g_{\mu\nu} \int_0^1 \frac{dz (z^2)}{[Q_\lambda]^{1/2}} \end{aligned} \quad (5.40)$$

$$\begin{aligned} \int \frac{d^5 k}{(2\pi)^5} \frac{4k_\mu k_\nu}{(k^2 - \lambda^2)^3} L &= \int \frac{d^5 k}{(2\pi)^5} \frac{g_{\mu\nu}}{(k^2 - \lambda^2)^2} L \\ &\quad - l \frac{i}{32\pi^2} g_{\mu\nu} \int_0^1 \frac{dz (1-z) z}{[Q_\lambda]^{1/2}} \end{aligned} \quad (5.41)$$

$$\begin{aligned}
\int \frac{d^5 k}{(2\pi)^5} \frac{24k_\mu k_\nu k_\alpha k_\beta}{(k^2 - \lambda^2)^4} L &= g_{\mu\nu} \int \frac{d^5 k}{(2\pi)^5} \frac{4k_\alpha k_\beta}{(k^2 - \lambda^2)^3} L \\
&+ g_{\mu\alpha} \int \frac{d^5 k}{(2\pi)^5} \frac{4k_\nu k_\beta}{(k^2 - \lambda^2)^3} L \\
&+ g_{\mu\beta} \int \frac{d^5 k}{(2\pi)^5} \frac{4k_\nu k_\alpha}{(k^2 - \lambda^2)^3} L \\
&- l \frac{i}{32\pi^2} g_{\mu\nu\alpha\beta} \int_0^1 \frac{dz (1-z)^2 z}{[Q_\lambda]^{1/2}}. \quad (5.42)
\end{aligned}$$

Como consequência disso temos que  $\Delta_{2;\mu\nu}^{(5)}(\lambda^2) \neq 0$ ,  $\Delta_{3;\mu\nu}^{(5)}(\lambda^2) \neq 0$  e  $\square_{4;\mu\nu\alpha\beta}^{(5)}(\lambda^2) \neq 0$ . Isto pode ser visto claramente se colocarmos os objetos divergentes na forma de termos de superfície. Teremos

$$\int \frac{d^5 k}{(2\pi)^5} G(k^2, \Lambda_i^2) \frac{\partial}{\partial k_\mu} \left\{ -\frac{k_\nu}{(k^2 - \lambda^2)} \right\} = -l^2 \frac{i}{32\pi^2} g_{\mu\nu} \int_0^1 \frac{dz (z)^2}{[Q_\lambda]^{1/2}}, \quad (5.43)$$

$$\int \frac{d^5 k}{(2\pi)^5} G(k^2, \Lambda_i^2) \frac{\partial}{\partial k_\mu} \left\{ -\frac{k_\nu}{(k^2 - \lambda^2)^2} \right\} = -l \frac{i}{32\pi^2} g_{\mu\nu} \int_0^1 \frac{dz (1-z) z}{[Q_\lambda]^{1/2}} \quad (5.44)$$

e

$$\int \frac{d^5 k}{(2\pi)^5} G(k^2, \Lambda_i^2) \frac{\partial}{\partial k_\mu} \left\{ -\frac{4k_\nu k_\alpha k_\beta}{(k^2 - \lambda^2)^3} \right\} = -l \frac{i}{32\pi^2} g_{\mu\nu\alpha\beta} \int_0^1 \frac{dz (1-z)^2 z}{[Q_\lambda]^{1/2}} \quad (5.45)$$

o que mostra o caráter não nulo destas quantidade na regularização de Pauli-Villars. Resultados análogos seriam obtidos para qualquer outra função regularizadora pentadimensional. Isso faz com que não seja possível eliminar as ambiguidades e os termos que violam simetrias no contexto de tais prescrições.

Como os objetos  $\Delta_{2;\mu\nu}^{(5)}(\lambda^2)$ ,  $\Delta_{3;\mu\nu}^{(5)}(\lambda^2)$  e  $\square_{4;\mu\nu\alpha\beta}^{(5)}(\lambda^2)$  devem se anular (só assim podemos obter resultados consistentes), nós devemos admitir como aceitáveis apenas prescrições que satisfazem estas condições. Do contrário os resultados dependem das escolhas arbitrárias feitas nos passos intermediários e a teoria não tem poder de determinar nada. Assumindo, assim, apenas a utilização de regularizações aceitáveis ou consistentes as funções de Green assumem uma forma preditiva e as identidades de Ward são satisfeitas.

## 6 RENORMALIZAÇÃO

Usamos teoria de perturbações para solucionarmos problemas que não sabemos resolver exatamente em termos de um problema cuja solução é conhecida. Como exemplo, em TQCs, podemos descrever interações em termos da dinâmica de partículas livres. A solução desejada é obtida em termos de uma série de potências em um dado parâmetro (pequeno), as chamadas séries perturbativas. Se pudéssemos somar todos os termos da série, então obteríamos a solução exata. Como o parâmetro perturbativo é muito pequeno, cada novo termo da série terá uma contribuição menor, logo podemos aproximar a solução por alguns termos da série.

Após encontrarmos as soluções desejadas, devemos ser capazes de interpretá-las. As quantidades que aparecem inicialmente na expressão para a teoria (na lagrangeana das TQCs) não são de fato as quantidades físicas medidas em laboratório (GOMES, 2002). Chamamos essas quantidades de parâmetros físicos nus. A lagrangeana não é única e pode ser substituída por uma lagrangeana equivalente que gera as mesmas implicações, então é natural que os parâmetros que ela apresenta não sejam os parâmetros físicos. Estes parâmetros são os coeficientes dos termos da lagrangeana, logo devemos ter tantos parâmetros quanto termos na lagrangeana. No caso da EDQ essas quantidades seriam as massas do elétron e do fóton, a carga do elétron (que é a constante de acoplamento entre campos), a normalização dos campos e o parâmetro de fixação de *gauge*. Nenhum termo associado à massa do fóton aparece na lagrangeana por ela ser nula.

O significado destes parâmetros é alterado a cada ordem perturbativa. Isso é uma propriedade geral de cálculos perturbativos. Assim, conforme calculamos contribuições de ordem mais elevada no parâmetro perturbativo, torna-se necessária uma redefinição dos parâmetros encontrados na ordem anterior. Esses parâmetros modificados (renormalizados) são identificados como observáveis físicos e são chamados de parâmetros vestidos (KAKU, 1993). Eles são necessários para que a teoria tenha poder de predição.

Podemos observar um reflexo disso nas expressões que obtivemos para as amplitudes físicas. Apesar de terem suas simetrias conservadas e serem livres de

ambiguidades, essas amplitudes ainda são divergentes. Os objetos divergentes re-  
 dutíveis foram eliminados através da implementação das relações de consistência,  
 porém, ainda, nos restam o objeto irreduzível  $I_{lin}$ . Por meio da renormalização,  
 essas divergências são absorvidas pelos parâmetros nus. Com isso, após um nú-  
 mero finito de reparametrizações, é possível tornar a teoria finita a qualquer ordem  
 da expansão perturbativa.

Vamos começar observando a lagrangeana nua

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_0 = & \bar{\psi}^0 (i\gamma^\mu \partial_\mu - m_0) \psi^0 - \frac{1}{4} (\partial_\mu A_\nu^0 - \partial_\nu A_\mu^0)^2 \\ & + \bar{\psi}^0 i\gamma^\mu (ie_0 A_\mu^0) \psi^0 - \frac{1}{2\xi_0} (\partial^\mu A_\mu^0)^2. \end{aligned} \quad (6.1)$$

Como os parâmetros dessa lagrangeana são arbitrários podemos redefini-los como

$$m_0 = \frac{Z_m}{Z_\psi} m, \quad (6.2)$$

$$e_0 = \frac{Z_e}{Z_\psi \sqrt{Z_A}} e, \quad (6.3)$$

$$\xi_0 = \frac{Z_A}{Z_\xi} \xi, \quad (6.4)$$

$$\psi_0 = \sqrt{Z_\psi} \psi, \quad (6.5)$$

$$A_\mu^0 = \sqrt{Z_A} A_\mu. \quad (6.6)$$

As quantidades com índice "0" são estão associadas aos parâmetros nus e as sem  
 índice aos parâmetros renormalizados. Os infinitos da teoria serão absorvidos pe-  
 las constantes de renormalização  $Z$ 's.

Usando esses fatores reescrevemos a lagrangeana como

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_0 = & \bar{\psi} (Z_\psi i\gamma^\mu \partial_\mu - Z_m m) \psi - \frac{1}{4} Z_A (\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu)^2 \\ & + \bar{\psi} i\gamma^\mu (iZ_e e A_\mu) \psi - \frac{Z_\xi}{2\xi} (\partial^\mu A_\mu)^2, \end{aligned} \quad (6.7)$$

ou ainda

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_0 &= \bar{\psi}(x) (i\gamma^\mu \partial_\mu - m) \psi(x) - \frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} \\
&+ \bar{\psi}(x) i\gamma^\mu (ieA_\mu) \psi(x) - \frac{1}{2\xi} (\partial_\mu A^\mu)^2 \\
&+ i(Z_\psi - 1) \bar{\psi} \gamma^\mu \partial_\mu \psi - m(Z_m - 1) \bar{\psi} \psi - \frac{1}{4} (Z_A - 1) F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} \\
&- e(Z_e - 1) \bar{\psi} \gamma^\mu A_\mu \psi - \frac{Z_\xi - 1}{2\xi} (\partial^\mu A_\mu)^2. \tag{6.8}
\end{aligned}$$

Com isso a lagrangeana é escrita em termos de uma parte física

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_{fis} &= \bar{\psi}(x) (i\gamma^\mu \partial_\mu - m) \psi(x) - \frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} \\
&+ \bar{\psi}(x) i\gamma^\mu (ieA_\mu) \psi(x) - \frac{1}{2\xi} (\partial_\mu A^\mu)^2 \tag{6.9}
\end{aligned}$$

e de uma parte divergente

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_{con} &= i(Z_\psi - 1) \bar{\psi} \gamma^\mu \partial_\mu \psi - m(Z_m - 1) \bar{\psi} \psi - \frac{1}{4} (Z_A - 1) F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} \\
&- e(Z_e - 1) \bar{\psi} \gamma^\mu A_\mu \psi - \frac{Z_\xi - 1}{2\xi} (\partial^\mu A_\mu)^2, \tag{6.10}
\end{aligned}$$

chamada de lagrangeana dos contratermos. Esses contratermos são inseridos para que as amplitudes físicas calculadas, partindo de  $\mathcal{L}_0$ , sejam finitas. É necessário determinar esses contratermos por meio das expressões obtidas para as amplitudes físicas.

Por simplicidade, vamos utilizar o gauge de Feynman  $\xi = 1$ . Podemos fazer isso sem qualquer problema uma vez que o *gauge* é um parâmetro arbitrário e não traz nenhuma consequência dinâmica à teoria. As discussões que queremos fazer não serão prejudicadas de nenhum modo por essa escolha.

Vamos começar observando o tensor de polarização. Usando (2.25) e (5.3) escrevemos

$$\begin{aligned}
\Pi_{\mu\nu}^{\gamma\gamma}(q_2) &= e^2 (g_{\mu\nu} q_2^2 - q_{2\mu} q_{2\nu}) \frac{4}{3} I_{lin}^{(5)}(m^2) \\
&+ e^2 (g_{\mu\nu} q_2^2 - q_{2\mu} q_{2\nu}) \frac{i}{4\pi^2} 2Z_2^{1/2} (q_2^2, m^2; m^2) \\
&- e^2 (g_{\mu\nu} q_2^2 - q_{2\mu} q_{2\nu}) \frac{i}{4\pi^2} Z_0^{1/2} (q_2^2, m^2; m^2). \tag{6.11}
\end{aligned}$$

Nessa equação,  $I_{lin}^{(5)}(m^2)$  deve ser considerado uma representação para a versão regularizada. O formato desse termo é estabelecido pela regularização utilizada. Usando isso vamos renormalizar o propagador do fóton ao nível 1-loop de aproximação.

Na figura 6.1 apresentamos novamente os diagramas associados a série perturbativa do fóton. Agora estamos dando ênfase a correção de primeira ordem (representada pelos círculos cinzas), cujos três primeiros termos estão apresentados do lado direito.

$$\begin{aligned} \text{wavy line with black circle} &= \text{wavy line} + \text{wavy line with grey circle} + \\ &+ \text{wavy line with two grey circles} + \\ &+ \text{wavy line with three grey circles} + \dots \end{aligned}$$

Figura 4 – Representação diagramática para a propagação do fóton.

Usando o propagador do fóton livre

$$iD_{\mu\nu}(k) = -\frac{i}{q_2^2} g_{\mu\nu}, \quad (6.12)$$

podemos escrever a correção de primeira ordem

$$\begin{aligned} iD_{\mu\nu}^{REN}(q_2) &= iD_{\mu\nu}(q_2) + iD_{\mu\alpha}(q_2) \left[ -i\Pi^{\alpha\beta}(q_2^2, m^2) \right] iD_{\beta\nu}(q_2) \\ &+ iD_{\mu\alpha}(q_2) [\dots] iD_{\eta\nu}(q_2) + \dots \end{aligned} \quad (6.13)$$

Ao escrevermos o tensor de polarização no vácuo como

$$\Pi_{\mu\nu} = (q_{2\mu}q_{2\nu} - q_2^2 g_{\mu\nu}) \Pi(q_2^2), \quad (6.14)$$

em que

$$\begin{aligned} \Pi(q_2^2) &= -\frac{4e^2}{3} I_{lin}^{(5)}(m^2) \\ &- \frac{i}{4\pi^2} e^2 \left[ 2Z_2^{1/2}(q_2^2, m^2; m^2) - Z_0^{1/2}(q_2^2, m^2; m^2) \right], \end{aligned} \quad (6.15)$$

podemos escrever

$$iD_{\mu\nu}^{REN}(q_2) = -\frac{i}{q_2^2} g_{\mu\nu} (1 - \Pi + \Pi^2 + \dots), \quad (6.16)$$

onde contraímos os índices. Somando a série podemos escrever

$$iD_{\mu\nu}^{REN}(q_2) = -\frac{i}{q_2^2} g_{\mu\nu} \frac{1}{1 + \Pi}. \quad (6.17)$$

Agora, considerando a forma explicita de  $\Pi(q_2^2)$  podemos seguir com a renormalização. O tensor de polarização renormalizado pode ser escrito como

$$[\Pi_{\mu\nu}]_{REN} = (q_{2\mu}q_{2\nu} - g_{\mu\nu}q_2^2) [\Pi_{REN}] \quad (6.18)$$

onde

$$[\Pi_{REN}] = \delta_A - \frac{4e^2}{3} I_{lin}^{(5)}(m^2) - \frac{i}{4\pi^2} e^2 \left[ 2Z_2^{1/2}(q_2^2, m^2; m^2) - Z_0^{1/2}(q_2^2, m^2; m^2) \right], \quad (6.19)$$

deve ser finita e deve satisfazer a condição de renormalização

$$[\Pi_{REN}^{\gamma\gamma}]_{q_2^2 \rightarrow 0} = 0 \quad (6.20)$$

que é exatamente o limite de baixas energias.

Usando os resultados

$$Z_2^{1/2}(q_2^2 \rightarrow 0, m^2; m^2) = 0 \quad (6.21)$$

e

$$Z_0^{1/2}(q_2^2 \rightarrow 0, m^2; m^2) = 0, \quad (6.22)$$

encontramos

$$\delta_A = \frac{4e^2}{3} \left\{ I_{lin}^{(5)}(m^2) \right\}. \quad (6.23)$$

Desse modo o tensor de polarização renormalizado é dado por

$$[\Pi_{REN}^{\gamma\gamma}] = -\frac{ie^2}{4\pi^2} \left\{ 2Z_2^{1/2}(q_2^2, m^2; m^2) - Z_0^{1/2}(q_2^2, m^2; m^2) \right\}. \quad (6.24)$$

Isso é obtido diretamente quando adicionamos os contratermos à lagrangeana nua.

Para tal precisamos da constante de renormalização

$$Z_A = 1 + \frac{4e^2}{3} I_{lin}^{(5)}(m^2). \quad (6.25)$$

Em nenhum momento é necessário calcular explicitamente a integral divergente, uma vez que o objeto divergente inteiro é absorvido na renormalização.

Note também que devemos ter

$$Z_\xi = Z_A = 1 + \frac{4e^2}{3} I_{lin}^{(5)}(m^2). \quad (6.26)$$

Seja a autoenergia do elétron no *gauge* de Feynman

$$\begin{aligned} \Sigma^{1\gamma}(q_2) &= -e^2 \left( 5m - \frac{3}{2} \not{q}_2 \right) I_{lin}^{(5)}(m^2) \\ &+ e^2 \frac{i}{16\pi^2} \left( 5m - 3\not{q}_2 \right) \lim_{m_1^2 \rightarrow 0} Z_0^{1/2}(q_2^2, m_1^2, m^2; m^2) \\ &+ e^2 \frac{i}{16\pi^2} 3\not{q}_2 \lim_{m_1^2 \rightarrow 0} Z_1^{1/2}(q_2^2, m_1^2, m^2; m^2), \end{aligned} \quad (6.27)$$

então queremos renormalizar o propagador do elétron ao nível 1-*loop*.

Vamos observar agora o propagador do elétron livre

$$iS_f(q_2) = \frac{i}{\not{q}_2 - m}. \quad (6.28)$$

A massa pode ser escrita em termos do polo do propagador

$$m \equiv [S_f(q_2)]^{-1} \Big|_{\not{q}_2=0} \quad (6.29)$$

e o resíduo pode ser associado à normalização do campo

$$\frac{\partial}{\partial \not{q}_2} [S_f(q_2)]^{-1} \Big|_{\not{q}_2=0} = 1. \quad (6.30)$$

Seja a autoenergia do elétron  $\Sigma(q_2)$ , então escrevemos para a primeira correção

$$\begin{aligned} iS_R(q_2) &= iS_f(q_2) + iS_f(q_2) [-i\Sigma(q_2)] iS_f(q_2) \\ &+ iS_f(q_2) [-i\Sigma(q_2)] iS_f(q_2) [-i\Sigma(q_2)] iS_f(q_2). \end{aligned} \quad (6.31)$$

Na figura 6.2 apresentamos, novamente, os diagramas associados a série perturbativa do elétron. Agora estamos dando ênfase à correção de primeira ordem (representada pelo círculo cinza), cujos três primeiros termos estão apresentados do lado direito. A equação anterior apresenta a soma desses termos.

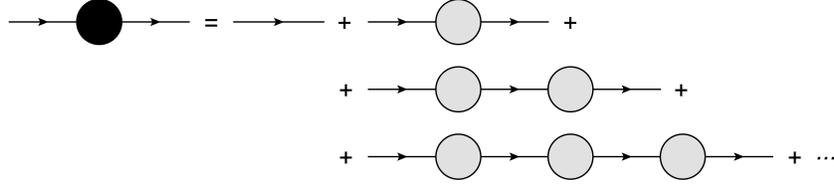


Figura 5 – Representação diagramática para a propagação do elétron.

Colocando o primeiro propagador em evidência temos

$$iS_R(q_2) = iS_f(q_2) \left\{ 1 - [i\Sigma(q_2) iS_f(q_2)] + [i\Sigma(q_2) iS_f(q_2)]^2 + \dots \right\}. \quad (6.32)$$

Podemos somar a série

$$iS_R(q_2) = \frac{iS_f(q_2)}{1 + [i\Sigma(q_2) iS_f(q_2)]} \quad (6.33)$$

e multiplicar o numerador e o denominador por  $S_f^{-1}(q_2)$

$$iS_R(q_2) = \frac{i}{S_f^{-1}(q_2) - \Sigma(q_2)}. \quad (6.34)$$

Substituindo o propagador explicitamente temos

$$iS_R(q_2) = \frac{i}{\not{q}_2 - m - \Sigma(q_2)}. \quad (6.35)$$

Observe que o polo mudou de posição e, portanto devemos redefinir a massa do elétron. Isso fica mais fácil de visualizar se considerarmos a série de Taylor em torno de  $\not{q}_2 = 0$

$$\Sigma(q_2) = \Sigma(0) + \not{q}_2 \Sigma'(0) + \tilde{\Sigma}(\not{q}_2), \quad (6.36)$$

onde  $\tilde{\Sigma}(\not{q}_2)$  são os termos de segunda ordem em  $\not{q}_2$  ou maiores. Com isso temos

$$iS_R(q_2) = \frac{i}{\not{q}_2 - m - \Sigma(0) - \not{q}_2 \Sigma'(0) - \tilde{\Sigma}(\not{q}_2)} \quad (6.37)$$

ou ainda

$$iS_R(q_2) = \frac{i}{\not{q}_2 [1 - \Sigma'(0)] - [m + \Sigma(0)] - \tilde{\Sigma}(\not{q}_2)}. \quad (6.38)$$

O termo multiplicado por  $\not{q}_2$  deve ser associado à normalização do campo, uma vez que é ele que resta quando calculamos o resíduo

$$Z_\psi = [1 - \Sigma'(0)]^{-1}. \quad (6.39)$$

Com isso escrevemos

$$iS_R(q_2) = \frac{iZ_\psi}{\not{q}_2 - Z_\psi [m + \Sigma(0)] - Z_\psi \tilde{\Sigma}(\not{q}_2)}. \quad (6.40)$$

O polo por sua vez nos dá a massa física

$$M = Z_\psi [m + \Sigma(0)]. \quad (6.41)$$

Pela definição das constantes de renormalização temos que

$$\frac{Z_\psi}{Z_m} m = M \quad (6.42)$$

e, portanto

$$\frac{m}{Z_m} = [m + \Sigma(0)]. \quad (6.43)$$

Seja a autoenergia do elétron quando  $\not{q}_2 = 0$

$$\Sigma^{1\gamma}(0) = -5me^2 \left[ I_{lin}^{(5)}(m^2) - \frac{i}{16\pi^2} Z_0^{1/2}(0, 0, m^2; m^2) \right], \quad (6.44)$$

em que avaliamos a função finita no ponto em que  $q_2^2 = m_1^2 = 0$ , então

$$Z_m^{-1} = 1 - 5e^2 \left[ I_{lin}^{(5)}(m^2) - \frac{i}{16\pi^2} Z_0^{1/2}(0, 0, m^2; m^2) \right]$$

De maneira análoga, calculando a derivada com  $\not{q}_2 = 0$

$$\begin{aligned} \left. \frac{\partial \Sigma^{1\gamma}(q_2)}{\partial \not{q}_2} \right|_{\not{q}_2=0} &= \frac{3}{2} e^2 I_{lin}^{(5)}(m^2) + \frac{3ie^2}{16\pi^2} Z_1^{1/2}(0, 0, m^2; m^2) \\ &\quad - \frac{3ie^2}{16\pi^2} Z_0^{1/2}(0, 0, m^2; m^2), \end{aligned} \quad (6.45)$$

obtemos o inverso da constante de renormalização

$$Z_\psi^{-1} = 1 - \frac{3}{2}e^2 I_{lin}^{(5)}(m^2) - \frac{3ie^2}{16\pi^2} \left[ Z_1^{1/2}(0, 0, m^2; m^2) - Z_0^{1/2}(0, 0, m^2; m^2) \right]. \quad (6.46)$$

Para obtermos a última constante de renormalização devemos observar o vértice da teoria, que é dado por

$$\Gamma^\mu(k_1, k_2, k_3) = -ie\gamma^\mu - ie(Z_e - 1)\gamma^\mu + \Lambda^\mu(q_2, q_3), \quad (6.47)$$

em que o primeiro termo depois da igualdade é o vértice nu, o segundo é o vértice que vem dos contratermos e o último compreende as correções para o vértice, no caso consideramos apenas a correção de primeira ordem. Impondo a condição de normalização em  $k_1 = k_2 = k_3 = 0$ , temos que

$$\Gamma^\mu(0, 0, 0) = -ie\gamma^\mu \quad (6.48)$$

e, portanto

$$ie(Z_e - 1)\gamma^\mu = \Lambda^\mu(0, 0). \quad (6.49)$$

Seja a correção de primeira ordem para o vértice, no *gauge* de Feynman, dada

por

$$\begin{aligned}
\Lambda^\mu(q_2, q_3) &= \frac{3}{2}\gamma^\mu I_{lin}^{(5)}(\lambda^2) \\
&\quad - \frac{i}{32\pi^2} 6\gamma^\mu Z_0^{1/2} \left( (q_3 - q_2)^2, m^2, m^2; \lambda^2 \right) \\
&\quad + \frac{i}{32\pi^2} 6\gamma^\mu \lim_{m_1^2 \rightarrow 0} \xi_{00}^{1/2} \\
&\quad - \frac{i}{32\pi^2} 6q_3^\mu \not{q}_3 \lim_{m_1^2 \rightarrow 0} \xi_{02}^{-1/2} \\
&\quad - \frac{i}{32\pi^2} 6q_2^\mu \not{q}_2 \lim_{m_1^2 \rightarrow 0} \xi_{20}^{-1/2} \\
&\quad - \frac{i}{32\pi^2} 6 \left( q_2^\mu \not{q}_3 + q_3^\mu \not{q}_2 \right) \lim_{m_1^2 \rightarrow 0} \xi_{11}^{-1/2} \\
&\quad + \frac{i}{32\pi^2} \left[ \not{q}_2 \gamma^\mu \not{q}_3 + 2\not{q}_3 \gamma^\mu \not{q}_2 \right. \\
&\quad \quad \left. + 3\not{q}_2 \gamma^\mu \not{q}_2 - 10mq_2^\mu \right] \lim_{m_1^2 \rightarrow 0} \xi_{10}^{-1/2} \\
&\quad + \frac{i}{32\pi^2} \left[ \not{q}_2 \gamma^\mu \not{q}_3 + 2\not{q}_3 \gamma^\mu \not{q}_2 \right. \\
&\quad \quad \left. + 3\not{q}_3 \gamma^\mu \not{q}_3 - 10mq_3^\mu \right] \lim_{m_1^2 \rightarrow 0} \xi_{01}^{-1/2} \\
&\quad - \frac{i}{32\pi^2} \left[ 2\not{q}_3 \gamma^\mu \not{q}_2 + 2m^2 \gamma^\mu + (\not{q}_2 - m) \gamma^\mu (\not{q}_3 - m) \right. \\
&\quad \quad \left. - 4m(q_2 + q_3)^\mu \right] \lim_{m_1^2 \rightarrow 0} \xi_{00}^{-1/2}, \tag{6.50}
\end{aligned}$$

então temos que

$$\begin{aligned}
\Lambda^\mu(0, 0) &= -\frac{3}{2}e^3 \gamma^\mu I_{lin}^{(5)}(m^2) \\
&\quad - 3e^3 \gamma^\mu \frac{i}{16\pi^2} \xi_{00}^{1/2}(0, 0, m^2; 0, 0, m^2; m^2) \\
&\quad + \frac{3}{2}m^2 e^3 \gamma^\mu \frac{i}{16\pi^2} \xi_{00}^{-1/2}(0, 0, m^2; 0, 0, m^2) \tag{6.51}
\end{aligned}$$

e, portanto

$$\begin{aligned}
Z_e &= 1 + \frac{3}{2}ie^2 I_{lin}^{(5)}(m^2) \\
&\quad + 3ie^2 \xi_{00}^{1/2}(0, 0, m^2; 0, 0, m^2; m^2) \\
&\quad - \frac{3}{2}ie^2 m^2 \xi_{00}^{-1/2}(0, 0, m^2; 0, 0, m^2). \tag{6.52}
\end{aligned}$$

Com isso obtemos as mesmas amplitudes físicas divergentes que obtivemos até agora. Entretanto, ao usarmos a lagrangeana com esses contra termos especificados, surgem novos propagadores e vértices. É a soma dessas quantidades que elimina os infinitos. Nas figuras 6.3, 6.4 e 6.5 temos as representações diagramáticas para as séries perturbativas para os processos físicos com adição dos contra termos. Os diagramas estão organizados de modo que, na segunda linha, seja apresentada a correção de primeira ordem e o contra termo que cancela a sua divergência.

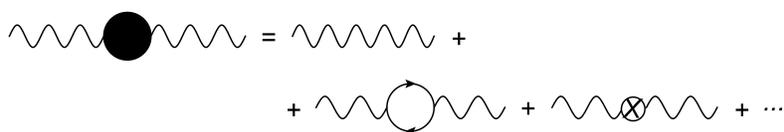


Figura 6 – Representação diagramática para a propagação do fóton.

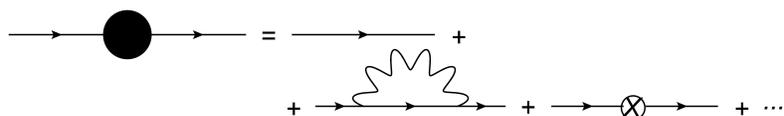


Figura 7 – Representação diagramática para a propagação do elétron.

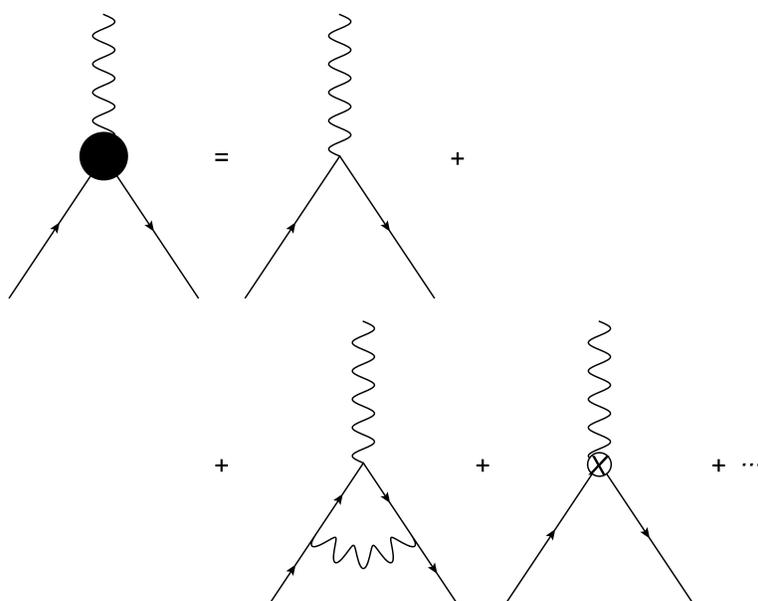


Figura 8 – Representação diagramática para o vértice.

É importante observar que não foi, em nenhum momento, necessário explicitar o formato das integrais divergentes através de algum método de regularização. Isso ocorre porque o objeto divergente inteiro é absorvido quando fazemos a renormalização da teoria.

## 7 CONCLUSÕES

As equações que descrevem a dinâmica das partículas em uma TQC, na maioria dos casos, são não lineares e acopladas. Isso torna necessário o uso de métodos perturbativos para solucionarmos este tipo de problema. Os resultados obtidos são contaminados com divergências que aparecem nas integrais de Feynman. Para que possamos fazer previsões, devemos interpretar adequadamente as amplitudes, de modo que seja possível contornar os problemas gerados pelos infinitos. Nesse ponto somos levados a usar regularizações. O método mais utilizado para isso é a regularização dimensional. Neste método a teoria é estendida para uma dimensão contínua e complexa, então os cálculos são efetuados e os resultados são expandidos em torno da dimensão espaço-temporal de interesse. As limitações desse método estão associadas a impossibilidade de estendermos o tensor de Levi-Civita para uma dimensão contínua e complexa. Isso impossibilita o uso deste método para investigações em dimensões ímpares. Outros métodos de regularização consistem em modificar as integrais de Feynman de modo que estas fiquem finitas e então efetuar os cálculos. Com este fim é necessário colocarmos uma função regularizadora dentro das integrais, entretanto os resultados dependeriam da função escolhida. Não há um método de regularização que possa ser aplicado sem restrições e que seja consistente.

Nessa investigação adotamos um procedimento consistente e sem restrições de aplicabilidade, o chamado Cálculo Perturbativo Preditivo. Resolvemos alguns problemas simples mas cruciais para a EDQ<sub>5</sub>, que são as correções de primeira ordem para os propagadores e vértice. Com o auxílio de uma identidade para o propagador separamos completamente as partes finitas e divergentes das funções de Green, de modo que não apareceu nenhuma quantidade física associada a termos divergentes. Como se trata do emprego direto de uma identidade, esse método pode ser aplicado em qualquer situação. A identidade separa as integrais de acordo com o grau de divergência e para isso se vale apenas do fato de que a operação de integração é linear. Inconsistências nos resultados implicariam em violações da linearidade.

As divergências foram organizadas em dois tipos de objetos: os redutíveis, que

foram identificados posteriormente como termos de superfície, e os irreduzíveis. A parte finita foi projetada em termos de algumas funções padronizadas. Todos os passos efetuados são consequências diretas do emprego das regras de Feynman. O uso de regularizações foi evitado durante todo o procedimento. No final vemos que os métodos de regularização podem ser classificados em dois tipos: aqueles em que os termos de superfície se anulam e aqueles em que isso não acontece. Se assumirmos que apenas a primeira classe faz sentido, então as amplitudes se tornam preditivas uma vez que não há dependência das escolhas feitas em passo intermediários. Restam apenas objetos divergentes irreduzíveis que podem ser absorvidos por meio da renormalização sem ser necessária a especificação de um método de regularização.

Os resultados obtidos na presente investigação são completamente livres de ambiguidades e satisfazem todas as propriedades esperadas. Com isso, foi possível renormalizar a QED pentadimensional ao nível *1-loop*. Para tal foi necessário calcular o tensor de polarização do vácuo, a autoenergia do elétron e a correção de vértice, que são amplitudes divergentes. Não foi encontrado nenhum problema adicional em efetuar os cálculos pelo fato de que a teoria foi definida em uma dimensão ímpar. Na verdade os resultados obtidos são completamente análogos àqueles obtidos na dimensão física, exceto pelo decaimento fotônico do fóton, que pode ser calculado em uma continuação desta investigação. Nesse último caso esperamos a presença de um termo dependente do tensor de Levi-Civita na amplitude, o que não aparece no caso quadridimensional. Além disso, a lagrangeana mais geral para a  $QED_5$  permitiria a presença de um termo dependente do tensor de Levi-Civita.

## REFERÊNCIAS

- AQUINO, P. M. de. **Física além do modelo padrão em teorias com dimensões extras**. 2007. 144 p. Dissertação (Mestrado em Física) - Universidade de São Paulo, São Paulo, 2007.
- BATTISTEL, O. A. **Uma nova estratégia para manipulações e cálculos envolvendo divergências em TCQ**. 1999. 491 p. Tese (Doutorado em Física) - Universidade Federal de Minas Gerais, Belo Horizonte, 1999.
- BATTISTEL, O. A.; DALLABONA, G. Scale ambiguities in perturbative calculations and the value for the radiatively induced Chern-Simons term in extended QED. **Physics Review D**, New York, v. 72, n. 4, p. 45009-45024, Aug. 2005.
- BATTISTEL, O. A.; DALLABONA, G. A systematization for one-loop 4D Feynman integrals. **The European Physical Journal C**, Les Ulis, v. 45, n. 3, p. 721-743, Mar. 2006.
- BATTISTEL, O. A.; DALLABONA, G. A systematization for one-loop 4D Feynman integrals-different species of massive fields. **Journal of Modern Physics**, Singapore, v. 3, n. 10, p. 1408-1449, Oct. 2012.
- BATTISTEL, O. A.; NEMES, M. C. Consistency in regularizations of the gauged NJL model at one loop level. **Physical Review D**, New York, v. 59, n. 5, p. 55010-55031, 1999.
- DE WIT, B.; SMITH, J. **Field theory in particle physics**. Amsterdam: Elsevier, 2012. v. 1, 503 p.
- FONSECA, M. V. et al. Ambiguities and symmetry relations in five-dimensional perturbative calculations: the explicit evaluation of the QED5 vacuum polarization tensor. **International Journal of Modern Physics A**, Singapore, v. 28, n. 27, Oct. 2013. Disponível em: <<http://www.worldscientific.com/doi/pdf/10.1142/S0217751X13501352>>. Acesso em: 10 maio 2015.
- GAMBIN, E.; DALLABONA, G.; BATTISTEL, O. A. Regularizations a unique prescription for all situations. **Brazilian Journal Physics**, São Paulo, v. 37, n. 4, p. 1191-1205, Dec. 2007.
- GOMES, M. O. A. C. **Teoria quântica dos campos**. São Paulo: EdUSP, 2002. v. 1, 458 p.
- KAKU, M. **Quantum field theory**. Oxford: Oxford University Press, 1993. v. 1, 779 p.
- MANDL, F.; SHAW, G. **Quantum field theory**. New Jersey: J. Wiley, 2010. v. 1, 492 p.
- PAULI, W.; VILLARS, F. On invariant regularization in relativistic quantum field theory. **Review Modern Physics**, New York, v. 21, n. 3, p. 434-444, July 1949.
- WEINBERG, S. **The quantum theory of fields**. New York: Cambridge University, 1996. v. 2, 489 p.

## A ÁLGEBRA DAS MATRIZES DE DIRAC

Na descrição da dinâmica de elétrons e pósitrons somos levados a equação de Dirac e, portanto é necessário conhecermos algumas propriedades das matrizes de Dirac. Uma visão geral sobre a álgebra dessas matrizes é apresentada por De Wit e Smith (1986). No caso pentadimensional, temos cinco matrizes, que correspondem às quatro matrizes de Dirac mais a matriz quiral do caso quadridimensional. Não é possível encontrar nenhuma matriz que anticomute com essas cinco matrizes (uma matriz quiral) e, por isso, não é possível definir uma transformação quiral. Nessa dimensão, esse conjunto de matrizes satisfaz a relação de anticomutação

$$\{\gamma_\mu, \gamma_\nu\} = \gamma_\mu \gamma_\nu + \gamma_\nu \gamma_\mu = 2g_{\mu\nu} I \quad (\text{A.1})$$

e a relação de comutação

$$[\gamma_\mu, \gamma_\nu] = a \varepsilon_{\mu\nu\alpha\beta\sigma} \gamma^\alpha \gamma^\beta \gamma^\sigma, \quad (\text{A.2})$$

onde  $I$  é a matriz identidade  $4 \times 4$ ,  $\varepsilon_{\mu\nu\alpha\beta\sigma}$  é o tensor de Levi-Civita,  $g_{\mu\nu}$  é a métrica pentadimensional e  $a$  é uma constante que deve aparecer no comutador. Em geral vamos omitir a matriz identidade das contas.

O tensor de Levi-Civita é um tensor totalmente antissimétrico que vale  $+1$  para permutações pares dos índices 12345,  $-1$  para permutações ímpares e é nulo quando temos índices repetidos. O tensor métrico é dado por

$$g^{\mu\nu} = g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}. \quad (\text{A.3})$$

e tem como característica a capacidade de abaixar ou levantar índices quando eles estão repetidos. Com isso temos as relações entre as matrizes

$$\gamma_\mu = g_{\mu\nu} \gamma^\nu, \quad (\text{A.4})$$

$$\gamma^\mu = g^{\mu\nu} \gamma_\nu. \quad (\text{A.5})$$

Estamos utilizando a notação de Einstein em que a presença de dois índices iguais é associada a uma soma sobre todos os valores desses índices. Eles são chamados de índices mudos e podem ser trocados conforme for mais conveniente. É interessante identificar a seguinte contração

$$g_{\mu\alpha}g^{\alpha\nu} \equiv \delta_{\mu}^{\nu}, \quad (\text{A.6})$$

onde  $\delta_{\mu}^{\nu}$  é o  $\delta$  de Kronecker, que possui todos os elementos da diagonal iguais a unidade e todos os outros nulos. Sabendo disso, temos a propriedade

$$\gamma_{\mu}\gamma^{\mu} = 5. \quad (\text{A.7})$$

A contração das matrizes de Dirac com pentavetores é representada por

$$\not{k} = k_{\alpha}\gamma^{\alpha}. \quad (\text{A.8})$$

Vamos estabelecer algumas identidades envolvendo esse tipo de contração.

Primeiro, temos a soma

$$\begin{aligned} \gamma_{\mu}\not{p} + \not{p}\gamma_{\mu} &= \gamma_{\mu}\gamma_{\alpha}p^{\alpha} + \gamma_{\alpha}p^{\alpha}\gamma_{\mu} \\ &= (\gamma_{\mu}\gamma_{\alpha} + \gamma_{\alpha}\gamma_{\mu})p^{\alpha} \\ &= 2g_{\mu\alpha}p^{\alpha} \\ &= 2p_{\mu}, \end{aligned} \quad (\text{A.9})$$

onde usamos o anticomutador para contrair as matrizes  $\gamma$ . Multiplicando essa expressão por  $k^{\mu}$  obtemos

$$\not{k}\not{p} + \not{p}\not{k} = 2k \cdot p. \quad (\text{A.10})$$

Temos a contração

$$\begin{aligned} \gamma_{\mu}\not{k}\gamma^{\mu} &= \gamma_{\mu}(2k^{\mu} - \gamma^{\mu}\not{k}) \\ &= 2\not{k} - \gamma_{\mu}\gamma^{\mu}\not{k} \\ &= -3\not{k}, \end{aligned} \quad (\text{A.11})$$

onde usamos (A.9) para trocar a matriz  $\gamma$  de posição e utilizamos a identidade (A.7). De maneira análoga podemos escrever

$$\begin{aligned}
 \gamma^\mu \not{k} \not{p} \gamma_\mu &= \gamma^\mu \not{k} (2p_\mu - \gamma_\mu \not{p}) \\
 &= 2\not{p} \not{k} - \gamma^\mu (2k_\mu - \gamma_\mu \not{k}) \not{p} \\
 &= 2\not{p} \not{k} - 2\not{k} \not{p} + 5\not{k} \not{p} \\
 &= 4k \cdot p + \not{k} \not{p},
 \end{aligned} \tag{A.12}$$

onde permutamos a matriz  $\gamma$  até ser possível contrair todos os índices e usamos a identidade (A.10). Ainda podemos fazer três permutações obtendo

$$\begin{aligned}
 \gamma^\mu \not{k} \not{p} \not{q} \gamma_\mu &= \gamma^\mu \not{k} \not{p} (2q_\mu - \gamma_\mu \not{q}) \\
 &= 2\not{q} \not{k} \not{p} - \gamma^\mu \not{k} (2p_\mu - \gamma_\mu \not{p}) \not{q} \\
 &= 2\not{q} \not{k} \not{p} - 2\not{p} \not{k} \not{q} + \gamma^\mu (2k_\mu - \gamma_\mu \not{k}) \not{p} \not{q} \\
 &= 2\not{q} \not{k} \not{p} - 2\not{p} \not{k} \not{q} + 2\not{k} \not{p} \not{q} - 5\not{k} \not{p} \not{q} \\
 &= -2\not{q} \not{p} \not{k} - \not{k} \not{p} \not{q}.
 \end{aligned} \tag{A.13}$$

Para efetuar o cálculo das amplitudes físicas também é útil conhecermos alguns traços, como o da matriz identidade

$$Tr(I) = 4, \tag{A.14}$$

e o de uma matriz de Dirac

$$Tr(\gamma_\mu) = 0. \tag{A.15}$$

Reescrevendo o anticomutador como

$$\gamma_\mu \gamma_\nu = 2g_{\mu\nu} - \gamma_\nu \gamma_\mu, \tag{A.16}$$

aplicando o traço e usando o fato de ele ser uma operação ciclica temos

$$Tr(\gamma_\mu \gamma_\nu) = 2g_{\mu\nu} Tr(I) - Tr(\gamma_\mu \gamma_\nu), \tag{A.17}$$

portanto

$$Tr(\gamma_\mu \gamma_\nu) = 4g_{\mu\nu}. \tag{A.18}$$

Analogamente podemos usar três vezes o anticomutador para encontrar o produto de quatro matrizes de Dirac

$$\begin{aligned}
\gamma_\mu \gamma_\nu \gamma_\alpha \gamma_\beta &= \gamma_\mu \gamma_\nu (2g_{\alpha\beta} - \gamma_\beta \gamma_\alpha) \\
&= 2g_{\alpha\beta} \gamma_\mu \gamma_\nu - \gamma_\mu (2g_{\nu\beta} - \gamma_\beta \gamma_\nu) \gamma_\alpha \\
&= 2g_{\alpha\beta} \gamma_\mu \gamma_\nu - 2g_{\nu\beta} \gamma_\mu \gamma_\alpha + (2g_{\mu\beta} - \gamma_\beta \gamma_\mu) \gamma_\nu \gamma_\alpha \\
&= 2g_{\alpha\beta} \gamma_\mu \gamma_\nu - 2g_{\nu\beta} \gamma_\mu \gamma_\alpha + 2g_{\mu\beta} \gamma_\nu \gamma_\alpha - \gamma_\beta \gamma_\mu \gamma_\nu \gamma_\alpha. \quad (\text{A.19})
\end{aligned}$$

Aplicando o traço e usando sua ciclicidade

$$Tr(\gamma_\mu \gamma_\nu \gamma_\alpha \gamma_\beta) = g_{\alpha\beta} Tr(\gamma_\mu \gamma_\nu) - g_{\nu\beta} Tr(\gamma_\mu \gamma_\alpha) + g_{\mu\beta} Tr(\gamma_\nu \gamma_\alpha) \quad (\text{A.20})$$

$$Tr(\gamma_\mu \gamma_\nu \gamma_\alpha \gamma_\beta) = 4(g_{\mu\nu} g_{\alpha\beta} - g_{\mu\alpha} g_{\nu\beta} + g_{\mu\beta} g_{\nu\alpha}), \quad (\text{A.21})$$

em que usamos o traço de duas matrizes. Qualquer outro traço com um número par de matrizes de Dirac pode ser obtido de forma semelhante.

Usando a relação de comutação e a relação de anticomutação podemos escrever o produto

$$\gamma_\mu \gamma_\nu = g_{\mu\nu} + \frac{a}{2} \varepsilon_{\mu\nu\alpha\beta} \gamma^\alpha \gamma^\beta \gamma^\sigma, \quad (\text{A.22})$$

o que nos permite escrever o traço de três matrizes de Dirac como

$$\begin{aligned}
Tr(\gamma_\mu \gamma_\nu \gamma_\alpha) &= a \varepsilon_{\mu\nu\alpha\beta} Tr(\gamma^\alpha \gamma^\beta \gamma^\sigma \gamma_\lambda) \\
&= a \varepsilon_{\mu\nu\alpha\beta} (g^{\alpha\beta} \delta_\lambda^\sigma - g^{\alpha\sigma} \delta_\lambda^\beta + \delta_\lambda^\alpha g^{\beta\sigma}) \\
&= a (g^{\alpha\beta} \varepsilon_{\mu\nu\alpha\beta\lambda} + g^{\alpha\sigma} \varepsilon_{\mu\nu\alpha\lambda\sigma} + g^{\beta\sigma} \varepsilon_{\mu\nu\lambda\beta\sigma}), \quad (\text{A.23})
\end{aligned}$$

onde usamos o resultando de quatro matrizes de Dirac e contraímos os  $\delta$  de Kronecker. Como o tensor métrico é simétrico e o tensor de Levi-Civita é antissimétrico cada um dos produtos acima se anula. Com isso temos

$$Tr(\gamma_\mu \gamma_\nu \gamma_\alpha) = 0. \quad (\text{A.24})$$

O traço de um número ímpar de matrizes de Dirac, com cinco ou mais matrizes, depende do tensor de Levi-Civita. De maneira análoga em uma dimensão ímpar qualquer  $D$ , o traço de  $D$  ou mais matrizes de Dirac depende desse tensor.

## B PARAMETRIZAÇÕES DE FEYNMAN

Ao resolvermos as integrais de Feynman, deparamo-nos com integrais de frações do tipo

$$\frac{1}{(k^2 - \lambda^2)^\alpha D_i}, \quad (\text{B.1})$$

$$\frac{1}{(k^2 - \lambda^2)^\alpha D_{ij}} \quad (\text{B.2})$$

e

$$\frac{1}{(k^2 - \lambda^2)^\alpha D_{ijk}}, \quad (\text{B.3})$$

onde  $\alpha$  é inteiro e  $i, j, k = 1, 2, 3$ . É interessante usar o recurso das parametrizações de Feynman para reescrever esses termos antes de proceder com a integração nos *momenta*.

Podemos escrever a primeira fração para  $\alpha = 1$  com auxílio da parametrização de Feynman

$$\begin{aligned} \int_0^1 dz \frac{1}{[(b-a)z+a]^2} &= \frac{1}{a-b} \int_0^1 dz \frac{\partial}{\partial z} \frac{1}{[(b-a)z+a]} \\ &= \frac{1}{a-b} \left( \frac{1}{b} - \frac{1}{a} \right) \\ &= \frac{1}{ab}. \end{aligned} \quad (\text{B.4})$$

Escolhendo  $a = (k^2 - \lambda^2)$  e  $b = D_i$  podemos escrever

$$\frac{1}{(k^2 - \lambda^2) D_i} = \int_0^1 dz \frac{1}{\left[ (k - k_i z)^2 + k_i^2 z(1-z) + (\lambda^2 - m_i^2) z - \lambda^2 \right]^2}, \quad (\text{B.5})$$

ou ainda

$$\frac{1}{(k^2 - \lambda^2) D_i} = \int_0^1 dz \frac{1}{\left[ k'^2 - H^2(k_i^2, \lambda^2, m_i^2) \right]^2}, \quad (\text{B.6})$$

em que definimos

$$-H^2(k_i^2, \lambda^2, m_i^2) \equiv k_i^2 z(1-z) + (\lambda^2 - m_i^2) z - \lambda^2 \quad (\text{B.7})$$

e deslocamos a variável  $k$  de modo que  $k' = k + k_i z$ . Esse deslocamento da variável deverá ser considerado quando fizermos a integração nos *momenta*. É importante perceber que diferentes escolhas nos parâmetros levam a diferentes formas para os integrandos. Porém estas formas podem ser convertidas uma na outra por meio de uma mudança de variáveis. Para obtermos parametrizações de Feynman com  $\alpha = 2$  podemos derivar ambos os lados da igualdade (B.4) em relação ao parâmetro  $a$ , obtendo

$$\frac{1}{a^2 b} = 2 \int_0^1 dz \frac{(1-z)}{[(b-a)z+a]^3}. \quad (\text{B.8})$$

Aplicando a derivada sucessivamente obtemos as outras relações necessárias do tipo

$$\frac{1}{a^3 b} = 3 \int_0^1 dz \frac{(1-z)^2}{[(b-a)z+a]^4}, \quad (\text{B.9})$$

$$\frac{1}{a^4 b} = 4 \int_0^1 dz \frac{(1-z)^3}{[(b-a)z+a]^5} \quad (\text{B.10})$$

e

$$\frac{1}{a^5 b} = 5 \int_0^1 dz \frac{(1-z)^4}{[(b-a)z+a]^6}. \quad (\text{B.11})$$

Já para o caso da segunda fração usaremos a parametrização

$$\begin{aligned} & 2 \int_0^1 dz \int_0^{1-z} dy \frac{1}{[(b-a)y+(c-a)z+a]^3} \\ &= \frac{1}{a-b} \int_0^1 dz \int_0^{1-z} dy \frac{\partial}{\partial y} \frac{1}{[(b-a)y+(c-a)z+a]^2} \\ &= \frac{1}{a-b} \int_0^1 dz \left[ \frac{1}{[(c-b)z+b]^2} - \frac{1}{[(c-a)z+a]^2} \right] \\ &= \frac{1}{abc}. \end{aligned} \quad (\text{B.12})$$

De maneira semelhante ao caso anterior, quando escolhermos  $a = (k^2 - \lambda^2)$  e  $bc = D_{ij}$ , podemos escrever para o caso em que  $\alpha = 1$

$$\frac{1}{(k^2 - \lambda^2) D_{ij}} = 2 \int_0^1 dz \int_0^{1-z} dy \frac{1}{\left[ k'^2 - H^2 \left( k_i^2, \lambda^2, m_i^2; k_j^2, \lambda^2, m_j^2 \right) \right]^3} \quad (\text{B.13})$$

em que deslocamos a variável  $k$  de modo que  $k'' = k + k_i z + k_j y$  obtendo

$$-H^2(k_i^2, \lambda^2, m_i^2; k_j^2, \lambda^2, m_j^2) = k_i^2 z(1-z) + k_j^2 y(1-y) + 2k_i \cdot k_j yz + (\lambda^2 - m_i^2)z + (\lambda^2 - m_j^2)y - \lambda^2 \quad (\text{B.14})$$

É interessante fazer as seguintes associações

$$\lim_{y \rightarrow 1-z} [-H^2(k_i^2, \lambda^2, m_i^2; k_j^2, \lambda^2, m_j^2)] = -H^2(Q_{ij}^2, m_j^2, m_i^2), \quad (\text{B.15})$$

$$\lim_{y \rightarrow 0} [-H^2(k_i^2, \lambda^2, m_i^2; k_j^2, \lambda^2, m_j^2)] = -H^2(k_i^2, \lambda^2, m_i^2), \quad (\text{B.16})$$

$$\lim_{z \rightarrow 0} [-H^2(k_i^2, \lambda^2, m_i^2; k_j^2, \lambda^2, m_j^2)] = -H^2(k_j^2, \lambda^2, m_j^2), \quad (\text{B.17})$$

em que  $Q_{ij} = k_i + k_j$ . Novamente, podemos obter outras parametrizações derivando em função do parâmetro  $a$

$$\frac{1}{a^2 bc} = 6 \int_0^1 dz \int_0^{1-z} dy \frac{(1-y-z)}{[(b-a)y + (c-a)z + a]^4}, \quad (\text{B.18})$$

$$\frac{1}{a^3 bc} = 12 \int_0^1 dz \int_0^{1-z} dy \frac{(1-y-z)^2}{[(b-a)y + (c-a)z + a]^5} \quad (\text{B.19})$$

e

$$\frac{1}{a^4 bc} = 20 \int_0^1 dz \int_0^{1-z} dy \frac{(1-y-z)^3}{[(b-a)y + (c-a)z + a]^6}. \quad (\text{B.20})$$

Para o último caso podemos usar a seguinte parametrização

$$\begin{aligned} & 6 \int_0^1 dz \int_0^{1-z} dy \int_0^{1-y-z} dx \frac{1}{[(b-a)x + (c-a)y + (d-a)z + a]^4} \\ &= \frac{1}{abcd}. \end{aligned} \quad (\text{B.21})$$

Quando  $a = (k^2 - \lambda^2)$  e  $bcd = D_{ijk}$ , podemos escrever para o caso em que  $\alpha = 1$

$$\frac{1}{(k^2 - \lambda^2) D_{ijk}} = 6 \int_0^1 dz \int_0^{1-z} dy \int_0^{1-y-z} dx \frac{dx}{[k'^2 - H^2]^4}, \quad (\text{B.22})$$

onde deslocamos a variável  $k$  de modo que  $k''' = k + k_i z + k_j y + k_k x$  obtendo a função  $-H^2$ :

$$\begin{aligned}
 & -H^2(k_i^2, \lambda^2, m_i^2; k_j^2, \lambda^2, m_j^2; k_k^2, \lambda^2, m_k^2) \\
 = & k_i^2 z(1-z) + k_j^2 y(1-y) + k_k x(1-x) + \\
 & + 2k_i \cdot k_j z y + 2k_j \cdot k_k y x + 2k_k \cdot k_i x z + \\
 & + (\lambda^2 - m_i^2) z + (\lambda^2 - m_j^2) y + (\lambda^2 - m_k^2) - \lambda^2 \quad (B.23)
 \end{aligned}$$

O limite

$$\begin{aligned}
 & \lim_{x \rightarrow 0} [-H^2(k_i^2, \lambda^2, m_i^2; k_j^2, \lambda^2, m_j^2; k_k^2, \lambda^2, m_k^2)] \\
 = & -H^2(k_i^2, \lambda^2, m_i^2; k_j^2, \lambda^2, m_j^2) \quad (B.24)
 \end{aligned}$$

também é útil neste trabalho, bem como as outras parametrizações

$$\frac{1}{a^2 b c d} = 24 \int_0^1 dz \int_0^{1-z} dy \int_0^{1-y-z} dx \frac{(1-x-y-z)}{[k'^2 - H^2]^5} \quad (B.25)$$

e

$$\frac{1}{a^3 b c d} = 60 \int_0^1 dz \int_0^{1-z} dy \int_0^{1-y-z} dx \frac{(1-x-y-z)^2}{[k'^2 - H^2]^6}. \quad (B.26)$$

Deve-se especificar  $k'$  e  $-H^2$ .

Aqui apresentamos apenas as parametrizações necessárias para o presente trabalho, quaisquer outras parametrizações podem ser construídas de maneira análoga àquela que usamos. Ao usarmos o CPP, para separarmos as partes finitas e divergentes das integrais de Feynman, deparamo-nos, naturalmente, com termos contendo a quantidade  $A_i$ . Após feito o deslocamento na variável  $k$ , podemos associar estes termos com as derivadas das funções  $-H^2$ .

## C INTEGRAIS NOS MOMENTA

Pelo uso das parametrizações de Feynman conseguimos colocar todas as integrais finitas no formato

$$\int \frac{d^5 k}{(2\pi)^5} \frac{1, k_\mu, k_\mu k_\nu, k_\mu k_\nu k_\alpha, \dots}{(k^2 - A^2)^\alpha}, \quad (\text{C.1})$$

em que  $-A^2$  pode ser associado as funções  $-H^2$  ou a própria escala  $-\lambda^2$ . Com isso, nosso objetivo passa ser solucionar as integrais do tipo.

Vamos começar pela integral com a unidade no numerador. A solução dessa integral é dada por

$$\int \frac{d^{2\omega} k}{(2\pi)^{2\omega}} \frac{1}{(k^2 + 2B \cdot k - A^2)^\alpha} = \frac{i}{(4\pi)^\omega} \frac{\Gamma(\alpha - \omega)}{\Gamma(\alpha)} (-B^2 - A^2)^{\alpha - \omega}. \quad (\text{C.2})$$

em que  $B$  deve ser feito igual à zero (para obtermos o formato desejado), a dimensão é fixada  $2\omega = 5$  e o parâmetro  $\alpha$  deve ser especificado. No lado direito  $\Gamma$  é a função de Euler, que é definida apenas para argumentos não-negativos. Essa solução é válida apenas quando  $\alpha > \omega$ , portanto não vale para integrais divergentes.

Derivando ambos os lados de (C.2) em função da  $\mu$ -ésima componente do vetor  $B$  obtemos

$$\begin{aligned} & \int \frac{d^{2\omega} k}{(2\pi)^{2\omega}} \frac{k_\mu}{(k^2 + 2B \cdot k - A^2)^{\alpha+1}} \\ &= (-) \frac{i}{(4\pi)^\omega} \frac{(\alpha - \omega) \Gamma(\alpha - \omega)}{\alpha \Gamma(\alpha)} (-B^2 - A^2)^{\alpha - \omega + 1} B_\mu, \end{aligned} \quad (\text{C.3})$$

que pode ser reescrito como

$$\begin{aligned} & \int \frac{d^{2\omega} k}{(2\pi)^{2\omega}} \frac{k_\mu}{(k^2 + 2B \cdot k - A^2)^{\alpha+1}} \\ &= (-) \frac{i}{(4\pi)^\omega} \frac{\Gamma(\alpha - \omega + 1)}{\Gamma(\alpha + 1)} (-B^2 - A^2)^{\alpha - \omega + 1} B_\mu, \end{aligned} \quad (\text{C.4})$$

se levarmos em conta que

$$\Gamma(\alpha + 1) = \alpha \Gamma(\alpha). \quad (\text{C.5})$$

Como  $\alpha$  é arbitrário podemos fazer a mudança  $\alpha \rightarrow \alpha + 1$ , logo

$$\int \frac{d^{2\omega} k}{(2\pi)^{2\omega}} \frac{k_\mu}{(k^2 + 2B \cdot k - A^2)^\alpha} = (-) \frac{i}{(4\pi)^\omega} \frac{\Gamma(\alpha - \omega)}{\Gamma(\alpha) (-B^2 - A^2)^{\alpha - \omega}} B_\mu. \quad (\text{C.6})$$

Daqui podemos tirar a integral com  $k_\mu$  no numerador.

Repetindo o procedimento podemos obter a integral cujo numerador é  $k_\mu k_\nu$

$$\int \frac{d^{2\omega} k}{(2\pi)^{2\omega}} \frac{k_\mu k_\nu}{(k^2 + 2B \cdot k - A^2)^\alpha} = \frac{i}{(4\pi)^\omega} \frac{\Gamma(\alpha - \omega)}{\Gamma(\alpha) (-B^2 - A^2)^{\alpha - \omega}} B_\mu B_\nu + \frac{i}{(4\pi)^\omega} \frac{1}{2} \frac{g_{\nu\mu} \Gamma(\alpha - \omega - 1)}{\Gamma(\alpha) (-B^2 - A^2)^{\alpha - \omega - 1}}. \quad (\text{C.7})$$

Derivando sucessivamente podemos obter as integrais com outras potências de  $k$  no numerador.

Ao fixarmos  $B = 0$  vemos que todas as integrais com potências ímpares de  $k$  no numerador se anulam. Já para as outras integrais obtemos

$$\int \frac{d^{2\omega} k}{(2\pi)^{2\omega}} \frac{1}{(k^2 - A^2)^\alpha} = \frac{i}{(4\pi)^\omega} \frac{\Gamma(\alpha - \omega)}{\Gamma(\alpha) (-A^2)^{\alpha - \omega}}, \quad (\text{C.8})$$

$$\int \frac{d^{2\omega} k}{(2\pi)^{2\omega}} \frac{k_\mu k_\nu}{(k^2 - A^2)^\alpha} = \frac{i}{(4\pi)^\omega} \frac{1}{2} g_{\mu\nu} \frac{\Gamma(\alpha - \omega - 1)}{\Gamma(\alpha) (-A^2)^{\alpha - \omega - 1}}, \quad (\text{C.9})$$

$$\int \frac{d^{2\omega} k}{(2\pi)^{2\omega}} \frac{k_\mu k_\nu k_\lambda k_\xi}{(k^2 - A^2)^\alpha} = \frac{i}{(4\pi)^\omega} \frac{1}{4} g_{\nu\lambda\mu\xi} \frac{\Gamma(\alpha - \omega - 2)}{\Gamma(\alpha) (-A^2)^{\alpha - \omega - 2}} \quad (\text{C.10})$$

e

$$\int \frac{d^{2\omega} k}{(2\pi)^{2\omega}} \frac{k_\mu k_\nu k_\lambda k_\xi k_\eta k_\rho}{(k^2 - A^2)^\alpha} = \frac{i}{(4\pi)^\omega} \frac{1}{8} g_{\mu\nu\lambda\xi\eta\rho} \frac{\Gamma(\alpha - \omega - 3)}{\Gamma(\alpha) (-A^2)^{\alpha - \omega - 3}}. \quad (\text{C.11})$$

Observe que em cada integral aparecem todas as possibilidades de permutações (não equivalentes) dos índices dos tensores métricos. Para dois índices livres, temos uma única possibilidade  $g_{\mu\nu}$ . Para quatro índices livres temos três possibilidades, que são sintetizadas no objeto

$$g_{\nu\lambda\mu\xi} \equiv g_{\nu\lambda} g_{\mu\xi} + g_{\mu\lambda} g_{\nu\xi} + g_{\nu\mu} g_{\lambda\xi}. \quad (\text{C.12})$$

Para seis índices são quinze possibilidades

$$\begin{aligned}
g_{\mu\nu\lambda\xi\eta\rho} \equiv & g_{\mu\nu} (g_{\lambda\xi}g_{\eta\rho} + g_{\lambda\eta}g_{\xi\rho} + g_{\lambda\rho}g_{\xi\eta}) \\
& + g_{\mu\lambda} (g_{\nu\xi}g_{\eta\rho} + g_{\nu\eta}g_{\xi\rho} + g_{\nu\rho}g_{\xi\eta}) \\
& + g_{\mu\xi} (g_{\nu\lambda}g_{\eta\rho} + g_{\nu\eta}g_{\lambda\rho} + g_{\nu\rho}g_{\lambda\eta}) \\
& + g_{\mu\eta} (g_{\nu\lambda}g_{\xi\rho} + g_{\nu\xi}g_{\lambda\rho} + g_{\nu\rho}g_{\lambda\xi}) \\
& + g_{\mu\rho} (g_{\nu\lambda}g_{\xi\eta} + g_{\nu\xi}g_{\lambda\eta} + g_{\nu\eta}g_{\lambda\xi})
\end{aligned} \tag{C.13}$$

e assim por diante.

## D INTEGRAIS DE FEYNMAN

Para calcularmos as funções de Green de nosso interesse, precisamos calcular antes as seguintes integrais de Feynman de um ponto

$$I_1, I_{1\mu} \equiv \int \frac{d^5 k}{(2\pi)^5} \frac{1, k_\mu}{D_1}, \quad (\text{D.1})$$

de dois pontos

$$I_2, I_{2\mu}, I_{2\mu\nu} \equiv \int \frac{d^5 k}{(2\pi)^5} \frac{1, k_\mu, k_\mu k_\nu}{D_{12}} \quad (\text{D.2})$$

e de três pontos

$$I_3, I_{3\mu}, I_{3\mu\nu} \equiv \int \frac{d^5 k}{(2\pi)^5} \frac{1, k_\mu, k_\mu k_\nu}{D_{123}}. \quad (\text{D.3})$$

Esse apêndice é direcionado ao cálculo de algumas dessas integrais.

### D.1 Cálculo da $I_3$

Dentre todas as integrais de Feynman, que utilizamos nesse trabalho, a  $I_3$  é a única finita (o que podemos ver facilmente por meio do método de contagem de potências) e, por isso, será a primeira integral que avaliaremos

$$I_3 = \int \frac{d^5 k}{(2\pi)^5} \frac{1}{D_{123}}. \quad (\text{D.4})$$

Por ser finita começamos usando a parametrização de Feynman (B.12), portanto temos

$$I_3 = \int \frac{d^5 k}{(2\pi)^5} 2 \int_0^1 dz \int_0^{1-z} dy \frac{1}{[(b-a)y + (c-a)z + a]^3}, \quad (\text{D.5})$$

onde escolhemos  $abc = D_{123}$ , nessa ordem. Com isso o denominador da integral pode ser escrito como

$$\begin{aligned} [(b-a)y + (c-a)z + a] &= (k + q_2 y + q_3 z + k_1)^2 \\ &+ q_2^2 y(1-y) + q_3^2 z(1-z) - 2(q_2 \cdot q_3)yz \\ &+ (m_1^2 - m_2^2)y + (m_1^2 - m_3^2)z - m_1^2. \end{aligned} \quad (\text{D.6})$$

Escolhendo  $k' = k + q_2 y + q_3 z + k_1$  e usando (B.14) temos

$$I_3 = 2 \int_0^1 dz \int_0^{1-z} dy \int \frac{d^5 k}{(2\pi)^5} \frac{1}{[k'^2 - H^2 (q_2^2, m_1^2, m_2^2; q_3^2, m_1^2, m_3^2)]^3}. \quad (\text{D.7})$$

Nesse caso, como o numerador corresponde à unidade, podemos fazer uma translação nos valores do *momentum* sem pagar nenhum preço adicional

$$I_3 = 2 \int_0^1 dz \int_0^{1-z} dy \int \frac{d^5 k'}{(2\pi)^5} \frac{1}{[k'^2 - H^2 (q_2^2, m_1^2, m_2^2; q_3^2, m_1^2, m_3^2)]^3}. \quad (\text{D.8})$$

Usando (C.8) podemos solucionar a integral nos *momenta*

$$I_3 = 2 \int_0^1 dz \int_0^{1-z} dy \left[ \frac{i}{(4\pi)^{5/2}} \frac{\pi^{1/2}}{2! [-H^2 (q_2^2, m_1^2, m_2^2; q_3^2, m_1^2, m_3^2)]^{1/2}} \right], \quad (\text{D.9})$$

onde usamos o fato de que  $\Gamma(1/2) = \pi^{1/2}$ . Simplificando temos

$$I_3 = \frac{i}{32\pi^2} \int_0^1 dz \int_0^{1-z} dy \frac{1}{[-H^2 (q_2^2, m_1^2, m_2^2; q_3^2, m_1^2, m_3^2)]^{1/2}}, \quad (\text{D.10})$$

ou ainda

$$I_3 = \frac{i}{32\pi^2} \xi_{00}^{-1/2} (q_2^2, m_1^2, m_2^2; q_3^2, m_1^2, m_3^2), \quad (\text{D.11})$$

em que usamos a definição dada por (4.25).

## D.2 Cálculo da $I_1$

Agora estamos interessados em um exemplo de integral divergente, a integral

$$I_1 = \int \frac{d^5 k}{(2\pi)^5} \frac{1}{D_1}. \quad (\text{D.12})$$

Usando contagem de potências vemos a possibilidade de divergência cúbica e portanto devemos fazer  $N = 3$  em (4.5) gerando a identidade

$$\begin{aligned} \frac{1}{D_1} &= \frac{1}{k^2 - \lambda^2} - \frac{2k_1 \cdot k + k_1^2 + \lambda^2 - m^2}{(k^2 - \lambda^2)^2} + \frac{(2k_1 \cdot k + k_1^2 + \lambda^2 - m^2)^2}{(k^2 - \lambda^2)^3} \\ &\quad - \frac{(2k_1 \cdot k + k_1^2 + \lambda^2 - m^2)^3}{(k^2 - \lambda^2)^4} + \frac{A_1^4}{(k^2 - \lambda^2)^4 D_1}, \end{aligned} \quad (\text{D.13})$$

em que  $A_1 = (2k_1 \cdot k + k_1^2 + \lambda^2 - m^2)$ . Substituindo essa identidade na integral original temos

$$\begin{aligned}
 I_1 &= \int \frac{d^5 k}{(2\pi)^5} \frac{1}{k^2 - \lambda^2} \\
 &\quad - \int \frac{d^5 k}{(2\pi)^5} \frac{(k_1^2 + \lambda^2 - m^2)}{(k^2 - \lambda^2)^2} \\
 &\quad + 4k_1^\mu k_1^\nu \int \frac{d^5 k}{(2\pi)^5} \frac{k_\mu k_\nu}{(k^2 - \lambda^2)^3} \\
 &\quad + (k_1^2 + \lambda^2 - m^2)^2 \int \frac{d^5 k}{(2\pi)^5} \frac{1}{(k^2 - \lambda^2)^3} \\
 &\quad - (k_1^2 + \lambda^2 - m^2)^3 \int \frac{d^5 k}{(2\pi)^5} \frac{1}{(k^2 - \lambda^2)^4} \\
 &\quad - 12k_1^\mu k_1^\nu (k_1^2 + \lambda^2 - m^2) \int \frac{d^5 k}{(2\pi)^5} \frac{k_\mu k_\nu}{(k^2 - \lambda^2)^4} \\
 &\quad + \int \frac{d^5 k}{(2\pi)^5} \frac{A_1^4}{(k^2 - \lambda^2)^4 D_1}, \tag{D.14}
 \end{aligned}$$

onde ignoramos os termos com potência ímpar de  $k$  no numerador, uma vez que estes se anulam quando integramos nos *momenta*. Neste ponto, se ouvessem outros propagadores, deveríamos avaliar o grau de divergência de cada termo e substituir a identidade necessária.

Os três primeiros termos de (D.14) são divergentes, portanto podemos organizá-los em termos de objetos divergentes, conforme segue:

$$\begin{aligned}
 I_1 &= I_{cub}^{(5)}(\lambda^2) - (\lambda^2 - m^2) I_{lin}^{(5)}(\lambda^2) + k_1^\mu k_1^\nu \Delta_{3;\mu\nu}^{(5)}(\lambda^2) \\
 &\quad + (k_1^2 + \lambda^2 - m^2)^2 \int \frac{d^5 k}{(2\pi)^5} \frac{1}{(k^2 - \lambda^2)^3} \\
 &\quad - (k_1^2 + \lambda^2 - m^2)^3 \int \frac{d^5 k}{(2\pi)^5} \frac{1}{(k^2 - \lambda^2)^4} \\
 &\quad - 12k_1^\mu k_1^\nu (k_1^2 + \lambda^2 - m^2) \int \frac{d^5 k}{(2\pi)^5} \frac{k_\mu k_\nu}{(k^2 - \lambda^2)^4} \\
 &\quad + \int \frac{d^5 k}{(2\pi)^5} \frac{A_1^4}{(k^2 - \lambda^2)^4 D_1}. \tag{D.15}
 \end{aligned}$$

Os três termos seguintes podem ser calculados diretamente se usarmos (C.8) e (C.9)

$$\begin{aligned}
 I_1 = & I_{cub}^{(5)}(\lambda^2) - (\lambda^2 - m^2) I_{lin}^{(5)}(\lambda^2) + k_1^\mu k_1^\nu \Delta_{3;\mu\nu}^{(5)}(\lambda^2) + \\
 & + \frac{i}{32\pi^2} \frac{1}{2} (k_1^2 + \lambda^2 - m^2)^2 \frac{1}{(-\lambda^2)^{1/2}} \\
 & - \frac{i}{32\pi^2} \frac{1}{12} (k_1^2 + \lambda^2 - m^2)^3 \frac{1}{(-\lambda^2)^{3/2}} \\
 & - \frac{i}{32\pi^2} k_1^2 (k_1^2 + \lambda^2 - m^2) \frac{1}{(-\lambda^2)^{1/2}} \\
 & + \int \frac{d^5 k}{(2\pi)^5} \frac{A_1^4}{(k^2 - \lambda^2)^4 D_1}, \tag{D.16}
 \end{aligned}$$

onde usamos  $\Gamma(1/2) = \pi^{1/2}$  e fizemos algumas simplificações.

Resta o último termo

$$I'_1 = \int \frac{d^5 k}{(2\pi)^5} \frac{A_1^4}{(k^2 - \lambda^2)^4 D_1}. \tag{D.17}$$

Para calcular este termo temos que usar a parametrização (B.10), escrevendo

$$\frac{1}{(k^2 - \lambda^2)^4 D_1} = 4 \int_0^1 dz \frac{(1-z)^3}{[k'^2 - H^2(k_1^2, \lambda^2, m^2)]^5}, \tag{D.18}$$

em que deslocamos a variável  $k$  de modo que  $k' = k + k_1 z$ , obtendo

$$I'_1 = \int \frac{d^5 k'}{(2\pi)^5} 4 \int_0^1 dz (1-z)^3 \frac{[2k_1 \cdot (k' - k_1 z) + k_1^2 + \lambda^2 - m^2]^4}{[k'^2 - H^2(k_1^2, \lambda^2, m^2)]^5}. \tag{D.19}$$

Para evitar uma notação muito poluída, vamos usar apenas  $-H^2$  por enquanto.

Nesse ponto é interessante observar que

$$\frac{\partial(-H^2)}{\partial z} = k_1^2(1-2z) + \lambda^2 - m^2 \tag{D.20}$$

e, portanto há uma associação entre a derivada de  $-H^2$  e o termo  $A_1$

$$I'_1 = \int \frac{d^5 k'}{(2\pi)^5} 4 \int_0^1 dz (1-z)^3 \frac{\{2k_1 \cdot k' + \frac{\partial}{\partial z}(-H^2)\}^4}{(k'^2 - H^2)^5}. \tag{D.21}$$

Abrindo a potência temos

$$\begin{aligned}
I'_1 &= 64k_1^\mu k_1^\nu k_1^\alpha k_1^\beta \int_0^1 dz (1-z)^3 \int \frac{d^5 k'}{(2\pi)^5} \frac{k'_\mu k'_\nu k'_\alpha k'_\beta}{(k'^2 - H^2)^5} \\
&+ 96k_1^\mu k_1^\nu \int_0^1 dz (1-z)^3 \left[ \frac{\partial(-H^2)}{\partial z} \right]^2 \int \frac{d^5 k'}{(2\pi)^5} \frac{k'_\mu k'_\nu}{(k'^2 - H^2)^5} \\
&+ 4 \int_0^1 dz (1-z)^3 \left[ \frac{\partial(-H^2)}{\partial z} \right]^4 \int \frac{d^5 k'}{(2\pi)^5} \frac{1}{(k'^2 - H^2)^5}. \quad (D.22)
\end{aligned}$$

Resolvendo as integrais nos *momenta* temos

$$\begin{aligned}
I'_1 &= 64k_1^\mu k_1^\nu k_1^\alpha k_1^\beta \int_0^1 dz (1-z)^3 \left[ \frac{i}{32\pi^2} \frac{1}{4} g_{\nu\alpha\mu\beta} \frac{1}{4! (-H^2)^{1/2}} \right] \\
&+ 96k_1^\mu k_1^\nu \int_0^1 dz (1-z)^3 \left[ \frac{\partial(-H^2)}{\partial z} \right]^2 \left[ \frac{i}{32\pi^2} \frac{1}{4} g_{\mu\nu} \frac{1}{4! (-H^2)^{3/2}} \right] \\
&+ 4 \int_0^1 dz (1-z)^3 \left[ \frac{\partial(-H^2)}{\partial z} \right]^4 \left[ \frac{i}{32\pi^2} \frac{3}{4} \frac{1}{4! (-H^2)^{5/2}} \right], \quad (D.23)
\end{aligned}$$

que pode ser escrito de maneira simplificada como

$$\begin{aligned}
I'_1 &= \frac{i}{32\pi^2} 2k_1^4 \int_0^1 dz (1-z)^3 \frac{1}{(-H^2)^{1/2}} \\
&+ \frac{i}{32\pi^2} \frac{1}{8} \int_0^1 dz (1-z)^3 \left[ \frac{\partial(-H^2)}{\partial z} \right]^4 \frac{1}{(-H^2)^{5/2}} \\
&+ \frac{i}{32\pi^2} k_1^2 \int_0^1 dz (1-z)^3 \left[ \frac{\partial(-H^2)}{\partial z} \right]^2 \frac{1}{(-H^2)^{3/2}}. \quad (D.24)
\end{aligned}$$

Agora usaremos integração por partes para eliminar as derivadas. Isso é feito com mais facilidade se trabalharmos com uma potência  $-H^2$  por vez, começando

pelas menores. Sendo assim, reescrevemos

$$\begin{aligned}
 I'_1 &= \frac{i}{32\pi^2} 2k_1^4 \int_0^1 dz (1-z)^3 \frac{1}{(-H^2)^{1/2}} \\
 &+ \frac{i}{32\pi^2} \frac{1}{8} \int_0^1 dz (1-z)^3 \left[ \frac{\partial(-H^2)}{\partial z} \right]^3 \left[ -\frac{2}{3} \frac{\partial}{\partial z} \frac{1}{(-H^2)^{3/2}} \right] \\
 &+ \frac{i}{32\pi^2} k_1^2 \int_0^1 dz (1-z)^3 \left[ \frac{\partial(-H^2)}{\partial z} \right]^2 \frac{1}{(-H^2)^{3/2}}. \quad (\text{D.25})
 \end{aligned}$$

e então usamos a integração por partes

$$\begin{aligned}
 I'_1 &= \frac{i}{32\pi^2} 2k_1^4 \int_0^1 dz (1-z)^3 \frac{1}{(-H^2)^{1/2}} \\
 &- \frac{i}{32\pi^2} \frac{1}{12} \int_0^1 dz \frac{\partial}{\partial z} (1-z)^3 \left[ \frac{\partial(-H^2)}{\partial z} \right]^3 \frac{1}{(-H^2)^{3/2}} \\
 &- \frac{i}{32\pi^2} \frac{1}{4} \int_0^1 dz (1-z)^2 \left[ \frac{\partial(-H^2)}{\partial z} \right]^3 \frac{1}{(-H^2)^{3/2}} \\
 &+ \frac{i}{32\pi^2} \frac{1}{4} \int_0^1 dz (1-z)^3 \left[ \frac{\partial(-H^2)}{\partial z} \right]^2 \frac{\partial^2(-H^2)}{\partial z^2} \frac{1}{(-H^2)^{3/2}} \\
 &+ \frac{i}{32\pi^2} k_1^2 \int_0^1 dz (1-z)^3 \left[ \frac{\partial(-H^2)}{\partial z} \right]^2 \frac{1}{(-H^2)^{3/2}}. \quad (\text{D.26})
 \end{aligned}$$

Seja  $\frac{\partial^2(-H^2)}{\partial z^2} = -2k_1^2$ , então temos

$$\begin{aligned}
 I'_1 &= \frac{i}{32\pi^2} 2k_1^4 \int_0^1 dz (1-z)^3 \frac{1}{(-H^2)^{1/2}} \\
 &+ \frac{i}{32\pi^2} \frac{1}{12} \left[ \frac{\partial(-H^2)}{\partial z} \right]^3 \frac{1}{(-H^2)^{3/2}} \Big|_{z=0} \\
 &- \frac{i}{32\pi^2} \frac{1}{4} \int_0^1 dz (1-z)^2 \left[ \frac{\partial(-H^2)}{\partial z} \right]^3 \frac{1}{(-H^2)^{3/2}} \\
 &+ \frac{i}{32\pi^2} \frac{1}{2} k_1^2 \int_0^1 dz (1-z)^3 \left[ \frac{\partial(-H^2)}{\partial z} \right]^2 \frac{1}{(-H^2)^{3/2}}, \quad (\text{D.27})
 \end{aligned}$$

onde resolvemos uma das integrais e duas outras se simplificaram. Substituindo os valores em  $z = 0$  temos

$$\begin{aligned}
I'_1 &= \frac{i}{32\pi^2} 2k_1^4 \int_0^1 dz (1-z)^3 \frac{1}{(-H^2)^{1/2}} \\
&+ \frac{i}{32\pi^2} \frac{1}{12} (k_1^2 + \lambda^2 - m^2)^3 \frac{1}{(-\lambda^2)^{3/2}} \\
&- \frac{i}{32\pi^2} \frac{1}{4} \int_0^1 dz (1-z)^2 \left[ \frac{\partial(-H^2)}{\partial z} \right]^3 \frac{1}{(-H^2)^{3/2}} \\
&+ \frac{i}{32\pi^2} \frac{1}{2} k_1^2 \int_0^1 dz (1-z)^3 \left[ \frac{\partial(-H^2)}{\partial z} \right]^2 \frac{1}{(-H^2)^{3/2}}. \quad (\text{D.28})
\end{aligned}$$

Esse processo deve ser repetido até todas as derivadas terem sido eliminadas. Feito isso, obtemos

$$\begin{aligned}
I'_1 &= \frac{i}{32\pi^2} (k_1^2 + \lambda^2 - m^2)^3 \frac{1}{12(-\lambda^2)^{3/2}} \\
&- \frac{i}{32\pi^2} \frac{1}{2(-\lambda^2)^{1/2}} (k_1^2 + \lambda^2 - m^2)^2 \\
&+ \frac{i}{32\pi^2} (k_1^2 + \lambda^2 - m^2) k_1^2 \frac{1}{(-\lambda^2)^{1/2}} \\
&- \frac{i}{32\pi^2} 2(\lambda^2 - m^2) (-\lambda^2)^{1/2} \\
&- \frac{i}{32\pi^2} \frac{4}{3} \left[ (m^2)^{3/2} - (\lambda^2)^{3/2} \right] \quad (\text{D.29})
\end{aligned}$$

e portanto temos a  $I_1$

$$\begin{aligned}
I_1(k_1, m) &= I_{cub}^{(5)}(\lambda^2) - (\lambda^2 - m^2) I_{lin}^{(5)}(\lambda^2) + k_1^\mu k_1^\nu \Delta_{3;\mu\nu}^{(5)}(\lambda^2) \\
&- \frac{i}{32\pi^2} 2(\lambda^2 - m^2) (-\lambda^2)^{1/2} \\
&+ \frac{i}{32\pi^2} \frac{4}{3} \left[ (-m^2)^{3/2} - (-\lambda^2)^{3/2} \right]. \quad (\text{D.30})
\end{aligned}$$

## E REDUÇÕES DAS FUNÇÕES FINITAS

Vimos que é possível projetar as amplitudes físicas em termos das seguintes funções finitas

$$Z_k^{1/2}(q_i^2, m_j^2, m_i^2; \lambda^2) = \int_0^1 dz (z)^k [-H^2(q_i^2, m_j^2, m_i^2)]^{1/2} - \int_0^1 dz (z)^k [-\lambda^2]^{1/2}, \quad (\text{E.1})$$

$$\begin{aligned} & \xi_{nm}^{1/2}(q_i^2, m_j^2, m_i^2; q_k^2, m_j^2, m_k^2; \lambda^2) \\ = & \int_0^1 dz \int_0^{1-z} dy (z^n y^m) [-H^2(q_i^2, m_j^2, m_i^2; q_k^2, m_j^2, m_k^2)]^{1/2} \\ & - \int_0^1 dz \int_0^{1-z} dy (z^n y^m) [-\lambda^2]^{1/2} \end{aligned} \quad (\text{E.2})$$

e

$$\begin{aligned} & \xi_{nm}^{-1/2}(q_i^2, m_j^2, m_i^2; q_k^2, m_j^2, m_k^2; \lambda^2) \\ = & \int_0^1 dz \int_0^{1-z} dy (z^n y^m) [-H^2(q_i^2, m_j^2, m_i^2; q_k^2, m_j^2, m_k^2)]^{-1/2}. \end{aligned} \quad (\text{E.3})$$

É importante determinar algumas propriedades dessas funções.

Seja a derivada da função  $-H^2 = -H^2(q_i^2, m_j^2, m_i^2)$  dada por

$$\frac{\partial [-H^2]}{\partial z} = -2q_i^2 z + (q_i^2 + m_j^2 - m_i^2), \quad (\text{E.4})$$

então podemos escrever

$$z = -\frac{1}{2q_i^2} \left\{ \frac{\partial [-H^2]}{\partial z} - (q_i^2 + m_j^2 - m_i^2) \right\}. \quad (\text{E.5})$$

Usando isso podemos escrever qualquer função  $Z_k^{1/2}$  em termos de uma função  $Z_{k-1}^{1/2}$ . Para ilustrar vamos observar a função

$$Z_1^{1/2}(q_i^2, m_j^2, m_i^2; \lambda^2) = \int_0^1 dz (z) \left\{ [-H^2]^{1/2} - [-\lambda^2]^{1/2} \right\}. \quad (\text{E.6})$$

Integrando o segundo termo e substituindo (E.5) temos

$$\begin{aligned}
 Z_1^{1/2}(q_i^2, m_j^2, m_i^2; \lambda^2) &= -\frac{1}{2q_i^2} \int_0^1 dz \frac{\partial [-H^2]}{\partial z} [-H^2]^{1/2} \\
 &+ \frac{1}{2q_i^2} (q_i^2 + m_j^2 - m_i^2) \int_0^1 dz [-H^2]^{1/2} \\
 &- \frac{1}{2} [-\lambda^2]^{1/2}, \tag{E.7}
 \end{aligned}$$

que resulta em

$$\begin{aligned}
 Z_1^{1/2}(q_i^2, m_j^2, m_i^2; \lambda^2) &= \frac{1}{2q_i^2} (q_i^2 + m_j^2 - m_i^2) Z_0^{1/2}(q_i^2, m_j^2, m_i^2; \lambda^2) \\
 &- \frac{1}{3q_i^2} \int_0^1 dz \frac{\partial}{\partial z} [-H^2]^{3/2} \\
 &- \frac{1}{2q_i^2} (m_j^2 - m_i^2) [-\lambda^2]^{1/2} \tag{E.8}
 \end{aligned}$$

após algumas manipulações matemáticas. Em particular para massas iguais  $m_j^2 = m_i^2 = m^2$  temos

$$Z_1^{1/2}(q_i^2, m^2; \lambda^2) = \frac{1}{2} Z_0^{1/2}(q_i^2, m^2; \lambda^2). \tag{E.9}$$

Identities desse tipo são muito importantes para reduzir as potências de  $z$  e  $y$  nas integrais.

Para as integrais do tipo  $\xi_{nm}^{-1/2}$  o procedimento é semelhante. Seja a função  $-H^2 = -H^2(q_2^2, m_1^2, m_2^2; q_3^2, m_1^2, m_3^2)$ , então podemos escrever

$$z = \frac{1}{2q_2^2} \left[ -\frac{\partial [-H^2]}{\partial z} - 2q_2 \cdot q_3 y + (q_2^2 + m_1^2 - m_2^2) \right] \tag{E.10}$$

e

$$y = \frac{1}{2q_3^2} \left[ -\frac{\partial [-H^2]}{\partial y} - 2q_2 \cdot q_3 z + (q_3^2 + m_1^2 - m_3^2) \right]. \tag{E.11}$$

O restante do procedimento é completamente análogo ao anterior, mas surge a necessidade do uso de integração por partes nos passos intermediários.

Usando isso, é interessante escrever as seguintes relações para o caso em que  $n + m = 1$

$$\begin{aligned} q_3^2 \xi_{01}^{-1/2} + q_3 \cdot q_2 \xi_{10}^{-1/2} &= Z_0^{1/2} (q_2^2, m_1^2, m_2^2) \\ &\quad - Z_0^{1/2} \left( (q_2 - q_3)^2, m_3^2, m_2^2 \right) \\ &\quad + \frac{1}{2} (q_3^2 + m_1^2 - m_2^2) \xi_{00}^{-1/2} \end{aligned} \quad (\text{E.12})$$

e

$$\begin{aligned} q_2^2 \xi_{10}^{-1/2} + q_3 \cdot q_2 \xi_{01}^{-1/2} &= Z_0^{1/2} (q_3^2, m_1^2, m_3^2) \\ &\quad - Z_0^{1/2} \left( (q_2 - q_3)^2, m_3^2, m_2^2 \right) \\ &\quad + \frac{1}{2} (q_2^2 + m_1^2 - m_2^2) \xi_{00}^{-1/2}. \end{aligned} \quad (\text{E.13})$$

Observe que essas funções foram reduzidas para funções em que  $n + m = 0$ .

Para os casos em que  $n + m = 2$  temos

$$\begin{aligned} q_3^2 \xi_{02}^{-1/2} + q_3 \cdot q_2 \xi_{11}^{-1/2} &= -Z_0^{1/2} \left( (q_2 - q_3)^2, m_3^2, m_2^2 \right) \\ &\quad + Z_1^{1/2} \left( (q_2 - q_3)^2, m_3^2, m_2^2 \right) \\ &\quad + \xi_{00}^{1/2} + \frac{1}{2} (q_3^2 + m_1^2 - m_2^2) \xi_{01}^{-1/2}, \end{aligned} \quad (\text{E.14})$$

$$\begin{aligned} q_2 \cdot q_3 \xi_{02}^{-1/2} + q_2^2 \xi_{11}^{-1/2} &= -Z_0^{1/2} \left( (q_2 - q_3)^2, m_3^2, m_2^2 \right) \\ &\quad + Z_1^{1/2} \left( (q_2 - q_3)^2, m_3^2, m_2^2 \right) \\ &\quad + Z_1^{1/2} (q_3^2, m_1^2, m_3^2) \\ &\quad + \frac{1}{2} (q_2^2 + m_1^2 - m_2^2) \xi_{01}^{-1/2}, \end{aligned} \quad (\text{E.15})$$

$$\begin{aligned} q_3 \cdot q_2 \xi_{20}^{-1/2} + q_3^2 \xi_{11}^{-1/2} &= Z_1^{1/2} (q_2^2, m_1^2, m_2^2) \\ &\quad - Z_1^{1/2} \left( (q_2 - q_3)^2, m_3^2, m_2^2 \right) \\ &\quad + \frac{1}{2} (q_3^2 + m_1^2 - m_2^2) \xi_{10}^{-1/2} \end{aligned} \quad (\text{E.16})$$

e

$$\begin{aligned}
q_2^2 \xi_{20}^{-1/2} + q_2 \cdot q_3 \xi_{11}^{-1/2} &= \xi_{00}^{1/2} - Z_1^{1/2} \left( (q_2 - q_3)^2, m_3^2, m_2^2 \right) \\
&\quad + \frac{1}{2} (q_2^2 + m_1^2 - m_2^2) \xi_{10}^{-1/2}. \quad (\text{E.17})
\end{aligned}$$

Nesse caso restam apenas integrais do tipo  $n + m < 2$ . Quantidades desse tipo aparecem naturalmente nas amplitudes físicas quando substituímos os resultados obtidos para as integrais de Feynman.