

**ANÁLISE DE EXPERIMENTOS FATORIAIS DE
DOIS FATORES COM TRATAMENTOS
ADICIONAIS**

NAGIB YASSIN

2001

51712 MFV
36477

NAGIB YASSIN

**ANÁLISE DE EXPERIMENTOS FATORIAIS DE DOIS FATORES COM
TRATAMENTOS ADICIONAIS**

Dissertação apresentada à Universidade Federal de Lavras, como parte das exigências do programa de Pós-graduação em Agronomia, área de concentração em Estatística e Experimentação Agropecuária, para a obtenção do título de "Mestre".

BIBLIOTECA CENTRAL - UFLA



51712

Prof. Dr. Augusto Ramalho de Moraes
UFLA
(Orientador)

BIBLIOTECA CENTRAL

UFLA

N.º CLAS. T630.2195

YAS

ama

N.º REGISTRO 51712

DATA 06/06/01

LAVRAS
MINAS GERAIS - BRASIL
2001

**Ficha Catalográfica Preparada pela Divisão de Processos Técnicos da
Biblioteca Central da UFLA**

Yassin, Nagib

Análise de experimentos fatoriais de dois fatores com tratamentos adicionais /
Nagib Yassin. -- Lavras : UFLA, 2001.
161p. : il.

Orientador: Augusto Ramalho de Moraes.
Dissertação (Mestrado) – UFLA.
Bibliografia.

1. Experimento fatorial. 2. Tratamento adicional. 3. Sistema de análise
estatística. I. Universidade Federal de Lavras. II. Título.

CDD-630.219

NAGIB YASSIN

**ANÁLISE DE EXPERIMENTOS FATORIAIS DE DOIS FATORES COM
TRATAMENTOS ADICIONAIS**

Dissertação apresentada à Universidade Federal de
Lavras, como parte das exigências do programa de
Pós-graduação em Agronomia, área de
concentração em Estatística e Experimentação
Agrícola, para a obtenção do título de "Mestre".

APROVADA em 16 de fevereiro de 2001

Dr. Francisco Dias Nogueira

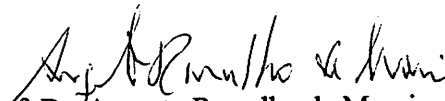
EMBRAPA

Prof. Dr. Mário Javier Ferrua Vivanco

UFLA

Prof. Dr. Joel Augusto Muniz

UFLA


Prof. Dr. Augusto Ramalho de Moraes
UFLA
(Orientador)

LAVRAS
MINAS GERAIS – BRASIL

**.Aos meus filhos Jasmyne, Said e Hayat por tornar esta jornada muito mais
alegre e estimulante.**

**À minha esposa Lucineide pelo constante apoio e incentivo
Aos meus pais Atef e Fátima por terem sempre acreditado em mim.**

AGRADECIMENTOS

A DEUS, por tudo.

Ao Professor Dr. Augusto Ramalho de Moraes, pela orientação eficiente, séria e honesta pela confiança e amizade, o que contribuiu de forma decisiva para a realização e conclusão deste trabalho.

Aos professores do departamento de ciências exatas da UFLA, Thelma Sáfadi, Luiz Henrique, Lucas Chaves, Eduardo Bearzoti, Julio Bueno, Joel Muniz, Daniel Ferreira, Marcelo Oliveira, Mario Vivanco, Ruben Delly, Agostinho de Abreu e Paulo Cesar, pelos ensinamentos e pela amizade.

Aos colegas de curso, Aladir, Alex, Adriano, Ana Rita, Andrea, Cristiane, Everton, Francisco Teixeira, Iara e Moisés, pela amizade.

À Fundação do Ensino Superior de Rio Verde (FESURV) pela oportunidade dessa classificação.

Ao PICD/CAPES, pela bolsa concedida.

À UFLA pelo completo apoio institucional.

Às funcionárias do Departamento de ciências Exatas, Edila, Maria, Maristela e Renata.

A todos que direta ou indiretamente, contribuíram para que esse trabalho fosse realizado.

SUMÁRIO

RESUMO.....	i
ABSTRACT	ii
1 INTRODUÇÃO.....	1
2 REFERENCIAL TEÓRICO.....	3
2.1 Experimentos fatoriais.....	4
2.2 Experimento fatorial com dois fatores.....	6
2.3 Hipóteses.....	9
2.4 Estimação dos parâmetros do modelo adotado.....	10
2.5 Desdobramento da interação $A \times B$ significativa.....	16
2.5.1 Decomposição dos graus de liberdade da interação $A \times B$ mais os graus de liberdade do fator A.	16
2.5.2 Decomposição dos graus de liberdade da interação $A \times B$ mais os graus de liberdade do fator B.	19
2.6 Experimento fatorial com dois fatores em blocos completamente casualizados.....	25
2.6.1 Interação $A \times B$ significativa.....	30
2.6.1.1 Decomposição dos graus de liberdade da interação $A \times B$ mais os graus de liberdade do fator B.....	31
2.6.1.2 Decomposição dos graus de liberdade da interação $A \times B$ mais os graus de liberdade do fator A.	33
2.7 Notação $R(.)$	36
2.8 Experimentos fatoriais com tratamentos adicionais.....	44
3 METODOLOGIA.....	51
3.1 Caracterização.....	51
3.2 Um modelo linear.	52
3.3 Sistema de equações normais.....	55

3.4 solução do sistema de equações normais.....	64
3.5 Análise de variância.....	67
3.5.1 Obtenção das somas de quadrados.....	67
3.5.2 Modelos reduzidos.....	71
3.5.3 Esperança matemática das somas de quadrados.....	79
3.5.4 Distribuição e independência das formas quadráticas.....	93
3.6 Estimabilidade.....	98
3.7 Hipóteses testáveis.....	99
3.8 Comparações múltiplas.....	101
4 RESULTADOS E DISCUSSÃO.....	109
4.1 Exemplo 1 fatorial $(2 \times 2) + 3$ em um DIC.....	109
4.2 Exemplo 2 fatorial $(3 \times 4) + 4$ em um DBC.....	118
4.3 Exemplo 3 fatorial $(3 \times 3) + 4$ em um DIC, com dados não balanceados no fatorial.....	128
5 CONCLUSÕES.....	134
6 REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS.....	135
7 ANEXOS.....	138

RESUMO

YASSIN, Nagib. **Análise de experimentos fatoriais de dois fatores com tratamentos adicionais**. Lavras:UFLA, 2001. 148p. (Dissertação-Mestrado em Agronomia/área de concentração em Estatística e Experimentação Agropecuária)*

Os experimentos conduzidos no esquema fatorial são os tipos mais comuns e úteis na pesquisa agropecuária. A grande vantagem de sua utilização é a obtenção de respostas às várias hipóteses em um mesmo experimento, incluindo a possibilidade de obtenção de conclusões mais amplas em face do estudo simultâneo de vários fatores. Esses experimentos são utilizados para pesquisar não somente diferença entre níveis de cada fator (efeitos principais), mas também quais níveis de um fator afeta as respostas dentro dos níveis de outro fator (interações). Nos experimentos fatoriais um dos problemas encontrados na análise de dados se refere às situações em que existem a inclusão de tratamentos adicionais. A inclusão de um ou mais tratamentos adicionais em um experimento fatorial é uma prática bastante comum, sendo que esses tratamentos servem como termo de referência para a avaliação dos demais tratamentos e para a obtenção de informações complementares. Nota-se, ainda, que o aumento do trabalho com a introdução dos tratamentos adicionais é mínima, se comparada com as possíveis vantagens que traz. Como na literatura consultada são raras as referências sobre a análise estatística de experimentos fatoriais com tratamentos adicionais e, devido ao seu largo uso na experimentação, constitui objetivo desse trabalho apresentar uma abordagem sobre o uso de fatoriais com tratamentos adicionais através da análise de alguns exemplos e suas análises pelo software SAS® (Statistical Analysis System), inclui-se também, entre os objetivos o desenvolvimento teórico para a análise estatística, obtendo-se o sistema de equações normais, estimadores dos parâmetros e variância para contrastes entre duas médias de tratamentos. Sugere-se que o uso de tratamentos adicionais deve ser feito com muita cautela e moderação. A análise de variância desse experimento é realizada utilizando-se a notação matricial.

Comitê orientador: Augusto Ramalho de Moraes -UFLA (Orientador) e Joel Augusto Muniz-UFLA.

ABSTRACT

YASSIN, Nagib. **Analysis of factorial experiments with two levels and additional treatments.** Lavras: UFLA, 2001. 148p. (Dissertation – Master in Agronomy/ major in Statistics and Agricultural Experimentation).

Experiments using factorial arrangement of treatments are rather common and useful in agricultural research. The main advantage is the possibility of testing many hypotheses, allowing broader conclusions over different factors, studied simultaneously. Factorial arrangements are used to compare levels of each factor (main effects), and also to verify if the differences among levels of a given factor are dependent on the levels of the other factors (interactions). In the analysis of data from factorial experiments, difficulty is increased when additional treatments are included. Inclusion of one or more additional treatments is a quite common practice, since such treatments are usually taken as reference or standard for evaluation and comparison of the remaining treatments, or aiming complementary information. This increase of difficulty is however low, compared to the advantages. As in literature there are few references about the statistical analysis of factorial experiments with additional treatments, and given straightforward use in experimentation, the objective of this work was the presentation of an approach for the use of factorial experiments with additional treatments through the analysis of some examples using the SAS[®] software, with the corresponding theoretical development, obtaining the system of normal equations, estimators of the parameters and variance of contrasts among two treatment means. It is suggested that additional treatments should be used with caution. The analysis of variance of such kind of experiment was presented using matrix notation.

Guidance committee: Augusto Ramalho de Moraes – UFLA (Major Professor) e Joel Augusto Muniz-UFLA

1 INTRODUÇÃO

O sucesso ou fracasso de um experimento, seja em uma atividade agrícola ou não, estão intimamente ligados ao seu planejamento, implantação e condução. Em experimentação existem situações nas quais se deseja estudar, simultaneamente, vários fatores diferentes, mas, para casos como esses é necessária a utilização de um experimento apropriado, de tal maneira que possibilite a estimação de todos os efeitos dos níveis dos fatores envolvidos.

Um dos problemas ao se planejar um experimento está na escolha adequada do tipo de delineamento e de tratamentos que melhor se adapte às condições experimentais do problema em estudo. Na experimentação, quando se deseja estudar as respostas de dois ou mais fatores simultaneamente, uma das opções é a utilização dos experimentos fatoriais. Nesse tipo de experimento, os tratamentos são todas as combinações possíveis dos níveis de fatores em estudo. Por exemplo, num experimento de adubação da cultura de café, os dois fatores em estudo podem ser os nutrientes: nitrogênio e fósforo. Se para cada fator forem utilizados quatro níveis, então existe um total de dezesseis tratamentos que são as combinações dos níveis de nitrogênio com as do fósforo.

Os experimentos conduzidos no esquema fatorial são os tipos mais comuns e úteis na pesquisa, sendo que a grande vantagem está na obtenção de respostas às várias hipóteses em um mesmo experimento, onde são avaliados os fatores principais, bem como suas interações.

Quando se pretende comparar novas variedades, tratamentos ou novas metodologias com outras já existentes, uma das alternativas seria a de experimentos fatoriais com tratamentos adicionais.

Nestes experimentos um dos problemas encontrados na análise dos dados se refere à situação onde existem tratamentos adicionais. A inclusão de um ou mais tratamentos adicionais é uma prática bastante comum, pois eles

servem como termo de referência para avaliação dos demais tratamentos e também para obtenção de informações complementares.

Dada a importância da utilização de experimentos fatoriais com tratamentos adicionais e a ausência de trabalhos específicos que tratam do desenvolvimento da análise estatística desses experimentos, o presente trabalho teve como objetivo desenvolver um estudo sobre esquemas fatoriais de dois fatores com tratamentos adicionais, dando ênfase à obtenção da análise estatística e aplicação com utilização do programa SAS[®] (Statistical Analysis System).

2 REFERENCIAL TEÓRICO

Um delineamento experimental é composto de duas estruturas básicas, a saber: i) uma “estrutura de tratamentos”, que consiste de um conjunto de tratamentos, combinações de tratamentos ou de populações que se deseja estudar ou comparar; ii) uma “estrutura de delineamento” que consiste no modo de agrupamentos das unidades experimentais na área experimental. Se todas as unidades experimentais são muito homogêneas, então existe somente um grupo ou bloco de parcelas experimentais, e as unidades experimentais podem ser consideradas para os tratamentos de modo completamente ao acaso. Tal estrutura de delineamento é chamada de delineamento inteiramente casualizado.

Estes tipos de estruturas são mais comuns com experimentos realizados em estufas, casa de vegetação e laboratórios.

Se mais do que um grupo de unidades experimentais é necessário, de modo que as unidades dentro de cada grupo são muito mais homogêneas que as unidades experimentais entre grupos, então esta estrutura é a de um delineamento em blocos casualizados. São comuns em experimentos envolvendo a comparação de cultivares, ensaios de adubação, experimentos de campo.

Assim, um delineamento experimental envolve: a escolha da estrutura de tratamentos, a escolha da estrutura de delineamento e o método de casualização (Milliken e Johnson, 1984).

Nos experimentos mais simples comparam-se tratamentos de apenas um tipo ou fator, sendo que os demais fatores permanecem constantes. Desse modo quando se deseja estudar adubações, todos os demais fatores, como variedades, tratos culturais, etc., devem ser os mesmos para todas as adubações a serem experimentadas. Conforme Banzatto e Kronka (1995), existem casos em que vários fatores devem ser estudados simultaneamente para que se possa chegar a resultados mais abrangentes e mais conclusivos. Nesses casos, segundo os

autores, é comum utilizar os experimentos fatoriais, que são aqueles nos quais são estudados, ao mesmo tempo, dois ou mais fatores ou tipos diferentes de tratamentos.

Cada subdivisão de um fator é denominada de nível do fator e os tratamentos nos experimentos fatoriais consistem de todas as combinações possíveis entre os diferentes níveis dos diversos fatores.

2.1 Experimentos fatoriais

Os experimentos em esquema fatorial tiveram seu início com Yates (1937) e foram definidos como sendo aqueles que envolvem todas as possíveis combinações dos níveis de dois ou mais fatores. Os fatores podem ser diferentes fertilizantes (fosfatado, nitrogenado), condições de operação de um trator agrícola (temperatura e pressão), cultivares, etc. Os níveis podem ser as diferentes doses de fósforo e nitrogênio, as diferentes temperaturas e pressões de funcionamento e as várias cultivares de uma espécie, respectivamente.

Os experimentos em esquema fatorial têm sido utilizados principalmente no estudo de dados originados de pesquisas agrícolas, mas também são úteis nas áreas industriais e biológicas, os quais são apropriados para as seguintes situações:

i) Experimentos exploratórios para determinar, rapidamente, os efeitos de cada um de um número relativamente elevado de fatores sobre características de interesse de um sistema. Em áreas novas de pesquisa, algumas vezes são conduzidos experimentos com número elevado de fatores, cada um com dois níveis, para seleção de fatores mais importantes para ulterior pesquisa em experimentos mais detalhados, unifatoriais ou com poucos fatores.

ii) Experimentos com propósito de recomendação para ampla faixa de condições. Em experimentos com um único fator principal pode ser conveniente incluir fatores adicionais de forma a ampliar a base para as inferências que serão derivadas.

iii) Estudo das interações entre os efeitos de vários fatores. Muito frequentemente, a resposta a um fator depende do nível de um ou mais dos outros fatores do experimento, o que caracteriza a interação dos fatores.

Este tipo de experimento está apresentado e discutido em vários textos de estatística experimental, tais como, Cochran e Cox (1957), Kirk (1982), Hinkelmann e Kempthorne (1994), Steel e Torrie (1997) e Pimentel Gomes (2000), entre outros, todos incluem como sendo aqueles experimentos onde existem interesses em se estudar os efeitos isolados dos fatores bem como as combinações dos níveis dos diferentes fatores.

Segundo Campos (1984), Banzatto e Kronka (1995) e Pimentel Gomes (2000) os experimentos fatoriais são mais eficientes em relação àqueles com apenas um fator, pois analisam simultaneamente os efeitos de dois ou mais tipos de tratamentos em um mesmo experimento e são, talvez, os tipos de experimentos mais comumente usados.

Os experimentos em esquemas fatoriais são apresentados, dentre outros, por Hinkelmann e Kempthorne (1994), Steel e Torrie (1997), Kirk (1982), como aqueles que incluem dois ou mais tipos distintos de fatores, nos quais existe interesse, em se estudar os seus efeitos, isolada ou conjuntamente. Para casos como estes, em que se deseja estudar simultaneamente vários fatores diferentes em um mesmo experimento, os experimentos fatoriais são, geralmente, os mais eficientes e mais utilizados.

Um esquema fatorial é um planejamento em que todas as possíveis combinações dos níveis dos fatores são investigadas. Assim, cada nível de um

fator combina com todos os níveis do outro fator. Em uma estrutura fatorial, podem-se identificar os seguintes tipos de efeitos:

- a) Efeito Principal: é o efeito isolado de cada fator, não levando em conta os níveis dos demais fatores, isto é, estuda isoladamente o efeito de cada fator em separado.
- b) Efeito de interação: estuda o comportamento de cada fator, levando em consideração os níveis dos demais fatores. A interação estuda o efeito de um fator na presença dos níveis dos demais fatores.

2.2 Experimento fatorial com dois fatores

De acordo com Yates (1937), um esquema fatorial com dois fatores e dois níveis é considerado o mais simples, pois estuda apenas quatro distintos tratamentos

A análise de variância de um experimento em esquema fatorial foi discutida e apresentada por vários autores, como Federer (1955), Campos (1984), Kirk (1982), Steel e Torrie (1997) e Pimentel Gomes (2000), entre outros.

Segundo esses autores, considerando que em um experimento fatorial de dois fatores existam *a* níveis do fator *A* e *b* níveis do fator *B* e que cada combinação dos níveis dos fatores *A* e *B* foi repetida *r* vezes, então, as observações desse experimento podem ser representadas conforme Tabela 1.

TABELA 1. Representação das observações y_{ijk} referentes a um experimento fatorial com dois fatores (A e B) instalados num delineamento inteiramente casualizado com r repetições.

Fator A	Fator B				Total	Média
	1	2	...	b		
1	y_{111}	y_{121}	...	y_{1b1}	$y_{1..}$	$\bar{y}_{1..}$
	y_{112}	y_{122}	...	y_{1b2}		
	:	:	:	:		
	y_{11r}	y_{12r}	...	y_{1br}		
2	y_{211}	y_{221}		y_{2b1}	$y_{2..}$	$\bar{y}_{2..}$
	y_{212}	y_{222}	...	y_{2b2}		
	:	:	:	:		
	y_{21r}	y_{22r}	...	y_{2br}		
	:	:	:	:		
a	y_{a11}	y_{a21}	...	y_{ab1}	$y_{a..}$	$\bar{y}_{n..}$
	y_{a12}	y_{a22}	...	y_{ab2}		
	:	:	:	:		
	y_{a1r}	y_{a2r}	...	y_{abr}		
Total	$y_{.1.}$	$y_{.2.}$...	$y_{.b.}$	$y_{...}$	
Média	$\bar{y}_{.1}$	$\bar{y}_{.2}$...	$\bar{y}_{.b}$	$\bar{y}_{...}$	

Nos experimentos fatoriais com dois fatores, ambos os fatores, A e B, são igualmente de interesse.

Considerando as observações y_{ijk} apresentadas na Tabela 1, pode-se obter os seguintes totais, necessários para a realização da análise de variância.

(i) $y_{ij.} = \sum_{k=1}^r y_{ijk}$: total das observações da ij-ésima combinação dos níveis dos fatores;

$$(ii) y_{i..} = \sum_{j=1}^b \sum_{k=1}^r y_{ijk} : \text{total das observações do } i\text{-ésimo nível do fator A;}$$

$$(iii) y_{.j.} = \sum_{i=1}^a \sum_{k=1}^r y_{ijk} : \text{total das observações do } j\text{-ésimo nível do fator B;}$$

$$(iv) y_{...} = \sum_{i=1}^a \sum_{j=1}^b \sum_{k=1}^r y_{ijk} : \text{total geral de todas as observações.}$$

e as respectivas médias:

$$(i) \bar{y}_{ij.} = \frac{y_{ij.}}{r} \quad i = 1, \dots, a; j = 1, \dots, b$$

$$(ii) \bar{y}_{i..} = \frac{y_{i..}}{br} \quad i = 1, \dots, a$$

$$(iii) \bar{y}_{.j.} = \frac{y_{.j.}}{ar} \quad j = 1, \dots, b$$

$$(iv) \bar{y}_{...} = \frac{y_{...}}{abr}$$

Para Kirk (1982) o estudo simultâneo de mais de um fator em um mesmo ensaio é uma prática muito comum nas ciências aplicadas. Por exemplo, em um ensaio visando ao estudo do desempenho produtivo, podem-se testar os teores de proteínas (fator A) e teores de carboidrato (fator B) ao mesmo tempo. A definição dos tratamentos a serem utilizados dependerá dos níveis dos fatores A e B que se deseja avaliar, da necessidade de se averiguar se existe interação entre esses dois fatores e da aplicabilidade dos resultados. Para que isso seja possível, a definição dos tratamentos deve ser de primordial importância e, de preferência, envolver a combinação de todos os níveis dos dois fatores.

O modelo linear para um experimento fatorial em um delineamento inteiramente ao acaso envolvendo dois fatores foi apresentado por vários

autores, como Cochran e Cox (1957), Hinkelmann e Kempthorne (1994), Kirk (1982) e Davis (1979), entre outros:

$$y_{ijk} = \mu + \alpha_i + \beta_j + \gamma_{ij} + \varepsilon_{ijk} \quad (1)$$

sendo que:

y_{ijk} : é o valor observado do nível i do fator α combinado com o nível j do fator β na repetição k ;

μ : é uma constante associada a todas as observações;

α_i : é o efeito do i -ésimo nível do fator A, definido como:

$$\alpha_i = \mu_{i..} - \mu,$$

$\mu_{i..}$ é a média populacional da variável dependente do nível i do fator A;

β_j : é o efeito do j -ésimo nível do fator B, definido como:

$$\beta_j = \mu_{.j.} - \mu,$$

$\mu_{.j.}$ é a média populacional da variável dependente do nível j do fator B;

os efeitos α_i e β_j $i = 1, \dots, a$ e $j = 1, \dots, b$ são denominados efeitos principais.

γ_{ij} : é o efeito da interação entre o nível i do fator A e o nível j do fator B, definido como:

$$\gamma_{ij} = \mu_{ij.} - (\mu + \alpha_i + \beta_j) = \mu_{ij.} - \mu_{i..} - \mu_{.j.} + \mu$$

$\mu_{ij.}$ é a média populacional da variável dependente no nível i do fator A combinado com o nível j do fator B;

ε_{ijk} : É o erro experimental associado à observação y_{ijk} .

2.3 Hipóteses

As principais hipóteses de interesse a serem testadas, entre outras, são:

(i) Não existe efeitos dos níveis do fator A

$H_0: \alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_a = 0$ vs. $H_1: \alpha_i \neq 0$ para, pelo menos, um i ou seja, está sendo testado a não existência de efeito do fator A

(ii) Não existe efeito dos níveis do fator B

$H_0: \beta_1 = \beta_2 = \dots = \beta_b = 0$ vs. $H_1: \beta_j \neq 0$ para pelo menos um j está testando se não existem efeitos do fator B.

(iii) Não existe efeito das diferentes combinações dos fatores A e B

$H_0: (\alpha\beta)_{ij} = 0$ para todo i, j vs. $H_{ij}: (\alpha\beta)_{ij} \neq 0$ para, pelo menos, uma combinação, ij está testando a não existência de efeito da interação .

2.4 Estimação dos parâmetros do modelo adotado

A estimação dos parâmetros do modelo $Y_{ijk} = \mu + \alpha_i + \beta_j + \gamma_{ij} + \epsilon_{ijk}$ pode ser efetuada pela aplicação do método dos mínimos quadrados. Conforme descreveu Kirk (1982), entre outros, os estimadores dos parâmetros são obtidos através da minimização da seguinte função:

$$L = \sum_{i=1}^a \sum_{j=1}^b \sum_{k=1}^r (y_{ijk} - \mu - \alpha_i - \beta_j - \gamma_{ij})^2$$

Calculando-se as derivadas parciais da função obtiveram-se as seguintes equações:

$$\mu : abn \hat{\mu} + bn \sum_{i=1}^a \hat{\alpha}_i + \sum_{j=1}^b \hat{\beta}_j + n \sum_{i=1}^a \sum_{j=1}^b \hat{\gamma}_{ij} = y_{...}$$

$$\alpha_i : bn \hat{\mu} + bn \hat{\alpha}_i + n \sum_{j=1}^b \hat{\beta}_j + n \sum_{j=1}^b \hat{\gamma}_{ij} = y_{i..} \quad i=1, \dots, a$$

$$\beta_j : n \hat{\mu} + n \hat{\beta}_j + n \sum_{i=1}^a \hat{\alpha}_i + n \hat{\beta}_j + n \sum_{i=1}^a \hat{\gamma}_{ij} = y_{.j} \quad j=1, \dots, b$$

$$\gamma_{ij} : n \hat{\mu} + n \hat{\alpha}_i + n \hat{\beta}_j + n \hat{\gamma}_{ij} = y_{ij} \quad i=1, \dots, a, j=1, \dots, b$$

Estas equações constituem o sistema de equações normais, o qual é sempre consistente, mas indeterminado, possuindo várias soluções (Searle, 1971, Lemma, 1987). Para obter uma das possíveis soluções os autores usaram as seguintes restrições:

$$\sum_{i=1}^a \hat{\alpha}_i = 0, \quad \sum_{j=1}^b \hat{\beta}_j = 0, \quad \sum_{i=1}^a \hat{\gamma}_{ij} = 0 \quad \text{e} \quad \sum_{j=1}^b \hat{\gamma}_{ij} = 0$$

Assim procedendo, obtiveram-se as expressões que definem os estimadores dos parâmetros, os quais estão apresentados na Tabela 2.

TABELA 2. Parâmetros e seus respectivos estimadores no caso de um experimento fatorial de dois fatores.

Parâmetro	Estimador
μ	$\bar{y}_{...}$
α_i	$\bar{y}_{i..} - \bar{y}_{...}$
β_j	$\bar{y}_{.j} - \bar{y}_{...}$
γ_{ij}	$\bar{y}_{ij.} - \bar{y}_{i..} - \bar{y}_{.j} + \bar{y}_{...}$

Usando os estimadores na Tabela 2, os autores afirmaram que os valores estimados das observações y_{ijk} , ou o "BLUE" (melhor estimador) de y_{ijk} é obtido por:

$$\hat{y}_{ijk} = \hat{\mu} + \hat{\alpha}_i + \hat{\beta}_j + \hat{\gamma}_{ij}$$

$$= \bar{y} + (\bar{y}_{i.} - \bar{y}) + (\bar{y}_{.j} - \bar{y}) + (\bar{y}_{ij.} - \bar{y}_{i.} - \bar{y}_{.j} + \bar{y})$$



Simplificando, obtiveram

$$\hat{y}_{ijk} = \bar{y}_{ij}$$

ou seja, o melhor estimador para as observações y_{ijk} é a média aritmética da ij -ésima combinação dos níveis dos tratamentos.

E, para testar adequadamente as diferentes hipóteses apresentadas na seção 2.3, deve-se conhecer as esperanças dos quadrados médios, com a finalidade de estabelecer as respectivas estatísticas F. Assim, Nogueira (1991) e Kirk (1982) mostraram que as esperanças matemáticas dos quadrados médios de um experimento fatorial de dois fatores foram:

$$(i) E[QM_A] = E\left(\frac{SQ_A}{a-1}\right) = \sigma^2 + \frac{bn \sum_{i=1}^a \alpha_i^2}{a-1},$$

$$(ii) E[QM_B] = E\left(\frac{SQ_B}{b-1}\right) = \sigma^2 + \frac{an \sum_{j=1}^b \beta_j^2}{b-1}$$

$$(iii) E[QM_{AxB}] = E\left(\frac{SQ_{AxB}}{(a-1)(b-1)}\right) = \sigma^2 + \frac{n \sum_{i=1}^a \sum_{j=1}^b \gamma_{ij}^2}{(a-1)(b-1)}$$

$$(iv) E[QM_{RESIDUO}] = E\left(\frac{SQ_{RESIDUO}}{abn-1}\right) = \sigma^2$$

Observou-se que o $QM_{RESIDUO}$ é um estimador não viesado de σ^2 e que, se as hipóteses de nulidade são verdadeiras, então QMA , QMB e $QMAxB$ são todos estimadores não viesados de σ^2 .

Aplicando o teorema de Cochran para um experimento fatorial de dois fatores em um delineamento inteiramente casualizado, Neter, e Wasserman (1974), verificaram que:

- (i) $\frac{SQ_A}{\sigma^2}$, sob H_0 , tem distribuição de χ^2 com $(a - 1)$ graus de liberdade;
- (ii) $\frac{SQ_B}{\sigma^2}$, sob H_0 , tem distribuição χ^2 com $(b - 1)$ graus de liberdade;
- (iii) $\frac{SQ_{AxB}}{\sigma^2}$, sob H_0 , tem distribuição χ^2 com $(a - 1)(b - 1)$ graus de liberdade;
- (iv) $\frac{SQ_{RESIDUO}}{\sigma^2}$, tem distribuição χ^2 com $(ab - 1)(n - 1)$ graus de liberdade;
- (v) SQ_A, SQ_B, SQ_{AxB} e $SQ_{RESIDUO}$ são independentes.

Com base nessas considerações, verificaram ,ainda sob H_0 , que:

- (a) $\frac{QM_A}{QM_{RES}}$, tem distribuição de F com $(a - 1)$ e $(ab - 1)(n - 1)$ graus de liberdade;
- (b) $\frac{QM_B}{QM_{RES}}$, tem distribuição de F com $(b - 1)$ e $(ab - 1)(n - 1)$ graus de liberdade;
- (c) $\frac{QM_{AxB}}{QM_{RES}}$, tem distribuição de F $(a - 1)(b - 1)$ e $(ab - 1)(n - 1)$ graus de liberdade

Assim, o esquema da análise de variância com aplicação do teste F é o apresentado na Tabela 3.

TABELA 3. Esquema da análise de variância para um experimento fatorial com dois fatores (A e B), em um delineamento inteiramente, de acordo com Snedecor e Cochran (1980).

C.V.	GL	SQ	QM	E[QM]	F
Fator A	(I-1)	SQ _A	QM _A	$\sigma^2 + bn \varphi(\alpha)$	$\frac{QM_A}{QM_{RES}}$
Fator B	(J-1)	SQ _B	QM _B	$\sigma^2 + an \varphi(\beta)$	$\frac{QM_B}{QM_{RES}}$
Interação (I-1)(J-1)		SQ _{AxB}	QM _{AxB}	$\sigma^2 + n \varphi(\gamma)$	$\frac{QM_{AxB}}{QM_{RES}}$
Resíduo	[(I-1)(J-1)]	SQM _{RES}	QM _{RES}	σ^2	
Total	(IJK-1)	SQ _{TOTAL} = $\sum_{i=1}^I \sum_{j=1}^J \sum_{k=1}^K (y_{ijk} - \bar{y})^2$			

As somas de quadrados são obtidas da seguinte maneira:

$$SQ_{TOTAL} = \sum_{i=1}^I \sum_{j=1}^J \sum_{k=1}^K (y_{ijk} - \bar{y})^2, = \sum_{i=1}^I \sum_{b=1}^J \sum_{k=1}^K y_{ijk}^2 - \frac{y_{...}^2}{ijk}, \text{ associado a}$$

(IJK - 1) graus de liberdade.

$$SQ_A = JK \sum_{i=1}^I (\bar{y}_{i..} - \bar{y}_{...})^2 = \frac{1}{JK} \sum_{i=1}^I y_{i..}^2 - \frac{y_{...}^2}{ijk}, \text{ associado a (I - 1) graus de}$$

liberdade.

$$SQ_B = IK \sum_{j=1}^J (\bar{y}_{.j.} - \bar{y}_{...})^2 = \frac{1}{IK} \sum_{j=1}^J y_{.j.}^2 - \frac{y_{...}^2}{IJK}, \text{ associado a (J - 1) graus de}$$

liberdade

$$SQ_{AxB} = K \sum_{i=1}^I \sum_{j=1}^J (\bar{y}_{ij.} - \bar{y}_{i..} - \bar{y}_{.j.} + \bar{y}_{...})^2$$

$SQ_{AxB} = SQ_{A,B} - SQ_A - SQ_B$, associado a $(I - 1) (J - 1)$ graus de liberdade, sendo que

$$SQ_{A,B} = \frac{1}{K} \sum_{i=1}^I \sum_{j=1}^J y_{ij.}^2 - \frac{y_{...}^2}{IJK}$$

$$SQ_{RESÍDUO} = \sum_{i=1}^I \sum_{j=1}^J \sum_{k=1}^K (y_{ijk} - \bar{y}_{ij.} - \bar{y}_{.k} + \bar{y}_{...})^2$$

$SQ_{RESÍDUO} = SQ_{TOTAL} - SQ_A - SQ_B - SQ_{AxB} - SQ_{BLOCOS}$, associado a $(IJ - 1) (K - 1)$ graus de liberdade.

Os quadrados médios são obtidos da seguinte forma:

$$QM_A = \frac{SQ_A}{(I - 1)}$$

$$QM_B = \frac{SQ_B}{(J - 1)}$$

$$QM_{AxB} = \frac{SQ_{AxB}}{(I - 1)(J - 1)}$$

$$QM_{RESÍDUO} = \frac{SQ_{RESÍDUO}}{(IJ - 1)(K - 1)}$$

Desta forma, podem-se rejeitar ao nível α de significância, as seguintes hipóteses:

- (1) $H_0 : \alpha_i = 0$, para todo i ; quando $\frac{QM_A}{QM_{RESIDUO}} \geq F_{[\alpha, I-1, (U-1)(K-1)]}$
- (2) $H_0 : \beta_j = 0$, para todo j ; quando $\frac{QM_B}{QM_{RESIDUO}} \geq F_{[\alpha, J-1, (U-1)(K-1)]}$
- (3) $H_0 : \gamma_{ij} = 0$, para todo i e j ; quando $\frac{QM_{AxB}}{QM_{RESIDUO}} \geq F_{[\alpha, (I-1)(J-1), (U-1)(K-1)]}$

2.5 Desdobramento da interação AxB significativa

Ainda segundo Snedecor e Cochran (1980), quando a interação entre fatores é significativa, mostra que existe uma dependência entre os níveis dos mesmos e, tal fato pode mascarar a significância dos respectivos efeitos principais. Considerando que a interação AxB entre dois fatores, seja significativa, então a resposta do fator A não é a mesma em todos os níveis do fator B ou vice-versa. Assim, é necessário estudar o efeito de um dos fatores nos diferentes níveis do outro. Entretanto deve-se optar por um dos dois possíveis tipos de desdobramentos, isto é, estudar A nos níveis de B ou B nos níveis de A.

2.5.1 Decomposição dos graus de liberdade da interação AxB mais os graus de liberdade do fator A

Neste caso, o modelo adotado foi:

$$y_{ijk} = \mu + \alpha_{i(j)} + \beta_j + e_{ijk}$$

em que:

$\alpha_{i(j)}$ é o efeito do nível i do fator A dentro do nível j do fator B, definido como:

$$\alpha_{i(j)} = \mu_{i(j)} - \mu_j, \text{ tal que } \sum_{i=1}^I \alpha_{i(j)} = 0, \text{ para todo } j:$$

$\mu_{i(j)}$ é a média populacional da variável dependente do nível i do fator A, dado o nível j do fator B;

μ_j é a média populacional da variável dependente do nível j do fator B.

As hipóteses a serem testadas, neste caso são:

$$H_0 : \alpha_{i(j)} = 0, \text{ para todo } i \text{ vs. } H_0 : \alpha_{i(j)} \neq 0, \text{ para algum } i$$

ou ainda,

$$H_0 := \mu_{1(j)} = \mu_{2(j)} = \dots = \mu_{I(j)} \text{ vs. } H_0 = \text{pelo menos } \mu_{i(j)} \neq \mu_{i'(j)} \text{ para } i \neq i'$$

Essas hipóteses serão testadas pelo teste F aplicado à análise de variância, conforme pode constatar-se na Tabela 4.

TABELA 4. Esquema de análise de variância de um experimento fatorial com dois fatores, no delineamento inteiramente casualizados, considerando a decomposição da interação AxB mais o fator A.

CV	GL	SQ	QM	E[QM]	F
B	(J - 1)	SQ _B			
A(B ₁)	(I - 1)	SQ _{A(B1)}	QM _{A(B1)}	$\sigma^2 + \frac{K}{I-1} \sum_{i=1}^I \alpha_{i(1)}^2$	$\frac{QMA_{(B1)}}{QM_{RES}}$
A(B ₂)	(I - 1)	SQ _{A(B2)}	QM _{A(B2)}	$\sigma^2 + \frac{K}{I-1} \sum_{i=1}^I \alpha_{i(2)}^2$	$\frac{QMA_{(B2)}}{QM_{RES}}$
...
A(B _j)	(I - 1)	SQ _{A(Bj)}	QM _{A(Bj)}	$\sigma^2 + \frac{K}{I-1} \sum_{i=1}^I \alpha_{i(j)}^2$	$\frac{QMA_{(Bj)}}{QM_{RES}}$
A(B)	J(I - 1)	SQ _{A(B)}			
Resíduo	(IJ - 1) (K - 1)	SQ _{RESÍDUO}		QM _{RESÍDUO}	σ^2
Total	(IJK - 1)	SQ_{TOTAL}			

As somas de quadrados são obtidas da seguinte forma:

$$SQB(A_i) = K \sum_{i=1}^I (\bar{y}_{i(j)} - \bar{y}_{.j})^2 = \frac{1}{K} \sum_{i=1}^I y_{i(j)}^2 - \frac{y_{.j}^2}{JK}, \text{ associado a } (I - 1) \text{ graus}$$

de liberdade; verificando que:

$$SQA(B_1) + SQA(B_2) + \dots + SQA(B_j) = \sum_{j=1}^J SQA(B_j) = SQA(B), \text{ associado a}$$

$J(I - 1) = (I - 1)(J - 1) + (I - 1)$ graus de liberdade;

De maneira semelhante, as demais somas de quadrados são determinadas de acordo com as expressões apresentadas na seção 2.6.

Os quadrados médios são obtidos da seguinte maneira:

$$QM_B = \frac{SQ_B}{(J - 1)}$$

$$QM_{A(Bj)} = \frac{SQ_{A(Bj)}}{(I - 1)}$$

$$QM_{RESIDUO} = \frac{SQ_{RESIDUO}}{(IJ - 1)(K - 1)}$$

Dessa forma, rejeita-se ao nível de significância a hipótese:

$H_0 : \alpha_{(i)} = 0$, para todo i ; quando

$$\frac{QMA_{(Bj)}}{QM_{RES}} \geq F_{[\alpha, I-1, (IJ-1)(K-1)]}$$

2.5.2 Decomposição dos graus de liberdade da interação AxB mais os graus de liberdade do fator B

Neste caso, o modelo adotado foi:

$$y_{ijk} = \mu + \alpha_i + \beta_{(i)j} + e_{ijk}$$

em que:

$\beta_{(i)j}$ é o efeito do nível j do fator B dentro do nível i do fator A, definido como:

$$\beta_{(i)j} = \mu_{(i)j} - \mu_{i..}, \text{ tal que } \sum_{j=1}^J \beta_{(i)j} = 0, \text{ para todo } i:$$

$\mu_{(i)j}$ é a média de ocorrência do efeito de tratamento sobre o parâmetro estudado dependente do nível j , do fator B, dentro do nível i do fator A, e

$\mu_{i..}$ é a média populacional da variável dependente do nível i do fator A.

As hipóteses a serem testadas, neste caso são:

$H_0 : \beta_{(i)j} = 0, \text{ para todo } j \text{ vs. } H_1 : \beta_{(i)j} \neq 0, \text{ para algum } j$
ou ainda,

$H_0 : = \mu_{(i)1} - \mu_{(i)2} = \dots = \mu_{(i)j} \text{ vs. } H_1 = \text{pelo menos } \mu_{(i)j} \neq \mu_{(i)j'}, \text{ para } j \neq j'$

Essas hipóteses serão testadas pelo teste F aplicado à análise de variância, conforme Tabela 5.

TABELA 5. Esquema da análise de variância de um experimento fatorial com dois fatores, no delineamento inteiramente casualizado, considerando a decomposição da interação AxB mais o fator B.

CV	GL	SQ	QM	E[QM]	F
A	(I - 1)	SQ _A			
B(A ₁)	(J - 1)	SQ _{B(A₁)}	QM _{B(A₁)}	$\sigma^2 + \frac{K}{J-1} \sum_{j=1}^J \beta_{(1)j}^2$	$\frac{QMB_{(A1)}}{QM_{RES}}$
B(A ₂)	(J - 1)	SQ _{B(A₂)}	QM _{B(A₂)}	$\sigma^2 + \frac{K}{J-1} \sum_{j=1}^J \beta_{(2)j}^2$	$\frac{QMB_{(A2)}}{QM_{RES}}$
...
B(A _i)	(J - 1)	SQ _{B(A_i)}	QM _{B(A_i)}	$\sigma^2 + \frac{K}{J-1} \sum_{j=1}^J \beta_{(i)j}^2$	$\frac{QMB_{(Ai)}}{QM_{RES}}$
B(A)	I(J - 1)	SQ _{B(A)}			
Resíduo (IJ - 1)(K - 1)		SQ _{RESÍDUO}	QM _{RESÍDUO}	σ^2	
Total	(IJK - 1)	SQ _{TOTAL}			

As somas de quadrados são obtidas da seguinte forma:

$$SQB(A_i) = K \sum_{j=1}^J (\bar{y}_{(i)j} - \bar{y}_{i..})^2 = \frac{1}{K} \sum_{j=1}^J \bar{y}_{(i)j}^2 - \frac{y_{i..}^2}{JK}, \text{ associado a } (I - 1) \text{ graus de}$$

liberdade; verificando que:

$$SQB(A_1) + SQB(A_2) + \dots + SQB(A_i) = \sum_{i=1}^I SQB(A_i) = SQB(A), \text{ associado a}$$

$$I(J - 1) = (I - 1)(J - 1) + (J - 1) \text{ graus de liberdade;}$$

As demais somas de quadrados são determinadas de acordo com as expressões apresentadas em 2.6.

Os quadrados médios são obtidos da seguinte maneira:

$$QM_A = \frac{SQ_A}{(I-1)}$$

$$QM_{B(Ai)} = \frac{SQ_{B(Ai)}}{(J-1)}$$

$$QM_{RESÍDUO} = \frac{SQ_{RESÍDUO}}{(IJ-1)(K-1)}$$

Desta forma, rejeita-se ao nível de significância α a hipótese:

$H_0 : \beta_{(ij)} = 0$, para todo j ; quando

$$\frac{QMB_{(Ai)}}{QM_{RES}} \geq F_{[\alpha, J-1, (IJ-1)(K-1)]}$$

Assim, o esquema da análise de variância com as expressões adequadas para aplicação do teste “F,” de acordo com Kirk (1982), e Nogueira (1991), entre outros, está na Tabela 6.

TABELA 6. Esquema da análise de variância para um experimento fatorial com dois fatores (A e B), em um delineamento inteiramente casualizado.

C.V.	GL	SQ	QM	E[QM]	F
Tratamentos (ab-1)		SQ _{TRAT.}	QM _{TRAT.}	$\sigma^2 + b\phi(t)$	$\frac{QM_{TRAT.}}{QM_{RES.}}$
Fator A (a-1)		SQ _A	QM _A	$\sigma^2 + bn\phi(\alpha)$	$\frac{QM_A}{QM_{RES}}$
Fator B (b-1)		SQ _B	QM _B	$\sigma^2 + na\phi(\beta)$	$\frac{QM_B}{QM_{RES}}$
AxB (a-1)(b-1)		SQ _{AXB}	QM _{AXB}	$\sigma^2 + n\phi(\gamma)$	$\frac{QM_{AXB}}{QM_{RES}}$
Resíduo [ab(n-1)]		SQ _{RES}	QM _{RES}	σ^2	
Total (abn-1)		SQ _{TOTAL}			

Na Tabela 6, as somas de quadrados podem ser obtidas por meio das seguintes expressões:

$$SQ_{TOTAL} = \sum_{i=1}^a \sum_{j=1}^b \sum_{k=1}^r (y_{ijk} - \bar{y})^2 = \sum_{i=1}^a \sum_{j=1}^b \sum_{k=1}^r y_{ijk}^2 - C, \text{ associado a } (abr - 1)$$

graus de liberdade

$$C = \frac{(y_{...})^2}{abr}$$

$$SQ_A = \sum_{i=1}^a (\bar{y}_i - \bar{y})^2 = \frac{1}{br} \sum_{i=1}^a y_{i..}^2 - C, \text{ associado a } (a - 1) \text{ graus de liberdade.}$$

$$SQ_B = \sum_{j=1}^b (\bar{y}_j - \bar{y})^2 = \frac{1}{ar} \sum_{j=1}^b y_{.j.}^2 - C, \text{ associado a } (b - 1) \text{ graus de liberdade.}$$

$$SQ_{A,B} = SQ_{TRATAMENTOS} = n \sum_{i=1}^a \sum_{j=1}^b (\bar{y}_{ij} - \bar{y})^2 = \frac{1}{r} \sum_{i=1}^a \sum_{j=1}^b y_{ij}^2 - C, \text{ associado a}$$

(ab - 1) graus de liberdade

$$SQ_{AxB} = SQ_{A,B} - SQ_A - SQ_B = (\bar{y}_{ij} - \bar{y}_i - \bar{y}_j + \bar{y})^2, \text{ associado a } (a - 1) (b - 1)$$

graus de liberdade

$$SQ_{RESÍDUO} = \sum_{i=1}^a \sum_{j=1}^b \sum_{k=1}^r (y_{ijk} - \bar{y}_{...})^2 - \sum_{i=1}^a \sum_{j=1}^b \sum_{k=1}^r (\bar{y}_{ik} - \bar{y}_{...})^2$$

$$SQ_{RESÍDUO} = SQ_{TOTAL} - SQ_{TRATAMENTOS}$$

Kirk (1982) e Banzatto e Kronka (1995) consideraram que a interpretação de um experimento fatorial depende dos resultados dos testes de significância para a interação e fatores isolados, a saber:

(1) se a interação AB é significativa então a interpretação da análise de variância dos efeitos dos fatores A e B não tem real significado sendo eles significantes ou não. Isto se deve ao fato de que, com a interação, os efeitos do fator A dependem do nível do fator B e a média para um nível do fator A, que é ponderada sobre todos os níveis de B, tem pouco significado, pois traz informações misturadas dos níveis do fator B.

Neste caso, os resultados do experimento são melhor sumariados em uma tabela com as médias e respectivos desvios-padrão de todos os AB tratamentos.

(2) se a interação não é significativa então os fatores são independentes e a diferença a existir entre os níveis de A é essencialmente a mesma para todos os níveis de B.

Neste caso, os resultados podem ser sumariados em uma tabela com as médias dos fatores que são significativos.

2.6 Experimento fatorial com dois fatores em blocos completamente casualizados

Cochran e Cox (1957), apresentaram o seguinte modelo linear para um experimento fatorial com dois fatores, instalado em blocos casualizados:

$$y_{ijk} = \mu + \alpha_i + \beta_j + \gamma_{ij} + \rho_k + \varepsilon_{ijk}$$

em que:

y_{ijk} : é o valor observado do nível i do fator α combinado com o nível j do fator β na repetição k ;

μ : é uma constante associada a todas as observações;

α_i : é o efeito do i -ésimo nível do fator A, definido por:

$$\alpha_i = \mu_{i.} - \mu$$

β_j : é o efeito do j -ésimo nível do fator B, definido por:

$$\beta_j = \mu_{.j} - \mu$$

os efeitos α_i e β_j , $i = 1, \dots, a$ e $j = 1, \dots, b$ são denominados efeitos principais.

γ_{ij} : é o efeito da interação entre o nível i do fator A e o nível j do fator B, definido por:

$$\gamma_{ij} = \mu_{ij} - (\mu + \alpha_i + \beta_j) = \mu_{ij} - \mu_{i.} - \mu_{.j} + \mu$$

ρ_k : é o efeito do bloco k definido por

$$\rho_k = \mu_{..k} - \mu$$

$\mu_{..}$ é a média populacional da variável dependente no bloco k; e $\rho_k \sim N(0, \sigma^2_\rho)$ independentes;

ε_{ijk} : é o erro experimental associado a observação y_{ijk} .

A análise de variância e o teste F são obtidos de maneira semelhante ao experimento fatorial em um delineamento inteiramente casualizado, diferindo apenas com a inclusão do fator bloco.

Dividindo cada soma de quadrados pelos seus respectivos graus de liberdade encontrou-se o quadrado médio para cada causa de variação considerada. O valor da esperança matemática e para cada um dos quadrados médios é apresentado por:

$$(i) E[QM_A] = E\left(\frac{SQ_A}{a-1}\right) = \sigma^2 + \frac{JK \sum_{i=1}^a \alpha_i^2}{a-1};$$

$$(ii) E[QM_B] = E\left(\frac{SQ_B}{b-1}\right) = \sigma^2 + \frac{IK \sum_{j=1}^b \beta_j^2}{b-1};$$

$$(iii) E[QM_{AxB}] = E\left(\frac{SQ_{AxB}}{(a-1)(b-1)}\right) = \sigma^2 + \frac{K \sum_{i=1}^a \sum_{j=1}^b \gamma_{ij}^2}{(a-1)(b-1)};$$

$$(iv) E[QM_{BLOCOS}] = E\left(\frac{SQ_{BLOCOS}}{n-1}\right) = \sigma^2 + \frac{ab}{n-1} \sigma^2_\rho$$

$$(v) E[QM_{RESIDUO}] = E\left(\frac{SQ_{RESIDUO}}{abn-1}\right) = \sigma^2$$

Aplicando o teorema de Cochran em um experimento fatorial de dois fatores Neter, e Wasserman (1974) verificaram que:

- (vi) $\frac{SQ_A}{\sigma^2}$, sob H_0 , tem distribuição de χ^2 com $(a - 1)$ graus de liberdade;
- (vii) $\frac{SQ_B}{\sigma^2}$, sob H_0 , tem distribuição χ^2 com $(b - 1)$ graus de liberdade;
- (viii) $\frac{SQ_{AxB}}{\sigma^2}$, sob H_0 , tem distribuição χ^2 com $(a - 1)(b - 1)$ graus de liberdade;
- (ix) $\frac{SQ_{BLOCOS}}{\sigma^2}$, sob H_0 , tem distribuição χ^2 com $(n - 1)$ graus de liberdade;
- (x) $\frac{SQ_{RESIDUO}}{\sigma^2}$, tem distribuição χ^2 com $(ab - 1)(n - 1)$ graus de liberdade;
- (xi) $SQ_A, SQ_B, SQ_{AxB}, SQ_{BLOCOS}$ e $SQ_{RESIDUO}$ são independentes.

Por essas considerações, verificam-se ainda sob H_0 , que:

- (d) $\frac{QM_A}{QM_{RES}}$, tem distribuição de F com $(a - 1)$ e $(ab - 1)(n - 1)$ graus de liberdade;
- (e) $\frac{QM_B}{QM_{RES}}$, tem distribuição de F com $(b - 1)$ e $(ab - 1)(n - 1)$ graus de liberdade;
- (f) $\frac{QM_{AxB}}{QM_{RES}}$, tem distribuição de F com $(a - 1)(b - 1)$ e $(ab - 1)(n - 1)$ graus de liberdade

Assim, o esquema da análise de variância com aplicação do teste F, é o apresentado na Tabela 7.

TABELA 7. Esquema da análise de variância para um experimento fatorial com dois fatores (A e B), em um delineamento em blocos casualizado, de acordo com Cochran e Cox (1957).

C.V.	GL	SQ	QM	E[QM]	F
Fator A	(I-1)	SQ _A	QM _A	$\sigma^2 + bn \varphi(\alpha)$	$\frac{QM_A}{QM_{RES}}$
Fator B	(J-1)	SQ _B	QM _B	$\sigma^2 + an \varphi(\beta)$	$\frac{QM_B}{QM_{RES}}$
Interação (I-1)(J-1)		SQ _{AxB}	QM _{AxB}	$\sigma^2 + n \varphi(\gamma)$	$\frac{QM_{AxB}}{QM_{RES}}$
Blocos	(K-1)	SQ _{BLOCOS}	QM _{BLOCOS}		
Resíduo	[(IJ-1)(K-1)]	SQM _{RES}	QM _{RES}	σ^2	
Total	(IJK-1)	SQ _{TOTAL} = $\sum_{i=1}^I \sum_{j=1}^J \sum_{k=1}^K (y_{ijk} - \bar{y})^2$			

As somas de quadrados são obtidas da seguinte maneira:

$$SQ_{TOTAL} = \sum_{i=1}^I \sum_{j=1}^J \sum_{k=1}^K (y_{ijk} - \bar{y}_{...})^2, = \sum_{i=1}^I \sum_{b=1}^J \sum_{k=1}^K y_{ijk}^2 - \frac{y_{...}^2}{ijk}, \text{ associado a}$$

(IJK - 1) graus de liberdade.

$$SQ_A = JK \sum_{i=1}^I (\bar{y}_{i..} - \bar{y}_{...})^2 = \frac{1}{JK} \sum_{i=1}^I y_{i..}^2 - \frac{y_{...}^2}{ijk}, \text{ associado a (I - 1) graus de}$$

liberdade.

$$SQ_B = IK \sum_{j=1}^J (\bar{y}_{.j.} - \bar{y}_{...})^2 = \frac{1}{IK} \sum_{j=1}^J y_{.j.}^2 - \frac{y_{...}^2}{IJK}, \text{ associado a (J - 1) graus de}$$

liberdade

$$SQ_{AxB} = K \sum_{i=1}^I \sum_{j=1}^J (\bar{y}_{ij.} - \bar{y}_{i..} - \bar{y}_{.j.} + \bar{y}_{...})^2$$

$SQ_{AxB} = SQ_{A,B} - SQ_A - SQ_B$, associado a $(I - 1) (J - 1)$ graus de liberdade, sendo que

$$SQ_{A,B} = \frac{1}{K} \sum_{i=1}^I \sum_{j=1}^J y_{ij.}^2 - \frac{y_{...}^2}{IJK}$$

$SQ_{BLOCOS} = IJ \sum_{k=1}^K (\bar{y}_{..k} - \bar{y}_{...})^2 = \frac{1}{IJ} \sum_{k=1}^K y_{..ky}^2 - \frac{y_{...}^2}{IJK}$ associado a $(k - 1)$ graus de liberdade.

$$SQ_{RESIDUO} = \sum_{i=1}^I \sum_{j=1}^J \sum_{k=1}^K (y_{ijk} - \bar{y}_{ij.} - \bar{y}_{.jk} + \bar{y}_{...})^2$$

$SQ_{RESIDUO} = SQ_{TOTAL} - SQ_A - SQ_B - SQ_{AxB} - SQ_{BLOCOS}$, associado a $(IJ - 1) (K - 1)$ graus de liberdade.

Os quadrados médios são obtidos da seguinte forma:

$$QM_A = \frac{SQ_A}{(I - 1)}$$

$$QM_B = \frac{SQ_B}{(J - 1)}$$

$$QM_{AxB} = \frac{SQ_{AxB}}{(I - 1)(J - 1)}$$

$$QM_{RESIDUO} = \frac{SQ_{RESIDUO}}{(IJ - 1)(K - 1)}$$

Dessa forma, podem-se rejeitar, ao nível α de significância, as seguintes hipóteses:

$$(4) \quad H_0 : \alpha_i = 0, \text{ para todo } i; \text{ quando } \frac{QM_A}{QM_{RESIDUO}} \geq F_{[\alpha, I-1, (I-1)(K-1)]}$$

$$(5) \quad H_0 : \beta_j = 0, \text{ para todo } j; \text{ quando } \frac{QM_B}{QM_{RESIDUO}} \geq F_{[\alpha, J-1, (I-1)(K-1)]}$$

$$(6) \quad H_0 : \gamma_{ij} = 0, \text{ para todo } i \text{ e } j; \text{ quando } \frac{QM_{AxB}}{QM_{RESIDUO}} \geq F_{[\alpha, (I-1)(J-1), (I-1)(K-1)]}$$

2.6.1 Interação AxB é significativa

Ainda segundo Nogueira (1991), quando a interação for significativa, isso indica que pode haver comportamento diferenciado entre os níveis de um fator na presença dos níveis de outro fator e vice-versa. Quando ocorre interação, o correto é ignorar os efeitos principais e estudar a interação, o que é feito pela sua decomposição, procurando-se estudar o efeito de um fator dentro de cada nível do outro fator. Assim para um fatorial com dois fatores (A e B), é feito um estudo do efeito do fator A dentro de cada nível do fator B, ou ainda, o estudo do efeito do fator B dentro de cada nível do fator A. Neste caso, pode-se proceder à decomposição dos graus de liberdade da interação AxB mais os graus de liberdade de um dos fatores envolvidos na interação, obtendo-se duas formas de decomposição.

2.6.1.1 Decomposição dos graus de liberdade da interação AxB mais os graus de liberdade do fator B

Neste caso, o modelo adotado foi:

$$y_{ijk} = \mu + \alpha_i + \beta_{(i)j} + \rho_k + \epsilon_{ijk}$$

em que :

$\beta_{(i)j}$ é o efeito do nível j do fator B, dentro do nível i do fator A, definido como:

$$\beta_{(i)j} = \mu_{(i)j} - \mu_{i..}, \text{ tal que } \sum_{j=1}^J \beta_{(i)j} = 0, \text{ para todo } i:$$

$\mu_{(i)j}$ é a média de ocorrência do efeito de tratamento sobre o parâmetro estudado dependente do nível j do fator B dentro do nível i do fator A, e

$\mu_{i..}$ é a média populacional da variável dependente do nível i do fator A.

As hipóteses a serem testadas, neste caso são:

$$H_0 : \beta_{(i)j} = 0, \text{ para todo } j \text{ vs. } H_1 : \beta_{(i)j} \neq 0, \text{ para algum } j$$

ou ainda,

$$H_0 : \mu_{(i)1} = \mu_{(i)2} = \dots = \mu_{(i)j} \text{ vs. } H_1 = \text{ pelo menos } \mu_{(i)j} \neq \mu_{(i)j'} \text{ para } j \neq j'$$

Essas hipóteses serão testadas pelo teste F aplicado à análise de variância, conforme apresentadas na Tabela 8.

TABELA 8. Esquema da análise de variância de um experimento fatorial com dois fatores, no delineamento em blocos casualizados, considerando a decomposição da interação AxB mais o fator B.

CV	GL	SQ	QM	E[QM]	F
Blocos	(k - 1)	SQ _{BLOCOS}			
A	(I - 1)	SQ _A			
B(A ₁)	(J - 1)	SQ _{B(A1)}	QM _{B(A1)}	$\sigma^2 + \frac{K}{J-1} \sum_{j=1}^J \beta_{(1)j}^2$	$\frac{QMB_{(A1)}}{QM_{RES}}$
B(A ₂)	(J - 1)	SQ _{B(A2)}	QM _{B(A2)}	$\sigma^2 + \frac{K}{J-1} \sum_{j=1}^J \beta_{(2)j}^2$	$\frac{QMB_{(A2)}}{QM_{RES}}$
...
B(A _I)	(J - 1)	SQ _{B(AI)}	QM _{B(AI)}	$\sigma^2 + \frac{K}{J-1} \sum_{j=1}^J \beta_{(I)j}^2$	$\frac{QMB_{(AI)}}{QM_{RES}}$
B(A)	I(J - 1)	SQ _{B(A)}			
Resíduo	(IJ - 1) (K - 1)	SQ _{RESÍDUO}	QM _{RESÍDUO}	σ^2	
Total	(IJK - 1)	SQ _{TOTAL}			

As somas de quadrados são obtidas da seguinte forma:

$$SQB(A_i) = K \sum_{j=1}^J (\bar{y}_{(i)j} - \bar{y}_{i..})^2 = \frac{1}{K} \sum_{j=1}^J \bar{y}_{(i)j}^2 - \frac{y_{i..}^2}{JK}, \text{ associado a } (I - 1) \text{ graus de}$$

liberdade; verificando que:

$$SQB(A_1) + SQB(A_2) + \dots + SQB(A_I) = \sum_{i=1}^I SQB(A_i) = SQB(A), \text{ associado a}$$

$I(J - 1) = (I - 1)(J - 1) + (J - 1)$ graus de liberdade;

As demais somas de quadrados são determinadas de acordo com as expressões apresentadas em 2.6.

E os quadrados médios são obtidos da seguinte maneira:

$$QM_A = \frac{SQ_A}{(I-1)}$$

$$QM_{B(Ai)} = \frac{SQ_{B(Ai)}}{(J-1)}$$

$$QM_{RESIDUO} = \frac{SQ_{RESIDUO}}{(IJ-1)(K-1)}$$

Desta forma, rejeita-se ao nível de significância α a hipótese:

$H_0 : \beta_{(ij)} = 0$, para todo j ; quando

$$\frac{QMB_{(Ai)}}{QM_{RES}} \geq F_{[\alpha, J-1, (IJ-1)(K-1)]}$$

2.6.1.2 Decomposição dos graus de liberdade da interação $A \times B$ mais os graus de liberdade do fator A

Neste caso o modelo adotado foi:

$$y_{ijk} = \mu + \alpha_{i(j)} + \beta_j + \rho_k + e_{ijk}$$

em que :

$\alpha_{i(j)}$ é o efeito do nível i do fator A dentro do nível j do fator B, definido como:

$$\alpha_{i(j)} = \mu_{i(j)} - \mu_j, \text{ tal que } \sum_{i=1}^I \alpha_{i(j)} = 0, \text{ para todo } j:$$

$\mu_{i(j)}$ é a média populacional da variável dependente do nível i do fator A dado o nível j do fator B, e

μ_j é a média populacional da variável dependente do nível j do fator B.

As hipóteses a serem testadas, neste caso são:

$$H_0 : \alpha_{i(j)} = 0, \text{ para todo } i \text{ vs. } H_0 : \alpha_{i(j)} \neq 0, \text{ para algum } i$$

ou ainda,

$$H_0 : \mu_{1(j)} = \mu_{2(j)} = \dots = \mu_{I(j)} \text{ vs. } H_0 = \text{pelo menos } \mu_{i(j)} \neq \mu_{i'(j)} \text{ para } i \neq i'$$

Essas hipóteses serão testadas pelo teste F aplicado à análise de variância, conforme Tabela 9.

TABELA 9. Esquema de análise de variância de um experimento fatorial com dois fatores, no delineamento em blocos casualizados, considerando a decomposição da interação AxB mais o fator A.

CV	GL	SQ	QM	E[QM]	F
Blocos	(k - 1)	SQ _{BLOCOS}			
B	(J - 1)	SQ _B			
A(B ₁)	(I - 1)	SQ _{A(B1)}	QM _{A(B1)}	$\sigma^2 + \frac{K}{I-1} \sum_{i=1}^I \alpha_{i(1)}^2$	$\frac{QMA_{(B1)}}{QM_{RES}}$
A(B ₂)	(I - 1)	SQ _{A(B2)}	QM _{A(B2)}	$\sigma^2 + \frac{K}{I-1} \sum_{i=1}^I \alpha_{i(2)}^2$	$\frac{QMA_{(B2)}}{QM_{RES}}$
...
A(B _J)	(I - 1)	SQ _{A(BJ)}	QM _{A(BJ)}	$\sigma^2 + \frac{K}{I-1} \sum_{i=1}^I \alpha_{i(J)}^2$	$\frac{QMA_{(BJ)}}{QM_{RES}}$
A(B)	J(I - 1)	SQ _{A(B)}			
Resíduo	(IJ - 1) (K - 1)	SQ _{RESÍDUO}	QM _{RESÍDUO}	σ^2	
Total	(IJK - 1)	SQ _{TOTAL}			

As somas de quadrados são obtidas da seguinte forma:

$$SQB(A_i) = K \sum_{i=1}^I (\bar{y}_{i(j)} - \bar{y}_{.j})^2 = \frac{1}{K} \sum_{i=1}^I y_{i(j)}^2 - \frac{y_{.j}^2}{JK}, \text{ associado a } (I - 1) \text{ graus}$$

de liberdade; verificando que:

$$SQA(B_1) + SQA(B_2) + \dots + SQA(B_j) = \sum_{j=1}^J SQA(B_j) = SQA(B), \text{ associado a}$$

$$J(I - 1) = (I - 1)(J - 1) + (I - 1) \text{ graus de liberdade;}$$

De maneira semelhante, as demais somas de quadrados são determinadas de acordo com as expressões apresentadas na seção (2.6).

E os quadrados médios são obtidos da seguinte maneira:

$$QM_B = \frac{SQ_B}{(J-1)}$$

$$QM_{A(Bj)} = \frac{SQ_{A(Bj)}}{(I-1)}$$

$$QM_{RESIDUO} = \frac{SQ_{RESIDUO}}{(JJ-1)(K-1)}$$

Desta forma, rejeita-se ao nível de significância a hipótese:

$H_0 : \alpha_{i(j)} = 0$, para todo i ; quando

$$\frac{QMA_{(Bj)}}{QM_{RES}} \geq F_{[\alpha, I-1, (JJ-1)(K-1)]}$$

2.7 Notação R(.)

Searle (1971) mostrou que o estudo de modelos mais complexos do que os de classificação simples, os quais envolvem a média, um fator e o erro experimental, permite comparar a adequação destes modelos para o mesmo conjunto de dados. Visto que na identidade

$$SQ_{ERRO} = SQ_{TOTAL} - SQ_R$$

Tem-se SQ_R como a redução na soma de quadrados total devido ao ajuste de algum modelo em particular, SQ_R é uma medida de variação de y , explicada por esse modelo.

A comparação de diversos modelos que se ajustam a um determinado conjunto de dados pode ser feita entre os diferentes valores da SQ_R que resultam do ajuste destes modelos.

Para facilitar a discussão das comparações, o autor considerou SQ_R como uma redução na soma de quadrados total, que é simbolizada por $R(\cdot)$, com os conteúdos dos parâmetros indicando o modelo ajustado. Logo, ao ajustar

$$y_{ij} = \mu + \alpha_i + \varepsilon_{ij}$$

a redução na soma de quadrados total devido aos parâmetros μ e α_i é $R(\mu, \alpha)$, indicando, no modelo, que houve um ajuste, considerando os parâmetros μ e α . Similarmente, $R(\mu, \alpha, \beta)$ é a redução na soma de quadrados total para ajustar os parâmetros do modelo

$$y_{ij} = \mu + \alpha_i + \beta_j + \varepsilon_{ij},$$

e $R(\mu, \alpha, \beta : \alpha)$ é a redução devido aos parâmetros, no ajuste do modelo hierárquico

$$y_{ijk} = \mu + \alpha_i + \beta_{j/i} + \varepsilon_{ijk},$$

o símbolo $\beta : \alpha$ na $R(\mu, \alpha, \beta : \alpha)$ indica que o fator β está inserido dentro do fator α . A extensão para modelos mais complexos é facilmente realizada, e

todas as vezes a letra R é mencionada para “reduções” na soma de quadrados e não para “residual”, como empregada por alguns autores.

Para o modelo

$$y_i = \mu + \varepsilon_i$$

tem-se a equação normal $N\mu = y$. A redução correspondente na soma de quadrados, $R(\mu)$, é interpretada como sendo $N\bar{y}^2 = \frac{(\sum_i y_i)^2}{N}$. Mas $N\bar{y}^2$ é, para todos os modelos, a soma de quadrados da correção (SQ_C), comumente usada na estatística experimental, Portanto,

$$R(\mu) = N\bar{y}^2 = SQ_C.$$

Já com o modelo de classificação simples

$$y_{ij} = \mu + \alpha_i + \varepsilon_{ij}$$

a redução na soma de quadrados $R(\mu, \alpha)$ é

$$SQ_R = R(\mu, \alpha) = \frac{(\sum y_{i.})^2}{n_i},$$

e, conseqüentemente,

$$SQ_{Rm} = SQ_R - SQ_C = R(\mu, \alpha) - R(\mu)$$

sendo SQ_{R_m} a diferença entre a redução na soma de quadrados, devido ao ajuste de dois modelos diferentes, um contendo μ e um fator α e o outro contendo apenas μ . Uma interpretação equivalente é que a diferença $R(\mu, \alpha) - R(\mu)$ é a redução devido ao ajuste de “ α já tendo ajustado μ ”, ou ao ajuste de α após μ . Em vista disso, usa-se o símbolo $R(\alpha/\mu)$ para essa diferença. Logo

$$R(\alpha/\mu) = R(\mu, \alpha) - R(\mu).$$

A notação $R(\cdot)$ admite extensões, como por exemplo

$$R(\alpha/\mu, \beta) = R(\mu, \alpha, \beta) - R(\mu, \beta)$$

que representa a redução na soma de quadrados devido ao ajuste de “ α após μ e β ”. Isto é, trata-se da redução devida ao ajuste de um modelo contendo μ , um fator α e um fator β , tendo já ajustado um modelo contendo μ e um fator β . É uma medida do grau no qual um modelo pode explicar mais de uma variação em y tendo nele, de maneira específica, algo mais do que apenas μ e um fator β .

Todos os termos $R(\cdot)$ são, por definição, as somas de quadrados de reduções (SQ_{R_s}) de algum modelo. Portanto, sua expressão é da seguinte forma

$$y'X(X'X)^-X'y$$

em que X é a matriz associada ao modelo, sendo $X(X'X)^-X$ matriz com propriedade de ser simétrica e idempotente, com status de projetor e núcleo de uma forma quadrática. Portanto, para $y \sim N(\mu, \sigma^2 I)$ e qualquer vetor μ , a

distribuição de $R(\cdot)/\sigma^2$ é uma distribuição qui-quadrado (χ^2) não central e independente da SQ_{ERRO} (Searle, 1987).

Supondo que $R(b_1, b_2)$ seja a redução para ajustar $y = Xb_1 + Zb_2 + \varepsilon$, e que $R(b_1)$ seja a redução para ajustar $y = Xb_1 + \varepsilon$, então segundo Searle (1971) pode-se mostrar que $R(b_2/b_1)/\sigma^2$ tem uma distribuição (χ^2) não central, independente da $R(b_1)$ e da SQ_{ERRO} . Consequentemente, sempre que a redução na soma de quadrados $R(b_1, b_2)$ para ajustar um modelo for desdobrada como $R(b_1, b_2) = R(b_2/b_1) + R(b_1)$, sabe-se que tanto $R(b_2/b_1)$ quanto $R(b_1)$ tem distribuições (χ^2) não centrais e que são independentes uma da outra e da SQ_{ERRO} .

Mischan e Pinho (1996), adotando o modelo (1), consideram que o mesmo apresenta um parâmetro μ , a parâmetros α , b parâmetros β e s parâmetros γ ; logo o número total de parâmetros neste modelo é:

$$p = 1 + a + b + s$$

Os experimentos fatoriais com dois fatores foram descritos por Mischan e Pinho (1996), por meio da notação matricial. Assim, para um delineamento inteiramente casualizado, podem ser escritos na seguinte forma:

$$y = Xb + e$$

em que:

y : é o vetor das observações, de dimensões $n \times 1$;

X : é a matriz do delineamento, de dimensões $n \times p$;

b : é o vetor dos parâmetros, de dimensões $p \times 1$;

e : é o vetor do erros experimentais, de dimensões $n \times 1$.

O sistema de equações normais representado por $X'Xb^0 = X'y$, apresenta várias soluções.

Os autores consideram a análise de variância sendo realizada em duas etapas ou partes. A primeira análise de variância considera que a soma de quadrados total é repartida como $SQ_{TOTAL} = SQ_{MODELO} + SQ_{RESÍDUO}$, sendo que:

A SQ_{TOTAL} , sem correção, é

$$SQ_{TOTAL} = y'y = \sum_{i=1}^a \sum_{j=1}^b \sum_{k=1}^{n_{ij}} y_{ijk}^2 \text{ associada a } n_{..} = r[I_{(a)}] \text{ graus de liberdade}$$

e, a SQ devido ao ajustamento do modelo (1) é

$$SQ_{MODELO} = SQ(\mu, \alpha, \beta, \gamma) = b^0' X'y, \text{ associada a } r[X] \text{ graus de liberdade.}$$

Então,

$$SQ_{RESÍDUO} = y'y - b^0' X'y,$$

e está associada a $n_{..} - s$ graus de liberdade.

O número de graus de liberdade associados à soma de quadrados de ajustamento de um modelo $y = Xb + e$ é sempre o posto X (ou de $X'X$). Na Tabela 10 está apresentado o esquema desta primeira análise de variância.

TABELA 10. Primeira análise de variância

C.V.	G.L.	S.Q.	Q.M.
Modelo ($\mu, \alpha, \beta, \gamma$)	s	SQ_{MODELO}	QM_{MODELO}
Resíduo	$n_{..} - s$	$SQ_{RESÍDUO}$	$QM_{RESÍDUO}$
Total sem correção	$n_{..}$	SQ_{TOTAL}	

Decomposição da SQ_{MODELO}

Os autores consideram que a soma de quadrados devido ao ajuste do modelo pode ser repartida nas somas de quadrados, considerando a contribuição de cada parâmetro do modelo, sendo apresentadas na seguinte forma:

$$SQ(\mu) = C = \frac{(y_{...})^2}{n_{..}}, \text{ com 1 gl}$$

$$SQ(\mu, \alpha) = \sum_{i=1}^a \frac{y_{i.}^2}{n_{i.}}, \text{ com a gl}$$

$$SQ(\mu, \beta) = \sum_{j=1}^b \frac{y_{.j}^2}{n_{.j}}, \text{ com b gl}$$

$$SQ(\mu, \alpha, \beta) = b' X' y$$

$$SQ(\mu, \alpha, \beta, \gamma) = SQ_{\text{TRATAMENTOS}} + C$$

Após a decomposição da SQ_{MODELO} , o esquema da análise de variância considerado encontra-se na Tabela 11.

TABELA 11. Esquema da análise de variância para um experimento fatorial com dois fatores (A e B), em um delineamento inteiramente casualizado.

C.V.	G.L.	SQ
Tratamentos	(ab-1)	$SQ(\mu, \alpha, \beta, \gamma) - SQ(\mu)$
Fator A	(a-1)	$SQ(\alpha/\mu) = SQ(\mu, \alpha) - SQ(\mu)$
Fator B	(b-1)	$SQ(\beta/\mu) = SQ(\mu, \beta) - SQ(\mu)$
AxB	(a-1)(b-1)	$SQ(\gamma/\mu, \alpha, \beta) = SQ(\mu, \alpha, \beta, \gamma) - SQ(\mu, \alpha, \beta)$
Resíduo	[ab(n-1)]	$\sum_{i=1}^a \sum_{j=1}^b \sum_{k=1}^{n_{ij}} y_{ijk}^2 - SQ(\mu, \alpha, \beta, \gamma)$
Total	(abn-1)	$\sum_{i=1}^a \sum_{j=1}^b \sum_{k=1}^{n_{ij}} y_{ijk}^2 - SQ(\mu) = \sum_{i=1}^a \sum_{j=1}^b \sum_{k=1}^{n_{ij}} y_{ijk}^2 - C$

As somas de quadrados são obtidas da seguinte maneira:

$$C = SQ(\mu) = \frac{(y_{...})^2}{abn}$$

$$SQ_{TOTAL} = \sum_{i=1}^a \sum_{j=1}^b \sum_{k=1}^n y_{ijk}^2 - C$$

$$SQ_{TRATAMENTOS} = SQ(\mu, \alpha, \beta, \gamma) - C = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^a \sum_{j=1}^b y_{ij.}^2 - C$$

$$SQ_A = SQ(\mu, \alpha) - SQ(\mu) = \frac{1}{bn} \sum_{i=1}^a y_{i..}^2 - C$$

$$SQ_B = SQ(\mu, \beta) - SQ(\mu) = \frac{1}{an} \sum_{j=1}^b y_{.j.}^2 - C$$

$$SQ_{AxB} = SQ(\gamma | \mu, \alpha, \beta) = SQ_{TRAT} = SQ_A - SQ_B$$

$$SQ_{RESÍDUO} = \sum_{i=1}^a \sum_{j=1}^b \sum_{k=1}^n y_{ijk}^2 - \frac{1}{n} \sum_{i=1}^a \sum_{j=1}^b y_{ij.}^2$$

2.8 Experimentos fatoriais com tratamentos adicionais

A inclusão de um ou mais tratamentos adicionais em uma estrutura unifatorial ou fatorial é muito comum e pode ser importante para servir de termo de referência para a avaliação dos efeitos dos demais tratamentos e, também

para obtenção de informações complementares. Podem ainda ser incluídos com o intuito de diminuir o número de tratamentos.

Quando se planeja um experimento fatorial, em algumas vezes há interesse, como mostrado por Yates (1937), na inclusão de tratamentos extras fora do esquema fatorial usual. Assim, Healy (1956) apresentou uma análise de variância para um experimento fatorial de três fatores com dois tratamentos adicionais. O exemplo citado pelo autor se refere a um experimento de adubação utilizando um fatorial 2^3 , no qual foram testados os nutrientes nitrogênio, fósforo e potássio, sendo cada um avaliado com duas doses: presença e ausência. Os oito tratamentos foram arranjados em dois blocos de quatro parcelas, confundindo a interação tripla. Duas parcelas extras foram incluídas em cada bloco, uma com um tratamento orgânico e a outra sem nutriente nenhum (testemunha). Para a análise de variância foram realizadas duas análises em separado, sendo uma análise para os tratamentos comuns (fatorial) e outra para os adicionais.

Desse modo, como os tratamentos adicionais foram aleatorizados com os outros, as duas estimativas dos resíduos são comparáveis e podem ser reunidas para formação de um resíduo médio. Segundo o autor este resíduo médio pode ser usado para avaliar a precisão do experimento e alguns contrastes entre médias de tratamentos, e ressaltou que somente princípios padrão de análise de variância estão envolvidos.

Tomando como exemplo um ensaio fatorial do tipo 3×3 , com três repetições, sendo incluído um tratamento adicional, Dumont (1963) considerou o seguintes esquemas de análise de variância:

Esquema proposto

CV	GL	
Fator A	2	
Fator B	2	(1)
Int. AB	4	
<hr/>		
Trat. fatoriais	8	
Adic. vs. fat.	1	(2)
<hr/>		
Todos os trat.	9	
Blocos	2	(3)
Resíduo	18	
<hr/>		
Total	29	
<hr/>		

sendo:

- (1) decomposição clássica de um experimento fatorial;
- (3) análise de variância para um experimento de 10 tratamentos com 3 repetições;
- (2) parte intermediária correspondente a 1 grau de liberdade, calculada pela diferença:
$$SQ \text{ todos tratamentos} - SQ \text{ fatorial} = SQ \text{ adicional vs. fatorial}$$

Um exemplo interessante de uso de tratamentos adicionais foi feito por Correa (1985), com a finalidade de reduzir o número de tratamentos, instalados em um experimento de campo. Para isso, considerou inicialmente que o objetivo da pesquisa era estudar o efeito de cinco doses de nitrogênio (N) (30, 50, 80, 100, 150kg/ha), em cinco variedades de cana-de-açúcar e duas doses de zinco (presença e ausência).

Um ensaio fatorial completo para estudar o comportamento das variedades de cana-de-açúcar diante destes fatores levaria ao seguinte esquema:

$5 \times 5 \times 2 = 50$ tratamentos. A partir da quantidade de tratamentos a serem instalados nota-se que a área necessária para as repetições seria imensa, além do mais a mão de obra necessária para a instalação e condução e o tempo necessário para avaliações, também seriam enormes.

Como uma alternativa para diminuir o número de tratamentos considerou a dose de zinco fixa, e lançou mão dos ensaios fatoriais com tratamentos adicionais.

Assim, o total de tratamentos ficou da seguinte forma;

$$5 \times 5 + 5 = 30 \text{ tratamentos}$$

constituídos por:

5 variedades

5 doses de nitrogênio

5 tratamentos adicionais

sendo que os adicionais foram;

T₁ – variedade A sem zinco

T₂ – variedade B sem zinco

T₃ – variedade C sem zinco

T₄ – variedade D sem zinco

T₅ – variedade E sem zinco

Utilizando-se deste artifício, reduziu-se o material experimental, o tamanho da área, a mão de obra, o tempo e o trabalho de avaliação.

Pereira (1999) estudou as relações do manganês na produção e outras características de duas cultivares de arroz. Os tratamentos constaram de 4 doses de manganês aplicados via solo (0,4,8, e 16 mg/dm³ de solo) e duas cultivares de arroz de sequeiro (canastra e confiança), além da aplicação via foliar (4 g L⁻¹), assim, tem-se um fatorial 4x2+2. As comparações mais interessantes feitas pelo autor foram que em cada cultivar ele comparou os resultados obtidos de cada dose aplicada ao solo com a adubação foliar utilizando o teste de Dunnett.

Oliveira et. al. (1999) avaliaram a influência da aplicação de uréia e vinhaça na degradação da lignocelulose e na liberação de nutrientes da palha de cana-de-açúcar. Os tratamentos foram constituídos de duas formas de aplicação da uréia (sobre a palha da cana recém colhida e no solo à profundidade de 15 cm) e duas fontes de potássio (KCl e vinhaça) e, ainda, um tratamento testemunha formado pela palhada recém colhida somente sem aplicação de uréia. Assim, tiveram um esquema fatorial $2 \times 2 + 1$. Os autores compararam os tratamentos (5), usando o teste de Tukey (5%), não levando em consideração a estrutura fatorial e nem a testemunha. Também, poderiam ter sido formulado importantes contrastes como: $C1 = 4m1 - m2 - m3 - m4 - m5$ (testemunha vs. fatorial) ou comparar a testemunha com as quatro combinações fatoriais (Dunnett) e, é claro, considerar a estrutura fatorial para verificar se os fatores fontes e formas de aplicação são dependentes.

Feippe (2000) estudou a influência da atmosfera modificada e do armazenamento no escurecimento interno de frutos de pessegueiro cv. Marli, utilizando um esquema fatorial. Os tratamentos foram constituídos de um esquema fatorial $2 \times 2 \times 3$, correspondente a dois sistemas de atmosfera (regular e modificada), dois períodos de armazenamento a 0°C (2 e 3 semanas) e três períodos sob temperatura de 20°C após o armazenamento refrigerado (0 e 4 dias). Outros quatro tratamentos foram constituídos pelos dois sistemas de atmosfera e armazenados por 2 e 4 dias. Além desses, utilizou um tratamento testemunha, que correspondeu na avaliação dos frutos logo após a colheita. O experimento foi instalado em um delineamento inteiramente casualizado, com três repetições e, o esquema da análise de variância empregado foi:

C.V.	G.L.
------	------

Tratamentos	16
Fator A	1
Fator B	1
Fator C	2
AxB	1
AxC	2
BxC	2
AxBxC	2
<i>ad</i> Outros	4
Fat. vs. <i>ad</i> outros	1
Resíduo	34

Outro exemplo citado é relatado por Pimentel Gomes (2000), o qual, apresentou um ensaio de adubação de milho em um esquema fatorial 3x3x3 com nitrogênio (N), fósforo (P) e potássio (K) com confundimento de 2 graus de liberdade da interação tripla. A cada um dos três blocos de 9 parcelas juntaram-se 5 tratamentos adicionais, os quais foram:

000

111

111 + calcário (C)

111 + micronutrientes (M)

111 + micronutrientes + calcário

Assim, cada bloco ficou com 14 parcelas, sendo 9 referente ao experimento fatorial e 5 referente aos tratamentos adicionais. A análise estatística foi feita em separadamente para o experimento fatorial e para os tratamentos adicionais, em seguida foi feita uma análise combinada envolvendo os tratamentos do experimento fatorial com os tratamentos adicionais, apresentados da seguinte forma:

Análise de variância para o experimento fatorial

C.V.	G.L.
Fósforo (P)	2
Potássio (K)	2
N x P	1
N x K	1
P x K	1
Blocos	2
Resíduo	15
Total	26

C.V.
NITROGENIO (N)

G.L.
2

Análise de variância para os tratamentos adicionais

C.V.	G.L.
Tratamentos	4
Blocos	2
Resíduo	8
Total	14

Análise de variância combinada

C.V.	G.L.
Nitrogênio linear (N')	1
Nitrogênio Quadrático (N'')	1
Fósforo linear (P')	1
Fósforo quadrático (P'')	1
Potássio linear (K')	1
Potássio quadrático (K'')	1
N' x P'	1
N' x K'	1
P' x K'	1
Tratamentos adicionais	4
Resíduo	23

Notando-se que o número de graus de liberdade para o resíduo, neste última análise, é a combinação (soma) dos graus de liberdade das duas análises anteriores.

3 METODOLOGIA

Este capítulo tem por finalidade apresentar a metodologia a ser utilizada para realizar a análise estatística de dados obtidos em um experimento fatorial de dois fatores com a inclusão de um ou mais tratamentos adicionais.

3.1 Caracterização

Com a finalidade de ilustrar a metodologia e facilitar as deduções e entendimentos e, ainda, sem perda de generalidades, apresentaram-se os dados da Tabela 12, referente a um experimento fatorial de dois fatores (cultivar e método de plantio) e dois tratamentos adicionais, conduzido em um delineamento inteiramente casualizado com duas repetições.

TABELA 12. Valores das produções de milho (t/ha) em função de duas cultivares e dois métodos, além de dois tratamentos adicionais.

Cultivar	Método de plantio	Repetição 1	Repetição 2	Soma	Média
A	1	3	5	8	4
	2	4	6	10	5
B	1	4	6	10	5
	2	8	10	18	9
Adi 1		7	9	16	8
Adi 2		10	12	22	11
Soma			74	84	7 : Média Geral

3.2 Um modelo linear

Um modelo linear para os experimentos fatoriais e que foi adotado para o desenvolvimento da metodologia é definido por:

$$y_{ijk} = \mu + \alpha_i + \beta_j + \gamma_{ij} + \varepsilon_{ijk} \quad (1)$$

com $i = 1, 2, \dots, I$; $j = 1, 2, \dots, J$; $k = 1, 2, \dots, K$

no qual:

y_{ijk} : é o valor observado do nível i do fator A combinado com o nível j do fator B na repetição k ;

μ : é uma constante associada a todas as observações;

α_i : é o efeito do i -ésimo nível do fator A;

β_j : é o efeito do j -ésimo nível do fator B;

γ_{ij} : é o efeito da interação entre o i -ésimo nível do fator A e o j -ésimo nível do fator B;

ε_{ijk} : é o erro experimental associado à observação y_{ijk} , considerado como uma variável aleatória idêntica e independentemente distribuída com média zero e variância constante.

Na forma matricial, o modelo linear (1) pode ser escrito como:

$$y = X\theta + \varepsilon \quad (2)$$

no qual:

y : é um vetor de realizações das variáveis aleatórias, de dimensões $n \times 1$;

X : é uma matriz dos coeficientes dos parâmetros do modelo, ou matriz do delineamento, de dimensões $n \times p$;

θ : é um vetor de parâmetros desconhecidos, de dimensões $p \times 1$;

ε : é um vetor de variáveis aleatórias não observáveis, de dimensões $n \times 1$, assume-se serem independentes e normalmente distribuídas, com $\varepsilon \sim N(\phi, I\sigma^2)$.

Os dados da Tabela 13, considerando os tratamentos adicionais, podem ser representados na forma matricial $y = X\theta + e$, da seguinte forma:

$$y_{11} = \mu + \alpha_1 + \beta_1 + \gamma_{11} + \tau_{11}$$

$$y_{21} = \mu + \alpha_1 + \beta_2 + \gamma_{12} + \tau_{11}$$

$$\begin{bmatrix} y_{111} = 3 \\ y_{112} = 5 \\ y_{121} = 4 \\ y_{122} = 6 \\ y_{211} = 4 \\ y_{212} = 6 \\ y_{221} = 8 \\ y_{222} = 10 \\ y_{a11} = 7 \\ y_{a12} = 9 \\ y_{a21} = 10 \\ y_{a22} = 12 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mu \\ \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \beta_1 \\ \beta_2 \\ \gamma_{11} \\ \gamma_{12} \\ \gamma_{21} \\ \gamma_{22} \\ \mu_a \\ \tau_1 \\ \tau_2 \end{bmatrix} + e$$

Conforme Lemma (1981) e Morais e Nogueira (1996), efetuando-se a partição da matriz X de modo conveniente, tem-se:

$$X = [X_1 : X_2 : X_3 : X_4 : X_5 : X_6]$$

sendo:

X_1 : o vetor composto de 1's (uns) referente aos coeficientes da constante μ referente aos tratamentos no experimento fatorial, de dimensões $(n) \times (1)$;

X_2 : a matriz dos coeficientes associados aos níveis do fator A, de dimensões $(n) \times (I)$;

X_3 : a matriz dos coeficientes associados aos níveis do fator B, de dimensões $(n) \times (J)$;

X_4 : a matriz dos coeficientes associados a interação AB, de dimensões $(n) \times (IJ)$;

X_5 : o vetor de 1's (uns) associados aos coeficientes da constante μ_a referente aos tratamentos adicionais, de dimensões $(n) \times (1)$;

X_6 : a matriz dos coeficientes associados aos tratamentos adicionais, de dimensões $(n) \times (a)$.

A partição do vetor dos parâmetros θ , correspondente ao particionamento da matriz X, é:

$$\theta = [\mu : \alpha : \beta : \gamma : \mu_a : \tau]$$

sendo:

μ constante referente aos tratamentos no experimento fatorial, de dimensão $(1) \times (1)$;

$$\alpha = \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \dots \\ \alpha_I \end{bmatrix} \text{ vetor dos efeitos dos níveis do fator A, de dimensões } (I) \times (1);$$

$$\beta = \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \dots \\ \beta_J \end{bmatrix} \text{ vetor dos efeitos dos n\u00edveis do fator B, de dimens\u00f5es (J) x (1);}$$

$$\gamma = \begin{bmatrix} \gamma_{11} \\ \gamma_{12} \\ \dots \\ \gamma_{IJ} \end{bmatrix} \text{ vetor dos efeitos dos n\u00edveis da intera\u00e7\u00e3o AB, de dimens\u00f5es (IJ) x (1);}$$

μ_a \u00e9 a constante referente aos tratamentos adicionais, de dimens\u00f5es (1) x (1);

$$\tau = \begin{bmatrix} \tau_1 \\ \tau_2 \\ \dots \\ \tau_a \end{bmatrix} \text{ vetor dos efeitos dos n\u00edveis dos tratamentos adicionais, de dimens\u00f5es}$$

(a) x (1).

3.3 Sistema de equa\u00e7\u00f5es normais

Dado o modelo $y = X\theta + \varepsilon$, o m\u00e9todo dos quadrados m\u00ednimos consiste em obter a solu\u00e7\u00e3o do vetor θ que minimiza a soma de quadrados dos elementos do vetor ε de erros. Portanto, para obter-se a solu\u00e7\u00e3o de θ , diferencia-se $\varepsilon'\varepsilon = (y - X\theta)'(y - X\theta)$ em rela\u00e7\u00e3o ao par\u00e2metro θ e iguala-se ao vetor nulo.

$$\frac{d(\varepsilon' \varepsilon)}{d\theta} = -2X'y + 2X'X\theta = 0$$

Utilizando-se o método dos quadrados mínimos no modelo (2), conforme Searle (1971, 1987), obteve-se o SEN (sistema de equações normais) seguinte:

$$X'X\theta^0 = X'y$$

Sendo que θ^0 representa uma solução qualquer de quadrados mínimos e X' é a matriz transposta de X .

Mediante as partições da matriz X e do vetor θ realizadas, o SEN resultou em:

$$\begin{bmatrix} X_1'X_1 & X_1'X_2 & X_1'X_3 & X_1'X_4 & X_1'X_5 & X_1'X_6 \\ X_2'X_1 & X_2'X_2 & X_2'X_3 & X_2'X_4 & X_2'X_5 & X_2'X_6 \\ X_3'X_1 & X_3'X_2 & X_3'X_3 & X_3'X_4 & X_3'X_5 & X_3'X_6 \\ X_4'X_1 & X_4'X_2 & X_4'X_3 & X_4'X_4 & X_4'X_5 & X_4'X_6 \\ X_5'X_1 & X_5'X_2 & X_5'X_3 & X_5'X_4 & X_5'X_5 & X_5'X_6 \\ X_6'X_1 & X_6'X_2 & X_6'X_3 & X_6'X_4 & X_6'X_5 & X_6'X_6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mu^0 \\ \alpha^0 \\ \beta^0 \\ \gamma^0 \\ \mu_a^0 \\ \tau^0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X_1'y \\ X_2'y \\ X_3'y \\ X_4'y \\ X_5'y \\ X_6'y \end{bmatrix} \quad (3)$$

no qual as submatrizes têm a seguinte composição:

$X_1'X_1$: é uma submatriz, de dimensões (1) x (1), constituída pelo número total de observações associados aos tratamentos do esquema fatorial, ou seja, por $IJK = n$;

$X_1'X_2 = [JK, \dots, JK]$: é uma submatriz, de dimensões (1) x (I) correspondente ao número de repetições dos níveis do fator A;

$X_1'X_3 = [IK, \dots, IK]$: vetor linha associado ao número de repetições dos níveis do fator B, de dimensões $(1) \times (J)$;

$X_1'X_4 = [K, K, \dots, K]$: é uma submatriz, de dimensões $(1) \times (IJ)$, correspondente ao vetor linha associado ao número de repetições da interação AB;

$X_1'X_5 = [0]$: vetor de zero, de dimensões $(1) \times (1)$;

$X_1'X_6 = [0, 0, \dots, 0]$: vetor nulo de dimensões $(1) \times (a)$;

$X_2'X_2 = \text{diag. } \{ JK, \dots, JK \}$: matriz diagonal associada ao número de repetições dos níveis do fator A, de dimensões $(I) \times (I)$;

$X_2'X_3 = \begin{bmatrix} K & K & \dots & K \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ K & K & \dots & K \end{bmatrix}$: é uma submatriz, de dimensões $(I) \times (J)$,

correspondente ao número de incidência dos níveis do fator A nos níveis do fator B;

$X_2'X_4 = \begin{bmatrix} K & K & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & 0 & K & \dots & K \end{bmatrix}$: é uma submatriz, de dimensões

$(I) \times (IJ)$, correspondente ao número de incidência dos níveis do fator A nos pares γ_{ij} , da interação

$X_2'X_5 = [0]$: vetor nulo, de dimensões $(I) \times (1)$;

$$X_2'X_6 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix} : \text{submatriz nula, de dimensões (I) x (a);}$$

$X_3'X_3 = \text{diag. \{IK, IK, \dots, IK\}}$: matriz diagonal associada ao número de repetições dos níveis do fator B, de dimensões (J) x (J);

$$X_3'X_4 = \begin{bmatrix} K & 0 & K & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & K & 0 & \dots & K \end{bmatrix} \text{ é a submatriz de incidência dos níveis do}$$

fator B nos pares γ_{ij} , da interação, de dimensões (J) x (IJ);

$X_3'X_5 = [0]$: vetor nulo, de dimensões (J) x (1);

$$X_3'X_6 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix} : \text{submatriz nula, de dimensões (J) x (a);}$$

$$X_4'X_4 = \begin{bmatrix} K & 0 & \dots & 0 \\ 0 & K & 0 & \dots \\ \dots & 0 & K & 0 \\ 0 & \dots & & K \end{bmatrix} : \text{é uma submatriz diagonal, de dimensões}$$

(IJ) x (IJ), associada ao número de repetições dos pares γ_{ij} da interação;

$X_4'X_5 = [0]$: vetor nulo, de dimensões (IJ) x (1);

$$X_4'X_6 = \begin{bmatrix} 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & 0 \end{bmatrix} : \text{submatriz nula, de dimensões (IJ) x (1);}$$

$X_5'X_5 = [K_a]$: número total de observações associadas aos tratamentos adicionais;

$X_5'X_6 = [K, \dots, K]$: vetor linha associado ao número de repetições dos tratamentos adicionais, de dimensões (1) x (a);

$$X_6'X_6 = \begin{bmatrix} K & 0 & \dots & 0 \\ 0 & K & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & 0 & K \end{bmatrix} : \text{submatriz diagonal dos números de repetições dos}$$

tratamentos adicionais, de dimensões (a) x (a).

$X_1'y = [y_{\dots}]$: é um vetor, de dimensões (1) x (1), referente ao total geral observado nos tratamentos fatoriais;

$$X_2'y = \begin{bmatrix} y_{1..} \\ y_{2..} \\ \dots \\ y_{I..} \end{bmatrix} : \text{é um vetor, de dimensões (I) x (1), referente aos totais}$$

observados para os níveis do fator A:

$$X'_{3y} = \begin{bmatrix} y_{.1} \\ y_{.2} \\ \dots \\ y_{.J} \end{bmatrix} : \text{é um vetor, de dimensões } (J) \times (1), \text{ referente aos totais}$$

observados para os níveis do fator B;

$$X'_{4y} = \begin{bmatrix} y_{11.} \\ y_{12.} \\ \dots \\ y_{IJ.} \end{bmatrix} : \text{é um vetor, de dimensões } (IJ) \times (1), \text{ referente aos totais}$$

observados para as combinações dos níveis dos fatores A e B;

$X'_{5y} = [y_{a.}]$: é um vetor, de dimensões $(1) \times (1)$, referente ao total das observações dos tratamentos adicionais;

$$X'_{6y} = \begin{bmatrix} y_{a1.} \\ y_{a2.} \\ \dots \\ y_{al.} \end{bmatrix} : \text{é um vetor, de dimensões } (a) \times (1), \text{ referente aos totais}$$

observados para os níveis dos tratamentos adicionais;

Para o exemplo em questão, tem-se que o sistema de equações normais

é:

$$\begin{bmatrix}
 8 & 4 & 4 & 4 & 4 & 2 & 2 & 2 & 2 & 0 & 0 & 0 \\
 4 & 4 & 0 & 2 & 2 & 2 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 4 & 0 & 4 & 2 & 2 & 0 & 0 & 2 & 2 & 0 & 0 & 0 \\
 4 & 2 & 2 & 4 & 0 & 2 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 4 & 2 & 2 & 2 & 4 & 0 & 2 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\
 2 & 2 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 2 & 2 & 0 & 2 & 2 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 2 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 2 & 0 & 2 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 4 & 2 & 2 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 2 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 2
 \end{bmatrix}
 \begin{bmatrix}
 \mu_F \\
 \alpha_1 \\
 \alpha_2 \\
 \beta_1 \\
 \beta_2 \\
 \gamma_{11} \\
 \gamma_{12} \\
 \gamma_{21} \\
 \gamma_{22} \\
 \mu_A \\
 \tau_1 \\
 \tau_2
 \end{bmatrix}
 =
 \begin{bmatrix}
 y_{..} \\
 y_{1..} \\
 y_{2..} \\
 y_{.1} \\
 y_{.2} \\
 y_{11} \\
 y_{12} \\
 y_{21} \\
 y_{22} \\
 y_{..} \\
 y_{a1} \\
 y_{a2}
 \end{bmatrix}
 =
 \begin{bmatrix}
 46 \\
 18 \\
 28 \\
 18 \\
 28 \\
 8 \\
 10 \\
 10 \\
 18 \\
 38 \\
 16 \\
 22
 \end{bmatrix}$$

no qual as submatrizes são:

$$X_1'X_1 = [n]_{=n_{..}} = 8$$

$$X_1'X_2 = [Jr \quad Jr] = [n_{.1} \quad n_{.2}] = [4 \quad 4]$$

$$X_1'X_3 = [Ir \quad Ir] = [n_{.1} \quad n_{.2}] = [4 \quad 4]$$

$$X_1'X_4 = [r \quad r \quad r \quad r] = [n_{11} \quad n_{12} \quad n_{21} \quad n_{22}] = [2 \quad 2 \quad 2 \quad 2]$$

$$X_1'X_5 = [0]$$

$$X_1'X_6 = {}_{(1)}[a \quad a] = [n_1 \quad n_2] = [0 \quad 0]$$

$$X_2 X_2 = \begin{bmatrix} Jr & 0 \\ 0 & Jr \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}$$

$$X_2 X_3 = \begin{bmatrix} r & r \\ r & r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$$

$$X_2 X_4 = \begin{bmatrix} r & r & 0 & 0 \\ 0 & 0 & r & r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \end{bmatrix}$$

$$X_2 X_5 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$X_2 X_6 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$X_3 X_3 = \begin{bmatrix} Ir & 0 \\ 0 & Ir \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}$$

$$X_3 X_4 = \begin{bmatrix} r & 0 & r & 0 \\ 0 & r & 0 & r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

$$X_3 X_5 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$X_3 X_6 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$X_4 X_4 = \begin{bmatrix} r & 0 & 0 & 0 \\ 0 & r & 0 & 0 \\ 0 & 0 & r & 0 \\ 0 & 0 & 0 & r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & & & \\ & 2 & & \\ & & 2 & \\ & & & 2 \end{bmatrix} = \text{diag}\{2 \ 2 \ 2 \ 2\}$$

$$X_4 X_5 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$X_4 X_6 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$X_5 X_5 = [n_a] = 4$$

$$X_5 X_6 = [r \ r] = [2 \ 2]$$

$$X_6 X_6 = \begin{bmatrix} r & 0 \\ 0 & r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & \\ & 2 \end{bmatrix} = \text{diag}\{2 \ 2\}$$

Nas submatrizes, efetuando-se as multiplicações sugeridas em (3), o sistema de equações normais pode ser escrito como:

$$X'_1 X_1 \mu + X'_1 X_2 \alpha + X'_1 X_3 \beta + X'_1 X_4 \gamma + X'_1 X_5 \mu_a + X'_1 X_6 \tau = X'_1 y$$

$$X'_2 X_1 \mu + X'_2 X_2 \alpha + X'_2 X_3 \beta + X'_2 X_4 \gamma + X'_2 X_5 \mu_a + X'_2 X_6 \tau = X'_2 y$$

$$X'_3 X_1 \mu + X'_3 X_2 \alpha + X'_3 X_3 \beta + X'_3 X_4 \gamma + X'_3 X_5 \mu_a + X'_3 X_6 \tau = X'_3 y$$

$$X'_4 X_1 \mu + X'_4 X_2 \alpha + X'_4 X_3 \beta + X'_4 X_4 \gamma + X'_4 X_5 \mu_a + X'_4 X_6 \tau = X'_4 y$$

$$X'_5 X_1 \mu + X'_5 X_2 \alpha + X'_5 X_3 \beta + X'_5 X_4 \gamma + X'_5 X_5 \mu_a + X'_5 X_6 \tau = X'_5 y$$

$$X'_6 X_1 \mu + X'_6 X_2 \alpha + X'_6 X_3 \beta + X'_6 X_4 \gamma + X'_6 X_5 \mu_a + X'_6 X_6 \tau = X'_6 y$$

3.4 Solução do sistema de equações normais

Devido as características da matriz ${}_n X_p$, esta possui posto incompleto, $r\{X\} < p$. Então o sistema de equações normais possui infinitas soluções. O número de equações do SEN ou o número de parâmetros é $p = 1+I+J+IJ+1+a$. Para o exemplo em questão, tem-se $p = 12$, mas pode-se verificar em $X'X\theta^0 = X'y$ que existem algumas linhas que são linearmente dependentes:

- i) entre as equações do fator A e a equação da constante μ há uma dependência,

$$l_1 = l_2 + l_3$$

- ii) entre as equações do fator B e a constante μ , existe uma dependência,

$$l_1 = l_4 + l_5$$

iii) entre as equações da interação e as do fator A, existem I dependências,

$$l_2 = l_6 + l_7$$

$$l_3 = l_8 + l_9$$

iv) entre as equações de interação e as do fator B, existem J dependências,

$$l_4 = l_6 + l_8$$

$$l_5 = l_7 + l_9$$

Entretanto, das J dependências, apenas J-1 delas são linearmente independentes daquelas já descritas. Assim, existem $1 + I + J$ relações lineares dependentes no esquema fatorial. Para o exemplo em questão, tem-se $1 + 2 + 2 = 5$ relações linearmente dependentes.

Considerando apenas os tratamentos adicionais verifica-se que existe uma dependência linear entre as equações de μ_a e as equações dos tratamentos adicionais, assim

$$l_{10} = l_{11} + l_{12}$$

Desse modo, tem-se $2+I+J$ dependências lineares. Logo, o posto da matriz X ou $X'X$ é;

$$r[X] = p - (2+I+J) = IJ+a$$

Então o sistema de equações normais não tem solução única, pois sendo X uma matriz de posto incompleto, a matriz $X'X$ é uma matriz singular. Portanto não existe $(X'X)^{-1}$ e o sistema de equações normais é indeterminado, porém é sempre consistente (Iemma 1988).

Uma solução de quadrados mínimos para o sistema de equações normais pode ser obtida por meio de:

$$= \begin{bmatrix} {}_1\phi_1 \\ {}_I\phi_1 \\ {}_J\phi_1 \\ (X_4'X_4)^{-1}X_4'y \\ {}_1\phi_1 \\ (X_6'X_6)^{-1}X_6'y \end{bmatrix}$$

sendo:

${}_1\phi_1, {}_I\phi_1, \dots, {}_J\phi_1$ matrizes nulas;

$(X_4'X_4)^{-1}X_4'y$ vetor com as médias da interação;

$(X_6'X_6)^{-1}X_6'y$ vetor com as médias dos tratamentos adicionais.

3.5 Análise de variância

3.5.1 Obtenção das somas de quadrados

Dado que $\hat{y} = X\theta^0$ é a aproximação de mínimos quadrados para o vetor y das observações e é invariante para qualquer θ^0 , soluções das equações normais, verifica-se que

$$\hat{y} = X(X'X)^G X'y = Py$$

sendo $P = X(X'X)^G X' = XX^L = XX^L$, um projetor ortogonal de y sobre o sub-espaço vetorial R^p pelas colunas de X , $C(X)$ (Iemma 1991).

Devido a ortogonalidade e aplicando-se o teorema de Pitágoras, obtém-se a decomposição ortogonal clássica da análise de variância:

$$\|y\|^2 = \|\hat{y}\|^2 + \|\hat{\varepsilon}\|^2$$

$$y'y = \hat{y}'\hat{y} + \hat{\varepsilon}'\hat{\varepsilon}$$

$$y'y = y'P'y + \hat{\varepsilon}'\hat{\varepsilon}$$

sendo P uma matriz simétrica e idempotente, tem-se

$$y'y = y'P'y + \hat{\varepsilon}'\hat{\varepsilon}$$

ou

$$y'y = y'X(X'X)^G X'y + \hat{\varepsilon}'\hat{\varepsilon}$$

ou ainda

$$y'y = \theta^0 X'y + \hat{\varepsilon}'\hat{\varepsilon}$$

Logo, chega-se que:

$$\hat{\varepsilon}'\hat{\varepsilon} = \text{SQ}_{\text{RESÍDUO}} = y'y - \theta^0 X'y = y [I - P] y$$

Da teoria dos modelos lineares, como em Searle (1971), a soma de quadrados dos parâmetros é

$$\text{SQ}_{\text{PARÂMETROS}} = \theta^0 X'y =$$

$$= [\phi_1 \phi_1 \phi_1 \phi_1 \phi_1 \phi_1 y'X_4 (X_4'X_4)^{-1} \phi_1 y'X_6 (X_6'X_6)^{-1} X_6] \begin{bmatrix} X_1'y \\ X_2'y \\ X_3'y \\ X_4'y \\ X_5'y \\ X_6'y \end{bmatrix}$$

$$\text{SQ}_{\text{PARÂMETROS}} = y'X_4(X_4'X_4)^{-1}X_4'y + y'X_6(X_6'X_6)^{-1}X_6'y$$

$$\text{SQ}_{\text{PARÂMETROS}} = y'P_4y + y'P_6y$$

sendo: $P_4 = X_4(X_4'X_4)^{-1} X_4'$

e $P_6 = X_6(X_6'X_6)^{-1} X_6'$

Desenvolvendo, obteve-se:

$$SQ_{PARÂMETROS} = \sum_{ij} \bar{y}_{ij} \cdot y_{ij} + \sum_e \bar{y}_{ae} \cdot y_{ae}$$

ou

$$SQ_{PARÂMETROS} = \sum_{ij} \frac{1}{n_{ij}} y_{ij}^2 + \sum_e \frac{1}{r_e} y_{ae}^2$$

sendo :

n_{ij} o número de repetições da interação ij;

r_e o número de repetições do tratamento adicional e;

y_{ij} total observado da interação ij;

y_{ae} total observado do tratamento adicional e.

No caso de mesmo número de repetições, tem-se $n_{ij} = r_e = K$

Assim, a soma de quadrado de resíduo é

$$SQ_{RES.} = \sum_{ijk} y_{ijk}^2 + \sum_{ej} y_{aej}^2 - \sum_{ij} \frac{1}{n_{ij}} y_{ij}^2 - \sum_e \frac{1}{r_e} y_{ae}^2$$

Nos casos em que o número de repetições é o mesmo para todos os tratamentos, ou seja $n_{ij} = r_e = r$, tem-se

$$SQ_{RES} = \sum_{ijk} y_{ijk}^2 + \sum_{ej} y_{aek}^2 - \frac{1}{r} \sum_{ij} y_{ij}^2 - \frac{1}{r} \sum_e y_{ae}^2$$

ou ainda

$$= \sum_{ij} \left[\sum_k y_{ijk}^2 - \frac{1}{r} y_{ij}^2 \right] + \sum_e \left[\sum_k y_{aek}^2 - \frac{1}{r} y_{ae}^2 \right]$$

Desse modo, um esquema da análise de variância é apresentado na Tabela 13. Nota-se que o resíduo é constituído por duas somas, uma referente aos tratamentos fatoriais e outra aos tratamentos adicionais. O que ocorre, do mesmo modo com os parâmetros.

TABELA 13. Esquema da análise de variância

C.V.	G.L.	S.Q.	Q.M.	F _c
Parâmetros	$r[X] = p$	$\theta^0 X'y = y' P_4 y + y' P_6 y$	QM_P	$\frac{QM_P}{QM_R}$
Resíduo	$n - p$	$y'y - \theta^0 X'y$	QM_R	
Total	$r(I_n)$	$y'y$		

A soma de quadrado de parâmetros pode ser particionada de modo conveniente com a finalidade de avaliar os efeitos dos fatores de A, B, interação e tratamentos adicionais.

3.5.2 Modelos reduzidos

Para obter as somas de quadrados das diversas causas de variação de um experimento fatorial com tratamentos adicionais, foram considerados vários sub-modelos, obtidos de parametrizações sucessivas. Cada um deles possui uma matriz X específica, uma soma de quadrados de parâmetros, representada por $R(\cdot)$, que corresponde à redução ocorrida na variação total (SQ_{TOTAL}) devido ao modelo definido em $R(\cdot)$ e um vetor de soluções do sistema de equações normais. Logo, pela diferença entre as somas de quadrados dos parâmetros de dois modelos obtêm-se as somas de quadrados dos fatores considerados A, B, interação e adicionais.

(i) Redução para μ

O modelo reduzido, mais simples, é $y_{ijk} = \mu + e_{ijk}$, sendo que y_{ijk} , μ e e_{ijk} são definidos como em (1). Na forma matricial, e considerando as partições sugeridas em (3.2), o modelo é

$$y = X_1 + \varepsilon$$

Conforme Searle (1987) e Iemma (1991), a soma de quadrados do parâmetro μ ou a redução para μ é:

$$R(\mu) = y' X_1 (X_1' X_1)^{-1} X_1' y = y' P_1 y$$

sendo $P_1 = X_1 (X_1' X_1)^{-1} X_1'$, uma matriz simétrica e idempotente de posto $r[P_1] = r[X_1] = 1$. Desenvolvendo a expressão $y' P_1 y$, obtém-se:

$$R(\mu) = \frac{1}{IJK} y^2 \dots$$

a qual corresponde à correção para o fatorial, como na estatística experimental.

(ii) Redução para μ e α

O modelo reduzido para μ e α é

$$y_{ijk} = \mu + \alpha_i + \varepsilon_{ijk}$$

sendo y_{ijk} , μ , α_i e ε_{ijk} definidos como em (1).

A soma de quadrados para μ e α ou a redução para μ e α é:

$$R(\mu, \alpha) = y' X_2 (X_2' X_2)^{-1} X_2' y = y' P_2 y$$

$$= \sum_i n_i y_{i..} = \sum_i \frac{1}{n_i} y_{i..}^2$$

e se $n_1 = n_2 = \dots = n_i = JK$, tem-se

$$R(\mu, \alpha) = \frac{1}{JK} \sum_i y_{i..}^2$$

quando os níveis do fator A possuem o mesmo número de repetições. Logo a soma de quadrados do fator A, ajustada pela média, e representada por $R(\alpha/\mu)$ é:

$$R(\alpha/\mu) = R(\mu, \alpha) - R(\mu) = y' P_2 y - y' P_1 y$$

$$= \frac{1}{JK} \sum_i y_{i..}^2 - \frac{1}{IJK} y_{...}^2$$

que corresponde à soma de quadrados do fator A

iii) Redução para μ e β

De modo análogo ao item (ii), a soma de quadrado devido ao modelo com a média geral μ o efeito do fator B é:

$$R(\mu, \beta) = y' X_3 (X_3' X_3)^{-1} X_3' y = y' P_3 y$$

$$= \frac{1}{IK} \sum_j y_{.j}^2$$

e, que ajustada para a constante μ , tem-se

$$R(\beta/\mu) = y' P_3 y - y' P_1 y$$

$$= \frac{1}{IK} \sum_j y_{.j}^2 - \frac{1}{IJK} y_{...}^2$$

que corresponde à soma de quadrado do fator B.

(iv) Redução para μ, α e β

A soma de quadrados devido ao modelo com μ, α e β , representada pelo modelo

$$y_{ijk} = \mu + \alpha_i + \beta_j + e_{ijk}$$

é

$R(\mu, \alpha, \beta) = \theta_7' X_7' y$, sendo θ_7^0 uma das soluções do sistema de equações normais seguinte $X_7' X_7 \theta_7^0 = X_7' y$, com X_7 formado pela justaposição das submatrizes X_1, X_2 e X_3 , ou seja, $X_7 = [X_1 \vdots X_2 \vdots X_3]$.

Desse modo, para o exemplo considerado, tem-se

$$\begin{bmatrix} IJK & JK & JK & IK & IK \\ JK & JK & 0 & K & K \\ JK & 0 & JK & K & K \\ JK & K & K & IK & 0 \\ JK & K & K & 0 & IK \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mu \\ \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \beta_1 \\ \beta_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_{...} \\ y_{1..} \\ y_{2..} \\ y_{.1} \\ y_{.2} \end{bmatrix}$$

Uma solução de quadrados mínimos para este sistema é $\theta_7^0 = (X_7' X_7)^{-1} X_7' y$ e que, no exemplo, é:

$$\theta_7^0 = \begin{bmatrix} -\frac{1}{IJK} & & & & \\ & \frac{1}{JK} & & & \\ & & \frac{1}{JK} & & \\ & & & \frac{1}{JK} & \\ & \phi & & & \frac{1}{JK} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_{...} \\ y_{1..} \\ y_{2..} \\ y_{.1} \\ y_{.2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\bar{y}_{...} \\ \bar{y}_{1..} \\ \bar{y}_{2..} \\ \bar{y}_{.1} \\ \bar{y}_{.2} \end{bmatrix}$$

Assim, a soma de quadrados ou a redução para μ, α e β é

$$R(\mu, \alpha, \beta) = \theta_7^0 X_7' y = \begin{bmatrix} -\bar{y}_{...} & \bar{y}_{1..} & \bar{y}_{2..} & \bar{y}_{.1} & \bar{y}_{.2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_{...} \\ y_{1..} \\ y_{2..} \\ y_{.1} \\ y_{.2} \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned}
&= -\bar{y}_{...}y_{...} + \sum_i \bar{y}_{i..}y_{i..} + \sum_j \bar{y}_{.j.}y_{.j.} \\
&= -\frac{1}{IJK}y_{...}^2 + \frac{1}{JK} \sum_i y_{i..}^2 + \frac{1}{JK} \sum_j y_{.j.}^2.
\end{aligned}$$

Logo, a soma de quadrados de β ajustado para μ e α é

$$R(\beta/\mu, \alpha) = R(\mu, \alpha, \beta) - R(\mu, \alpha)$$

$$= -\frac{1}{IJK}y_{...}^2 + \frac{1}{JK} \sum_i y_{i..}^2 + \frac{1}{IK} \sum_j y_{.j.}^2 - \frac{1}{JK} \sum_i y_{i..}^2$$

simplificando, tem-se

$$R(\beta/\mu, \alpha) = \frac{1}{IK} \sum_j y_{.j.}^2 - \frac{1}{IJK} y_{...}^2$$

e, pode-se verificar que $R(\beta/\mu, \alpha) = R(\beta/\mu)$, neste caso, por tratar-se de experimento balanceado.

(v) Redução para μ, α, β e γ

A redução $R(\mu, \alpha, \beta, \gamma)$ é obtida considerando o modelo

$$y_{ijk} = \mu + \alpha_i + \beta_j + \gamma_{ij} + \epsilon_{ijk}$$

cujos componentes são definidos como em (1).

A soma de quadrados dos parâmetros μ, α, β e γ ou redução na soma de quadrados total devido aos parâmetros μ, α, β e γ é estimada por

$R(\mu, \alpha, \beta, \gamma) = \theta^0_8 X_8 y$, sendo que θ^0_8 é obtida por:

$$\theta^0_8 = (X_8' X_8)^G X_8' y$$

sendo X_8 uma submatriz formada pela justaposição das submatrizes

$$X_8 = [X_1 : X_2 : X_3 : X_4]$$

os quais foram definidos em (3.2).

A soma de quadrados devida aos parâmetros μ, α, β e γ é
 $SQ_{PARÂMETROS} = R(\mu, \alpha, \beta, \gamma) = \theta^0_8 X_8 y = y' X_8 (X_8' X_8)^G X_8' y$

$$R(\mu, \alpha, \beta, \gamma) = [1 \phi_{11} \phi_{12} \phi_{13} \phi_{14} y' X_4 (X_4' X_4)^{-1}] \begin{bmatrix} X_1' y \\ X_2' y \\ X_3' y \\ X_4' y \end{bmatrix}$$

$$= y' X_4 (X_4' X_4)^{-1} X_4' y = y' P_4 y$$

sendo $P_4 = (X_4' X_4)^G X_4'$, desenvolvendo tem-se

$$R(\mu, \alpha, \beta, \gamma) = \sum_{ij} \bar{y}_{ij} \cdot \bar{y}_{ij} = \frac{1}{K} \sum_{ij} y_{ij}^2$$

A soma de quadrados de γ ajustada para μ, α e β ou a redução devido a γ ajustada para μ, α e β é:

$$R(\gamma / \mu, \alpha, \beta) = R(\mu, \alpha, \beta, \gamma) - R(\mu, \alpha, \beta)$$

$$R(\gamma / \mu, \alpha, \beta) = \frac{1}{K} \sum_{ij} y_{ij}^2 - \frac{1}{JK} \sum_i y_{i..}^2 - \frac{1}{IK} \sum_j y_{.j.}^2 + \frac{1}{IJK} y_{...}^2$$

$$= y' P_4 y - y' P_2 y - y' P_3 y + y' P_1 y$$

$$P_6 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & & & & & & & & 0 \\ 0 & & & & & & & & 0 \\ 0 & & & & & & & & 0 \\ 0 & & & & & & & & 0 \\ 0 & & & & & & & & 0 \\ 0 & & & & & & & & 0 \\ 0 & & & & & & & & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & & & & & \frac{1}{K} & \frac{1}{K} & 0 & 0 \\ & & & & & & \frac{1}{K} & \frac{1}{K} & 0 & 0 \\ & & & & & & 0 & 0 & \frac{1}{K} & \frac{1}{K} \\ & & & & & & 0 & 0 & \frac{1}{K} & \frac{1}{K} \end{bmatrix}$$

$$P_6 = \phi_{JK} \otimes (I_{(a)} \otimes \frac{1}{K} E_{(K)})$$

Logo, a soma de quadrado para tratamentos adicionais ou a soma de quadrado dos parâmetros τ ajustada para μ_a é

$$R(\tau / \mu_a) = R(\mu_a, \tau) - R(\mu_a) = y' P_6 y - y' P_5 y$$

$$= \frac{1}{K} \sum_e y_{ae}^2 - \frac{1}{aK} y_{a..}^2$$

3.5.3 Esperança matemática das somas de quadrados

Para a obtenção das esperanças matemáticas das formas quadráticas, que fornecem as somas de quadrados, foi utilizado o seguinte teorema auxiliar, conforme pode ser visto em Graybill (1961) e Searle (1971):

Teorema 1: Se y é $N(X\theta; \Sigma)$, então $E[y'Py] = \text{tr}(P\Sigma) + \theta'X'PX\theta$, sendo P a matriz núcleo da forma quadrática, tr o operador traço de uma matriz e Σ a matriz de variâncias e covariâncias dos erros, aqui sendo $\Sigma = I\sigma^2$.

a) Esperança matemática da SQ_{μ}

Sabendo-se que $R(\mu) = SQ_{\mu} = y'P_1y$, então aplicando o teorema auxiliar, tem-se

$$E[SQ_{\mu}] = E[R(\mu)] = E[y'P_1y] = \text{tr}(P_1 I\sigma^2) + \theta'X'P_1X\theta$$

mas,

$$\text{tr}(P_1 I\sigma^2) = \text{tr}(P_1 \sigma^2) = \sigma^2 \text{tr}(P_1)$$

como P_1 é uma matriz simétrica e idempotente, então de acordo com Graybill (1961), tem-se que $\text{tr}(P_1) = r[P_1] = r[X_1] = 1$, logo

$$\text{tr}(P_1 I\sigma^2) = 1\sigma^2$$

$$\theta'X'P_1X\theta = \theta'X'X_1(X_1'X_1)^{-1}X_1'X\theta$$

sabendo-se que:

$$X_1'X\theta = X_1'X_1\mu + X_1'X_2\alpha + X_1'X_3\beta + X_1'X_4\gamma + X_1'X_5\mu_a + X_1'X_6\tau$$

Aplicando-se as restrições paramétricas

$$\sum_i \alpha_i = \sum_j \beta_j = \sum_i \gamma_{ij} = \sum_j \gamma_{ij} = \sum_e \tau_e = 0, \quad (4)$$

as quais simplificam algumas deduções e possuem grande interesse prático, tem-se que a expressão anterior fica

$$X'X\theta = X'X_1\mu$$

Logo,

$$\theta'X'P_1X\theta = \mu'X'X_1(X'X_1)^{-1}X'X_1\mu = \mu'X'X_1\mu = \mu'JK\mu = JK\mu^2$$

portanto,

$$E[SQC] = E[R(\mu)] = \sigma^2 + JK\mu$$

b) Esperança matemática da redução $R(\alpha/\mu)$

$$E[R(\alpha/\mu)] = E[R(\mu, \alpha)] - E[R(\mu)]$$

$$= E[y'P_2y] - E[R(\mu)]$$

Aplicando o teorema 1, tem-se

$$E[y'P_2y] = \text{tr}(P_2 I\sigma^2) + \theta'X'P_2X\theta$$

Como

$$\text{tr}(P_2 I\sigma^2) = \text{tr}(P_2 \sigma^2) = \sigma^2 \text{tr}(P_2) = \sigma^2 \text{tr}[P_2] = \sigma^2 \text{tr}[X_2] = I\sigma^2$$

e

$$\theta' X' P_2 X \theta = \theta' X' X_2 (X_2' X_2)^{-1} X_2' X \theta$$

mas

$$X_2' X \theta = X_2' X_1 \mu + X_2' X_2 \alpha + X_2' X_3 \beta + X_2' X_4 \gamma + X_2' X_5 \mu_a + X_2' X_6 \tau$$

Utilizando-se as restrições tem-se

$$X_2' X \theta = X_2' X_1 \mu + X_2' X_2 \alpha$$

Logo,

$$\begin{aligned} \theta' X' P_2 X \theta &= (X_2' X_1 \mu + X_2' X_2 \alpha)' (X_2' X_2)^{-1} (X_2' X_1 \mu + X_2' X_2 \alpha) = \\ &= (\mu' X_1' X_2 + \alpha' X_2' X_2) (X_2' X_2)^{-1} (X_2' X_1 \mu + X_2' X_2 \alpha) = \\ &= \mu' X_1' X_2 (X_2' X_2)^{-1} X_2' X_1 \mu + \mu' X_1' X_2 (X_2' X_2)^{-1} (X_2' X_2) \alpha + \\ &+ \alpha' (X_2' X_2) (X_2' X_2)^{-1} (X_2' X_2) \alpha = \end{aligned}$$

mas,

$$X_1' X_2 (X_2' X_2)^{-1} X_2' X_1 = \begin{bmatrix} JK & JK \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{JK} & 0 \\ 0 & \frac{1}{JK} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} JK \\ JK \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} JK \\ JK \end{bmatrix} = [LJK]$$

$$\mu' X_1' X_2 (X_2' X_2)^{-1} X_2' X_2 \alpha = \mu' X_1' X_2 X_2' X_2 \alpha = \mu' X_1' X_2 \alpha = \mu' JK \sum_i \alpha_i = 0$$

$$\alpha' X_2' X_2 (X_2' X_2)^{-1} (X_2' X_2) \alpha = \alpha' X_2' X_2 \alpha = \begin{bmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} JK \\ JK \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{bmatrix} = \\ = JK \sum_i \alpha_i^2 = 0$$

então

$$\theta' X' P_2 X \theta = IJK\mu^2 + JK \sum_i \alpha_i^2$$

e

$$E[y' P_2 y] = I\sigma^2 + IJK\mu^2 + JK \sum_i \alpha_i^2$$

Portanto,

$$E[R(\alpha/\mu)] = I\sigma^2 + IJK\mu^2 + JK \sum_i \alpha_i^2 - \sigma^2 - IJK\mu^2$$

simplificando, obtém-se

$$E[R(\alpha/\mu)] = (I - 1)\sigma^2 + JK \sum_i \alpha_i^2$$

c) Esperança matemática da redução $R(\beta/\mu, \alpha)$

sendo que,

$$R(\beta/\mu, \alpha) = R(\mu, \alpha, \beta) - R(\mu, \alpha) = y' P_3 y - y' P_1 y$$

Aplicando o teorema auxiliar tem-se

$$E[y' P_3 y] = \text{tr}(P_3 I \sigma^2) + \theta' X' P_3 X \theta$$

Desenvolvendo de modo semelhante ao realizado em (b), obtém-se que

$$E[y' P_3 y] = J\sigma^2 + IJK\mu^2 + IK \sum_j \beta_j^2$$

e, que

$$E[R(\beta/\mu)] = (J - 1)\sigma^2 + IK \sum_j \beta_j^2$$

d) Esperança matemática da redução $R(\gamma/\mu, \alpha, \beta)$

Conforme visto, a redução $R(\gamma/\mu, \alpha, \beta)$ corresponde à soma de quadrados da interação entre os fatores A e B. Assim, tem-se que

$$SQ_{A \times B} = R(\gamma/\mu, \alpha, \beta) = y' P_4 y - y' P_2 y - y' P_3 y - y' P_1 y$$

Aplicando-se o teorema auxiliar e desenvolvendo por partes, tem-se que

$$E[y' P_4 y] = \text{tr}(P_4 I \sigma^2) + \theta' X' P_4 X \theta$$

mas,

$$\text{tr}(P_4 I \sigma^2) = (\text{tr}(P_4 \sigma^2) = \sigma^2 \text{tr}(P_4) = \sigma^2 r [P_4] = \sigma^2 r [X_4] = IJ\sigma^2$$

$$\theta' X' P_4 X \theta = \theta' X' X_4 (X' X_4)' X_4 X \theta$$

considerando que

$$X_4 X \theta = X_4 X_1 \mu + X_4 X_2 \alpha + X_4 X_3 \beta + X_4 X_4 \gamma + X_4 X_5 \mu_a + X_4 X_6 \tau$$

como $X_4'X_5$ e $X_4'X_6$ são matrizes nulas, vem que

$$X_4'X\theta = X_4'X_1\mu + X_4'X_2\alpha + X_4'X_3\beta + X_4'X_4\gamma$$

substituindo, tem-se

$$\begin{aligned} \theta'X'P_4 X\theta &= (\mu'X_1'X_4 + \alpha'X_2'X_4 + \beta'X_3'X_4 + \gamma'X_4'X_4)(X_4'X_4)^{-1}(X_4'X_1\mu + \\ &+ X_4'X_2\alpha + X_4'X_3\beta + X_4'X_4\gamma) \end{aligned}$$

Então,

$$\begin{aligned} \theta'X'P_4 X\theta &= \mu'X_1'X_4(X_4'X_4)^{-1}X_4'X_1\mu + \alpha'X_2'X_4(X_4'X_4)^{-1}X_4'X_2\alpha + \beta'X_3'X_4 + \\ &+ (X_4'X_4)^{-1}X_4'X_3\beta + \gamma'(X_4'X_4)(X_4'X_4)^{-1}(X_4'X_4)\gamma + 2\mu'X_1'X_4(X_4'X_4)^{-1}X_4'X_2\alpha + \\ &+ 2\mu'X_1'X_4(X_4'X_4)^{-1}X_4'X_3\beta + 2\mu'X_1'X_4(X_4'X_4)^{-1}X_4'X_4\gamma + 2\alpha'X_2'X_4(X_4'X_4)^{-1} + \\ &+ X_4'X_3\beta + 2\alpha'X_2'X_4(X_4'X_4)^{-1}X_4'X_4\gamma + 2\beta'X_3'X_4(X_4'X_4)^{-1}X_4'X_4\gamma \end{aligned}$$

simplificando e aplicando as restrições, fica

$$\theta'X'P_4 X\theta = \mu'IJK\mu + \alpha'JKI_{(1)}\alpha + \beta'IKJ_{(1)}\beta + \gamma'KI_{(1)}\gamma$$

pois os produtos entre os vetores dos parâmetros são nulos, em face das restrições adotadas. Desenvolvendo, obteve-se que

$$\theta'X'P_4 X\theta = IJK\mu^2 + JK \sum_i \alpha_i^2 + IK \sum_j \beta_j^2 + K \sum_{ij} \gamma_{ij}^2$$

logo

$$E(y' P_4 y) = IJ\sigma^2 + IJK\mu^2 + JK \sum_i \alpha_i^2 + IK \sum_j \beta_j^2 + K \sum_{ij} \gamma_{ij}^2$$

Desse modo, a esperança matemática da $SQ_{\text{INTERAÇÃO}}$ fica

$$\begin{aligned} E[R(\gamma/\mu, \alpha, \beta)] &= E(y' P_4 y) - E(y' P_2 y) - E(y' P_3 y) + E(y' P_1 y) = \\ &= IJ\sigma^2 + IJK\mu^2 + JK \sum_i \alpha_i^2 + IK \sum_j \beta_j^2 + K \sum_{ij} \gamma_{ij}^2 - I\sigma^2 - IJK\mu^2 - \\ &- JK \sum_i \alpha_i^2 - J\sigma^2 IJK\mu^2 - JK \sum_j \beta_j^2 + \sigma^2 + IJK\mu^2 \end{aligned}$$

simplificando, obteve-se

$$E[R(\gamma/\mu, \alpha, \beta)] = (IJ - I - J + 1)\sigma^2 + K \sum_{ij} \gamma_{ij}^2$$

e) Esperança matemática da redução $R(\mu_a)$

sendo que $SQ\mu_a = R(\mu_a) = y' P_5 y$, aplicando o teorema auxiliar, tem-se que

$$E(y' P_5 y) = \text{tr}(P_5 I\sigma^2) + \theta' X' P_5 X \theta$$

sendo $\text{tr}[P_2 I\sigma^2] = r[P_5]\sigma^2 = I\sigma^2$, pois P_2 é uma matriz simétrica e idempotente de posto $r[X_5] = 1$;

$$\theta' X' P_5 X \theta = \theta' X' X_5 (X' X_5)^{-1} X' X \theta = \mu'_a X' X_5 \mu_a = aK\mu_a^2$$

Logo, a esperança matemática da correção para os tratamento adicionais é

$$E(y' P_5 y) = \sigma + aK \mu_a^2$$

f) Esperança matemática da redução $R(\tau / \mu_a)$

A redução devida aos tratamentos adicionais é $R(\tau / \mu_a) = R(\mu_a, \tau) - R(\mu_a)$

a qual é estimada por

$$R(\tau / \mu_a) = y' P_6 y - y' P_5 y$$

Aplicando o operador esperança matemática fica

$$E[R(\tau / \mu_a)] = E(y' P_6 y) - E(y' P_5 y)$$

$$E[y' P_6 y] = \text{tr}(P_6 I \sigma^2) + \theta' X' P_6 X \theta$$

Usando o teorema auxiliar, desenvolvendo e simplificando obtém-se

$$E[y' P_6 y] = a\sigma^2 + aK\mu_a^2 + K \sum_e \tau_e^2$$

Assim,

$$E[R(\tau / \mu_a)] = (a - 1)\sigma^2 + K \sum_2 \tau_e^2$$

g) Contraste fatorial versus adicionais

Somando e subtraindo $C = \frac{(y_{...} + y_{a..})^2}{n}$ em $y'y$ e agrupando com $y' P_1 y$

e $y' P_5 y$ de modo conveniente, obteve-se uma fonte de variação bastante comum indicada por $SQ_{\text{FAT. vs AD.}} = y' P_1 y + y' P_5 y - C$, que representa a soma de

quadrados do contraste entre os tratamentos fatoriais e os tratamentos adicionais, o qual compara a média dos tratamentos fatoriais com a média dos adicionais.

Para a obtenção desta redução, e facilidade de entendimento, foram considerados dois submodelos ou modelos reduzidos.

Considerando o modelo reduzido caracterizado por:

$$y_{ijk} = \mu_g + \mu + \mu_a + \epsilon_{ijk}$$

sendo:

μ_g : uma constante inerente a todos os dados;

μ : uma constante inerente às observações dos tratamentos do fatorial;

μ_a : uma constante inerente às observações dos tratamentos adicionais

sua representação matricial é

$$y = X_g \theta_g + e$$

com:

$$X_g = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad e \quad \theta_g = \begin{bmatrix} \mu_g \\ \mu \\ \mu_a \end{bmatrix}$$

O sistema de equações normais é

$$X'_{\beta} X_{\beta} \theta_{\beta} = X'_{\beta} y$$

sendo que uma das soluções é

$$\begin{aligned} \theta_{\beta}^0 &= (X'_{\beta} X_{\beta})^G X'_{\beta} y \\ &= \text{Diag.} \left\{ 0 \quad \frac{1}{IJK} \quad \frac{1}{aK} \right\} \begin{bmatrix} y_t \\ y_{\dots} \\ y_{a..} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \bar{y}_{\dots} \\ \bar{y}_{a..} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

A redução, devido aos parâmetros μ_{β} , μ e μ_a e representada por $R(\mu_{\beta}, \mu, \mu_a)$, é dada por

$$R(\mu_{\beta}, \mu, \mu_a) = \theta_{\beta}^0 X'_{\beta} y = y' X_{\beta} (X'_{\beta} X_{\beta})^G X'_{\beta} y = y' P_{\beta} y$$

com

$$P_{\beta} = \frac{1}{IJK} E_{(IJK)} \oplus \frac{1}{aK} E_{(aK)}$$

Assim,

$$\begin{aligned} R(\mu_{\beta}, \mu \text{ e } \mu_a) &= \begin{bmatrix} 0 & \bar{y}_{\dots} & \bar{y}_{a..} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_t \\ y_{\dots} \\ y_{a..} \end{bmatrix} = \\ &= \frac{1}{IJK} y_{\dots}^2 + \frac{1}{aK} y_{a..}^2 \end{aligned}$$

Considerando agora um submodelo auxiliar definido como

$$y_{ijk} = \mu_{\beta} + \epsilon_{ijk} \Rightarrow y = X_{\beta} \theta_{\beta} + e$$

sendo que μ_{β} representa o efeito de uma constante geral inerente a todos os dados: fatorial e adicionais.

Para este modelo, o sistema de equações normais é

$$X'X\theta^0 = X'y \Rightarrow [IJK + aK] [\theta^0] = [y_{...} + y_{a..}]$$

cuja solução é

$$\theta^0 = \mu_g^0 = \frac{y_{...} + y_{a..}}{IJK + aK} = \frac{y_t}{n}$$

A soma de quadrados de parâmetros $\theta_g = \mu_g$ é obtida por

$$R(\mu_g) = \theta^0 X' y = \frac{y_t}{n} y_t = \frac{1}{n} y_t^2$$

com $y_t = y_{...} + y_{a..}$ sendo o total geral das observações, $n = aK + IJK$ é o número total de observações.

Assim, a soma de quadrados dos parâmetros μ_a ajustada para μ_g , representada pela redução $R(\mu_a/\mu_g)$ é dada por:

$$R(\mu_a/\mu_g) = R(\mu_a) - R(\mu_g)$$

Dado que $R(\mu_g) = \theta^0 X' y = y' X_9 (X' X_9)^{-1} X' y = y' P_9 y$ então a esperança matemática utilizando o teorema auxiliar é

$$E[y' P_9 y] = \text{tr}(P_9 I \sigma^2) + \theta' X' X_9 (X' X_9)^{-1} X' X \theta$$

ou

$$E[y' P_9 y] = r[X_9] \sigma^2 + \theta' X' X_9 (X' X_9)^{-1} X' X \theta$$

Mas, como

$$X' X \theta = X' X_9 \mu_g + X' X_1 \mu + X' X_2 \alpha + X' X_3 \beta + X' X_4 \gamma + X' X_5 \mu_a$$

então, desenvolvendo e aplicando-se as restrições, resulta que

$$X'X\theta = [n\mu_g + IJK\mu + aK\mu_a]$$

Assim,

$$\begin{aligned} \theta'X'P_9X\theta &= (n\mu_g + IJK\mu + aK\mu_a) \left(\frac{1}{n}\right) (n\mu_g + IJK\mu + aK\mu_a) = \\ &= \left(\frac{1}{n}\right) (n\mu_g + IJK\mu + aK\mu_a)^2 \end{aligned}$$

$$\text{Logo, } E[y'P_9y] = \sigma^2 + \frac{1}{n}(n\mu_g + IJK\mu + aK\mu_a)^2$$

A esperança matemática da redução $R(\mu_g, \mu, \mu_a)$ é dada por

$$E[y'P_8y] = \text{tr}[P_8I\sigma^2] + \theta'X'P_8X\theta$$

tem-se que

$$\text{tr}[P_8I\sigma^2] = \sigma^2 \text{tr}[P_8] = \sigma^2 r[X_8] = 2\sigma^2$$

mas, como

$$X'X\theta = X'_8X_9\mu_g + X'_8X_1\mu + X'_8X_2\alpha + X'_8X_3\beta + X'_8X_4\gamma + X'_8X_5\mu_a$$

$$= \begin{bmatrix} n \\ IJK \\ aK \end{bmatrix} \mu_g + \begin{bmatrix} IJK \\ IJK \\ 0 \end{bmatrix} \mu + \begin{bmatrix} JK & JK \\ JK & Jk \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \alpha + \begin{bmatrix} IK & IK \\ IK & IK \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \beta +$$

$$+ \begin{bmatrix} K & K & K & K \\ K & K & a & a \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} aK \\ 0 \\ aK \end{bmatrix} \mu_a = \begin{bmatrix} n \\ IJK \\ aK \end{bmatrix} \mu_g + \begin{bmatrix} IJK \\ IJK \\ 0 \end{bmatrix} \mu + \begin{bmatrix} aK \\ 0 \\ aK \end{bmatrix} \mu_a$$

então

$$\theta' X_g' (X_g' X_g)^{-1} X_g' X \theta = [n\mu_g + IJK\mu + aK\mu_a \quad IJK\mu_g + IJK\mu + 0\mu_a \quad aK\mu_g + 0\mu + aK\mu_a] \begin{bmatrix} 0 \\ \mu_g + \mu \\ \mu_g + \mu_a \end{bmatrix} =$$

$$= IJK(\mu_g + \mu)^2 + aK(\mu_g + \mu_a)^2$$

Portanto,

$$E[y' P_g y] = 2\sigma^2 + IJK(\mu_g + \mu)^2 + aK(\mu_g + \mu_a)^2$$

A soma de quadrados do contraste fatorial vs. adicionais pode ser obtida

por

$$R(\mu, \mu_a / \mu_g) = R(\mu_g, \mu, \mu_a) - R(\mu_g)$$

$$= y' P_g y - y' P_g y$$

ou seja

$$R(\mu, \mu_a / \mu_g) = \frac{1}{IJK} y_{...}^2 + \frac{1}{aK} y_{a..}^2 - \frac{1}{n} y_i^2$$

Assim, a esperança matemática da redução $R(\mu, \mu_a / \mu_g)$ é

$$E[R(\mu, \mu_a / \mu_g)] = E(y' P_g y) - E(y' P_g y)$$

E, utilizando-se os resultados anteriores, tem-se que

$$E[R(\mu, \mu_a/\mu_g)] = 2\sigma^2 + IJK(\mu_g + \mu)^2 + aK(\mu_g + \mu_a) - 1\sigma^2 - \frac{1}{n}(n\mu_g + IJK\mu + aK\mu_a)^2$$

simplificando, foi obtido que

$$E[R(\mu, \mu_a/\mu_g)] = \sigma^2 + \frac{aIJK}{n}(\mu + \mu_a)^2$$

Desse modo, na Tabela 14 encontra-se o esquema da análise de variância para um experimento fatorial de dois fatores com tratamentos adicionais.

TABELA 14. Esquema de análise de variância com as variações consideradas no modelo, graus de liberdade e somas de quadrados

C.V.	G.L	S.Q
$R(\mu, \alpha, \beta, \gamma, \mu_a, \iota)$	$r[X_4] + r[X_6]$	$y' P_4 y + y' P_6 y$
$R(\mu)$	1	$y' P_1 y$
$R\alpha/\mu$	$(I - 1)$	$y' P_2 y - y' P_1 y$
$R(\beta/\mu, \alpha)$	$(J - 1)$	$y' P_3 y - y' P_1 y$
$R(\gamma/\mu, \alpha, \beta)$	$IJ - 1 - J + 1$	$y' P_4 y - y' P_2 y - y' P_3 y + y' P_1 y$
$R(\mu, \mu_a/\mu_g)$	1	$y' P_5 y$
$R(\tau/\mu_a)$	$(a - 1)$	$y' P_6 y - y' P_5 y$
Resíduo	$n - r\{X_4\} - r\{X_6\}$	$y'y - R(\mu, \alpha, \beta, \gamma, \mu_a, \iota)$
Total	n	$y'y$

3.5.4 Distribuição e independência das formas quadráticas

Para a verificação da distribuição e independência das formas quadráticas apresentadas em anteriormente, aplicou-se o teorema de Searle (1987), adaptado de Graybill (1961):

Teorema 2. Se y é um vetor multinormal, de dimensões $(n) \times (1)$, tal que $y \sim N(X\theta; V)$, sendo $X\theta$ o vetor de médias populacionais e V a matriz de variâncias e covariâncias, aqui $V=I\sigma^2$ e sendo $A_i = 1,2,\dots,g$ matrizes simétricas,

de posto $r[A_i]$ e ainda, sendo $A = \sum_{i=1}^g A_i$, simétrica de posto $r[A]$, então as formas

quadráticas $y'A_i y$ possuem distribuição χ^2 com $r[A_i]$ graus de liberdade, com

parâmetros de não centralidade $\lambda_i = \frac{\theta' X' A_i X \theta}{2}$, e são independentes duas a

duas, e além disso, $y'A y$ tem distribuição χ^2 com $r[A]$ graus de liberdade e

parâmetro de não centralidade $\lambda = \frac{\theta' X' A X \theta}{2}$ se, e somente se, ocorrer:

(i) quaisquer duas alternativas são verdadeiras se:

- a) $A_i V$ é idempotente para todo $i = 1,2,\dots,g$;
- b) $A_i V A_j = 0$ para todo $i < j$;
- c) $A V$ é idempotente;

ou (ii) c) é verdadeiro e (d) tem posto $r[A] = \sum_{i=1}^g r[A_i]$

ou (iii) c) é verdadeiro e (e) $A_1 V, \dots, A_{g-1} V$ são idempotentes e $A_g V$ é definida não negativa.

As somas de quadrados, em termos de formas quadráticas, podem ser escritas como:

$$y'Q_0y = y'Q_1y + y'Q_2y + y'Q_3y + y'Q_4y + y'Q_5y + y'Q_6y$$

sendo que Q_i , com $i = 0, 1, \dots, 6$, são os núcleos das formas quadráticas ou as matrizes projetores ortogonais do vetor de observações y sobre algum subespaço do espaço coluna da matriz X , $C(X)$, que fornecem as somas de quadrados do total, fator A, fator B, interação $A \times B$, tratamento fatorial vs. adicionais, tratamentos adicionais e resíduo, respectivamente.

Utilizando-se os teoremas (1) e (2), obtiveram-se os seguintes resultados com respeito à distribuição das formas quadráticas:

$$y'Q_1y \sim \sigma^2 \chi^2_{[I-1, \lambda_1]}, \text{ com } \lambda_1 = \frac{\alpha'(X_3'X_3)\alpha}{2\sigma^2}$$

$$y'Q_2y \sim \sigma^2 \chi^2_{[J-1, \lambda_2]}, \text{ com } \lambda_2 = \frac{\beta'(X_4'X_4)\beta}{2\sigma^2}$$

$$y'Q_3y \sim \sigma^2 \chi^2_{[(J-1)(I-1), \lambda_3]}, \text{ com } \lambda_3 = \frac{\gamma'(X_4'X_4)\gamma}{2\sigma^2}$$

$$y'Q_4y \sim \sigma^2 \chi^2_{[1, \lambda_4]}, \text{ com } \lambda_4 = \frac{aIJK^2}{n}(\mu + \mu_a)^2$$

$$y'Q_5y \sim \sigma^2 \chi^2_{[a-1, \lambda_5]}, \text{ com } \lambda_5 = \frac{\tau'(X_4'X_4)\tau}{2\sigma^2}$$

$$y'Q_6y \sim \sigma^2 \chi^2_{[a-1, \lambda_6]}, \text{ com } \lambda_6 = 0$$

e que são independentes entre si.

Assim, pode-se apresentar na Tabela 15 o esquema de análise de variância, no qual as somas de quadrados foram apresentadas nas suas

respectivas formas quadráticas, contendo as variações consideradas no modelo (V.C.M.), os números de graus de liberdade associados às somas de quadrados e às esperanças matemáticas dos quadrados médios.

TABELA 15. Esquema da análise de variância com suas respectivas formas quadráticas

V.C.M.	G.L.	S.Q.	E[Q.M.]
R(α/μ)	r[Q ₁]	y'Q ₁ y	$\sigma^2 + \frac{\alpha' (X_2' X_2) \alpha}{(I-1)}$
R(β/μ)	r[Q ₂]	y'Q ₂ y	$\sigma^2 + \frac{\beta' (X_3' X_3) \beta}{(J-1)}$
R($\gamma/\mu, \alpha, \beta$)	r[Q ₃]	y'Q ₃ y	$\sigma^2 + \frac{\gamma' (X_4' X_4) \gamma}{(I-1)(J-1)}$
Fat. Vs. Adic	r[Q ₄]	y'Q ₄ y	$\sigma^2 + \frac{aIJK^2}{n} (\mu + \mu_a)^2$
R(τ/μ)	r[Q ₅]	y'Q ₅ y	$\sigma^2 + \frac{\tau' (X_6' X_6) \tau}{(a-1)}$
Residuo	r[Q ₆]	y'Q ₆ y	σ^2
Total	r[Q ₀]	y'Q ₀ y	

De acordo com o esquema da análise de variância, tem-se que a variável aleatória F_{1-6} dada por

$$F_{1-6} = \frac{\frac{y'Q_1y}{(I-1)}}{\frac{y'Q_6y}{(n-r[X])}} \sim F_{[I-1; n-r[X]; \lambda_1, \lambda_6]}$$

ou seja,

$$\frac{\frac{SQ_{FatorA}}{(I-1)}}{\frac{SQ_{Residuo}}{(n-r[X])}} \sim F_{[I-1; n-r[X]; \lambda_1 = \alpha' (X_2' X_2) \alpha]}$$

Do mesmo modo, para o fator B, tem-se

$$\frac{\frac{y' Q_2 y}{(J-1)}}{\frac{y' Q_6 y}{(n-r[X])}} \sim F_{[J-1; n-r[X]; \lambda_2 = \beta' (X_3' X_3) \beta]}$$

ou

$$\frac{\frac{SQ_{FatorB}}{(J-1)}}{\frac{SQ_{Residuo}}{(n-r[X])}} \sim F_{[J-1; n-r[X]; \lambda_2 = \beta' (X_3' X_3) \beta]}$$

Para a interação AxB, tem-se

$$\frac{\frac{y' Q_3 y}{(IJ-I-J+1)}}{\frac{y' Q_6 y}{(n-r[X])}} \sim F_{[IJ-1; n-r[X]; \lambda_3 = \gamma' (X_2' X_2) \gamma]}$$

ou

$$\frac{\frac{SQ_{AxB}}{(IJ-I-J+1)}}{\frac{SQ_{Residuo}}{(n-r[X])}} \sim F_{[IJ-1; n-r[X]; \lambda_3 = \gamma' (X_2' X_2) \gamma]}$$

Já, para os tratamentos adicionais tem-se

$$\frac{\frac{y'Q_4y}{(a-1)}}{\frac{y'Q_6y}{(n-r[X])}} \sim F_{[a-1; n-r[X]; \lambda_4, \lambda_6]}$$

ou

$$\frac{\frac{SQ \tau}{(a-1)}}{\frac{SQ \text{Resíduo}}{(n-r[X])}} \sim F_{[1; n-r[X]; \lambda_1 = \alpha^2(X_2'X_2)\alpha]}$$

E, para o contraste fatorial vs. adicionais, tem-se que

$$\frac{\frac{y'Q_5y}{(1)}}{\frac{y'Q_6y}{(n-r[X])}} \sim F_{[1; n-r[X]; \lambda_1, \lambda_6]}$$

ou

$$\frac{\frac{SQ \text{Fat. vs. Adic.}}{1}}{\frac{SQ \text{Resíduo}}{(n-r[X])}} \sim F_{[1; n-r[X]; \lambda_5 = aJK(\mu + \mu_a)^2]}$$

3.6 Estimabilidade

No planejamento de experimentos é importante que o pesquisador defina, anteriormente, quais hipóteses são de interesse e conduza o experimento no sentido de poder compará-las. Na realidade, conforme a relação de modelos dados, algumas das hipóteses de interesse em uma pesquisa podem

não ser testáveis. Para que uma hipótese seja testável é necessário que a função paramétrica que a descreve seja estimável.

A estimabilidade se fundamenta em funções paramétricas estimáveis do tipo $\lambda'\theta$ associadas ao modelo linear $y = X\theta + e$, sendo que $\lambda'\theta$ é estimável se puder ser expressa como uma função linear das esperanças matemáticas das observações (Rao, 1965; Iemma, 1987). São estimáveis as funções de tratamentos $\lambda'\theta$, tais que $r[X] = r[X : \lambda]$ (Graybill, 1961; Searle, 1971). Naturalmente, os contrastes são um subconjunto de funções paramétricas estimáveis, sendo, portanto, estimáveis e, por serem de grande importância prática, serão considerados aqui.

Se $\lambda'\theta$ é uma função paramétrica estimável, então, pelo teorema de Gauss-Markov, seu BLUE, termo que designa o melhor estimador linear não viesado, é $\lambda'\hat{\theta} = \lambda'\theta^0$, para qualquer θ^0 solução do sistema de equações normais $X'X\theta^0 = X'y$, de acordo com Iemma (1987).

O valor esperado de qualquer observação é uma função paramétrica estimável, conforme Searle (1987). Assim

$$E(y) = X\theta \text{ ou } E(y_{ijk}) = \mu + \alpha_i + \beta_j + \gamma_{ij} + \mu_a + \tau_e \quad \forall i, j, e$$

constituem uma coleção de funções básicas estimáveis (Iemma, 1987). Como exemplo, o BLUE de $\mu + \alpha_i + \beta_j + \gamma_{ij}$ é y_{ijk} , sendo sua variância dada por $V(y_{ijk}) = \sigma^2$ e, cujo estimador é $\hat{V}(y_{ijk}) = \hat{\sigma}^2 = \text{QMResíduo}$.

As combinações lineares de funções paramétricas estimáveis, são também estimáveis, exceto aqueles casos em que existe desconexão, conforme Rao (1946) e Searle (1971). Assim, podem-se obter combinações lineares de interesse das observações

$$y_{122} - y_{222} = \alpha_1 - \alpha_2 + \gamma_{12} + \gamma_{22} + e_{122} - e_{222}$$

pode ser utilizada para medir o efeito entre os níveis 1 e 2 do fator A dentro do nível 2 do fator B. Assim, o contraste $\lambda'\theta = \alpha_1 - \alpha_2 + \gamma_{12} - \gamma_{22}$ possui BLUE dado por $\lambda'\theta = y_{122} - y_{222}$. Sua variância é

$$V(\lambda'\theta) = V(y_{122} - y_{222}) = 2\sigma^2$$

cujo estimador é

$$\hat{V}(\lambda'\theta) = 2 \text{ QMResíduo.}$$

Deste modo, várias outras funções paramétricas podem ser formuladas, obtidas suas variâncias e BLUE'S.

3.7 Hipóteses testáveis

Segundo Searle (1971), uma hipótese linear geral associada ao conjunto de parâmetros é definida da seguinte forma:

$$H_0: m_1' \theta_1 = v$$

sendo:

m_1' uma matriz conhecida e v também um vetor conhecido.

Quando os elementos de $m_1' \theta_1$ são todos estimáveis ou, conjuntamente estimáveis, então a hipótese $H_0: m_1' \theta_1 = v$ é dita hipótese testável.

Um procedimento muito útil, conforme Lemma (1991), consiste na obtenção das somas de quadrados das hipóteses de interesse. Assim, para a hipótese $H_0: m_1' \theta_1 = v$, se $m_1' \theta$ é estimável com m' de posto linha completo, tem-se:

$$SQH_0 = (m_1' \hat{\theta}_1 - v)' [m_1'(X'X)^{-1}m_1]^{-1} (m_1' \hat{\theta}_1 - v)$$

e, constata-se que,

$$\frac{SQH_0}{\sigma^2} \sim \chi^2_{[r(m'); \delta]}$$

sendo,

$$\delta = \frac{1}{2\sigma^2} \theta' X' (P^*) X \theta \text{ o parâmetros de não centralidade}$$

P^* a matriz núcleo da forma quadrática que fornece a soma de quadrados de H_0 ;

$$r(m') = \text{posto de } m'$$

Logo,

$$\frac{y'(P^*)y}{\sigma^2} \sim \chi^2_{[r(P-P_1); \delta]}$$

e

$$r(P^*) = \text{posto de } (P^*)$$

Sendo assim, a estatística F que testa a hipótese $H_0: m_1' \theta_1 = v$ é dada por:

$$\begin{aligned} F(H_0) &= (SQH_0/r(m_1))/\hat{\sigma}^2 \\ &= (y'(P^*)y)/r(P^*)/\hat{\sigma}^2 \end{aligned}$$

sendo:

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{SQRes.}{r(I-P)} \text{ o estimador da variância residual;}$$

$$r(I-P) = \text{posto de } (I-P)$$

No caso de experimento fatorial com tratamentos adicionais, em geral, existe interesse em testar as seguintes hipóteses básicas:

$$H_0: \alpha_i = 0, \forall i = 1, 2, \dots, I$$

$$H_0: \beta_j = 0 \forall j = 1, 2, \dots, J$$

$$H_0: \gamma_{ij} = 0, \forall i, j$$

$$H_0: \tau_e = 0, \forall e = 1, 2, \dots, a$$

que correspondem às hipóteses de não existência de efeitos do fator A, fator B, interação e tratamentos adicionais. Pode-se incluir ainda a hipótese $H_0: \mu_F = \mu_a$, que corresponde a testar se a média dos tratamentos fatoriais é igual à média dos tratamentos adicionais. Esta hipótese mesmo sendo amplamente testada em vários experimentos, do ponto de vista prático possui pouco valor, pois é uma hipótese bastante confusa de se interpretar, envolvendo média de vários tratamentos.

3.8 Comparações múltiplas

Admitindo-se a possibilidade de rejeição das hipóteses de nulidade, referente aos efeitos de tratamentos: fator A, B, interação e adicionais, para a continuidade da análise estatística, um dos procedimentos apropriado é o uso de comparação múltipla, é claro dependendo da natureza dos tratamentos. Entre os testes de comparação múltiplas optou-se por obter as diferenças mínimas significativas, conforme Pimentel Gomes (2000), apenas para o teste de Tukey. Sabe-se que, para outros testes os procedimentos são semelhantes.

Assim, se \hat{Y} representa o estimador de um determinado contraste entre duas médias, conforme os casos apresentados anteriormente, então a diferença mínima significativa (DMS) para o emprego do teste de Tukey é estimado por:

$$D.M.S = q \sqrt{\frac{1}{2} \hat{V}(\hat{Y})}$$

em que :

q: é o valor crítico (tabelado) da amplitude padronizada, para utilização do teste de Tukey, obtido em função do nível de significância, do número de graus de liberdade do resíduo e do número de tratamentos a serem comparados

$\hat{V}(\hat{Y})$: é o estimador da variância do contraste a ser comparado.

Com relação à estimabilidade, observando-se a matriz $X'X$ ou o vetor $X'X\theta$, verifica-se que os tratamentos fatoriais e adicionais constituem um conjunto de funções desconexo, ou seja, não existe um ponto de contato comum entre esses dois conjuntos de tratamentos. Assim, algumas comparações não são possíveis de serem comparadas. Por exemplo $\alpha_1 - \tau_{a1}$, $\gamma_{11} - \tau_{a2}$, entre outras, não é estimável e, portanto não é testável. Em geral segundo Searle (1987), quando da ocorrência de conjuntos de dados desconexos, uma das maneiras de analisá-los é dividir em subconjuntos conexos que podem ser analisados separadamente.

Nesse contexto, a análise desenvolvida no item 3 e esquemas apresentados nas Tabelas 14 e 15 são coerentes e talvez seja uma das alternativas mais viáveis, pois permitem avaliar os efeitos fatoriais, e os efeitos dos tratamentos adicionais. Mas, principalmente nos casos em que o tratamento adicional é constituído por mais de um efeito (tratamento), a fonte de variação fatorial vs. adicionais torna-se de difícil e confusa interpretação, fato devido a que as duas médias envolvem médias de vários tratamentos. Talvez, o tratamento adicional deva ser somente um, aquele que realmente sirva de referência para o fatorial e, nesse caso, ele poderia ser comparado com todas as combinações fatoriais, por exemplo, com o uso do teste de Dunnett.

Se $\lambda'\theta$ é estimável e descreve um contraste de interesse entre os efeitos de tratamentos, então o seu BLUE é obtido de modo único, por $\hat{\lambda}\theta = \lambda'\theta^0$ e sua variância é dada por $V(\hat{\lambda}\theta) = V(\lambda'\theta^0) = \lambda'(X'X)^G\lambda\sigma^2$, sendo λ constituído

por coeficientes que definem o contraste de interesse a ser avaliado, e $(X'X)^G$ é uma inversa generalizada qualquer de $X'X$.

Assim, no caso de um contraste entre duas médias de tratamentos, podem ser considerados os seguintes casos:

(i) Contraste entre duas médias ou dois níveis do fator A

Se $\lambda'\theta$ é uma função paramétrica estimável que envolve efeitos de dois níveis do fator A, então tem-se que

$$\lambda'\theta = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & \frac{1}{J} & \frac{1}{J} & -\frac{1}{J} & -\frac{1}{J} & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mu \\ \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \beta_1 \\ \beta_2 \\ \gamma_{11} \\ \gamma_{12} \\ \gamma_{21} \\ \gamma_{22} \\ \mu_a \\ \tau_1 \\ \tau_2 \end{bmatrix} =$$

$$= \alpha_1 - \alpha_2 + \frac{1}{2}(\gamma_{11} + \gamma_{12}) - \frac{1}{2}(\gamma_{21} + \gamma_{22})$$

em face das restrições dadas em (4), tem-se

$$\lambda'\theta = \alpha_1 - \alpha_2$$

O seu BLUE é dado de modo único por

$$\hat{\lambda}\theta = \lambda'\theta = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & \frac{1}{J} & \frac{1}{J} & -\frac{1}{J} & -\frac{1}{J} & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{y}_{11.} \\ \bar{y}_{12.} \\ \bar{y}_{21.} \\ \bar{y}_{22.} \\ 0 \\ \bar{y}_{a1.} \\ \bar{y}_{a2.} \end{bmatrix} =$$

$$= \frac{1}{J}(\bar{y}_{11.} + \bar{y}_{12.}) - \frac{1}{2}(\bar{y}_{21.} + \bar{y}_{22.}) = \bar{y}_{1..} - \bar{y}_{2..}$$

Nota-se que $E(\bar{y}_{1..} - \bar{y}_{2..}) = \alpha_1 - \alpha_2$, sendo, portanto, um estimador não viesado para avaliar os efeitos entre dois níveis do fator A, em experimentos fatoriais.

O estimador da variância do BLUE é

$$\begin{aligned} \hat{V} = ((\lambda'\theta)^2) &= \hat{V}(\bar{y}_{1..} - \bar{y}_{2..}) = \lambda'(X'X)^{-1}\lambda \text{ QMResíduo} \\ &= \frac{2}{JK} \text{ QMResíduo} \end{aligned}$$

o qual é um resultado idêntico àqueles encontrados na literatura para variâncias entre duas médias de tratamentos (fator A) obtidos de experimentos em esquema fatorial.

(ii) Contraste entre duas médias ou dois níveis do fator B

Se $\lambda'\theta$ é uma função paramétrica estimável que envolve efeitos de dois níveis do fator B, então de modo análogo ao item (1), tem-se

$$\lambda'\theta = \beta_1 - \beta_2$$

o seu BLUE é

$$\hat{\lambda}\theta = \lambda'\theta^0 = \bar{y}_{.1} - \bar{y}_{.2}$$

e, o estimador da variância do BLUE é

$$\hat{V} = ((\lambda'\theta^0) = \hat{V}(\bar{y}_{.1} - \bar{y}_{.2})) = \frac{2}{IK} \text{QMResíduo}$$

(iii) Contraste entre duas médias do fator A, dado um mesmo nível do fator B

Se $\lambda'\theta$ descreve uma função paramétrica estimável que envolve efeitos de dois níveis do fator A em um mesmo nível do fator B, então tem-se que

$$\lambda'\theta = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mu \\ \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \beta_1 \\ \beta_2 \\ \gamma_{11} \\ \gamma_{12} \\ \gamma_{21} \\ \gamma_{22} \\ \mu_a \\ \tau_1 \\ \tau_2 \end{bmatrix} = \gamma_{11} - \gamma_{12}$$

o seu BLUE é

$$\lambda'\theta = \bar{y}_{11.} - \bar{y}_{12.}$$

(iv) Contraste entre duas médias do fator B dado um mesmo nível do fator A

De maneira semelhante ao item (iii), tem-se que

$$\lambda'\theta = \gamma_{11} - \gamma_{21}$$

descreve o efeito de dois níveis do fator B em um mesmo nível do fator

A. Logo o seu BLUE é

$$\lambda'\theta^0 = \bar{y}_{11.} - \bar{y}_{21.} \cdot \frac{2}{K} \text{QMResíduo}$$

(v) Contraste entre duas médias de tratamentos adicionais

De forma idêntica ao item (1), tem-se que

$$\lambda'\theta = \tau_1 - \tau_2$$

descreve o efeito entre dois níveis dos tratamentos adicionais. Logo, o seu BLUE é

$$\hat{\lambda}\theta = \lambda\theta^0 = \bar{y}_{a1} - \bar{y}_{a2}$$

e o estimador de variância do BLUE é

$$\hat{V} = ((\lambda\theta^0)) = \hat{V}(\bar{y}_{a1} - \bar{y}_{a2}) = \frac{2}{K} \text{QMResíduo}$$

(vi) Contraste entre as médias dos tratamentos adicionais e a média do tratamentos fatoriais

A diferença entre as médias dos tratamentos fatoriais versus tratamentos adicionais pode ser obtida por

$$\lambda\theta^0 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{IJ} & \frac{1}{IJ} & \frac{1}{IJ} & \frac{1}{IJ} & 0 & -\frac{1}{a} & -\frac{1}{a} \end{bmatrix} \theta^0$$

$$= \bar{y}_{...} - \bar{y}_a$$

e, o estimador de sua variância é

$$\hat{V} = (\lambda\theta^0) = \hat{V}(\bar{y}_{...} - \bar{y}_a) = \lambda(X'X)\lambda \text{QMResíduo} =$$

$$= \left(\frac{1}{IJK} + \frac{1}{aK} \right) \text{QMResíduo} =$$

$$= \frac{a + IJ}{aIJK} \text{QMResíduo}$$

(vii) Contraste entre a média de um tratamento adicional (testemunha) e uma combinação qualquer do fatorial

Se o tratamento adicional é uma testemunha ou um tratamento de referência específico, então

$$\lambda \cdot \theta^0 = \bar{y}_{ae} - \bar{y}_e.$$

sendo

\bar{y}_{ae} a média da testemunha e \bar{y}_e a média de um tratamento fatorial, o estimador de sua variância é

$$\hat{V} = (\lambda \cdot \theta^0) = \hat{V} (\bar{y}_{ae} - \bar{y}_e) = \frac{2}{K} \text{QMResíduo}$$

4 RESULTADOS E DISCUSSÃO

No desenvolvimento da metodologia e posterior ilustração com exemplos numéricos, foi possível constatar a problemática de testar e interpretar hipóteses na análise de variância de experimentos fatoriais com tratamentos adicionais.

Como foi dito anteriormente, a inclusão de tratamentos adicionais é uma prática bastante comum, mas, às vezes, os testes de hipóteses podem ser de difícil interpretação. Para casos como estes, as análises se tornam mais fáceis se forem feitas matricialmente, pois não é possível incluir no modelo linear para o esquema fatorial os termos referentes aos tratamentos adicionais.

Alguns problemas com a inclusão de tratamentos adicionais, podem ser encontrados. Entre eles, foram detectados:

- a ortogonalidade de efeitos: há casos em que a ortogonalidade não existe entre todas as comparações de interesse, logo existem contrastes ambíguos. Por exemplo, o emprego de tratamento adicional mais de uma vez nos contrastes.;
- comparações confusas: podem ocorrer nos casos de uso de mais de um tratamento adicional, onde pretende-se avaliar, por exemplo, a média do fatorial com as médias dos adicionais, pois essas médias envolvem vários tratamentos, não se sabendo em qual está a diferença detectada ou não;
- podem parecer dois experimentos em um só, pelo fato de os tratamentos adicionais comporem um outro conjunto de tratamentos; pode ocorrer possivelmente com o uso de vários tratamentos adicionais;
- a análise e a conclusão nem sempre é fácil devido às ocorrências citadas anteriormente;

- utilização da testemunha mais de uma vez (repetição dos dados) fazendo com que a testemunha seja comparada mais de uma vez, com o absurdo da repetição de dados do tratamento adicional mais de uma vez.

Para cada exemplo apresentado, foi elaborado um programa utilizando o software SAS, utilizando-se dos procedimentos matriciais do PROC IML, nas quais foram utilizadas matrizes completas e matrizes com restrição Σ . Os exemplos apresentados se referem aos seguintes esquemas fatoriais:

- a) fatorial $(2 \times 2) + 3$, em um delineamento inteiramente casualizado balanceado;
- b) fatorial $(3 \times 4) + 4$, em um delineamento em blocos casualizados;
- c) fatorial $(3 \times 3) + 4$, em um delineamento inteiramente casualizado, sendo desbalanceados os dados referentes ao fatorial e balanceados os dados referentes aos tratamentos adicionais.

4.1 Exemplo 1: Fatorial (2 x 3) +1

A análise apresentada a seguir corresponde aos dados adaptados de Roveri (1999) e se referem a um experimento cujo intuito era estudar o efeito de temperaturas de condicionamento osmótico em sementes (lavadas ou não) de pimentão da cultivar Yolo Wonder tratadas com Captan. Avaliou-se a percentagem de germinação das sementes, e os resultados encontram-se na Tabela 16.

O trabalho de Roveri (1999) foi desenvolvido no Laboratório de Análises de Sementes e na casa de vegetação do Departamento de Agricultura da Universidade Federal de Lavras(MG).

O delineamento experimental utilizado foi o inteiramente casualizado, com quatro repetições com os tratamentos sendo adaptados para um fatorial (2x3)+1. Os tratamentos foram os seguintes:

Tratamento fatorial

Tipos de sementes: lavada e não lavada.

Temperatura de condicionamento: 15^oC, 20^oC e 25^oC.

Tratamento adicional:

Testemunha (não condicionada)

TABELA 16. Percentagem de germinação de sementes de pimentão (*)

Tratamentos	Repetição			
	1	2	3	4
1 ¹⁵	72	78	80	76
2 ²⁰	80	76	84	80
3 ²⁵	78	68	70	72
4 ¹⁵	90	82	80	84
5 ²⁰	86	88	90	88
6 ²⁵	94	88	86	90

Tratamento adicional				

Testemunha	80	76	78	78

(*) Dados adaptados de Roveri (1999)

O modelo considerado é

$$y = X\theta + \varepsilon$$

sendo: y_1 o vetor das percentagens de germinação;

X_{13} matriz do planejamento, constituída por submatrizes referente aos efeitos da constante μ , tipos de sementes,

temperaturas, interação tipos x temperatura, constante μ_a e tratamentos adicionais;

$_{13}\theta_1$ vetor dos parâmetros;

$_{28}\varepsilon_1$ vetor dos erros experimentais.

Com base nos dados da Tabela 16, foram obtidas as seguintes soma de quadrados:

i) soma de quadrados dos parâmetros

$$\begin{aligned} \text{SQ}(\mu, \alpha, \beta, \gamma, \mu_a, \tau) &= \theta^0 X^0 y \\ &= 185322 \end{aligned}$$

ii) soma de quadrados totais

$$\begin{aligned} \text{SQTotal sem correção} &= y^0 y, \text{ com } n_{...} \text{ gl} \\ &= 185552 \text{ com } 24 \text{ gl} \end{aligned}$$

Logo, tem-se

$$\begin{aligned} \text{SQResíduo} &= y^0 y - \theta^0 X^0 y \\ &= 230 \end{aligned}$$

Côm as somas de quadrados encontradas, as mesmas podem ser reunidas na primeira análise de variância apresentadass na Tabela 17.

TABELA 17. Primeira análise de variância referente ao Exemplo 1

C.V.	G.L.	S.Q.	Q.M.	F
Modelo (corrigido)	6	965,428	160,905	14,692
Resíduo	21	230,000	10,952	
Total	27	1195,428		
$SQ(\mu) = (2272)^2 / 28 = 184356,57$				

a) Modelos reduzidos

Para a obtenção das somas de quadrados dos efeitos de tratamentos em esquema fatorial, foram considerados alguns modelos reduzidos, partindo do modelo $(\mu, \alpha, \beta, \gamma, \mu_a, \tau)$, retirando-se os parâmetros na seguinte ordem: μ_a e τ , γ , β e α , nos quais foram obtidos os seguintes modelos reduzidos:

Modelo $(\mu, \alpha, \beta, \gamma)$	(a ₁)
Modelo (μ, α, β)	(a ₂)
Modelo (μ, α)	(a ₃)
Modelo (μ, β)	(a ₄)
Modelo (μ)	(a ₅)
Modelo (μ, μ_a, μ_b)	(a ₆)
Modelo (μ_a, τ)	(a ₇)
Modelo (μ_a)	(a ₈)

Em correspondência aos tipos de modelo citados em 4.1.1, obteve-se a seguinte análise de variância, Tabela 18:

TABELA 18. Esquema de análise de variância, para os dados de percentagem de germinação do exemplo 1.

C.V.		S.Q.
A: Tipos	$R(\alpha/\mu)$	$SQ_{Modelo(a_3)} - SQ_{Modelo(a_5)}$
B: Temperatura	$R(\beta/\mu)$	$SQ_{Modelo(a_4)} - SQ_{Modelo(a_5)}$
AB: Interação	$R(\gamma/\mu, \alpha, \beta)$	$SQ_{Modelo(a_1)} - SQ_{Modelo(a_2)}$
Fat. Vs. Adic.	$R(\mu, \mu_a/\mu_g)$	$SQ_{Modelo(a_6)} - SQ_{Modelo(a_8)}$

sendo:

$$SQ(\alpha/\mu) = SQ(\mu, \alpha) - SQ(\mu)$$

$$SQ(\beta/\mu) = SQ(\mu, \beta) - SQ(\mu)$$

$$SQ(\gamma/\mu, \alpha, \beta) = SQ(\mu, \alpha, \beta, \gamma) - SQ(\mu, \alpha, \beta)$$

$$SQ(\mu, \mu_a/\mu_g) = \{SQ(\mu) + SQ(\mu_a)\} - SQ(\mu_g)$$

$$SQ(\tau/\mu_a) = SQ(\mu_a, \tau) - SQ(\mu_a)$$

Para o exemplo 1, a análise de variância está apresentada na Tabela 19.

TABELA 19. Análise de variância para os dados de percentagem de germinação do exemplo 1.

C.V.	G.L.	S.Q.	Q.M.	F
A(α/μ)	1	726,00	726,00	66,29
B(β/μ)	2	66,33	33,18	3,03
AB($\gamma/\mu, \alpha, \beta$)	2	127,00	63,50	5,80
($\mu, \mu_a/\mu_g$)	1	46,095	46,10	4,21
Resíduo	21	230,00	10,95	
Total	27	1195,43		

Sendo:

$$C = SQ(\mu) = \frac{(y_{...})^2}{abr} = \frac{(1960)^2}{24} = 160066,67$$

$$SQ_{\text{Total}} = \sum_{i=1}^a \sum_{j=1}^b \sum_{k=1}^r y_{ijk}^2 - C = 185552 - \frac{(2272)^2}{28} = 1195,4286$$

$$\begin{aligned} SQT = SQ(\mu, \alpha, \beta, \gamma) &= \frac{1}{r} \sum_{i=1}^a \sum_{j=1}^b y_{j.}^2 - C \\ &= \frac{1}{4} (306^2 + 320^2 + 288^2 + 336^2 + 352^2 + 358^2) - \frac{(1960)^2}{24} \\ &= 919,33 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} SQA = SQ(\mu, \alpha) - SQ(\mu) &= \frac{1}{br} \sum_{i=1}^a y_{i..}^2 - C \\ &= \frac{1}{12} (914^2 + 1046^2) - \frac{(1960)^2}{24} \\ &= 726,00 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} SQB = SQ(\beta, \mu) - SQ(\mu) &= \frac{1}{ar} \sum_{j=1}^b y_{.j.}^2 - C \\ &= \frac{1}{8} (642^2 + 672^2 + 646^2) - \frac{(1960)^2}{24} \\ &= 66,33 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} SQA \times B = SQ(\gamma, \mu, \alpha, \beta) &= SQT - SQA - SQB \\ &= 919,33 - 726,00 - 66,33 \\ &= 127 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} SQ_{\text{Fat vs. Ad.}} = (\mu, \mu_a, \mu_b) &= \{SQ(\mu) + SQ(\mu_a)\} - SQ(\mu_b) \\ &= \left(\frac{(1960)^2}{24} + \frac{(312)^2}{4} \right) - \frac{(2272)^2}{28} \\ &= 46,095 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{SQAdicionais} &= (\tau, \mu_a) - \text{SQ}(\mu_a) = \frac{1}{r} \sum_{i=1}^a y_{ai}^2 - C_a \\
 &= \frac{1}{4} (352^2 + 358^2 + 312^2) - \frac{(1022)^2}{12} \\
 &= 312,6667
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{SQResíduo} &= \text{SQTotal} - \text{SQA} - \text{SQB} - \text{SQAxB} - \text{SQFat vs. Ad.} - \text{SQ Ad.} = \\
 &= 1195,4286 - 0,25 - 240,25 - 72,25 - 340,0119 - 312,6667 \\
 &= 230
 \end{aligned}$$

Os valores médios da percentagem de germinação encontram-se na Tabela 20.

TABELA 20. Valores médios da percentagem de germinação em função do tipo de semente e da temperatura do condicionamento

Tipo	Temperatura		
	15°C	20°C	25°C
Lavada	76,5 a	80,0 a	88,0 a
Não lavada	72,0 b	84,0 a	89,5 a

Médias seguidas de letras iguais, na coluna, não diferem significativamente entre si pelo teste de Tukey a 5% de probabilidade.

$$\text{DMS}_A = \Delta = q \sqrt{\frac{s}{r}} = q s(\hat{m}) = 2,94 \left(\sqrt{\frac{10,9524}{4}} \right) = 4,86$$

$$\text{DMS}_B = \Delta = 3,57 \left(\sqrt{\frac{10,9524}{4}} \right) = 5,91$$

Verificou-se que as médias dos tratamentos do experimento fatorial e do tratamento adicional foram de 81,7% e 71% ,respectivamente.

Devido a impossibilidade de introduzir no modelo linear do experimento fatorial os efeitos referentes aos tratamentos dos tratamentos adicionais, desenvolveu-se um programa elaborado pelo PROC IML SAS, que será útil em problema semelhante e servirá de roteiro para outros (SAS, 1995; Veiga e Ferreira, 1997), e se encontra no Anexo 1A.

Obteve-se os seguintes resultados:

SQN	726	GL1	1
SQP	66.333333	GL2	2
SQNP	127	GL3	2
SQFVSA	46.095238	GL5	1
SQRESIDU	230	GL6	21
SQTCORR	1195.4286	GLTOT	27

Uma outra alternativa para a condução desse tipo de análise é o uso de restrições paramétricas, entre essas restrições paramétricas do tipo Σ ou soma zero podem ser utilizadas. Uma das vantagens desse procedimento é a redução no tamanho das matrizes. A utilização do programa se encontra no Anexo 2A.

Utilizando-se as restrições Σ na matriz, foram obtidos os seguintes resultados:

SQN	726	GL1	1
SQP	66.333333	GL2	2

SQNP	127	GL3	2
SQFVSA	46.095238	GL4	1
SQRESIDU	230	GL5	21
SQTCORR	1195.4286	GLTOT	27

4.2-Exemplo 2: Fatorial (3x4)+4

Os dados apresentados na Tabela ²¹(17) referem-se às produções de batata, em t/ha, proveniente de um experimento fatorial com quatro tratamentos adicionais. Nele estudou-se o efeito de três doses de vinhaça, quatro doses de K₂O e quatro tratamentos adicionais, sendo assim distribuídos:

doses de vinhaça: 50,100 e 150m³/ha;

cloreto de potássio (K₂O): 0,100,200 e 300 kg/ha;

tratamentos adicionais:

T₁: 200m³/ha de vinhaça

T₂: 300m³/ha de vinhaça

T₃: 2t/ha de adubação química :4-14-8 de N₁P₂O₅ e K₂O

T₄: 4t/ha de adubação química :4-14-8 de N₁P₂O₅ e K₂O

O emprego dos tratamentos adicionais é justificado pelo fato de serem utilizadas somente duas doses menores de vinhaça no intuito de verificar se somente doses elevadas propiciam boas produções e o uso da adubação química, devido ao fato de ser formulação tradicionalmente empregado na adubação básica sem o uso de adubação orgânica, os dados estão apresentados na Tabela 21.

TABELA 21. Produção de batata, em t/ha, em função das doses de vinhaça, doses de K₂O, repetições e tratamentos adicionais.

Dose de vinhaça	Doses de K ₂ O	Blocos			Total
		I	II	III	
50m ³ /ha	0	12,4	11,6	10,8	34,8
	100	18,3	14,7	16,2	49,2
	200	18,6	17,7	19,5	55,8
	300	17,3	19,5	18,4	55,2
100m ³ /ha	0	13,6	12,8	13,8	40,2
	100	17,2	17,9	20,1	55,2
	200	18,6	15,6	17,7	51,9
	300	20,7	20,9	19,0	60,6
150m ³ /ha	0	19,8	21,0	19,5	34,8 60,3
	100	22,2	20,8	20,0	49,2 63,0 7
	200	19,5	20,2	22,7	55,8 62,4
	300	18,5	20,9	20,6	55,2 60,0
Adicionais	T ₁	20,2	18,4	19,3	57,9
	T ₂	19,4	19,7	20,0	59,1
	T ₃	19,3	16,9	17,5	53,7
	T ₄	20,9	22,0	22,2	65,1
Totais		296,5	291,6	297,3	884,4

O modelo considerado é:

$$y = X\theta + \varepsilon \quad (b)$$

sendo o vetor de parâmetros

$$\theta' = [\mu, \alpha, \beta, \gamma, \rho, \mu_a, \tau]$$

com μ constante referente ao fatorial; α vetor dos efeitos das doses de vinhaça; β vetor de efeitos das doses de K_2O ; γ vetor de efeito da interação doses de vinhaça x doses de K_2O ; ρ vetor de efeitos de repetições (blocos); μ_a constante referente aos tratamentos adicionais e τ vetor dos efeitos dos tratamentos adicionais.

Tabela auxiliar: Tabela 22 envolvendo os totais das observações das combinações das doses de vinhaça com doses de K_2O

TABELA 22. Produções totais das três repetições de batata, em t/ha, em função das doses de vinhaça e das doses de K_2O

Níveis de K_2O	Doses de vinhaça			Totais
	50m ³ /ha	100m ³ /ha	150m ³ /ha	
0 kg/ha	34,8	40,2	60,3	135,3
100 kg/ha	49,2	55,2	63,0	167,4
200 kg/ha	55,8	51,9	62,4	170,1
300 kg/ha	55,2	60,6	60,0	175,8
Totais	195,0 ^{1/2}	207,9	245,7	648,6

Para a realização da análise de variância utilizando-se a notação matricial, alguns modelos reduzidos são necessários.

a) Modelos reduzidos

A partir do modelo completo ($\mu, \alpha, \beta, \rho, \gamma, \mu_a, \tau$), retiraram-se os parâmetros na seguinte ordem: μ_a e τ , ρ, γ, β e α , dos quais foram obtidos os seguintes modelos reduzidos:

Modelo $(\mu, \alpha, \beta, \gamma)$	(b ₁)
Modelo $(\mu, \alpha, \beta,)$	(b ₂)
Modelo $(\mu, \alpha,)$	(b ₃)
Modelo (μ, β)	(b ₄)
Modelo (μ, ρ)	(b ₅)
Modelo (μ)	(b ₆)
Modelo (μ, μ_a, μ_g)	(b ₇)
Modelo $(\mu_a,)$	(b ₈)
Modelo (μ_a)	(b ₉)

A partir dos modelos reduzidos citados em (a) foi obtido o esquema para a análise de variância apresentado na Tabela 23:

TABELA 23. Esquema de análise de variância para os dados do exemplo 2

C.V.	S.Q.
Blocos($\rho/\mu, \alpha, \beta, \gamma$)	SQModelo(b) - SQModelo(b ₁)
A(α/μ)	SQModelo(a ₄) - SqModelo(a ₆)
B(β/μ)	SQModelo(a ₅) - SqModelo(a ₆)
AB($\gamma/\mu, \alpha, \beta$)	SQModelo(a) - SqModelo(a ₅)
($\mu, \mu_a/\mu_g$)	SQModelo(a ₅) - SqModelo(a)
(τ/μ_a)	SQModelo(a ₇) - SqModelo(a ₈)

A análise de variância para os dados do exemplo 2, encontra-se na tabela 24

TABELA 24. Análise de variância para os dados do exemplo envolvendo o esquema fatorial 3x4+4

C.V.	G.L.	S.Q.	Q.M.	F
<i>trat.</i> Vinhaça	2	115,72	57,86	42,37**
K ₂ O	3	110,89	36,96	27,07**
Vinhaça x K ₂ O	6	61,21	10,20	7,47**
Blocos	2	1,68	0,84	0,61
Adicionais	3	22,17	7,39	5,41**
Adic. vs. Fat.	1	24,01	24,01	17,58**
Resíduo	30	40,97	1,37	
Total	47	376,63		

Estes resultados também podem ser alcançados utilizando-se as expressões obtidas em 3.5.

$$SQ_{\text{vinhaça}} = SQ(\mu, \alpha) - SQ(\mu) = \frac{1}{br} \sum_{i=1}^a y_{i..}^2 - C$$

$$= \frac{1}{12} \{ (195)^2 + (207,9)^2 + (245,7)^2 \} - \frac{(648,6)^2}{36}$$

$$= 115,72$$

$$SQ_{K_2O} = SQ(\beta, \mu) - SQ(\mu) = \frac{1}{ar} \sum_{j=1}^b y_{.j.}^2 - C =$$

$$= \frac{1}{9} \{ (135,3)^2 + (167,4)^2 + (170,1)^2 + (175,8)^2 \} - \frac{(648,6)^2}{36}$$

$$= 110,89$$

$$\begin{aligned} \text{SQ}_{\text{VINHAÇA, K20}} &= \text{SQ}(\mu, \alpha, \beta, \gamma, \rho) = \frac{1}{r} \sum_{i=1}^a \sum_{j=1}^b y_{ij}^2 - C \\ &= \frac{1}{3} \{ (34,8)^2 + (49,2)^2 + \dots + (60,0)^2 \} - \frac{(648,6)^2}{36} \\ &= 287,81 \end{aligned}$$

$$\text{SQ}_{\text{VINHAÇA X K20}} = \text{SQ}(\gamma, \mu, \alpha, \beta) = \text{SQT} - \text{SQA} - \text{SQB} = 61,21$$

$$\begin{aligned} \text{SQ}_{\text{BL}} = \text{SQ}(\rho, \mu) - \text{SQ}(\mu) &= \frac{1}{16} \{ (296,5)^2 + (291,6)^2 + (297,3)^2 \} - \frac{(884,4)^2}{48} \\ &= 1,68 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{SQ}_{\text{ADICIONAIS}} = (\tau, \mu_a) - \text{SQ}(\mu_a) &= \frac{1}{r} \sum_{i=1}^a y_{at}^2 - C_a \\ &= \frac{1}{3} \{ (57,9)^2 + (59,1)^2 + (53,7)^2 + (65,1)^2 \} - \frac{(235,8)^2}{12} \\ &= 22,17 \end{aligned}$$

$$\text{SQ}_{\text{FATORIAL vs. ADICIONAIS}} = \{ \text{SQ}(\mu) + \text{SQ}(\mu_a) \} - \text{SQ}(\mu_g)$$

$$= \frac{(648,6)^2}{36} + \frac{(235,8)^2}{12} - \left(\frac{648,6 + 235,8}{36 + 12} \right)^2$$

$$= 24,01$$

Esta fonte de variação é comumente encontrada nos experimentos que envolvem tratamentos adicionais. Sendo significativa ($P < 0,01$), indica que a média dos tratamentos fatoriais é diferente da média dos tratamentos adicionais, isto é, compara a média geral das 12 combinações fatoriais (3 doses de vinhaça combinada com 4 doses de K_2O) com a média geral dos quatro tratamentos adicionais. Estas comparações sendo ortogonais às demais, servem para completar a decomposição da soma de quadrados total, mas, para este caso, não é uma comparação de interesse prático ou de fácil compreensão; veja que na média dos tratamentos adicionais existe efeito de dois tratamentos com vinhaça e dois com adubação química. Isto sugere que o uso de tratamentos adicionais deve ser criterioso, buscando usar aquele que facilita a compreensão e sirva realmente de referência para os tratamentos fatoriais.

Este fato ilustra uma comparação confusa e a sua compreensão não é facilmente visualizada, visto que comparam-se duas médias oriundas de vários tratamentos. Não se sabe se, quando existir diferença, se será devido às altas doses de vinhaça ou às adubações químicas, pois seus valores estão misturados.

Como houve efeito significativo da interação, deve-se dar maior ênfase ao seu desdobramento. Um dos desdobramentos possíveis da interação $V \times K_2O$ é estudar o comportamento das doses de K_2O dentro de cada uma das doses de vinhaça. Assim, as somas de quadrados de doses de K_2O dentro de cada doses de vinhaça são:

$$SQ_{K_2O \text{ d. } V_1} = \frac{1}{3} \{ (34,8)^2 + (49,2)^2 + (55,8)^2 + (55,2)^2 \} - \frac{(195)^2}{12} = 95,37$$

$$SQK_2O \text{ d. } V_2 = \frac{1}{3} \{(40,2)^2 + (55,2)^2 + (51,9)^2 + (60,6)^2\} - \frac{(207,9)^2}{12} = 74,48$$

$$SQK_2O \text{ d. } V_3 = \frac{1}{3} \{(60,3)^2 + (63,0)^2 + (62,4)^2 + (60,0)^2\} - \frac{(245,7)^2}{12} = 2,24$$

Estas variações podem ser avaliadas por meio da seguinte parte da análise de variância

TABELA 25. Desdobramento das doses de K₂O dentro dos níveis das doses de vinhaça

C.V.	G.L.	S.Q.	Q.M.	F
Doses de K ₂ O d. V ₁	3	95,37	31,79	23,20**
Doses de K ₂ O d. V ₂	3	74,48	24,83	18,12**
Doses de K ₂ O d. V ₃	3	2,24	0,75	0,55
Resíduo	30	40,97	1,37	

Como houve efeito significativo ($P < 0,01$) das doses de K₂O nas doses de vinhaça de 50 e 100 m³/ha, sugerindo que existem fortes evidências de que com o acréscimo das doses de K₂O, ocorreram acréscimos significativos na produção de batata. Na dose de 150 m³/ha de vinhaça, não ocorreu esta tendência de aumento na produção. Estes resultados podem ser visualizados na Tabela 25. A continuação desta análise, neste caso, deve estudar o comportamento das produções em função das doses de K₂O nas doses de vinhaça de 50 e 100m³/ha, através do uso de regressão.

Tabela 26. Valores médios da produção de batata em função das doses de K₂O em cada uma das doses de vinhaça.

K ₂ O	Vinhaça m ³ /ha			
	50	100	150	Média
0	11,6	13,4	20,1	15,03
100	16,4	18,4	21,0	18,60
200	18,6	17,3	20,8	18,9
300	18,4	20,2	20,0	19,53
Média	16,25	17,33	20,5	

Verificou-se que a média dos tratamentos adicionais foi de 19,65t/ha e a média do fatorial 18,03t/ha, sendo significativamente diferentes conforme teste F apresentado na Tabela 24.

Testemunhas	Fatorial
19,65 a	18,03 b

Como os tratamentos adicionais foram significativos ($P < 0,01$) pode-se compará-los por meio de um teste de médias utilizando-se o estimador dado em 3.8 para comparação de duas médias de tratamentos adicionais. Assim obteve-se o seguinte resultado:

Tratamentos	Médias(t/ha)
T ₁ = 200 m ³ /ha	19,3 ab
T ₂ = 300 m ³ /há	19,7 ab
T ₃ = 2 t 4-14-8	17,9 b
T ₄ = 4 t 4-14-8	21,7 a

A diferença mínima significativa é dada por

$$\Delta = 3,85 \left(\sqrt{\frac{1,37}{3}} \right) = 2,6 \text{ t/ha}$$

b) Programa para análise por meio do SAS

Para a resolução deste exemplo, desenvolveu-se um programa apropriado utilizando o procedimento do PROC IML do SAS, que se encontra no Anexo 1B.

SQV	115.715	GL1	2
SQK	110.89	GL2	3
SQVK	61.205	GL3	6
SQADI	22.17	GL4	3
SQBL	1.67375	GL5	2
SQFVSA	24.01	GL6	1
SQRESIDU	40.96625	GL7	30
SQTCORR	376.63	GL8	47

Com a utilização de restrições paramétricas Σ , obtiveram-se os seguintes resultados:

SQV	115.715	GL1	2
SQK	110.89	GL2	3
SQVK	61.205	GL3	6
SQADI	22.17	GL4	3
SQBL	1.67375	GL5	2
SQFVSA	24.01	GL6	1
SQRESIDU	40.96625	GL7	30
SQTCORR	376.63	GL8	47

Nota-se que os resultados com utilização das restrições são idênticos aos resultados encontrados anteriormente. A utilização do programa se encontra no Anexo 2B.

4.3 Exemplo 3 Fatorial (3x3)+4

A Tabela 27 apresenta a produção de tomate (kg/parcela), de um experimento de adubação NP instalados no esquema fatorial (3x3)+4. O delineamento foi inteiramente casualizado e houve duas parcelas perdidas. Os tratamentos adicionais foram:

T₁: 30 100+ calcário (C);

T₂: 30 100 + micronutrientes(M);

T₃: 30 100 + micronutrientes +calcário

TABELA 27. Produção de tomates (kg/parcela) dados referentes ao Exemplo 3

Tratamentos		Repetições			
N	P	1	2	3	4
0	0	7,2	6,8	7,5	6,4
0	50	7,4	6,5	5,6	-
0	100	6,8	7,3	7,2	6,8
30	0	6,4	7,6	7,0	6,5
30	50	6,8	8,2	6,5	7,3
30	100	6,5	8,5	-	-
60	0	8,0	7,2	7,8	7,0
60	50	7,5	7,5	8,5	6,8
60	100	8,5	8,3	8,2	7,5
T ₁		6,3	6,8	7,1	7,3
T ₂		6,9	7,4	8,1	6,7
T ₃		5,9	6,7	8,3	7,4

O modelo considerado é:

$$y = X\theta + e \quad (c)$$

sendo o vetor de parâmetros

$$\theta' = [\mu, \alpha, \beta, \gamma, \mu_a, \tau]$$

com μ constante referente ao fatorial; α vetor dos efeitos das doses de N; β vetor dos efeitos das doses de P; γ vetor do efeito da interação doses de N x doses de P; μ_a constante referente aos tratamentos adicionais e τ vetor dos efeitos dos tratamentos adicionais.

Com base nos dados da Tabela 27, foram obtidas as seguintes somas:

$$SQ(\mu, \alpha, \beta, \gamma, \mu_a, \tau) = \theta' X' y$$

$$= 26186,874$$

sendo SQ_{Total} sem correção = $y'y$, com n... gl

$$= 26291,7 \text{ com } 24 \text{ gl}$$

Logo, tem-se

$$SQ_{Resíduo} = y'y - \theta^0 X'y$$

$$= 104,826$$

Com as somas de quadrados encontradas, as mesmas podem ser reunidas na primeira análise de variância

TABELA 28. Primeira análise de variância referente ao Exemplo 3

C.V.	G.L.	S.Q.	Q.M.	F
Modelo (corrigido)	9	103,647	11,516	1,534
Resíduo	14	104,826	7,488	
Total	23	208,4733		
$SQ(\mu) = (791,2)^2 / 24 = 26083,227$				

a) Modelos reduzidos

Para a obtenção das somas de quadrados dos efeitos de tratamentos adicionais e de tratamentos em esquema fatorial, foram considerados alguns modelos reduzidos partindor do modelo em (c)

Utilizando o mesmo processo adotado no exemplo 1, os modelos reduzidos obtidos foram:

$$\text{Modelo } (\mu, \alpha, \beta, \gamma) \quad (c_1)$$

$$\text{Modelo } (\mu, \alpha, \beta) \quad (c_2)$$

$$\text{Modelo } (\mu, \alpha) \quad (c_3)$$

Modelo (μ, β)	(c ₄)
Modelo (μ)	(c ₅)
Modelo (μ, μ_a, μ_b)	(c ₆)
Modelo (μ_a, τ)	(c ₇)
Modelo (μ_a)	(c ₈)
Modelo (μ_b)	(c ₉)

Com base nos modelos reduzidos, obteve-se o esquema de análise de variância apresentado na Tabela 29

TABELA 29. Esquema de análise de variância para os dados do exemplo 3

C.V.	S.Q.
$A(\alpha/\mu)$	$SQ_{Modelo(c_3)} - Sq_{Modelo(c_5)}$
$B(\beta/\mu)$	$SQ_{Modelo(c_4)} - Sq_{Modelo(c_5)}$
$AB(\gamma/\mu, \alpha, \beta)$	$SQ_{Modelo(c_1)} - Sq_{Modelo(c_2)}$
$(\mu, \mu_a/\mu_b)$	$SQ_{Modelo(c_6)} - Sq_{Modelo(c_9)}$
(τ/μ_a)	$SQ_{Modelo(c_7)} - Sq_{Modelo(c_8)}$

Utilizando-se o mesmo processo no exemplo 1, desenvolvido no item 3.5 e o esquema da Tabela 29 as seguintes somas de quadrados foram obtidas:

$$SQ(\mu) = 1739,6412$$

$$SQ(\mu, \alpha) = 1744,2269$$

$$SQ(\mu, \beta) = 1740,9321$$

$$SQ(\mu, \alpha, \beta) = 1745,5066$$

$$SQ(\mu, \alpha, \beta, \gamma) = 1746,2625$$

$$SQ(\mu_b) = 2340,0056$$

$$SQ(\mu_a) = 600,6675$$

$$SQ(\mu_a, \tau) = 600,9875$$

$$SQ(\mu_a, \tau) = 600,9875$$

Partindo destes resultados, foicalculada a contribuição de cada parâmetro.

$$R(\gamma/\mu, \alpha, \beta) = SQ(\mu, \alpha, \beta, \gamma) - SQ(\mu, \alpha, \beta) = 0,755896$$

$$R(\beta/\mu, \alpha) = SQ(\mu, \alpha, \beta) - SQ(\mu, \alpha) = 1,279726$$

$$R(\alpha/\mu, \beta) = SQ(\mu, \alpha, \beta) - SQ(\mu, \beta) = 4,574544$$

$$R(\alpha/\mu) = SQ(\mu, \alpha) - SQ(\mu) = 4,5856667$$

$$R(\beta/\mu) = SQ(\mu, \beta) - SQ(\mu) = 1,2908485$$

$$R(\mu, \mu_a, / \mu_b) = SQ(\mu) + SQ(\mu_a) - SQ(\mu_b) = 0,3031566$$

$$R(\tau / (\mu_a) = SQ(\tau, \mu_a) - SQ(\mu_a) = 0,320$$

Tem-se então a análise de variância apresentada na Tabela 30.

TABELA 30. Esquema da análise de variância referente aos dados de produção de tomate, exemplo 3.

C.V.	G.L	S.Q.	Q.M.	F
Nitrogênio (N)	2	4,586	2,293	5,164
Fósforo (P)	2	1,291	0,646	1,455
Interação NxP	4	0,756	0,189	0,426
Adicionais	2	0,320	0,160	0,360
Fat. vs. Adic.	1	0,303	0,303	0,682
Resíduo	33	14,660	0,444	
Total	44	21,904		

Observa-se que houve efeito significativo ($P < 0,05$) somente para nitrogênio (fator α), indicando que as doses de nitrogênio afetaram significativamente a produção de tomate.

De maneira semelhante, para a resolução deste exemplo desenvolveu-se um programa apropriado utilizando-se o procedimento do PROC IML do SAS, que se encontra no Anexo 1C. Os resultados obtidos são os seguintes:

SQN	4.5856667	GL1	2
SQP	1.2908485	GL2	2
SQNP	0.7558955	GL3	4
SQADI	0.32	GL4	2
SQFVSA	0.3031566	GL5	1
SQRESIDU	14.66	GL6	33
SQTCORR	21.904444	GTOT	44

Com a utilização de restrições paramétricas Σ , as somas de quadrados com seus respectivos graus de liberdade foram:

SQN	4.5856667	GL1	2
SQP	1.2908485	GL2	2
SQNP	0.7558955	GL3	4
SQADI	0.32	GL4	2
SQFVSA	0.3031566	GL5	1
SQRESIDU	14.66	GL6	33
SQTCORR	21.904444	GTOT	44

5 CONCLUSÕES

- 5.1 A análise de dados provenientes de experimentos fatoriais com tratamentos adicionais é perfeitamente viável, desde que sejam utilizados os tratamentos adicionais como verdadeiros termos de referências.**
- 5.2 O emprego de tratamentos adicionais deve ser feito com muita cautela e moderação. Em muitos casos, a fonte de variação fatorial vs. adicional não possui interpretação prática coerente com o experimento.**
- 5.3 As análises estatísticas são possíveis de serem realizadas somente com a utilização de notação matricial, as quais podem ser o programadas pelo PROC IML do software SAS.**
- 5.4 Os tratamentos adicionais e fatoriais constituem um conjunto desconexo.**

6 REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- BANZATO, D. A.; KRONKA, S. do N. **Experimentação agrícola**. 3.ed. Jaboticabal: Funep, 1995.247p.
- CAMPOS, H. de. **Estatística aplicada à experimentação com cana-de açúcar**. Piracicaba: FEALQ, 1984. 292p.
- * COCHRAN, W.G.; COX, G.M. **Experimental designs** 2. ed. New York: John Wiley, 1957.611p.
- CORREA, J.B.D. **Ensaio fatorial com mais de um tratamento adicional**. Lavras: UFLA 1985.8p. (Trabalho não publicado)
- DAVIS, O. **Design and analysis of industrial experiments**. London: Imperial chemical industries, 1979. 636p.
- DUMONT, M.; **Ensaio fatorial com testemunho de referência. Fertilité**, Paris, v.18, p.3-7, Paris 1963.
- FEDERER, W.T. **Experimental designs**. New York: McMillan, 1955.544p.
- FEIPPE, M.A. **Influência da atmosfera modificada e armazenamento escurecimento interno de pêssegos cv.Marli**. Lavras:UFLA, 2000.124p. (Dissertação – Mestrado em Ciências dos Alimentos)
- GRAYBILL, F.A. **An introduction to linear statistical models**. New York: McGraw-Hill, 1961. 463p.
- HEALY, M. J. R.; **The analysis of a factorial experiment with additional treatments**, *Journal Agric. Science*. v.47, p. 205-206. 1956.
- * HINKELMANN, K.; KEMPTHORNE, O. **Design and analysis of experiments**. New York: John Wiley, 1994. v.1, 495p.
- IEMMA, A.F. **Modelos lineares: uma introdução para profissionais da pesquisa agropecuária**. Londrina FUEL/ Departamento de Matemática Aplicada.1987.263p.
- IEMMA, A.F. **Testes de hipóteses em modelos lineares com amostras desequilibradas**. Gembloux – Belgique, 1991. 101p.

IEMMA, A. F. **Análise de experimentos em parcelas subdivididas com tratamentos principais dispostos em blocos incompletos balanceados.** Piracicaba: ESALQ, 1981. 145p.(Tese – Doutorado em estatística e Experimentação Agrônômica).

IEMMA, A.F. **Matrizes para estatística: um texto para profissionais de ciências aplicadas.** Piracicaba: ESALQ/DME, 1988. 339p.

* KIRK, R.E. **Experimental design: procedures for the behavioral science.** 30rd.ed.Pacific Grove Brooks/Cole publishing company. 1982

MILLEKEN, G.A.; JOHNSON, D.E. **Analysis of messy data. London: Lifetime Learning.** 1984

MISCHAN, M.M.; PINHO, S.Z. de. **Experimentação agrônômica: dados não balanceados.** Botucatu: Fundibio, 1996.457p.

MORAIS, A. R.; NOGUEIRA, M.C.S. Experimentos em parcelas subdivididas com tratamentos primários em blocos incompletos parcialmente balanceados II. **Análise intrablocos. Scientia Agrícola, Piracicaba, v.53, n.1. p.138-145.jan./abr.,1996.**

NETER, J.;WASSERMAN, W. **Applied linear statistical models.** Illinois: Richard D.Irwin, 1974, 842p.

NOGUEIRA, M.C.S. **Curso de estatística experimental aplicada à experimentação agropecuária** Piracicaba ESALQ/DME , 1991. 168p.

OLIVEIRA, M.W.; TRIVELIN, P.C.O.; GAVA, G.J.C.; PENATTI, C.P. **Degradação da palhada da cana-de açúcar. Scientia Agrícola, Piracicaba, v.56, n.4, p.203-209, out./dez. 1999**
803-809

PEREIRA, G.D.; **Manganês em cultivares de arroz de sequeiro: prognose da disponibilidade, nutrição mineral e produção.** Lavras: UFLA, 1999. 111p. (Dissertação-Mestrado em Solos e Nutrição de Plantas)

* PIMENTEL GOMES, F. **Curso de estatística experimental** 14 ed. Piracicaba: Nobel, 2000. 468p.

RAO, G.R.**Linear statistical inference and its applications.** New York, John Wiley, 1965. P.

ROVERI, J.S.C.B. Condicionamento osmótico de sementes de pimentão: efeito germinação, vigor e atividade enzimática. Lavras: UFLA, 1999 107p. (Dissertação- Mestrado em Fitotecnia).

SEARLE, S.R. Linear models, New York: John Wiley, 1971. 531p.

SEARLE, S.R. Linear models for unbalanced data. John Wiley, 1987. 536p.

SNEDECOR, G.W.; COCHRAN, W.G. Statistical methods. Iowa. University of Ames, 1980. 507p.

STATISTICAL ANALYSIS SYSTEM INSTITUTE. SAS Language and procedures: usage. version 6.12. Cary, NC: SAS Institute, 1995. 373p.

***STELL, R.G.D.; TORRIE, J.H. Principles and procedures of statistics** New York: McGraw-Hill Book, 1997. 633p.

VEIGA, R.D.; FERREIRA, D.F. Introdução ao sistema SAS. Lavras UFLA, 1997. 77p.

YATES, F. The design and analysis of factorial experiments. Imperial Bureau of soil science, Harpend: England. 1937. 95p.

ANEXOS

ANEXO A	Página
ANEXO 1 A Programa SAS referente ao exemplo 1, elaborado por meio do PROC IML	139
ANEXO 2 A Programa SAS referente ao exemplo 1, utilizando de restrições Σ elaborado por meio do PROC IML	143
ANEXO 3 A Programa SAS referente ao exemplo 2, elaborado através do PROC IML	146
ANEXO 4 A Programa SAS referente ao exemplo 2, utilizando restrição Σ , elaborado por meio do PROC IML	151
ANEXO 5 A Programa SAS referente ao exemplo 3, elaborado por meio do PROC IML	155
ANEXO 6 A Programa SAS referente ao exemplo 2, utilizando restrição Σ , elaborado por meio do PROC IML	159

ANEXO 1A. Programa SAS referente ao exemplo 1, elaborado por meio do PROC IML

PROC IML;

RESET PRINT;

```
X={1 10 10 1000 0000,
  1 10 10 1000 0000,
  1 10 10 1000 0000,
  1 10 10 1000 0000,
  1 10 01 0100 0000,
  1 10 01 0100 0000,
  1 10 01 0100 0000,
  1 10 01 0100 0000,
  1 01 10 0010 0000,
  1 01 10 0010 0000,
  1 01 10 0010 0000,
  1 01 10 0010 0000,
  1 01 01 0001 0000,
  1 01 01 0001 0000,
  1 01 01 0001 0000,
  1 01 01 0001 0000,
  0 00 00 0000 1100,
  0 00 00 0000 1100,
  0 00 00 0000 1100,
  0 00 00 0000 1100,
  0 00 00 0000 1010,
  0 00 00 0000 1010,
  0 00 00 0000 1010,
  0 00 00 0000 1010,
  0 00 00 0000 1001,
  0 00 00 0000 1001,
  0 00 00 0000 1001,
  0 00 00 0000 1001};
```

```
y={72,78,80,76,80,76,84,80,78,68,70,72,90,82,80,84,
  86,88,90,88,94,88,86,90,80,76,78,78};
```

```
tfqx=trace(x*(ginv(x`*x))*x`);
```

```
b=ginv(x`*x)*x`*y;
```

```
sqb=b`*x`*y;
```

```
sqttotal=y`*y;
```

```
x1= x[,1];
```

```
xadi=x1+x[,13];
```

```
m_adi=ginv(xadi`*xadi)*xadi`*y;
```

```
sqmgeral=m_adi`*xadi`*y;
```

```
/*modelo y=m+e*/;
```

```
tfqx1=trace(x1*(ginv(x1`*x1))*x1`);
```

```
mhat=ginv(x1`*x1)*x1`*y;
```

```
sqm=mhat`*x1`*y;
```

```
/*modelo y=m+n+e*/;
```

```
x2=x[,1:3];
```

```
tfqx2=trace(x2*(ginv(x2`*x2))*x2`);
```

```
b2hat=ginv(x2`*x2)*x2`*y;
```

```
sqb2=b2hat`*x2`*y;
```

```
/*modelo y=m+p+e*/;
```

```
x3=x[,1]||x[,4:6];
```

```
tfqx3=trace(x3*(ginv(x3`*x3))*x3`);
```

```
b3hat=ginv(x3`*x3)*x3`*y;
```

```
sqb3=b3hat`*x3`*y;
```

```
/*modelo=m+n+p+e*/;
```

```
x4=x[,1]||x[,1:6];
```

```
tfqx4=trace(x4*(ginv(x4`*x4))*x4`);
```

```
b4hat=ginv(x4`*x4)*x4`*y;
```

```
sqb4=b4hat`*x4`*y;
```

```

/*SQ(n|m)=SQ(m,n)-SQ(m)*/;
sqn=sqb2-sqm;
gl1=tfqx2-tfqx1;
/*SQ(p|m)=SQ(m,p)-SQ(m)*/;
sqp=sqb3-sqm;
gl2=tfqx3-tfqx1;

/*SQinteracao considerando trat adiconal*/;
x5=x[,1:6]||x[,13:14];
tfqx5=trace(x5*(ginv(x5`*x5))*x5`);
b5hat=ginv(x5`*x5)*x5`*y;
sqb5=b5hat`*x5`*y;

/*SQ(np|m,n,p,t1ad,t2ad)=SQ(m,n,p,np,t1ad,t2ad)-SQ(m,n,p,t1ad,t2ad)*/;
sqnp=sqb-sqb5;
gl3=tfqx-tfqx5;

/*SQ tratamento adicional CORRIGIDO*/;
x1_ADI=x[25:28,13];
y_ADI=y[25:28,];
b_ADI=ginv(x1_ADI`*x1_ADI)*x1_ADI`*y_ADI;
sqm_ADI=b_ADI`*x1_ADI`*y_ADI;
tfqxADI=trace(x1_ADI*(ginv(x1_ADI`*x1_ADI))*x1_ADI`);
x6=x[25:28,13:14];
tfqx6=trace(x6*(ginv(x6`*x6))*x6`);
b6hat=ginv(x6`*x6)*x6`*y_ADI;

/*fatorial x adicional*/
sqFvsA=sqm+sqm_ADI-sqmgeral;
gl4=gl2-gl1;

```

```
sqresiduo=sqtotal-sqb;
```

```
g15=tfqx+tfqx1+tfqx3+tfqx4+tfqx5+tfqxADI;
```

```
sqtcorr=sqtotal-sqmgeral;
```

```
gltot=g11+g12+g13+g14+g15;
```

```
quit;
```


ANEXO 2A. Programa SAS referente ao exemplo 1, utilizando de restrições Σ , elaborado por meio do PROC IML

proc IML;

RESET PRINT;

```
Z={1 1 1 0 1 0 0 0 0,
 1 1 1 0 1 0 0 0 0,
 1 1 1 0 1 0 0 0 0,
 1 1 0 1 0 1 0 0 0,
 1 1 0 1 0 1 0 0 0,
 1 1 0 1 0 1 0 0 0,
 1 1 0 1 0 1 0 0 0,
 1 1 -1 -1 0 0 1 0 0,
 1 1 -1 -1 0 0 1 0 0,
 1 1 -1 -1 0 0 1 0 0,
 1 1 -1 -1 0 0 1 0 0,
 1 -1 0 0 -1 0 0 0 0,
 1 -1 0 0 -1 0 0 0 0,
 1 -1 0 0 -1 0 0 0 0,
 1 -1 1 1 0 -1 0 0 0,
 1 -1 1 1 0 -1 0 0 0,
 1 -1 1 1 0 -1 0 0 0,
 1 -1 -1 -1 0 0 -1 0 0,
 1 -1 -1 -1 0 0 -1 0 0,
 1 -1 -1 -1 0 0 -1 0 0,
 0 0 0 0 0 0 0 1 1,
 0 0 0 0 0 0 0 1 1,
 0 0 0 0 0 0 0 1 1,
 0 0 0 0 0 0 0 1 1}
```

y={72,78,80,76,80,76,84,80,78,68,70,72,90,82,80,84,
86,88,90,88,94,88,86,90,80,76,78,78};

tfqz=trace(z*(GINV(z`*z))*z`);

b=GINV(z`*z)*z`*y;

sqb=b`*z`*y;

```
sqttotal=y`*y;
```

```
/*modelo y=m+e*/;
```

```
z1=z[,1];
```

```
tfqz1=trace(z1*(GINV(z1`*z1))*z1`);
```

```
mhat=GINV(z1`*z1)*z1`*y;
```

```
sqm=mhat`*z1`*y;
```

```
/*modelo y=m+n+p+e*/;
```

```
z2=z[,1:2];
```

```
tfqz2=trace(z2*(GINV(z2`*z2))*z2`);
```

```
b2hat=GINV(z2`*z2)*z2`*y;
```

```
sqb2=b2hat`*z2`*y;
```

```
/*modelo y=m+n+np+p+e*/;
```

```
z3=z[,1]||z[,3:4];
```

```
tfqz3=trace(z3*(GINV(z3`*z3))*z3`);
```

```
b3hat=GINV(z3`*z3)*z3`*y;
```

```
sqb3=b3hat`*z3`*y;
```

```
/*modelo=m+n+p+np+e*/;
```

```
z4=z[,1:4];
```

```
tfqz4=trace(z4*(GINV(z4`*z4))*z4`);
```

```
b4hat=GINV(z4`*z4)*z4`*y;
```

```
sqb4=b4hat`*z4`*y;
```

```
/*SQinteracao considerando trat adicional*/;
```

```
z5=z[,1:4]||z[,8:9];
```

```
tfqz5=trace(z5*(GINV(z5`*z5))*z5`);
```

```
b5hat=GINV(z5`*z5)*z5`*y;
```

```
sqb5=b5hat`*z5`*y;
```

```
sqn=sqb2-sqm;gl1=tfqz2-tfqz1;
```

```
sqp=sqb3-sqm;gl2=tfqz3-tfqz1;
```

```
sqnp=sqb-sqb5;gl3=tfqz-tfqz5;
```

```
zadi=z1+z[,8];
```

```
m_adi=ginv(zadi`*zadi)*zadi`*y;
```

```
sqmgeral=m_adi`*zadi`*y;
```

```
/*SQ tratamento adicional CORRIGIDO*/;
```

```
z1_ADI=z[25:28,8];
```

```
y_ADI=y[25:28,];
```

```
b_ADI=GINV(z1_ADI`*z1_ADI)*z1_ADI`*y_ADI;
```

```
sqm_ADI=b_ADI`*z1_ADI`*y_ADI;
```

```
tfqzADI=trace(z1_ADI*(GINV(z1_ADI`*z1_ADI))*z1_ADI`);
```

```
z6=z[25:28,8:9];
```

```
tfqz6=trace(z6*(GINV(z6`*z6))*z6`);
```

```
b6hat=GINV(z6`*z6)*z6`*y_ADI;
```

```
/*fatorial x adicional*/
```

```
sqFvsA=sqm+sqm_ADI-sqmgeral;
```

```
gl4=gl2-gl1;
```

```
sqresiduo=sqtotal-sqb;
```

```
gl5=tfqz+tfqz1+tfqz3+tfqz4+tfqz5+tfqzADI;
```

```
sqtcorr=sqtotal-sqmgeral;
```

```
gltot=gl1+gl2+gl3+gl4+gl5;
```

```
quit;
```

ANEXO 3A. Programa SAS referente ao exemplo 2, elaborado por meio do PROC IML

PROC IML;

RESET PRINT;

```
X={110010001001000000000000000000,
  110010000101000000000000000000,
  110010000011000000000000000000,
  110001001000100000000000000000,
  110001000100100000000000000000,
  110001000010100000000000000000,
  110000101000010000000000000000,
  110000100100010000000000000000,
  110000100010010000000000000000,
  110000011000001000000000000000,
  110000010100001000000000000000,
  110000010010001000000000000000,
  101010001000000100000000000000,
  101010000100000100000000000000,
  101010000010000100000000000000,
  101001001000000010000000000000,
  101001000100000010000000000000,
  101001000010000010000000000000,
  101000101000000001000000000000,
  101000100100000001000000000000,
  101000100010000001000000000000,
  101000011000000000100000000000,
  101000010100000000100000000000,
  101000010010000000100000000000,
  100110001000000000010000000000,
  100110000100000000010000000000,
  100110000010000000010000000000,
  100101001000000000001000000000,
  100101000100000000001000000000,
  100101000010000000001000000000,
  100100101000000000000100000000,
  100100100100000000000010000000,
  100100100010000000000010000000,
  100100011000000000000001000000,
  100100010100000000000000100000,
  100100010010000000000000100000,
  000000001000000000000000011000,
```

```

000000000100000000000000011000,
000000000010000000000000011000,
000000001000000000000000010100,
000000000100000000000000010100,
000000000010000000000000010100,
000000001000000000000000010010,
000000000100000000000000010010,
000000000010000000000000010010,
000000000100000000000000010010,
000000001000000000000000010001,
000000000100000000000000010001,
000000000010000000000000010001};

```

```

y={12.4, 11.6, 10.8, 18.3, 14.7, 16.2, 18.6, 17.7, 19.5, 17.3, 9.5, 18.4, 13.6, 2.8, 3.8,
17.2, 17.9, 20.1, 18.6, 15.6, 17.7, 20.7, 20.9, 19.0, 19.8, 21.0, 19.5, 22.2, 20.8,
20.0, 19.5, 20.2, 22.7, 18.5, 20.9, 20.6, 20.2, 18.4, 19.3, 19.4, 19.7, 20.0, 19.3,
16.9, 17.5, 20.9, 22.0, 22.2};

```

```

tfqx=trace(x*(ginv(x`*x))*x`);      /* tfqx = traço da matriz X(X`X)GX` */
b=ginv(x`*x)*x`*y;                /*(X`X)GX`y*/
sqb=b`*x`*y;                       /* soma de quadrados dos parâmetros*/
sqttotal=y`*y;                      /*SQTotal sem correção*/

```

```

x1= x[,1];                          /*vetor de uns referente ao experimento fatorial*/
xadi=x1+x[,24];                      /*vetor de uns referente aos trat. adicionais*/
m_adi=ginv(xadi`*xadi)*xadi`*y;
sqmgeral=m_adi`*xadi`*y;           /*correção geral*/

```

```

/*modelo y=m+e*/;
tfqx1=trace(x1*(ginv(x1`*x1))*x1`);
mhat=ginv(x1`*x1)*x1`*y;
sqm=mhat`*x1`*y;                  /*correção para experimento fatorial*/

```

```

/*modelo y=m+v+e*/;
x2=x[,1:4];

```

```

tfqx2=trace(x2*(ginv(x2`*x2))*x2`);
b2hat=ginv(x2`*x2)*x2`*y;
sqb2=b2hat`*x2`*y;

```

```

/*modelo y=m+k+e*/;
x3=x[,1]||x[,5:8];
tfqx3=trace(x3*(ginv(x3`*x3))*x3`);
b3hat=ginv(x3`*x3)*x3`*y;
sqb3=b3hat`*x3`*y;

```

```

/*modelo=m+v+k+e*/;
x4=x[,1]||x[,1:8];
tfqx4=trace(x4*(ginv(x4`*x4))*x4`);
b4hat=ginv(x4`*x4)*x4`*y;
sqb4=b4hat`*x4`*y;

```

```

/*SQ(v|m)=SQ(m,v)-SQ(m)*/;
sqv=sqb2-sqm;                               /* SQVinhaça*/
gl1=tfqx2-tfqx1;                             /*G.L. para vinhaca*/

```

```

/*SQ(k|m)=SQ(m,k)-SQ(m)*/;
sqk=sqb3-sqm;                               /*SQK2O */
gl2=tfqx3-tfqx1;                             /* G.L para K2O */

```

```

/*SQinteracao considerando trat adiconal*/;

```

```

x5=x[,1:11]||x[,24:28];
tfqx5=trace(x5*(ginv(x5`*x5))*x5`);
b5hat=ginv(x5`*x5)*x5`*y;
sqb5=b5hat`*x5`*y;

```

```

/*SQ(np|m,v,k,t1ad,t2ad)=SQ(m,v,k,vk,t1ad,t2ad)-SQ(m,v,k,t1ad,t2ad)*/;

```

```

sqvk=sqb-sqb5;          /*SQInteração VxK*/
gl3=tfqx-tfqx5;        /* GL para interação VxK*/

/*SQ tratamento adicional CORRIGIDO*/;
x1_ADI=x[37:48,24];
y_ADI=y[37:48,];
b_ADI=ginv(x1_ADI`*x1_ADI)*x1_ADI`*y_ADI;
sqm_ADI=b_ADI`*x1_ADI`*y_ADI;      /*correção para trat. adicionais*/
tfqxADI=trace(x1_ADI*(ginv(x1_ADI`*x1_ADI))*x1_ADI`);
x6=x[37:48,24:28];
tfqx6=trace(x6*(ginv(x6`*x6))*x6`);
b6hat=ginv(x6`*x6)*x6`*y_ADI;
sqADI=b6hat`*x6`*y_ADI-sqm_ADI;   /*SQTrat. Adicionais*/
gl4=tfqx6-tfqxADI;                /* GL para adicionais*/

/*SQ BLOCOS*/
x7=x[,9:11],
tfqx7=trace(x7*(ginv(x7`*x7))*x7`);
b7hat=ginv(x7`*x7)*x7`*y;
sqb7=b7hat`*x7`*y;
sqbl=sqb7-sqmgeral;               /*SQBlocos*/
gl5=tfqx2-tfqx1;                  GL para blocos*/

/*fatorial x adicional*/
sqFvsA=sqm+sqm_ADI-sqmgeral;
gl6= tfqx3-tfqx2;

sqresiduo=sqtotal-sqb;            /*SQResíduo*/
gl7=tfqx3+tfqx1+tfqxADI+tfqx+tfqx4; /* GL para resíduo*/

```

`sqtcorr=sqtotal-sqmgeral;`

`/*SQTotal corrigido*/`

`gltot=tfqx+tfqx2+tfqx3+tfqx4+tfqx5+tfqx6;`

`quit;`

ANEXO 4A. Programa SAS referente ao exemplo 2, utilizando restrição Σ , elaborado por meio do PROC IML

PROC IML;

RESET PRINT;

```
Z={ 1 1 0 1 0 0 1 0 1 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0,
    1 1 0 1 0 0 0 1 1 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0,
    1 1 0 1 0 0 -1 -1 1 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0,
    1 1 0 0 1 0 1 0 0 1 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0,
    1 1 0 0 1 0 0 1 0 1 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0,
    1 1 0 0 1 0 -1 -1 0 1 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0,
    1 1 0 0 0 1 1 0 0 0 1 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0,
    1 1 0 0 0 1 0 1 0 0 1 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0,
    1 1 0 0 0 1 -1 -1 0 0 1 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0,
    1 1 0 -1 -1 -1 1 0 0 0 0 1 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0,
    1 1 0 -1 -1 -1 0 1 0 0 0 1 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0,
    1 1 0 -1 -1 -1 -1 -1 0 0 0 1 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0,
    1 0 1 1 0 0 1 0 -1 0 0 0 1 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0,
    1 0 1 1 0 0 0 1 -1 0 0 0 1 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0,
    1 0 1 1 0 0 -1 -1 -1 0 0 0 1 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0,
    1 0 1 0 1 0 1 0 0 -1 0 0 0 1 0 0 0 0 0 0 0 0 0,
    1 0 1 0 1 0 0 1 0 -1 0 0 0 1 0 0 0 0 0 0 0 0 0,
    1 0 1 0 1 0 -1 -1 0 -1 0 0 0 1 0 0 0 0 0 0 0 0 0,
    1 0 1 0 0 1 1 0 0 0 -1 0 0 0 1 0 0 0 0 0 0 0 0,
    1 0 1 0 0 1 0 1 0 0 -1 0 0 0 1 0 0 0 0 0 0 0 0,
    1 0 1 0 0 1 -1 -1 0 0 -1 0 0 0 1 0 0 0 0 0 0 0 0,
    1 0 1 -1 -1 -1 1 0 0 0 0 -1 0 0 0 1 0 0 0 0 0 0 0,
    1 0 1 -1 -1 -1 0 1 0 0 0 -1 0 0 0 1 0 0 0 0 0 0 0,
    1 0 1 -1 -1 -1 -1 -1 0 0 0 -1 0 0 0 1 0 0 0 0 0 0 0,
    1 -1 -1 1 0 0 1 0 0 0 0 0 -1 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0,
    1 -1 -1 1 0 0 0 1 0 0 0 0 -1 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0,
    1 -1 -1 1 0 0 -1 -1 0 0 0 0 -1 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0,
    1 -1 -1 0 1 0 1 0 0 0 0 0 0 -1 0 0 0 0 0 0 0 0 0,
    1 -1 -1 0 1 0 0 1 0 0 0 0 0 -1 0 0 0 0 0 0 0 0 0,
    1 -1 -1 0 1 0 -1 -1 0 0 0 0 0 -1 0 0 0 0 0 0 0 0 0,
    1 -1 -1 0 0 1 1 0 0 0 0 0 0 0 -1 0 0 0 0 0 0 0 0,
    1 -1 -1 0 0 1 0 1 0 0 0 0 0 0 -1 0 0 0 0 0 0 0 0,
    1 -1 -1 -1 -1 -1 1 0 0 0 0 0 0 0 0 -1 0 0 0 0 0 0,
    1 -1 -1 -1 -1 -1 0 1 0 0 0 0 0 0 0 -1 0 0 0 0 0 0,
    1 -1 -1 -1 -1 -1 -1 -1 0 0 0 0 0 0 0 -1 0 0 0 0 0 0,
```

```

0 0 0 0 0 0 1 0 0 0 0 0 0 0 0 0 1 1 0 0,
0 0 0 0 0 0 0 1 0 0 0 0 0 0 0 0 1 1 0 0,
0 0 0 0 0 0 -1 -1 0 0 0 0 0 0 0 0 1 1 0 0,
0 0 0 0 0 0 1 0 0 0 0 0 0 0 0 0 1 0 1 0,
0 0 0 0 0 0 0 1 0 0 0 0 0 0 0 0 1 0 1 0,
0 0 0 0 0 0 -1 -1 0 0 0 0 0 0 0 0 1 0 1 0,
0 0 0 0 0 0 1 0 0 0 0 0 0 0 0 0 1 0 0 1,
0 0 0 0 0 0 0 1 0 0 0 0 0 0 0 0 1 0 0 1,
0 0 0 0 0 0 -1 -1 0 0 0 0 0 0 0 0 1 0 0 1,
0 0 0 0 0 0 1 0 0 0 0 0 0 0 0 0 1 -1 -1 -1,
0 0 0 0 0 0 0 1 0 0 0 0 0 0 0 0 1 -1 -1 -1,
0 0 0 0 0 0 -1 -1 0 0 0 0 0 0 0 0 1 -1 -1 -1};

```

```

y={12.4,11.6,10.8,18.3,14.7,16.2,18.6,17.7,19.5,17.3,19.5,18.4,13.6,12.8,13.8,
17.2,17.9,20.1,18.6,15.6,17.7,20.7,20.9,19.0,19.8,21.0,19.5,22.2,20.8,20.0,
19.5,20.2,22.7,18.5,20.9,20.6,20.2,18.4,19.3,19.4,19.7,20.0,19.3,16.9,17.5,
20.9,22.0,22.2};

```

```

tfqz=trace(z*(ginv(z`*z))*z`);
b=GINV(z`*z)*z`*y;
sqb=b`*z`*y;
sqttotal=y`*y;

```

```

/*modelo y=m+e*/;
z1=z[,1];
tfqz1=trace(z1*(GINV(z1`*z1))*z1`);
mhat=GINV(z1`*z1)*z1`*y;
sqm=mhat`*z1`*y;

```

```

/*modelo y=m+v+e*/;
z2=z[,1:3];
tfqz2=trace(z2*(GINV(z2`*z2))*z2`);
b2hat=GINV(z2`*z2)*z2`*y;
sqb2=b2hat`*z2`*y;

```

```

/*modelo y=m+k+e*/;
z3=z[,1]||z[,4:6];
tfqz3=trace(z3*(GINV(z3`*z3))*z3`);
b3hat=GINV(z3`*z3)*z3`*y;
sqb3=b3hat`*z3`*y;

```

```

/*modelo=m+v+k+e*/;

```

```

z4=z[,1:6];
tfqz4=trace(z4*(GINV(z4`*z4))*z4`);
b4hat=GINV(z4`*z4)*z4`*y;
sqb4=b4hat`*z4`*y;

/*SQinteracao considerando trat adiconal*/;
z5=z[,1:8]||z[,17:20];
tfqz5=trace(z5*(GINV(z5`*z5))*z5`);
b5hat=GINV(z5`*z5)*z5`*y;
sqb5=b5hat`*z5`*y;

/*SQ(v|m,k,vpk=SQ(m,v,k,vpk-SQ(m,v,vk))*/;
sqvdmkvk=sqb-sqb4;

```

```

/*SQ(p|m,v,vk)=SQ(m,v,k,vk)-SQ(m,n,vk)*/;
sqkdmvkvk=sqb-sqb3;
/*SQ(vk|m,v,k)=SQ(m,v,k,vk)-SQ(m,v,k)*/;
sqvkdmbvk=sqb-sqb2;

```

```

sqv=sqb2-sqm; gl1=tfqz2-tfqz1;
sqk=sqb3-sqm; gl2=tfqz4-tfqz2;
sqvk=sqb-sqb5;gl3=tfqz-tfqz5;

```

```

zadi=z1+z[,17];
m_adi=ginv(zadi`*zadi)*zadi`*y;
sqmgeral=m_adi`*zadi`*y;

```

```

/*SQ tratamento adicional CORRIGIDO*/;
z1_ADI=z[37:48,17];
y_ADI=y[37:48,];
b_ADI=GINV(z1_ADI`*z1_ADI)*z1_ADI`*y_ADI;
sqm_ADI=b_ADI`*z1_ADI`*y_ADI;
tfqzADI=trace(z1_ADI*(GINV(z1_ADI`*z1_ADI))*z1_ADI`);
z6=z[37:48,17:20];
tfqz6=trace(z6*(GINV(z6`*z6))*z6`);
b6hat=GINV(z6`*z6)*z6`*y_ADI;
sqADI=b6hat`*z6`*y_ADI-sqm_ADI;
gl4=tfqz6-tfqzADI;

```

```

/*SQ BLOCOS*/;
z7=z[,7:8];
tfqz7=trace(z7*(ginv(z7`*z7))*z7`);
b7hat=ginv(z7`*z7)*z7`*y;
sqb7=b7hat`*z7`*y;

```

```
sqbl=b7hat`*z7`*y;  
gl5=tfqz2-tfqz1;
```

```
/*fatorial x adicional*/  
sqFvsA=sqm+sqm_ADI-sqmgeral;  
gl6=tfqz6-tfqz2;
```

```
sqresiduo=sqtotal-sqb;  
gl7=tfqz+tfqz1+tfqz3+tfqz4+tfqzADI;
```

```
sqtcorr=sqtotal-sqmgeral;  
gtot=tfqz+tfqz2+tfqz3+tfqz4+tfqz5+tfqz6;  
quit;
```



```

000000000000000000001010,
000000000000000000001010,
000000000000000000001010,
000000000000000000001010,
000000000000000000001010,
000000000000000000001001,
000000000000000000001001,
000000000000000000001001,
000000000000000000001001};

```

```

y={7.2,6.8,7.5,6.4,7.4,6.5,5.6,6.8,7.3,7.2,6.8,6.4,7.6,7.0,6.5,6.8,8.2,
6.5,7.3,6.5,8.5,8.0,7.2,7.8,7.0,7.5,7.5,8.5,6.8,8.5,8.3,8.2,7.5,
6.3,6.8,7.1,7.3,6.9,7.4,8.1,6.7,5.9,6.7,8.3,7.4};

```

```
tfqx=trace(x*(ginv(x`*x))*x`);
```

```
b=ginv(x`*x)*x`*y;
```

```
sqb=b`*x`*y;
```

```
sqttotal=y`*y;
```

```
x1=x[,1];
```

```
xadi=x1+x[,17];
```

```
m_adi=ginv(xadi`*xadi)*xadi`*y;
```

```
sqmgeral=m_adi`*xadi`*y;
```

```
/*modelo y=m+e*/;
```

```
tfqx1=trace(x1*(ginv(x1`*x1))*x1`);
```

```
mhat=ginv(x1`*x1)*x1`*y;
```

```
sqm=mhat`*x1`*y;
```

```
/*modelo y=m+n+e*/;
```

```
x2=x[,1:4];
```

```
tfqx2=trace(x2*(ginv(x2`*x2))*x2`);
```

```
b2hat=ginv(x2`*x2)*x2`*y;
```

```
sqb2=b2hat`*x2`*y;
```

```

/*modelo y=m+p+e*/;
x3=x[,1]||x[,5:7];
tfqx3=trace(x3*(ginv(x3`*x3))*x3`);
b3hat=ginv(x3`*x3)*x3`*y;
sqb3=b3hat`*x3`*y;

```

```

/*modelo=m+n+p+e*/;
x4=x[,1:7];
tfqx4=trace(x4*(ginv(x4`*x4))*x4`);
b4hat=ginv(x4`*x4)*x4`*y;
sqb4=b4hat`*x4`*y;

```

```

/*SQ(n|m)=SQ(m,n)-SQ(m)*/;
sqn=sqb2-sqm;
gl1=tfqx2-tfqx1;
/*SQ(p|m)=SQ(m,p)-SQ(m)*/;
sqp=sqb3-sqm;
gl2=tfqx3-tfqx1;

```

```

/*SQinteracao considerando trat adiconal*/;
x5=x[,1:7]||x[,17:20];
tfqx5=trace(x5*(ginv(x5`*x5))*x5`);
b5hat=ginv(x5`*x5)*x5`*y;
sqb5=b5hat`*x5`*y;

```

```

/*SQ(np|m,n,p,t1ad,t2ad,t3da)=SQ(m,n,p,np,t1ad,t2ad,t3da)-
SQ(m,n,p,t1ad,t2ad,t3da)*/;
sqnp=sqb-sqb5;
gl3=tfqx-tfqx5;

```

```

/*SQ tratamento adicional CORRIGIDO*/;
x1_ADI=x[34:45,17];
y_ADI=y[34:45,];
b_ADI=ginv(x1_ADI`*x1_ADI)*x1_ADI`*y_ADI;
sqm_ADI=b_ADI`*x1_ADI`*y_ADI;
tfqxADI=trace(x1_ADI*(ginv(x1_ADI`*x1_ADI))*x1_ADI`);
x6=x[34:45,17:20];

tfqx6=trace(x6*(ginv(x6`*x6))*x6`);
b6hat=ginv(x6`*x6)*x6`*y_ADI;
sqb6=b6hat`*x6`*y_ADI;
sqADI=b6hat`*x6`*y_ADI-sqm_ADI;
gl4=tfqx6-tfqxADI;

/*fatorial x adicional*/
sqFvsA=sqm+sqm_ADI-sqmgeral;
gl5=tfqx1+tfqx2-tfqx6;

sqresiduo=sqtotal-sqb;
gl6=tfqx+tfqx1+tfqx3+tfqx4+tfqx5+tfqx6+tfqxADI;

sqtcrr=sqtotal-sqmgeral;
gltot=gl1+gl2+gl3+gl4+gl5+gl6;
quit;

```


ANEXO 6A. Programa SAS referente ao exemplo 3, utilizando restrição Σ , elaborado por meio do PROC IML

PROC IML;

RESET PRINT;

```
Z={1  1  0  1  0  1  0  0  0  0  0  0,
    1  1  0  1  0  1  0  0  0  0  0  0,
    1  1  0  1  0  1  0  0  0  0  0  0,
    1  1  0  1  0  1  0  0  0  0  0  0,
    1  1  0  0  1  0  1  0  0  0  0  0,
    1  1  0  0  1  0  1  0  0  0  0  0,
    1  1  0  0  1  0  1  0  0  0  0  0,
    1  1  0  -1 -1 -1 -1  0  0  0  0  0,
    1  1  0  -1 -1 -1 -1  0  0  0  0  0,
    1  1  0  -1 -1 -1 -1  0  0  0  0  0,
    1  1  0  -1 -1 -1 -1  0  0  0  0  0,
    1  0  1  1  0  0  0  1  0  0  0  0,
    1  0  1  1  0  0  0  1  0  0  0  0,
    1  0  1  1  0  0  0  1  0  0  0  0,
    1  0  1  1  0  0  0  1  0  0  0  0,
    1  0  1  0  1  0  0  0  1  0  0  0,
    1  0  1  0  1  0  0  0  1  0  0  0,
    1  0  1  0  1  0  0  0  1  0  0  0,
    1  0  1  0  1  0  0  0  1  0  0  0,
    1  0  1  -1 -1  0  0 -1 -1  0  0  0,
    1  0  1  -1 -1  0  0 -1 -1  0  0  0,
    1 -1 -1  1  0 -1 -1  0  0  0  0  0,
    1 -1 -1  1  0 -1 -1  0  0  0  0  0,
    1 -1 -1  1  0 -1 -1  0  0  0  0  0,
    1 -1 -1  1  0 -1 -1  0  0  0  0  0,
    1 -1 -1  0  1  0  0 -1 -1  0  0  0,
    1 -1 -1  0  1  0  0 -1 -1  0  0  0,
    1 -1 -1  0  1  0  0 -1 -1  0  0  0,
    1 -1 -1 -1 -1  1  1  1  1  0  0  0,
    1 -1 -1 -1 -1  1  1  1  1  0  0  0,
    1 -1 -1 -1 -1  1  1  1  1  0  0  0,
    1 -1 -1 -1 -1  1  1  1  1  0  0  0,
    0  0  0  0  0  0  0  0  0  1  1  0,
    0  0  0  0  0  0  0  0  0  1  1  0,
    0  0  0  0  0  0  0  0  0  1  1  0,
    0  0  0  0  0  0  0  0  0  1  1  0,
    0  0  0  0  0  0  0  0  0  1  0  1,
```

```

0 0 0 0 0 0 0 0 0 1 0 1,
0 0 0 0 0 0 0 0 0 1 0 1,
0 0 0 0 0 0 0 0 0 1 0 1,
0 0 0 0 0 0 0 0 0 1 -1 -1,
0 0 0 0 0 0 0 0 0 1 -1 -1,
0 0 0 0 0 0 0 0 0 1 -1 -1,
0 0 0 0 0 0 0 0 0 1 -1 -1};

```

```

y={7.2,6.8,7.5,6.4,7.4,6.5,5.6,6.8,7.3,7.2,6.8,6.4,7.6,7.0,6.5,6.8,8.2,
6.5,7.3,6.5,8.5,8.0,7.2,7.8,7.0,7.5,7.5,8.5,6.8,8.5,8.3,8.2,7.5,
6.3,6.8,7.1,7.3,6.9,7.4,8.1,6.7,5.9,6.7,8.3,7.4};

```

```

tfqz=trace(z*(ginv(z`*z))*z`);
b=GINV(z`*z)*z`*y;
sqb=b`*z`*y;
sqtotal=y`*y;

```

```

/*modelo y=m+e*/;
z1=z[,1];
tfqz1=trace(z1*(GINV(z1`*z1))*z1`);
mhat=GINV(z1`*z1)*z1`*y;
sqm=mhat`*z1`*y;

```

```

/*modelo y=m+n+p+e*/;
z2=z[,1:3];
tfqz2=trace(z2*(GINV(z2`*z2))*z2`);
b2hat=GINV(z2`*z2)*z2`*y;
sqb2=b2hat`*z2`*y;

```

```

/*modelo y=m+n+np+p+e*/;
z3=z[,1]||z[,4:5];
tfqz3=trace(z3*(GINV(z3`*z3))*z3`);
b3hat=GINV(z3`*z3)*z3`*y;
sqb3=b3hat`*z3`*y;

```

```

/*modelo=m+n+p+np+e*/;
z4=z[,1:5];
tfqz4=trace(z4*(GINV(z4`*z4))*z4`);
b4hat=GINV(z4`*z4)*z4`*y;
sqb4=b4hat`*z4`*y;

```

```

/*SQinteracao considerando trat adiconal*/;
z5=z[,1:5]||z[,10:12];

```

```

tfqz5=trace(z5*(GINV(z5`*z5))*z5`);
b5hat=GINV(z5`*z5)*z5`*y;
sqb5=b5hat`*z5`*y;

/*SQ(n|m,p,np)=SQ(m,n,p,np)-SQ(m,p,np)*/;
sqndmpnp=sqb-sqb4;

/*SQ(p|m,n,np)=SQ(m,n,p,np)-SQ(m,n,np)*/;
sqpdmnp=sqb-sqb3;

/*SQ(np|m,n,p)=SQ(m,n,p,np)-SQ(m,n,p)*/;
sqnpdmnp=sqb-sqb2;

sqn=sqb2-sqm;gl1=tfqz2-tfqz1;
sqp=sqb3-sqm;gl2=tfqz3-tfqz1;
sqnp=sqb-sqb5;gl3=tfqz-tfqz5;

zadi=z1+z[,10];
m_adi=ginv(zadi`*zadi)*zadi`*y;
sqmgeral=m_adi`*zadi`*y;

/*SQ tratamento adicional CORRIGIDO*/;
z1_ADI=z[34:45,10];
y_ADI=y[34:45,];
b_ADI=GINV(z1_ADI`*z1_ADI)*z1_ADI`*y_ADI;
sqm_ADI=b_ADI`*z1_ADI`*y_ADI;
tfqzADI=trace(z1_ADI*(GINV(z1_ADI`*z1_ADI))*z1_ADI`);
z6=z[34:45,10:12];
tfqz6=trace(z6*(GINV(z6`*z6))*z6`);
b6hat=GINV(z6`*z6)*z6`*y_ADI;

sqADI=b6hat`*z6`*y_ADI-sqm_ADI;
gl4=tfqz6-tfqzADI;

/*fatorial x adicional*/
sqFvsA=sqm+sqm_ADI-sqmgeral;
gl5=tfqz1+tfqz2-tfqz6;

sqresiduo=sqtotal-sqb;
gl6=tfqz+tfqz1+tfqz3+tfqz4+tfqz5+tfqz6+tfqzADI;

sqtcorr=sqtotal-sqmgeral;
gltot=gl1+gl2+gl3+gl4+gl5+gl6;
quit;

```