



RAFAELLA CARVALHO MAYRINCK

**FUNÇÕES DE DENSIDADE E PROBABILIDADE
E MÉTODOS DE PREDIÇÃO DE PARÂMETROS
PARA POVAMENTOS DE *Khaya ivorensis* NO
BRASIL**

**LAVRAS – MG
2017**

RAFAELLA CARVALHO MAYRINCK

**FUNÇÕES DE DENSIDADE E PROBABILIDADE E MÉTODOS DE
PREDIÇÃO DE PARÂMETROS PARA POVAMENTOS DE *Khaya*
ivorensis NO BRASIL**

Dissertação apresentada à Universidade Federal de Lavras, como parte das exigências do Programa de Pós-Graduação em Engenharia Florestal, área de concentração em Manejo Florestal, para a obtenção do título de Mestre.

Prof. Dr. Antônio Carlos Ferraz Filho
Orientador

Prof. Dr. Renato Ribeiro de Lima
Coorientador

**LAVRAS – MG
2017**

**Ficha catalográfica elaborada pelo Sistema de Geração de Ficha Catalográfica da Biblioteca
Universitária da UFLA, com dados informados pelo(a) próprio(a) autor(a).**

Mayrinck, Rafaella Carvalho.

Funções de densidade e probabilidade e métodos de predição
de parâmetros para povoamentos de *Khaya ivorensis* no Brasil /
Rafaella Carvalho Mayrinck. - 2017.

106 p.

Orientador(a): Antônio Carlos Ferraz Filho.

Coorientador(a): Renato Ribeiro de Lima

Dissertação (mestrado acadêmico) - Universidade Federal de
Lavras, 2017.

Bibliografia.

1. Distribuição diamétrica. 2. Predição de parâmetros. 3.
Estrutura horizontal. I. Ferraz Filho, Antônio Carlos. II. Lima,
Renato Ribeiro de. III. Título.

RAFAELLA CARVALHO MAYRINCK

**FUNÇÕES DE DENSIDADE E PROBABILIDADE E MÉTODOS DE
PREDIÇÃO DE PARÂMETROS PARA POVAMENTOS DE *Khaya*
ivorensis NO BRASIL**

**PROBABILITY DENSITY FUNCTIONS AND PARAMETER
PREDICTION METHODS FOR *Khaya ivorensis* STANDS IN BRAZIL**

Dissertação apresentada à Universidade Federal de Lavras, como parte das exigências do Programa de Pós-Graduação em Engenharia Florestal, área de concentração em Manejo Florestal, para a obtenção do título de Mestre.

APROVADA em 16 de janeiro de 2017.

Dr. Júlio Arce

UFPR

Dr. Lucas Rezende Gomide

UFLA

Prof. Dr. Antônio Carlos Ferraz Filho
Orientador

Prof. Dr. Renato Ribeiro de Lima
Coorientador

**LAVRAS - MG
2017**

*À minha avó, Glória, exemplo de força e brandura
e à minha irmã Isadora, que alegra meus dias.
Dedico*

AGRADECIMENTOS

Agradeço a Deus pela oportunidade de viver e aprender.

À Universidade Federal de Lavras, e em especial ao Departamento de Ciências Florestais e Laboratório de Estudos e Projetos em Manejo Florestal, pela oportunidade concedida para realização do mestrado. Ao Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico (CNPq), pela concessão da bolsa de estudos.

Ao meu orientador Antônio Carlos, que não poderia ser mais paciente, companheiro e prestativo. Aos demais professores, por todos os conhecimentos transmitidos.

À banca, pela disponibilidade e contribuições para este trabalho.

Aos produtores de mogno africano, que cederam a base de dados.

A todos os meus amigos, companheiros de vida, que estão comigo em todos os momentos, em especial aos amigos do Lemaf, especialmente à Ximena, que dividiu todos os momentos do mestrado comigo. Aos S. A., minha família ‘abroad’ do coração.

À minha família, por serem meu suporte. Ao meu namorado Vinícius, pelo carinho.

MEUS SINCEROS AGRADECIMENTOS!

RESUMO GERAL

A estrutura horizontal de um povoamento, normalmente obtida por função densidade de probabilidade, é conhecida por meio de sua distribuição diamétrica e ou de área basal. É por meio da modelagem desta, que se pode fazer a prognose, se conhecer a *priori* o efeito de práticas de manejo no povoamento, além de se planejar intervenções e a negociação da madeira com maior segurança. O ajuste de uma função densidade de probabilidade permite que se conheça a probabilidade da ocorrência de árvores em determinada classe de diâmetro e, além disso, que se relacionem os parâmetros da função com os atributos do povoamento, o que pode deixar sistemas de prognose mais simples, acessíveis e práticos. Este tipo de abordagem é especialmente usado no caso de florestas com maior valor agregado, cuja madeira é destinada a múltiplos usos, como os plantios de *Khaya ivorensis*, por exemplo. *Khaya ivorensis* é uma espécie em potencial para plantios comerciais, de madeira nobre, cujas técnicas de manejo são incipientes. Tem altíssimo valor no mercado internacional. Sendo assim, o objetivo deste estudo foi a caracterização da estrutura horizontal de povoamentos de *Khaya ivorensis* localizados nos estados de Minas Gerais, Goiás e Pará, por meio de funções densidade de probabilidade e relacionar os parâmetros da função de melhor aderência com atributos do povoamento. No primeiro artigo, foram usadas as distribuições S_B de Johnson, Weibull 2 e 3 parâmetros, Beta e Gama. A função densidade de probabilidade S_B de Johnson foi ajustada por cinco métodos de ajuste (máxima verossimilhança, momentos, Knoebel-Burkhart, regressão linear e moda). A função densidade de probabilidade de Weibull foi ajustada por 3 métodos (percentis, máxima verossimilhança e momentos) e as funções densidade de probabilidade Beta e Gama foram ajustadas pelo método de ajuste dos momentos. A aderência das funções densidade de probabilidade foi testada por meio do teste de Kolmogorov-Smirnov a 5% de probabilidade. Para saber qual a função densidade de significância teve melhor ajuste, as funções densidade de probabilidade foram ranqueadas com base na distância máxima entre os dados observados e estimados (valor D no teste de Kolmogorov-Smirnov). Além disso, a diferença entre os dados observados e estimados foi também observada por meio do erro e da raiz quadrada do quadrado médio do erro. O melhor ajuste foi obtido pela função S_B de Johnson ajustada pelo método da máxima verossimilhança, momentos e pela função Weibull ajustado pelo método dos percentis. O segundo artigo teve o objetivo de prever os parâmetros da função Weibull pelo método dos percentis e máxima verossimilhança, por meio de equações lineares, pelos métodos stepwise e por um modelo estabelecido por

Cao, em um trabalho publicado na *Society of American Foresters* em 2004. O melhor método foi obtido pelo método de ajuste da máxima verossimilhança cujos parâmetros foram preditos pelo modelo estabelecido por Cao.

Palavras-chave: Distribuição diamétrica. Estrutura horizontal da floresta. Modelagem por classe diamétrica. Predição de parâmetros. Mogno africano.

ABSTRACT

Stand horizontal structure in a stand is normally given by a probability density function, described by its diameter or sectional area distribution. This way, one is able to plan the effect of management practices, silvicultural interventions and wood trade. The fit of a probability density function describes the chance of finding a tree at a determined diameter class, and to relate its parameters with stand attributes, which ease prognosis systems. Diameter class modeling is specially used for those forest with high wood value, as *Khaya ivorensis* for example. It is species with potential for commercial plantations because of its high-priced hardwood. However, its management practices are unknown. This work aims to characterize horizontal structure of *Khaya ivorensis* stands in Brazil, located at Minas Gerais, Goiás and Pará states by probability density functions and relate the parameters of the best function with stand attributes. On the first paper, Johnson's S_B , Weibull 2 and 3 parameters, Beta and Gamma functions are tested. Johnson's S_B was fitted by 5 methods (maximum likelihood, moments, Knoebel-Burkhardt, linear regression and mode). Weibull was fitted by 3 methods (percentis, maximum likelihood and moments). Beta and Gamma functions were fitted by moments method. The adherence was assessed by Kolmogorov-Smirnov test with 5% level of significance. Functions performances were ranked based on the Kolmogorov-Smirnov test. Besides, fittings were compared by the error and mean absolute error. The best fitting method was Johnson's S_B fitted by maximum likelihood and moments. Weibull fitted by percentis was good as well. The second paper aims to predict Weibull parameters fitted by maximum likelihood and percentile methods using linear models. One of the models tested was proposed by Cao in 2004 in a paper published at Society of American Foresters the others are models constructed by stepwise methods. The best prediction was made by maximum likelihood method, using Cao's model.

Keywords: Diameter distribution. Forest horizontal structure. Diameter class modeling. Parameter prediction. African mahogany.

SUMÁRIO

PRIMEIRA PARTE	
1	INTRODUÇÃO GERAL.....12
2	REFERENCIAL TEÓRICO.....14
2.1	A espécie <i>Khaya ivorensis</i> A. Chev.....14
2.2	Distribuição diamétrica15
2.3	Distribuição Weibull17
2.4	Distribuição Gama20
2.5	Distribuição Beta.....21
2.6	Distribuição S_B de Johnson22
2.7	A modelagem24
2.8	Construção e avaliação de modelos26
2.9	Testes de aderência29
3	CONSIDERAÇÕES GERAIS31
	REFERÊNCIAS33
	SEGUNDA PARTE – ARTIGOS39
	ARTIGO 1 - ASSESSMENT OF BETA, GAMMA, WEIBULL AND
	JOHNSON’S S_B FUNCTIONS FOR FITTING DIAMETER
	DISTRIBUTIONS OF <i>KHAYA IVORENSIS</i> A. CHEV
	PLANTATIONS IN BRAZIL40
1	INTRODUCTION42
2	MATERIAL AND METHODS43
2.1	Database.....43
2.2	Probability density function fitting44
2.3	Performance of the probability density functions.....48
2.4	Correlation parameters of functions with stand attributes.....49
3	RESULTS49
3.1	Probability density function selection49

3.2	Function parameter correlation with stand attributes	56
3.3	Error by diameter class	59
4	DISCUSSION	61
4.1	Selecting the best probability density function.....	61
4.2	Correlation of functions parameters with stand attributes.....	64
4.3	Errors by diametric class	65
5	CONCLUSION	65
	REFERENCES.....	66
	ARTIGO 2 - PARAMETER PREDICTION METHODS FOR THE	
	WEIBULL DISTRIBUTION FUNCTION APPLIED TO <i>KHAYA</i>	
	<i>IVORENSIS</i> PLANTATIONS IN BRAZIL	70
1	INTRODUCTION	71
2	MATERIAL AND METHODS	73
2.1	Database.....	73
2.2	Weibull function.....	75
2.3	Parameter fitting.....	75
2.4	Parameter estimation.....	76
2.5	Evaluation of probability density functions fitting	78
2.6	Fitting using different databases	79
3	RESULTS	80
4	DISCUSSION	88
5	CONCLUSION	100
	REFERENCES.....	101

PRIMEIRA PARTE

1 INTRODUÇÃO GERAL

Informações relacionadas à estrutura horizontal do povoamento são necessárias, principalmente em plantios destinados A múltiplos usos, pois possibilitam que se conheça a *priori* o efeito de práticas silviculturais e de manejo na dimensão da madeira, além de facilitar o dimensionamento da colheita e comercialização. Funções de densidade e probabilidade são úteis como ferramentas para se descrever a estrutura de um povoamento (BURKHART; TOMÉ, 2012; SCOLFORO, 2006). Vários autores têm trabalhado com as funções S_B de Johnson, Weibull, Normal, Beta e Gama com variado grau de sucesso em florestas.

Para cada situação, dependendo da espécie, idade, altura dominante, dentre outros, há uma função densidade de probabilidade que proporcionará o melhor ajuste possível da estrutura horizontal do povoamento possível. Diversos são os trabalhos que estudam este tipo de abordagem na literatura (BAILEY; DELL, 1972; CAO, 2004; GORGOSO-VARELA; ROJO-ALBORECA, 2014a e 2014b; HAFLEY; SCHREUDER, 1977; KNOEBEL; BURKHART, 1991; MALTAMO; PUUMALAINEN; PAIVINEN, 1995; NOKOE; OKOJIE, 1984; PALAHÍ et al., 2007).

Khaya ivorensis é uma das espécies identificadas como potenciais que o setor florestal brasileiro tem investido. Seu cultivo é alvo de especulação devido ao alto valor de sua madeira no mercado internacional, no entanto, informações com relação ao sistema de manejo e silvicultura da espécie são ainda incipientes em condições de plantio.

Com o incentivo de plantios de *Khaya ivorensis*, tanto por pequenos produtores como por grandes empresas, geram-se inúmeros benefícios, já que a madeira é considerada nobre, o que reduziria o desmatamento ilegal em florestas nativas e a emissão de CO₂ por desmatamento. Além disso, se criariam mais

empregos legais. Entretanto, pequenos produtores vêm encontrando dificuldades no financiamento de plantios da espécie, devido à falta de informações na literatura sobre o crescimento e produção da espécie.

Assim, o objetivo deste trabalho é gerar informações quanto a modelagem da estrutura diamétrica de povoamentos de *Khaya ivorensis* no Brasil. O conteúdo deste material é dividido em duas partes. Na primeira parte é apresentado o referencial teórico com temas pertinentes ao assunto. A segunda parte é composta por dois artigos. O primeiro, testa o ajuste de diversas funções de densidade e probabilidade e seleciona aquela função e método de ajuste que melhor descrevem a estrutura diamétrica dos povoamentos. O segundo artigo, testa métodos de predição de parâmetros da função Weibull para prognosticar a estrutura diamétrica de povoamentos de *Khaya ivorensis* no Brasil, de modo a facilitar a prognose, usando variáveis de fácil obtenção (sítio, idade, altura dominante e número de árvores por hectare).

2 REFERENCIAL TEÓRICO

2.1 A espécie *Khaya ivorensis* A. Chev.

Khaya ivorensis, juntamente com as espécies *K. anthotheca*, *K. grandifolia* e *K. senegalensis* são conhecidas popularmente por mogno africano (FALESI; BAENA, 1999). Em 1976, as quatro primeiras plantas trazidas ao Brasil se estabeleceram no Pará, mais precisamente na Embrapa Oriental. A partir de então, sementes destas árvores começaram a ser distribuídas aos produtores e o cultivo da espécie foi popularizado (FALESI; BAENA, 1999). Os plantios comerciais iniciaram somente a partir da década de 90. Assim, há pouca informação a respeito do manejo da espécie.

Khaya ivorensis pertence à família das Meliaceae, é monoica, árvore de grande porte e tronco retilíneo, atingindo de 40 a 60 metros de altura e diâmetro à altura do peito de até 2,10 metros (PINHEIRO et al., 2011). Ocorre em áreas tropicais úmidas de até 450 m de altitude na África Ocidental (PINHEIRO et al., 2011). É classificada como espécie não pioneira com demanda por luz (TCHOUNDJEU; LEAKEY, 1996). Tem padrão disperso e preferência por locais de precipitação entre 1600 e 2500 mm, com período seco máximo de 4 meses e temperatura entre 24 e 27° C. Suporta inundações, mas não tolera longos períodos de seca. Em ambiente natural frutifica duas vezes ao ano, e suas sementes ortodoxas têm taxa de germinação alta, aproximadamente 90% (PINHEIRO et al., 2011), o que facilita a produção de mudas.

Na África, a principal praga que ataca *Khaya ivorensis* é a *Hypsipyla robusta*, que atinge a gema apical e intensifica as brotações laterais. No Brasil, as principais pragas são as formigas saúva e quem-quém, e o cancro (PINHEIRO et al., 2011). *Hypsipyla grandella* ataca somente o mogno brasileiro (*Swietenia macrophylla*), não oferecendo ameaça à *Khaya ivorensis*. O

cancro causado pelo fungo *Lasiodiplodia theobromae* é comum em regiões tropicais e pode ocorrer em indivíduos de *Khaya ivorensis* a partir dos 2 anos.

A espécie possui madeira considerada nobre devido à resistência física e sua beleza (FALESI; BAENA, 1999), com características desejáveis no uso estrutural, tais como grã reta, fácil trabalhabilidade, secagem rápida e boa aderência à cola (NORDAHLIA et al., 2013). Entretanto, é de difícil impregnação.

A madeira do mogno africano tem valor alto no mercado internacional (NORDAHLIA et al., 2013; OPUNI-FRIMPONG et al., 2010). Há muita especulação em torno do preço do produto, já que é relativamente novo no mercado. Recente relatório publicado pela *International Tropical Timber Organization* (ITTO) mostra que o metro cúbico de madeira serrada de mogno africano seco ao ar foi exportada de Ghana a €650,00 e a madeira seca em forno a €1049,00 (ITTO, 2015).

2.2 Distribuição diamétrica

Segundo Bailey e Dell (1972), a estrutura diamétrica é o mais poderoso fator para retratar as propriedades da floresta. Por meio dela, pode se obter informações importantes sobre o povoamento, tais como seu estado sucessional, dinâmicas de crescimento, além de caracterizar o nível de sustentabilidade do manejo florestal (VAN LAAR; AKÇA, 2007). Além disso, permite ao manejador ter informações sobre o volume por classe diamétrica nas diferentes idades do povoamento, tamanho final das toras e da expectativa de lucro (PRETSCH, 2009), o que possibilita melhor planejamento.

Prodan (1997) define a distribuição diamétrica de uma população como a frequência com que uma certa classe de diâmetro é representada. Florestas seguem diferentes tipos de distribuição, de acordo com a idade e origem, que

pode ser natural ou plantada, pura ou mista. As distribuições de frequências diamétricas podem ser de natureza unimodal, multimodal e exponencial negativa ou decrescente (SCOLFORO; MELLO, 2006).

A estrutura diamétrica de um povoamento muda ao longo do tempo, devido ao crescimento, mortalidade e desbastes. Assim, o estudo das mudanças na distribuição diamétrica, feita observando a mudança no valor dos parâmetros ao longo do tempo, pode oferecer informações importantes ao manejador na tomada de decisões, como o rendimento da floresta por produto e o efeito de intervenções (PRODAN, 1997).

Florestas equianeas puras, geralmente apresentam distribuição aproximadamente normal., inicialmente, e com o passar do tempo, devido à mortalidade nas menores classes de diâmetro, e práticas de desbaste, a assimetria tende a aumentar (VAN LAAR; AKÇA, 2007; PRODAN, 1997). Florestas inequianeas, por sua vez, apresentam distribuição decrescente, com formato de jota invertido, devido ao grande número de árvores de pequeno porte, onde poucas conseguem atingir o dossel (PRODAN, 1997).

No caso de florestas nativas, avaliar a distribuição diamétrica de uma floresta é especialmente importante, pois é através dela que se avalia se a floresta esta balanceada, e assim, se estabelece estratégias de manejo e planejamento na gestão florestal. A floresta é balanceada quando a razão entre o número de árvores em uma classe diamétrica e o número de árvores na classe anterior é constante. Neste caso, o chamado coeficiente de De Liocourt também é constante.

A distribuição por classes diamétricas de um povoamento é obtida por meio uma de função de densidade de probabilidade, destacando-se as distribuições Weibull, Beta, S_B , Gama, log-normal e Normal (SCOLFORO, 2006; BURKHART; TOMÉ, 2012). Os critérios de escolha da função densidade de probabilidade que será usada dependem do grau de dificuldade na estimação

dos parâmetros, flexibilidade para descrever uma boa amplitude de distribuições, e o nível de dificuldade para o cálculo de sua integral (BURKHART; TOMÉ, 2012; HAFLEY; SCHREUDER, 1977).

2.3 Distribuição Weibull

A distribuição de Weibull foi desenvolvida para descrever a distribuição de sistemas sob estresse (VAN LAAR; AKÇA 2004), mas representa bem as distribuições diamétricas de florestas nativas ou plantadas. A distribuição de Weibull foi introduzida no meio florestal por Bailey e Dell (1972). Desde então, é usada com maior frequência em diversos trabalhos (BAILEY; DELL, 1972; CAO, 2004; GORGOSO-VARELA; ROJO-ALBORECA, 2014a; MALTAMO; PUUMALAINEN; PAIVINEN, 1995; NOKOE; OKOJIE, 1984). Esta é considerada flexível, se aderindo bem aos dados de florestas nativas e plantadas, pode ser ajustada por vários métodos e é facilmente integrada (BURKHART; TOMÉ, 2012). Embora Weibull seja reconhecida pela flexibilidade, pode não representar bem a distribuição diamétrica, caso a floresta seja multimodal, pelo fato de esta ser uma função densidade de probabilidade do tipo unimodal (VANCLAY, 1994).

A distribuição de Weibull pode se apresentar com 2 ou 3 parâmetros. São eles os parâmetros de locação (a), de escala (β) e o parâmetro de forma (γ). O parâmetro a está relacionado com o diâmetro mínimo do povoamento (BURKHART; TOMÉ, 2012), sendo que os parâmetros β e γ são sempre positivos. O parâmetro β está relacionado com a amplitude máxima e mínima do valor da função de densidade e probabilidade. Quanto menor o valor de β , mais leptocúrtica será a curva da distribuição e quanto maior o valor de β , mais a função adquirirá caráter platicúrtico. Quando γ assume valor próximo de 3,6, a distribuição é aproximadamente normal e simétrica. Se γ é menor que 3,6 a

distribuição é assimétrica à direita. Se γ é maior que 3,6 a distribuição é assimétrica à esquerda (VANCLAY, 1994; BAILEY; DELL 1972; BURKHART; TOMÉ, 2012). Quando γ tem valor menor que 1, a função assume a forma de J invertido, característica de populações naturais heterogêneas (SCOLFARO, 2006; BURKHART; TOMÉ, 2012). Geralmente, os métodos de ajuste consideram o parâmetro de locação (a) como um termo independente, que deve ser conhecido previamente, para depois se obter os parâmetros de escala e forma.

Embora os parâmetros da função Weibull possam ser estimados por qualquer um dos três métodos de ajuste (máxima verossimilhança, método dos percentis e método dos momentos), trabalhos vêm mostrando que o método da máxima verossimilhança normalmente rende melhores resultados (ARAÚJO JUNIOR et al., 2010). Da mesma forma, Bailey e Dell (1972), orientam que o método dos percentis é capaz de realizar bons ajustes, mas recomendam o uso da máxima verossimilhança quando se dispõe de boas ferramentas computacionais.

No método dos momentos, o parâmetro γ é o primeiro a ser recuperado por meio do desvio padrão e média populacional e, posteriormente, encontra-se o parâmetro β . O parâmetro a é uma porcentagem do diâmetro mínimo, e é obtido independentemente (FERRAZ FILHO, 2009).

Gorgoso-Varela e Rojo-Alboreca (2014a) comparando a distribuição de Weibull ajustada por 3 métodos (máxima verossimilhança, momentos e percentis) e S_B de Johnson ajustado por 4 métodos (máxima verossimilhança condicional, momentos, moda e Knoebel-Burkhart) para *Quercus robur* e *Betula pubescens*, concluíram que Weibull ajustada pelo método dos percentis foi o melhor ajuste para *Quercus robur*. Já para *Betula pubescens*, a melhor distribuição foi S_B de Johnson ajustada pelos métodos dos percentis e da máxima verossimilhança. Isto mostra que o ajuste da função de densidade e

probabilidade varia conforme a espécie e deve ser testado o melhor método para cada caso.

A função densidade de probabilidade Weibull de dois parâmetros é representada pela Equação 1 onde β é o parâmetro de escala, γ é o parâmetro de forma, e x é o diâmetro.

$$f(x) = \frac{\gamma}{\beta} \left(\frac{x}{\beta}\right)^{\gamma-1} e^{-\left(\frac{x}{\beta}\right)^\gamma} \quad (1)$$

A função densidade de probabilidade Weibull de três parâmetros é representada pela Equação 2, onde a é o parâmetro de locação, β é o parâmetro de escala, γ é o parâmetro de forma, e x é o diâmetro.

$$f(x) = \frac{\gamma}{\beta} \left(\frac{x-a}{\beta}\right)^{\gamma-1} e^{-\left(\frac{x-a}{\beta}\right)^\gamma} \quad (2)$$

A função cumulativa para a função densidade de probabilidade de Weibull de dois parâmetros é dada pela Equação 3.

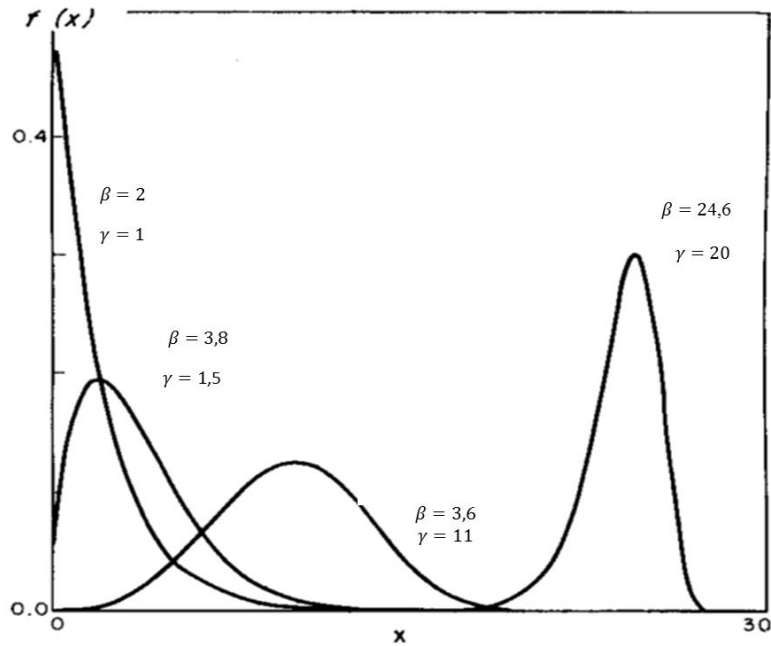
$$F(x) = 1 - \exp\left[-\left(\frac{x}{\beta}\right)^\gamma\right] \quad (3)$$

A função de distribuição de Weibull de três parâmetros é dada pela Equação 4, em que a é o parâmetro de locação, β é o parâmetro de escala, γ é o parâmetro de forma, e x é o diâmetro ou área basal.

A Figura 1 ilustra a flexibilidade da distribuição de Weibull com a mudança no valor dos parâmetros.

$$F(x) = 1 - \exp\left[-\left(\frac{x-a}{\beta}\right)^\gamma\right] \quad (4)$$

Figura 1- Função densidade de probabilidade Weibull de dois parâmetros.



Fonte: Adaptação de Bailey e Dell (1972).

2.4 Distribuição Gama

A distribuição Gama também pode ser aplicada a florestas nativas ou plantadas, ajusta-se bem a diferentes tipos de floresta e passa por diversos graus de assimetria (SCOLFORO, 2006). Alguns trabalhos vêm avaliando a distribuição Gama, sendo o de Nelson (1964) o de maior relevância como apontado por Scolforo (2006). A função Gama tem a habilidade de imitar parâmetros de outras distribuições, por isso, normalmente se adere bem aos dados.

A função densidade de probabilidade Gama é dada na Equação 5, em que x é o diâmetro ou basal, Γ é a função Gama, α e β são os parâmetros a serem

estimados. Devem ser positivos e definem a forma da função. O parâmetro (a) é o parâmetro de forma ($a > 0$), β é o parâmetro de escala ($\beta > 0$).

$$f(x) = \frac{x^{a-1} e^{-\frac{x}{\beta}}}{\beta^a \Gamma(a)}, \quad (5)$$

Araújo Junior et al. (2013) avaliaram o comportamento da função densidade de probabilidade Gama, com 2 parâmetros para a descrição da distribuição diamétrica de um povoamento de eucalipto em diferentes idades e concluíram que a função Gama pode ser utilizada em um modelo de projeção da distribuição dos diâmetros de povoamentos de eucalipto. Por outro lado, Ogana, Osho e Gorgoso-Varela (2015) compararam os ajustes das funções Beta, Gama (2P) e Weibull ajustadas pelo método dos momentos para caracterizar a distribuição diamétrica das árvores da reserva florestal na Nigéria e concluíram que Gama apresentou o pior ajuste.

2.5 Distribuição Beta

A distribuição Beta é muito flexível (PRODAN, 1997; BAILEY; DELL, 1972), podendo assumir diversas formas em uma ampla variedade de diâmetros, aplicada a florestas nativas ou plantadas (SCOLFARO, 2006). Não há função de distribuição cumulativa para a função de densidade de probabilidade, assim, deve-se integrá-la numericamente, o que acaba por restringir seu uso.

A distribuição Beta é dada pela Equação 6, em que a e b são os limites da distribuição e devem ser maiores que zero.

$$f(x) = \left(\frac{1}{B(\gamma_1, \gamma_2)} \right) \left(\frac{(x-a)^{\gamma_1-1} (b-x)^{\gamma_2-1}}{(b-a)^{\gamma_1+\gamma_2-1}} \right) \quad (6)$$

Palahí et al. (2007) comparou as funções Beta, S_B de Johnson, Weibull e Weibull truncada, para descrever a distribuição de diâmetros em florestas da Catalonia. Concluíram que as distribuições Beta e S_B de Johnson foram as segundas melhores para descrever a distribuição de área basal do povoamento. Maltamo, Puumalainen e Päivinen (1994) compararam as distribuições Beta e Weibull para descrever a área basal em povoamentos dominados por Scots pine e Norway spruce. Como resultado, as distribuições se comportaram bem e de forma parecida.

2.6 Distribuição S_B de Johnson

A distribuição S_B , foi primeiramente usada no setor florestal por Hafley e Schreuder (1977). Eles estudaram a flexibilidade das distribuições Beta, S_B de Johnson, Weibull, Lognormal, Normal, e Gama, observando sua assimetria e curtose e concluíram que S_B de Johnson e Beta foram as mais flexíveis. Da mesma forma, Thiersch (1997) testou a eficiência das distribuições Normal, Log-normal, Gama, Beta, S_B e Weibull por diferentes métodos de ajustes para *Eucalyptus camaldulensis* onde concluiu que as distribuições Beta e S_B foram as mais eficientes.

Bartoszeck et al. (2002,) estudando o comportamento da distribuição diamétrica para Bracatinga em diferentes sítios, idades e densidades de povoamentos localizados em Curitiba-PR, concluíram que a distribuição S_B de Johnson foi a que apresentou melhores resultados.

Scolforo et al. (2003) verificaram a acurácia da distribuição S_B estudando a distribuição diamétrica de *Pinus taeda* usando cinco métodos de ajuste (máxima verossimilhança, momentos, Knoebel-Burkhart, moda e regressão linear) e analisaram a relação entre os parâmetros ajustados com o espaçamento e idade. Os autores concluíram que o método dos momentos e

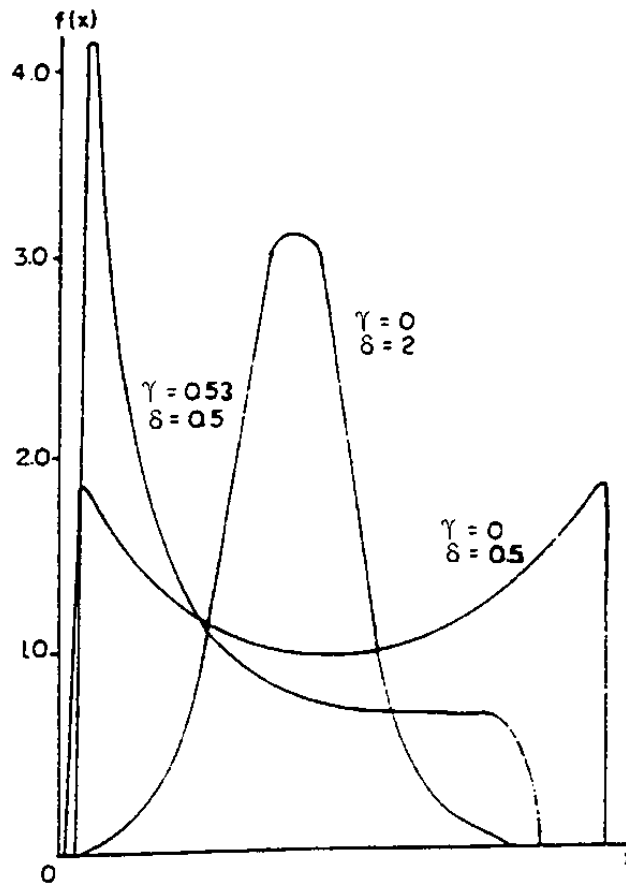
máxima verossimilhança foram os que resultaram em melhores ajustes, e que os parâmetros foram correlacionados com idade e espaçamento.

O sistema S_B de Johnson é composto por três tipos de distribuições (S_L , S_B e S_U), dependendo da transformação aplicada aos dados (JOHNSON, 1949). S_B de Johnson é bimodal e está representada pela Equação 7, em que ε , λ , δ e γ são parâmetros referentes ao limite inferior (localização), amplitude (escala), assimetria (forma) e assimetria, respectivamente.

$$f(x) = \frac{\delta\lambda}{\sqrt{2\pi(x-\varepsilon)(\lambda+\varepsilon-x)}} e^{-\lambda^2\left(\gamma+\delta\text{Ln}\left(\frac{x-\varepsilon}{\lambda+\varepsilon-x}\right)\right)} \quad (7)$$

A Figura 2 ilustra a variedade de formas que a distribuição S_B pode assumir, dependendo do valor dos parâmetros de assimetria γ e curtose δ . Assim, quanto maior o valor de δ , maior será o valor da maior frequência estimada e quanto maior o valor de γ , maior será a assimetria.

Figura 2 - Formatos que a distribuição S_B pode assumir, dependendo do valor dos parâmetros.



Fonte: Scolforo e Thierschi (1998).

2.7 A modelagem

Modelos são abstrações da realidade, cuja meta é retratar as condições de crescimento do povoamento, incluindo as variáveis que significativamente corroborem para tal, com o objetivo de estimar a variável resposta de forma mais assertiva possível (VANCLAY, 1994). A ideia de modelar o crescimento de um

povoamento baseando-se em características dendrométricas surgiu no século XVIII e, desde então, vem sendo largamente utilizada na ciência florestal (PRETZSCH, 2010).

Os modelos de crescimento e produção podem ser úteis para se projetar inventários no curto prazo e no planejamento do manejo e de alternativas silviculturais (FERRAZ FILHO, 2009; BURKHART; TOMÉ, 2012). Devido ao fato de que as florestas são culturas longevas, se não fosse a modelagem, o efeito da implantação de um sistema de manejo seria analisado somente vários anos após sua instalação (PRETZSCH, 2010), o que causaria atraso na ciência e prejuízos econômicos. Além disso, há a necessidade de se quantificar variáveis de difícil mensuração, tais como altura, volume e biomassa, de forma menos onerosa do que a amostragem completa (SCOLFORO, 2006).

Na ciência florestal, os modelos são divididos em modelos empíricos, também chamados de modelos descritivos ou modelos estatísticos ou ainda modelos de engenharia, e em modelos baseados em processos biológicos, ou modelos mecanicísticos, ou modelos ecofisiológicos (PRETZSCH, 2010). Os modelos biológicos são mais generalistas e podem ser extrapolados para além da base de dados que os gerou, enquanto os modelos descritivos, apesar de serem mais precisos, são muito restritivos (SCOLFORO, 2006).

Clutter et al. (1983) dividem os modelos estatísticos em modelos explícitos e modelos implícitos. Os modelos explícitos, ou modelos globais, são mais simples e robustos (VANCLAY, 1994), se referem a estimativas feitas para unidade de área, por exemplo, volume por hectare e área basal por hectare. Nos modelos implícitos a informação é fornecida levando em consideração a estrutura do povoamento, obtendo-se valores de distribuição das árvores nas classes diamétricas. É usada alguma equação de volume, e assim, calcula-se o volume por unidade de área por classe diamétrica.

No caso do ajuste de modelos por classe diamétrica, há dois métodos de se obter os parâmetros: o método de predição de parâmetros e o método de recuperação de parâmetros (VANCLAY, 1994; PRODAN, 1997). O método de predição de parâmetros ajusta a distribuição relacionando os parâmetros estimados com as características da amostra (VAN LAAR; AKÇA, 2007; PRODAN, 1997; BURKHART; TOMÉ, 2012). O método de recuperação de parâmetros recupera os parâmetros diretamente dos atributos do povoamento (VANCLAY, 1994; VAN LAAR; AKÇA, 2007; PRODAN, 1997; BURKHART; TOMÉ, 2012).

O método de recuperação de parâmetros é considerado mais confiável do que o método de predição (BURKHART; TOMÉ, 2012), porque regressões que estimam parâmetros da função densidade de probabilidade geralmente tem coeficiente de determinação em torno de 10%, enquanto regressões que estimam atributos do povoamento tem coeficiente de determinação em torno de 90% (KNOEBEL; BURKHART, 1991). Isto é explicado pelo fato de que a relação entre atributos do povoamento tais como média e desvio padrão, usados na recuperação de parâmetros, com idade e altura dominante, por exemplo, é mais bem entendida do que a relação entre estes com os parâmetros (KNOEBEL; BURKHART, 1991). Entretanto, a predição de parâmetros tem sido usada em diversos trabalhos com sucesso (LEITE et al., 2013; LIU et al., 2009; Cao, 2004).

2.8 Construção e avaliação de modelos

Vários aspectos devem ser considerados na construção de um modelo. A modelagem se inicia na análise dos objetivos, tipo de dados e os recursos computacionais disponíveis (VANCLAY, 1994). Deve-se combinar variáveis

independentes correlacionadas com a variável resposta, de forma lógica, a explicá-la, mantendo o modelo o mais parcimonioso possível.

O método stepwise tem sido usado na construção e melhoria dos modelos (CURTIS, 1967). Consiste em se obter todas as composições de modelos possíveis usando as diversas variáveis. Realiza-se um teste de significância a cada combinação feita, eliminando aquelas variáveis cuja presença no modelo não seja significativa. O procedimento termina quando não há mais variáveis a serem retiradas ou adicionadas ao modelo (PICARD; SAINT-ANDRE; HENRY, 2012).

Embora se deva atentar ao fato de que o modelo deve ter sentido biológico, e não deve ser analisado de forma puramente estatística, o método Stepwise foi apontado como o melhor por Picard, Saint-Andre e Henry (2012). Assim, o método é útil na construção de modelos, mas, antes de se retirar as variáveis independentes indicadas pelo método, deve se fazer uma análise, a fim de que se mantenham todas as variáveis que conferem sentido biológico ao modelo, evitando-se erros tipo II, em que não se rejeita h_0 , mesmo esta sendo falsa.

Vanclay e Skovsgaard (1997) e Vanclay (1994) orientam que a avaliação do modelo deve ser constante, desde a sua construção e durante todo o tempo em que este permanecer em uso. A fase de avaliação de um modelo compreende duas fases, a fase de verificação e a fase de validação. A fase de verificação se refere à análise qualitativa do modelo, em que se observa coerência biológica e a estrutura do modelo. A fase de validação, também chamada de *benchmark*, é uma análise quantitativa, na qual deve se utilizar dados diferentes dos dados utilizados no ajuste, a fim de se atestar a utilidade do modelo fora da base de dados que o gerou (VANCLAY; SKOVSGAARD, 1997; VANCLAY, 1994).

Reservar parte da base de dados para a validação pode comprometer o ajuste, devido à redução da base de dados para o mesmo. Caso a base de dados seja escassa, há métodos de reamostragem, onde se recicla a base de dados usada no ajuste, o que é importante na ciência florestal, devido à dificuldade na obtenção de dados.

A reamostragem dos dados é um conjunto de técnicas onde os dados usados no ajuste e validação são trocados repetidamente. Desta forma, pode se obter ganhos no ajuste, fazendo vários subconjuntos vindos de uma mesma base de dados. Podem ser citados os métodos da validação cruzada e *Bootstrap* (VANCLAY, 1997). A validação cruzada é usada para estimar o erro associado a determinado método de ajuste. O método *bootstrap* normalmente é usado para se medir a acurácia da estimação dos parâmetros (VANCLAY, 1997).

A construção de equações que relacionem os parâmetros de uma função densidade de probabilidade com os atributos de um povoamento é uma forma prática de facilitar a modelagem da estrutura horizontal de um povoamento. A exemplo disso, Nokoe e Okojie (1984) ajustaram a função densidade de probabilidade de Weibull em plantações de *Lovoa trichilioides*, *Khaya ivorensis* e *Entandrophragma cylindricum* na Nigéria, e relacionaram os parâmetros obtidos com atributos do povoamento. As Equações 8, 9 e 10 foram ajustadas para *K. ivorensis* e relacionam os parâmetros da Função densidade de probabilidade de Weibull com atributos do povoamento, que resultaram em coeficientes de determinação de 0,99, 0,75 e 0,99, respectivamente.

$$\alpha = 8,08 - 0,092I + 0,75D_m^2 \quad (8)$$

$$\beta = 28,221 - 0,007D_m + 0,325I \quad (9)$$

$$\gamma = 0,956 + 20,017I^{-1} + 9,466G^{-1} \quad (10)$$

Assim, observa-se que o uso de variáveis de fácil obtenção para a obtenção dos parâmetros das funções de densidade e probabilidade, e assim prever a estrutura horizontal da floresta. No caso supracitado, as variáveis usadas foram idade, área basal e diâmetro mínimo sendo que a idade é obtida por cadastro e área basal é obtida pelo diâmetro. Assim, a única variável mensurada em campo no caso foi DAP.

2.9 Testes de aderência

Para se observar a aderência das funções de densidade e probabilidade, pode-se utilizar os testes de qui-quadrado, o teste G, Kolmogorov-Smirnov e Anderson Darling, por exemplo. No teste do Qui-quadrado e teste G, há a inconveniência de que a frequência em qualquer classe deve ser maior que cinco (SCOLFORO, 2006).

O teste de Kolmogorov-Smirnov e Anderson Darling podem ser usados em distribuições que tenham frequências de qualquer valor, mesmo menores que cinco, e são testes que, como os demais, se baseiam na distância entre o valor observado e o valor estimado (CONOVER, 1999).

O teste de Kolmogorov-Smirnov avalia a discrepância entre as frequências observadas e estimadas em cada classe de diâmetro, sendo o maior valor encontrado chamado de D (11). Se o valor D for menor que o valor tabelado, diz-se que houve aderência da função densidade de probabilidade aos dados.

$$D = \text{SUP} [F(x) - S(x)] \quad (11)$$

O teste de Kolmogorov, apesar de ser o mais utilizado, apresenta alguns inconvenientes: tende a ser mais sensível na região próxima ao centro da distribuição do que na cauda e deve ser usado somente para distribuições contínuas. Entretanto, vários trabalhos vêm utilizando o teste de Kolmogorov de forma satisfatória (CAO, 2004; GORGOSO-VARELA; ROJO-ALBORECA, 2014b; RIBEIRO et al., 2014).

Considerando que erros em maiores classes de diâmetro podem trazer maiores prejuízos, pode se optar por considerar as somas de diâmetros observados e estimados do povoamento na forma relativa. A soma dos diâmetros elevada primeira, segunda, terceira ou quarta potências, dependendo da ênfase que se queira dar aos desvios diamétricos, desvios em área basal, em volume e no valor econômico da floresta, é também uma boa maneira de se avaliar a aderência das distribuições, conforme Maltamo, Puumalainen e Päivinen (1994) e Palahí et al., (2007).

3 CONSIDERAÇÕES GERAIS

Ao longo deste trabalho, buscou-se formas de se caracterizar a estrutura horizontal de povoamentos de *Khaya ivorensis* no Brasil, devido a importância desta informação no planejamento e manejo florestal.

No primeiro artigo buscou-se identificar a melhor função de densidade e probabilidade e o melhor método de ajuste para descrever a estrutura diamétrica de povoamentos de *Khaya ivorensis* no Brasil. Testou-se as funções Weibull, S_B de Johnson, Gama e Beta, variando os métodos de ajuste. Concluiu-se que as melhores funções de densidade e probabilidade foram S_B de Johnson, ajustada pelos métodos da máxima verossimilhança e momentos e Weibull, ajustada pelo método dos percentis (percentis 25 e 97).

No segundo artigo, o intuito foi o de prever os parâmetros da função e método de melhor ajuste do primeiro artigo (S_B de Johnson e Weibull) com base nos atributos do povoamento. Optou-se por usar a função Weibull, devido a facilidade de se ajustar regressões entre os parâmetros desta com os atributos do povoamento, ao contrário da função S_B de Johnson, que não apresentou bons ajustes em testes prévios. Assim, buscou-se o melhor método de predição de parâmetros para estimar parâmetros da função Weibull ou os diâmetros correspondentes aos percentis 25 e 97 das distribuições por meio de regressões lineares: ou pelo método do stepwise ou por meio do modelo estabelecido por Cao (2004). Concluiu-se que o melhor método foi prever os parâmetros usando o modelo de Cao (2004), o qual utiliza atributos do povoamento de simples obtenção no povoamento como variáveis de entrada (idade, sitio, altura dominante, número de árvores por hectare e espaçamento relativo).

Assim, os dois artigos são tentativas de se contribuir para o estabelecimento da espécie no cenário florestal, por meio da modelagem do

crescimento e produção em cenários variados. Desta forma, os setores econômicos e ambientais brasileiros, podem ser impulsionados.

REFERÊNCIAS

ARAÚJO JÚNIOR, C. A.; NOGUEIRA, G. S.; OLIVEIRA, M. L. R.; MIRANDA, R. O. V.; CASTRO, R. V. O.; PILLI, E. Projeção da distribuição diamétrica de povoamentos de eucalipto em diferentes amplitudes de classe. **Pesquisa agropecuária brasileira**, Brasília, v. 45, n. 11, p. 1275-1281, 2010.

ARAÚJO JÚNIOR, C. A.; LEITE, H. G.; CASTRO, R. V. O.; BINOTI, D. H. B.; ALCANTARA, A. E. M.; BINOTI, M. L. M. da S. Modelling the diameter distribution of eucalyptus stands using the Gamma function. **CERNE**, Lavras, v.19, n. 2, p. 307-314, apr/jun, 2013.

BAILEY, R. L.; DELL, R. Quantifying Diameter Distributions with the Weibull Function. **Forest Science**, Bethesda, v. 19, n. 2, p. 97–104, 1972.

BARTOSZECK, A.; MACHADO, S.; FIGUEIREDO FILHO, A.; OLIVEIRA, E. Modelagem da relação hipsométrica para bracatingais da região metropolitana de Curitiba-PR. **Floresta**, Curitiba, v. 32, n. 2, p. 189-204. 2002.

BURKHART, H. E.; TOMÉ, M. **Modeling forest trees and stands**. London: Springer Science & Business Media, 2012.

CAO, Q. V. Predicting parameters of a weibull function for modeling diameter distribution. **Forest Science**, Bethesda, v. 50, n. 5, p. 682–685, 2004.

CONOVER, W. J. **Practical nonparametric statistics**. London: Springer Science & Business Media, 1980.

CLUTTER, J. L.; FORTSON, J. C.; PIENAAR, L. V.; BRISTER, G. H.; BAILEY, R. L. **Timber management: a quantitative approach**. John Wiley & Sons, Inc. 1983.

CURTIS, R. O. Height-diameter and height-diameter-age equations for second-growth Douglas-fir. **Forest science**, Bethesda, v. 13, n. 4, p.365-375, 1967.

FALESI, I. C.; BAENA, A. R. C. *Khaya ivorensis* A. Chev. em sistema silvipastoril com leguminosa e revestimento Natural do solo. Embrapa Amazônia Oriental, Documentos 4, 52 p, 1999.

FERRAZ FILHO, A. C. **Sistema de prognose do crescimento e produção para Pinus taeda L. sujeito a regimes de desbastes e poda.** 2009. 158 p. Dissertação (Mestrado em Engenharia Florestal) - Universidade Federal de Lavras, Lavras, 2014.

GORGOSO-VARELA, J. J.; ROJO-ALBORECA, A. Use of Gumbel and Weibull functions to model extreme values of diameter distributions in forest stands. **Annals of Forest Science**, v. 71, n. 7, p 741–750, 2014a.

GORGOSO-VARELA, J. J.; ROJO-ALBORECA, A. Short Communication . A comparison of estimation methods for fitting Weibull and Johnson's S_B functions to pedunculate oak (*Quercus robur*) and birch (*Betula pubescens*) stands in northwest Spain. **Forest systems**, Madrid, v. 23, n. 3, p. 500–505, 2014b.

HAFLEY, W. L; SCHREUDER, H. T. Statistical distributions for fitting diameter and height data in even-aged stands. **Canadian Journal of forest research**, Ottawa, v. 7, n. 3, p. 481 – 487, 1977.

ITTO. International Tropical Timber Organization. Tropical Timber Market **Report**. v. 19, n. 20, p. 1–23, 2015.

JOHNSON, N. L. Bivariate distributions based on simple translation systems. **Biometrika**, v. 36, n. 3/4, p. 297-304, 1949.

KNOEBEL, B.; BURKHART, H. A bivariate distribution approach to modeling forest diameter distributions at two points in time. **Biometrics**, Washington, v. 47, n. 1, p. 241-253, 1991.

LEITE, H. G.; ALCÂNTARA, A. E. M. D.; BINOT, D. H. B.; OLIVEIRA NETO, R. R. D.; SILVA, M. L. M. D. Comparison between prediction and projection of the distribution of diameters of eucalypt stands submitted to thinning. **Revista Árvore**, Viçosa, v. 37, n. 2, p. 321-328, 2013.

LIU, C.; BEAULIEU, J.; PRÉGENT, G.; ZHANG, S. Y. Applications and comparison of six methods for predicting parameters of the Weibull function in unthinned *Picea glauca* plantations. **Scandinavian Journal of Forest Research**, Alnarp, v. 24, n. 1, p. 67-75, 2009.

MALTAMO, M.; PUUMALAINEN, J.; PAIVINEN, R. Comparison of Beta and Weibull functions for modelling basal area diameter distribution in stands of *Pinus sylvestris* and *Picea abies*. **Scandinavian Journal of Forest Research**, Alnarp, v. 10, n. 2, p. 284-295, 1995.

NELSON, T. C. Diameter distribution and growth of loblolly pine. **Forest Science**, Bethesda, v.10, n.1, p.105-114, 1964.

NOKOE, S.; OKOJIE, J. A. Relationship to stand attributes of some plantations mahoganies with estimated Weibull parameters. **Ecological modelling**, Amsterdam, v. 24, p. 231-240, 1984.

NORDAHLIA, A. S.; HAMDAN, H.; ANWAR, U. M. K. Wood properties of selected plantation species *khaya ivorensis*: (African mahogany), *Azadirachta excelsa* (sentang), *Endospermum malaccense* (sesendok) and *Acacia mangium*. **Timber technology bulletin**, n. 51, p. 1-8, 2013.

OGANA, F.N.; OSHO, J. S. A.; GORGOSO-VARELA, J. J. Comparison of estimation methods for fitting weibull distribution to the natural stand of Oluwa Forest Reserve, Ondo state, Nigeria. **Journal of Natural Sciences Research**, v. 5, n. 4, 2015.

OPUNI-FRIMPONG, E.; OBIRI, B. D.; OWUSU, S.; KWAKYE, L. A.; EBANYENLE, E.; COBBINAH, J. R.; STORER, A. Towards sustainable timber production in Ghana: Stage 1. Improving shoot borer resistance and developing silvicultural systems to maximize mahogany plantation success. **Project final technical report**. v. 3, p. 1 – 110, 2010.

PALAHÍ, M.; PUKKALA, T.; BLASCO, E.; TRASOBARES, A. Comparison of Beta, Johnson's SB, Weibull and truncated Weibull functions for modeling the diameter distribution of forest stands in Catalonia (north-east of Spain). **European Journal of Forest Research**, New York, v. 126, n. 4, p. 563–571, 2007.

PICARD, N.; SAINT-ANDRÉ, L.; HENRY, M. **Manual for building tree volume and biomass allometric equations**: from field measurement to prediction. Food and Agricultural Organization of the United Nations, Rome and Centre de Coopération Internationale en Recherche Agronomique pour le Développement, Montpellier CIRAD et FAO, 2012.

PINHEIRO, A.; COUTO, L.; PINHEIRO, D.; BRUNETTA, J. **Ecologia, silvicultura e tecnologia de utilização dos mognos-africanos (*Khaya spp.*)**. Viçosa, MG: Sociedade Brasileira de Agrossilvicultura. 2011.

PRETSCH, H. **Forest dynamics, growth and yield**: from measurement to model. San Jose, C.R.: IICA/BMZ/GTZ, 1997. 561p.

PRODAN, M. **Mensura florestal**. Instituto Interamericano de Cooperación para la Agroamérica, 1997. San Jose, C.R.: IICA/BMZ/GTZ, 1997. 561 p.

RIBEIRO, A.; FERRAZ FILHO, A. C.; SCOLFORO, J. R. S.; PÉLLICO NETTO, S.; MACHADO, S. A. Structure of the diameter distribution of an experimental plantation of candeia. (*Eremanthus erythropapus* (DC) MacLeish). **Ciencia florestal**, Viçosa, v.24, n. 4, p. 1055-1065, 2014.

SCOLFORO, J. R. S.; TABAI, F. C. V.; MACEDO, R. L. G.; ARCEBI JUNIOR, F. W.; ASSIS, A. L. S B distribution's accuracy to represent the diameter distribution of *Pinus taeda*, through five fitting methods. **Forest Ecology and Management**, Amsterdam, v. 175, n. 1, p. 489-496, 2003.

SCOLFORO, J. R. S.; THIERSCHI, A. Estimativas e testes da distribuição de frequência diâétrica para *Eucalyptus camaldulensis*, através da distribuição S_B , por diferentes métodos de ajuste. **Scientia Forestalis**, Piracicaba, n. 54, p. 93-106, dez. 1998.

SCOLFORO, J. R. S. **Biometria Florestal**: modelos de crescimento e produção. Lavras: UFLA/Faepe, 2006. 393 p.

SCOLFORO, J. R. S.; MELLO, J. M. **Inventário florestal**. Lavras: UFLA/FAEPE, 2006. 561 p.

TCHOUNDJEU, Z.; LEAKEY, R. R. B. Vegetative propagation of African mahogany: effects of auxin, node position, leaf area and cutting length. **New Forests**, West Lafayette, v. 11, n. 2, p. 125-136, 1996.

THIERSCH, A. **Eficiência das distribuições diamétricas para prognose da produção de *Eucalyptus camaldulensis***. 1997. 155p. Dissertação (Mestrado em Engenharia Florestal) – Universidade Federal de Lavras, Lavras, 1997.

VAN LAAR, A.; AKCA, A. **Forest mensuration**. London: Springer Science & Business Media, 2007.

VANCLAY, J. K. **Modelling forest growth and yield**: applications to mixed tropical forests, CAB International, Wallingford, UK, 1994. 312 p.

VANCLAY, J. K.; SKOVSGAARD, J. P. Evaluating forest growth models. **Ecological Modelling**, v. 98, n. 1, p. 1-12, 1997.

YAHYA, A. Z.; MAHAT, M. N.; RASIP, A.; RASIP, A. Growth of plantation grown *Khaya ivorensis* in Peninsular Malaysia. **Journal of Tropical Forest Science**, New York, v. 11, n. 4, p. 849-851, 1999.

SEGUNDA PARTE – ARTIGOS

**ARTIGO 1 - ASSESSMENT OF BETA, GAMMA, WEIBULL AND
JOHNSON'S S_B FUNCTIONS FOR FITTING DIAMETER
DISTRIBUTIONS OF *KHAYA IVORENSIS* A. CHEV PLANTATIONS IN
BRAZIL**

ABSTRACT

African mahogany plantations are in initial stage in the world, and the effects of management practices are not clear nowadays, despite the high valued wood at the international market. Thus, the purpose of this study was to compare Beta, Gamma, Johnson's S_B and Weibull probability density functions fitted by different methods for describing the horizontal structure of African mahogany plantations in Brazil. A total of 128 plots from 6 plantations with ages varying from 1 to 14 years composed the database. The performance of the candidate functions was compared by means of bias and mean absolute error for number of trees and basal area per hectare, as well as the Kolmogorov-Smirnov test value. Johnson's S_B function outperformed other functions, nonetheless Weibull, Beta and Gamma also provided adequate estimative. The best fitting methods was maximum likelihood and moments, in this order, both fitted using 25% percent of minimum observed diameter as the location parameter for Johnson's S_B . Errors were greater in diametric classes with higher frequencies. Location and scale parameters were highly correlated with mean diameter and age, for Weibull and Johnson's S_B functions, respectively. The scale parameter for Gamma had medium correlation with age. Parameters of Beta functions had low correlation with stand attributes. Thus, Johnson's S_B and Weibull were the best functions to describe diametric structure of *Khaya ivorensis* plantations. Its parameters were highly correlated to stand attributes, which is convenient for diametric structure prediction at different ages. The best probability density function is Johnson's S_B fitted by maximum likelihood method for African mahogany plantations in Brazil. Its parameters were correlated to stand attributes, which is convenient for estimating future structure.

Keywords: Horizontal structure. Probability density functions. African mahogany.

AVALIAÇÃO DAS FUNÇÕES BETA, GAMA, WEIBULL E S_B DE JOHNSON NO AJUSTE DA DISTRIBUIÇÃO DIAMÉTRICA DE PLANTAÇÕES DE *KHAYA IVORENSIS* A. CHEV NO BRASIL.

RESUMO

Apesar da madeira de *Khaya ivorensis* ter alto valor no mercado internacional, plantações de mogno africano ainda estão em estágio inicial, e os efeitos das práticas de manejo não são muito claros hoje em dia. Assim, o objetivo deste estudo foi comparar as funções de densidade e probabilidade Beta, Gama, S_B de Johnson e Weibull ajustados por meio de diferentes métodos, para descrever a estrutura horizontal das plantações de mogno africano no Brasil. A base de dados foi composta de 128 parcelas de 6 plantações com idades variando de 1 a 14 anos. O desempenho das funções candidatas foi comparado por meio da média do erro e do erro médio absoluto com relação ao número de árvores e área basal por hectare, bem como o valor do teste de Kolmogorov-Smirnov. A função de S_B de Johnson superou outras funções, no entanto Weibull, Beta e Gama também forneceram estimativas adequadas. O melhor método de ajuste foi o da máxima verossimilhança e o dos momentos, nesta ordem, ambos usando 25% do diâmetro mínimo observado como parâmetro de localização para a função S_B de Johnson. Erros foram maiores em classes de diâmetro com frequências mais altas. Parâmetros de localização e escala foram altamente correlacionados com diâmetro médio e idade, respectivamente, para as funções de Weibull e S_B de Johnson. O parâmetro de escala para Gama teve correlação média com a idade. Parâmetros da função Beta tiveram baixa correlação com os atributos do povoamento. Assim, Weibull e S_B de Johnson foram as melhores funções para descrever a estrutura diamétrica das plantações de *Khaya ivorensis*. Seus parâmetros foram altamente correlacionados com atributos de povoamento, o que é conveniente para predição de estrutura diamétrica em diferentes idades. A melhor função densidade de probabilidade é S_B de Johnson ajustado pelo método de máxima verossimilhança para as plantações de mogno africano no Brasil. Seus parâmetros foram correlacionados com atributos de povoamento, que é conveniente para a estimativa futura estrutura.

Palavras-chave: estrutura horizontal; funções de densidade de probabilidade, mogno Africano.

1 INTRODUCTION

Khaya ivorensis, known as African mahogany, produces valuable hardwood that is commercialized at the international market. The cubic meter of air-dried lumber and the oven-dried lumber exported from Ghana reached prices of €650 and €1049, respectively (ITTO, 2015). It is a tropical forest tree, with medium growth rate and when obtained from plantations can be an alternative for wood from tropical native forests. It is strong enough for structural use and adequate for inner decoration and furniture (FALESI; BAENA 1999; NORDAHLIA et al., 2013; INTERNATIONAL TROPICAL TIMBER ORGANIZATION, 2015).

Because of its good qualities, countries such as Brazil, Australia and some countries in Asia started to use the species in plantations. However, its silviculture practices are on initial stage and there is little information about management and silvicultural treatments for African mahogany (RIBEIRO et al., 2016), especially regarding growth and yield studies.

Probability density functions are especially important in managing plantations for structural use, where not just the total stand volume matters, but also individual tree size. In this case, forests structure can be assessed by number of trees or by basal area, where considering basal area gives more weight to larger trees, the higher-priced trees in a stand (MALTAMO et al., 1995; PALAHÍ et al., 2007).

Stand structure information is required in multi-purpose forestry in order to know a priori the effect of management and silvicultural practices on wood quality and dimension, as well to scale harvesting and trading. A variety of probability density functions, e.g., Johnson's SB, Weibull, Normal, Beta and Gamma have been successfully used in forest studies by several authors for describing theoretical distributions based on observed data (ARCE, 2005;

BAILEY; DELL, 1972; CAO, 2004; DALLA CORTE et al., 2004; GORGOSO-VARELA; ROJO-ALBORECA, 2014; HAFLEY; SCHREUDER, 1977; NOKOE; OKOJIE, 1984; PALAHÍ et al., 2007; RIBEIRO et al., 2014). Many studies have showed that species, age, site index, spacing, along with other dendrometric characteristics influence the probability density function which yields the best fit for a stand (ARCE, 2005; BAILEY; DELL 1972; BARRA et al., 2004; CAO, 2004; GORGOSO-VARELA; ROJO-ALBORECA, 2014; HAFLEY; SCHREUDER, 1977; NOKOE; OKOJIE ,1984; PALAHÍ et al., 2007; LIU et al., 2004; KANGAS; MALTAMO et al., 2000; RENNOLLS; WANG, 2005).

The main purpose of this study was to compare the accuracy of Beta, Gamma, Johnson's S_B , Weibull functions, fitted by different methods (3 methods for the Weibull: maximum Likelihood, moments and Percentiles; 5 methods for the Johnson's S_B : maximum likelihood, moments, mode (HAFLEY; BUFORD, 1985), regression (ZHOU; MCTAGUE, 1996) and Knoebel-Burkhart's method (1991) and the moments method for Beta and Gamma distributions. We also tested different values of location parameter for the probability density functions (Weibull and Johnson's S_B). Additionally, the correlation of the function's parameters to stand attributes was assessed, since this correlation is the key to predict the development of a stand in different ages or the effect of thinning in the stand, for example.

2 MATERIAL AND METHODS

2.1 Database

The database used in this study was obtained from 128 permanent sample plots established in 6 African mahogany plantations in Brazil measured at

different ages. Table 1 summarizes the database used in this study. Plot size varied from 573 to 4,372 m². Ages ranged from 1.1 to 14 years and tree density ranged from 70 to 400 trees per hectare.

Table 1 - Characteristics of African mahogany data used to fit different distributions.

Stand location	Coordinates	Stand area (ha)	N/ha	Plot size (m ²)	Plot shape	Ages (years)	N ^o of plots
São Roque de Minas- MG	MG (20.24° S, 46.36° W)	56.52	286	800	Circle	1.1; 1.9; 3.2; 4; 5.2	27
Piumhi-MG	(20.46° S, 46.95° W)	9.2	303/250	843	Circle	1.3; 2.3; 3.1; 4.4; 5.2; 6.3	14
Iporá-GO	(16.44° S, 51.11° W)	64.26	416	573	Circle	4.9; 6	20
Iraí de Minas- MG	(18.98° S, 47.46° W)	178.1	416	787	Square	2.7; 3.4; 4.7	27
Santo Antônio do Tauá-PA	(1.18° S, 48.13° W)	39.3	70	4,372	Square	14	4
Pirapora-MG	(17.71°S, 44.91°W)	121.3	277	1,074	Square	1.3; 2.2; 3.3; 4.4; 5.3; 6.3	30
Pirapora-MG	(17.71°S, 44.91°W)	1.3	238/400 /100	2,205.3	Square	1.3; 2.2; 3.3; 4.4; 5.3	6

2.2 Probability density function fitting

Diametrical distribution data was fitted by 4 probability density functions: Johnson's S_B , Beta, Gamma and Weibull. Johnson's S_B was fitted by 5 fitting methods: maximum likelihood, moments, Knoebel-Burkhart (1991), mode and linear regression. Beta and Gamma were fitted by the moments method. Weibull was fitted by 3 methods: percentile, moments and maximum likelihood. For Weibull and Johnson's S_B functions, we also tested the best values of the location parameter (ϵ , for Johnson's S_B and α for Weibull). For this, we tested different percent values of the observed minimum diameter to

represent the location parameter. For Johnson's S_B , values between 5% and 95%, with 5% intervals of the observed minimum diameter in each plot were tested. For Weibull we tested values between 0% and 100% of the observed minimum diameter, with 10% intervals. The same approach was done by Gorgoso-Varela and Rojo-Alboreca (2014). For percentile fitting method, we tested the following percentile pairs: 24 and 93, 25 and 75, and 30 and 90. For each pairs of percentile, we also tested the value of the location parameter using the same methodology previously mentioned. Thus, a total of 41 combinations of different fitting methods were tested to choose the best method for each plot. To fit and compare distributions, the observed diameters of each plot were distributed into one centimeter classes. Table 2 shows the formulas used for fitting the probability density functions parameters for all methods above described.

Table 2 - Equations for fitting probability density functions parameters of location, scaling and shape (splited in kurtosis and asymmetry for Johnson's S_B) for the fitting methods. (continua...)

Probability density function	Parameter	Moments	Maximum likelihood	Knoebel-Burkhardt	Mode	linear regression
$f(d, \epsilon, \lambda, \delta, \gamma) = \frac{\delta}{\sqrt{2\pi}} \frac{\lambda}{(d - \epsilon)(\lambda + \epsilon - d)} \exp \left\{ -1 \right. \\ \left. / 2 \left[\gamma \right. \right. \\ \left. \left. + \delta \ln \left(\frac{d - \epsilon}{\lambda + \epsilon - d} \right) \right]^2 \right\}$	ϵ	% d_{min}	% d_{min}	$d_{min-1,3 \text{ cm}}$	$d_{min-1,3 \text{ cm}}$	$d_{min-1,3 \text{ cm}}$
	λ	$d_{max} - d_{min}$	$d_{max} - d_{min}$	$d_{max} - \epsilon + 3,8 \text{ cm}$	$d_{max} - \epsilon + 3,8 \text{ cm}$	$d_{max} - \epsilon + 3,8 \text{ cm}$
	δ	$\frac{\mu(1 - \mu)}{Sd(d)} + \frac{sd(d)}{4} \left[\frac{1}{\mu(1 - \mu)} - 8 \right]$	$\frac{1}{S_r}$	$\frac{Z_{95}}{\ln \left(\frac{d_{95} - \epsilon}{\epsilon + \lambda - d_{95}} \right) - \ln \left(\frac{d_{50} - \epsilon}{\epsilon + \lambda - d_{50}} \right)}$	$\frac{\lambda}{4\sigma_x}$	$\frac{\sum_{i=1}^n f_i Z_i - n\bar{f}}{\sum_{i=1}^n f_i^2 - n\bar{f}^2}$
	γ	$\delta \ln \left(\frac{1 - \mu}{\mu} \right) \left(\frac{0,5 - \mu}{\delta} \right)$	$\frac{-\bar{f}}{S_r}$	$-\delta \ln \left(\frac{d_{50} - \epsilon}{\epsilon + \lambda - d_{50}} \right)$	$\frac{2x_m - 2\epsilon - \lambda}{\lambda \delta}$	$\bar{Z} - \delta \bar{f}$
	Parameter	Moments				
$f(d) = \frac{\Gamma(\alpha + \beta)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \left(\frac{d - d_{min}}{d_{max} - d_{min}} \right)^{\alpha-1} \left(\frac{d_{max} - d}{d_{max} - d_{min}} \right)^{\beta-1} \frac{1}{d_{max} - d_{min}}$	Beta	α	$\frac{(d - d_{min}) \left((d_{max} - d)(d - d_{min}) - \sigma^2 \right)}{\sigma^2 (d_{max} - d_{min})}$			
		β	$\frac{(d_{max} - d) \left((d_{max} - d)(d - d_{min}) - \sigma^2 \right)}{\sigma^2 (d_{max} - d_{min})}$			
	Parameter	Moments				
$f(d) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)\beta^\alpha} (d - d_{min})^{\alpha-1} e^{-\left(\frac{d}{\beta}\right)(d - d_{min})}$	Gamma	α	$\frac{(\mu - d_{min})}{\sigma}$			
		β	$\frac{\sigma}{(\mu - d_{min})}$			
	Parameter	Moments	Maximum likelihood		Percentile	
$F(d) = \left\{ \exp \left[- \left(\frac{d-a}{\beta} \right)^c \right] \right\} - \left\{ \exp \left[- \left(\frac{d-a}{\beta} \right)^c \right] \right\}$	Weibull	% d_{min}	% d_{min}		% d_{min}	
		β	$\left(\frac{\sum_{i=1}^n d_i^c}{n} \right)^{\frac{1}{c}}$		$\frac{d_{p1} - a}{(-\ln(1 - p1))^{\frac{1}{c}}}$	
		γ	$\frac{\Gamma \left(1 + \left(\frac{2}{c} \right) \right) - \Gamma^2 \left(1 + \left(\frac{1}{c} \right) \right)}{\Gamma \left(1 + \left(\frac{1}{c} \right) \right)}$	$\frac{n}{\left[\frac{1}{\beta^c} \sum_{i=1}^n d_i^c \ln(d_i) - \sum_{i=1}^n \ln(d_i) \right]}$		$\frac{\ln[-\ln(1 - p1)] - \ln \ln[(d_{p1} - a)/(d_p)]}{\ln[(d_{p1} - a)/(d_p)]}$

Where, for Johnson's S_B : $\varepsilon < d < \varepsilon + \lambda$; $-\infty < \varepsilon < \infty$; $\lambda, \delta > 0$; $-\infty < \gamma < \infty$, ε is the location parameter, λ is the scale parameter, d is the diameter class midpoint, δ is the kurtosis parameter and γ is the parameter to express asymmetry; \bar{f} is the mean of f_i ; $f_i = \ln[(d_i - \varepsilon)(\varepsilon - \lambda - d_i)]$; d_i = diameter of each tree on the plot; S_f is the standard deviation of f_i ; $\mu = (\bar{d} - \varepsilon)/\lambda$; \bar{d} is the mean of plot diameters; $S_d(x)$ is the modified standard deviation = σ_x/λ ; σ_x is the plot diameter standard deviation; d_{50} is the diameter of the tree that takes the 50th diameter percentile; d_{95} is the diameter of the tree that takes the 95th diameter percentile; Z_{95} is the value obtained in normal standard table; x_m the modal value of diameter of the plot; Z_i the values corresponding to the nine accumulated percentiles P10, ..., P90 derived from a Z table; d_{\max} is the maximum diameter per plot; d_{\min} is the minimum diameter of a plot. Weibull: $d > a$; $\beta > 0$, $\gamma > 0$; a is the location parameter, β is the scale parameter, γ is the shape parameter, and d is the diameter class midpoint. Gamma: a is the location parameter, β is the scale parameter $\Gamma(a)$ is the Gamma function, d is the diameter class midpoint. eta: a is the location parameter, β is the scale parameter $\Gamma(a)$ is the Gamma function, d is the diameter class midpoint.

(Conclusão)

2.3 Performance of the probability density functions

Each different fitting method was evaluated by analyzing bias (1) and mean absolute error (MAE) (2) for number of trees per hectare per diameter class and for basal area per hectare per diameter class (KANGAS; MALTAMO 2000; PALAHÍ et al., 2007; GORGOSO-VARELA; ROJO-ALBORECA, 2014). In Equation 1 and 2 D_{ij} is the observed number of trees or basal area per hectare for class i in plot j , \widehat{D}_{ij} is the estimated number of trees or basal area per hectare for class i in plot j , NC_j is the number of classes (considering the observed data) found in plot j , and NP is the number of plots.

$$\text{BIAS} = \sum_{j=1}^N \frac{(D_{ij} - \widehat{D}_{ij})}{NC_j} \times \frac{1}{NP} \quad (1)$$

$$\text{MAE} = \sum_{j=1}^N \frac{|D_{ij} - \widehat{D}_{ij}|}{NC_j} \times \frac{1}{NP} \quad (2)$$

To evaluate the goodness of fit of each fitting method, the mean and standard deviation of the Kolmogorov-Smirnov (KS) test value (D_n) was also used as in Cao (2004) and Gorgoso-Varela and Rojo-Alboreca (2014). The D_n is obtained from the greatest difference between observed and estimated data, as follows: $D_n = \max|F(x) - s(x)|$, where $F(x)$ is the cumulative value for estimated data and $S(x)$ is the cumulative value for observed data. The percentage of plots whose estimated distribution was not statistically different to the observed data (according to KS with 5% of significance) was also evaluated. In order to observe the behavior of bias and MAE for number of trees per hectare and basal area, the best tested functions had its errors plotted by diameter class.

2.4 Correlation parameters of functions with stand attributes

A matrix of correlation was obtained in order to analyze correlation between each parameter of the functions with stand attributes. Stand attributes evaluated were: age, number of trees per hectare, basal area, mean diameter, mean height and dominant height (mean height of the 30 largest trees per hectare, according to Ribeiro et al. (2016)). In addition, plots of function's parameter and its most correlated stand attribute were made to identify how parameter changes with stand dynamics.

3 RESULTS

3.1 Probability density function selection

Before comparing the behavior of all the different tested methods, we first selected the best minimum diameter values for the location parameters of Johnson's S_B and Weibull distributions. Comparison of methods and values for the location parameter by the mean value of KS statistic are presented on Table 3 for Weibull and Johnson's S_B . The best location value for each function fitted by each methodology is highlighted in bold on Table 3.

Table 3 - Kolmogorov-Smirnov mean value for the Johnson's S_B and Weibull distributions fitted by moments, maximum likelihood and percentile methods. Highlighted values were the best in each method evaluated.

Parameter α or ε	Johnson's S_B moments	Johnson's S_B maximum likelihood	Weibull moments	Weibull maximum likelihood	Weibull percentile (24-93)	Weibull percentile (25-75)	Weibull percentile (25-97)
$d_{\min} * 0$	-	-	0.1063	0.1250	0.1155	0.1651	0.0974
$d_{\min} * 0.05$	0.0990	0.1104	-	-	-	-	-
$d_{\min} * 0.1$	0.0924	0.0979	0.1095	0.1230	0.1159	0.1672	0.0981
$d_{\min} * 0.15$	0.0893	0.0935	-	-	-	-	-
$d_{\min} * 0.2$	0.0880	0.0921	0.1155	0.1273	0.1158	0.1665	0.0980
$d_{\min} * 0.25$	0.0877	0.0921	-	-	-	-	-
$d_{\min} * 0.3$	0.0881	0.0929	0.1250	0.1364	0.1157	0.1659	0.0978
$d_{\min} * 0.35$	0.0891	0.0943	-	-	-	-	-
$d_{\min} * 0.4$	0.0903	0.0960	0.1370	0.1482	0.1154	0.1651	0.0977
$d_{\min} * 0.45$	0.0919	0.0982	-	-	-	-	-
$d_{\min} * 0.5$	0.0938	0.1007	0.1515	0.1612	0.1157	0.1642	0.0976
$d_{\min} * 0.55$	0.0960	0.1035	-	-	-	-	-
$d_{\min} * 0.6$	0.0983	0.1067	0.1690	0.1782	0.1158	0.1633	0.0976
$d_{\min} * 0.65$	0.1009	0.1103	-	-	-	-	-
$d_{\min} * 0.7$	0.1040	0.1145	0.1911	0.2009	0.1189	0.1653	0.1009
$d_{\min} * 0.75$	0.1077	0.1196	-	-	-	-	-
$d_{\min} * 0.8$	0.1121	0.1262	0.2168	0.2339	0.1233	0.1681	0.1053
$d_{\min} * 0.85$	0.1176	0.1350	-	-	-	-	-
$d_{\min} * 0.9$	0.1246	0.1478	0.2470	0.2750	0.1316	0.1745	0.1141
$d_{\min} * 0.95$	0.1336	0.1701	-	-	-	-	-
$d_{\min} * 1$	-	-	0.2830	0.3137	0.1459	0.1899	0.1315

The best values for the location parameter varied between 0 and 60% of the minimum observed diameter (Table 3). For Johnson's S_B moments and maximum likelihood methods, the best values for location parameter was 25% of the observed minimum diameter value. For Weibull moments and maximum likelihood, the best values were 0 and 10% of minimum diameter, respectively. For Weibull percentile, when using the percentiles pairs of 24-93 and 25-75, the best values were 40 and 60%, respectively. For the percentile of 25-97, values of 50 and 60% of minimum diameter were equally adequate.

Fittings with the best values for the location parameter, highlighted in bold on Table 3, were then compared to all the other fitting methods (Table 4). Table 4 compares functions fitted by different methods by mean values of mean absolute error (MAE), bias, the percentage of plots where the fitted distribution was not statistically different from the observed data, according to KS test and the mean value for the KS test. All the probability density functions were ranked considering each evaluation criteria previously described (ranked in brackets at Table 4), and the sum of the ranked values was calculated to select the best fitting method (last column on Table 4). The smaller the rank number, better.

Table 4 - Values of mean Bias and mean MAE for number of trees and basal area per hectare (position occupied by the function in each category), percentage of plots where theoretical and observed frequencies were similar according to the KS test, the mean value of the KS. Sum of rank values is the sum of all ranked values from previous columns. Best values for each category are highlighted in bold.

Method	BIAS N	MAE N	BIAS G	MAE G	% Adhered Plots	Mean value for KS	Sum of rank values
Beta moments	-0.171 (5)	19.7 (8)	-0.047 (2)	0.389 (6)	97.11 (7)	0.028 (7)	35
Gamma moments	-0.241 (8)	22.6 (10)	-0.054 (6)	0.439 (9)	95.67 (8)	0.043 (8)	49
Johnson's S_B Knoebel- Burkhardt	0.433 (9)	19.3 (7)	-0.059 (9)	0.382 (4)	97.29 (6)	0.027 (6)	41
Johnson's S_B mode	1.938 (12)	24.6 (11)	-0.050 (4)	0.452 (10)	73.47 (11)	0.265 (11)	59
Johnson's S_B moments ($d_{min} * 0.25$)	0.136 (2)	16.7 (2)	-0.056 (7)	0.360 (2)	99.64 (1)	0.003 (1)	25
Johnson's S_B maximum likelihood ($d_{min} * 0.25$)	0.109 (1)	16.8 (3)	-0.053 (5)	0.358 (1)	99.1 (4)	0.009 (4)	18
Johnson's S_B regression	0.164 (3)	50.9 (12)	-0.170 (12)	0.771 (11)	22.2 (12)	0.778 (12)	62
Weibull_moments ($d_{min} * 0$)	0.942 (11)	18.2 (5)	-0.048 (3)	0.388 (5)	98.19 (5)	0.018 (5)	34
Weibull maximum likelihood ($d_{min} * 0.1$)	0.819 (10)	18.7 (6)	-0.038 (1)	0.399 (7)	93.68 (10)	0.063 (10)	44
Weibull percentille (24-93)($d_{min} * 0.4$)	0.169 (4)	17.6 (4)	-0.066 (10)	0.379 (3)	99.28 (2)	0.007 (2)	25
Weibull percentille (25-75)($d_{min} * 0.5$)	0.233 (7)	20.3 (9)	-0.111 (11)	0.438 (8)	94.58 (9)	0.054 (9)	53
Weibull percentille (25-97)($d_{min} * 0.5$)	0.211 (6)	16.1 (1)	-0.057 (8)	0.358 (1)	99.28 (2)	0.007 (2)	20

Because database was varied regarding age and density, we stratified the database in a total of 6 classes of age and density. The stats presented on table 4 were calculated again to each class, to make sure the methods chosen do not rely on age and density. The classes of age were: Class 1: trees of 1 to 4.4 year old trees; Class 2: 4.5 to 6.3-year-old trees; Class 3: 14-year-old-trees. The classes of density were: Class1: 238 to 286 trees per hectare; Class 2: 416 trees per hectare and Class 3: 70 to 100 trees per hectare. The statistics for each class were calculated as on Table 4 and the values were ranked. To simplify, Table 5 presents the sum of the ranking values only (same of the last column on Table 4). The smaller the sum of the ranking values related to the method, better the method is. Values in bold highlight the three best methods for each class. The last column rank the methods considering all classes, in order to observe the general tendency again, as on Table 4.

Table 5 - Rank values summarizing all the statistics (BIA and MAE for N and G, percentage of adherence and mean value of K-S) for the classes of age and density, where classes of age are: Class 1: trees of 1 to 4.4 year old trees; Class 2: 4.5 to 6.3-year-old trees; Class 3: 14-year-old-trees. Classes of density: Class1: 238 to 286 trees per hectare; Class 2: 416 trees per hectare and Class 3: 70 to 100 trees per hectare.

Method	Class of A		Class of N				Rank
	1 to 4.5	5.5 to 6.6	14	238 to 286	416	70 to 100	
Beta moments	47	48	39	35	44	42	8
Gamma moments	58	47	43	39	46	44	9
Johnson's SB Knoebel- Burkhart	47	30	21	47	41	43	7
Johnson's SB mode	64	59	35	58	50	58	11
Johnson's SB moments (dmin*0.25)	18	21	25	16	17	23	2
Johnson's SB maximum likelihood (dmin*0.25)	22	28	34	21	23	20	3
Johnson's SB regression	63	62	36	51	54	62	12
Weibull_moments (dmin*0)	26	44	40	22	24	30	6
Weibull maximum likelihood (dmin*0.1)	28	27	35	35	32	28	5
Weibull percentile (24-93)(dmin*0.4)	26	29	21	24	20	32	4
Weibull percentile (25-75)(dmin*0.5)	53	51	47	43	47	54	10
Weibull percentile (25-97)(dmin*0.5)	16	21	27	17	10	22	1

Results on Table 4 are similar to those on Table 5. For the most of the classes, the methods Weibull percentille (25-97)($d_{min} \cdot 0.5$), Johnson's S_B moments ($d_{min} \cdot 0.25$) and Johnson's S_B maximum likelihood ($d_{min} \cdot 0.25$) were the bests. The exceptions were the class of age 14, which the best methods were Johnson's S_B Knoebel- Burkhardt, Weibull percentille (24-93)($d_{min} \cdot 0.4$) and Johnson's S_B moments ($d_{min} \cdot 0.25$), which is one of the best for the other classes. For Class 2 for density (416 trees per hectare) the best methods were Johnson's S_B moments ($d_{min} \cdot 0.25$), Weibull percentille (24-93)($d_{min} \cdot 0.4$) (same for the other classes) and Johnson's S_B Knoebel- Burkhardt. As a general rule, the worst methods were Johnson S_B regression and mode.

Considering all the different fitting methods, the poorest one was Johnson's S_B regression. Only 22.2% of plots had its estimated and observed values were not statistically different, according to the KS test, with 95% confidence. Furthermore, it was the worst ranked distribution, reaching the twelfth position for MAE in number of trees per hectare and basal area per hectare, although it was ranked in third position for bias in number of trees per hectare. Since errors with different signs can be compensated in bias, it is less important than MAE when analyzing distributions (GORGOSO-VARELA et al., 2008; GORGOSO-VARELA; ROJO-ALBORECA, 2014).

The best fitting method was Johnson's S_B fitted by maximum likelihood method. Johnson's S_B fitted by the moments method was also good. Both methods worked best with the location parameter equal to 25% of the observed minimum diameter. Johnson's S_B maximum likelihood overestimated 16.8 trees per hectare per diameter class and overestimated 0.358 m² per hectare per diameter class, whilst Johnson's S_B moments overestimated 16.7 trees per hectare per diameter class and overestimated 0.360 m² per hectare per diameter class. Both methods resulted in quite similar errors, and S_B moments had higher rate of adherence between fitted and observed values (99.64% against 99.1%).

Weibull percentile using the percentiles 25-97 pairs and the location value of 50% of minimum diameter was the second best fitting method, according to the rank. It had the smaller errors for number of trees per hectare per diameter class (16.1 trees) and for basal area (0.358 m²), and the second highest percentage of adherence (99.28%). Beta was the third best probability density function, underestimating 19.7 trees per hectare per diameter class and 0.389 m² per hectare by diameter class in basal area. The percentage of plots with fitted distribution equal to observed data was 97.11% for Beta function. Regarding Gamma function, the percentage of plots where estimated and observed distributions were not statistically different according to KS test with 95% of confidence was 95.67%. Besides, Gamma underestimated 22.6 trees per hectare per diameter class and underestimated basal area by 0.439 m² per hectare.

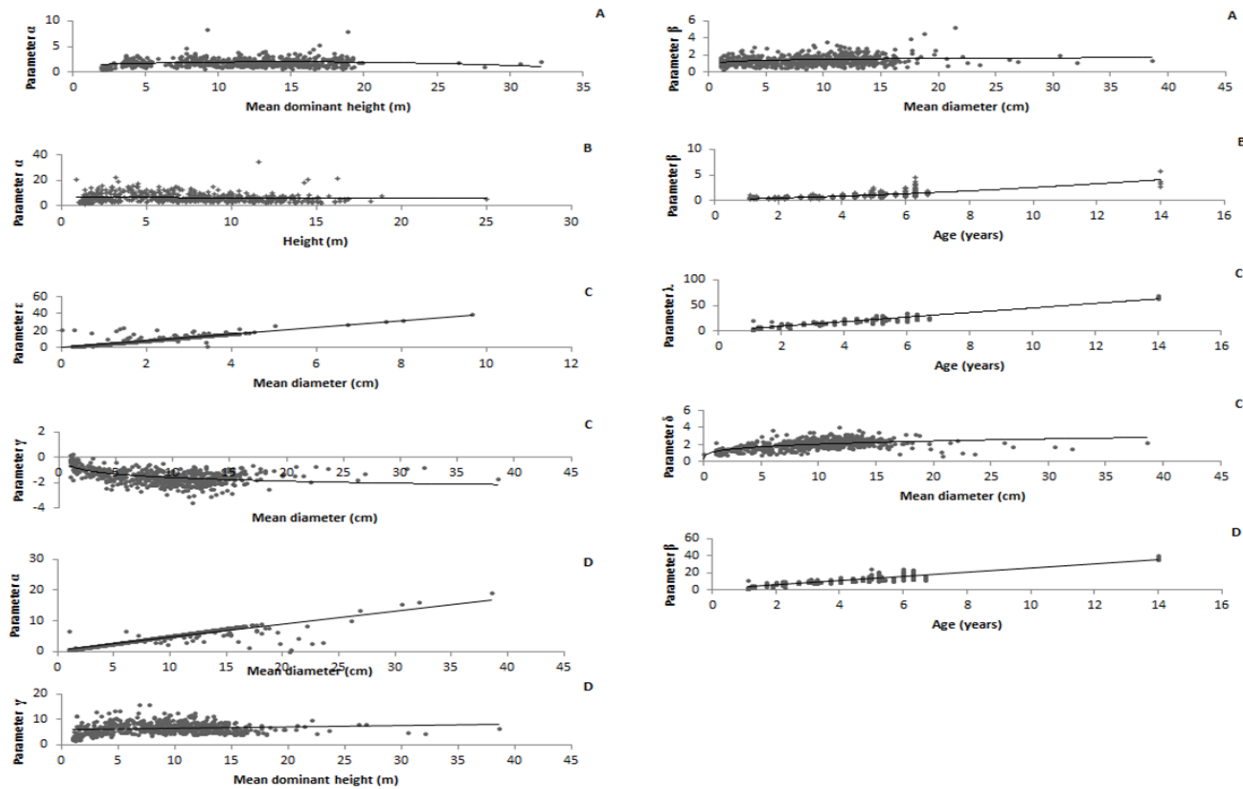
3.2 Function parameter correlation with stand attributes

All tested functions had its parameters correlated with stand attributes in a matrix of correlation and the highest correlation between each parameter of each function and a stand attribute were plotted (Figure 1). For those functions with more than one fitting method (Johnson's S_B and Weibull), the best one was chosen to analyze correlation plots (Johnson's SB fitted by maximum likelihood and Weibull percentile (25-97)(dmin*0.5)). Table 6 summarizes the correlation of function's parameters with the different stand attribute. The highest correlation between the stand attribute and the parameter of the function is highlighted in bold.

Table 6 - Correlation of stand attributes with parameters of the probability density functions tested in fitting diameter distribution of African mahogany plantations in Brazil * denotes a statistical significant correlation.

Function	Parameter	Stand attribute					
		Mean diameter	Age	Mean dominant height	Mean height	Number of trees/hectare	Basal area (m ² /ha)
Beta moments	α	0.00	0.04	0.12*	-0.01	0.08	0.0
	β	0.21*	0.00	0.07*	0.18*	0.07	0.1*
Gamma moments	α	-0.14*	0.04	0.09*	-0.14*	0.03	-0.12*
	β	0.52*	0.76*	0.71*	0.51*	-0.15*	0.55*
Johnson's S _B maximum likelihood (dmin*0.25)	ϵ	0.90*	0.76*	0.11	0.87*	-0.06*	0.79*
	λ	0.81*	0.95*	0.11*	0.78*	-0.14*	0.77*
	γ	-0.37*	0.11*	0.02*	-0.31*	-0.14*	-0.17*
	δ	0.50*	0.07	0.09	-0.31*	-0.14**	-0.06
Weibull percentille (25-97) (dmin*0.5)	α	0.90*	0.76*	0.76*	0.87*	-0.06	0.79*
	β	0.68*	0.92*	0.91*	0.66*	-0.15*	0.65*
	γ	0.13*	0.09	0.16*	0.08	0.09*	0

Figure 1 - Parameters of the probability density functions and tendency lines with the most related stand attribute. Where A= Beta, B= Gamma, C= Johnson's S_B , D= Weibull, obtained from the best fitting methods observed from Table 4.

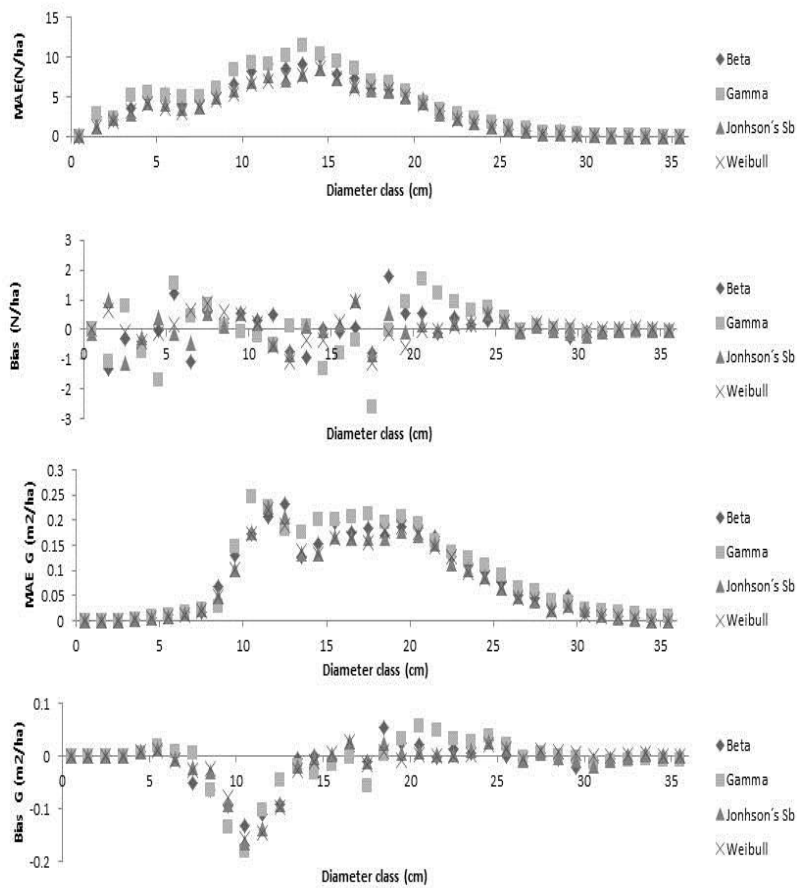


For the Beta function, the parameter a was the most correlated with mean dominant height, while the parameter β was the most correlated with mean diameter. For Gamma, the parameter a was most correlated with the inverse of mean height and the parameter β was most correlated with age. Johnson's S_B parameters ε , γ and δ were all most correlated with mean diameter, except for λ , which was most correlated with age. Weibull's parameters a , β and γ were most correlated with mean diameter, age and mean dominant height, respectively.

3.3 Error by diameter class

Figure 2 shows bias and MAE by number of trees and basal area per hectare per diameter class, for the fitting methods highlighted on Table 5. Greater MAE are concentrated around the class of 15.5 cm for number of trees per hectare and basal area. The functions with bigger errors were Gamma, especially for MAE. Johnson's S_B , Weibull and Beta had similar errors for MAE. For Bias, the errors were concentrated around the 12.5 and 22.2 cm class. Gamma was the function with greater errors and the other probability density functions used had similar errors (Figure 2).

Figure 2 - Errors by diametric class for number of trees and basal area per hectare in bias and MAE for Beta moments, Gamma moments, Johnson's S_B maximum likelihood (minimal diameter of 0.25% of observed diameter) and Weibull percentile (pairs of 25-97, with location parameter equal to 0.5 of minimum observed diameter) for African mahogany plantations in Brazil.



— Method 1

--- Method 2

— Method 3

..... Method 4

4 DISCUSSION

4.1 Selecting the best probability density function

Based on bias, MAE and the percentage of adherence of fitted and observed values according to KS test, all functions performed well, with the exception of the Johnson's S_B fitted by regression and mode methods. The best functions and fitting methods were, in order, both Johnson's S_B maximum likelihood and moments using the location parameter equal to 25% of the minimum observed diameter, Weibull 25-97 percentile using 50% of minimum observed diameter and Beta moments. These functions have successfully been used in forest modeling by several researchers in fitting a variety of natural and planted stands (CAO, 2004; GORGOSO et al., 2014; GORGOSO-VARELA; ROJO-ALBORECA, 2008; PALAHÍ et al., 2006; PALAHÍ et al., 2007; RIBEIRO et al., 2014).

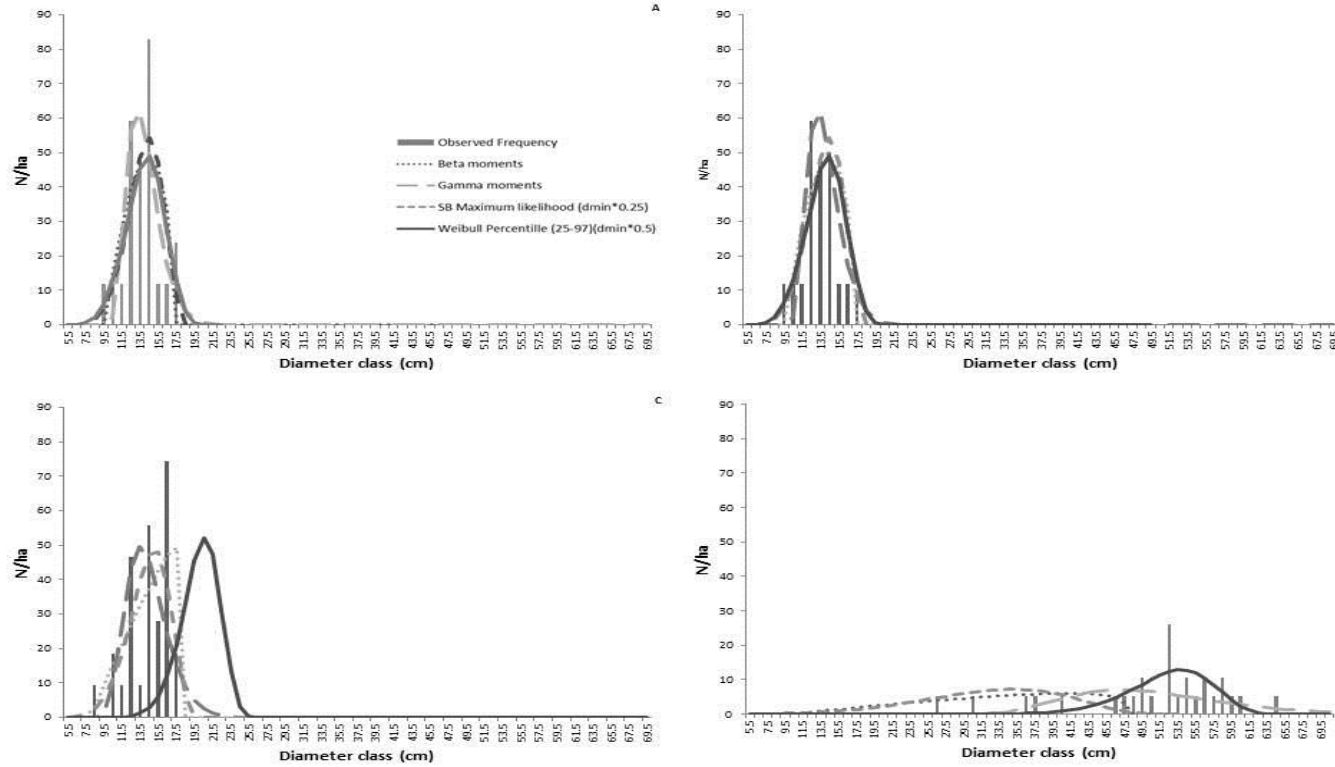
Regarding the location parameter, Scolforo et al. (2003), studying *Pinus taeda* stands found that values of up to 45% of observed minimum diameter can be safely used. Gorgoso-Varela and Rojo-Alboreca (2014) observed that 10% of minimum observed diameter was the best value for the location parameter for Weibull and Johnson's S_B functions.

Gorgoso-Varela and Rojo-Alboreca (2014) compared Weibull fitted by 3 methods (maximum likelihood, moments and percentiles) and Johnson's S_B fitted by 4 methods (Conditional maximum likelihood, moments, mode and Knoebel-Burkhart) in *Betula pubescens* stands and found that the best fits were from percentiles and maximum likelihood methods for Johnson's S_B functions. Scolforo et al. (2003) verified that Johnson's S_B distribution accurately describes the diameter distribution of *Pinus taeda*. They also found that the moments and maximum likelihood methods provided the best fits, and that the function's

parameters were correlated with age and spacing. Palahí et al. (2007) comparing the Beta, Johnson's S_B , Weibull and truncated Weibull functions to describe diameter distributions of forest stands in Catalonia found that truncated Weibull was the best function, followed by Beta. On the other hand, Gorgoso-Varela et al. (2008) when fitting Beta distribution to model the diameter distribution for birch and pedunculate oak dominated stands, had satisfactory results, with percentage of rejections by the KS test of just 0.8% for total number of cases in birch stands and 1.2% in pedunculate oak stands, at a significance level of 5%.

Figure 3 illustrates the fit of the different functions at ages 1.3, 3, 6.3 and 14 years, from random by selected plot measurements. The theoretical and the observed diameter distributions become left asymmetric as they become older, because trees are getting larger over time (Figure 3). In these cases, there are no poor fittings and all distributions had equal fitted and observed values according to the KS test. This was expected, since the poorest distribution (Gamma) had equal fitted and observed values for 95.67% of all plots.

Figure 3 - Observed and theoretical diameter distribution fitted by Beta moments, Gamma moments, Johnson's Sb maximum likelihood and Weibull percentile at ages: 1.3 (A), 3 (B), 6.3 (C) and 14 (D) years.



4.2 Correlation of functions parameters with stand attributes

Parameters of Beta function had low correlation with stand attributes. Among all the stand attributes, parameter a from Beta function had highest correlation with mean dominant height ($r=0.12$) and parameter β had highest correlation with mean diameter ($r=0.21$).

For the Gamma function, a is the shape parameter and β is the scale parameter. The scale parameter had highest correlation with age ($r=0.76$) and shape parameter was most correlated with the inverse of mean dominant height, but it was a low correlation of 0.14.

Weibull parameters a , β and γ describe, in this order, location, scale and shape. In this case, a and β were highly correlated with mean diameter ($r=0.9$) and age ($r=0.95$), respectively. The parameter γ had its highest correlation with the mean dominant height ($r=0.16$). Nokoe and Okojie (1984), studying African mahogany plantations in Nigeria found that the location and scale parameter for Weibull function, a and β , increased with increasing stand age, and the shape parameter value decreased with increasing stand age.

Johnson's S_B parameters of location and scale were highly correlated with mean diameter ($r=0.9$) and age ($r=0.95$), in this order. Shape parameters γ and δ (symmetry and kurtosis) had its highest correlation with the inverse of mean diameter and the diameter, respectively.

It is desirable that parameters be highly correlated to stand attributes, especially those easily measured and estimated. Thus, diameter distribution can be estimated in the future by estimating stand attributes. Some authors have taken this approach such as Leite et al. (2013); Schneider et al. (2008); Cao (2004) and Palahí et al. (2006).

4.3 Errors by diametric class

All functions had similar errors in distribution by diametric class (Figure 3), except for Gamma distribution. Similarly and Maltamo et al. (1995) compared Beta and Weibull distributions in describing basal area distributions in Scots pine stands and Norway spruce and concluded that Weibull and Beta presented similar errors in 5-centimeter-diameter class. In our study errors were greater between diametric classes of 12 and 19 cm, where the frequency of trees were higher (Figure 2). The results are in accordance with Gorgoso-Varela et al. (2008), who found greater errors in diameter class of 15.5 cm, which were the diameter class with the greater number of trees.

5 CONCLUSION

All tested functions resulted in good fit for predicting diameter distribution for African mahogany plantations. The best fitting method was Johnson's S_B maximum likelihood, Johnson's S_B moments and Weibull percentile, all with location parameter of 25% of minimum diameter of observed data. The worst method was Johnson's S_B regression. Location and scale parameters were highly correlated to mean diameter and age, in this order, for Johnson's S_B and Weibull functions.

REFERENCES

ARCE, J. E. Modelagem da estrutura de florestas clonais de *Populus deltoides* Marsh. através de distribuições diamétricas probabilísticas. **Ciência Florestal**, Santa Maria, v. 14, n. 1, p. 149-164, 2005.

BAILEY, R. L.; DELL, R. Quantifying Diameter Distributions with the Weibull Function. **Forest Sciences**, Bethesda, v. 19, n. 2, p. 97-104, 1972.

BARRA, O. S. V.; SANQUETTA, C. R.; ARCE, J. E.; DO AMARAL MACHADO, S.; DALLA CORTE, A. P. Proposta metodológica para o ajuste ótimo da distribuição diamétrica Weibull 3P. **Floresta**, Curitiba, v. 34, n. 3, p. 87-393, 2004.

Cao, Q. V. Predicting parameters of a weibull function for modeling diameter distribution. **Forest Science**, Bethesda, v. 50, n. 5, p. 682-685, 2004.

DALLA CORTE, A. P.; SANQUETTA, C. R.; BERNI, D. M. Modelos de simulação para classe diamétrica em *Populus* sp. **Revista Acadêmica: ciências agrárias e ambientais**, Curitiba, v. 2, p. 33-40, 2004.

FALESI, I. C.; BAENA, A. R. C. *Khaya ivorensis* A. Chev. em sistema silvipastoril com leguminosa e revestimento natural do solo. Belém: Embrapa Amazônia Oriental, 52 p. (Embrapa Amazônia Oriental. Documentos, 4), 1999.

GORGOSO-VARELA, J. J.; ROJO-ALBORECA, A.; AFIF-KHOURI, E.; BARRIO-ANTA, M. Modelling diameter distributions of birch (*Betula alba* L.) and pedunculate oak (*Quercus robur* L.) stands in northwest Spain with the Beta distribution. **Forest Systems**, Madrid, v. 17, n. 3, p. 271-28, 2008.

GORGOSO-VARELA, J. J.; ROJO-ALBORECA, A. A comparison of estimation methods for fitting Weibull and Johnson's SB functions to pedunculate oak (*Quercus robur*) and birch (*Betula pubescens*) stands in northwest Spain. **Forest Systems**, Madrid, v. 23, n. 3, p. 500-505, 2014.

HAFLEY, W. L.; SCHREUDER, H. T. Statistical distributions for fitting diameter and height data in even-aged stands. **Canadian Journal of Forest Research**, Ottawa, v. 7, n. 3, p. 481-487, 1977.

HAFLEY, W. L., BUFORD, M. A. A bivariate model for growth and yield prediction. **Forest science**, Bethesda, v. 31, n.1, p. 237-247, 1985.

ITTO. **International Tropical Timber Organization**. Tropical Timber Market Report, v.19, n. 20, p. 1-23, 2015.

KANGAS, A.; MALTAMO, M. Performance of percentile based diameter distribution prediction and Weibull method in independent data sets. **Silva Fennica**, Helsinki , v. 34, n. 4, p. 381-398, 2000.

KNOEBEL, B. R.; BURKHART, H. E. A bivariate distribution approach to modeling forest diameter distributions at two points in time. **Biometrics**, Whashington, p. 241-253, 1991.

LEITE, H. G.; ALCÂNTARA, A. E. M. D.; BINOT, D. H. B.; OLIVEIRA NETO, R. R. D.; SILVA, M. L. M. D. Comparison between prediction and projection of the distribution of diameters of eucalypt stands submitted to thinning. **Revista Árvore**, Viçosa, v. 37, n. 2, p. 321-328, 2013.

LIU, C.; ZHANG, S. Y.; LEI, Y.; NEWTON, P. F.; ZHANG, L. Evaluation of three methods for predicting diameter distributions of black spruce (*Picea mariana*) plantations in central Canada. **Canadian Journal of Forest Research**, Ottawa, v. 34, n. 12, p. 2424-2432, 2004.

MALTAMO, M.; PUUMALAINEN, J.; PÄIVINEN, R. Comparison of Beta and Weibull functions for modelling basal area diameter distribution in stands of *Pinus sylvestris* and *Picea abies*. **Scandinavian Journal of Forest Research**, Alnarp, v. 10, n. 1-4, p. 284-295, 1995.

NOKOE, S.; OKOJIE, J. A. Relationship of stand attributes of some plantation mahoganies with estimated Weibull parameters. **Ecological modelling**, Towson, v. 24, n. 3, p. 231-240, 1984.

NORDAHLIA, A. S.; HAMDAN, H.; ANWAR, U. M. K. **Wood properties of selected plantation species: khaya ivorensis (african mahogany), azadirachta excelsa (sentang), endospermum malaccense (sesendok) and acacia mangium**. v. 51, n. 1, 2013.

SCHNEIDER, P. S. P.; FLEIG, F. D.; SCHNEIDER, P. R.; FINGER, C. A. G. Avaliação da relação densidade e diâmetro em povoamento de *Pinus taeda*. **Ciência Florestal**, Santa Maria, v. 18, n. 4, p. 481-491, 2008.

PALAHÍ, M.; PUKKALA, T.; BLASCO, E.; TRASOBARES, A. Comparison of Beta, Johnson's SB, Weibull and truncated Weibull functions for modeling the diameter distribution of forest stands in Catalonia (north-east of Spain). **European Journal of Forest Research**, New York, v. 126, n. 4, p. 563-571, 2007.

PALAHÍ, M.; PUKKALA, T.; TRASOBARES, A. Modelling the diameter distribution of *Pinus sylvestris*, *Pinus nigra* and *Pinus halepensis* forest stands in Catalonia using the truncated Weibull function. **Forestry**, Washington, v. 79, n. 5, p. 553-562, 2006.

RENNOLLS, K.; WANG, M. A new parameterization of Johnson's SB distribution with application to fitting forest tree diameter data. **Canadian Journal of Forest Research**, Ottawa v. 35, n. 3, p. 575-579, 2005.

RIBEIRO, A.; FERRAZ FILHO, A. C.; SCOLFORO, J. R. S.; NETTO, S. P.; MACHADO, S. D. A. Structure of the diameter distribution of an experimental plantation of candeia (*Eremanthus erythropappus* (DC.) MacLeish). **Ciência Florestal**, Santa Maria, v. 24, n. 4, p. 1055-1065, 2014.

RIBEIRO, A.; FERRAZ FILHO, A. C.; TOMÉ, M.; SCOLFORO, J. R. S. Site quality curves for African Mahogany plantations in Brazil. **Cerne**, Lavras, n. 4, v. 22, p. 439-448. 2016.

SCOLFORO, J. R. S.; TABAI, F. C. V.; MACEDO, R. L. G.; ACERBI JÚNIOR; ASSIS, A. L. S. B. Distribution's accuracy to represent the diameter distribution of *Pinus taeda*, through five fitting methods. **Forest ecology and management**, Amsterdam, v. 175, n. 1, p. 489-496, 2003.

ZHOU, B.; MCTAGUE, J. P. Comparison and evaluation of five methods of estimation of the Johnson system parameters. **Canadian journal of forest research**, Ottawa, v. 26, n. 6, p. 928-935, 1996.

**ARTIGO 2 - PARAMETER PREDICTION METHODS FOR THE
WEIBULL DISTRIBUTION FUNCTION APPLIED TO *KHAYA
IVORENSIS* PLANTATIONS IN BRAZIL**

ABSTRACT

Khaya ivorensis produces valuable wood sold for premium prices at the international market because of its excellent properties and beauty. However, the majority of the commercialized wood of this species is from native African forests. Recently, interest in forming plantations with the species has risen outside its native range, in countries such as Brazil, Malaysia, and Australia. Given the early ages of the majority of the plantations, its management practices in plantations are not well established, thus the use of models to predict stand horizontal structure is very useful in order to set correct procedures to obtain the desirable wood products and to forecast growth and yield of different wood sizes. In order to enable the prognosis of the forest's structure, parameters of the Weibull probability density function were first fitted per plot by 2 methods: Maximum likelihood and percentile. The parameters were then predicted using stand characteristics by two different approaches: model building using stepwise procedure or using traditional models (Cao 2004) with stand characteristics (age, density and site) easily obtainable. The fits were compared by the mean absolute diameter class error (MAE), mean diameter class error per hectare (bias), Kolmogorov-Smirnov value and by evaluating the methods behaviour at different growth scenarios. The statistical analysis of the models showed that the best strategy to predict the parameters of the Weibull function was initial fitting using maximum likelihood and parameters predicted by the stepwise method (with the stand variables: age, mean sectional area, number of trees per hectare, relative spacing, mean tree height, dominant height, site index, mean diameter at breast height, maximum diameter at breast height, minimum diameter at breast height, diameter at the 25th position and diameter at the 97th position). However, for predictions beyond the fitting data, the best method was the one where parameters were estimated by maximum likelihood and predicted using the model proposed by Cao. In conclusion, Maximum likelihood by Cao method is the most useful one because it predicts diametric distributions beyond the fitting data using easily obtained stand variables.

1 INTRODUCTION

For reliable forest management planning aiming to produce structural wood, the knowledge of stand diameter distributions is imperative, since diameter is generally highly correlated with other important variables such as volume, value, costs and wood quality. Prognosis of diameter distributions allows predicting the effect of management practices (such as initial planting spacing, thinning, and pruning) on wood dimension. This is desirable since the knowledge of future tree dimension based on present stand characteristics permits the appropriate planning, such as financial revenues, thinning severity and intensity, and to set rotation. This information is especially valuable when the species in question is still in initial stage of introduction, with little or no reported growth information considering a full rotation, as African mahogany (*Khaya ivorensis*) in Brazil, for example (RIBEIRO et al., 2016).

Khaya ivorensis produces valuable hardwood at the international market, where the cubic meter of air-dried and oven-dried sawnwood exported from Ghana costs about €650 and €1050, respectively (ITTO, 2015). It is a tropical forest tree, with clear bole reaching 30 meters height (YAHYA et al., 1999), and when obtained from plantations can be an alternative for wood from tropical native forests. It is strong enough for structural use and adequate for inner decoration and furniture (FALESI; BAENA, 1999; NORDAHLIA; HAMDAN; ANWAR, 2013; ITTO, 2015).

The high demand for mahogany wood has been a threat for the species in its natural habitat (OPUNI-FRIMPONG et al., 2010) and plantations are an alternative source to overcome the scarce timber supply (YAHYA et al., 1999). There are some plantations of *Khaya* spp. in Australia, Brazil and Ghana, but they are still in an initial phase with few studies reporting adequate management

practices for growth (YAHYA et al. 1999; CORCIOLI et al. 2016; JEYANNY et al. 2009).

To make forecasts of stand development by stem volume or product values, there is a need for tools to predict future diameter distributions, given predicted stand variables (LIU et al., 2009). The parameters of probability density functions can be derived from stand attributes by either parameter recovery methods or parameter prediction methods (SIIPILEHTO; MEHTATALO, 2013; SIIPILEHTO; SARKKOLA; MEHTÄTALO, 2007). The parameter recovery method recovers the parameters of the distribution from the moments of a given distribution from actual or estimated stand attributes. The parameter prediction method relates the parameters of the distribution function to stand characteristics, with the addition of influential variables to account for the effect of silvicultural treatments (VANCLAY, 1994).

The Weibull probability density function was first used in forestry by Bailey and Dell (1972) and has been extensively used in forest studies ever since (ARCE, 2004; CAO, 2004; DIAMANTOPOULOU et al., 2015; MALTAMO et al., 2005; LEITE et al., 2013; LEI, 2008; LIU et al., 2009; NORD-LARSEN; CAO, 2006; MCGARRIGLE et al., 2011; PALAHI et al., 2006, 2007; QIN; CAO; BLOUIN, 2006), because of its ability in describing a variety of shapes of unimodal distributions, including reversed-J shaped, exponential, and normal. Besides, its parameters are easily estimated and its cumulative density function is defined (BAILEY; DELL, 1972; LEI, 2008; LIU et al., 2004; LIU et al., 2009; SCHNEIDER et al. 2008) .

Considering the importance of *Khaya ivorensis* for the economy and world forest conservation, as well as the lack of studies related to applied management practices and its effects, this paper aims to test methods for parameter prediction of the Weibull function, in order to possibilitate horizontal structure prognosis for the species.

2 MATERIAL AND METHODS

2.1 Database

The database is from 128 permanent sample plots established on six different African mahogany plantations in Brazil, measured at varying ages. Table 1 summarizes information about the database used in this study. Plot size varied from 573 to 4,372 m², depending on the initial planting density. Ages ranged from 1.1 to 14 years and tree density was from 70 to 416 trees per hectare.

Table 1 - Stand location, area and spacing, plot size, shape and number of plots at measuring ages of 6 African mahogany plantations in Brazil.

Stand location	Stand area (ha)	Spacing (m x m)	Plot size (m ²)	Plot shape	Measurement ages (years)	Number of plots
São Roque de Minas-MG (20.24° S, 46.36° W)	56.5	5x7	800	Circle	1.1; 1.9; 3.2; 4; 5.2	27
Piumhi-MG (20.46° S, 46.95° W)	9.2	5.5 x 6 5 x 8	843	Circle	1.3; 2.3; 3.1; 4.4; 5.2; 6.3	14
Iporá-GO (16.44° S, 51.11° W)	64.3	6 x 4	573	Circle	4.9; 6	20
Iraí de Minas-MG (18.98° S, 47.46° W)	178.1	6 x 4 6 x 4	787	Square	2.7; 3.4; 4.7	27
Santo Antônio do Tauá-PA (1.18° S, 48.13° W)	39.3	12x12	4372	Square	14	4
Pirapora-MG (17.71°S, 44.91°W)	121.3	6x6	1074	Square	1.3; 2.2; 3.3; 4.4; 5.3; 6.3	30
Pirapora-MG (17.71°S, 44.91°W)	1.3	7x6, 5x5,10x10	2205.3	Square	1.3; 2.2; 3.3; 4.4; 5.3	6

In all plots, all trees had their diameter at breast height (DBH) measured and around a third of the trees also had their total and commercial height measured. Also, the thinnest and around three thickest trees per plot had its height measured. The thinner tree was measured to ensure that height and diameter pairs were available for all the range of diameters occurring in the sample plot (RIBEIRO et al., 2010), and the thicker trees were measured to permit the calculation of the plot's dominant height. Due to the low number of trees per hectare in the plantations, we considered dominant height as being the mean height of the 30 thickest trees per hectare (RIBEIRO et al., 2016). Thirty percent of the database was randomized and reserved for the validation process (n=131 plots, considering all measurements made in all 128 plots through time).

2.2 Weibull function

The equation number 1 gives the 3-Parameter Weibull function.

$$f(t) = \frac{\beta}{\eta} \left(\frac{t-\gamma}{\eta} \right)^{\beta-1} e^{-\left(\frac{t-\gamma}{\eta} \right)^{\beta}} \quad (1)$$

Where:

$f(t) \geq 0, t \geq 0$ or $\gamma, \beta > 0, \eta > 0, -\infty < \gamma < +\infty$, γ is the location parameter, η is the scale parameter and β is the shape parameter.

2.3 Parameter fitting

Parameters of Weibull probability density functions were first fitted for each plot at each measuring age using the maximum likelihood as in Gorgoso et al (2012) methodology, being the location parameter fixed at 0.10 of the

minimal observed diameter (D_{min}). The percentage of the minimum diameter of 10% was deemed to be the best when applied to African mahogany plantations in a previous study.

2.4 Parameter estimation

Once the parameters of the Weibull function were obtained from the observed data, they were estimated using stand attributes through 4 approaches. The first two methods uses the model proposed by Method 5 from Cao (2004), henceforward referred as Method 1 when the dependent variable (the parameters of the Weibull distribution obtained in section 2.3) were estimated using the linear model proposed by Cao (Equation 5). The second Method (Method 2) uses equation 5 to estimate the percentile diameters of 25% and 97% positions, which were later used to estimate the parameters of the Weibull function using equations 3 and 4. Methods 1 and 2 uses the following stand attributes as independent variables: number of trees per hectare (N), dominant height (H), age (A) and relative spacing ($RS=(10,000/N)^{0.5}/H$). To better fit the data there was a modification in the methodology proposed by Cao (2004): the location parameter was 0.1 instead of 0.5 of the minimum estimated diameter, based on previous study. The third and fourth approach create a linear model using the stepwise method, henceforward referred Method 3, when the model's dependent variable was the parameters of the Weibull function, obtained as in section 2.3, or Method 4 when the model's dependent variable was the diameters of 25% and 97% position, which were latter used to estimate the parameters of the Weibull function using equations 3 and 4. In both cases, equation 6 was used. Methods 3 and 4 consists of testing the following stand attributes as potential independent variables: A, basal area, mean sectional area (g), N, RS, mean tree height (h), H, site index (S), mean diameter at breast height (DBH), maximum DBH (D_{max}),

minimum DBH (D_{min}), the DBH at 25th (D_{25}), and 97th (D_{97}) positions. All models were fit via ordinary least squares procedure using the software R 3.3.2 (R CORE TEAM, 2016). The resultant models were selected through the Akaike information criterion (AIC).

In all the cases, the location parameter (γ) was the result of 0.1 times the estimated minimum diameter (equation 2). The minimum diameter, as well the scale (η) and shape (β) parameters, were estimated according to the tested methodologies (Cao or stepwise). For methods 2 and 4, before estimating shape and scale parameters, the 25th and 97th percentiles and minimum diameter were estimated, and next, used to calculate η and β according to the formulations 3 and 4. For methods 1 and 3 η and β were estimated directly from the models (Equations 5 or 6).

$$\gamma = 0.1D_{min} \quad (2)$$

$$\eta = \frac{D_{97}-a}{(-\ln(1-D_{25}))^{1/\gamma}} \quad (3)$$

$$\beta = \frac{\ln\left(\frac{-\ln(1-D_{25})}{-\ln(1-D_{97})}\right)}{\ln\left(\frac{D_{25}-a}{D_{97}-a}\right)} \quad (4)$$

The formulations used in Cao (2004) are:

$$D_{min}, \beta, \gamma, D_{25} \text{ or } D_{97} = e^{[b1+b2RS+b3\ln(N)+b4\ln(H)+b5/A]} + Error \quad (5)$$

For the stepwise methodology, formulas 2 and 6 were used to estimate the parameters minimum diameter, η and β , and the 25 and 97 percentile

diameter pairs, where var1, var 2 and so on are the stand attributes selected by stepwise method. Table 2 summarizes all the tested methods to estimate the Weibull parameters.

$$D_{min}, \eta, \beta, D_{25} \text{ or } D_{97} = \exp[b_1 + b_2 \text{var}1 + b_3 \text{var}2 \dots] \quad (6)$$

Table 2 - Summarization of the methods in parameter estimation and the attribute estimated using the methods mentioned.

Method	Parameter estimated	Attribute estimated
1	Cao (eq. 2 and 5)	D_{min}, η, β
2	Cao (eq. 2, 3, 4 and 5)	$D_{min}, D_{25} \text{ and } D_{97}$
3	Stepwise (eq. 2 and 6)	D_{min}, η, β
4	Stepwise (eq. 2, 3, 4 and 6)	$D_{min}, D_{25} \text{ and } D_{97}$

2.5 Evaluation of probability density functions fitting

Each different method (Table 2) was evaluated by analyzing mean errors per diameter class (BIAS, equation 7) and mean absolute diameter class error (MAE, equation 8) for number of trees per hectare and basal area per hectare (GORGOSO-VARELA; ROJO-ALBORECA 2014; KANGAS; MALTAMO 2000b; PALAHÍ et al., 2007). In the formulas for BIAS and MAE, D_{ij} is the observed number of trees or basal area per hectare for the class i in plot j , \widehat{D}_{ij} is the estimated number of trees or basal area per hectare for class i in plot j , NC_j is the number of classes considering the observed data found in the plot j , and NP is the number of plots.

$$\text{BIAS} = \sum_{j=1}^N \frac{(D_{ij} - \hat{D}_{ij})}{NC_j} \times \frac{1}{NP} \quad (7)$$

$$\text{MAE} = \sum_{j=1}^N \frac{|D_{ij} - \hat{D}_{ij}|}{NC_j} \times \frac{1}{NP} \quad (8)$$

To measure the goodness of fit of each method, the mean and standard deviation of the Kolmogorov-Smirnov (K-S) test value (D_n) was compared, as in Cao (2004) and Gorgoso-Varela and Rojo-Alboreca (2014). The D_n is the greatest difference between relative observed and estimated data, as follows: $D_n = \max|F(x) - s(x)|$, where $F(x)$ is the relative cumulative value for the estimated data and $S(x)$ is the relative cumulative value for observed data. The percentage of plots which estimated distribution was not statistically different from the observed data (according to Kolmogorov-Smirnov test with 95% confidence) was also evaluated.

2.6 Fitting using different databases

In order to analyze the fitting the methods in different databases, we prognosticated values for a plantation at ages of 10 and 20 years, using site index of 21 and 29 meters. Also, we used a database from a 40-year-old Malasian plantation from Yahya et al. (1999). We also compared the fitting of Method 1 model with the fitting of a model produced by Nokoe and Okojie, (1984) studying an African mahogany plantation as well.

3 RESULTS

Table 3 shows values of maximum, minimum and the standard deviation for the stand attributes and parameters found in all plots in all ages from the data base used for fitting and validation processes.

Table 3 - Minimum (min), maximum (max) and standard deviation (SD) for the stand attributes and for parameters fitted by maximum method.

	Fitting (n=444)			Validation ((n=131)		
	min	max	SD	min	max	SD
γ	0.10	3.86	0.49	0.11	2.69	0.45
η	1.20	51.58	6.54	1.84	51.29	6.58
β	0.20	19.71	3.30	0.67	17.36	3.32
A	1.10	14.00	1.87	1.10	14.00	1.80
g	0.00	0.12	0.01	0.00	0.05	0.01
RS	0.24	3.53	0.58	0.25	2.92	0.61
h	0.88	25.00	4.24	1.29	18.88	3.96
N	69.44	416.67	62.89	69.44	416.67	67.64
DBH	0.00	50.91	6.40	0.00	51.03	6.54
H	1.68	28.17	5.01	2.03	27.53	4.88
S	17.00	33.00	3.75	17.00	33.00	3.68
D_{min}	0.00	38.58	4.93	0.00	26.87	4.51
D_{max}	0.00	69.33	8.26	2.80	64.62	8.26
D_{25}	1.27	47.81	5.85	1.34	47.94	6.07
D_{97}	2.29	63.03	7.82	2.55	60.73	7.78

γ, η, β are the location, scale and shape parameters. A: age, g: mean sectional area, RS: relative spacing, h: mean tree height, N: number of trees per hectare, DBH: mean diameter at breast height, H: dominant height, S: Site index, D_{min}, D_{max} : minimum and maximum diameter D_{25}, D_{97} : diameters at positions of 25 and 97 percentiles at plot.

Table 4 shows the coefficients for the equations built from the four methods to estimate either the parameters of Weibull function or the percentile diameters, depending on the method. Asterisk means the coefficient was meaningful.

Table 4 - Coefficients for the equations estimated by the four methods to estimate the parameters of the Weibull function. Asterisk means parameters were statistically significant at 95% of significance.

Method	Parameter	β_0	RS	A	h	ln(N)	DBH	g	S	D_{min}	N	ln(S)	1/A	ln(H)	H
1	ln(D_{min})	2.728*	-0.341*			-0.182*						0.375*	-2.024*		
	ln(β)	2.879*	-0.223*			-0.186*						0.458*	-2.005*		
	ln(γ)	4.410*	-0.596*			-0.044							-0.731	-0.651*	
2	ln(D_{min})	2.728*	-0.341*			-0.182*						0.375*	-2.024*		
	ln(D_{25})	4.294*	-0.493*			-0.313*						0.240	-1.585*		
	ln(D_{97})	3.377*	-0.148*			-0.254*						0.489*	-2.149*		
3	ln(D_{min})	1.863*	-0.668*	-0.025*	0.091*										
	ln(β)	2.650*	-0.476*		-0.014*	-0.098*	0.058*	-17.956*	-0.004*	0.033*					
	ln(γ)	1.705*			-0.100*			-55.450*		0.203*	-0.001*				
4	ln(D_{min})	1.863*	-0.668*	-0.025*	0.091*										
	ln(D_{25})	2.379*	-0.608*		-0.017*			7.546*							0.052*
	ln(D_{97})	2.876*	-0.656*	0.105*	0.007*			3.956*			-0.004*	-0.001*			

Table 5 shows the percentage of plots where the estimated and observed distributions were not different (according to K-S test), MAE, and BIAS for number of trees per hectare and basal area per hectare and the standard deviation for each previously mentioned statistic. The best parameter estimation was performed by Method 3 followed by Method 1. They had 80% and 51.7% of adherence for the fitting database, respectively, according to K-S test, with 95% of confidence. Method 2 was the third best approach with 39% of adherence. The worst fitting method was the 4th, which had just 1.9% of adherence between estimated and observed data.

When comparing different methods, MAE is more important than BIAS, because opposite signals can be compensated in BIAS. However, BIAS is still important for the evaluation process because it gives us the model general tendency. Method 3 had the highest percentage of adherence according to K-S test (80% for fitting and 79.09% for validation), smallest MAE for number of trees (4.81 N/diameter class/ha) and for basal area per hectare (0.09 m²/diameter class/ha). Method 1 had the second best percentage of fitting according to K-S test (51.7% for fitting and 50.1% for validation), the second smallest MAE for number of trees (5.19 N/diameter class/ha) and the same MAE for basal area per hectare (0.19 m²/diameter class/ha) as Method 3. For both Method 3 and 1, which directly estimated the parameters of the Weibull function, the BIAS for number of trees per hectare was negative and for basal area were positive, which means that the methods overestimated number of trees and underestimated the basal area per hectare.

Method 2 had 39% adherence between observed and estimated plots for the fitting and 42.72% for validation database, according to the K-S test (Table 5). MAE for number of trees and basal area per hectare per diameter class was 6.03 and 0.11 m², respectively. Method 4 was the worst method, with just 1.9% and 1.8% of adherence according to the K-S test, for fitting and validation data,

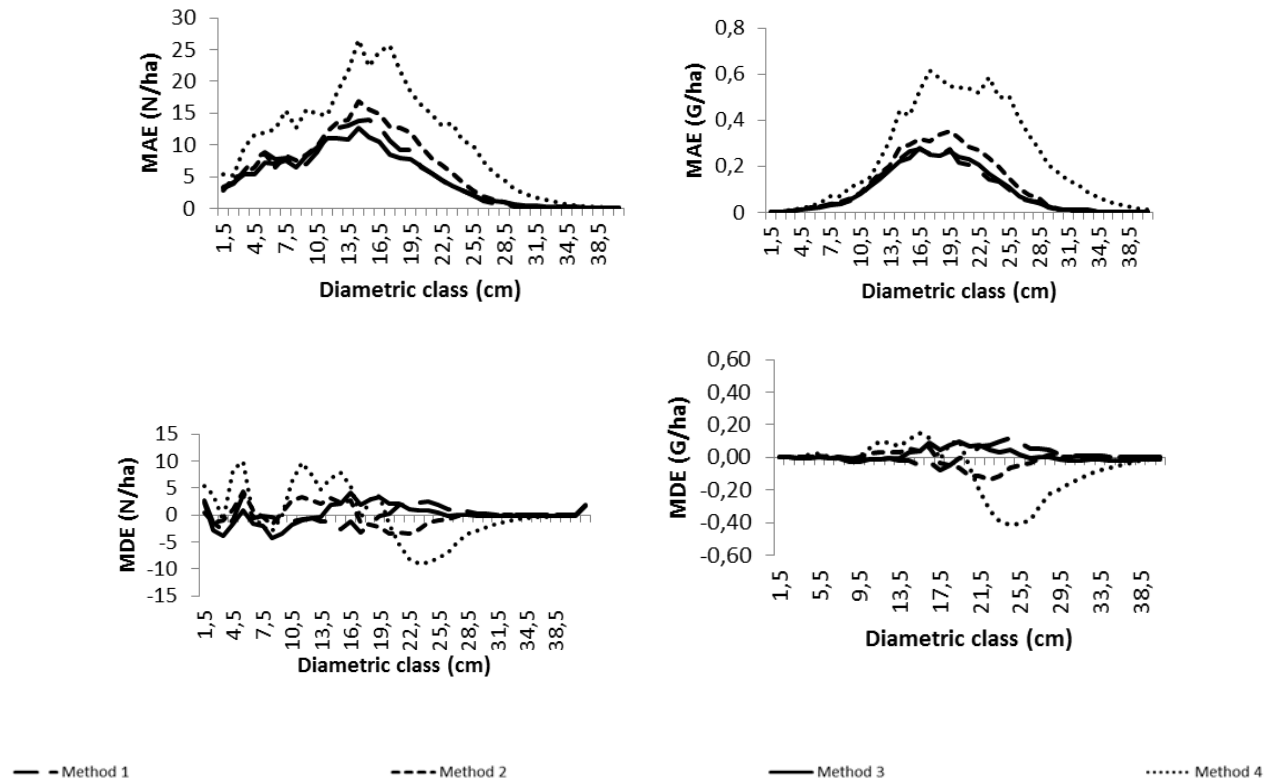
respectively. MAE for number of trees and basal area per hectare per diameter class were respectively 10.66 and 0.24 m²/ha. For both methods 2 and 4, which the percentile diameters were estimated, the BIAS for number of trees per hectare was positive and for basal area was negative, which means the model underestimated number of trees and overestimated the basal area per hectare.

Table 5 - Mean absolute class error (MAE) and mean diameter class error (BIAS) by diametric class for number of trees per hectare and basal area in the fitting and validation database for each methodology. The number inside the parenthesis are the standard deviation of the previous statistic.

	Statistical adherence	MAE (N/ha)	MAE (G/ha)	BIAS (N/ha)	BIAS (G/ha)
Method		Fitting			
1	51.70	5.19 (4.74)	0.09 (0.1)	-0.03 (1.49)	0.01 (0.04)
2	39.00	6.03 (5.39)	0.11 (0.12)	0.01 (1.88)	-0.01 (0.05)
3	80.00	4.81 (4.05)	0.09 (0.1)	-0.03 (1.49)	0.01 (0.03)
4	1.90	10.66 (8.09)	0.24 (0.22)	0.18 (5.18)	-0.07 (0.16)
		Validation			
1	50.09	5.13 (4.98)	0.08 (0.09)	0.03 (1.75)	0.01 (0.04)
2	42.72	6.31 (6.27)	0.11 (0.12)	0.03 (2.57)	-0.01 (0.05)
3	79.09	4.82 (4.33)	0.08 (0.07)	0.05 (1.78)	0.01 (0.03)
4	1.80	10.89 (9.64)	0.21 (0.21)	0.21 (4.77)	-0.05 (0.1)

Figure 1 shows the behavior of MAE and BIAS for number of trees and basal area per hectare per diametric class. Method 4 was the farthest method from the horizontal axis for both MAE and BIAS in number of trees and basal area per hectare. Method 2 was the second worst method, because its curve was far from the horizontal axis as well. Although the curves for Methods 3 and 1 were close, method 3 was slightly closer to the horizontal axis than the Method 1 for MAE and BIAS for number of trees and basal area per hectare. This behavior was steady for all diametric classes. Bigger values for MAE were found for classes of 13.5 cm and 19.5 cm, probably because they were the classes with the greatest number of trees.

Figure 1- Mean absolute diameter class error and mean diameter class error by diameter class for number of trees per hectare and basal area for each methodology to estimate the diameter distribution of the African mahogany stands.

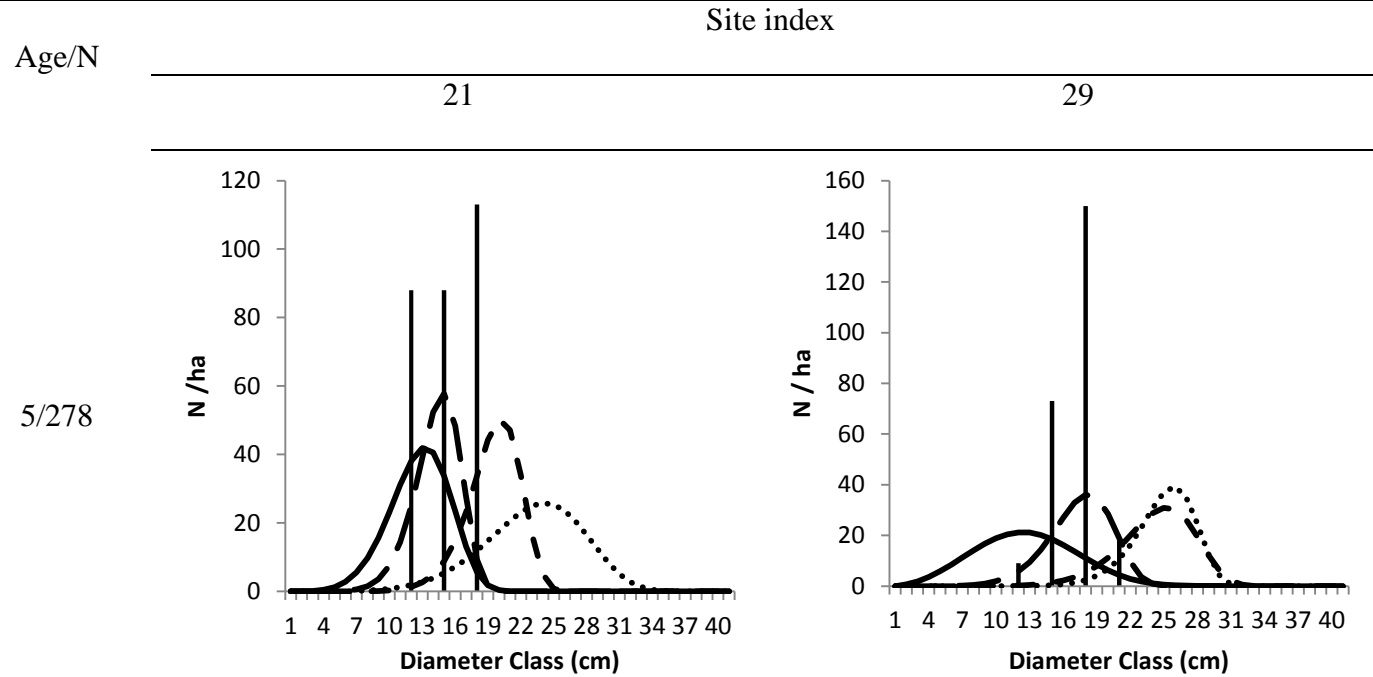


4 DISCUSSION

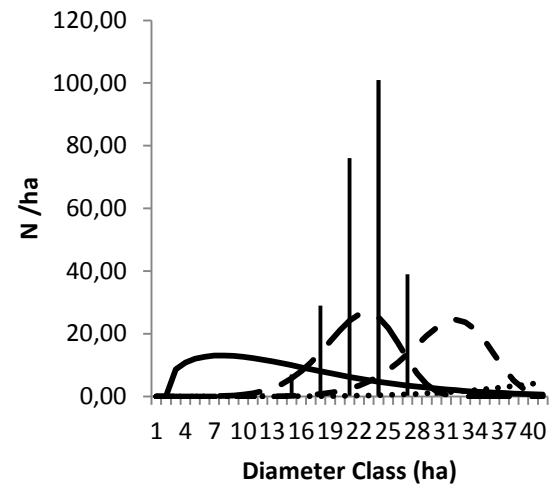
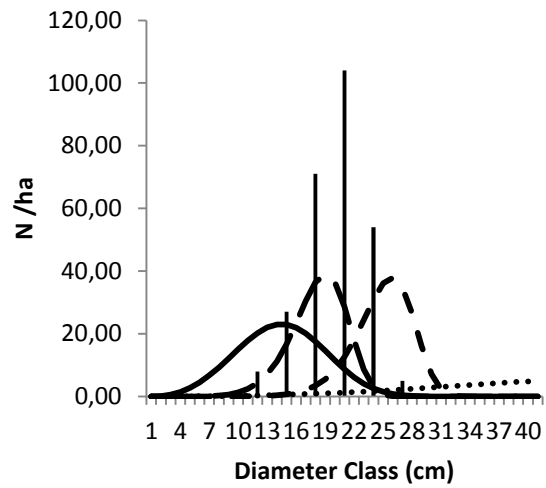
Figure 2 shows the prognosis (in number of trees per hectare) made using data observed from our study (5-year-old plantations), and estimated data for the ages of 10 and 20 years in order to evaluate the behavior of each methodology in the future. We also tested the models in 2 different site index (21 and 29 meters, reference age is 15 years), from Ribeiro et al. 2016 with varying number of trees per hectare, simulating thinning as the stand ages. Methods 2 and 4 had its curves shifted to the right of the observed data in most of the cases, roughly overestimating tree size, especially for the database outside of the ones used to fit the models (ages of 10 or more). Method 3 was the best one for the current age (5-year-old plantation). However, it underestimated diameters in the older ages. Method 1 behaved reasonably well with the observed data along all site indexes, ages and management systems, being chosen as the best method for forecasting.

Despite Method 3 had having the highest adherence and the smallest MAE and BIAS (Figure 1), method 1 was the best fitting method because it gave reasonable fittings for data out the fitting data. It was introduced by Cao (2004) and was one of the best methods to describe the diameter distribution for *Pinus taeda*. Similarly, Schneider et al. (2008) used the same method to estimate parameters of Weibull function for thinned *Pinus taeda* stands, and concluded that the estimations were highly precise.

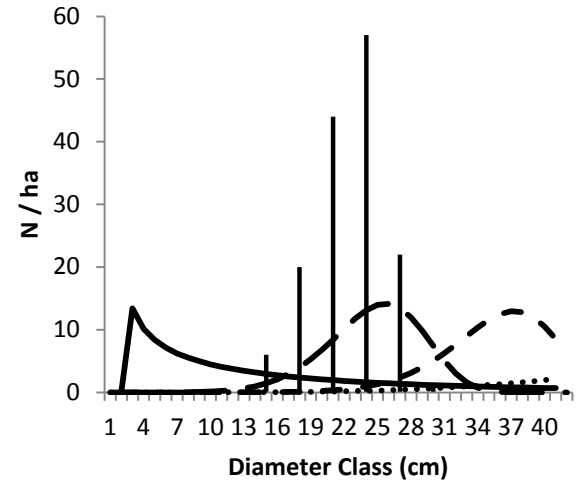
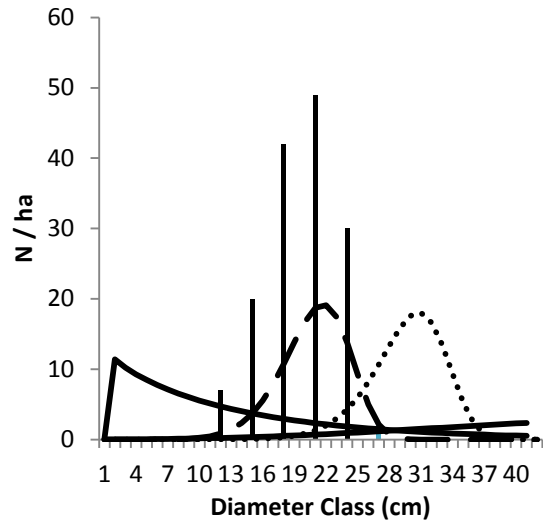
Figure 2 - Prognosis (in number of trees per hectare) made to current age, and for 10 and 20 years, considering different number of trees per hectare and site indexes. (Continua...)



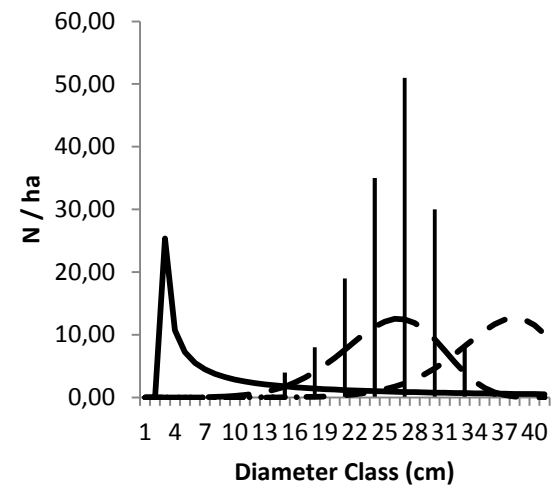
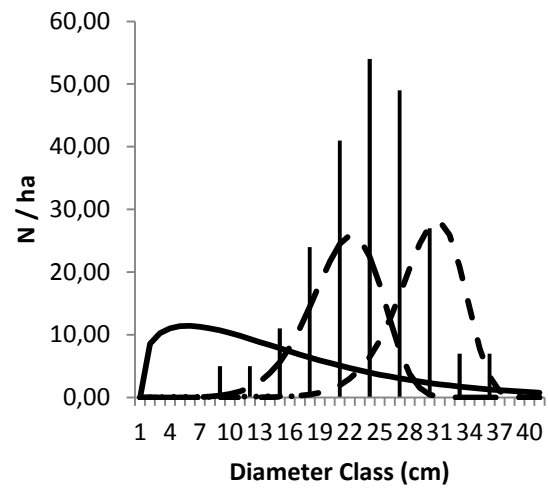
10/268

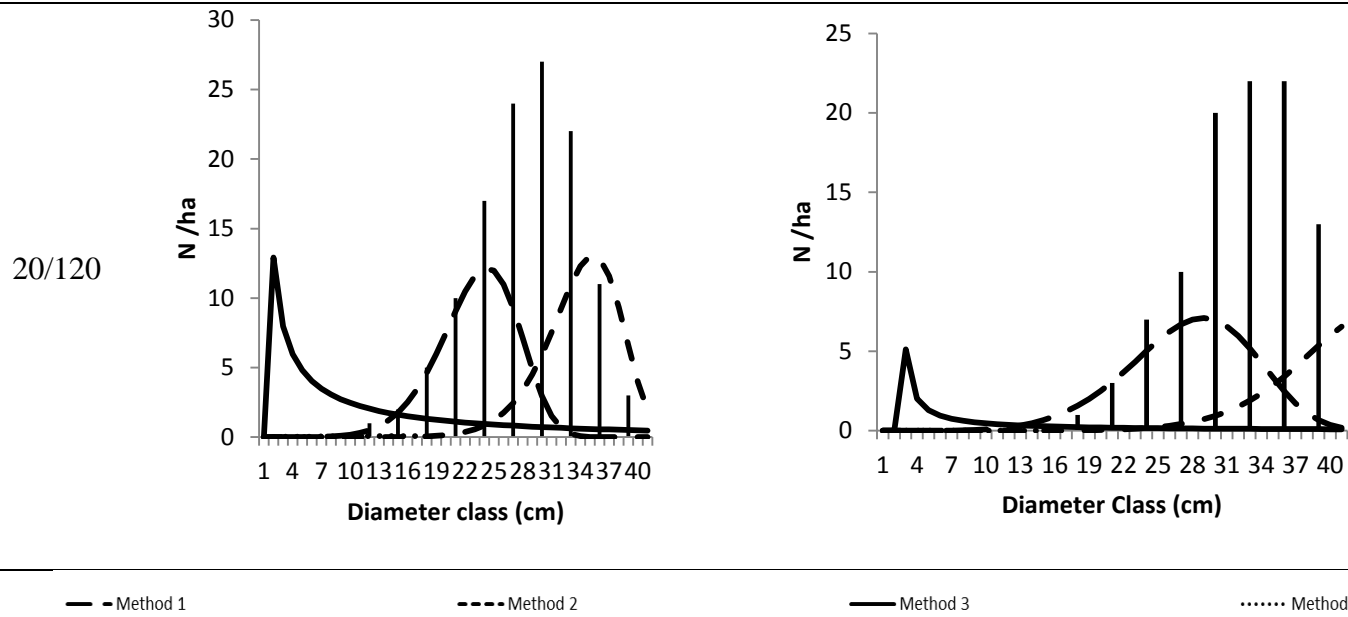


10/150



20/219





(Conclusão)

The equations for Method 1, which was regarded as the best to predict the diameter distribution of *K. ivorensis* in the future, can be seen in equations 9 to 11. The coefficient for the inverse of age is negative for all the equations, which means that all the parameters of the Weibull distribution rise with age. Similarly, the coefficient for relative spacing and number of trees per hectare are negative in all equations, which means that the coefficient increases with the decrease of relative spacing and the number of trees per hectare. For minimum diameter and the scale parameter, the higher the site index, the higher the value, what makes biological sense. The shape parameter decreases with the dominant height, meaning that the distribution becomes more left-skewed as the stand ages or it is located in more productive sites.

$$\ln(a) = \exp\left(2.7282 - 0.3405RS - 0.1823\ln(N) + 0.3754\ln(S) - \frac{2.0241}{age}\right) * 0.1 \quad (9)$$

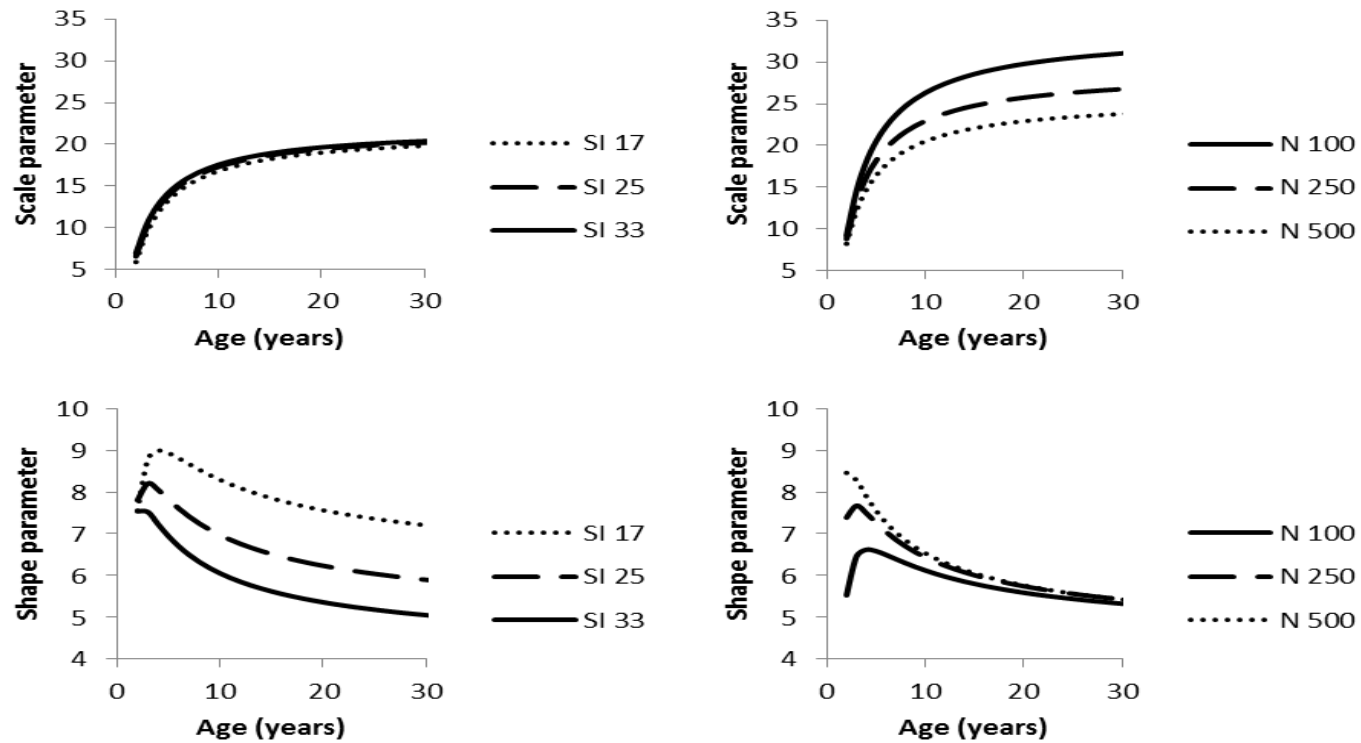
$$\ln(\eta) = 2.8787 - 0.22328RS - 0.18624\ln(N) + 0.45782\ln(S) - \frac{2.00469}{age} \quad (10)$$

$$\ln(\beta) = 4.40965 - 0.59573RS - 0.4428\ln(N) - 0.65131 \ln(hdom) - \frac{0.7306}{age} \quad (11)$$

To illustrate the behavior of the equations when submitted to different stand characteristics, Figure 3 demonstrates the scale and shape parameters variation under influence of different site index and tree density. Scale parameter rises with site index and age but decreases with density. We can see

from Figure 3 that density affects more the scale parameter than site index, which stresses the need for correct planning because of the role density plays on stand structure. Shape parameter rises with density and decreases with site index and age. In this case, site index is more important than density for stand structure. Nokoe and Okojie (1984) found increasing and decreasing scale and shape parameters, respectively, as the stand ages. Similarly, Schneider et al. (2008) had increasing scale parameter value as the stand density decreased. They also found smaller shape parameter with smaller N.

Figure 3 - Scale (η) and shape parameter (β) behavior at varying site index (SI, mean dominant height of the 30 thickest trees per hectare at age of 15 years) and density (N/ha). For varying SI, N=300, for varying N, SI=29.



To test the behavior of the proposed equations in Method 1 in a totally different database, Figure 4 shows the fitting of method 1 using data from Yahya et al. (1999) of a 40-year-old *Khaya ivorensis* plantation in Malaysia. The input variables from Figure 4 were: $S = 33$; $N/ha = 390$; age = 40; $RS = 0.17$. The curve covers almost all the observed data, and follows its tendency. Thus, method 1 was a good method for estimating parameters of Weibull probability density function, and the equations fitted with the data from this paper were efficient in forecasting diametric structure of a stand far beyond the fitting database.

Figure 4 - Maximum likelihood Cao (2004) curve produced from equations generated in this paper using as inputs data from Yahya et al. (1999). Bars are the observed data.

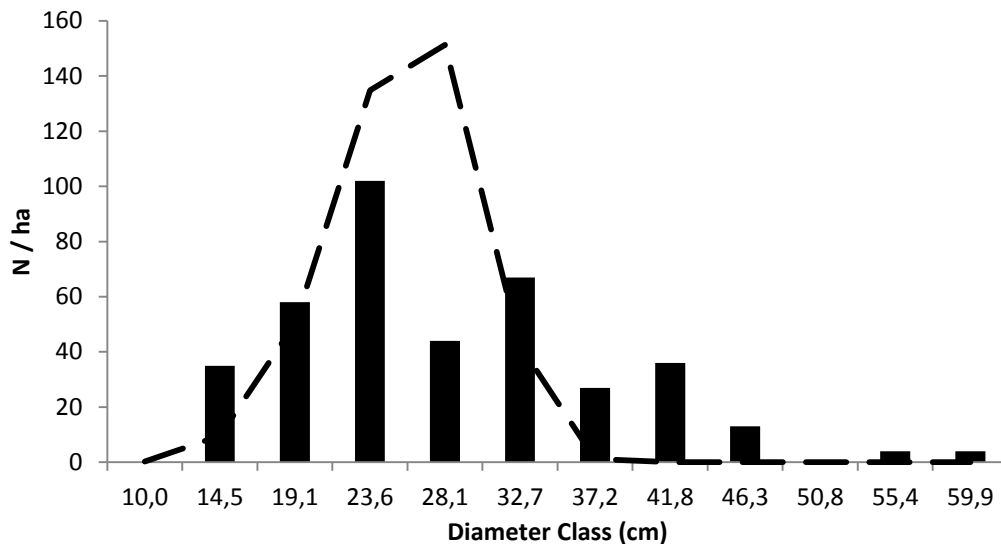
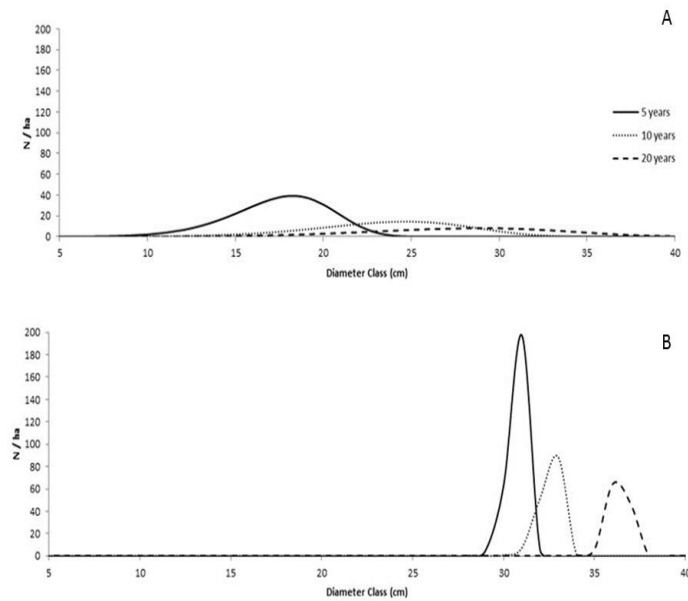


Figure 5 A shows diametric distribution in a simulation using data from prognosis employing Method 1. This was done to illustrate equations' 9 to 11 flexibility in describing the changes in diameter distribution through time. We

also tested the behavior of a similar set of equations fitted for a *K. ivorensis* plantation in Nigeria (NOKOE; OKOJIE, 1984) using the same stand attributes, in order to compare fittings (Figure 5 B). As we can see, Nokoe and Okojie's equations produced peaked curves (Figure 5 B) where the 5-year-old mean diameter is almost 30 centimeters, which is biologically improbable. Method 1 (Figure 5 A) produced smoother curves (Figure 5 A), with mean diameters distributed across the diameter range, with reasonable values for diameter and variability (database was not clonal, but from seeds). The mean diameter moves to the right along with time and the decreasing density, which makes biological sense. In 5 years there were 300 trees per hectare. At 10 years old, the plantation had 150 trees per hectare. At 20 years old, the plantation had 117 trees per hectare.

Figure 5 - Diametric distribution in simulation data from prognosis using equations from Method 1 (A) and from equation fitted by Nokoe and Okojie, (1984) (B) at ages times: 5-year-old stand with 300 trees per hectare, 10-year-old plantation with 150 trees per hectare and 20-year-old plantation with 117 trees per hectare



Because Method 1 is feed with easily obtained stand attributes, it makes prognosis easier. It means forecasts can be made cheaply and future yield can be assessed, in order to facilitate management and planning. The results in Figure 5 show how important is to calibrate the models that estimate the probability density function's parameters for local stands condition. We found that using the same input variables (N/ha, age and S) but 2 sets of equations (the ones from this study and the ones from Nokoe and Okojie (1984) yielded very different results, while our equations generated stands with lower mean diameter values and wide diameter distribution, Nokoe and Okojie (1984) generated stands with

much larger diameters and concentrated along the mean values. This probably happened due to the much older ages and consequently larger diameter size, used by the aforesaid mentioned authors.

5 CONCLUSION

Although the prediction of the Weibull parameters was more precise using an equation built by stepwise procedure with several stand attributes as input data (maximum and minimum diameter, relative spacing, basal area, mean tree height, number of trees per hectare, diameter at breast height, method 3), they did not generate good estimative when applied to situations outside the used database. Method 1, which uses N/ha, site index (or dominant height), and age as input variables (equations 9 to 11), behaved very well in a wide range of management scenarios. Thus, we conclude that the equations from method 1 can be used to predict the diameter distribution of African mahogany plantations in Brazil, with the advantage of using only easy to obtain input variables.

REFERENCES

ARCE, J. Modelagem da estrutura de florestas clonais de *Populus deltoides* Marsh. através de distribuições diamétricas probabilísticas. **Ciência Florestal**, Santa Maria, v. 14, n. 1, p. 149–164, 2004.

BAILEY, R. L.; DELL, R. Quantifying Diameter Distributions with the Weibull Function. **Forest Sciences**, Bethesda, v. 19, n. 2, p. 97-104, 1972.

CAO, Q. V. Predicting parameters of a weibull function for modeling diameter distribution. **Forest Science**, Bethesda, v. 50, n. 5, p. 682–685, 2004.

CORCIOLI, G.; BORGES, J. D.; JESUS, R. P. de. Macro and micronutrient deficiency in mature seedlings of *khaya ivorensis* studied in nursery. **Cerne**, Lavras, v. 22, n. 1, p. 121-128, 2016.

DIAMANTOPOULOU, M. J.; OZCELIK, R. CRECENTE-CAMPO, F., ELER, U. Estimation of Weibull function parameters for modelling tree diameter distribution using least squares and artificial neural networks methods. **Biosystems Engineering**, Hexham, v. 133, p. 33–45, 2015.

FALESI, I. C.; BAENA, A. R. C. *Khaya ivorensis* A. Chev. em sistema silvipastoril com leguminosa e revestimento Natural do solo. Embrapa Amazônia Oriental, Documentos 4, 52 p, 1999.

GORGOSO, J. J.; ROJO, A.; CÁMARA-OBREGÓN, A.; DIÉGUEZ-ARANDA, U. A comparison of estimation methods for fitting Weibull, Johnson's SB and Beta functions to *Pinus pinaster*, *Pinus radiata* and *Pinus sylvestris* stands in northwest Spain. **Forest systems**, Madrid, v. 21, n. 3, p. 446-459, 2012.

GORGOSO-VARELA, J. J.; ROJO-ALBORECA, A. Short Communication . A comparison of estimation methods for fitting Weibull and Johnson ' s S B functions to pedunculate oak (*Quercus robur*) and birch (*Betula pubescens*) stands in northwest Spain. **Forest systems**, Madrid, v. 23, n. 3, p. 500–505, 2014.

ITTO. International Tropical Timber Organization. Tropical Timber Market. **Report.**, v. 19, n. 20, p. 1–23, 2015.

JEYANNY, V.; RASIP, A. A.; RASIDAH, K. W.; ZUHAI, Y. A. Effects of macronutrient deficiencies on the growth and vigour of *Khaya ivorensis* seedlings. **Journal of Tropical Forest Science**, Kepong, v. 21, n. 2, p. 73-80, 2009.

KANGAS, A.; MALTAMO, M. Calibrating predicted diameter distribution with additional information. **Forest Science**, Bethesda, v. 46, n. 3, p. 390–396, 2000a.

KANGAS, A.; MALTAMO, M. Performance of percentile based diameter distribution prediction and Weibull method in independent data sets. **Silva Fennica**, Helsinki, v. 34, n. 4, p. 381–398, 2000b.

LEI, Y. Evaluation of three methods for estimating the Weibull distribution parameters of Chinese pine (*Pinus tabulaeformis*). **Journal of Forest Science**, v. 54, n. 12, p. 566–571, 2008.

LEITE, H. G. et al. Comparação entre predição e projeção da distribuição de diâmetros de povoamentos de eucalipto submetidos a desbastes. **Revista Árvore**, Vicosa, v. 37, n. 2, p. 321–328, 2013.

LIU, C. et al. Evaluation of three methods for predicting diameter distributions of black spruce (*Picea mariana*) plantations in central Canada. **Canadian Journal of Forest Research**, Ottawa, v. 34, n. 12, p. 2424–2432, 2004.

LIU, C. et al. Applications and comparison of six methods for predicting parameters of the Weibull function in unthinned *Picea glauca* plantations. **Scandinavian Journal of Forest Research**, Alnarp, v. 24, n. 1, p. 67–75, 2009.

MALTAMO, M.; PUUMALAINEN, J.; PAIVINEN, R. Comparison of Beta and Weibull functions for modelling basal area diameter distribution in stands of *Pinus sylvestris* and *Picea abies*. **Scandinavian Journal of Forest Research**, Alnarp, v. 10, n. 2, p. 284–295, 1995.

MCGARRIGLE, E.; KERSHAW JUNIOR, J. A.; LAVIGNE, M. B.; WEISKITTEL, A. R.; DUCEY. Predicting the number of trees in small diameter classes using predictions from a two-parameter Weibull distribution. **Forestry**, Whashington, v. 84, n. 4, p. 431-439, 2011.

NORDAHLIA, A. S.; HAMDAN, H.; ANWAR, U. M. K. Wood properties of selected plantation species *khaya ivorensis*: (African mahogany), *Azadirachta excelsa* (sentang), *Endospermum malaccense* (sesendok) and *Acacia mangium*. **Timber technology bulletin**, n. 51, p. 1–8, 2013.

NORD-LARSEN, T.; CAO, Q. V. A diameter distribution model for even-aged beech in Denmark. **Forest Ecology and Management**, Amsterdam, v. 231, n. 1–3, p. 218–225, 2006.

OPUNI-FRIMPONG, E.; OBIRI, B. D.; OWUSU, S.; KWAKYE, L. A.; EBANYENLE, E.; COBBINAH, J. R.; STORER, A. Towards sustainable timber production in Ghana: Stage 1. Improving shoot borer resistance and developing silvicultural systems to maximize mahogany plantation success. **Project final technical report**, v. 3, p. 1 – 110, 2010.

SCHNEIDER, P. S. P.; FLEIG, F. D.; SCHEIDER, P.R.; C. A.; FINGER, L. G. Avaliação da relação densidade e diâmetro em povoamento de *Pinus taeda*. **Ciência Florestal**, Santa Maria, v. 18, p. 481–491, 2008.

PALAHÍ, M.; PUKKALA, T.; BLASCO, E.; TRASOBARES, A. Comparison of Beta, Johnson's SB, Weibull and truncated Weibull functions for modeling the diameter distribution of forest stands in Catalonia (north-east of Spain).

European Journal of Forest Research, New York, v. 126, n. 4, p. 563–571, 2007.

QIN, JIANHUA; CAO, QUANG V.; BLOUIN, DAVID C. Projection of a diameter distribution through time. **Canadian Journal of Forest Research**, Ottawa, v. 37, n. 1, p. 188-194, 2006.

R CORE TEAM. **R**: A language and environment for statistical computing. R Foundation for Statistical Computing, Vienna, Austria. ISBN 3-900051-07-0. Disponível em: < <http://www.R-project.org/>>. Acesso em: 28 mar. 2013.

RIBEIRO, A.; FERRAZ FILHO, A. C.; MELLO, J. M. de; FERREIRA, M. Z.; LISBOA, P. M. de M.; SCOLFORO, J. R. S. Estratégias e metodologias de ajuste de modelos hipsométricos em plantios de Eucalyptus sp. **Cerne**, Lavras, v.16, n.1, jan./mar. 2010.

RIBEIRO, A.; FERRAZ FILHO, A. C.; TOMÉ, M.; SCOLFORO, J. R. S. (in press) Site quality curves for African mahogany plantations in Brazil. **Cerne**, Lavras, 2016.

SIIPILEHTO, J.; MEHTATALO, L. Parameter recovery vs. parameter prediction for the Weibull distribution validated for Scots pine stands in Finland. **Silva Fennica**, Helsinki, v. 47, n. 4, p. 1–22, 2013.

SIIPILEHTO, J.; SARKKOLA, S.; MEHTÄTALO, L. Comparing regression estimation techniques when predicting diameter distributions of scots pine on drained peatlands. **Silva Fennica**, Helsinki, v. 41, n. 2, p. 333–349, 2007.

SCHNEIDER, P. S. P.; FLEIG, F. D.; SCHNEIDER, P. R.; FINGER, C. A. G. Avaliação da relação densidade e diâmetro em povoamento de Pinus taeda. **Ciência Florestal**, Santa Maria, v. 18, n. 4, p. 481-491, 2008.

VANCLAY, J. K. **Modelling forest growth and yield: applications to mixed tropical forests**. CAB International, Wallingford, UK, 1994. 312 p.

YAHYA, A. Z.; MAHAT, M. N.; RASIP, A.; RASIP, A. Growth of plantation grown *Khaya ivorensis* in Peninsular Malaysia. **Journal of Tropical Forest Science**, Kepong, v. 11, n. 4, p. 849-851, 1999.