

## MULTIFRACTALIDADE E COMPLEXIDADE SOBRE COMMODITIES DO AGRONEGÓCIO BRASILEIRO

Jader da Silva JALE<sup>1</sup>  
Borko STOŠIĆ<sup>1</sup>  
Tatijana STOŠIĆ<sup>1</sup>

- RESUMO: Neste trabalho investigamos o comportamento de séries temporais sobre preços de fechamento diário de algumas *commodities* do agronegócio brasileiro. Analisamos os comportamentos da multifractalidade e da complexidade das séries registradas entre 2006 e 2014. Utilizamos os métodos *Sample Entropy* e *Cross-Sample Entropy* para investigar a complexidade e propomos o método *Sample Entropy* em Janela Móvel de Tempo para avaliar a dinâmica da complexidade dessas séries. Investigamos também a multifractalidade com o método *Multifractal Detrended Fluctuation Analysis* (MF-DFA). Concluímos que ambas as análises podem ser úteis para avaliar a dinâmica do agronegócio brasileiro diante no cenário econômico mundial.
- PALAVRAS-CHAVE: *Commodities*; sample entropy; cross-sample entropy; MF-DFA; correlação-cruzada; janela móvel de tempo.

### 1 Introdução

Impulsionado por países emergentes, principalmente a China, o crescimento da economia mundial gerou mudanças relevantes no mercado de *commodities* a partir de 2002, afetando os preços das *commodities* que mostraram uma elevação expressiva (Abe, 2011).

Entre 2001 e 2007 o Brasil obteve um aumento na participação do comércio mundial: de 1,2% em 2001 para 1,5%, em 2007. A participação das exportações agrícolas brasileiras, nesse período, cresce de 4,8% para 6,7%, acima da evolução das exportações agrícolas mundiais, impactando a expansão do mercado brasileiro no mercado mundial (MAPA, 2015).

---

<sup>1</sup>Universidade Federal Rural de Pernambuco - UFRPE, CEP: 52.171-900, Recife, PE, Brasil. E-mail: [jsj.brainstorm@gmail.com](mailto:jsj.brainstorm@gmail.com); [borkostosic@gmail.com](mailto:borkostosic@gmail.com); [tastosic@gmail.com](mailto:tastosic@gmail.com)

De acordo com Tremea (2011), o agronegócio brasileiro representou, em 2008, 36,7% das exportações brasileiras, geração de 37% dos empregos e 28% do Produto Interno Bruto (PIB). O Brasil exportou US\$ 58,4 bilhões de dólares em produtos agrícolas no ano de 2008. Fernandes & Pedro (2011) afirmam que em 2009 houve um declínio de 14% nos preços, comparado com 2008. Essa queda nas cotações se deu, principalmente, em função da crise financeira mundial ocorrida em meados de 2008. Considerando que o setor agrícola é de suma importância para a sanidade econômica e por ser um grande investidor em tecnologias ambiental e rural, o Brasil não pode sucumbir à ideia de uma desaceleração neste setor.

A turbulenta crise financeira mundial iniciada com a crise do mercado *subprime* americano, interrompeu a trajetória do crescimento da economia mundial, causando retração nas exportações. *Subprime* é uma modalidade de empréstimo de segunda linha, que apresenta maior risco de inadimplência por se tratar de um crédito à habitação destinado a uma fatia da população com rendimentos mais baixos e situação econômica mais instável (Galle, Cavali & Santos, 2009).

Segundo Galle, Cavali & Santos (2009), Vizi (2011) e Borges et al. (2011), o último trimestre de 2008 marca o agravamento da crise financeira mundial originada no mercado de hipotecas de alto risco (*subprime*) dos Estados Unidos. De acordo com Freitas (2009), a falência do banco de investimento Lehman Brothers no dia 15 de setembro de 2008 marca a transformação da crise financeira internacional. A crise passou a ser global, afetando todas as classes de títulos financeiros, comprometendo o desempenho do comércio internacional e das economias emergentes e avançadas (Eichengreen et al., 2010). Carneiro (2009) afirma que ainda em seu início, a crise causou uma perda acumulada de 2,2 trilhões de dólares.

Neste trabalho analisamos o comportamento das séries temporais dos preços de algumas *commodities* do agronegócio brasileiro, com ênfase na crise financeira *subprime*.

## 2 Materiais e métodos

O conjunto de dados analisado consiste nas séries temporais de preço de fechamento diário de três *commodities* agrícolas: Arroz, Boi e Trigo. Os dados referem-se aos preços de fechamento diários registrados desde 3 de abril de 2006 até 7 de abril de 2014, totalizando 1960 dias. Os dados estão divididos em dois períodos: de 2006 a 2009 (conjunto de Dados A) e de 2010 a 2014 (conjunto de Dados B). O conjunto Dados A (915 dias) refere-se ao período anterior e durante a crise financeira mundial, enquanto o conjunto Dados B (1045 dias) faz referência ao período posterior a crise financeira mundial. As *commodities* analisadas foram Arroz em casca, Boi e Trigo, descritas a seguir (CEPEA, 2015):

Arroz em casca: negociado a partir do indicador ESALQ/BM&FBOVESPA pelo preço (R\$/sc) de fechamento diário da saca de 50 Kg. Especificação do produto: arroz em casca, com rendimento de 58% de grãos inteiros e 10% de grãos quebrados (renda de 68%), para produção de arroz branco Tipo 1, seguindo

a classificação da Portaria 269/88 do Ministério da Agricultura. Unidade de medida: saca de 50 Kg (R\$/sc). A região de referência é o estado do Rio Grande do Sul, dividido em seis regiões administrativas segundo o Instituto Rio-Grandense do Arroz (IRGA): Fronteira Oeste, Zona Sul, Planície Costeira Interna, Planície Costeira Externa, Depressão Central e Campanha. Calcula-se a média aritmética para cada uma das seis regiões.

Boi: o Indicador de Preços do Boi Gordo ESALQ/BM&FBOVESPA é uma média diária ponderada de preços à vista do boi gordo no estado de São Paulo. Região de referência (onde ocorrem os abates): Estado de SP, dividido em 4 regiões: Presidente Prudente, Araçatuba, Bauru e São José do Rio Preto. Unidade de medida: arroba do boi gordo (R\$/arroba).

Trigo: negociado a partir do indicador ESALQ/BM&FBOVESPA pelo preço (R\$/t) de fechamento diário em reais por tonelada. Especificação do produto: Trigo tipo 1, PH 78, com umidade máxima de 13%, teor de matérias estranhas impurezas máximo de 1%, máximo de grãos danificados por insetos de 0,5%, máximo de grãos danificados pelo calor, mofados e ardidos de 0,5% e até 1,5% de grãos quebrados, chochos e triguilho. Para o Paraná considera-se o trigo pão ou melhorador e, para o Rio Grande do Sul, o brando. Unidade de medida: reais por tonelada (R\$/t). As regiões de referência do Paraná são: Oeste, Norte, Sudoeste e Ponta Grossa. Regiões de referência do Rio Grande do Sul: Passo Fundo, Ijuí, Santa Rosa e Santa Maria.

Na prática, analisamos os retornos logarítmicos diários normalizados. Denotando o preço de fechamento das *commodities* no tempo  $t$  como  $\{x(t)|t = 1, \dots, N\}$ , o retorno diário logarítmico é definido por:

$$g(t) = \log(x(t+1)) - \log(x(t)), \quad \forall t = 1, \dots, N-1. \quad (1)$$

O retorno diário normalizado é definido como

$$R(t) = \frac{g(t) - \langle g(t) \rangle}{\sigma_g}, \quad \forall t = 1, \dots, N-1, \quad (2)$$

onde  $\sigma_g$  é o desvio-padrão da série  $g(t)$  e  $\langle g(t) \rangle$  é a média aritmética da série  $g(t)$ , ou seja,  $\langle g(t) \rangle = \frac{\sum_{t=1}^{N-1} g(t)}{N-1}$ , em que  $N-1$  é o comprimento da série  $g(t)$ .

## 2.1 *Sample Entropy*

O método *Sample Entropy* foi introduzido por Richman & Moorman (2000) para analisar a complexidade das séries temporais não lineares. O método *Sample Entropy* é definido como sendo o logaritmo natural da probabilidade condicional de que duas sequências similares, dentro de um nível de tolerância  $r$ , para  $m$  pontos, permaneçam similares para  $m+1$  pontos (Richman & Moorman, 2000). Este método foi usado em análise de processos fisiológicos (Lake et al., 2002; Bai, Qiu & Li, 2007), séries climáticas (Shuangcheng et al., 2006), sinais geofísicos (Min, Guang & Sarkar, 2014) e processos hidrológicos (Chou, 2014).

Seja  $\{x(t)|t = 1, \dots, N\}$  uma série temporal de tamanho  $N$ . A seguir, o algoritmo *SampEn*( $m, r, n$ ) é descrito:

1. Construir  $N - m + 1$  vetores de tamanho  $m$  onde:

$$x(i) = [x(i), x(i + 1), \dots, x(i + m - 1)]; i = 1, \dots, N - m + 1. \quad (3)$$

2. Definir a distância  $d_m$  entre os vetores  $x(i)$  e  $x(j)$ , onde

$$d_m[x(i), x(j)] = \max \left\{ |x(i + k) - x(j + k)| : 0 \leq k \leq m - 1 \right\}. \quad (4)$$

3. Para cada  $i = 1, \dots, N - m$ , calcula-se

$$B_i^m(r) = \frac{B_i}{(N - m - 1)} \quad \text{e} \quad A_i^m(r) = \frac{A_i}{(N - m)}, \quad (5)$$

onde  $B_i$  é o número dos vetores  $x(j)$  de tamanho  $m$  que são similares aos vetores  $x(i)$ ,  $i \neq j$ , dentro da distância  $r$ :  $d_m[x(i), x(j)] \leq r$ .  $A_i$  é o número dos vetores  $x(j)$  de tamanho  $(m + 1)$  que são similares aos vetores  $x(i)$ ,  $i \neq j$ , dentro da distância  $r$ .

Calcula-se

$$B^m(r) = \frac{1}{N - m} \left( \sum_{i=1}^{N-m} B_i^m(r) \right) \quad (6)$$

e

$$A^m(r) = \frac{1}{N - m} \left( \sum_{i=1}^{N-m} A_i^m(r) \right), \quad (7)$$

onde  $B^m(r)$  é a probabilidade de dois vetores serem similares para  $m$  pontos e  $A^m(r)$  é a probabilidade de dois vetores serem similares para  $(m + 1)$  pontos.

4. Finalmente, calcula-se a estatística *Sample Entropy*

$$SampEn(m, r, N) = -Ln \left( \frac{A^m(r)}{B^m(r)} \right) \quad (8)$$

que representa a probabilidade condicional de que duas sequências que são similares para  $m$  pontos permaneçam similares para  $m + 1$  pontos, ou seja, quando um dado consecutivo é adicionado (Lake et al., 2002). *Sample Entropy* é uma modificação do método *Approximate Entropy* (ApEn) introduzido por (Pincus, 1991). Ambos os métodos servem para quantificar a complexidade em séries temporais não lineares. Conforme Richman & Moorman (2000), maiores valores de *SampEn*, significam uma maior complexidade (menor regularidade) da série temporal. Neste trabalho utilizamos o método *Sample Entropy* para comparar a complexidade das séries de retornos das *commodities* para os períodos antes e depois da crise financeira mundial.

## 2.2 *Sample Entropy* em Janela Móvel de Tempo (*Rolling Window*)

Propomos, neste artigo, aplicar a estatística *SampEn* em janelas móveis de tempo para captar a dinâmica da complexidade dos retornos das *commodities* ao longo do tempo. Por exemplo: considere uma série temporal de tamanho 300 e janela móvel de tamanho 240, com passo uma entre cada janela. As janelas de tempo variam da seguinte forma:  $[1, \dots, 240]$ ,  $[2, \dots, 241]$ ,  $[3, \dots, 242]$ ,  $\dots$ ,  $[61, \dots, 300]$ .

## 2.3 *Cross-Sample Entropy* (*Cross – SampEn*)

*Cross-Sample Entropy* é um método proposto para quantificar o grau de sincronia e correlação-cruzada entre duas séries temporais registradas simultaneamente (Richman & Moorman, 2000). Este método representa uma modificação de método *Cross-Approximate Entropy* (Pincus & Singer, 1996) e foi utilizado em análise de sinais fisiológicos (Liu et al., 2013), geofísicos (Hernández-Pérez et al., 2010) e séries financeiras (Liu, Qian & Lu, 2010; Shi & Shang, 2012). Neste trabalho aplicamos o método *Cross-Sample Entropy* para quantificar a assincronia das séries temporais de retornos de *commodities*.

Sejam  $u = (u(1), u(2), \dots, u(N))$  e  $v = (v(1), v(2), \dots, v(N))$  duas séries temporais de tamanho  $N$ . Sejam  $m$  e  $r$  os parâmetros, onde  $m$  é o comprimento do vetor a ser comparado e  $r$  o nível de tolerância. A aplicação do método consiste nos seguintes passos:

1. Constrói-se uma sequência de vetores:

$$\begin{aligned} x_m(i) &= (u(i), u(i+1), \dots, u(i+m-1)), \quad 1 \leq i \leq N-m+1 \\ y_m(j) &= (v(j), v(j+1), \dots, v(j+m-1)), \quad 1 \leq j \leq N-m+1 \end{aligned} \quad (9)$$

a partir de  $u$  e  $v$  respectivamente.

2. Para cada  $i \leq N-m+1$ , calculamos:

$$B_i^m(r)(v||u) = \frac{\#\{1 \leq j \leq N-m, \text{ tal que, } d[x_m(i), y_m(j)] \leq r\}}{N-m}, \quad (10)$$

onde  $d[x_m(i), y_m(j)] = \max \left\{ |u(i+k) - v(j+k)| : 0 \leq k \leq m-1 \right\}$ , representa a diferença máxima entre seus respectivos escalares.

3. Define-se:

$$B^m(r)(v||u) = \frac{\sum_{i=1}^{N-m} B_i^m(r)(v||u)}{N-m} \quad (11)$$

que corresponde ao valor médio de  $B_i^m(r)(v||u)$ .

4. De forma análoga, definimos:

$$A_i^m(r)(v||u) = \frac{\#\{1 \leq j \leq N - m, \text{ tal que, } d[x_{m+1}(i), y_{m+1}(j)] \leq r\}}{N - m} \quad (12)$$

e

$$A^m(r)(v||u) = \frac{\sum_{i=1}^{N-m} A_i^m(r)(v||u)}{N - m} \quad (13)$$

que denota o valor médio de  $A_i^m(r)(v||u)$ .

5. Por fim, calculamos a estatística *Cross-Sample Entropy*:

$$Cross - SampEn(m, r, N) = -Ln \left\{ \frac{A^m(r)(v||u)}{B^m(r)(v||u)} \right\}. \quad (14)$$

Aplicamos o método *Cross-Sample Entropy* com parâmetros  $m = 2$  e  $r = 0, 2$ . A seleção dos parâmetros para  $m$  e  $r$  depende do intervalo de confiança da estatística *SampEn*, a qual é usada pela estatística *Cross - SampEn* (Richman & Moorman, 2000).

Uma boa estatística *SampEn* deve obedecer o seguinte critério (Lake et al., 2002):

$$r \geq \max(\sigma_{PC}/PC, \sigma_{PC}/-\log(PC)PC), \quad (15)$$

em que  $PC$  é a probabilidade condicional de que duas sequências sejam similares para  $m + 1$  pontos dado que são similares para  $m$  pontos.

Este critério é igual a condição:

$$IC(r, 95\%) = -\log(PC) \mp 1, 96(\sigma_{PC}/PC), \quad (16)$$

onde  $IC(Cross - SampEn, 95\%)$  significa um intervalo de confiança de 95% para a estatística *Cross - SampEn*, a qual assume-se ser normalmente distribuída. Utilizou-se esse método bem como a escolha dos parâmetros  $m = 2$  e  $r = 0, 2$ , a qual é adotada como aceitável. Tal escolha é similar a trabalhos anteriores (Liu, Qian & Lu, 2010; Richman & Moorman, 2000; Shi & Shang, 2012).

## 2.4 Teste de Correlação-Cruzada

Utilizamos o teste de correlações-cruzadas proposto por Podobnik et al. (2009). O objetivo deste teste é qualificar as correlações-cruzadas em existentes ou não existentes. O teste foi realizado para cada par entre as *commodities* analisadas. Este teste é análogo ao teste de Ljung & Box (1978), sendo amplamente usado para testar correlações-cruzadas (Yuan, Zhuang & Liu, 2012; Li & Lu, 2012; Cao, Xu & Cao, 2012).

A correlação-cruzada entre duas séries  $\{x(t)|t = 1, 2, \dots, N\}$  e  $\{y(t)|t = 1, 2, \dots, N\}$  é definida como

$$Q_{cc}(p) = N^2 \sum_{t=1}^p \frac{C^2(t)}{N - t}, \quad (17)$$

onde o coeficiente de correlação-cruzada  $C(t)$  é definido por

$$C(t) = \frac{\sum_{k=t+1}^N x(k)y(k-t)}{\sqrt{\sum_{k=1}^N x^2(k) \sum_{k=1}^N y^2(k)}}. \quad (18)$$

Podobnik et al. (2009) propuseram que a estatística de correlação-cruzada  $Q_{cc}(p)$  segue aproximadamente uma distribuição Qui-quadrado com  $p$  graus de liberdade, ou seja,  $Q_{cc}(p) \approx \chi^2(p)$ . Ela pode ser usada para testar a hipótese de nulidade ( $H_0$ ) de que nenhum dos  $p$  primeiros coeficientes de correlações-cruzadas é diferente de zero.

Estas são as hipóteses a serem testadas:

$$\begin{cases} H_0 : Q_{cc}(p) = 0 & (\exists \text{ correlação-cruzada entre as séries temporais } x(t) \text{ e } y(t)); \\ H_1 : Q_{cc}(p) \neq 0 & (\nexists \text{ correlação-cruzada entre as séries temporais } x(t) \text{ e } y(t)). \end{cases}$$

## 2.5 *Multifractal Detrended Fluctuation Analysis (MF-DFA)*

A Análise de Flutuação Sem Tendência (*Detrended Fluctuation Analysis-DFA*), proposta por Peng et al. (1994) é um método bastante utilizado para quantificar correlações em séries temporais monofractais não-estacionárias. Porém, muitas séries não exibem um simples comportamento monofractal, consequentemente, isso torna o DFA em um método impreciso na caracterização das correlações em séries temporais multifractais. Kantelhardt et al. (2002) generalizaram o método DFA, denominado de Análise Multifractal de Flutuação Sem Tendência (*Multifractal Detrended Fluctuation Analysis – MF-DFA*). Esta é uma poderosa ferramenta para investigar multifractalidade em séries temporais financeiras (Caraiani, 2012; Matia, Ashkenazy & Stanley, 2003; Zunino et al., 2008; Stošić et al., 2015).

O algoritmo do MF-DFA é dado por:

1. Inicialmente, a série temporal original  $\{x(t)|t = 1, \dots, N\}$  é integrada:

$$X(k) = \sum_{i=1}^k [x(i) - \langle x \rangle], \quad k = 1, \dots, N, \quad (19)$$

em que  $\langle x \rangle = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N x_i$  representa a média da série  $\{x(t)|t = 1, \dots, N\}$ .

2. A série integrada  $X(k)$  é dividida em  $N_n = \text{int}(N/n)$  segmentos não sobrepostos de tamanho  $n$ . Em cada segmento  $s = 1, \dots, N_n$ , a tendência local  $X_{n,s}(k)$  é estimada, através de ajuste linear ou polinomial, e subtraída da série  $X(k)$ .

### 3. A variância sem tendência

$$F^2(n, s) = \frac{1}{n} \sum_{k=(s-1)n+1}^{s \times n} [X(k) - X_{n,s}(k)]^2 \quad (20)$$

é calculada para cada segmento. Finalmente, o valor médio para todos os segmentos é usado para obter a função de flutuação de ordem  $q$ :

$$F_q(n) = \left\{ \frac{1}{N_n} \sum_{s=1}^{N_n} [F^2(n, s)]^{q/2} \right\}^{1/q}, \quad (21)$$

onde  $q$  pode assumir qualquer número real, exceto zero ( $q \neq 0$ ). Este cálculo se repete para diferentes tamanhos de segmentos  $n$ , fornecendo uma relação entre a função de flutuação  $F_q(n)$  e o tamanho do segmento  $n$ . Se a série original  $\{x(t)|t = 1, \dots, N\}$  possui correlações de longo alcance, a função de flutuação segue uma lei de potência:  $F_q(n) \sim n^{h(q)}$ . O expoente de escala  $h(q)$  pode ser obtido como o coeficiente angular (inclinação) da reta no gráfico log-log de  $F_q(n)$  versus  $n$ .

O valor de  $h(q)$  correspondente ao limite  $h(q)$  quando  $q \rightarrow 0$  não pode ser determinado diretamente usando a Equação 21 porque o expoente diverge. Assim, um procedimento de cálculo logarítmico da média deve ser utilizado:

$$F_0(n) = \left\{ \frac{1}{2N_n} \sum_{s=1}^{N_n} \ln [F^2(n, s)]^{1/2} \right\} \sim n^{h(0)}. \quad (22)$$

Para o caso de séries temporais estacionárias  $h(2)$  é igual ao expoente clássico de Hurst, assim  $h(q)$  é chamado de Expoente de Hurst Generalizado (EHG) (Kantelhardt et al., 2002). Para valores negativos de  $q$ ,  $h(q)$  descreve comportamento de segmentos com pequenas flutuações, por outro lado, para valores positivos de  $q$ ,  $h(q)$  descreve o comportamento de segmentos com grandes flutuações. Para séries temporais monofractais  $h(q)$  é independente de  $q$ , enquanto que para séries temporais multifractais  $h(q)$  é uma função decrescente de  $q$  (Kantelhardt et al., 2002). Expoentes generalizados  $h(q)$  estão relacionados com expoentes de Rényi  $\tau(q)$  que são definidos na análise multifractal clássica:

$$\tau(q) = qh(q) - 1. \quad (23)$$

No caso de séries temporais monofractais  $\tau(q)$  é uma função linear de  $q$ , enquanto para séries temporais multifractais  $\tau(q)$  é uma função não linear de  $q$  (Feder, 1988). Adicionalmente, um processo multifractal pode também ser caracterizado de acordo com o espectro de singularidade  $f(\alpha)$ , o qual está relacionado com o expoente de Rényi, via transformada de Legendre, de acordo com as expressões (Oswiecimka et al., 2005):

$$\alpha(q) = \frac{d\tau(q)}{dq} \quad (24)$$



$$f(\alpha) = q\alpha - \tau(q), \quad (25)$$

onde  $f(\alpha)$  denota a dimensão fractal do subconjunto da série temporal com valores caracterizados pelo expoente de Hölder  $\alpha$ . O espectro  $f(\alpha)$  de uma série temporal monofractal é caracterizada por um único ponto, enquanto para séries temporais multifractais  $f(\alpha)$  é uma função côncava para baixo que pode ser ajustada por um polinômio quadrático (Feder, 1988; Kantelhardt et al., 2002). A amplitude  $W = \alpha_{\max} - \alpha_{\min}$  pode se usada como medida do grau de multifractalidade da série temporal (Kantelhardt et al., 2002). O ajuste polinomial

$$f(\alpha) = A + B(\alpha - \alpha_0) + C(\alpha - \alpha_0)^2 + D(\alpha - \alpha_0)^3 + E(\alpha - \alpha_0)^4 \quad (26)$$

pode ser usado para calcular os parâmetros do espectro multifractal: posição do máximo  $\alpha_0$ ; largura do espectro  $W = \alpha_{\max} - \alpha_{\min}$ ; parâmetro de assimetria  $r = (\alpha_{\max} - \alpha_0)/(\alpha_0 - \alpha_{\min})$ , onde  $r = 1$  para formas simétricas,  $r > 1$  para assimetria à direita e  $r < 1$  para assimetria à esquerda (Figueirêdo et al., 2014).

Pequenos valores de  $\alpha_0$  sugerem que o processo é mais regular, aparentemente. A largura do espectro mede o grau de multifractalidade da série: quanto maior é a largura do espectro mais forte é a multifractalidade e mais rica é a estrutura da série.

O parâmetro  $r$  determina quais expoentes fractais são dominantes: expoentes fractais que descrevem invariância de escalas de pequenas flutuações são caracterizados por assimetria à direita ( $r > 1$ ), enquanto que expoentes fractais caracterizados por invariância de escalas de grandes flutuações apresentam assimetria à esquerda ( $r < 1$ ). Estes parâmetros podem ser usados para medir a complexidade das séries: um sinal com grande valor de  $\alpha_0$ , uma grande amplitude  $W$  do espectro multifractal e assimétrico à direita ( $r > 1$ ) pode ser considerado mais complexo que um sinal com características opostas (Shimizu, Thurner & Ehrenberger, 2002; Figueirêdo et al., 2014).

De acordo com Kantelhardt et al. (2002), há dois tipos de multifractalidade que podem ocorrer em séries temporais:

1. Multifractalidade causada pela função densidade de probabilidade dos valores da série;
2. Multifractalidade causada pelas diferentes correlações em subconjuntos com pequenas e grandes flutuações.

Para determinar qual tipo de multifractalidade está presente na série original, deve-se aplicar o método MF-DFA na série randomizada. Caso a multifractalidade seja do tipo (1), a randomização não afeta a função densidade de probabilidade dos valores da série temporal, resultando na permanência da função original  $h(q)$  e da largura do espectro  $f(\alpha)$ . Para a multifractalidade do tipo (2), a randomização da série temporal destrói as correlações de longo alcance resultando em  $h(q) = 0.5$  e perda de multifractalidade (o espectro  $f(\alpha)$  se reduz a um ponto). Se ambos os tipos de multifractalidade estão presentes, a série temporal randomizada apresenta uma multifractalidade mais fraca que a série original (Kantelhardt et al., 2002).

### 3 Resultados e discussão

A Figura 1 descreve o preço de fechamento das *commodities* (2006-2014). A linha vertical (em cinza) indica a divisão dos períodos pré-crise (2006-2009) e pós-crise (2010-2014) financeira mundial.

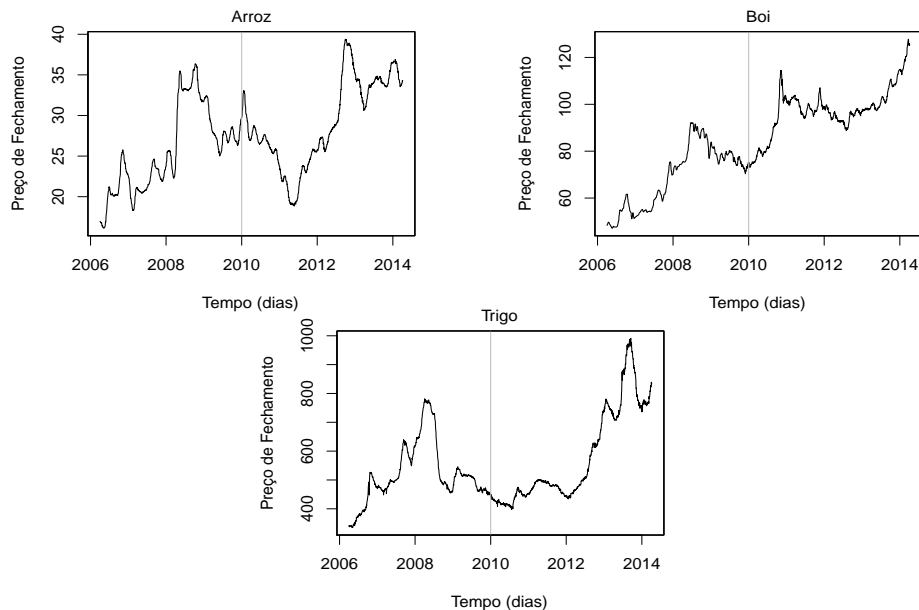


Figura 1 - Séries temporais dos preços de fechamento diário das *commodities*: Arroz, Boi e Trigo.

De acordo com a Figura 1, todas as *commodities* apresentam comportamento semelhante: tendência crescente nos preços até 2008, seguida pela tendência decrescente a partir de 2008 que representa o ápice da crise. Os preços começaram a aumentar novamente em 2010 para a *commodity* Boi e em 2011 para Arroz e Trigo.

A Figura 2 descreve o gráfico log-log entre a estatística do teste  $Q_{cc}(p)$  e os graus de liberdade  $p$  no período 2006-2014 ( $N = 1960$  dias), em que  $p = 1, \dots, 1000$ . A variação dos graus de liberdade é limitada pelo tamanho da série, ou seja,  $p \leq N$ . Para uma melhor comparação, apresentam-se também os valores críticos para a distribuição Qui-quadrado (pontos em vermelho) ao nível de significância de 5%.

Observamos na Figura 2 que para uma ampla variedade dos valores de  $p$ , todas as estatísticas do teste pertencem a região de rejeição de  $H_0$ , ou seja,  $Q_{cc}(p) > \chi_{0,95}^2(p)$ . Portanto, pode-se rejeitar a hipótese de nulidade ( $H_0$ ) de que não existe correlação-cruzada entre as séries temporais do preço de fechamento das *commodities* analisadas.

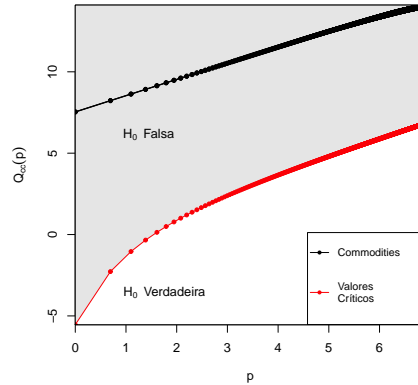


Figura 2 - Gráfico log-log da estatística do teste  $Q_{cc}(p)$  versus os graus de liberdade  $p$  para o período 2006-2014 ( $N = 1960$  dias), em que  $p = 1, \dots, 1000$ .

As Tabelas 1 e 2 mostram a estatística *Cross-SampEn*, nos períodos (2006-2009) e (2010-2014), como medida de assincronia e correlação cruzada entre as séries temporais das *commodities* Arroz, Boi e Trigo, respectivamente. Os valores em negrito referem-se a estatística *SampEn*.

Tabela 1 - Cross-Sample Entropy entre os retornos das séries temporais das *commodities* analisadas (2006-2009)

Cross-SampEn	Arroz	Boi	Trigo
Arroz	<b>1,2960</b>	1,2647	1,4818
Boi	1,2647	<b>0,9532</b>	1,3736
Trigo	1,4818	1,3736	<b>1,4550</b>

Tabela 2 - Cross-Sample Entropy entre os retornos das séries temporais das *commodities* analisadas (2010-2014)

Cross-SampEn	Arroz	Boi	Trigo
Arroz	<b>1,5240</b>	1,6905	1,7390
Boi	1,6905	<b>1,5880</b>	1,7483
Trigo	1,7390	1,7483	<b>1,5750</b>

Os menores valores da estatística *Cross-SampEn* ocorrem entre as *commodities* Arroz e Boi para os dois conjuntos de dados considerados:  $Cross - SampEn_A(ARR, BOI) = 1,2647$  e  $Cross - SampEn_B(ARR, BOI) = 1,6905$ . Ou

seja, houve maior sincronia e correlação-cruzada entre as *commodities* Arroz e Boi para ambos os períodos.

Por outro lado, observamos o valor máximo da estatística *Cross-SampEn* entre retornos de Arroz e Trigo, no conjunto de dados A ( $Cross - SampEn_A(ARR, TRG) = 1,4818$ ). Enquanto que no conjunto de dados B, os retornos de Boi e Trigo apresentam maior *Cross-SampEn* ( $Cross - SampEn_B(BOI, TRG) = 1,7483$ ). Isso indica uma maior assincronia e menor correlação-cruzada entre os pares de *commodities* Arroz-Trigo e Boi-Trigo, para os períodos pré e pós-crise, respectivamente.

Notamos que os valores da estatística *Cross-SampEn* são maiores no período pós-crise (2010-2014) para todos os pares de *commodities* analisados. Isto implica dizer que no período pré-crise os pares de *commodities* apresentavam comportamento mais sincronizado e com maior correlação-cruzada. Após a crise, esse processo foi alterado, mostrando que houve maior assincronia e menor correlação-cruzada entre os pares de *commodities*.

Podemos observar o mesmo comportamento para a estatística *SampEn*, onde os maiores valores ocorrem no período pós-crise (2010-2014). Essa característica indica que as séries individuais apresentam comportamento mais regular no período pré-crise (2006-2009). No período após a crise (2010-2014), os valores da estatística *SampEn* aumentam, indicando maior complexidade e menor regularidade da séries individuais.

A Figura 3 exibe a estatística *SampEn* da *commodity* Arroz, para janela móvel de tempo de 240 dias (aproximadamente 1 ano) com passo de um dia entre cada janela entre 2006-2014.

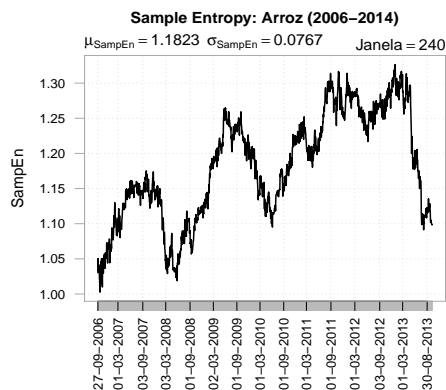


Figura 3 - Estatística *SampEn* em janela móvel de tempo (tamanho 240 dias), com passo de um dia entre cada janela, totalizando 1721 janelas de tamanho 240 para a *commodity* Arroz no período 2006-2014.

Para a *commodity* Arroz, observamos um aumento da complexidade entre 2006 e 2007. Entre final de 2007 e início de 2008, a série apresenta comportamento mais

regular como indica a queda da estatística *SampEn*. À medida que avançamos para o ápice da crise, em setembro de 2008, a série se torna mais complexa, atingindo valor máximo em 2009. Após isso, mais uma queda ocorre até o ano seguinte. Em seguida, aproximadamente, a partir de junho de 2010 até início 2013 há uma tendência crescente da estatística *SampEn*. Logo após, a estatística segue em queda, sugerindo maior regularidade e menos complexidade.

A estatística *SampEn* da *commodity* Boi é descrita na Figura 4, para janela móvel de tempo de 240 dias (aproximadamente 1 ano) com passo de um dia entre cada janela entre 2006-2014.

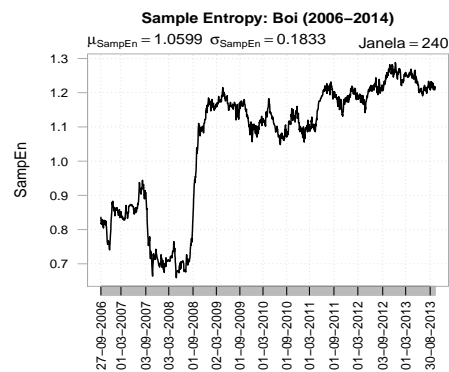


Figura 4 - Estatística *SampEn* em janela móvel de tempo (tamanho 240 dias), com passo de um dia entre cada janela, totalizando 1721 janelas de tamanho 240 para a *commodity* Boi no período 2006-2014.

Até meados de 2007, observa-se uma maior complexidade da série, para a *commodity* Boi. Após isso, com o início da crise, há uma forte queda da estatística *SampEn*, e no começo de setembro de 2008 (quando a crise se tornou global) há um forte aumento da complexidade com ápice em março de 2009. Após isso, observa-se que a estatística *SampEn* apresenta uma média em torno de 1,2.

Para a *commodity* Trigo, a Figura 5 apresenta a estatística *SampEn*, para janela móvel de tempo de 240 dias (aproximadamente 1 ano) com passo de um dia entre cada janela entre 2006-2014.

Observa-se da Figura 5 que os valores de *SampEn* para *commodity* Trigo também diminuem em 2008, indicando menor complexidade e maior regularidade da série de retornos. Após 2008 há um aumento da estatística *SampEn* seguida de uma forte queda em 2010, que poderia refletir o fato de neste ano, apesar do Brasil ser um grande importador de trigo, cerca de 1,5 milhão de toneladas de trigo foram exportadas por não atenderem às exigências da indústria (por causa dos níveis de umidade elevados na época da colheita, o que afeta negativamente a qualidade do produto) (Júnior, Sidonio & Moraes, 2011).

A Tabela 3 exhibe as estatísticas descritivas da estatística *SampEn* para 1721 janelas móveis de 240 dias para cada *commodity* entre 2006-2014.

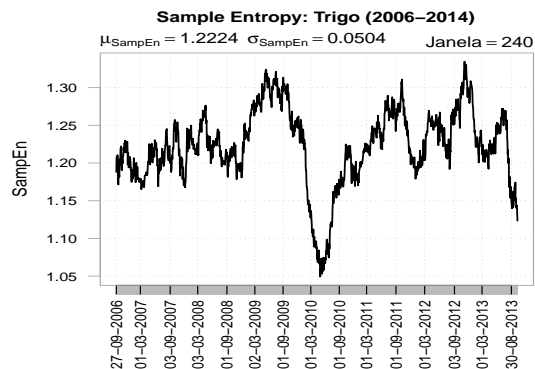


Figura 5 - Estatística *SampEn* em janela móvel de tempo (tamanho 240 dias), com passo de um dia entre cada janela, totalizando 1721 janelas de tamanho 240 para a *commodity* Trigo no período 2006-2014.

Tabela 3 - Estatísticas descritivas da estatística *SampEn* para 1721 janelas móveis de tempo de 240 dias (2006-2014)

	Arroz	Boi	Trigo
Média	1,18	1,06	1,22
Mediana	1,18	1,13	1,22
Máximo	1,33	1,29	1,33
Mínimo	1,00	0,66	1,05
Desv. Padrão	0,08	0,18	0,05

Observa-se da Tabela 3 que os valores da média, máximo e mínimo para *commodity* Boi são menores que Arroz e Trigo, devido ao fato que para aquela *commodity* os valores de *SampEn* em janela móvel, no período antes da crise, foram significativamente menores.

A Figura 6 apresenta o Expoente de Rényi  $\tau(q)$  para as *commodities* analisadas. Podemos observar que o expoente de Rényi exibe comportamento não linear. Este comportamento é típico de processos multifractais. Ou seja, as séries estudadas apresentam comportamento multifractal.

Para verificar se a multifractalidade é causada pela função densidade de probabilidade dos valores da série ou pelas correlações diferentes em subconjuntos com grandes e pequenas flutuações, o método MF-DFA é aplicado nas séries temporais randomizadas. Para uma série de tamanho  $n$ , uma randomização consiste no embaralhamento de  $10000 \times n$  pares de valores escolhidos aleatoriamente, no qual o espectro  $f(\alpha)$  é recalculado. Repetimos esse processo 100 vezes para avaliar o espectro randomizado médio e o desvio-padrão, para cada uma das três séries

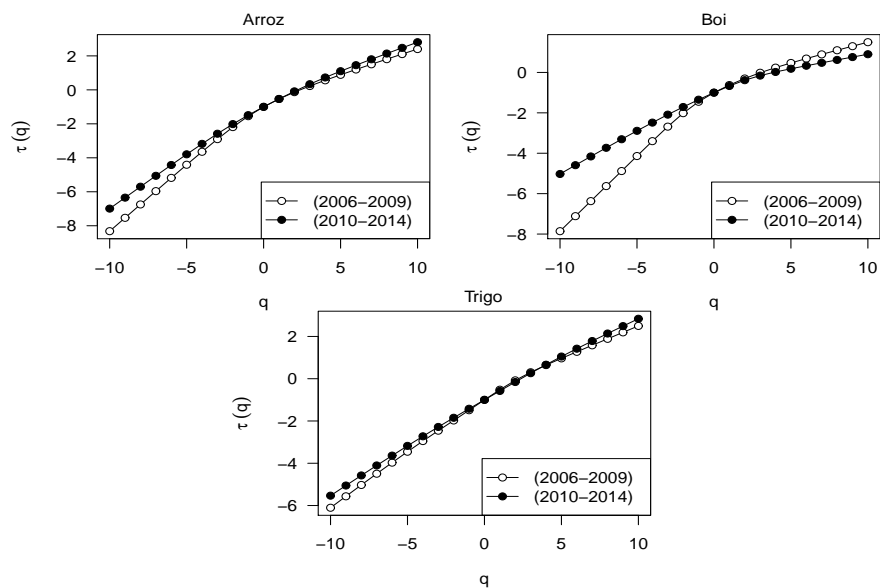


Figura 6 - Expoente de Rényi  $\tau(q)$  para as *commodities* analisadas.

dos retornos das *commodities*. A largura do espectro multifractal denotada por  $W = \alpha_{\max} - \alpha_{\min}$ , é o melhor indicador do grau de multifractalidade de um processo estocástico. Maiores valores de  $W$  indicam maior multifractalidade.

As Tabelas 4 e 5 apresentam os parâmetros multifractais (obtidos com ajuste polinomial (Figueirêdo et al., 2014)) para as séries temporais originais e randomizadas para todas as *commodities*, para os períodos antes (2006-2009) e após (2010-2014) a crise financeira mundial.

Tabela 4 - Comportamento dos parâmetros multifractais (2006-2009).

<i>Commodities</i>	2006-2009					
	Original			Aleatória		
	$W$	$r$	$\alpha_0$	$W$	$r$	$\alpha_0$
ARR	0,7512	1,9701	0,6890	0,8594	1,6892	0,6069
BOI	0,7219	1,2614	0,7373	0,9326	1,1398	0,6186
TRG	1,0137	1,9265	0,5912	0,9990	0,6179	0,6703

A Figura 7 ilustra o espectro multifractal  $f(\alpha)$  dos retornos das *commodities* Arroz, Boi e Trigo para as séries original e randomizada, nos períodos 2006-2009 e 2010-2014.

Tabela 5 - Comportamento dos parâmetros multifractais (2010-2014).

Commodities	2010-2014					
	Original			Aleatória		
	$W$	$r$	$\alpha_0$	$W$	$r$	$\alpha_0$
ARR	0,6411	1,2614	0,9396	0,9574	1,5513	0,6235
BOI	0,5550	0,9900	0,7800	0,7399	1,4568	0,5827
TRG	0,4975	1,0101	0,7043	0,8005	1,0306	0,5971

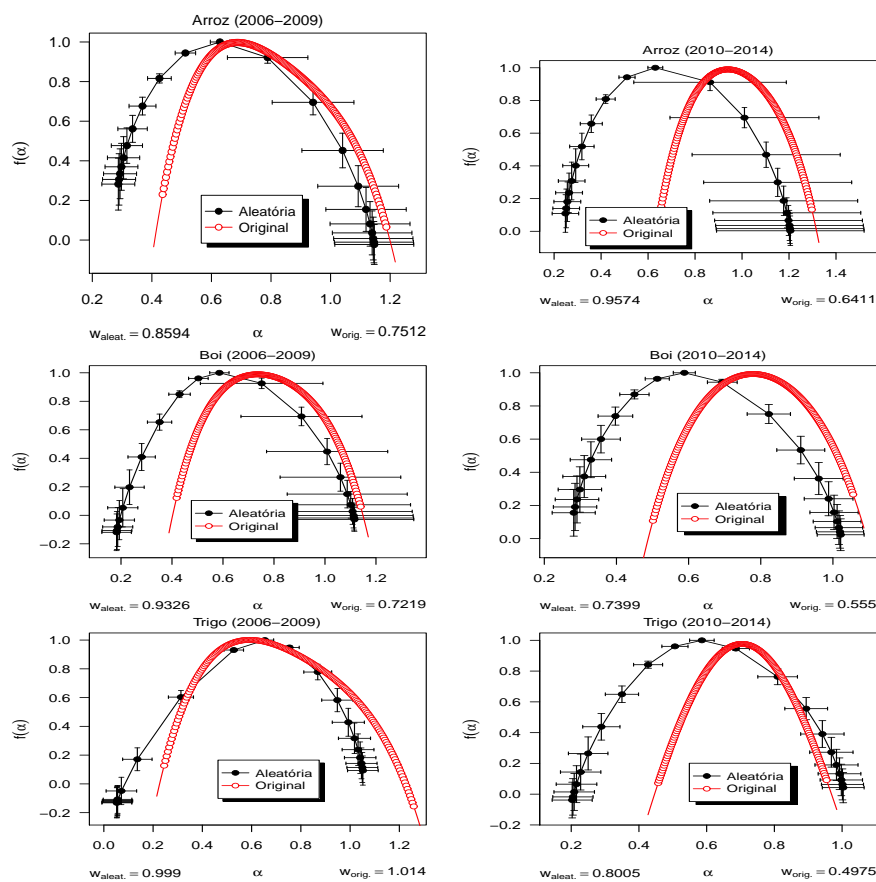


Figura 7 - Espectro multifractal  $f(\alpha)$  dos retornos das *commodities* Arroz, Boi e Trigo, para as séries original e randomizada, nos períodos 2006-2009 e 2010-2014.



De acordo com a Figura 7 e as Tabelas 4 e 5, observamos as seguintes propriedades multifractais:

- (i) A largura do espectro multifractal  $f(\alpha)$  aumenta, depois da randomização, para as *commodities* Arroz e Boi no período antes da crise e para todas *commodities* no período depois da crise. Isto indica que além da função densidade de probabilidade dos valores, as correlações de curto alcance também contribuem para a multifractalidade destas séries (Barunik et al., 2012). Para a *commodity* Trigo, no período antes da crise, não houve alteração na largura do espectro depois da randomização da série, indicando que a multifractalidade é causada pela função densidade de probabilidade dos valores;
- (ii) O valor de posição do máximo, em que  $\alpha_0 > 0,5$ , indica que as séries de retornos possuem persistência mais forte para o período pós-crise, característica de um mercado menos eficiente;
- (iii) A largura do espectro multifractal diminui no período pós-crise, indicando uma multifractalidade mais fraca;
- (iv) Os valores do parâmetro de assimetria ( $r > 1$ ), para o período antes da crise, indicam que subconjuntos com pequenas flutuações contribuem mais na multifractalidade das séries de retornos. Para o período pós-crise, ambas pequenas e grandes flutuações contribuem igualmente na multifractalidade ( $r \sim 1$ ) para as *commodities* Boi e Trigo, enquanto para a *commodity* Arroz, não houve alteração na assimetria do espectro.

## Conclusões

A estatística *Cross-SampEn* é maior no período pós-crise (2010-2014) para todos os pares de *commodities* analisados. Isso significa que no período pré-crise (2006-2009) houve maior sincronia e correlação-cruzada mais forte entre as *commodities*. Após a crise, houve maior assincronia e conseqüentemente correlação-cruzada mais fraca. Isso indica que a crise financeira internacional afetou o comportamento das *commodities* analisadas.

Para a estatística *SampEn*, os maiores valores ocorrem no período pós-crise (2010-2014). Esse característica indica que as séries individuais apresentam comportamento mais regular no período pré-crise (2006-2009). Após a crise, os valores da estatística *SampEn* aumentam, indicando maior complexidade e menor regularidade da séries individuais. O método *Sample Entropy* aplicado em janelas móveis pode ser uma ferramenta bastante útil para detectar a dinâmica comportamental dos preços nos mercados internacionais.

Observamos que a largura do espectro multifractal das séries originais é maior no período pré-crise. Isso indica maior multifractalidade e séries com estrutura mais rica.

Com base nos resultados obtidos, concluímos que a análise da multifractalidade e da complexidade podem ser úteis nos estudos da dinâmica do agronegócio brasileiro, dada a sua importância, diante do cenário econômico mundial, seja para adoção de políticas monetária e fiscal por meio dos órgãos responsáveis, agentes econômicos ou pelo governo federal.

## Agradecimentos

Agradecemos à Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (Capes) pelo apoio financeiro.

JALE, J. S.; STOŠIĆ, B.; STOŠIĆ, T. Multifractality and complexity of the Brazilian agribusiness commodities. *Rev. Bras. Biom.*, Lavras, v.24, n.2, p.258-278, 2016.

- **ABSTRACT:** *In this paper we investigate the time series behavior on daily closing prices of some commodities of Brazilian agribusiness. We analyze the behavior of multifractality and complexity of the series recorded between 2006 and 2014. We use the Sample Entropy and Cross-Sample Entropy methods to analyze the complexity and propose the Sample Entropy method in a moving time window to assess the dynamics of the complexity of these series. We also investigate the multifractality using the Multifractal Detrended Fluctuation Analysis (MF-DFA) method. We conclude that both analyzes can be useful in assessing the dynamics of Brazilian agribusiness on the world economic scenario.*
- **KEYWORDS:** *Commodities; sample entropy; cross-sample entropy; MF-DFA; cross-correlation; rolling window.*

## Referências

- ABE, M. M. *A Crise de 2008 e Seu Impacto em Países Economicamente Dependentes de Commodities*. Dissertação (Mestrado em Economia) — Fundação Getúlio Vargas - Escola de Economia de São Paulo, São Paulo, 2011.
- BAI, D.; QIU, T.; LI, X. The sample entropy and its application in EEG based epilepsy detection. *PubMed*, v.24, n.1, 2007.
- BARUNIK, J.; ASTE, T.; MATTEO, T. D.; LIU, R. Understanding the source of multifractality in financial markets. *Physica A*, v.391, n.17, p.4234–4251, 2012.
- BORGES, M.; GUIMARÃES, A. P.; BELLINI, R.; REPEZZA A. P. LÉLIS, M. T. C. As exportações brasileiras e os ciclos de commodities: tendências recentes e perspectivas. *Bol. Conj. e Estrat.*, n.1, p.14–29, 2011.

CAO, G.; XU, L.; CAO, J. Multifractal detrended cross-correlations between the Chinese exchange market and stock market. *Physica A*, v.391, n.20, p.4855–4866, 2012.

CARAIANI, P. Evidence of multifractality from emerging European stock markets. *PLoS ONE*, v.7, n.7, p.e40693, 2012.

CARNEIRO, R. O Brasil em face da crise. *Interesse Nacional*, v.2, n.5, p.20–30, 2009.

CEPEA. *Centro de Estudos Avançados em Economia Aplicada - ESALQ/USP*. 2015. Disponível em: <http://cepea.esalq.usp.br/>. Acesso em: 10 fev.

CHOU, C.-M. Complexity analysis of rainfall and runoff time series based on sample entropy in different temporal scales. *Stochastic Environmental Research and Risk Assessment*, v.28, p.1401–1408, 2014.

EICHENGREEN, B.; ALMUNIA, M.; BÉNÉTRIX, A.; O'ROURKE, K.; RUA, G. From great depression to great credit crisis: similarities, differences and lessons. *Econ. Policy*, v.25, p.219–265, 2010.

FEDER, J. *Fractals*. New York: Plenum Press, 1988. 284p.

FERNADES, D.; PEDRO, J. G. A crise do subprime e os efeitos na balança comercial do agronegócio brasileiro. Uma análise da 10<sup>a</sup> região administrativa de Presidente Prudente-SP. *Colloquium Humanarum*, v.8, n.Especial, p.203–212, 2011.

FIGUEIRÊDO, B. C. L.; MOREIRA, G. R.; STOŠIĆ, B.; STOŠIĆ, T. Multifractal analysis of hourly wind speed records in Petrolina, Northeast Brazil. *Rev. Bras. Biom.*, v.32, n.4, p.599–608, 2014.

FREITAS, M. C. P. Os efeitos da crise global no Brasil: aversão ao risco e preferência pela liquidez no mercado de crédito. *Estudos Avançados*, v.23, n.66, p.125–145, 2009.

GALLE, J. M.; CAVALI, R.; SANTOS, E. O. Crise norte-americana: um modelo explicativo de sua causa. *Rev. Mult. Unesp*, n.7, p.170–175, Junho 2009.

HERNÁNDEZ-PÉREZ, R.; GUZMÁN-VARGAS, L.; RAMÍREZ-ROJAS, A.; ANGULO-BROWN, F. Pattern synchrony in electrical signals related to earthquake activity. *Physica A*, v.389, p.1239–1252, 2010.

JÚNIOR, C.; SIDONIO, L.; MORAES, V. Panorama das importações de trigo no Brasil. *Biblioteca Digital do BNDES*, v.34, p.389–420, 2011.

KANTELHARDT, J. W.; ZSCHIEGNER, S. A.; KOSCIELNY-BUNDE; HAVLIN, E.; BUNDE, S.; STANLEY, H. E. A. Multifractal detrended fluctuation analysis of nonstationary time series. *Physica A*, v.316, p.87–114, 2002.

- LAKE, D. E.; RICHMAN, J. S.; GRIFFIN, M. P.; MOORMAN, J. R. Sample entropy analysis of neonatal heart rate variability. *Am. J. Physiol.*, v.283, n.3, 2002.
- LI, Z.; LU, X. Cross-correlations between agricultural commodity futures markets in the US and China. *Physica A*, v.391, n.15, p.3930–3941, 2012.
- LIU, C.; ZHENG, D.; LI, P.; ZHAO, L.; LIU, C.; MURRAY, A. Is cross-sample entropy a valid measure of synchronization between sequences of RR interval and pulse transit time? *IEEE*, p.939–942, 2013.
- LIU, L.-Z.; QIAN, X.-Y.; LU, H.-Y. Cross-sample entropy of foreign exchange time series. *Physica A*, v.389, n.21, p.4785–4792, 2010.
- LJUNG, G. M.; BOX, G. E. P. On a measure of lack of fit in time series models. *Biometrika*, v.65, n.2, p.297–303, 1978.
- MAPA. *Ministério da Agricultura, Pecuária e Abastecimento. Estudos do Comércio Exterior*. 2015. Disponível em: <http://www.agricultura.gov.br/>. Acesso em: 11 fev.
- MATIA, K.; ASHKENAZY, Y.; STANLEY, H. Multifractal properties of price fluctuations of stocks and commodities. *European Physics Letters*, v.61, n.3, p.422–428, 2003.
- MIN, L.; GUANG, M.; SARKAR, N. Complexity analysis of 2010 Baja California earthquake based on entropy measurements. *Vulnerability, Uncertainty, and Risk*, p.1815–1822, 2014.
- OSWIECIMKA, P.; KWAPIEN, J.; DROZDZ, S.; RAK, R. Investigating multifractality of stock market fluctuations using wavelet and detrending fluctuation methods. *Acta Phys. Pol. B*, 2005.
- PENG, C.-K.; BULDYREV, S. V.; HAVLIN, S.; SIMONS, M.; STANLEY, H. E.; GOLDBERGER, A. L. Mozaic organization of DNA nucleotides. *Phys. Rev. E*, n.49, p.1685–1689, 1994.
- PINCUS, S. M. Approximate entropy as a measure of system complexity. *Proceedings of the National Academy of Sciences*, v.88, n.6, p.2297–2301, 1991.
- PINCUS, S. M.; SINGER, B. H. Randomness and degrees of irregularity. *Proc. Natl. Acad. Sci. USA*, v.93, n.5, p.2083–2088, 1996.
- PODOBNIK, B.; GROSSE, I.; HORVATIĆ, D.; ILIC, S.; IVANOV, P. C.; STANLEY, H. E. Quantifying cross-correlations using local and global detrending approaches. *EPJ B*, v.71, p.243–250, 2009.
- RICHMAN, J. S.; MOORMAN, J. R. Physiological time-series analysis using approximate entropy and sample entropy. *Am. J. Physiol. Heart. Circ. Physiol.*, v.278, p.2039–2049, 2000.

- SHI, W.; SHANG, P. Cross-sample entropy statistic as a measure of synchronism and cross-correlation of stock markets. *Nonlinear Dynam.*, v.71, n.3, p.539–554, 2012.
- SHIMIZU, Y.; THURNER, S.; EHRENBERGER, K. Multifractal spectra as a measure of complexity in human posture. *Fractals*, v.10, n.1, 2002.
- SHUANGCHENG, L.; QIAOFU, Z.; SHAOLONG, W.; ERFU, D. Measurement of climate complexity using sample entropy. *Int. J. Climatol.*, v.26, p.2131–2139, 2006.
- STOŠIĆ, D.; STOŠIĆ, D.; STOŠIĆ, T.; STANLEY, H. Multifractal analysis of managed and independent float exchange rates. *Physica A*, v.428, n.15, p.13–18, 2015.
- TREMEA, N. J. C. As exportações e o produto interno bruto do Brasil no período de 2000 a 2009. *Rev. ADMpg Gest. Estrat.*, v.4, n.1, p.1–9, 2011.
- VIZI, B. Depois da crise - desafios faz uma retrospectiva, revendo os impactos, os canais de transmissão, e as consequências da turbulência que modificou, e ainda modifica a economia global. *Des. Desenv.*, v.8, n.1, p.11–27, 2011.
- YUAN, Y.; ZHUANG, X.-T.; LIU, Z.-Y. Price-volume multifractal analysis and its application in Chinese stock markets. *Physica A*, v.391, n.12, p.3484–3495, 2012.
- ZUNINO, L.; TABAK, B.; FIGLIOLA, A.; PEREZ, D.; GARAVAGLIA, M.; ROSSO, O. A multifractal approach for stock market inefficiency. *Physica A*, v.387, n.26, p.6558–6566, 2008.

Recebido em 13.07.2015.

Aprovado após revisão em 01.02.2016.