


**DEFINIÇÃO DO TAMANHO AMOSTRAL
USANDO SIMULAÇÃO MONTE CARLO PARA
OS TESTES DE NORMALIDADE UNIVARIADO
E MULTIVARIADO BASEADOS EM
ASSIMETRIA E CURTOSE**

ANDRÉA CRISTIANE DOS SANTOS

2001

ANDRÉA CRISTIANE DOS SANTOS

**DEFINIÇÃO DO TAMANHO AMOSTRAL USANDO SIMULAÇÃO
MONTE CARLO PARA OS TESTES DE NORMALIDADE
UNIVARIADO E MULTIVARIADO BASEADOS EM ASSIMETRIA E
CURTOSE**



Dissertação apresentada à Universidade Federal de Lavras, como parte das exigências do Programa de Pós-graduação em Agronomia, área de concentração em Estatística e Experimentação Agropecuária, para a obtenção do título de "Mestre".

Orientador

Prof. Daniel Furtado Ferreira

**LAVRAS
MINAS GERAIS - BRASIL**

2001

**Ficha Catalográfica Preparada pela Divisão de Processos Técnicos da
Biblioteca Central da UFLA**

Santos, Andréa Cristiane dos

Definição do tamanho amostral usando simulação Monte Carlos para os testes de normalidade univariado e multivariado baseados em assimetria e curtose / Andréa Cristiane dos Santos. -- Lavras : UFLA, 2001.

71 p. : il.

Orientador: Daniel Furtado Ferreira.

Dissertação (Mestrado) – UFLA.

Bibliografia.

1. Curtose. 2. Assimetria. 3. Taxa de erro tipo I. 4. Poder do teste. 5. Teste de normalidade univariado. 6. Teste de normalidade multivariado. I. Universidade Federal de Lavras. II. Título.

CDD-519.282
-630.219

ANDRÉA CRISTIANE DOS SANTOS

**DEFINIÇÃO DO TAMANHO AMOSTRAL USANDO SIMULAÇÃO
MONTE CARLO PARA OS TESTES DE NORMALIDADE
UNIVARIADO E MULTIVARIADO BASEADOS EM ASSIMETRIA E
CURTOSE**

Dissertação apresentada à Universidade Federal de Lavras, como parte das exigências do Programa de Pós-graduação em Agronomia, área de concentração em Estatística e Experimentação Agropecuária, para a obtenção do título de "Mestre".

APROVADA em 09 de Fevereiro de 2001

Prof. Dr. Marcelo Tavares	UFU
Prof. Dr. Marcelo Silva de Oliveira	DEX - UFLA
Prof. Dr. Mário Javier Ferrua Vivanco	DEX - UFLA


Prof. Daniel Furtado Ferreira

DEX – UFLA
(Orientador)

**LAVRAS
MINAS GERAIS – BRASIL**

A Deus por ter dado a mim a oportunidade e todos os meios para a realização deste trabalho;

À minha mãe, Maria, pelo amor, apoio e incentivo constante,

DEDICO.

Aos meus avós, Leontina e Lázaro, pelas preciosas orações,

OFEREÇO.

AGRADECIMENTOS

À Universidade Federal de Lavras e ao Departamento de Ciências Exatas, pela oportunidade de realizar este curso.

À CAPES pela concessão da bolsa de estudos.

Ao Prof. Dr. Daniel Furtado Ferreira, pela orientação, incentivo, compreensão e amizade.

Aos professores, Augusto, Delly, Joel, Júlio, Luiz Henrique, Lucas, Mário, Marcelo, Thelma, pelos ensinamentos.

Aos funcionários do Departamento de Ciências Exatas da UFLA, pela prestabilidade.

Aos meus colegas de curso, Adriano, Alex, Everton, Moisés, Nagib, Teixeira, Iara, Cristiane, Ana Rita e Aladir pelo companheirismo e amizade.

A Mônica, Andréa e Ivani pela força que me deram.

Aos amigos, Paulo, Jorge, Breno, Léo, João Luiz, Marcelo, Rubia e Cintia, que foram companheiros em todos os momentos.

Aos meus amigos, Alexandre, Alesandra, Edileuza, Rosângela, Viviane e Sara, que mesmo à distância estiveram presentes.

A Cilinha por ter me recebido em sua casa com carinho.

A Hedwiges e Débora, minhas irmãs na fé e amigas.

Aos meus tios, tias, primos e primas que sempre torceram por mim.

Ao Pastor Laurindo e a Nilza, e a toda a comunidade evangélica, que me ajudaram com suas orações.

Enfim, a todos que contribuíram para a realização deste trabalho.

SUMÁRIO

RESUMO	i
ABSTRACT	iii
1 INTRODUÇÃO	1
2 REFERENCIAL TEÓRICO	3
2.1 Testes para avaliar a normalidade dos dados	3
2.2 Definição de momentos	9
2.3 Coeficiente paramétrico de assimetria e curtose para as distribuições univariadas	12
2.4 Erros Tipo I e II e Poder do teste	14
2.5 Testes de normalidade baseados nos coeficientes de assimetria e curtose	17
2.5.1 Caso univariado	18
2.5.2 Caso multivariado	19
2.6 Simulação e método de Monte Carlo	21
3 METODOLOGIA	24
3.1 Simulação de dados univariados	25
3.2 Simulação de dados multivariados	25
3.3 Aplicação dos testes	27
3.4 Avaliação das taxas de erro Tipo I	28
3.5 Avaliação do poder do teste	29
3.6 Avaliação dos quantis	29
4 RESULTADOS E DISCUSSÃO	30
4.1 Caso univariado	30
4.1.1 Quantis dos dados univariados	44
4.2 Caso multivariado	46
4.2.1 Quantis dos dados multivariados	58
5 CONCLUSÕES	62
REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS	63
ANEXOS	66

RESUMO

SANTOS, Andréa Cristiane. Definição do tamanho amostral usando simulação Monte Carlo para os testes de normalidade univariado e multivariado baseados em assimetria e curtose. LAVRAS: UFLA-DEX, 2001. 71p. (Dissertação -Mestrado)*

Uma forma alternativa para verificar suposição de normalidade dos dados refere-se à aplicação dos testes baseados nos coeficientes de assimetria e curtose. O objetivo deste trabalho foi determinar um tamanho amostral ótimo para as estatísticas univariadas (Z_1 e Z_2) e multivariadas (K_1 e K_2) com base em simulação. As estatísticas Z_1 e K_1 verificam a alternativa de simetria e Z_2 e K_2 verificam a alternativa de curtose. Foram geradas diferentes funções densidade de probabilidade, univariadas e multivariadas, via método de Monte Carlo, com a finalidade de avaliar a taxa de erro tipo I e o poder do teste. As simulações foram feitas adotando os níveis nominais de 5% e 1%. No caso de distribuições multivariadas, foram avaliadas as situações com $p=2, 3$ e 5 variáveis, com diferentes estruturas de correlação. O critério de avaliação no caso univariado foi o da comparação das taxas obtidas com o valor das taxas de poder empírico obtidas pelo teste de Shapiro e Wilk (1965). Considerando o caso univariado, verificou-se que a estatística Z_1 possui aproximação assintótica normal para $n \geq 25$ com $\alpha=5\%$ e pode ser recomendada para uso rotineiro no caso univariado; a estatística Z_2 possui aproximação assintótica normal para $n \geq 25$ com $\alpha=5\%$ e pode ser recomendada para uso rotineiro no caso univariado para o teste de desvio de curtose; as estatísticas K_1 e K_2 possuem aproximações assintóticas melhores que Z_1 e Z_2 para um menor valor do valor nominal de significância, sendo recomendadas para $n \geq 25$ e $n \geq 100$, respectivamente, garantindo-se o compromisso com o controle da taxa de erro tipo I e um elevado poder. No caso de distribuições com simetria próxima de zero e não normais, as

* Comitê Orientador: Daniel Furtado Ferreira - UFLA (Orientador).

estatísticas baseadas em desvios de assimetria apresentam maior poder do que a estatística W de Shapiro-Wilk. Para o caso multivariado, as diferentes estruturas de correlação não afetaram o poder e a taxa de erro tipo I dos testes. A estatística K_1 é adequada para uso a partir de $n \geq 50$ para valores nominais de significância de 5 ou 1%; a estatística K_2 é assintoticamente adequada para os testes de desvios de curtose para $n \geq 100$, independentemente dos valores nominais da significância. Os tamanhos amostrais indicados nos estudos de taxa de erro tipo I e poder do teste foram os mesmos encontrados no estudo de quantis aproximados. Finalmente, pode-se concluir que tanto no caso univariado como no multivariado, as estatísticas de assimetria, em geral, são mais poderosas do que as de curtose, mas os testes da hipótese nula de normalidade devem considerar tanto os testes de desvios de assimetria como os de curtose, conjuntamente.

ABSTRACT

SANTOS, Andréa Cristiane. **Definition of the sample size by using Monte Carlo simulation for the univariate and multivariate normality tests based on skewness and kurtosis.** LAVRAS: UFLA, 2001. 71p. (Dissertation-agronomy/ major in Statistics and Agricultural Experimentation)*

An alternative form to verify assumption of data normality is concerned with the application of the tests based on skewness and kurtosis coefficient. The objective of this work was to determine an optimum size samples for the univariate (Z_1 and Z_2) and multivariate (K_1 and K_2) statistics on basis of simulation. The Z_1 and K_1 statistics to verified the skewness alternative Z_2 and K_2 to verified the kurtosis alternative. Different probability density functions, univariate and multivariate were generated, by Monte Carlo simulation method with a view to calculating the type I error rates and the power of the test. The simulations were done by adopting the nominal level of 5% and 1%. Situations with $p=2, 3, 4$ and 5 variables, with different correlation structures, were evaluated in the case of multivariates distributions. The evaluation criterion in the univariate case was that of the comparison of the rates obtained through the value of the rates of empirical power obtained by Shapiro and Wilk test (1965). By Considerering the univariate case, it was found that the Z_1 statistics possesses normal asymptotic approximation for $n \geq 25$ and $\alpha = 5\%$ can be recommended for routine use in the univariate case; The Z_2 statistics possesses normal asymptotic approximation for $n \geq 25$ and $\alpha = 5\%$ can be recommended for routine use in the univariate case for the kurtosis deviation test; The K_1 and K_2 statistics possess approximation asymptotic better than Z_1 and Z_2 for a lower value of the nominal value of significance, recommended for $n \geq 25$ and $n \geq 100$, respectively, warranting the compromise with the control of the type I error rate and elevated power; In the case of symmetry distributions with close to zero and non-normal the statistics based on skewness deviations present higher power than Shapiro – Wilk's W statistics. For the multivariate

* Guidance Committee: Daniel Furtado Ferreira – UFLA (Major Professor).

case the different correlation structures, didn't affect the power and type I error rate of the tests; The K_1 statistics is adequate for use from $n \geq 50$ for nominal values of significance of 5 or 1%; The K_2 statistics is asymptotically appropriate for kurtosis deviation tests for $n \geq 100$, independently of the nominal values of the significance. The sizes indicated in the studies of type I error rate and power of the test, were the same ones found in the studies of approximate percentage points. The conclusion that both in the univariate case and multivariate case the skewness statistics, in general, are more powerful than those of kurtosis, but the tests of the null hypothesis of normality must take into account both the tests of skewness deviations and those of kurtosis jointly.

1 INTRODUÇÃO

A distribuição normal é de suma importância tanto na estatística teórica como na aplicada, por varias razões. Uma delas é que muitas variáveis na natureza, como exemplo as variáveis físicas, biológicas ou psicológicas, comportam-se de modo aproximadamente simétrico, podendo ser bem representadas por esta distribuição. Sua propriedade matemática e estatística é um outro fator que a destaca dentre as outras distribuições. Além disso, outras distribuições podem ser aproximadas pela distribuição normal, como a distribuição Binomial, a Poisson, a Gama, entre outras. Essas aproximações são casos particulares do teorema central do limite.

Na pesquisa agropecuária, a distribuição normal é usada intensivamente, pois variáveis como peso de animais, altura de plantas, produção de grãos, entre outras, pressupostamente obedecem a esta distribuição.

Alguns métodos estatísticos têm como pressuposição básica a normalidade dos dados ou dos resíduos obtidos sob um determinado modelo. Sendo assim, a verificação de normalidade se torna algo imprescindível para a validação das análises estatísticas.

Verificar a suposição de normalidade em um conjunto de dados é avaliar o comportamento frequencial dos mesmos, ou seja, a forma que a distribuição de freqüência assume, a qual espera-se que seja campanular. Na literatura podem ser encontrados vários métodos para testar a normalidade dos dados, entre eles o teste de Kolmogorov-Smirnov (1933), Shapiro-Wilk (1965), Lilliefors (1967), qui-quadrado (Campos, 1983), Cramér-von Mises (Campos, 1983).

Além desses testes consagrados na literatura, essa verificação pode ser feita indiretamente, utilizando testes baseados nos coeficientes de assimetria e curtose, esperados sob a distribuição normal. Essa abordagem tem como

fundamento a comparação entre os valores paramétricos desses coeficientes na distribuição normal com os valores estimados a partir da amostra ou do experimento. Justifica-se tal comparação por meio dos resultados do Teorema de Cramér (1951), apresentado por Bock (1975), o qual afirma que se duas distribuições possuem os mesmos momentos para todas as ordens, pode-se dizer que se referem à mesma distribuição.

Neste trabalho serão apresentadas duas estatísticas que são utilizadas para verificar desvios de normalidade, para os casos univariado e multivariado. Estas estatísticas são baseadas nos coeficientes de assimetria e curtose e têm aproximações assintoticamente normais. Os resultados destes testes são válidos quando o tamanho da amostra tende ao infinito. Esta colocação gera uma questão: quão grande deveria ser o tamanho amostral para que as aproximações fossem razoáveis? Não existem informações detalhadas, na literatura, que abordem os tamanhos amostrais ótimos para as aproximações assintoticamente normais que foram estudadas.

Tendo em vista esta lacuna, o objetivo do presente trabalho é propor um tamanho amostral, via simulação Monte Carlo, que seja suficiente para satisfazer as propriedades assintóticas das estatísticas utilizadas para testar normalidade, univariado e multivariado, baseados nos coeficientes de assimetria e curtose.

2 REFERENCIAL TEÓRICO

2.1 Testes para avaliar a normalidade dos dados

Na literatura existem vários métodos para verificar a suposição de normalidade dos dados ou resíduos de um modelo, necessária para a utilização de muitos métodos estatísticos e procedimentos de estimação. Um método eficiente para avaliar a normalidade de um conjunto de dados é o gráfico de probabilidade normal, que compara a distribuição acumulada dos valores observados com a distribuição acumulada da distribuição normal. Os dados ou resíduos de um modelo poderão ser enquadrados como pertencentes a uma distribuição normal se o gráfico apresentar uma linha imaginária reta (Johnson e Wichern, 1998). Outro método simples para verificar esta suposição pode ser feita por meio da visualização de um histograma, através do qual se pode constatar se os valores observados se aproximam de uma distribuição normal. Contudo, a visualização através deste método não é muito eficiente, pois em alguns casos a normalidade dos dados pode ser mascarada devido a um pequeno número de dados. Sendo assim, é aconselhável usar algum teste estatístico de normalidade para realmente comprovar esta suposição (Bock, 1975). O teste de χ^2 , associado ao histograma amostral, é deficiente também, pois o número de classes é, em geral, mal estimado.

O teste de χ^2 é muito utilizado nos testes de aderência, ou seja, é aplicado para avaliar se um conjunto de dados é ou não proveniente de uma distribuição teórica específica. A distribuição teórica representa o que se poderia esperar sob H_0 (hipótese de nulidade). Este teste consiste em verificar se existe diferença significativa entre as freqüências observadas e as freqüências

esperadas baseadas na distribuição teórica. Uma restrição para este teste é que os dados, que deverão ser organizados em classes, devem ter a frequência esperada maior ou igual 5. Isto muitas vezes não acontece na prática, e uma solução para contornar esse problema é realizar o agrupamento das classes de menor frequência, aumentando a frequência esperada da nova classe (Campos,1983).

Um teste que supera as restrições apresentadas no teste de χ^2 e é eficaz para pequenas amostras é o teste introduzido por Kolmogorov (1933), dito teste de Kolmogorov-Smirnov. Este teste consiste em comparar a frequência acumulada observada em um conjunto de dados com a frequência acumulada de uma distribuição teórica específica. Por esta comparação, pode-se avaliar se os dados observados podem ser considerados como provenientes de uma distribuição teórica específica. Este teste requer que a função de distribuição específica tenha média e variância conhecidas.

Lilliefors (1967) apresentou uma modificação no teste de Kolmogorov-Smirnov, que passou a ter uma utilização mais ampla, pois a média e a variância da distribuição teórica não são previamente especificadas. Estas são estimadas através dos dados amostrais. Este teste também se baseia em comparar as frequências acumuladas dos dados observados com as frequências acumuladas da distribuição teórica. Este teste não-paramétrico leva o próprio nome do autor.

O teste de Cramér-von Mises apresenta os mesmos propósitos do teste de Kolmogorov-Smirnov, sendo uma alternativa para este. Porém, é baseado em estatísticas de ordem (Campos, 1983).

D'Agostino (1972) propõe um teste de normalidade baseado na estatística D . Esta é obtida através de observações amostrais ordenadas. A estatística do teste de normalidade é denotado por Y , para $n > 50$. Os valores obtidos pela estatística Y são comparados com valores tabelados.

Shapiro e Wilk (SW), em 1965, propuseram um teste de normalidade, denotado estatística W , que tem como objetivo comparar os valores esperados das estatísticas de ordem da distribuição normal com os da distribuição da qual se deseja verificar a suposição de normalidade. Se o resultado da estatística W , obtido de uma amostra em questão, estiver na região crítica, então pode-se dizer que os dados se distribuem normalmente. Nesse mesmo trabalho, foi realizado um estudo de simulação usando o método de Monte Carlo, com a finalidade de comparar o poder do teste de Shapiro-Wilk com alguns testes de normalidade: χ^2 , Kolmogorov-Smirnov, Cramer-Von-Mises, Durbin's, $\sqrt{b_1}$ e b_2 . Foi considerado um tamanho amostral $n=20$ e o nível de significância de 5%, para diferentes funções de densidade de probabilidade (f.d.p.). Os resultados obtidos mostram a superioridade do teste de Shapiro-Wilk em relação aos demais testes de normalidade.

Finalmente, podem ser citados os testes de normalidade que são baseados nos coeficientes de assimetria e curtose, que serão abordados em detalhes nas seções 2.5.1 e 2.5.2.

Utilizando o método de simulação de Monte Carlo, Oja (1981) estudou o poder do teste de duas aproximações normais baseadas em estatísticas de ordem denotadas por T_1 e T_2 . Estas estatísticas verificam os desvios de normalidade, baseadas em assimetria e curtose, respectivamente. Para o estudo em questão, foi fixado $\alpha=0,05$ e $n=20$. Foram geradas 2000 amostras das seguintes distribuições: Weibul ($\alpha = 2$), exponencial, log-normal ($\sigma = 0,5$ e $\sigma = 1$), logística, Laplace, Cauchy e uniforme. As quatro primeiras distribuições foram empregadas para testar assimetria e as restantes para testar curtose. Em 1983, Oja apresenta derivações das estatísticas T_1 e T_2 denotadas T_1' e T_2' para verificar os desvios de normalidade. As mesmas distribuições geradas, o tamanho amostral e os testes

utilizados para comparação, feitos no trabalho de 1981, foram consideradas neste estudo. Os resultados foram resumidos na Tabela 1.

TABELA 1. Poder de alguns testes de desvios de normalidade para determinadas distribuições de probabilidade para $\alpha=0,05$ e $n=20$.

	W	b_1	b_2	T_1	T_2	T'_1	T'_2
Weibul($\alpha=2$)	0,156	0,145		0,248		0,243	
Exponencial	0,842	0,706		0,899		0,909	
Log normal($\sigma=1/2$)	0,526	0,501		0,631		0,614	
Log normal($\sigma=1$)	0,934	0,866		0,955		0,961	
Logistic	0,112		0,146		0,132		0,107
Laplace	0,258		0,245		0,349		0,301
Cauchy	0,875		0,783		0,873		0,864
Uniform	0,230				0,436		0,480

W : Shapiro-Wilk, b_1 : assimetria b_2 : curtose

De um modo geral verifica-se, por meio da Tabela 1, que as estatísticas T_1 e T_2 , T'_1 e T'_2 apresentam superioridade em poder quando comparadas com b_1 e b_2 , sendo superiores até mesmo à estatística W de Shapiro-Wilk.

Por meio de simulações computacionais, utilizando o método Monte Carlo, D'Agostino e Rosman (1974) fizeram um estudo de poder para comparar o teste de Shapiro-Wilk (SW) com o teste de normalidade de Gery. Este teste é baseado na razão entre os desvios médios pelo desvio padrão. Para este estudo foram geradas 200 amostras, de tamanhos 20, 50 e 100. O nível de significância fixado foi 10%. Em situações em que as distribuições geradas eram simétricas, a performance do teste de Gery foi tão boa quanto a do teste de SW, sendo que,

em algumas situações, o teste de Gery foi superior ao teste de SW. Nas situações em que as distribuições eram assimétricas, o teste de SW foi superior.

Usando simulação, Machado (1983) avaliou duas estatísticas, baseadas nos coeficientes de assimetria e curtose, para testar normalidade multivariada. Os testes de assimetria e curtose multivariados são baseadas no $max(g)$, nos quais g são os coeficientes de assimetria e curtose univariadas. Em seu trabalho, o autor propõe estudar estes testes por três métodos para todas as amostras maiores que 8, para $p=2, 3$ e 4 variáveis. Estes métodos são: aproximação assintótica, simulação de amostras empíricas de tamanho 4.000 e simulação de Malkovich com amostras empíricas de tamanho 499. Contudo, o trabalho foi realizado somente com os tamanhos amostrais de $n=10, 25$ e 50 e $p=2$ variáveis. Através de estudos de taxas de erro tipo I, para diferentes valores nominais, concluiu-se que o tamanho $n \geq 25$ garante uma boa aproximação assintótica destas estatísticas, nos três diferentes métodos estudados.

Mudholkar, Mcdermott e Srivastava (1992) desenvolveram um teste p -variado, denotado Z_p , para testar normalidade multivariada. As taxas de erro tipo I e poder do teste foram avaliadas via simulação Monte Carlo. Esta estatística é baseada na distância de Mahalanobis. Foram realizadas 5.000 simulações para os tamanhos amostrais, $n=10(1)50$ de uma população p -dimensional, ou seja, $2 \leq p \leq 6$. Os valores nominais de significância fixados foram: 20%, 15%, 10%, 5% e 1%. Os resultados obtidos para o estudo do controle da taxa de erro tipo I estão apresentados na Tabela 2.

A estatística em questão mostrou-se conservadora com relação a $\alpha = 1\%$, controlando bem a taxa de erro tipo I para $p \leq 5$, com $n \geq 10$, ou para $p=6$ com $n \geq 15$. Para o estudo de poder, foram consideradas f.d.p's não normais, para $p=2$ e 3 com os níveis nominais de 5% e 1%. Os resultados mostraram uma monotonicidade com respeito ao tamanho da amostra e o nível

de significância. À medida que o valor da significância nominal diminuiu, ocorreu uma queda no poder. Por outro lado, o aumento do número de variáveis elevou o poder do teste. O teste atinge poder razoável com amostra $n > 50$.

TABELA 2. Taxa de erro tipo I da estatística Z_p para os níveis nominais 20%, 15%, 10%, 5% e 1% e tamanhos amostrais 10, 20 e 30.

População	n	0,20	0,15	0,10	0,05	0,01
$N_2(0, I)^*$	10	0,201	0,144	0,093	0,040	0,006
	20	0,199	0,149	0,097	0,044	0,007
	50	0,204	0,153	0,098	0,048	0,009
$N_3(0, I)$	10	0,209	0,153	0,010	0,047	0,009
	20	0,199	0,146	0,095	0,045	0,005
	50	0,191	0,145	0,093	0,044	0,007
$N_4(0, I)$	10	0,200	0,149	0,103	0,053	0,011
	20	0,201	0,147	0,094	0,039	0,005
	50	0,199	0,143	0,089	0,042	0,007
$N_5(0, I)$	10	0,213	0,160	0,106	0,057	0,016
	20	0,194	0,143	0,094	0,041	0,006
	50	0,194	0,141	0,089	0,042	0,006
$N_6(0, I)$	10	0,236	0,177	0,119	0,063	0,015
	20	0,200	0,151	0,098	0,048	0,008
	50	0,199	0,146	0,940	0,043	0,006

$N_p(0, I)^*$ Distribuição normal p-variada

2.2 Definição de momentos

Os momentos de ordem r não centrados (m_r) de uma variável aleatória (v.a.) X contínua são definidos em Bock (1975). Têm-se, dessa forma:

$$(1) \quad m_r = \int_{-\infty}^{\infty} x^r f(x) dx \quad r = 1, 2, \dots, n$$

em que $f(x)$ é a função densidade de probabilidade (f.d.p) de X .

Para que o momento m_r exista para um certo r , é preciso que a integral (1) seja absolutamente convergente.

O primeiro momento ($r = 1$) corresponde ao valor médio de X , ou seja,

$$(2) \quad \mu = m_1 = \int_{-\infty}^{\infty} x^1 f(x) dx$$

A partir dos momentos não centrados, obtêm-se os momentos ditos centrados. Esses momentos de ordem superior a 1, ou seja, ($r > 1$), são definidos em função dos desvios em relação à média, isto é,

$$(3) \quad \mu_r = \int_{-\infty}^{\infty} (x - \mu)^r f(x) dx \quad r = 2, 3, \dots, n$$

Tomando $r=2$, pode-se obter a variância da variável aleatória X , como é apresentado na equação (4).

$$(4) \quad \sigma^2 = \mu_2 = \int_{-\infty}^{\infty} (x - \mu)^2 f(x) dx = m_2 - m_1^2$$

Fazendo $r=3$, obtém-se o momento centrado de ordem 3, expresso pela equação (5):

$$(5) \quad \mu_3 = \int_{-\infty}^{\infty} (x - \mu)^3 f(x) dx = m_3 - 3m_1m_2 + 2m_1^3$$

onde μ_3 é a medida de assimetria da distribuição X .

Fazendo $r=4$, pode-se obter o momento centrado de ordem 4 dado pela equação (6),

$$(6) \quad \mu_4 = \int_{-\infty}^{\infty} (x - \mu)^4 f(x) dx = m_4 - 4m_1m_3 + 6m_1^2m_2 - 3m_1^4$$

onde: μ_4 mede o grau de achatamento da distribuição X .

Se a v.a. for discreta, substitui-se a integral por somatório.

A partir das expressões dos momentos centrados, pode-se definir os coeficientes de assimetria e curtose.

O coeficiente de assimetria, aqui denotado por $\sqrt{\beta_1}$, é utilizado para verificar o quanto a distribuição de X é mais ou menos simétrica em torno de seu valor médio, e é definido por:

$$\sqrt{\beta_1} = \frac{\mu_3}{\mu_2 \sqrt{\mu_2}}$$

Sob distribuição normal, sabe-se que $\sqrt{\beta_1} = 0$, ou seja, a distribuição é perfeitamente simétrica. Esse resultado é tomado com base para a classificação de outras distribuições, quanto à simetria. Diz-se que uma distribuição é assimétrica à direita se $\sqrt{\beta_1} > 0$ e assimétrica à esquerda, se $\sqrt{\beta_1} < 0$.

Apesar dos resultados apresentados utilizando $\mu_3 = 0$, Mood, Graybill e Boes (1974) questionam que nem sempre este valor para μ_3 , implicará na determinação da forma da distribuição. Este questionamento é dado através de um caso particular no qual é apresentada uma densidade assimétrica que possui $\mu_3 = 0$.

Por se tratar de um caso particular, notado por Mood, Graybill e Boes (1974), ressalta-se que isto não torna inválida a utilização de μ_3 como medida de simetria. No entanto, para verificar os desvios de normalidade existe a necessidade de verificar a simetria e curtose, para as quais certamente seria detectado o desvio de normalidade.

O grau de achatamento de uma distribuição é medido pelo coeficiente de curtose, definido por:

$$\beta_2 = \frac{\mu_4}{\mu_2^2}$$

Sob distribuição normal, sabe-se que $\beta_2 = 3$, dita distribuição mesocúrtica; se $\beta_2 > 3$ indica uma distribuição afilada no centro, chamada leptocúrtica; se $\beta_2 < 3$ indica uma distribuição achatada no centro, chamada platicúrtica. Uma distribuição é considerada como normal se $\sqrt{\beta_1} = 0$ e $\beta_2 = 3$ a demonstração desta afirmação pode ser encontrada em Bock (1975).

2.3 Coeficientes paramétricos de assimetria e curtose para as distribuições univariadas:

Coeficientes paramétricos de assimetria e curtose para cada distribuição segundo Jonhson & Kotz (1970).

a) Exponencial

Os coeficientes de assimetria e curtose para a distribuição exponencial, com parâmetro α , são:

$$\sqrt{\beta_1} = 2 \text{ e } \beta_2 = 9$$

A distribuição exponencial é sempre assimétrica a direita e leptocúrtica para qualquer valor do parâmetro α , ou seja, não existe dependência entre os coeficientes de assimetria e curtose e o parâmetro da distribuição.

b) Qui-quadrado

Para essa distribuição, os valores paramétricos do coeficiente de assimetria e curtose são:

$$\sqrt{\beta_1} = \sqrt{8/v} \text{ e } \beta_2 = 3 + 12v^{-1}$$

em que v representa os graus de liberdade dessa distribuição.

TABELA 3. Valores paramétricos dos coeficientes de assimetria e curtose da distribuição qui-quadrado, considerando diferentes graus de liberdade.

	1 G. L.	5 G. L.	30 G.L.
$\sqrt{\beta_1}$	2,83	1,26	0,52
β_2	15,00	5,40	3,40

Por meio dos valores paramétricos dos coeficientes de assimetria e curtose da distribuição qui-quadrado, verifica-se também que a medida que os graus de liberdade aumentam, a distribuição se torna simétrica e mesocúrtica.

c) Log-normal

Para a distribuição log-normal, os coeficientes de assimetria e curtose são dados por:

$$\sqrt{\beta_1} = (w-1)^{1/2}(w+2)$$

$$\beta_2 = w^4 + 2w^3 + 3w^2 - 3$$

em que $w = \exp(\sigma^2)$ e σ^2 é o parâmetro de forma.

TABELA 4. Valores paramétricos dos coeficientes de assimetria e curtose da distribuição log-normal.

	$\sigma^2 = 1$	$\sigma^2 = 0,1$	$\sigma^2 = 0,001$
$\sqrt{\beta_1}$	6,18	1,007	0,063
β_2	113,94	4,85	3,02

Os resultados da Tabela 4 mostram que a distribuição log-normal se torna simétrica e mesocúrtica a medida que σ^2 diminui.

c) Uniforme

Para a distribuição uniforme com parâmetros a e b , $U(a,b)$, os coeficientes de assimetria e curtose são, respectivamente, dados por:

$$\sqrt{\beta_1} = 0 \text{ e } \beta_2 = 1,80$$

Esses resultados mostram que a distribuição uniforme é simétrica e platicúrtica, independentemente da escolha de seus parâmetros a e b .

2.4 Erros Tipo I e II e Poder do Teste

Quando se realiza um teste de hipótese, dois erros são possíveis, como apresentado em Mood, Graybil e Boes (1974). Se uma hipótese for rejeitada quando deveria ser aceita, diz-se que foi cometido erro Tipo I. Se, por outro lado, for aceita uma hipótese que deveria ser rejeitada, diz-se que foi cometido erro Tipo II. As probabilidades associadas a esses erros são denominadas α e

β , respectivamente. O poder de um teste é definido por esses mesmos autores como a probabilidade $(1 - \beta)$ de rejeitar a hipótese de nulidade quando esta realmente é falsa.

Para que quaisquer testes de hipóteses ou regras de decisão tenham resultados válidos, eles devem ser planejados de modo que os erros de decisão sejam reduzidos ao mínimo. Isto não é tarefa simples, pois para um dado tamanho de amostra, a tentativa de diminuir um certo tipo de erro é acompanhada pelo acréscimo do outro tipo. Na prática, um tipo de erro pode ser mais importante que o outro, de modo que se deve procurar uma acomodação que favoreça a limitação do erro mais sério. Uma alternativa, define Siegel (1975), para reduzir ambos os erros, consiste em aumentar o tamanho da amostra.

É possível encontrar, na literatura, estudos de alguns testes via simulação, avaliando as taxas de erros empíricas, como o estudo sobre o erro tipo I e o poder de alguns testes de comparações múltiplas, feito por Percin e Barbosa (1988). Utilizando o método de simulação de Monte Carlo, Silva *et al.* (1998) avaliaram as taxas de erro tipo I e o poder do teste de Scott-Knott e compararam os resultados com os teste de Tukey, t, Scheffé, Newman-Keuls modificado e t-baysiano.

Borges & Ferreira (1999) buscaram avaliar o aumento de riscos de se tomarem decisões erradas (erro Tipo I e Tipo II) na comparação de duas médias populacionais. Para avaliar as probabilidades de se cometerem os erros, duas populações foram simuladas via método de Monte Carlo, no qual foi aplicado o teste t para verificar a diferença entre as médias amostrais. O teste t foi aplicado através das aproximações de Satterthwait (1946) e de Cochran e Cox (1957). Sendo as variâncias populacionais iguais, as probabilidades de se cometer o erro tipo I foram praticamente as mesmas dos valores nominais estabelecidos. Observou-se que à medida que as diferenças entre as médias populacionais

foram aumentadas, para o caso de variâncias populacionais iguais, a porcentagem de erro Tipo II diminuiu consideravelmente, aumentando o poder do teste. Verificou-se também que, com o aumento do tamanho da amostra, houve uma redução nas probabilidades tanto no erro Tipo I como no erro tipo II. As duas aproximações do teste t , usadas quando as populações apresentavam variâncias heterocedásticas, não mostraram diferenças quanto à taxa de erro tipo I e tipo II empíricas.

Em seu trabalho, Leonel (2000) avalia um procedimento alternativo para comparação de tratamentos, nas análises em grupos de experimentos. Este procedimento baseia-se na combinação das probabilidades dos contrastes de interesse de cada experimento. Os resultados obtidos por este teste foram comparados com os resultados da análise de variância tradicional. Por meio do processo de simulação Monte Carlo, foi possível avaliar as taxas de erro Tipo I e o poder do teste. Nas situações avaliadas, ambos os testes controlaram bem a taxa de erro Tipo I, com os valores nominais de 5% e 1%. Quanto ao poder do teste verificou-se que o teste de significância coletiva apresenta baixo poder quando comparado com a análise de variância tradicional.

Santos (2000) propõe, em seu trabalho, uma modificação para o processo divisório do teste de Scott e Knott e novas alternativas de agrupamento. O comportamento do teste quanto às taxas de erro tipo I e o poder do teste, sob situações de hipótese H_0 completa e parcial, foram avaliadas por meio de simulação Monte Carlo. Entre outras conclusões, o autor verifica que o teste de Scott Knott original controla adequadamente as taxas de erro tipo I, por comparação e por experimento, sob H_0 completa, mantendo o poder elevado, mas não controla adequadamente sob H_0 parcial. O teste de Scott Knott modificado apresenta os mesmos resultados do original sob H_0 completa, mas

sob H_0 parcial apresenta taxas de erro tipo I mais elevadas, embora tenha maior poder.

2.5 Testes de normalidade baseados nos coeficientes de assimetria e curtose

Como já mencionado, os testes baseados nos coeficientes de assimetria e curtose constituem uma alternativa para verificar a normalidade dos dados. No caso univariado, não existe muita dificuldade para se verificar a normalidade dos dados ou dos resíduos obtidos por um modelo.

Já no caso multivariado, existe uma grande dificuldade para verificar esta suposição. Pouca informação existe na literatura abordando testes estatísticos de normalidade multivariado. Segundo Bock (1975), uma alternativa para verificar a suposição de normalidade multivariada seria através da verificação da normalidade da distribuição marginal univariada. Sabe-se que a existência de uma distribuição normal multivariada implica em marginais normalmente distribuídas. Contudo, não se pode garantir que a distribuição conjunta de duas variáveis normais univariadas sejam uma normal multivariada. Desta forma torna-se inviável a verificação da hipótese de normalidade via marginais.

A verificação da normalidade multivariada, tomando-se por base a verificação dos desvios de assimetria e curtose, é uma melhor opção. Esses testes são de fácil manuseio por dependerem apenas dos tamanhos amostrais e das estimativas dos coeficientes de assimetria e curtose. No entanto, seus desenvolvimentos são baseados em estatísticas assintóticas. Na literatura, são escassas as informações dos tamanhos amostrais ideais para a sua utilização.

2.5.1 Caso univariado

O estimador do coeficiente de assimetria é dado por:

$$\sqrt{b_1} = \frac{\tilde{\mu}_3}{\tilde{\mu}_2^{3/2}}$$

em que $\tilde{\mu}$ é o estimador dos momentos centrados, referente às respectivas ordens.

Valores críticos para a estatística $\sqrt{b_1}$ podem ser encontrados em Person e Hartley (1966) para $n > 24$ e em D'Agostino e Tietjen (1973) para n variando de 5 a 35.

Em grandes amostras, os valores críticos de $\sqrt{b_1}$ podem ser aproximados pela estatística Z_1 . Esta estatística é utilizada para verificar os desvios em relação à simetria do conjunto de dados:

$$Z_1 = \sqrt{\frac{b_1(n+1)(n+3)}{6(n-2)}}$$

em que n é o tamanho da amostra. Os valores obtidos pela estatística Z_1 deverão ser comparados com os valores tabelados da distribuição normal padrão

O estimador do coeficiente de curtose é dado por:

$$b_2 = \frac{\tilde{\mu}_4}{\tilde{\mu}_2^2}$$

em que, $\tilde{\mu}$ é o estimador dos momentos centrados, referente as respectivas ordens.

Os valores críticos de b_2 podem ser encontrados em Pearson e Hartley (1966) para $n > 49$ e D'Agostinho e Tietjen (1971) para n variando de 7 a 50. Para grandes amostras, os valores críticos de b_2 podem ser aproximados pela estatística Z_2 , que é utilizada para verificar os desvios em relação a curtose:

$$Z_2 = \left(b_2 - 3 + \frac{6}{n+1} \right) \sqrt{\frac{(n+1)^2(n+3)(n+5)}{24n(n-2)(n-3)}}$$

em que n é o tamanho da amostra. Os valores obtidos pela estatística Z_2 deverão ser comparados com os valores tabelados da distribuição normal padrão, pois as estatísticas Z_1 e Z_2 , para grandes tamanhos amostrais, são normalmente distribuídas, $N(0,1)$.

2.5.2 Caso multivariado

Um método simples e matematicamente tratável para se verificar a suposição da normalidade multivariada é o teste baseado na medida de assimetria e curtose multivariada de Mardia (1970). Para a distribuição multivariada, o coeficiente de assimetria é dado por:

$$\beta_{1,p} = E\{(y - \mu)' \Sigma^{-1} (x - \mu)\}^3$$

em que x e y são dois vetores de realizações multivariadas independentes e provenientes da mesma distribuição; Σ é a matriz de variância-covariância populacional; μ a média populacional e p é o número de variáveis.

O coeficiente de curtose para a distribuição p -variada é dado por:

$$\beta_{2,p} = E\{(y - \mu)' \Sigma^{-1} (y - \mu)\}^2$$

Em uma distribuição normal multivariada, espera-se que

$$\beta_{1,p} = 0 \quad \text{e} \quad \beta_{2,p} = p(p+2).$$

Para uma amostra de tamanho n , os estimadores de $\beta_{1,p}$ e $\beta_{2,p}$ são respectivamente:

$$\hat{\beta}_{1,p} = \frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n g_{i,j}^3$$

$$\hat{\beta}_{2,p} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n g_{i,j}^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n d_i^4$$

em que $g_y = (y_i - \bar{y})' S_n^{-1} (y_j - \bar{y})$ e $d_i = \sqrt{g_{ii}}$

Mardia (1970) mostrou que, para grandes amostras,

$$K_1 = \frac{n\hat{\beta}_{1,p}}{6} \sim \chi^2$$

com $\frac{p(p+1)(p+2)}{6}$ graus de liberdade

e

$$K_2 = \frac{\hat{\beta}_{2,p} - p(p+2)}{\{8p(p+2)/n\}^{0,5}} \sim N(0,1)$$

Portanto, as quantidades K_1 e K_2 são as estatísticas utilizadas para testar a hipótese nula de que a distribuição, da qual se extraiu a amostra, é normal multivariada.

É conveniente salientar que tanto as estatísticas univariadas como as multivariadas possuem distribuições assintóticas.

2.6 Simulação e Método de Monte Carlo

Dachs (1988) define simulação como o processo para imitar o comportamento de um sistema real, para estudar seu funcionamento sob condições alternativas. Tornou-se cada vez mais freqüente o uso de métodos de simulação para estudar novos procedimentos estatísticos ou para comparar o comportamento de diferentes técnicas estatísticas.

Na experimentação agrícola, é freqüente a instalação de ensaios em diversas áreas. Num estudo científico, esses ensaios precisam ser repetidos sob as mais diversas condições para avaliar uma característica em estudo ou comparar algum método estatístico. Sendo assim, o trabalho do pesquisador seria impraticável, pois às vezes ele não dispõe de tempo, espaço físico adequado, recursos financeiros ou material para a realização do estudo. Desta maneira, o uso de métodos de simulação tem sido uma importante ferramenta para este propósito.

Para se ter uma idéia de simulação, é necessário definir o conceito de seqüência aleatória. Lehmer (1951) define que uma seqüência aleatória é um conceito vago, que engloba a idéia de uma seqüência em que cada termo é imprevisível, cujos dígitos passam por um certo número de testes, de uso tradicional pelos estatísticos, e que dependem, de certa forma, dos usos que se pretende dar a seqüência. Na realidade, tais seqüências não são aleatórias no sentido estrito da palavra, mas, para fins práticos, comportam-se como se fossem, comenta Dachs (1988). Estas seqüências são ditas pseudo-aleatórias.

Dachs (1988) descreveu processos de geração de amostras aleatórias a partir de uma distribuição uniforme (0,1). A linguagem computacional utilizada pelo autor na implementação dos algoritmos para a geração de seqüências aleatórias foi a linguagem Pascal. Este tipo de construção está baseado no teorema de probabilidade integral, que garante que é possível obter, a partir de uma distribuição uniforme (0,1), uma amostra de qualquer outra distribuição. Este teorema afirma que se U tem distribuição uniforme (0,1); e se F é uma função de distribuição qualquer, a variável $X = F^{-1}(U)$ tem função de distribuição F. Analiticamente, tem-se que:

$$P(X \leq x) = P(F^{-1}(U) \leq x) = P(F[F^{-1}(U)] \leq F(x)) = P(U \leq F(x))$$

como U é uniforme e $F(x)$ está entre 0 e 1, então

$$P(U \leq F(x)) = F(x)$$

de modo que

$$P(X \leq x) = F(x),$$

ou seja, X tem função de distribuição F .

Por meio da Figura 1 é possível entender o teorema da probabilidade integral com maior facilidade. Repetindo-se o processo descrito n vezes, pode-se gerar uma amostra aleatória de uma f.d.p. qualquer, a partir da distribuição uniforme $(0,1)$.

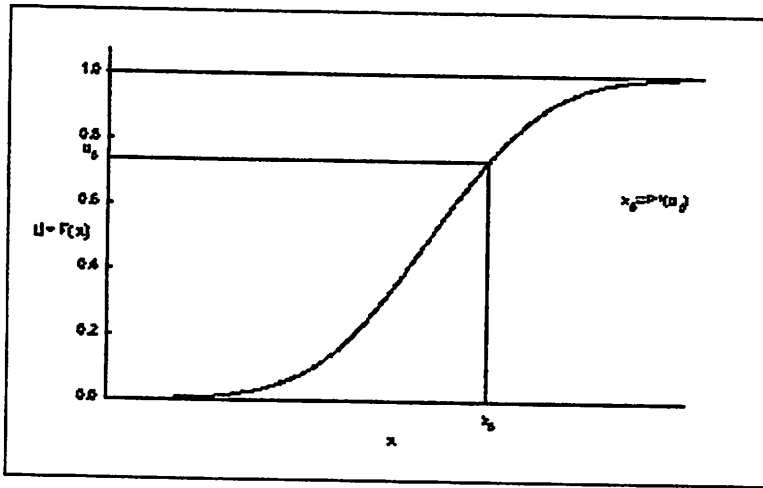


FIGURA 1. Processo ilustrativo da geração de um número aleatório (X_0) com uma função de distribuição $F(x)$ qualquer.

O método de Monte Carlo, de uma maneira bastante simplificada, é um algoritmo que consiste em simular dados a partir de uma seqüência

pseudo-aleatória, baseada na distribuição uniforme (0,1). Todo processo simulado que envolve um componente aleatório de qualquer distribuição é considerado como pertencente ao método de Monte Carlo. A única restrição para o uso deste método é a sua impraticabilidade para distribuições cuja função distribuição seja desconhecida, ou cuja inversão não seja possível pela não existência de algoritmos numéricos. Felizmente, na literatura existem inúmeros algoritmos eficientes de inversão das funções de distribuições comumente usadas pelos estatísticos.

3 METODOLOGIA

Para avaliar as taxas de erro Tipo I e o poder dos testes assintóticos de normalidade baseados nos coeficientes de assimetria e curtose, foram utilizados simulações computacionais pelo método de Monte Carlo.

O programa utilizado para simular as situações foi feito por meio dos recursos computacionais do sistema estatístico SAS[®], baseado nos programas apresentados por Khaltree e Naik (1995). Em todos os casos utilizou-se o teorema da probabilidade integral para gerar amostras aleatórias, extraídas da respectiva população (f.d.p). Nesta seção serão descritas as várias etapas e procedimentos estatísticos necessários para a efetivação desse processo.

3.1 Simulação dos dados univariados

Para a realização deste estudo, foram simuladas amostras com diferentes funções de densidade de probabilidade (f.d.p.). Foram consideradas amostras de diferentes tamanhos (n), variando de 5 em 5 e de 50 em 50: $n = 5(5)100(50)500$. Cada situação foi simulada 5.000 vezes. As f.d.p.'s consideradas foram:

- a) normal (100,100);
- b) log-normal com $\sigma^2 = 1; 0,1; e 0,001$;
- c) χ^2 com $\nu = 1, 5 e 30$ graus de liberdade;
- d) exponencial, com $\alpha = 1, 5 e 20$
- e) uniforme (0,1)

3.2 Simulação dos dados multivariados

Para simular amostras multivariadas, foram considerados os mesmos tamanhos amostrais do caso univariado. As situações avaliadas continham $p=2, 3, 4 e 5$ variáveis. Cada situação foi simulada 5.000 vezes. As distribuições consideradas foram:

- a) normal multivariada;
- b) uniforme multivariada;
- c) distribuição multivariada gerada a partir da distribuição exponencial;
- d) distribuição multivariada gerada a partir da distribuição de qui-quadrado;

As distribuições dos itens b, c e d são distribuições não normais que foram geradas com o propósito de avaliar o poder dos testes de normalidade.

Neste trabalho não houve a preocupação em expressar essas distribuições analiticamente.

A estrutura da matriz de covariância populacional considerada foi:

$$\Sigma = \begin{bmatrix} 1 & \rho & \rho^2 & \rho^3 & \dots & \rho^{P-1} \\ \rho & 1 & \rho & \rho^2 & \dots & \rho^{P-2} \\ \rho^2 & \rho & 1 & \rho & \dots & \rho^{P-3} \\ \rho^3 & \rho^2 & \rho & 1 & \dots & \rho^{P-4} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \rho^{P-1} & \rho^{P-2} & \rho^{P-3} & \rho^{P-4} & \dots & 1 \end{bmatrix} \sigma^2$$

em que ρ é um valor pertencente ao intervalo $]-1, 1[$; σ^2 é uma constante maior que zero. Fazendo assim, Σ é uma matriz positiva definida.

Foram considerados os seguintes valores de ρ : 0; 0,5; 0,9; -0,5. Sem perda de generalidade, foi considerada a distribuição normal multivariada com $\sigma^2 = 1$ e vetor de médias $\underline{\mu} = \underline{0}$.

A seguir foi descrito apenas o procedimento para gerar os dados da distribuição normal multivariada, uma vez que as demais distribuições foram obtidas da mesma forma.

Primeiramente, gerou-se um vetor $z_{p \times 1}$ de observações normais padronizadas (ou de outra distribuição sob estudo), cujos elementos são independentes. Para isso usou-se o teorema da probabilidade integral. A matriz Σ foi fatorada para obtenção do fator Cholesky, que é um método utilizado para extrair a raiz quadrada da matriz Σ , de tal modo que: $\Sigma = FF'$. A matriz F é o fator de Cholesky.

Fazendo $\underline{\mu} = \underline{0}$, obtém-se o vetor \underline{x} da seguinte forma:

$$\underline{x} = Fz + \underline{\mu}$$

o qual possui média $\underline{0}$, pois $E(\underline{x}) = \underline{\mu} = \underline{0}$ e variância Σ , pois $V(\underline{x}) = FV(\underline{z})F' = FF' = \Sigma$. Assim, o teorema de probabilidade integral garante que $Z \sim N(\underline{0}, I)$. Para as demais distribuições, a média e a variância tinham outros resultados, cujas apresentações fogem dos propósitos do presente trabalho.

O processo de transformação linear singular aplicada a um vetor normal multivariado garante que não há alteração na distribuição (Johnson e Wichern, 1998) sendo, assim, $\underline{x} \sim N\left(\underline{0}, \Sigma\right)$. O processo é repetido até que se gerem tantos \underline{x} quanto for o tamanho da amostra.

3.3 Aplicação dos testes

A partir dos estimadores apresentados na seções 2.5.1 e 2.5.2, foram obtidas, em cada amostra, as estimativas para $\sqrt{\beta_1}$ e β_2 univariado e $\beta_{1,p}$ e $\beta_{2,p}$ multivariado, respectivamente. Foram computadas as estatísticas Z_1 , Z_2 , K_1 e K_2 apresentadas nas mesmas seções. As estatísticas multivariadas foram aplicadas ao caso com $p=1$, bem como as estatísticas univariadas foram aplicadas aos casos multivariados.

Para facilitar a implementação do algoritmo utilizado, a estatística Z_1 foi considerada como uma distribuição qui-quadrado, tomando-se o seu quadrado.

Nos algoritmos apresentados nos anexos A e B, para os casos univariado e multivariado, foram consideradas duas opções para verificar se o teste se tornava mais sensível aos desvios de normalidade:

- a) verificou-se a assimetria e curtose independentemente;
- b) verificou-se a assimetria e curtose simultaneamente.

3.4 – Avaliação das taxas de erro tipo I

Para medir as taxas de erro tipo I, foram consideradas as situações sob f.d.p. normais. Os valores nominais utilizados para a avaliação da taxa de erro tipo I, para as distribuições normais univariada ou multivariada, foram de 5% e 1%. As hipóteses avaliadas foram:

$$H_0^{(1)} : \text{distribuição simétrica} \quad \begin{cases} H_0^{(1.1)} : \sqrt{\beta_1} = 0 \text{ (univariado)} \\ H_0^{(1.2)} : \beta_{1,p} = 0 \text{ (multivariado)} \end{cases}$$

$$H_0^{(2)} : \text{distribuição mesocúrtica} \quad \begin{cases} H_0^{(2.1)} : \beta_2 = 3 \text{ (univariado)} \\ H_0^{(2.2)} : \beta_{2,p} = p(p+2) \text{ (multivariado)} \end{cases}$$

As probabilidades correspondentes às estatísticas Z_1 , Z_2 , K_1 e K_2 foram obtidas a fim de que fossem comparadas com os valores nominais estabelecidos. Se os valores obtidos pelas estatísticas pertenciam à região crítica,

as hipóteses $H_0^{(1)}$ e $H_0^{(2)}$ foram rejeitadas indevidamente; nesse caso, estava ocorrendo o erro tipo I. O total de rejeições foi computadas em cada caso e as proporções de erros tipo I empíricas, foram obtidas. A inadequação do teste aplicado foi avaliada por um afastamento entre o valor nominal adotado e a taxa empírica computada.

3.5 – Avaliação do poder do teste

Para medir o poder, foram consideradas as situações sob f.d.p. não normais. Os testes das hipóteses $H_0^{(1)}$ e $H_0^{(2)}$, quando não rejeitadas, refletiram uma situação na qual se cometeu o erro tipo II. A proporção de casos em que as respectivas hipóteses foram rejeitadas foi computada.

Essa proporção mediu o poder empírico dos testes empregados. O critério de avaliação no caso univariado foi o da comparação do poder com o poder empírico, obtida pelo teste W de Shapiro-Wilk (1965).

3.6 Avaliação dos quantis

Sob f.d.p. normal univariada ou multivariada, foi obtida a distribuição empírica das estatísticas Z_1 , Z_2 , K_1 e K_2 . Os quantis das distribuições empíricas foram comparados com os obtidos pela distribuição normal univariada padrão ou de qui-quadrado limitantes, com a finalidade de avaliar a sua adequação.

4 RESULTADOS E DISCUSSÃO

Os resultados foram apresentados em duas etapas: na primeira, o caso univariado, e na Segunda, o caso multivariado.

4.1 Caso univariado

Sob H_0 verdadeira (distribuição normal), avaliou-se a taxa de erro tipo I. Verificou-se, pela Figura 2(a), que as estatísticas Z_1 e W se mostraram adequadas quanto ao controle da taxa de erro tipo I, mesmo para pequenas amostras, ou seja, $n < 30$. A estatística K_1 aproximou-se do valor nominal de 5% somente para um tamanho amostral igual ou superior a 75. É conveniente salientar que para os valores da significância nominal de 5% e de 1% são esperados, em 99% dos casos, resultados das taxas empíricas no intervalo de 4,2% a 5,8% e 0,67% a 1,42%, respectivamente.

Para o caso da curtose, verificou-se que as estatísticas Z_2 e K_2 não controlaram adequadamente a taxa de erro tipo I. A estatística Z_2 aproximou-se do valor nominal de forma razoável para $n \geq 100$. O pior desempenho, quanto ao controle da taxa de erro tipo I, ocorreu com a estatística K_2 , pois os resultados obtidos, estavam aquém do valor nominal estabelecido, independentemente do tamanho amostral. Para essa estatística houve uma tendência da taxa de erro tipo I de se aproximar do valor nominal com o aumento do valor de n .

Na Figura 2(b) encontram-se os resultados para o valor nominal de significância de 1%. Verificou-se que o teste W (Shapiro-Wilk) controlou adequadamente a taxa de erro tipo I para amostras de todos os tamanhos, como era esperado. A estatística K_1 , para amostras de tamanho $n < 25$, tendeu a

subestimar o valor nominal de significância (1%). Para amostras superiores a 25, aproximou-se consideravelmente do valor nominal, tornando-se bastante razoável sua aproximação para amostras de tamanho $n \geq 200$. Já a estatísticas Z_1 tendeu a superestimar o valor da significância nominal para $n < 100$, e a partir desse valor aproximou-se do valor nominal de 1%. As estatísticas Z_2 e K_2 também não controlaram a taxa de erro tipo I, pois se mantiveram acima do valor nominal para $n > 100$. A estatística K_2 tendeu lentamente ao valor nominal para grandes tamanhos amostrais ($n > 500$), embora com $n > 25$ as taxas empíricas de erro tipo I já pertenciam ao intervalo de confiança proposto. Neste caso, o pior desempenho ocorreu com a estatística Z_2 , que vagarosamente tendeu ao valor nominal, porém o superestimando para todos os valores de n . As estatísticas relacionadas com assimetria, apresentaram-se com melhores resultados para o controle da taxa de erro tipo I. No caso em que o valor nominal foi de 1%, verificou que todas as estatísticas, exceto a estatística W , não controlaram a taxa de erro tipo I adequadamente, para pequenas amostras.

À medida que o valor da significância nominal diminuiu, os testes tenderam a apresentar maiores taxas de erro tipo I relativas, indicando que a aproximação assintótica possui cauda mais leve do que a normal $N(0,1)$, ou a qui-quadrado limitantes. É razoável pensar que o teste deveria ser indicado para ser usado com valor nominal de 5%. Nesse caso, o critério Z_1 para assimetria e o Z_2 para curtose deveriam ser recomendados com $n \geq 25$. Para uso a 1%, as estatísticas K_1 e K_2 foram mais adequadas e poderiam ser recomendadas com n a partir de 25.

Um resultado interessante (também verificado na Figura 2) é que a escolha da probabilidade do erro tipo I determina a escolha do teste mais adequado à ser utilizado.

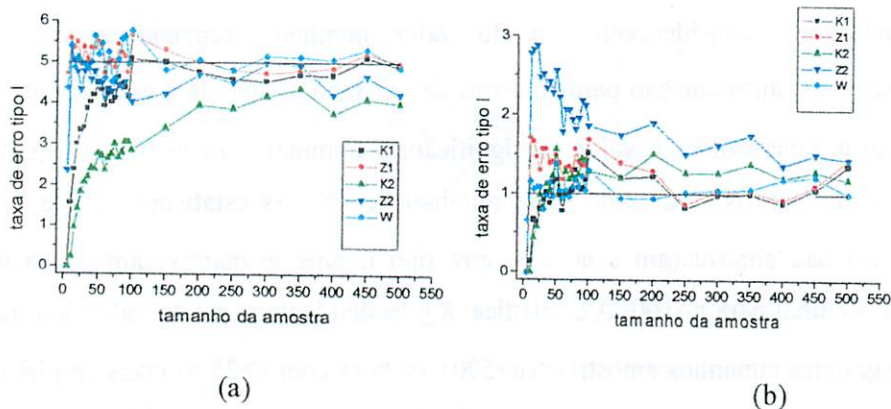


FIGURA 2. Taxa de erro tipo I considerando o valor nominal de 5% (a) e de 1% (b).

Para avaliar o poder do teste, foram consideradas distribuições cujas f.d.p.'s são não normais. Os resultados obtidos pela distribuição exponencial, com os parâmetros, $\alpha = 1, 5$ e 20 foram idênticos para os dois valores nominais estabelecidos, como pode ser visto nas Figuras 3 e 4. Nas Figuras 3 e 4 pode-se claramente verificar a semelhança de poder considerando valores paramétricos tão diferentes. Observando-se as Figuras 3 e 4, verificou-se, ainda, que o teste W superou em poder as estatísticas de assimetria e curtose. Resultados similares, em que o teste de Shapiro-Wilk é superior a outros testes de normalidade, também podem ser encontrados no estudo feito por Shapiro-Wilk (1965). Considerando os aspectos práticos, as estatísticas K_1 , Z_1 e W podem ser consideradas idênticas com relação ao poder que apresentaram. Já com amostras $n > 20$, os testes baseados em assimetria apresentaram poder bastante elevado. A estatística Z_1 tem uma pequena superioridade em relação a K_1 e estas tendem a se igualar em poder quando $n > 50$ e se igualam à estatística W para os valores nominais de significância de 5% e de 1%. A estatística Z_2 apresenta uma pequena superioridade em poder quando comparada com a

estatística K_2 . Estas estatísticas aumentam o poder de rejeição da hipótese nula vagarosamente, tendendo à se igualarem a medida que aumenta o tamanho amostral. Atingiram um elevado poder quando $n \geq 100$.

O fato dos resultados obtidos não serem afetados pelos diferentes valores do parâmetro α se dá pelo fato de que os coeficientes de assimetria e curtose paramétricos desta distribuição não serem dependentes do valor de α .

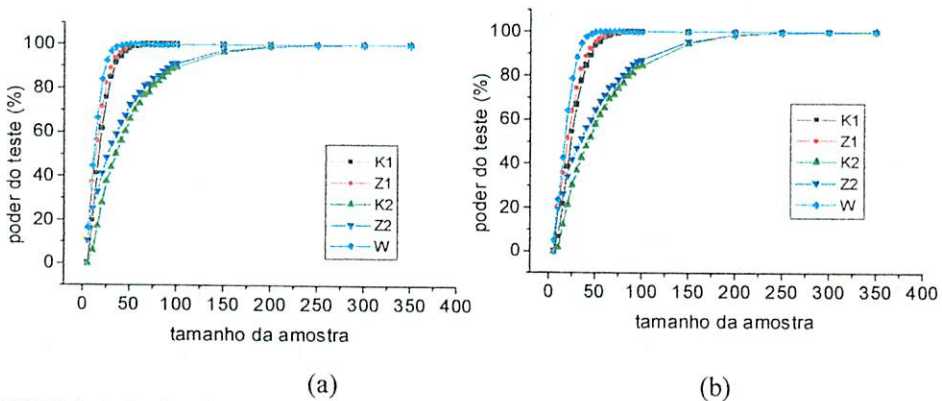


FIGURA 3. Poder do teste considerando a distribuição exponencial com $\alpha = 1$ e valores nominais de significância de 5% (a) e 1% (b).

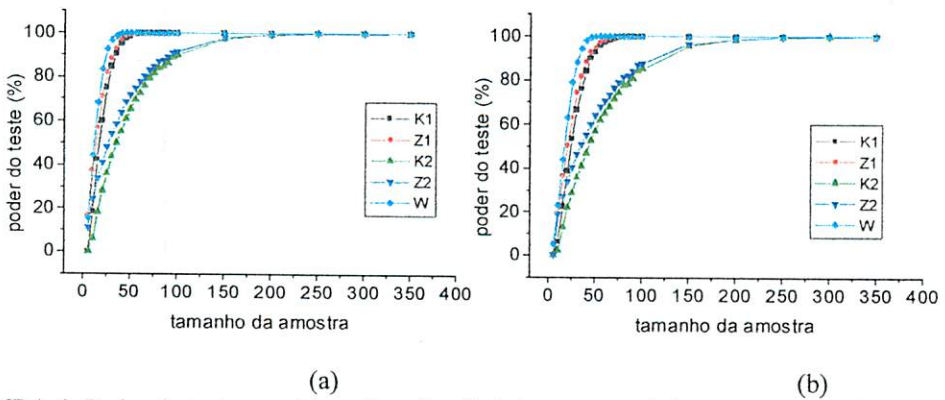


FIGURA 4. Poder do teste considerando a distribuição exponencial com $\alpha = 20$ e valores nominais de significância de 5% (a) e 1% (b).

Considerando a distribuição de qui-quadrado, verificou-se que o poder diminuiu gradativamente com o aumento do grau de liberdade da distribuição, como mostram as Tabelas 5 e 6 e a Figura 5. Este declínio de poder era esperado, pois os coeficientes paramétricos da distribuição de qui-quadrado, indicam que quanto maior é o grau de liberdade adotado, mais simétrica e mesocúrtica se torna a distribuição. Desta maneira, os testes teriam menor poder em detectar os desvios de normalidade.

Pela Tabela 5, em que se considerou a distribuição de qui-quadrado com 1 grau de liberdade, verificou-se que o teste W foi superior em poder as demais estatísticas. Alcançou um poder elevado a partir de amostras pequenas, ou seja, $n \geq 20$, para os dois valores nominais especificados. As estatísticas Z_1 e K_1 , considerando o valor nominal de 5%, atingiram um poder elevado para $n \geq 20$. A estatística Z_1 apresentou uma pequena superioridade em relação a K_1 . As estatísticas W, Z_1 e K_1 praticamente se igualam em poder quando $n > 50$. As estatísticas referentes à curtose, Z_2 e K_2 , atingiram poder elevado (>80%) quando $n \geq 40$. Quando considerando o valor nominal de 1%, verificou-se que as estatísticas Z_1 e K_1 atingiram poder elevado quando $n \geq 25$. As estatísticas Z_2 e K_2 atingiram elevado poder para $n > 40$, considerando o valor nominal de 5% e $n > 45$ para 1%.

Observando a Tabela 6, referente à distribuição de χ^2 com 5 graus de liberdade, verificou-se que o poder de todos os testes é inferior quando comparados com a distribuição de qui-quadrado com 1 grau de liberdade. Para o valor nominal de 5%, Z_1 e K_1 atingiram um poder elevado para $n \geq 50$. As estatísticas Z_2 e K_2 atingiram poder elevado quando $n \geq 200$. O teste W se manteve superior às demais estatísticas e atingiu poder elevado quando $n \geq 40$.

Considerando o valor nominal de 1%, verificou-se que Z_1 e K_1 tiveram poder elevado quando $n > 70$. As estatísticas Z_2 e K_2 atingiram poder elevado quando $n \geq 250$. O critério W atingiu um elevado poder para $n \geq 60$. No casos da distribuição de qui-quadrado com 1 e 5 graus de liberdade, a estatística W superou em poder as demais estatísticas. Este resultado está coerente com o que é afirmado por Shapiro e Wilk (1965), quando se referem ao poder da estatística W.

A queda marcante de poder é mostrada na Figura 5 por meio da distribuição χ^2 com 30 graus de liberdade. Esta distribuição tem coeficientes de assimetria e de curtose semelhantes aos da distribuição normal; sendo assim, foi possível compreender esta queda no poder, que aumentou lentamente, à medida que aumentou o tamanho da amostra. Pela Figura 5(a), verificou-se que Z_1 e K_1 possuíam poder bastante semelhante, atingindo um valor elevado para $n \geq 200$. Os critério de curtose Z_2 e K_2 apresentaram baixo poder (<40%) para rejeitar a hipótese de nulidade, mesmo considerando $n=550$. Na Figura 5(b), verificou-se que Z_1 e K_1 atingiram poder elevado para $n \geq 300$. Os critérios Z_2 e K_2 apresentaram baixo poder (<35%) em rejeitar a hipótese de que a distribuição é normal. É interessante notar que o teste W se manteve com poder inferior aos critérios de assimetria tanto para 5% como para 1%, resultado não esperado, uma vez que o mesmo é considerado extremamente poderoso. Este resultado, em que o teste de Shapiro-Wilk é inferior quanto ao poder em relação a estatísticas baseadas em assimetria e curtose, também foi encontrado por Oja (1981 e 1983). Sabe-se que com $v=30$, a distribuição de qui-quadrado apresenta coeficiente de assimetria igual a 0,52, mostrando ser uma distribuição ligeiramente simétrica à direita. Nesse caso, é notório que um teste, baseado em desvios de assimetria, seja mais poderoso que o teste W de Shapiro-Wilk para detectar uma distribuição não-normal. O teste W, para ser considerado de maior

poder (>80%), tem que ser empregado nessa distribuição para $n \geq 300$ com valor nominal de significância de 5% e para $n \geq 500$ com significância nominal de 1%.

TABELA 5. Poder empírico utilizando a Distribuição χ^2 com 1 G.L

n	K1		K2		K1K2		Z1		Z2		W	
	5%	1%	5%	1%	5%	1%	5%	1%	5%	1%	5%	1%
5	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	28,00	0,00	21,24	0,00	29,80	13,70
10	35,30	16,14	14,64	6,70	35,30	16,14	58,28	36,86	40,30	32,66	74,12	51,38
15	65,62	42,42	32,78	25,72	65,62	42,42	78,00	59,44	52,20	44,26	92,30	77,56
20	82,80	60,04	46,34	37,44	82,80	60,04	89,70	75,00	61,46	52,98	98,26	92,68
25	92,90	80,32	57,42	48,74	92,90	80,32	95,56	87,14	69,44	61,92	99,66	98,12
30	96,98	89,92	66,32	57,96	96,98	89,92	98,06	93,28	75,52	68,56	99,94	99,62
35	98,92	95,22	74,66	66,50	98,92	95,22	99,36	97,12	81,40	75,26	100,00	99,96
40	99,60	97,74	79,18	72,26	99,60	97,74	99,76	98,46	84,86	79,28	100,00	99,98
45	99,94	98,64	83,42	76,90	99,94	98,64	99,98	99,14	87,46	82,94	100,00	100,00
50	99,98	99,76	87,66	82,02	99,98	99,76	99,98	99,88	91,44	86,96	100,00	100,00
55	100,00	99,76	90,40	85,76	100,00	99,76	100,00	99,98	93,08	89,52	100,00	100,00
60	100,00	99,94	92,04	88,68	100,00	99,94	100,00	99,96	94,30	91,44	100,00	100,00
65	100,00	99,98	93,66	90,40	100,00	99,98	100,00	100,00	95,50	93,06	100,00	100,00
70	100,00	99,98	95,88	92,78	100,00	99,98	100,00	100,00	96,76	95,00	100,00	100,00
75	100,00	100,00	96,46	93,56	100,00	100,00	100,00	100,00	97,10	95,48	100,00	100,00
80	100,00	100,00	97,18	95,04	100,00	100,00	100,00	100,00	97,90	96,34	100,00	100,00
85	100,00	100,00	97,60	95,84	100,00	100,00	100,00	100,00	98,30	97,04	100,00	100,00
90	100,00	100,00	98,16	96,88	100,00	100,00	100,00	100,00	98,70	97,68	100,00	100,00
95	100,00	100,00	98,64	97,48	100,00	100,00	100,00	100,00	99,06	98,06	100,00	100,00
100	100,00	100,00	99,16	98,12	100,00	100,00	100,00	100,00	99,34	98,62	100,00	100,00
150	100,00	100,00	99,92	99,86	100,00	100,00	100,00	100,00	99,92	99,90	100,00	100,00
200	100,00	100,00	100,00	99,98	100,00	100,00	100,00	100,00	100,00	99,98	100,00	100,00
250	100,00	100,00	100,00	100,00	100,00	100,00	100,00	100,00	100,00	100,00	100,00	100,00

TABELA 6. Poder empírico utilizando a Distribuição χ^2 com 5 G.L.

n	K1	K1	K2	K2	K1K2	K1K2	Z1	Z1	Z2	Z2	W	W
	5%	1%	5%	1%	5%	1%	5%	1%	5%	1%	5%	1%
5	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	9,48	0,00	6,22	0,00	8,50	2,30
10	8,80	1,90	2,00	0,32	8,80	1,90	19,96	9,42	15,10	10,72	19,84	8,30
15	19,96	8,10	8,28	4,88	19,98	8,12	30,52	16,44	19,22	14,06	31,66	13,52
20	33,14	17,02	14,26	9,86	33,22	17,18	43,12	25,20	25,02	18,96	44,64	24,30
25	42,20	23,42	17,72	13,10	42,02	23,48	50,28	30,80	25,94	20,12	54,40	32,74
30	51,28	30,98	21,80	16,30	51,30	31,04	58,22	38,80	29,20	23,50	63,56	40,78
35	61,70	39,64	25,66	19,18	61,70	39,66	67,48	46,56	33,28	26,54	71,98	50,88
40	69,56	47,10	29,26	21,74	69,56	47,18	74,68	54,36	36,34	29,36	80,14	59,44
45	75,72	54,60	31,84	24,98	75,72	54,64	79,32	60,08	38,84	31,14	85,26	67,54
50	81,20	62,32	35,70	28,44	81,20	62,34	84,00	67,32	42,32	34,58	89,52	74,78
55	80,44	61,50	35,22	27,70	80,86	61,50	83,96	66,18	41,84	34,06	89,24	74,36
60	89,10	72,50	40,82	33,02	89,14	72,50	90,84	76,78	46,94	38,62	95,72	86,32
65	90,92	75,84	42,98	34,76	90,92	75,84	92,42	79,38	48,42	40,30	96,60	88,74
70	90,70	76,20	42,76	34,52	90,70	76,20	91,98	79,10	47,78	39,66	96,38	88,40
75	94,76	83,92	48,50	39,30	94,76	83,92	95,70	85,96	53,24	44,38	98,24	93,64
80	96,14	87,30	49,48	40,62	96,14	87,30	96,90	89,38	54,18	45,80	98,98	95,62
85	97,30	89,30	52,08	43,52	97,36	89,34	97,62	91,34	56,86	47,92	99,24	96,66
90	98,48	92,48	54,00	45,36	98,56	96,48	98,62	93,62	58,52	49,48	99,68	98,00
95	98,70	93,86	56,04	47,62	98,72	93,86	98,78	94,84	60,40	51,90	99,64	98,36
100	98,98	95,20	57,92	48,94	99,02	95,20	99,12	95,94	62,46	53,54	99,80	98,76
150	100,00	99,64	72,66	64,32	100,00	99,64	100,00	99,68	75,24	67,42	100,00	100,00
200	100,00	99,98	81,60	73,78	100,00	99,98	100,00	99,98	83,46	76,06	100,00	100,00
250	100,00	100,00	88,84	82,98	100,00	100,00	100,00	100,00	90,04	84,52	100,00	100,00
300	100,00	100,00	92,62	87,66	100,00	100,00	100,00	100,00	93,40	88,90	100,00	100,00
350	100,00	100,00	94,62	90,84	100,00	100,00	100,00	100,00	95,22	91,70	100,00	100,00
400	100,00	100,00	96,94	94,86	100,00	100,00	100,00	100,00	97,20	95,34	100,00	100,00
450	100,00	100,00	98,52	96,92	100,00	100,00	100,00	100,00	98,76	97,14	100,00	100,00

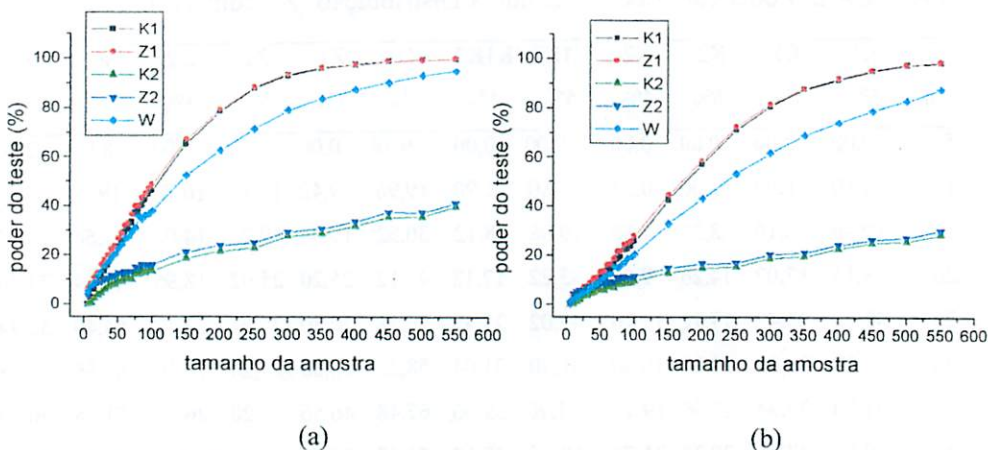


FIGURA 5. Poder do teste considerando a distribuição qui-quadrado com 30 g.l. com os valores nominais de significância de 5% (a) e de 1% (b).

Os resultados obtidos através da distribuição log-normal com $\sigma^2=1$ estão apresentados na Tabela 7. Verificou-se que Z_1 e K_1 atingiram poder elevado quando $n \geq 20$ para $\alpha=5\%$ e $n \geq 30$ para $\alpha=1\%$. As estatísticas Z_2 e K_2 atingiram poder elevado quando $n \geq 35$ para $\alpha=5\%$ e $n > 40$ para $\alpha=1\%$. A estatística W superou as demais estatísticas, tanto a 5% como a 1%, e atingiu um elevado poder com $n \geq 15$ para 5% e $n \geq 20$ para 1%. Resultados de poder da estatística W , encontrados por Shapiro e Wilk (1965), sugerem que esta é mais poderosa do que outras estatísticas. Os resultados aqui encontrados corroboram esta afirmação.

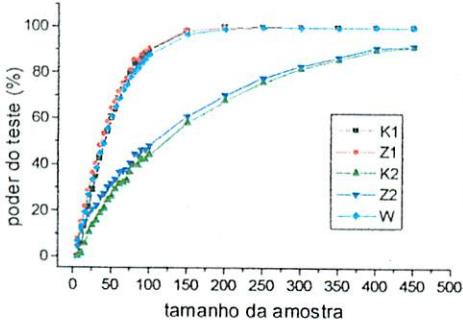
A distribuição log-normal com $\sigma^2=0,1$, com seus valores de poder representados na Figura 6, mostrou uma pequena superioridade de Z_1 e K_1 em relação à estatística W . O poder destas estatísticas tende a se igualar à medida que n cresce. Por meio da Figura 6(a), em que o valor nominal considerado foi de 5%, verificou-se que Z_1 , K_1 e W atingiram um elevado poder quando $n \geq 75$.

As estatísticas Z_2 e K_2 tiveram baixo poder quando comparadas com as demais e atingiram alto poder com grandes tamanhos amostrais, quais sejam, $n \geq 300$. As mesmas observações foram validadas quando o valor nominal considerado foi de 1%, como apresentado na Figura 6(b) no entanto com $n \geq 100$ para os testes de assimetria e W e com $n \geq 400$ para os testes de curtose.

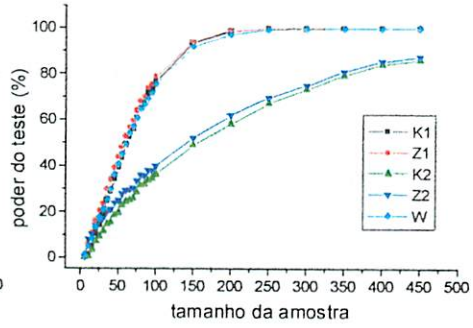
Considerando a distribuição log-normal com $\sigma^2 = 0,001$ (Figura 7), observou-se que Z_1 e K_1 superaram a estatística W. Resultados semelhantes com outras estatísticas, para esta mesma distribuição, foram encontradas por Oja (1981 e 1983). As estatísticas Z_2 e K_2 apresentaram poder inferior quando comparadas com os demais critérios. Todas as estatísticas apresentaram baixo poder em detectar os desvios de normalidade, pois esta distribuição é praticamente simétrica ($\sqrt{\beta_1} = 0,063$) e mesocúrtica ($\beta_2 = 3,02$). Isso é esperado, pois conforme σ^2 diminui, a distribuição torna-se simétrica e mesocúrtica. Sendo assim, os testes seriam menos sensíveis para detectar os desvios de normalidade. Os resultados obtidos para a distribuição de qui-quadrado com elevados graus de liberdade também foram semelhantes, ou seja, a estatística W foi superada em poder pelos testes de assimetria, em uma distribuição com apenas um pequeno desvio ($\sqrt{\beta_1} = 0,063$). Para o valor nominal de significância de 1% e tamanhos amostrais maiores, diga-se $n \geq 100$, os testes baseados em desvios de curtose se igualaram ao teste de Shapiro-Wilk (W). Esse é um fato também surpreendente, pois além de terem sido, nos casos anteriores sempre menos poderosos, aqui foram aplicados em uma distribuição que pode ser considerada praticamente mesocúrtica ($\beta_2 = 3,02$). Este resultado foi parecido com os encontrados por D'Agostino e Rosman (1974), segundo os quais o teste de Gery em amostras simétricas foi, em algumas situações, superior ao teste de Shapiro-Wilk.

TABELA 7. Poder empírico utilizando a distribuição log-normal $\sigma^2=1$

n	K1		K2		K1K2		Z1		Z2		W	
	5%	1%	5%	1%	5%	1%	5%	1%	5%	1%	5%	1%
5	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	24,88	0,00	18,20	0,00	23,98	10,40
10	34,56	18,20	17,34	8,30	34,56	18,20	54,50	35,82	40,36	33,66	61,24	41,54
15	64,12	44,58	37,18	29,94	64,12	44,58	75,96	58,68	54,08	47,52	82,70	65,72
20	80,86	64,82	52,56	45,14	80,86	64,82	86,34	74,32	65,32	58,66	92,44	82,84
25	90,52	79,48	64,14	56,38	90,52	79,48	93,62	85,10	72,88	67,46	97,46	92,26
30	96,18	89,12	73,04	66,72	96,18	89,12	97,48	92,36	80,24	75,28	99,22	97,24
35	98,52	94,26	79,80	74,42	98,52	94,26	98,96	96,30	84,98	80,46	99,76	98,96
40	99,20	96,88	84,50	79,36	99,20	96,88	99,40	97,86	88,58	84,56	100,00	99,54
45	99,74	98,30	87,94	84,12	99,74	98,30	99,82	98,88	91,08	87,68	100,00	99,92
50	99,90	99,48	91,00	88,00	99,90	99,48	99,94	99,68	93,30	90,52	100,00	99,98
55	99,88	99,68	93,44	90,50	99,88	99,68	99,92	99,74	95,02	92,84	100,00	99,98
60	99,98	99,86	95,12	92,60	99,98	99,86	100,00	99,92	96,42	94,56	100,00	100,00
65	99,98	99,84	96,30	94,46	99,98	99,84	100,00	99,98	97,42	95,76	100,00	100,00
70	100,00	100,00	97,44	95,66	100,00	100,00	100,00	100,00	98,20	96,72	100,00	100,00
75	100,00	100,00	97,72	96,62	100,00	100,00	100,00	100,00	98,44	97,42	100,00	100,00
80	100,00	100,00	98,50	97,38	100,00	100,00	100,00	100,00	98,96	98,02	100,00	100,00
85	100,00	100,00	98,88	98,04	100,00	100,00	100,00	100,00	99,20	98,62	100,00	100,00
90	100,00	100,00	99,40	98,64	100,00	100,00	100,00	100,00	99,54	99,10	100,00	100,00
95	100,00	100,00	99,42	98,92	100,00	100,00	100,00	100,00	99,54	99,20	100,00	100,00
100	100,00	100,00	99,70	99,48	100,00	100,00	100,00	100,00	99,78	99,62	100,00	100,00
150	100,00	100,00	99,98	99,96	100,00	100,00	100,00	100,00	100,00	99,98	100,00	100,00
200	100,00	100,00	100,00	100,00	100,00	100,00	100,00	100,00	100,00	100,00	100,00	100,00

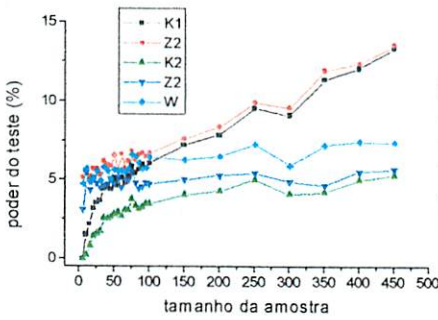


(a)

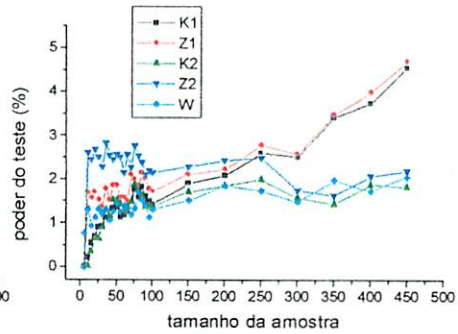


(b)

FIGURA 6. Poder do teste considerando a distribuição log-normal com $\sigma^2=0,1$ para os valores nominais de 5% (a) e de 1% (b),



(a)



(b)

FIGURA 7. Poder do teste considerando a distribuição log-normal com $\sigma^2=0,001$ para os valores nominais de 5% (a) e de 1% (b).

Como já mencionado anteriormente, a distribuição uniforme é simétrica e platicúrtica. Nas Figuras 8(a) e 8(b) foi possível perceber que as estatísticas Z_1 e K_1 não tinham poder algum em detectar o desvio de normalidade. Sendo assim, a distribuição poderia ser considerada erroneamente como normal. Desta forma, seria cometido o erro tipo II em 100% dos casos. O que surpreende é o fato de o teste não apresentar resultados que oscilem em torno do valor nominal adotado, como acontece em uma distribuição normal com $\sqrt{\beta_1} = 0$, que é o mesmo valor dessa distribuição. Nesta situação, Z_2 e K_2 são extremamente sensíveis para detectar os desvios de normalidade. Os resultados para as estatísticas Z_2 e K_2 , conforme a Figura 8(a), mostraram baixo poder em detectar os desvios de normalidade para amostras com $n < 50$. A partir deste tamanho amostral, o poder aumentou conforme aumentou o tamanho, da amostra com uma taxa de crescimento muito grande. A estatística W foi superior ao critério de curtose, detectando desvios de normalidade com amostras inferiores a 50. Estas estatísticas tenderam a se igualar em poder quando $n > 150$. No caso em que o valor nominal de significância considerado foi de 1%, conforme apresentado na Figura 8(b), verificou-se que as estatísticas Z_2 e K_2 tiveram baixo poder em detectar os desvios de normalidade quando $n < 100$. O critério W , no caso de 1%, também apresentou superioridade em detectar os desvios de normalidade, embora também tivesse baixo poder em detectar desvios de normalidade para pequenas amostras $n < 50$. A partir deste tamanho amostral, o teste atingiu poder bastante elevado. Também para este caso, os resultados em que a estatística W superou em poder as demais estatísticas estão coerentes com os encontrados no estudo de Shapiro e Wilk (1965).

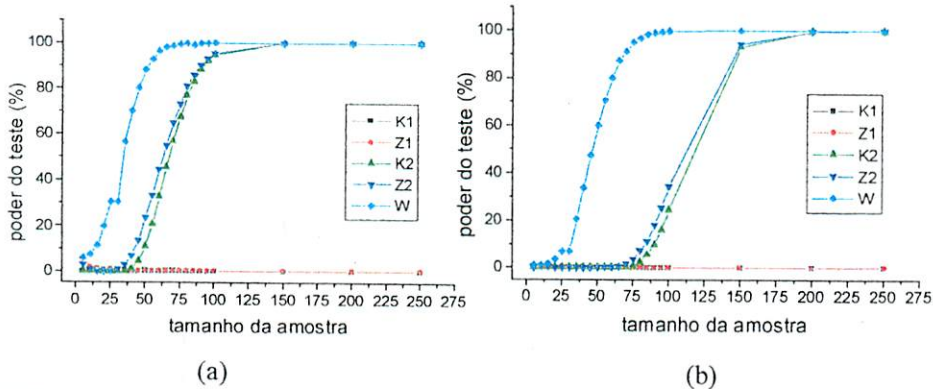



FIGURA 8. Poder do teste considerando a distribuição uniforme (0,1) com os valores nominais de 5% (a) e de 1% (b).

Nas Tabelas 5, 6 e 7 também é apresentada a opção K_1K_2 a 5% e 1%. Por esta alternativa, verificou-se o desvio de normalidade a partir do fato de que, se K_1 ou K_2 rejeitassem a hipótese de nulidade para assimetria ou para curtose, então, um desvio de normalidade seria considerado. Portanto, basta que uma ou outra estatística rejeite a hipótese de nulidade para que os dados sejam considerados como provenientes de uma distribuição não normal. Esta opção foi considerada em todas as distribuições. Os resultados deste critério foram semelhantes aos critérios mais sensíveis para detectar os desvios de normalidade. Pode-se observar que os resultados obtidos por K_1K_2 foram iguais aos apresentados pela estatística K_1 . E no caso da distribuição uniforme, o resultado foi igual ao da estatística K_2 , pois nesta situação o critério de curtose é mais sensível para detectar os desvios de normalidade. Não foram apresentados resultados detalhados desta opção, pois estes seriam redundantes em relação aos já comentados. É importante enfatizar que esta é a melhor estratégia a ser adotada, ou seja, recomenda-se, ao testar a hipótese de nulidade (distribuição normal dos dados ou dos resíduos de um modelo), que ambos os



critérios sejam empregados, uma vez que, estando sob H_1 , nunca se sabe, na prática, sob qual distribuição os dados se enquadram.

4.1.1 Quantis dos dados univariados

Para avaliar o comportamento dos quantis empíricos das aproximações assintóticas, foram consideradas os quantis da distribuição de qui-quadrado para os valores nominais de 5% e 1%, de 3,84 e 6,63, respectivamente, e os valores dos quantis da distribuição normal para os valores nominais de 2,5% e 0,5%, de 1,96 e 2,57, respectivamente. Nas Figuras 9 e 10, estes valores são representados pela linha reta. Por meio da Figura 9(a), cujo valor nominal é de 5% , observou-se que para tamanhos amostrais $n < 75$, a estatística K_1 possui valores inferiores ao quantil da distribuição de qui-quadrado de 3,84. A partir de $n > 75$, os quantis empíricos tendem a oscilar em torno deste quantil, mostrando que a cauda desta aproximação, para este tamanho amostral, é semelhante à da distribuição de qui-quadrado. Já os quantis obtidos por Z_1 superaram o quantil de 3,84 da distribuição de qui-quadrado, começando oscilar em torno do referido quantil a partir de $n \geq 25$. A Figura 9(b), com valor nominal de 1%, mostra que a estatística K_1 apresenta quantis inferiores ao valor 6,63, quantil da distribuição de qui-quadrado, para $n < 25$, e a partir deste tamanho amostral os valores são superiores ao referido quantil. Os resultados dos quantis obtidos por Z_1 superaram o quantil 6,63, a partir de tamanhos amostrais inferiores a 25. A cauda de Z_1 é leve e a de K_1 é mais pesada para tamanhos amostrais inferiores a 50, em relação à distribuição de qui-quadrado. A Figura 10(a), com o valor nominal de 2,5%, mostra que para $n < 50$, K_2 possui quantis aquém do quantil da distribuição normal, ou seja, menores que 1,96. Quando $n > 25$, os quantis empíricos tendem a oscilar acima do quantil 1,96, caracterizando uma cauda

leve em relação à distribuição normal. Já a estatística Z_2 possui quantis superiores a 1,96 para todos os tamanhos amostrais, apresentando-se superiores aos da estatística K_2 . Estes resultados indicam que ambas as estatísticas possuem caudas leves em relação ao quantil da distribuição normal. Por meio da Figura 10(b), em que o valor nominal considerado foi de 0,5% , verificou-se que os quantis das estatísticas K_2 e Z_2 superaram o valor do quantil da distribuição normal, ou seja, 2,57, mostrando que estas possuem uma distribuição mais leve do que a da distribuição normal. Através das Figuras 9 e 10, verificou-se também que à medida que o valor da significância nominal diminuiu, houve um aumento na discrepância entre os quantis empíricos e os da distribuição normal ou da distribuição de qui-quadrado limitante, ressaltando mais uma vez, que o valor nominal de 5% é o mais adequado para estas aproximações.

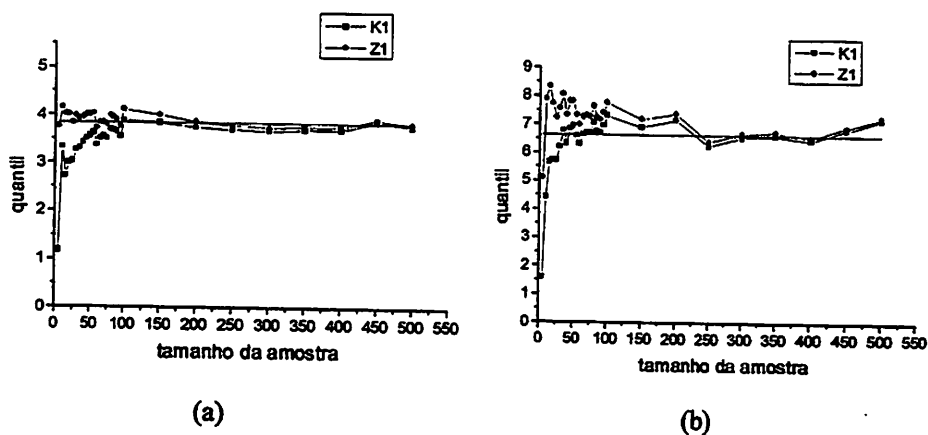


FIGURA 9. Quantis aproximados considerando a distribuição de qui-quadrado com os valores nominais de 5% (a) e de 1% (b).

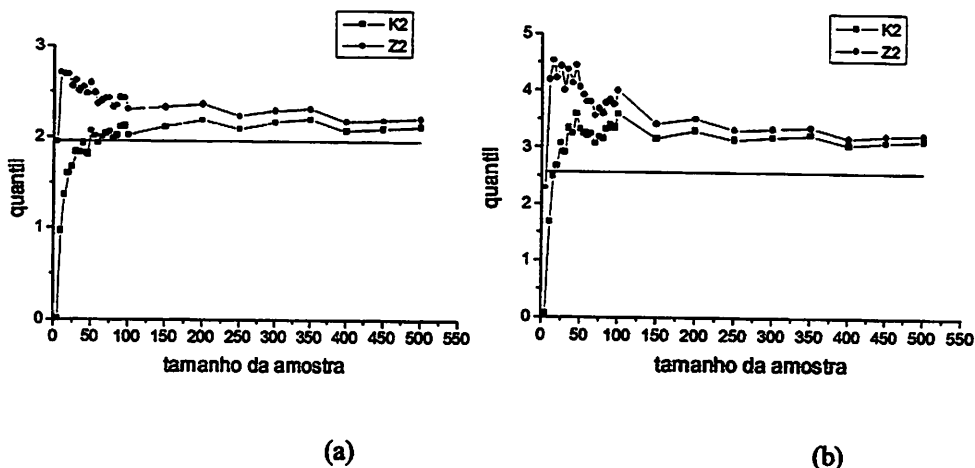


FIGURA 10. Quantis aproximados considerando a distribuição normal padrão com os valores nominais de 2,5% (a) e de 0,5% (b).

4.2 Caso multivariado

Para avaliar a taxa de erro tipo I, foi utilizado o caso sob distribuição normal multivariada, com $p=2, 3, 4$ e 5 . As correlações utilizadas foram $0; 0,5; 0,9; -0,5$. Os valores nominais adotados foram 5% e 1% , como no caso univariado.

Por meio da Figura 11(a), da distribuição normal bivariada com $\alpha=5\%$, verificou-se que Z_1 não controlou adequadamente a taxa de erro tipo I, superando o valor nominal estabelecido para $n < 150$. A estatística Z_1 aproximou-se do valor nominal com amostras $n \geq 150$. A estatística K_1 , por outro lado, mostrou-se conservadora para $n < 75$, começando a oscilar em torno do valor nominal a partir deste tamanho amostral, ou seja, $n \geq 75$. Para o valor

nominal de significância de 1% (Figura 11b), a estatística K_1 apresentou poder inferior ao valor nominal para $n < 25$ e Z_1 apresentou valores superiores ao valor nominal para $n < 250$. A partir desses valores de n , houve uma convergência dessas estatísticas para o valor nominal de 1%. As estatísticas Z_2 e K_2 , com $\alpha = 5\%$, mostradas na Figura 12(a), se mantiveram aquém do valor nominal estabelecido, com $n < 50$ para Z_2 e com $n < 500$ para K_2 , sendo que a estatística K_2 foi a mais rigorosa. Acima desses valores de n , as aproximações assintóticas podem ser consideradas adequadas. Através da Figura 12(b), verificou-se que a estatística K_2 foi mais rigorosa com $n < 50$, aproximando do valor nominal com n superior a esse valor. Para esses tamanhos amostrais e valor nominal, pode-se considerar que esta estatística controla a taxa de erro tipo I. A estatística Z_2 , por outro lado, só começou a controlar a taxa de erro tipo I para valores de n superiores a 500, sendo que, no caso contrário ($n \leq 500$), se manteve acima do valor nominal fixado.

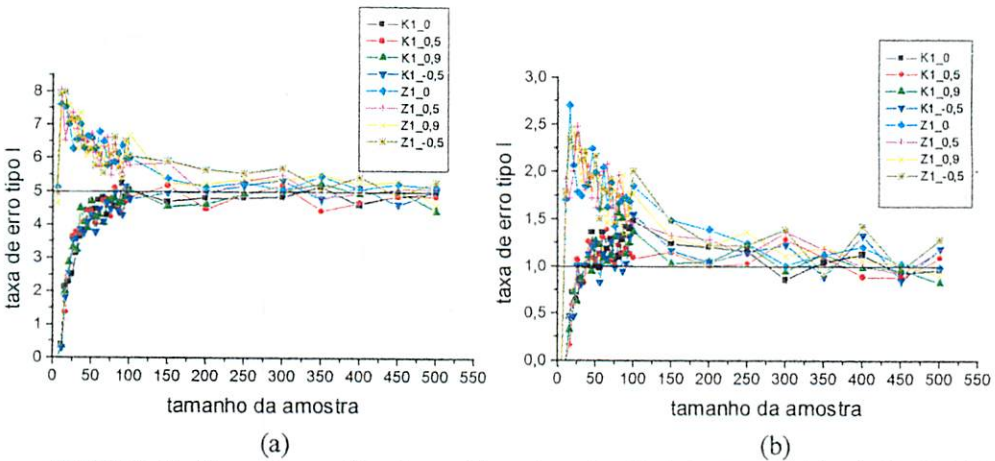


FIGURA 11. Taxa de erro tipo I considerando a distribuição normal bivariada, 5% (a) e 1% (b).

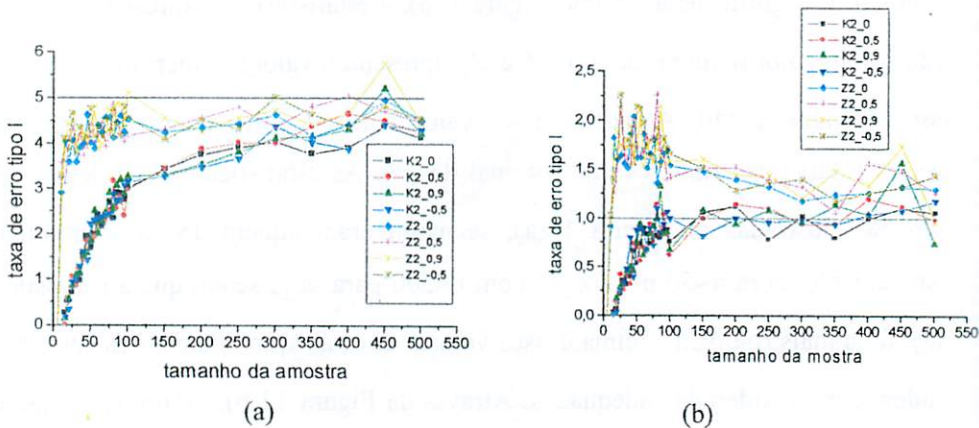


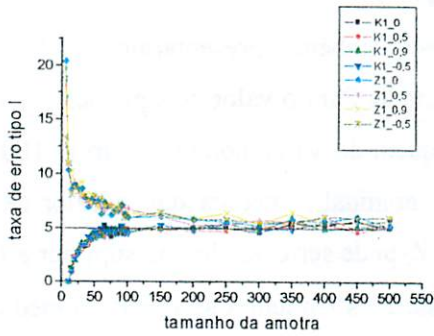
FIGURA 12. Taxa de erro tipo I considerando a distribuição normal bivariada, 5% (a) e 1% (b).

Observando as Figuras 13, 14, 15 e 16, referentes aos casos trivariado e pentavariado, perceberam-se as mesmas tendências relatadas para o caso bivariado. A estatística Z_1 apresentou uma tendência de superestimar o valor nominal de significância para $\alpha=5\%$. Essa tendência se acentuou com o aumento do valor de p , número de variáveis. À medida que p cresce, maior deve ser o tamanho amostral para uma convergência assintótica perfeita. Para fins práticos, com o valor nominal da significância de 5%, é razoável recomendar o valor amostral mínimo de 150. Para a estatística K_1 , ainda com $\alpha=5\%$, o tamanho amostral mínimo de 50 parece ser razoável para uma boa adequação assintótica do teste (Figuras 13a e 15a). Com este tamanho amostral, o teste avaliado por Mudholkar, Mcdermott e Srivastava (1992), baseado no conceito de distância, se mostrou conservador. Já para o valor nominal de significância de 1% (Figuras 13b e 15b), praticamente os mesmos resultados observados para o

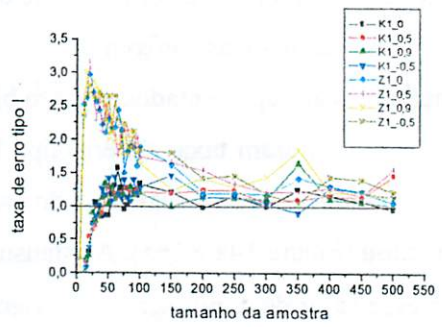
caso bivariado foram observados. Para Z_1 , amostras superiores a 300 são requeridas para uma boa convergência com $p=5$.

As estatísticas referentes à curtose também apresentaram resultados semelhantes aos apresentados no caso bivariado. Para o valor de significância de 5%, elas mostraram taxas de erro tipo I aquém do valor nominal com $n < 100$ e aproximaram-se assintoticamente do valor nominal à medida que o valor de n aumentou (Figura 14a e 16a). A estatística Z_2 pode ser considerada superior a K_2 para esse valor de α por ser menos rigorosa. Elas tendem a se igualar à medida que p aumenta. Para $\alpha = 1\%$ (Figuras 14b e 16b), valores amostrais superiores aos do caso bivariado para K_2 , e inferiores para Z_2 , são requeridos para que haja uma boa aproximação assintótica, quais sejam, $n > 100$, tanto para K_2 quanto para Z_2 . Essa convergência para o valor nominal de significância também melhorou com o aumento do número de variáveis p . Esses resultados sugeriram que as distribuições de Z_1 e de Z_2 possuem caudas mais leves do que a da distribuição normal e das distribuições assintóticas de K_1 e K_2 , respectivamente.

Outro aspecto que precisa ser enfatizado é o da correlação entre variáveis. Pelo emaranhado de linhas de um determinado teste, apresentado nas Figuras 11, 12, 13, 14, 15 e 16, verificou-se que a estrutura de correlação não afeta as taxas de erro tipo I. Esse aspecto é importante para o usuário destes testes devido ao fato de não ser necessário nenhum tipo de preocupação com a natureza da estrutura de correlação quando da aplicação prática dos mesmos.

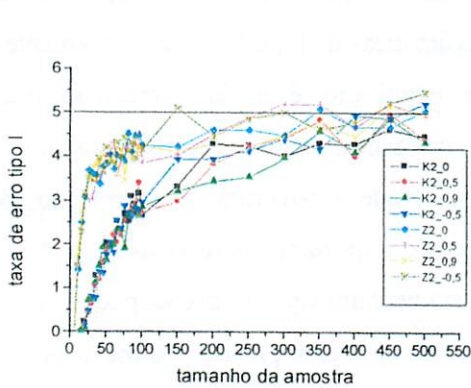


(a)

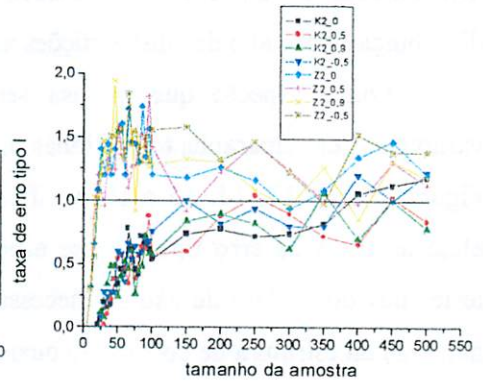


(b)

FIGURA 13. Taxa de erro tipo I considerando a distribuição normal trivariada, 5% (a) e 1%(b).



(a)



(b)

FIGURA 14. Taxa de erro tipo I considerando a distribuição normal trivariada, 5% (a) e 1% (b).

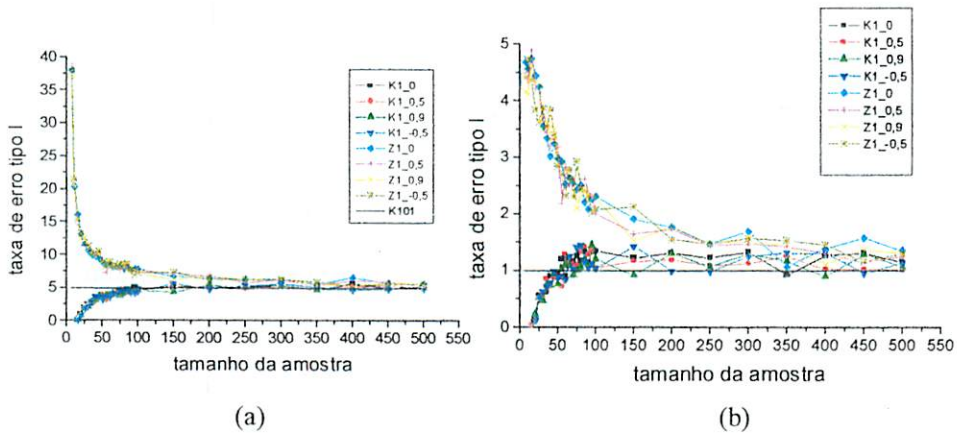


FIGURA 15. Taxa de erro tipo I considerando a distribuição normal pentavariada, 5% (a) e 1% (b).

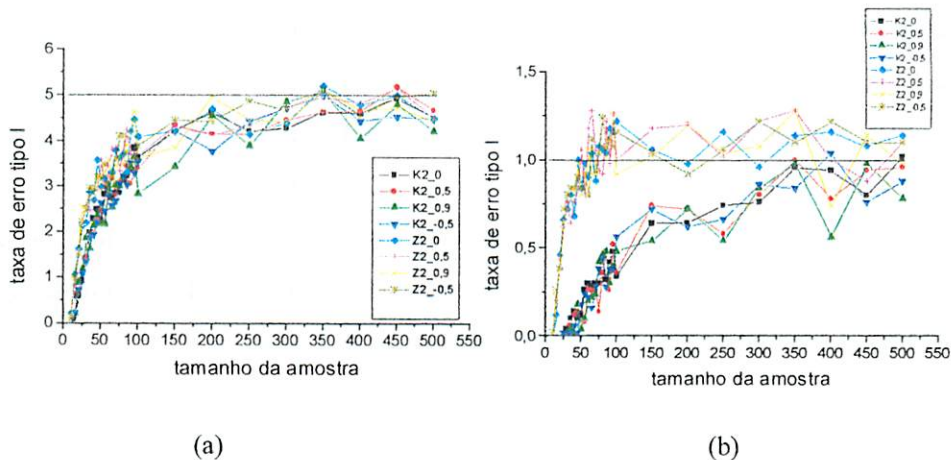
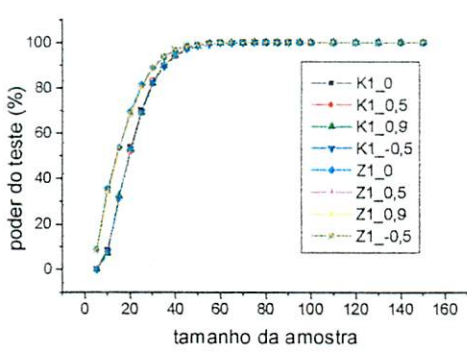


FIGURA 16. Taxa de erro tipo I considerando a distribuição normal pentavariada, 5% (a) e 1% (b).

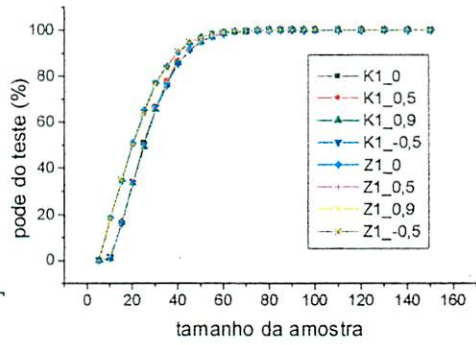
Para avaliar o poder do teste, foram consideradas distribuições cujas f.d.p's são não normais. Considerando a situação em que a distribuição multivariada foi gerada a partir de uma distribuição de qui-quadrado, foi apresentado apenas o caso em que $p=2$, uma vez que, com $p=3, 4$ e 5 , os resultados obtidos foram semelhantes. Destacou-se apenas o fato de, que com o aumento das variáveis, a estatística Z_1 aumentou o poder consideravelmente para amostras $n < 20$. Esse resultado foi facilmente explicado considerando o fato de Z_1 não ter controlado a taxa de erro tipo I adequadamente, em geral superestimando o valor de α . Verificou-se (Figuras 17a e 17b) que Z_1 superou em poder a estatística K_1 , o que, conforme comentado anteriormente, já era esperado. Quando $n \geq 20$, as estatísticas atingiram um elevado poder para $\alpha=5\%$ e $n \geq 30$ para $\alpha=1\%$. Elas tendem a se igualar com $n \geq 50$.

Considerando as estatísticas relativas à curtose verificou-se que a estatística Z_2 superou em poder a estatística K_2 (Figuras 18a e 18b). Essas estatísticas atingiram um valor elevado de poder quando $n \geq 70$ para $\alpha=5\%$ e $n \geq 80$ para $\alpha=1\%$. Estas estatísticas tendem a se igualar em poder quando $n > 100$ para $\alpha=5\%$ e $n > 130$ para $\alpha=1\%$. Pelas mesmas razões mencionadas anteriormente, justificou-se o maior poder da estatística Z_2 sobre a K_2 .

Novamente é preciso salientar que a estrutura de covariância, como aconteceu no caso das taxas de erro tipo I, não afetou o poder dos testes. De certa forma, como salientado anteriormente, esse resultado foi considerado de extrema importância para o uso regular dos testes de normalidade multivariada baseados nos desvios de assimetria e curtose.

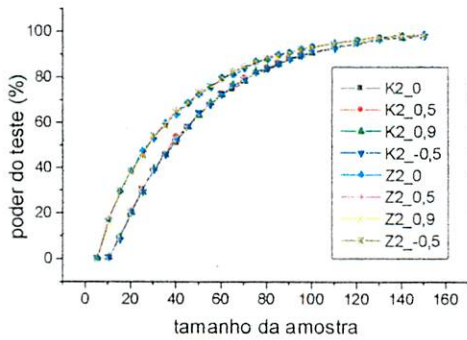


(a)

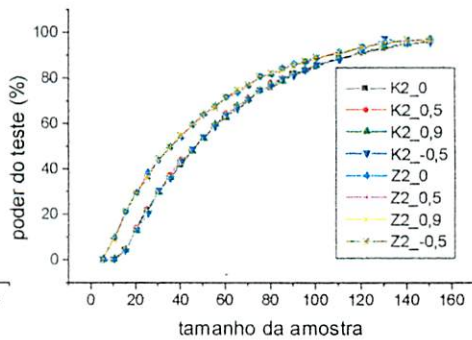


(b)

FIGURA 17. Poder do teste considerando a distribuição bivariada gerada a partir da distribuição de qui-quadrado, 5% (a) e 1% (b).



(a)



(b)

FIGURA 18. Poder do teste considerando a distribuição bivariada gerada a partir da distribuição de qui-quadrado, 5% (a) e 1% (b).

A distribuição multivariada, gerada a partir da distribuição exponencial, tem seus resultados apresentados nas Figuras 19 e 20. Resultados similares aos da distribuição qui-quadrado foram encontrados, sendo, novamente, Z_1 e Z_2 mais poderosas que K_1 e K_2 , respectivamente, para um mesmo tamanho de amostra. As estatísticas Z_1 e K_1 apresentaram elevado poder para $n \geq 20$ para $\alpha = 5\%$ e $n > 20$ para $\alpha = 1\%$. Já as estatísticas Z_2 e K_2 (Figura 20) apresentaram elevado poder ($> 80\%$) com $n \geq 40$ ($\alpha = 5\%$) e $n \geq 50$ ($\alpha = 1\%$). As tendências de se igualarem ocorreu a partir do tamanho amostral de 30 para assimetria e 80 para curtose.

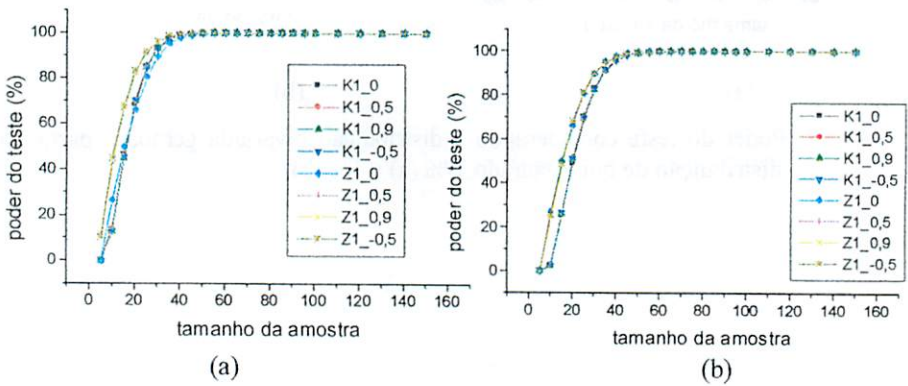


FIGURA 19. Poder do teste considerando a distribuição bivariada gerada a partir da distribuição exponencial, 5% (a) e 1% (b).

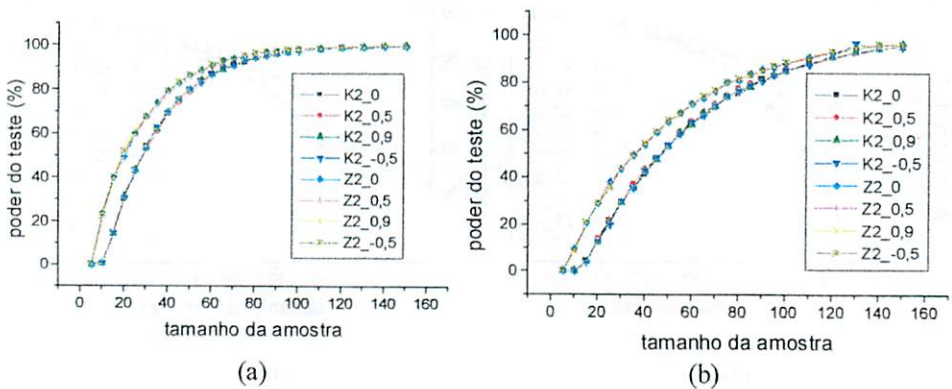
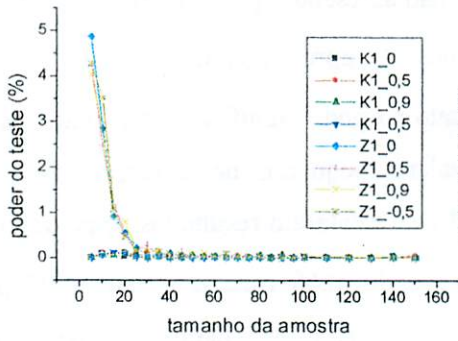


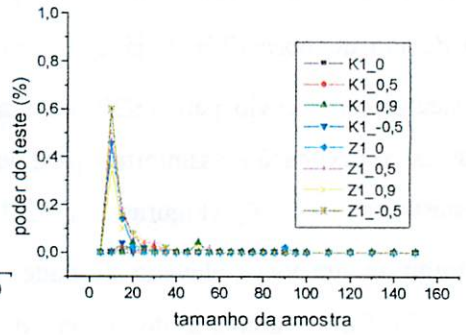
FIGURA 20. Poder do teste considerando a distribuição bivariada gerada a partir da distribuição exponencial, 5% (a) e 1% (b).

Para a distribuição uniforme bivariada, como mostra a Figura 21(a) e 21(b), verificou-se que a estatística K_1 não apresentou poder algum em detectar o desvio de normalidade, já a estatística Z_1 apresentou um baixo poder em detectar este desvio para $n \leq 20$. Esse fato só pode significar uma inadequação dessa aproximação assintótica para valores pequenos de n como esses. As estatísticas K_2 e Z_2 (Figuras 22a e 22b) apresentaram resultados semelhantes e atingiram um valor elevado de poder quando $n \geq 60$ para $\alpha = 5\%$ e $n \geq 95$ para $\alpha = 1\%$. Com o aumento do número de variáveis de $p=2$ para $p=5$, verificou-se que as estatísticas Z_1 e K_1 não apresentaram poder em detectar desvios de normalidade, a não ser com Z_1 em pequenas amostras (Figura 23). Observou-se que com esse aumento do número de variáveis, a estatística K_2 mostrou-se superior em poder à estatística Z_2 (Figura 24). A estatísticas K_2 apresentou poder elevado quando $n \geq 45$ para $\alpha = 5\%$ e $n \geq 70$ para $\alpha = 1\%$. A estatística Z_2 apresentou poder elevado quando $n \geq 55$ para $\alpha = 5\%$, como mostra a Figura 24(a) e $n \geq 80$ para $\alpha = 1\%$ (Figuras 24b). Um tamanho amostral que garante uma boa aproximação para a estatística K_1 , nas diferentes distribuições geradas, foi $n > 50$. Este tamanho amostral também foi encontrado por Mudholkar, Mcdermott e Srivastava (1992), sendo mais adequado para o nível nominal 5%.

Também no caso multivariado, utilizou-se o critério K_1K_2 e os resultados e conclusões relacionados a esse critério foram semelhantes aos obtidos no caso univariado.

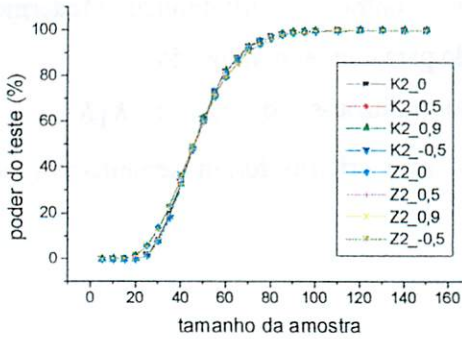


(a)

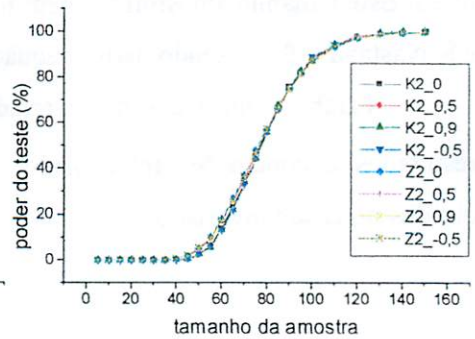


(b)

FIGURA 21. Poder do teste considerando a uniforme bivariada, 5% (a) e 1% (b).

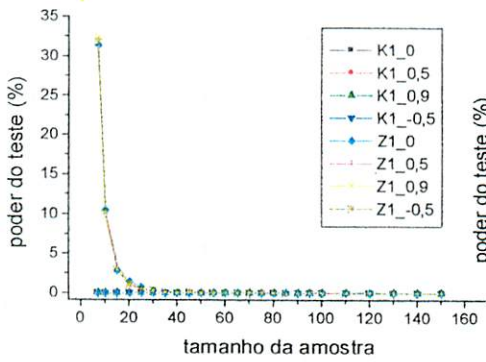


(a)

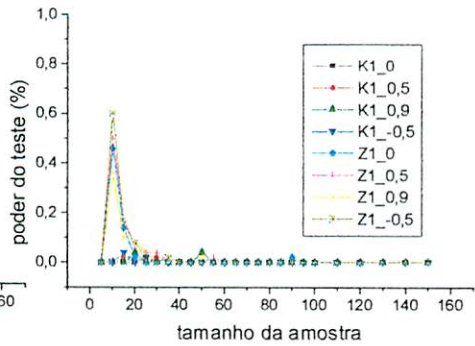


(b)

FIGURA 22. Poder do teste considerando a uniforme bivariada, 5% (a) e 1% (b).

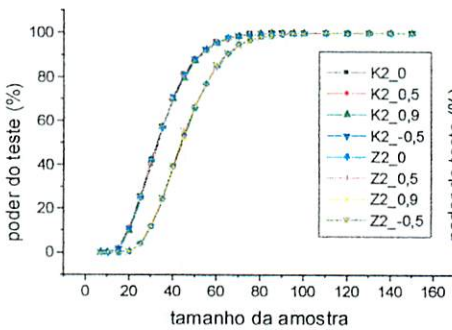


(a)

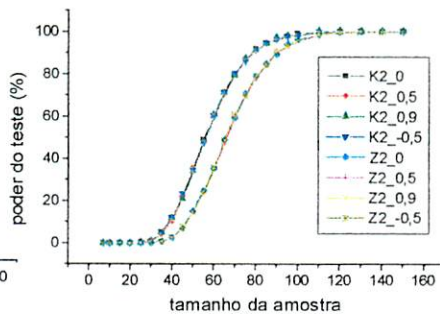


(b)

FIGURA 23. Poder do teste considerando a uniforme pentavariada, 5% (a) e 1% (b).



(a)



(b)

FIGURA 24. Poder do teste considerando a uniforme pentavariada, 5% (a) e 1% (b).

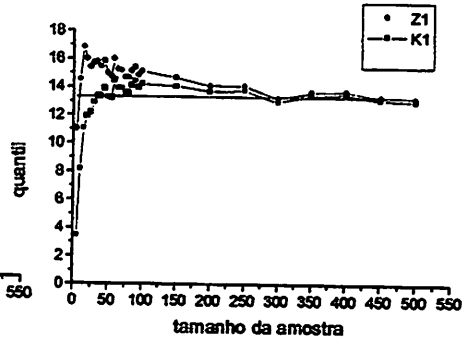
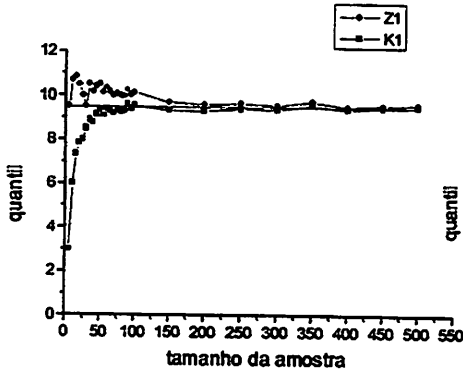
4.2.1 Quantis dos dados multivariados

Foram descritos apenas os resultados com a estrutura de correlação zero, uma vez que a estrutura de correlação não afetou os resultados obtidos. Serão apresentados os casos com $p=2$ e 5, uma vez que, com $p=3, 4$, os resultados foram semelhantes.

O quantil da distribuição de qui-quadrado com o valor nominal de 5%, é 9,49. Por meio da Figura 25(a), observou-se que os quantis para K_1 começaram a oscilar em torno de 9,46 a partir de $n>50$. A partir deste tamanho amostral, verificou-se que os quantis empíricos tenderam a oscilar em torno do quantil da distribuição de qui-quadrado com o aumento de n . Estes resultados indicaram que a cauda da distribuição de K_1 aproxima-se bem da distribuição de quadrado. Já a estatística Z_1 possui valores superiores a 9,46, os quantis desta estatística tenderam a oscilar próximos ao valor 9,46 com $n>150$. Para o valor nominal de 1%, mostrado na Figura 25(b), em que o quantil da distribuição de qui-quadrado é 13,28 verificou-se que os quantis empíricos de K_1 começaram a oscilar em torno do valor 13,28 com $n>25$. A estatística Z_1 superou o valor 13,28, a partir de $n\geq 25$, tendendo a oscilar em torno do mesmo com $n>250$. Estes resultados indicaram que as caudas de K_1 e Z_1 são mais leves quando comparadas com a distribuição de qui-quadrado, para maiores valores de n no primeiro caso. Por meio da Figura 26(a), em que a distribuição é normal bivariada com valor nominal de 2,5%, verificou-se que os quantis obtidos por Z_2 superaram o quantil da distribuição normal, que neste caso é 1,96. Este resultado mostrou que a cauda da aproximação Z_2 é mais leve que a cauda da distribuição normal. Ainda pela Figura 26(a), verificou-se que a estatísticas K_2 , para $n<75$, tiveram seus quantis abaixo de 1,96, e a partir deste tamanho

amostral os valores oscilaram muito próximos do valor 1,96. Para valores de $n > 75$, as caudas da distribuição K_2 se aproximam satisfatoriamente da distribuição normal. Por meio da Figura 26(b), em que o valor nominal considerado é 0,5%, verificou-se que os quantis de Z_2 e K_2 superaram o quantil da distribuição normal, que neste caso é 2,57, a partir de tamanhos amostrais $n > 50$ para K_2 e $n > 5$ para Z_2 . Ambas as distribuições possuem caudas leves em relação à distribuição normal. Verificou-se também, através das Figuras 25 e 26, que a diminuição do nível nominal implica no aumento da discrepância entre os quantis empíricos e os obtidos pelas distribuições normal ou qui-quadrado.

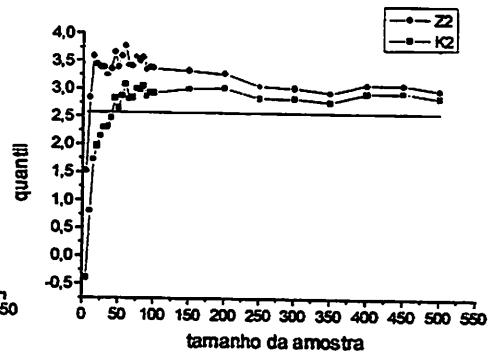
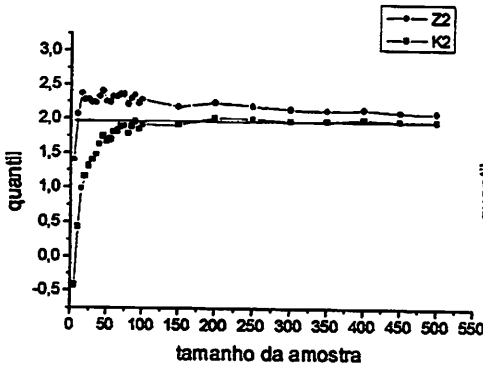
Através da Figura 27(a) e 27(b), considerando a distribuição normal pentavariada, verificou-se que os resultados foram os mesmos que no caso bivariado (Figura 25(a) e 25(b)). A discrepância entre os quantis empíricos, e os da distribuição normal diminuíram com o aumento do número de variáveis, como pode ser visto na Figura 28. Os quantis de Z_2 (Figura 28(a)) oscilaram próximos do quantil 1,96 a partir de $n > 25$. No caso da estatística K_2 (Figura 28(a)), os quantis foram inferiores a 1,96, indicando uma cauda mais pesada do que a da distribuição normal. Na Figura 28(b) da distribuição normal pentavariada com valor nominal de 0,5%, verificou-se que Z_2 possui quantis superiores ao da distribuição normal 2,57, já para $n > 25$, este resultado indica que a aproximação em questão tem cauda leve em relação à distribuição normal. Os quantis de K_2 são inferiores a 2,57 para $n < 100$; a partir deste valor os quantis oscilaram em torno do quantil da distribuição normal. O efeito do número de variáveis afetou somente as estatísticas K_2 e Z_2



(a)

(b)

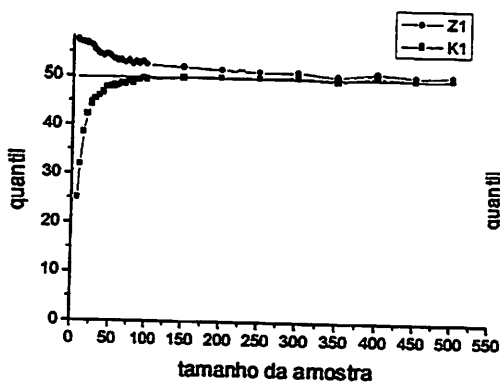
FIGURA 25. Quantis aproximados considerando a distribuição normal bivariada com os valores nominais de 5% (a) e 1% (b).



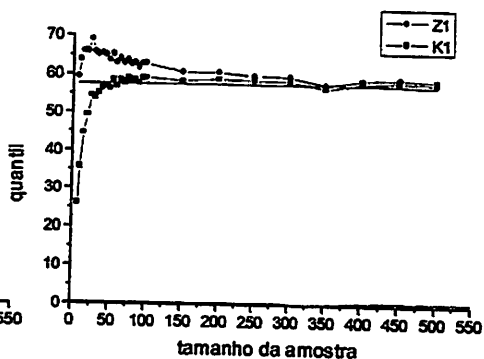
(a)

(b)

FIGURA 26. Quantis aproximados considerando a distribuição normal bivariada com os valores nominais de 2,5% (a) e 0,5% (b).

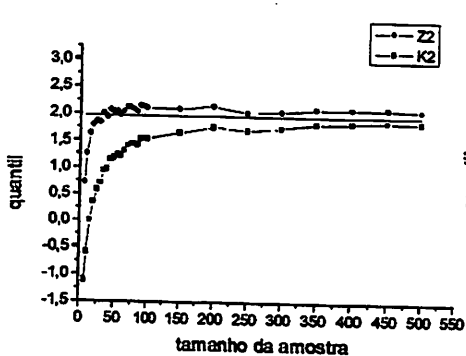


(a)

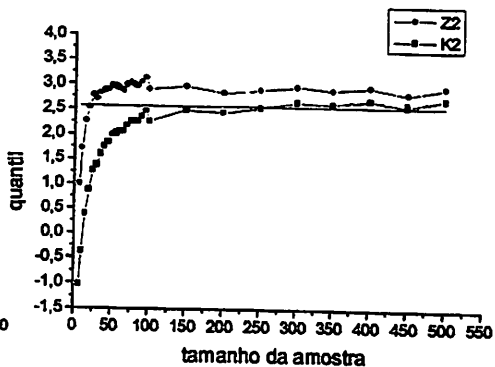


(b)

FIGURA 27. Quantis aproximados considerando a distribuição normal pentavariada com os valores nominais de 5% (a) e 1% (b).



(a)



(b)

FIGURA 28. Quantis aproximados considerando a distribuição normal pentavariada com os valores nominais de 2,5% (a) e 0,5% (b).

5 CONCLUSÕES

Caso univariado

As estatísticas Z_1 e Z_2 possuem aproximação assintótica normal para $n \geq 25$ e podem ser recomendadas para uso rotineiro no caso univariado para $\alpha=5\%$, para testar desvios de assimetria e curtose, respectivamente;

As estatísticas K_1 e K_2 possuem aproximações assintóticas melhores que Z_1 e Z_2 para um menor valor do valor nominal de significância, sendo recomendadas para $n \geq 25$ e $n \geq 100$, respectivamente, garantindo-se o compromisso com o controle da taxa de erro tipo I e um elevado poder;

No caso de distribuições com simetria próxima de zero e não normais, as estatísticas baseadas em desvios de assimetria apresentam maior poder do que a estatística W de Shapiro-Wilk;

Caso Multivariado

As diferentes estruturas de correlação não afetaram o poder e a taxa de erro tipo I dos testes;

A estatística K_1 é adequada para uso a partir de $n \geq 50$, para valores nominais de significância de 5 ou 1%.

A estatística K_2 é assintoticamente adequada para os testes de desvios de curtose para $n \geq 100$, independentemente dos valores nominais da significância;

As estatísticas de assimetria em geral são mais poderosas do que as de curtose, mas os testes da hipótese nula de normalidade devem considerar tanto os testes de desvios de assimetria como os de curtose, conjuntamente.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- BOCK, R. D. **Multivariate statistical methods in behavioral reserch.** Chicago: MacGraw – Hill, 1975. 623 p.
- BORGES, L. C.; FERREIRA, D. F. Comparações de duas aproximações do teste t com variância heterogêneas através de simulação. **Ciência e Agrotecnologia**, Lavras, v. 23, n. 2, abr. 1999.
- CAMPOS, H. **Estatística experimental não paramétrica.** Piracicaba: ESALQ, 1983. 349 p.
- COCHRAN, W. G.; COX, G. M. **Experimental designs.** 2. ed. Singapore: John Wiley & Sons, 1957. 611p.
- DACHS, J. N. **Estatística computacional: uma introdução em turbo pascal.** Rio de Janeiro: Livros Técnicos e Científicos, 1988. 236 p.
- D'AGOSTINO, R. B. Small sample probability points for the D test of normality. **Biometrika**, Great Britain, v. 59, n.1, p. 219-221, Apr. 1972.
- D'AGOSTINO, R. B.; TIETJEN, G. L. Simulation probabily ponints of b_2 in small samples. **Biometrika**, Great Britain, v. 58, n. , p. 669-672, Dec. 1971.
- D'AGOSTINO, R. B.; TIETJEN, G. L. Aproaches to null distribution of $\sqrt{b_1}$. **Biometrika**, Great Britain, v. 60, n. 1, p. 169-173, Apr. 1973.
- D'AGOSTINO, R. B.; ROSMAN, B. The power of Geary's test of normality. **Biometrika**, Great Britain, v. 61, n. 1, p. 181-184, Apr. 1974.
- JOHNSON, N. L.; KOTZ, S. **Distributions in statistics continuous univariate distributions.** New York: J. Wiley, 1970. 300 p.
- JOHNSON, R. A.; WICHERN, D. W. **Applied multivariate statistical analysis.** New Jersey: Printice Hall, Inc., 1998, 816 p.
- KHALTREE, R.; NAIK, D. N. **Applied multivariate statistical analysis with SAS software.** Cary, N. C. SAS Institute, 1995. 396 p.

- KOLMOGOROV, A. N. Sulla determinazione empirica di una legge di distribuzione. **Giornale dell'Istituto degli Attuari**, v. 4, p. 83-91, 1933.
- LEHMER, D. H. **In proceedings of the second symposium on large-scale digital computing machinery**. Massachusetts: Harvard University Press, Cambridge, 1951.
- LEONEL, A. C. **Combinação de probabilidade na comparação em análise conjunta de experimentos**. Lavras: UFLA-DEX, 2000. p. 81. (Dissertação - Mestrado em Estatística e Experimentação Agropecuária).
- LILLIEFORS, H. W. On the Kolmogorov-Smirnov teste for normality. **Biometrika**, Great Britain, v. 62, n. 3, p. 399-402, June. 1967.
- MACHADO, S. G. Two statistics for testing multivariate normality. **Biometrika**, Great Britain, v. 70, n. 3, p. 713-718, Dec. 1983.
- MARDIA, K. V. Measures of multivariate skeweness and kurtosis with applications. **Biometrika**, Great Britain, v. 57, n. 3, p. 519-529, Dec. 1970.
- MOOD, A. M.; GRAYBILL, F. A.; BOES, D. C. **Introduction to theory of statistics**. 3.ed. New York: Wiley & Sons, 1974. 842 p.
- MULDHOLKAR, G. S.; MCDERMOTT, M.; SRIVASTAVA, D.K. A test p-variate normality. **Biometrika**, Great Britain, v. 79, n. 4, p. 850-854, Dec, 1992.
- OJA, H. New tests for normality. **Biometrika**, Great Britain, v. 70, n. 1, p. 297-299, Apr. 1983.
- OJA, H. Two location and scale-free goodness-of-fit tests. **Biometrika** Great Britain, v. 68, n. 3, p. 637-640, Dec. 1981.
- PEARSON, E. S.; HARTLEY, H. O. **Biometrika tables for statisticians**. 3. ed. New York: Cambridge University, 1966. v. 1.
- PERECIN, D.; BARBOSA, J. C. Uma avaliação de seis procedimentos para comparações múltiplas. **Revista de Matemática e Estatística**, Marília-SP, v. 6, p. 95-103, 1988.
- SANTOS, C. **Novas alternativas de testes de agrupamento avaliadas por meio de simulação de Monte Carlo**. Lavras: UFLA-DEX, 2000. p. 85. (Dissertação - Mestrado em Estatística e Experimentação Agropecuária).

- SATTHELTHWAITE, F. E. Na approximate distribution of estimates of variance components. **Biometric Bulletin**, London, v. 2, p.110-114, 1946.
- SIEGEL, S. **Estatística não-paramétrica para ciências do comportamento**. São Paulo: McGraw-Hill do Brasil, 1975. 350 p.
- SHAPIRO, S. S.; WILK, M.B. An analysis of variance test for normality (complete sample). **Biometrika**, Great Britain, v. 52, n. 3, p. 591-611,1965.
- SILVA, E. C. **Avaliação do poder e taxa de erro tipo I do teste de Scott-Knott por meio do método de Monte Carlo**. Lavras: UFLA-DEX, 1998. p. 54. (Dissertação - Mestrado em Estatística e Experimentação Agropecuária).

ANEXOS



ANEXO

ANEXO.....PÁGINA

SIMULAÇÃO 1A Programa de simulação para gerar dados normais univariados via método de Monte Carlo, considerando a distribuição normal (100,100), por meio dos recursos computacionais do sistema estatístico SAS®.....68

SIMULAÇÃO 2A Programa de simulação para gerar dados normais multivariados via método de Monte Carlo, considerando a distribuição normal (0,1), por meio dos recursos computacionais do sistema estatístico SAS.....70

SIMULAÇÃO 1A

Programa de simulação para gerar dados normais univariados via método de Monte Carlo, considerando a distribuição normal (100,100), por meio dos recursos computacionais do sistema estatístico SAS®

```
data univariado;
nexp=5000;
do exp=1 to nexp;          /* gerando 5000 experimentos */
do i=1 to 5;              /* gerando amostras de tamanho n */
  dado=rannor(0)*10+100; /* gerando dados com distribuicao normal */
  output;
end;
end;
```

```
Proc IML;
Create saida var{beta1,k1,pvalskew,beta2,k2,pvalkurt, z1, pvalz1, z2,pvalz2};
use univariado (keep=dado);
do ii=1 to 5000;
  read next 250 into X;
  n=nrow(X);p=ncol(X);
  dfchi=p*(p+1)*(p+2)/6;
  q=i(n) - (1/n)*j(n,n,1);
  S=(1/n)*x`*q*x;
  S_inv=inv(S);
  g=q*x*s_inv*x`*q;
  beta1=(sum(g#g#g))/(n*n);
  beta2=trace(g#g)/n;
  k1=n*beta1/6;
  k2=(beta2-p*(p+2))/sqrt(8*p*(p+2)/n);
  z1=(n+1)*(n+3)*beta1/(6*(n-2));
  z2=(beta2*p*(p+2)+2*p*(p+2)/(n+1))*sqrt((n+1)*(n+1)*(n+3)*(n+5)/(8*p*
*(p+2)*n*(n-2)*(n-3)));
  pvalskew=1-probchi(k1,dfchi);
  pvalkurt=2*(1-probnorm(abs(k2)));
  pvalz1=1-probchi(z1,dfchi);
  pvalz2=2*(1-probnorm(abs(z2)));
```

```

append var{beta1,k1,pvalskew,beta2,k2,pvalkurt, z1, pvalz1, z2,pvalz2};
end; Quit;

```

```

Data saida; set saida;
if pvalskew<=0.05 then etla5=1; else etla5=0;
if pvalskew<=0.01 then etla1=1; else etla1=0;
if pvalz1<=0.05 then etlz15=1; else etlz15=0;
if pvalz1<=0.01 then etlz11=1; else etlz11=0;
if (pvalskew<=0.05) or (pvalkurt<=0.05) then etlak5=1; else etlak5=0;
if (pvalskew<=0.01) or (pvalkurt<=0.01) then etlak1=1; else etlak1=0;
if pvalkurt<=0.05 then etlk5=1; else etlk5=0;
if pvalkurt<=0.01 then etlk1=1; else etlk1=0;
if pvalz2<=0.05 then etlz25=1; else etlz25=0;
if pvalz2<=0.01 then etlz21=1; else etlz21=0; Run;

```

```

Proc means data=saida;
title ' dist. normal m=100 v=100 n=250';
var etla5 etla1 etlk5 etlk1 etiak5 etiak1 etlz15 etlz11 etlz25 etlz21;
Run; Quit;

```

```

proc univariate data=univariado normal noprint;
var dado;
output out=saida2 probn=pn;
by exp;
run;

```

```

data saida2;set saida2;
if pn<=0.05 then a5=1; else a5=0;
if pn<=0.01 then a1=1; else a1=0;
Run;

```

```

Proc means data=saida2 n mean;
var a5 a1;
run;quit;

```

```

proc univariate normal data=saida PCTLDEF=5;
var Z1 Z2 k1 k2;
output out=saida1 p95=z1_p95 z2_p95 k1_p95 k2_p95 p99=z1_p99 z2_p99
k1_p99 k2_p99 PCTLPRE=z1 z2 k1 k2 PCTLPTS=97.5 97.5 97.5 97.5
PCTLNAME=p975 p975 p975 p975 PCTLPRE=z1 z2 k1 k2 PCTLPTS=99.5
99.5 99.5 PCTLNAME=p995 p995 p995 p995;
run;quit;
proc print data=saida1; run;

```


SIMULAÇÃO 2A

Programa de simulação para gerar dados normais multivariados via método de Monte Carlo, considerando a distribuição normal (0,I), por meio dos recursos computacionais do sistema estatístico SAS®.

```
proc iml;
nexp=5000;
Create multivariado var{exp,Y1,Y2};
do exp=1 to nexp;          /* gerando 5000 experimentos */
  seed=0;
  n =50;
  sigma = { 1 0,
            0 1};
  mu = {0,0};
  p = nrow(sigma);
  m=repeat(mu`,n,1);
  g=root(sigma);
  z=normal(repeat(seed,n,p));
  y=z*g+m;
  do ii=1 to n;
    Y1=y[ii, 1];
    Y2=y[ii, 2];
    append var {exp,Y1,Y2};
  end;
end;quit;
```

```
Proc IML;
Create saida var{beta1,k1,pvalskew,beta2,k2,pvalkurt, z1, pvalz1, z2,pvalz2};
use multivariado (keep=y1 y2 y3);
do ii=1 to 5000;
  read next 50 into X;
  n=nrow(X);p=ncol(X);
  dfchi=p*(p+1)*(p+2)/6;
  q=i(n) - (1/n)*j(n,n,1);
  S=(1/n)*x`*q*x;
  S_inv=inv(S);
```

```

beta1=(sum(g#g#g))/(n*n);
beta2=trace(g#g)/n; */
k1=n*beta1/6; b2,p
k2=(beta2-p*(p+2))/sqrt(8*p*(p+2)/n);
z1=(n+1)*(n+3)*beta1/(6*(n-2));
z2=(beta2*(p+2)+2*p*(p+2)/(n+1))*sqrt((n+1)*(n+1)*(n+3)*(n+5)/(8*p*
*(p+2)*n*(n-2)*(n-3)));
pvalskew=1-probchi(k1,dfchi);
pvalkurt=2*(1-probnorm(abs(k2)));
pvalz1=1-probchi(z1,dfchi);
pvalz2=2*(1-probnorm(abs(z2)));
append var{beta1,k1,pvalskew,beta2,k2,pvalkurt, z1, pvalz1, z2,pvalz2};
end; Quit;

```

```

Data saida; set saida;
if pvalskew<=0.05 then etla5=1; else etla5=0;
if pvalskew<=0.01 then etla1=1; else etla1=0;
if pvalz1<=0.05 then etlz15=1; else etlz15=0;
if pvalz1<=0.01 then etlz11=1 else etlz11=0;
if (pvalskew<=0.05) or (pvalkurt<=0.05) then etlak5=1; else etlak5=0;
if (pvalskew<=0.01) or (pvalkurt<=0.01) then etlak1=1; else etlak1=0;
if pvalkurt<=0.05 then etlk5=1; else etlk5=0;
if pvalkurt<=0.01 then etlk1=1; else etlk1=0;
if pvalz2<=0.05 then etlz25=1 else etlz25=0;
if pvalz2<=0.01 then etlz21=1; else etlz21=0;
Run;

```

```

Proc means data=saida;
title ' dist. bivariada com correlacao:0 n=50';
var etla5 etla1 etlk5 etlk1 etiak5 etiak1 etlz15 etlz11 etlz25 etlz21;
Run; Quit;

```

```

proc univariate normal data=saida PCTLDEF=5;
var Z1 Z2 k1 k2;
output out=saida1 p95=z1_p95 z2_p95 k1_p95 k2_p95 p99=z1_p99 z2_p99
k1_p99 k2_p99 PCTLPRE=z1 z2 k1 k2 PCTLPTS=97.5 97.5 97.5 97.5
PCTLNAME=p975 p975 p975 p975 PCTLPRE=z1 z2 k1 k2
PCTLPTS=99.5 99.5 99.5 99.5 PCTLNAME=p995 p995 p995 p995;
run;quit;
proc print data=saida1; run;

```