



MARCELA DE MARILLAC CARVALHO

**APLICAÇÃO DA TEORIA DE CÓPULAS
BIVARIADAS NA MODELAGEM DE DEPENDÊNCIA
DO RETORNO DE AÇÕES DA BM&FBOVESPA**

**LAVRAS - MG
2018**

MARCELA DE MARILLAC CARVALHO

**APLICAÇÃO DA TEORIA DE CÓPULAS BIVARIADAS NA
MODELAGEM DE DEPENDÊNCIA DO RETORNO DE AÇÕES DA
BM&FBOVESPA**

Dissertação apresentada à Universidade Federal de Lavras, como parte das exigências do Programa de Pós-Graduação em Estatística e Experimentação Agropecuária para obtenção do título de mestre.

Orientadora
Dra. Thelma Sáfydi

**LAVRAS - MG
2018**

**Ficha catalográfica elaborada pelo Sistema de Geração de Ficha
Catalográfica da Biblioteca Universitária da UFLA, com dados
informados pelo(a) próprio(a) autor(a).**

Carvalho, Marcela de Marillac.

Aplicação da teoria de cópulas bivariadas na modelagem de dependência do retorno de ações da BM&FBOVESPA / Marcela de Marillac Carvalho. - 2018.

63p.

Orientador(a): Thelma Sáfadi

Dissertação (mestrado acadêmico) - Universidade Federal de Lavras, 2018.

Bibliografia.

1. Cópulas. 2. Séries Temporais. 3. Finanças. I. Sáfadi, Thelma. II. Título.

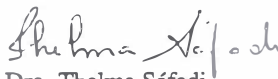
MARCELA DE MARILLAC CARVALHO

**APLICAÇÃO DA TEORIA DE CÓPULAS BIVARIADAS NA
MODELAGEM DE DEPENDÊNCIA DO RETORNO DE AÇÕES DA
BM&FBOVESPA
APPLICATION OF THE THEORY OF BIVARIATE COPULAS IN
THE MODELING OF DEPENDENCE OF RETURNS OF
BM&FBOVESPA SHARES**

Dissertação apresentada à Universidade Federal de
Lavras, como parte das exigências do Programa
de Pós-Graduação em Estatística e Experimentação
Agropecuária para obtenção do título de Mestre .

APROVADA em 09 de Fevereiro de 2018.

Dr. Devanil Jaques de Souza UFLA
Dr. Manoel Vitor de Souza Veloso UNIFAL
Dr. Renato Vieira dos Santos UFLA


Dra. Thelma Sáfyadi
Orientadora

**LAVRAS - MG
2018**

AGRADECIMENTOS

Aos familiares e amigos pelo apoio e incentivo. Sobretudo, aos meus pais, Lucas e Isabel, por seu amor e apoio incondicional, nas minhas escolhas durante toda vida. Aos meus irmãos Rafael, Lucas e Rafaela, tia Maria e avó Cidoca com quem sempre pude contar.

Ao meu namorado Allan pelo amor, carinho e compreensão em todos os momentos.

À Amanda, pela convivência e amizade durante sua estadia em Lavras.

À minha orientadora professora Thelma, pela consideração, confiança e generosidade ao longo desta empreitada.

À todos os professores do programa de pós-graduação em Estatística e Experimentação Agropecuária, pela dedicação e todo conhecimento transmitido durante o mestrado.

Aos funcionários da UFLA, principalmente a secretária do DES Nádia, pela simpatia e prestatividade.

Aos meus colegas e amigos da pós-graduação pela convivência e ensinamentos, especialmente à Lina, Allana, Kelly, Jaqueline e Elianara, amigas queridas com quem pude contar em todos os momentos.

Às pessoas que me auxiliaram na elaboração deste trabalho, dentre elas, meu amigo Ericksen pela amizade e grande ajuda em finanças, e ao professor Manoel da UNIFAL que me acompanha desde da graduação e, atenciosamente, sempre me ajuda.

À Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (CAPES) pelo suporte financeiro para a realização desse projeto.

RESUMO

As séries temporais financeiras apresentam características peculiares, que tornam a modelagem da estrutura de dependência desses dados importante para a compreensão de questões em finanças. Neste contexto, a teoria de cópulas constitui uma importante ferramenta, na análise multivariada de séries financeiras, graças à sua flexibilidade para construir funções de distribuição multivariadas que reproduzam dependências não lineares. Desta maneira, este trabalho tem como objetivo a aplicação da metodologia de cópulas condicionais com parâmetros fixos, para modelar e avaliar a relação de dependência existente entre as ações mais representativas dos principais setores de atuação da Bolsa de Valores e Mercadorias de São Paulo no período de 03 de janeiro de 2011 a 21 de junho de 2017. Os resultados apontam a existência de uma considerável relação de dependência entre ações das empresas Bradesco, Itaú Unibanco, Petrobrás, Vale e Renner e, de forma geral, relacionam-se, de forma um pouco mais acentuada, em períodos de alta do que em períodos de baixa dos preços. Verifica-se, também, um baixo grau de associação das ações das empresas Ambev e BR Foods com as demais, pois o consumo de bens básicos apresenta estabilidade, mesmo em momentos de recessão econômica e graças ao planejamento destas empresas. Ressalta-se que, particularidades presentes nos setores de cada ação e os efeitos da conjuntura interna instável, verificados ao longo deste período, podem explicar substancialmente o padrão e magnitude de dependência aferidos entre estas ações.

Palavras-chave: Cópulas. Séries Temporais. Dependência. Finanças.

ABSTRACT

The financial time series presents peculiar characteristics that make the modeling of the structure of dependence of these data, important for the understanding of questions in finance. In this context, the copulas theory is an important tool in the multivariate analysis of financial series, thanks to its flexibility to construct multivariate distribution functions that reproduce nonlinear dependencies. Thus, this work has the objective of applying the conditional copulas methodology with fixed parameters to model and evaluate the relationship between the most representative actions of the main sectors acting in the Stock Exchange and Commodities of São Paulo in the period from January 3, 2011 until June 21, 2017. The results point to the existence of a considerable dependency ratio between the shares of Bradesco, Itaú Unibanco, Petrobras, Vale and Renner, in general, they relate a little more pronounced in periods of high prices than in periods of low prices. There is also a low degree of association in the shares of Ambev and BR Foods with the others, since the consumption of basic goods presents stability, even in times of economic recession and thanks to the planning of these companies. It should be noted that the particularities present in the sectors of each stock and the effects of the unstable domestic environment, verified during this period, can explain substantially the pattern and magnitude of dependence measured between these actions.

Keywords: Copulas. Time series. Dependency. Finance.

LISTA DE FIGURAS

Figura 1	Log-Retornos de (a)ABEV3, (b)BRFS3, (c)LREN3, (d)BBDC4, (e)ITUB4, (f)VALE3 e (g)PETR4, no período de 03 de janeiro de 2011 a 21 de junho de 2017.	39
Figura 2	Gráfico da estimativa do desvio padrão condicional dos retornos diários de (a)ABEV3, (b)BRFS3, (c)LREN3, (d)BBDC4, (e)ITUB4, (f)VALE3 e (g)PETR4, no período de 03 de janeiro de 2011 a 21 de junho de 2017.	42

LISTA DE TABELAS

Tabela 1	Funções geradoras de cópulas arquimedianas bivariadas.	29
Tabela 2	Funções e parâmetros de cópulas arquimedianas bivariadas. . .	29
Tabela 3	Parâmetros de dependência de cópulas arquimedianas bivariadas.	30
Tabela 4	Descrição das variáveis utilizadas	34
Tabela 5	Estatísticas descritivas dos retornos diários	39
Tabela 6	Modelos ARMA-APARCH para as distribuições marginais . .	41
Tabela 7	Resultado do AIC das Cópulas	44

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	11
2	REFERENCIAL TEÓRICO	13
2.1	Cópuas em Finanças	13
2.1.1	Retornos Financeiros	13
2.1.2	Principais Aplicações	14
2.2	Cópuas	16
2.2.1	Teorema de Sklar	16
2.2.2	Função Cópuas	17
2.2.3	Limites de Fréchet-Hoeffding	18
2.3	Cópuas Condicionais	19
2.3.1	Cópuas e Séries Temporais	21
2.4	Medidas de Dependência e Concordância	22
2.4.1	Medidas de Dependência	22
2.4.1.1	Coeficiente de Correlação Linear	22
2.4.1.2	Coeficiente de Dependência na Cauda	23
2.4.2	Medidas de Concordância	25
2.4.2.1	Tau de Kendall	25
2.5	Famílias de Cópuas	26
2.5.1	Cópuas Elípticas	26
2.5.1.1	Cópuas Gaussianas	27
2.5.1.2	Cópuas t-Student	27
2.5.2	Cópuas Arquimedianas	28
2.5.3	Métodos de Estimação	31
2.5.3.1	Método da Máxima Verossimilhança	31
2.5.3.2	Método de Inferência para as Marginais	32
3	METODOLOGIA	34
4	RESULTADOS	38

4.1	Análise Descritiva	38
4.2	Modelos de Séries Temporais	40
4.3	Modelos para Cópulas	43
5	CONSIDERAÇÕES FINAIS	47
6	REFERÊNCIAS	49
	APÊNDICE	55
	REFERÊNCIAS	55

1 INTRODUÇÃO

Um dos principais objetos de estudo em econometria e finanças consiste na modelagem da dependência entre séries econômicas, com o intuito de explorar a dinâmica das relações comerciais e financeiras, captando a estrutura de dependência existente entre mercados, ativos financeiros e gerenciamento/mensuração de risco.

Usualmente, para explicar a relação existente entre dados financeiros, assume-se normalidade multivariada e utiliza-se como medida de dependência o coeficiente de correlação linear. Entretanto, como os retornos financeiros possuem determinadas peculiaridades, apresentando diversos graus de assimetria e curtose, essa medida não é a mais adequada para mensurar relações entre dados financeiros que, de forma geral, pode ser não-linear, apresentando dependência de caudas.

Diante deste cenário, as cópulas constituem um importante instrumento na área de finanças. A teoria de cópulas compreende uma metodologia para modelar distribuições multivariadas, admitindo que toda distribuição desse tipo pode ser decomposta em distribuições marginais e em uma estrutura de dependência, representadas pelas funções cópulas.

As funções cópulas condicionais modelam de forma flexível a estrutura de dependência de séries temporais financeiras, permitindo a criação de distribuições multivariadas que possuam marginais que não apresentem distribuição normal, levando em consideração o comportamento dos retornos financeiros. Assim, é possível especificar parâmetros de funções cópulas de forma fixa, ou que variam ao longo do tempo, condicionalmente às informações passadas e cujas marginais sigam processos heterocedásticos condicionais, com a inserção de uma parte autorregressiva e de média móvel (ARMA).

Compreender e modelar a dependência entre pares de ativos financeiros é importante, para dimensionar a relação existente entre eles, assimilando melhor a realidade de mercados financeiros, para traçar estratégias de investimento, bem como direcionar as políticas econômicas de um país. Dessa forma, esta dissertação foi realizada com objetivo de aplicar modelos de cópulas bivariadas, nos quais os parâmetros da função são fixos, visando identificar e analisar o padrão e grau da

interdependência de séries temporais financeiras. Na análise serão utilizados pares de séries diárias de ações referentes aos principais setores de atuação da Bolsa de Valores e Mercadorias de São Paulo, no período de 03 de janeiro de 2011 a 21 de junho de 2017, com intuito de verificar a estrutura de dependência no mercado acionário brasileiro.

A dissertação está estruturada em 5 seções, além desta breve introdução. No capítulo 2 é apresentada a revisão de literatura, abrangendo o conceito de cópulas, suas famílias e métodos de estimação, bem como medidas de dependência e concordância, e cópulas em séries temporais, destacando aplicações recentes presentes na literatura. No capítulo 3, verifica-se a metodologia empregada para a análise da dependência entre os pares de ativos no período em questão. No capítulo 4, apresentam-se os resultados estatísticos e discussões e, no capítulo 5, as considerações finais do trabalho, com sugestões de estudos futuros.

2 REFERENCIAL TEÓRICO

2.1 Cópulas em Finanças

De acordo com Nelsen(2006), a metodologia de cópulas é empregada na elaboração de distribuições multivariadas de maneira que se reflitam diversos tipos de dependência.

Em virtude de determinadas particularidades dos dados econômicos/financeiros, que requerem adaptações e estruturas específicas para seu comportamento, verifica-se a expansão na aplicação da teoria de cópulas na área de finanças, como mostra Genest et al. (2009). Isto se deve ao fato de que a função cópula pode assumir diversas formas, considerando a estrutura particular desses dados, para a modelagem da relação de dependência existente nas marginais.

Nesta seção, definem-se as séries temporais de retornos financeiros e suas características e, algumas aplicações recentes encontradas na literatura referente ao tema da modelagem de cópulas em economia e finanças.

2.1.1 Retornos Financeiros

Estudos na área de finanças concentram-se na análise da série de variações de preços de ativos, denominada série de retornos. O retorno de um ativo ou a taxa de retorno entre o instante $t - 1$ e t é calculado da seguinte forma:

$$R_t = \frac{P_t - P_{t-1}}{P_{t-1}} = \frac{\Delta P_t}{P_{t-1}}$$

em que P_t é o preço do ativo no instante t e ΔP_t a variação de preços entre o instante $t - 1$ e t . Usualmente R_t é expresso em porcentagem, relativamente ao período (um dia, um mês, um ano, etc).

Na prática, os preços dos ativos entre o instante $t - 1$ e t são bem próximos assim $R_t \lll 1$. Define-se, assim, o log-retorno como:

$$r_t = \log \frac{P_t}{P_{t-1}} = \log(1 + R_t) = p_t - p_{t-1}$$

sendo $p_t = \log P_t$. Os retornos e os log-retornos são, em geral, valores próximos, já que para um valor constante (m) pequeno têm-se que $\log(1 + m) \approx m$. Para mais detalhes sobre os retornos financeiros, ver em Tsay(2005) e Morettin(2017).

Atualmente verifica-se que os investimentos não estão mais restritos a produtos lineares, como ações e títulos, mas envolvem opções e derivativos complexos. Assim, para gestão de ativos financeiros, é necessário considerar determinadas características peculiares presentes nas séries de retornos financeiros (CHERUBINI et al. 2016). Essas características são apresentadas por Morettin (2017, p.18) como *fatos estilizados* e são:

- de forma geral, os retornos não são autocorrelacionados;
- os quadrados dos retornos são autocorrelacionados, apresentando uma correlação pequena na primeira defasagem e depois uma queda lenta das demais;
- nas séries de retornos há agrupamentos de volatilidades ao longo do tempo e memória longa;
- a distribuição dos retornos apresenta caudas mais pesadas do que uma distribuição normal e, embora aproximadamente simétrica, é em geral, leptocúrtica o que faz com que os retornos respondam de maneira diferente a choques grandes ou pequenos, ou ainda, a choques negativos ou positivos;
- algumas séries de retornos são não-lineares, no sentido explicado acima.

2.1.2 Principais Aplicações

Dadas as características dos retornos financeiros, as cópulas representam uma ferramenta reconhecida na área de finanças, pois permite a avaliação de relações entre dados financeiros, sem que seja assumida a pressuposição de linearidade, e permitem verificar esta dependência mesmo para valores extremos (EMBRECHETS,2001).

Técnicas referentes a cópulas condicionais já desenvolvidas são, usualmente, aplicadas na literatura, para a modelagem de dependência multivariada em

séries temporais financeiras. As principais aplicações referem-se a gestão de carteiras por meio da análise da estrutura de dependência entre ativos, setores e mercados bem como o gerenciamento e mensuração do risco e a estimação e previsão de medidas como o VaR (*Value-at-Risk*) e ES (*Expected Shortfall*). Além disso, é utilizada para precificação de derivativos referentes aos mercados de opções, *swaps* de crédito entre outras (GENEST 2009; CHERUBINI et al. 2016).

Outra importante aplicação da metodologia de cópulas é a avaliação da ocorrência de contágio financeiro¹. Uma extensa revisão de teorias de contágio e mecanismos de transmissão é encontrada em Claessens e Forbs (2001).

Trabalhos como de Silva Filho et al.(2012), Cerrato et al. (2015), Fink et al. (2017) e Tófoli et al. (2017) analisam a dependência entre os principais mercados financeiros mundiais. Cerrato et al. (2015) e Tófoli et al. (2017) complementam a análise realizando a estimação e previsão do risco desses mercados utilizando as medidas VaR e ES.

A modelagem da dependência, no mercado acionário brasileiro, é evidenciada em Colombo et al. (2011), Righi e Ceretta (2015) e Silva (2014). Colombo et al. (2011) utilizam índices setoriais da BM&FBOVESPA e seus principais ativos subjacentes, bem como Righi e Ceretta (2015) que, também, realizam a previsão do VaR de uma carteira composta pelos setores em questão, para inferir o risco. Já Silva (2014) aborda a relação entre as ações das empresas Petrobrás e Vale.

Wang et al. (2014) analisam a dinâmica das redes de câmbio, utilizando taxas de câmbio diárias das 42 principais moedas no mercado internacional, e Liu et al. (2017) verificam a dependência dinâmica entre os mercados de ações, câmbio e *commodities*. Fei et al. (2013), Christoffersen et al. (2018) examinam o movimento de dependência dinâmica entre o crédito corporativo (CDS) e instrumentos de capital na Europa e Oh e Patton (2017) para os EUA. Creal e Tsay (2014) também analisam este movimento, no caso de empresas do EUA, mas com uma abordagem bayesiana.

Em trabalhos como de Santos e Pereira(2010), Aloui et al.(2011), Peng

¹O efeito contágio pode ser compreendido como uma transmissão intensa de choques, em períodos de fragilidade, que acarretam quebras estruturais no comportamento padrão das relações econômicas mundiais pré-existente e que não são explicados pelos fundamentos econômicos-financeiros internos de dois países em questão (FORBES e RIGBON 2002).

e Ng (2012), Horta et al. (2014), Bergmann et al. (2015) verifica-se a aplicação recente da metodologia de cópulas, na análise de contágio financeiro entre índices financeiros, no que se refere os efeitos da crise do *subprime*. Horta et al. (2014) e Peng e Ng(2012) avaliam o efeito contágio para índices acionários europeus e Santos e Pereira(2010) entre os mercados dos Estados Unidos, Brasil, Japão e Inglaterra. As análises de Aloui et al.(2011) e Bergmann et al. (2015) verificam a existência de contágio entre índices de países do BRIC (Brasil, Rússia, Índia e China) com o mercado norte-americano.

2.2 Cópulas

Nesta seção, serão caracterizados conceitos básicos relacionados à teoria de cópulas. A ideia de cópula é introduzida por Sklar (1959), entretanto suas aplicações são recentes na literatura.

Entre textos didáticos sobre o assunto, em Nelsen (2006) e Joe (2015) encontra-se sua fundamentação, bem como sua associação com os conceitos de dependência e, em Embrechets et al. (2001), Cherubini et al. (2016) e Mai e Scherer (2014), verificam-se uma revisão e aplicações de cópulas na área de finanças.

2.2.1 Teorema de Sklar

De acordo com o Teorema de Sklar (1959), uma distribuição multivariada pode ser tratada pela sua estrutura de dependência, a cópula, e suas marginais.

Para uma distribuição conjunta n -dimensional F de um vetor de variáveis aleatórias $\mathbf{X} = (X_1, \dots, X_n) \in \mathbb{R}^n$ com marginais $F_1(x_1), \dots, F_n(x_n)$, existe uma função cópula C tal que:

$$F(x_1, \dots, x_n) = C(F_1(x_1), \dots, F_n(x_n)) \quad (1)$$

sendo que se F_1, \dots, F_n são todas contínuas, a função C é única, caso contrário, é determinada somente em $ImF_1 \times \dots \times ImF_n$.

A partir do resultado em (1), ao realizar a transformação integral de pro-

babilidade², em cada distribuição marginal, obtêm-se a função cópula C :

$$C(u_1, \dots, u_n) = F(F_1^-(u_1), \dots, F_n^-(u_n)), \forall \mathbf{u} = (u_1, \dots, u_n) \in [0,1]^n$$

em que, a função F_i^- é a inversa generalizada³.

A distribuição multivariada das variáveis transformadas é, então, chamada de cópula. A densidade associada a uma cópula é definida pelas derivadas parciais em relação a \mathbf{u} da função $C(u_1, \dots, u_n)$:

$$c(u_1, \dots, u_n) = \frac{\partial C^m(u_1, \dots, u_n)}{\partial u_1 \dots \partial u_n}$$

Como visto pelo Teorema de Sklar(1959), a densidade do vetor aleatório \mathbf{X} pode, assim, ser escrita da seguinte forma:

$$f(x_1, \dots, x_n) = c(u_1, \dots, u_n) \prod_{i=1}^n f_i(x_i) \quad (2)$$

em que $u_1 = F_1(x_1; \theta_1), \dots, u_n = F_n(x_n; \theta_n)$ sendo θ_i os vetores p_i dimensionais de parâmetros das marginais, $i = 1, 2, \dots, n$.

2.2.2 Função Cópula

Conforme Mendes (2004), analisando a equação (2), verifica-se que a função cópula contém as informações a respeito da distribuição conjunta não contidas nas marginais, podendo, assim, ser interpretada como a estrutura de dependência do vetor aleatório \mathbf{X} .

As cópulas permitem resolver o problema de encontrar uma distribuição multivariada por meio da modelagem de cada distribuição marginal univariada e,

²Define-se $X_i \mapsto F_i(X_i) = U_i, i = 1, \dots, n$ como transformação integral de probabilidade para distribuição Uniforme $[0,1]^n$.

³Seja X uma variável aleatória com função de distribuição F a sua função inversa generalizada (ou "quase-inversa") é dada por:

$$F^-(u) = \inf\{x : F(x) \geq u\} \forall u \in [0,1]$$

em que $F^-(u)$ é contínua e não decrescente sobre $u \in [0,1]$.

posteriormente, especificando uma função cópula, que resume a relação de dependência existente entre marginais (FERMANIAN e WEGKAMP,2012).

A partir dos resultados obtidos pelo Teorema de Sklar (1959), Embrechts et al. (2001) expressam que, uma cópula é uma função de distribuição conjunta definida no cubo unitário $[0,1]^n$, com distribuições marginais uniformes distribuídas no intervalo $[0,1]$, tal que para todo $u \in [0,1]^n$:

- i. $C(u) = 0$, para algum u_i com valor nulo e $C(u) = u_k$ se todos os componentes de u são 1, exceto u_k ;
- ii. para cada a e b pertencente a $[0,1]^n$, com $a_i \leq b_i$, para todo i , $V_c(a,b) \geq 0$, em que V_c é o C -volume.

As funções cópulas comumente utilizadas são as bivariadas. O caso bivariado, expresso em Nelsen (2006), é especificado da seguinte forma:

$$F(x_1, x_2) = C(F_1(x_1), F_2(x_2)) \iff C(u, v) = F(f_1^-(u), f_2^-(v))$$

Neste cenário, a função cópula é dada por $C(u, v) : [0,1] \times [0,1] \rightarrow [0,1]$ sendo que:

- i. para todo ponto (u, v) , tem-se que $C(u, 0) = C(0, v) = 0$; $C(u, 1) = u$ e $C(1, v) = v$;
- ii. para todo u_1, u_2, v_1, v_2 , com $u_1 \leq u_2$ e $v_1 \leq v_2$, tem-se que $V_c([u_1, u_2] \times [v_1, v_2]) = C(u_2, v_2) - C(u_2, v_1) - C(u_1, v_2) + C(u_1, v_1) \geq 0$.

2.2.3 Limites de Fréchet-Hoeffding

Um resultado importante na teoria de cópulas, são os limites que uma função cópula pode assumir. Se C é uma cópula, então para todo ponto (u, v) pertencente a $[0,1] \times [0,1]$:

$$C_L(u, v) \leq C(u, v) \leq C_U(u, v)$$

em que $C_U(u,v) = \min(u,v)$ e $C_L(u,v) = \max(0, u + v - 1)$, são os limites superior e inferior, respectivamente, da cópula C denominados os limites de Fréchet-Hoeffding (FRÉCHET, 1957), que possuem a propriedade de limitar por cima e por baixo todas as outras cópulas possíveis.

A questão de estrutura de dependência que envolve os limites de Fréchet-Hoeffding está detalhada em Embrechts (2001) e Nelsen (2006).

2.3 Cópulas Condicionais

A abordagem de cópulas pode ser estendida às distribuições condicionais, partindo da teoria de cópulas condicionais detalhadas em Patton (2012), a partir do caso condicional do Teorema de Sklar.

Para o caso bidimensional, seja o vetor aleatório $\mathbf{X} = (X_1, X_2)$ e as variáveis aleatórias $X_1|W$ e $X_2|W$, com suas respectivas distribuições condicionais $F_1(x_1|w)$ e $F_2(x_2|w)$, e a distribuição conjunta condicional F de $X|w$, então, existe uma função cópula C tal que:

$$F(x_1, x_2|w) = C(F_1(x_1|w), F_2(x_2|w)|w), \forall (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \text{ e } w \in \Omega$$

em que se F é contínua, a função $C(\cdot)$ é única, caso contrário, é determinada somente em $ImF_1 \times ImF_2$ e $w = (w_1, w_2)$ é uma realização da variável aleatória W . A função cópula C , obtida por meio da transformação integral de probabilidade em cada distribuição marginal para distribuição Uniforme $[0,1]^2$, pode, assim, ser representada por:

$$C(u,v|w) = F(F_1^-(u|w), F_2^-(v|w)|w), \forall (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \text{ e } w \in \Omega$$

Neste cenário, a função cópula é dada por $C(u,v) : [0,1] \times [0,1] \times \Omega \rightarrow [0,1]$ em que:

- i. para todo ponto (u,v) e $w \in \Omega$ tem-se que $C(u,0|w) = C(0,v|w) = 0$;
 $C(u,1|w) = u$ e $C(1,v|w) = v$;

- ii. para todo u_1, u_2, v_1, v_2 , com $u_1 \leq u_2$ e $v_1 \leq v_2$ e $w \in \Omega$ tem-se que $V_c([u_1, u_2] \times [v_1, v_2] | w) = C(u_2, v_2 | w) - C(u_2, v_1 | w) - C(u_1, v_2 | w) + C(u_1, v_1 | w) \geq 0$.

A densidade da conjunta condicional F é dada por:

$$f(x_1, x_2 | w) = c(u, v | w) f_1(x_1 | w) f_2(x_2 | w) \quad (3)$$

em que $c(u, v | w)$ é a densidade associada a uma cópula, sendo definida pelas derivadas parciais em relação a u e v da função $C(u, v)$, e $u = F_1(x_1 | w)$ e $v = F_2(x_2 | w)$.

Esta abordagem é utilizada, na análise da estrutura e comportamento de séries temporais, como mostram Patton (2009;2012). As cópulas condicionadas podem ser usadas, para modelar a dependência entre valores sucessivos de uma série temporal univariada, ou para modelar a dependência condicional de um vetor aleatório com algumas informações sobre o seu passado.

Dessa forma, a partir do conceito do teorema de Sklar condicional bivariado, para o caso de séries temporais tem-se $X_1 = X_{1t}$ e $X_2 = X_{2t}$ sendo $W = \{X_{1t-1}, X_{2t-1}, X_{1t-2}, X_{2t-2}, \dots, X_{2t-T}\}$, com $t \in 1, \dots, T$, o conjunto de informações que representa o passado destas variáveis.

Observa-se que o mesmo conjunto de informações deve ser usado, para as distribuições marginais e para função cópula em análise, a fim de que a função $F(\cdot | W)$ seja uma distribuição conjunta condicional bivariada com as distribuições marginais condicionais especificadas, conforme evidencia Fermanian e Wegkamp (2004).

Entretanto, segundo Patton (2009), este configura um problema na modelagem, o que não acontece no caso de dados financeiros, pois, de forma geral, determinadas informações contidas em W não são relevantes para todas as variáveis.

Como alternativa, define-se então, um subconjunto W_i tal que $X_{it} | W_i = X_{it} | W$, para que seja possível construir cada modelo de distribuição marginal usando apenas W_i que, provavelmente, será diferente entre as marginais e, então, usar W para a cópula, com intuito de obter uma distribuição conjunta condicional válida.

2.3.1 Cópulas e Séries Temporais

A partir do conceito de cópulas condicionais, é possível modelar a dependência de séries temporais, por meio de cópulas cujas marginais sigam processos heterocedásticos condicionais da classe ARCH (*Autoregressive Conditional Heteroskedasticity*) e suas extensões, com a inserção de uma parte ARMA (*Autoregressive and Moving Average*). Estes modelos serão apresentados, no anexo deste trabalho, baseando-se em Morettin e Tolo (2006), Morettin (2017) e Ding (2011).

Tendo em vista obter a distribuição conjunta dos pares de séries temporais, as cópulas são utilizadas para modelar a dependência residual, ou seja, para os resíduos padronizados, obtidos, destes modelos são ajustadas as funções cópula, utilizando as integrais de probabilidade transformadas, a fim de se avaliar a estrutura de dependência entre as séries em questão.

A estrutura apresentada em Cherubini et al. (2016), para obtenção de marginais dadas por séries temporais multivariadas, é caracterizada da seguinte forma:

$$Y_{it} = \mu_i(W_{t-1}; \eta) + \sigma_i(W_{t-1}; \eta)\varepsilon_{it} \quad , i = 1, \dots, n \quad (4)$$

em que

$$W_{t-1} \in \mathcal{F}_{t-1}$$

$$\varepsilon_{it} | \mathcal{F}_{t-1} \sim F_{it} \Leftrightarrow (\varepsilon_{1t}, \dots, \varepsilon_{nt}) | \mathcal{F}_{t-1} \sim C_t(F_{1t}, \dots, F_{nt})$$

sendo F_{it} a i -ésima distribuição conjunta condicional no tempo t , $t = 1, \dots, T$, do resíduo ε_{it} , que pode ser modelada de forma paramétrica ou não paramétrica. A cópula condicional n -dimensional é dada por C_t , η é o vetor de parâmetros da distribuição marginal e o conjunto \mathcal{F}_{t-1} que corresponde a informações passadas das séries, dadas por W_{t-1} . Os parâmetros μ_i e σ_i^2 correspondem à média e à variância de cada série temporal Y_{it} , respectivamente.

A estimativa dos resíduos padronizados é dada por:

$$Z_{it} = \frac{Y_{it} - \mu_i(W_{t-1}; \eta)}{\sigma_i(W_{t-1}; \eta)}$$

em que o conjunto de informações $W_{t-1} = \{Y_{t-1}, \varepsilon_{t-1}, Y_{t-2}, \varepsilon_{t-2}, \dots\}$. Os resíduos padronizados observados são utilizados, pois sua integral de probabilidade transformada é equivalente à integral de probabilidade transformada dos retornos, ou seja, $F_{Y_t|W_{t-1}}(y_t|w_{t-1}) = P(Y_t \leq y_t|w_{t-1}) = P(Z_t \leq z_t|w_{t-1}) = F_{Z_t|W_{t-1}}(z_t|w_{t-1})$. Ademais, empregam-se os resíduos padronizados por apresentarem uma distribuição de probabilidade com forma fechada.

2.4 Medidas de Dependência e Concordância

As medidas de dependência e concordância são utilizadas para quantificar a relação existente entre variáveis. Os conceitos de dependência que são necessários para estudar as distribuições multivariadas, em geral, mostrados aqui, são encontrados de forma detalhada em Nelsen(2006) e Joe(2015).

Nesta seção, são apresentados os coeficiente de correlação linear, coeficiente de dependência nas caudas e tau de Kendall.

2.4.1 Medidas de Dependência

2.4.1.1 Coeficiente de Correlação Linear

O coeficiente de correlação linear ou de Pearson entre duas variáveis aleatórias X e Y é dado por:

$$\rho(X,Y) = \frac{Cov(X,Y)}{\sqrt{\sigma_X^2 \sigma_Y^2}}$$

em que $Cov(X,Y) = E(XY) - E(X)E(Y)$ é a covariância entre X e Y e σ_X^2 , σ_Y^2 são as variâncias de X e Y , respectivamente. Seu estimador é representado da seguinte forma:

$$\hat{\rho}(X,Y) = \frac{\sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})(Y_i - \bar{Y})}{\sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2 (Y_i - \bar{Y})^2}$$

sendo \bar{X} e \bar{Y} os estimadores do valor esperado de X e Y , respectivamente, e n é o número de observações da amostra.

O coeficiente de correlação linear tem as propriedades:

- i. $-1 \leq \rho \leq 1$;
- ii. X e Y são positivamente correlacionadas se $\rho(X,Y) > 0$, negativamente correlacionadas se $\rho(X,Y) < 0$ e não correlacionadas se $\rho(X,Y) = 0$;
- iii. se X e Y forem independentes então $\rho(X,Y) = 0$;
- iv. se X e Y são perfeitamente correlacionados então $|\rho(X,Y)| = 1$;
- v. ρ é invariante para transformações lineares das variáveis aleatórias, *i.e.*,

$$\rho(aX + b, Y) = \text{sign}(a)\rho(X,Y), \quad a \neq 0 \quad b \in \mathbb{R}$$

em que uma função $\text{sign}(x)$ retorna o sinal da variável x , visto que se $x < 0$, o valor é -1, se $x = 0$, o valor é 0 e se $x > 0$, o valor é 1.

Esta é uma medida de dependência, frequentemente, utilizada devido à simplicidade da sua estimação, mas apresenta limitações:

- o coeficiente de correlação linear não é invariante para transformações não lineares das variáveis aleatórias, capturando apenas a dependência do tipo linear;
- não é uma medida de associação robusta, pois uma única observação pode ter uma grande influência no valor de ρ , sendo assim não se pode utilizá-lo quando a amostra tem *outliers*.

2.4.1.2 Coeficiente de Dependência na Cauda

Conforme Nelsen (2006), o coeficiente de cauda mede a dependência entre as variáveis no quadrante superior direito e no quadrante inferior esquerdo de I^2 . Dessa forma, o conceito de coeficiente de dependência na cauda está relacionado com a dependência existente na cauda inferior ou superior de uma distribuição conjunta bivariada e é muito útil para descrever eventos com dependência nos valores extremos das variáveis aleatórias.

O coeficiente de dependência na cauda superior de duas variáveis aleatórias X e Y , com funções de distribuição F e G , respectivamente, é dado por:

$$\lambda_u = \lim_{\alpha \rightarrow 1^-} P[Y > G^{-1}(\alpha) | X > F^{-1}(\alpha)]$$

Analogamente, o coeficiente de dependência na cauda inferior é :

$$\lambda_l = \lim_{\alpha \rightarrow 0^+} P[Y \leq G^{-1}(\alpha) | X \leq F^{-1}(\alpha)]$$

em que $F^{-1}(\alpha)$ e $G^{-1}(\alpha)$ são as funções quantis de F e G , respectivamente.

Os coeficientes de dependência na cauda têm as seguintes propriedades:

- i.** $\lambda_u, \lambda_l \in [0, 1]$;
- ii.** se $\lambda_u \in]0, 1]$, então, X e Y são assintoticamente correlacionados na cauda superior; se $\lambda_u = 0$, então, X e Y são assintoticamente independentes na cauda superior;
- iii.** se $\lambda_l \in]0, 1]$ então X e Y são assintoticamente correlacionados na cauda inferior; se $\lambda_l = 0$, então, X e Y são assintoticamente independentes na cauda inferior;
- iv.** Os coeficientes λ_u e λ_l são invariantes para transformações estritamente crescentes das variáveis aleatórias.

Os coeficientes de dependência na cauda podem ser definidos como função de uma cópula C da seguinte forma:

$$\lambda_u = 2 - \lim_{t \rightarrow 1^-} \frac{1 - C(t, t)}{1 - t}$$

e

$$\lambda_l = \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{C(t, t)}{t}$$

2.4.2 Medidas de Concordância

Conforme Cherubini et al. (2016), de forma geral, os retornos dos ativos financeiros não apresentam uma distribuição normal e dependência linear. Assim, torna-se necessária a utilização de medidas robustas de associação e invariantes para transformações estritamente crescentes.

Estas medidas que mensuram uma forma de dependência são conhecidas como concordância. Sejam (x_i, y_i) e (x_j, y_j) observações do vetor aleatório (X, Y) . Então (x_i, y_i) e (x_j, y_j) são ditas concordantes se $(x_i - x_j)(y_i - y_j) > 0$ e discordantes se $(x_i - x_j)(y_i - y_j) < 0$.

Uma medida numérica $\kappa_{X,Y}$ é de concordância de um par de variáveis aleatórias contínuas se apresentar as seguintes propriedades:

- i. $-1 \leq \kappa_{X,Y} \leq 1$, $\kappa_{X,X} = 1$ e $\kappa_{X,-X} = -1$;
- ii. $\kappa_{X,Y} = \kappa_{Y,X}$;
- iii. se X e Y forem independentes, então $\kappa_{X,Y} = 0$;
- iv. $\kappa_{-X,Y} = \kappa_{-Y,X} = -\kappa_{X,X}$;
- v. se $C_1 \prec C_2$, então $\kappa_{C_1} \prec \kappa_{C_2}$;
- vi. Se (X_n, Y_n) é uma sequência de pares de variáveis aleatórias contínuas, com cópula C_n , e se C_n converge pontualmente para C , então $\lim_{n \rightarrow \infty} \kappa_{C_n} = \kappa_C$.

2.4.2.1 Tau de Kendall

O tau de Kendall populacional, do vetor aleatório (\mathbf{X}, \mathbf{Y}) , com função de distribuição conjunta H , é definido de por:

$$\tau = \tau_{XY} = P[(X_1 - X_2)(Y_1 - Y_2) > 0] - P[(X_1 - X_2)(Y_1 - Y_2) < 0]$$

com (X_1, Y_1) e (X_2, Y_2) amostras independentes do vetor aleatório (\mathbf{X}, \mathbf{Y}) .

Assim, a medida tau de Kendall é a probabilidade de concordância menos a probabilidade de discordância entre os pares (X_1, Y_1) e (X_2, Y_2) e pode ser

estimada da seguinte forma:

$$\hat{\tau}_{XY} = \binom{t}{2}^{-1} \Sigma(\text{sign}[(X_i - X_j)(Y_i - Y_j)])$$

em que $\binom{t}{2}$ é o número de pares distintos (x_i, y_i) e (x_j, y_j) e $\Sigma(\text{sign}[(X_i - X_j)(Y_i - Y_j)])$ a diferença entre o número de pares concordantes e discordantes.

Sejam X e Y variáveis aleatórias contínuas com distribuição conjunta dada pela cópula C , tem-se que a versão do tau de Kendall, estabelecida como uma função cópula (τ_C), é dada por:

$$\tau_{XY} = \tau_C = 4E(C(U,V)) - 1 \Leftrightarrow 4 \iint_{I^2} C(u,v) dC(u,v) - 1$$

2.5 Famílias de Cópulas

Em relação às formas de dependências empíricas em aplicações de séries temporais financeiras, e, também, em geral, na literatura, utilizam-se, comumente, cópulas das famílias elípticas e arquimedianas que serão apresentadas a seguir.

Conceitos e aplicações das famílias de cópulas arquimedianas e elípticas utilizadas neste trabalho são retratadas em Nelsen (2006) e Mai e Scherer (2014). Outras variações propostas podem ser encontradas em Patton (2012) e Joe (2015).

2.5.1 Cópulas Elípticas

Seja H uma função de distribuição elíptica bivariada com marginais F e G . Então, C é uma cópula elíptica, com parâmetro de dependência θ , dada por:

$$C(u,v) = H(F_1^{-1}(u), G_1^{-1}(v); \theta) \quad \forall (u,v) \in [0,1]^2$$

As distribuições elípticas mais usadas são as distribuições multivariadas Normal ou Gaussiana e t-Student que têm o coeficiente de correlação linear como medida de dependência.

2.5.1.1 Cópula Gaussiana

A cópula Gaussiana bivariada é dada por:

$$C_G(u,v;\rho) = \int_{-\infty}^{\Phi^{-1}(u)} \int_{-\infty}^{\Phi^{-1}(v)} \frac{1}{2\pi(1-\rho^2)} \exp\left\{-\frac{x^2 - 2\rho xy + y^2}{2(1-\rho^2)}\right\} dvdu$$

em que (u,v) é um vetor aleatório bidimensional $\in [0,1]^2$, ρ é o coeficiente de correlação linear e Φ^{-1} representa a inversa da distribuição Normal padrão univariada.

A cópula Gaussiana apresenta parâmetro de correlação $-1 \leq \rho \leq 1$ com simetria; a dependência aumenta com ρ e não tem dependência na cauda o que indica que as variáveis aleatórias não possuem dependência em eventos extremos.

2.5.1.2 Cópula t-Student

A cópula t-Student bivariada é expressa por:

$$C_T(u,v;\rho,\nu) = \int_{-\infty}^{T_\nu^{-1}(u)} \int_{-\infty}^{T_\nu^{-1}(v)} \frac{\Gamma^{\frac{\nu+2}{2}}}{\Gamma(\frac{\nu}{2})\sqrt{(\pi\nu^2)(1-\rho^2)}} \exp\left\{1 + \frac{x^2 - 2\rho xy + y^2}{\nu(1-\rho^2)}\right\} dvdu$$

em que ν são os graus de liberdade, T^ν a distribuição multivariada t_ν -Student e T_ν^{-1} representa a inversa da distribuição t_ν -Student.

A cópula t-Student, além do parâmetro de correlação $-1 \leq \rho \leq 1$, apresenta o parâmetro $\nu > 0$, que representa os graus de liberdade da cópula, o qual quando se aproxima de infinito, a cópula-t aproxima-se da cópula Gaussiana. Ademais, ela possibilita a modelagem de um maior grau de dependência presentes nas caudas sendo os coeficientes de dependência dados por:

$$\lambda_l = \lambda_u = 2\bar{t}_{\nu+1} \left(\sqrt{\nu+1} \sqrt{\frac{1-\rho}{1+\rho}} \right)$$

em que $\bar{t}_{\nu+1} = 1 - t_{\nu+1}$ indica a simetria e o coeficiente de dependência na cauda é crescente em ρ e decrescente em ν . Esta cópula se destaca por sua aplicação em dados financeiros mas, o fato da magnitude dessa dependência ser a mesma para ambas as caudas, pode ser um fator limitante.

2.5.2 Cóopulas Arquimedianas

Seja φ uma função contínua e estritamente decrescente de \mathbf{I} em $[0, \infty]$ tal que $\varphi(1) = 0$, para o caso bivariado, as cóopulas arquimedianas são expressas por:

$$C(u, v) = \varphi^{[-1]}(\varphi(u) + \varphi(v); \theta)$$

em que θ é o parâmetro de dependência e a função $\varphi^{-1}(\cdot)$ é a pseudo-inversa⁴ de φ . A função $\varphi(\cdot)$ é geradora⁵ de uma cópula arquimediana se, e somente se, $\varphi(0) = 1$; $\lim_{x \rightarrow \infty} \varphi(x) = \infty$; $\frac{d\varphi}{dx} < 0$ e $\frac{d^2\varphi}{dx^2} > 0$.

As cóopulas arquimedianas apresentam as seguintes propriedades:

- i. são simétricas no sentido que $C(u, v) = C(v, u)$ para todo $u, v \in [0, 1]$;
- ii. são associativas, pois $C(u, C(v, z)) = C(C(u, v), z)$ para todo $u, v, z \in [0, 1]$;
- iii. se $k > 0$ é uma constante, então $k\varphi$ também é gerador de $C(\cdot)$.

A partir de diferentes funções $\varphi(x)$, obtêm-se diferentes caracterizações $C(u, v)$. Na Tabela 1, são apresentadas as funções geradora das principais cóopulas arquimedianas.

⁴A pseudo-inversa de φ é a função $\varphi^{[-1]} : [0, 1] \rightarrow [0, \infty]$, dada por:

$$\varphi^{[-1]}(t) = \begin{cases} \varphi^{-1}(t), & 0 \leq t \leq \varphi(0) \\ 0, & \varphi(0) \leq t \leq \infty \end{cases}$$

em que $\varphi^{[-1]}$ é contínua e decrescente em $[0, \infty]$, estritamente decrescente em $[0, \varphi(0)]$. Quando $\varphi(0) = \infty$, tem-se que $\varphi^{[-1]} = \varphi^{-1}$.

⁵A função geradora de uma cópula arquimediana é obtida por meio de transformadas de Laplace (NELSEN, 2006).

Tabela 1 Funções geradoras de cópulas arquimedianas bivariadas.

Cópula	$\varphi(x)$
Clayton	$\theta^{-1}(x^{-\theta} - 1)$
Gumbel	$(-\ln x)^\theta$
Frank	$-\ln \frac{e^{-\theta x} - 1}{e^{-\theta} - 1}$
Ali-Mikhail-Haq	$\ln \frac{1 - \theta(1-x)}{x}$
Joe	$-\ln[1 - (1-x)^\theta]$

Na Tabela 2, verificam-se as especificações das principais funções geradoras de cópulas arquimedianas bivariadas. Na aplicação em dados financeiros, destacam-se as cópulas Clayton e Gumbel, pois permitem a modelagem de diversas formas de dependência, incluindo assimetria e dependência nas caudas. A cópula Clayton apresenta apenas dependência de cauda inferior e a cópula Gumbel modela dependência de cauda superior.

Tabela 2 Funções e parâmetros de cópulas arquimedianas bivariadas.

Cópula	$C(u,v;\theta)$	$\theta \in$
Clayton	$\max[(u^{-\theta} + v^{-\theta} - 1)^{-1/\theta}, 0]$	$(0, \infty)$
Gumbel	$\exp(-[(-\ln u)^\theta + (-\ln v)^\theta]^{1/\theta})$	$[1, \infty)$
Frank	$-\frac{1}{\theta} \ln(1 + \frac{(e^{-\theta u} - 1)(e^{-\theta v} - 1)}{(e^{-\theta} - 1)})$	$\{0\}$
Ali-Mikhail-Haq	$\frac{uv}{1 - \theta(1-u)(u-v)}$	$[-1, 1)$
Joe	$1 - [(1-u)^\theta + (1-v)^\theta(1-u)^\theta(1-v)^\theta]^{1/\theta}$	$[-1, \infty)$

As cópulas arquimedianas são mais flexíveis do que as cópulas elípticas, pois utilizam-se diferentes coeficientes de dependência e concordância. O tau de Kendall (τ) e os coeficientes dependência de cauda (λ_l e λ_u), para cópula bivariada das famílias arquimedianas, podem ser expressos em termos de função geradora da seguinte forma:

$$\tau = 1 + 4 \int_0^1 \frac{\varphi(x)}{\varphi'(x)} dx$$

$$\lambda_u = 2 - 2 \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\frac{\partial \varphi^{-1}(2x)}{\partial x}}{\frac{\partial \varphi^{-1}(x)}{\partial x}} \right)$$

$$\lambda_l = 2 \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{\frac{\partial \varphi^{-1}(2x)}{\partial x}}{\frac{\partial \varphi^{-1}(x)}{\partial x}} \right)$$

Na Tabela 3, é apresentada a relação entre o parâmetro θ com tau de Kendall e com os coeficientes de dependência na cauda para algumas cópulas arquimedianas bivariadas.

Tabela 3 Parâmetros de dependência de cópulas arquimedianas bivariadas.

Cópula	τ	λ_l, λ_u
Clayton	$\frac{\theta}{\theta + 2}$	$(2^{-1/\theta}, 0)$
Gumbel	$1 - \frac{1}{\theta}$	$(0, 2 - 2^{1/\theta})$
Frank	$1 - \frac{4}{\theta} + 4 \frac{D_1(\theta)^*}{\theta}$	$(0, 0)$
Ali-Mikhail-Haq	$1 - \frac{2(\theta + (1 - \theta)^2 \ln(1 - \theta))}{3\theta^2}$	$(0, 0)$
Joe	$1 + \frac{4}{\theta^2} \int_0^1 x(\ln x)(1 - x)^{2(1-\theta)/\theta} dx$	$(0, 2 - 2^{1/\theta})$

* $D_1(\theta) = \int_0^\theta \frac{x/\theta}{\exp(x) - 1} dx$ é a função de Debye.

Há um grupo⁶ de cópulas arquimedianas que são biparamétricas sendo a mais usada a cópula Joe-Clayton (JC), também chamada de cópula BB7, apresentada em Joe (1997), que é construída a partir da transformação de Laplace da cópula de Clayton é definida por:

$$C_{JC}(u, v; \lambda_l, \lambda_u) = 1 - \{(1 - [1 - (1 - u)^\kappa])^{-\gamma} + [1 - (1 - v)^\kappa])^{-\gamma} - 1\}^{\frac{1}{\kappa}}$$

em que as medidas de dependência de cauda são relacionadas com $\kappa = \frac{1}{\log_2(2 - \lambda_u)}$

$$\text{e } \gamma = \frac{-1}{\log_2(\lambda_l)}.$$

2.5.3 Métodos de Estimação

O processo de estimação abrange tanto métodos não-paramétricos, como as cópulas empíricas, quanto paramétricos de Máxima Verossimilhança e Inferência pelas Marginais e, também, pela abordagem Bayesiana. Há, ainda, as cópulas semiparamétricas, em que as marginais não-paramétricas são consideradas para o ajuste da cópula.

Esta seção apresenta brevemente as principais abordagens paramétricas para se estimar os parâmetros da função cópula presentes na literatura (JOE 2015). A estimação pelo método Bayesiano e semi-paramétrico não serão exposta aqui, mas podem ser encontrada em Shemyakin e Kniazev (2017) e Tsukahara (2005), respectivamente.

2.5.3.1 Método da Máxima Verossimilhança

O método de máxima verossimilhança (MMV) é aplicado em modelos paramétricos, nos quais os parâmetros das distribuições marginais e da cópula são estimados, simultaneamente, através da maximização da função log-verossimilhança

⁶A especificação das demais cópulas deste grupo pode ser encontrada em Joe (2015).

(LV), obtida a partir da equação (2), que é dada por:

$$l(X; \theta_i, \theta_c) = \sum_{j=1}^t \ln c(F_1(x_{1j}; \theta_1), \dots, F_n(x_{nj}; \theta_n); \theta_c) + \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^t \ln f_i(x_{ij}, \theta_c) \quad (5)$$

em que θ_c é o vetor de parâmetros da cópula e α_i os vetores de parâmetros das distribuições marginais. O estimador de máxima verossimilhança (EMV) ($\hat{\eta}_{EMV}$) é determinado assim por:

$$\hat{\eta}_{EMV} = \arg \max l(X; \theta_i; \theta_c)$$

sendo $\hat{\eta}_{EMV} = \{\theta_c, \theta_1, \dots, \theta_n\}$ o vetor com os parâmetros estimados.

Assumindo que as condições de regularidade são satisfeitas, o estimador é consistente, eficiente e assintoticamente normal, *i.e.*

$$\sqrt{t}(\hat{\eta}_{EMV} - \eta_0) \rightarrow N(0, I^{-1}(\eta_0))$$

em que $I(\eta_0)$ é a matriz de informação de Fisher e η_0 o verdadeiro valor do parâmetro.

2.5.3.2 Método de Inferência para as Marginais

O método de inferência para as marginais (MIM) consiste na estimação em dois estágios; no primeiro, são estimados os parâmetros das marginais (θ_i) e depois os parâmetros da cópula (θ_c).

Sendo a função (5) composta por dois termos aditivos, um envolvendo a função de densidade da cópula e outro envolvendo as densidades das marginais, estimação dos vetores de parâmetros pelo MIM é dado pela forma:

1. Estimação dos parâmetros das distribuições marginais,

$$\hat{\theta}_i = \arg \max \sum_{j=1}^t \ln f_i(x_{ij}, \theta_i), \quad i = 1, \dots, n$$

2. Estimação dos parâmetros da função cópula, condicionada nas estimativas ob-

tidas para as marginais anteriormente,

$$\hat{\theta}_c = \arg \max \sum_{j=1}^t \ln c(F_1(x_{1j}; \hat{\theta}_1), \dots, F_n(x_{nj}; \hat{\theta}_n); \theta_c)$$

Assim, o estimador na abordagem MIM é dado por $\hat{\eta}_{MIM} = \{\hat{\theta}_1, \hat{\theta}_1, \dots, \hat{\theta}_c\}$. É possível demonstrar que esse estimador é também consistente, eficiente e assintoticamente normal, *i.e.*

$$\sqrt{t}(\hat{\eta}_{MIM} - \eta_0) \rightarrow N(0, \mathcal{V}^{-1}(\eta_0))$$

em que $\mathcal{V}^{-1}(\eta_0)$ é a inversa da matriz de informação de Godambe⁷, construída a partir da função de escore da função log-verossimilhança.

⁷A matriz da informação de Godambe de θ associada a uma função de estimação regular Ψ_n é dada por:

$$\mathcal{V}_\Psi(\theta) = S_\Psi^T(\theta) V_\Psi^{-1}(\theta) S_\Psi(\theta)$$

em que $V_\Psi(\theta)$ é denominada de matriz de variabilidade e $S_\Psi(\theta)$ matriz de sensibilidade.

3 METODOLOGIA

A base de dados utilizada neste trabalho é proveniente do software Económica e refere-se aos log-retornos das cotações diárias das ações mais representativas, dos principais setores de atuação, da Bolsa de Valores e Mercadorias de São Paulo (BM&FBOVESPA), no período de 03 de janeiro de 2011 a 21 de junho de 2017, totalizando 1533 observações para cada série.

Considerando as características identificadas nos retornos financeiros, verificados com uma análise descritiva dos dados, concentra-se no estudo e emprego de modelos bivariados, nos quais os parâmetros da função cópula são fixos, para dimensionar a dependência existente entre os índices com maior participação na carteira teórica do BM&FBOVESPA, disponível no site da Bolsa: ABEV3, LREN3, BRFS3, ITUB4, BBDC4, VALE3 e PETR4. As descrições das variáveis utilizadas são apresentadas na Tabela 4.

Tabela 4 Descrição das variáveis utilizadas

Código da Ação	Nome da Ação	Setor de atuação
ABEV3	AMBEV S/A	Consumo não cíclico/Bebidas
LREN3	LOJAS RENNER	Consumo cíclico/Comércio
BRFS3	BRF S/A	Consumo básico/Alimentos Processados
ITUB4	ITAÚ UNIBANCO	Financeiro/Intermediárias Financeiras
BBDC4	BRADESCO	Financeiro/Intermediárias Financeiras
VALE3	VALE	Materias básicos/Mineração
PETR4	PETROBRÁS	Petróleo, Gás e Biocombustíveis

Recorre-se aos processos de séries temporais referentes a classe $ARMA(p,q)$ - $APARCH(1,1)$, para modelar individualmente, as distribuições marginais da cópula, pois, como apontou Patton(2009), as distribuições marginais podem estar condicionadas a apenas um conjunto de informações passadas significativas (W_i) para cada série e, ainda sim ser válida.

Assim, para cada série de retorno (R_{it}), tem-se que:

$$R_{it} = ARMA(p,q) + \varepsilon_{it}, \quad i = 1, \dots, 7$$

$$\sigma_{it}^\delta = \omega + \alpha_1(|\varepsilon_{it-1}| - \gamma_1\varepsilon_{it-1})^\delta + \beta_1\sigma_{it-1}^\delta$$

$$\varepsilon_{it} \sim t - skewed(\nu_i, \xi_i)$$

em que ω corresponde ao nível médio da volatilidade da variância condicional, δ representa uma transformação Box-Cox em σ_t que possibilita a estimação de outras potências, para o desvio padrão condicional, γ_i capta o efeito de alavancagem e α_i e β_i retratam juntos a persistência da volatilidade.

Na modelagem, utilizou-se a distribuição de erros *t-skewed* pelo fato de que os retornos indicam assimetria. Conforme Godoi et al. (2017), a densidade da *t-skewed* pode ser dada por:

$$f(z|\nu, \xi) = 2t_\nu(z)T_{\nu+1}\left(z\xi\sqrt{\frac{1+\nu}{\nu+z^2}}\right)$$

em que t_ν corresponde à função densidade de probabilidade de uma distribuição t-Student padrão com ν graus de liberdade e $T_{\nu+1}$ a função de distribuição acumulada de uma distribuição t-Student padrão com $\nu + 1$ graus de liberdade. O coeficiente de assimetria é dado por $\xi \in \mathbb{R}$.

O método de estimação, aplicado neste trabalho, foi o MIM, a partir do logaritmo natural da verossimilhança da distribuição conjunta da equação (3) :

$$\begin{aligned} l(\theta_1, \theta_2, \theta_c|w) &= \sum_{t=1}^T \ln(f_1(R_{1t}|w_1; \theta_1)) + \sum_{t=1}^T \ln(f_2(R_{2t}|w_2; \theta_2)) \\ &\quad + \sum_{t=1}^T \ln(c(u_t, v_t|w; \theta_c)) \end{aligned}$$

em que, inicialmente, são estimados os parâmetros de cada marginal (θ_i) e depois os parâmetros da cópula (θ_c). As estimativas das marginais, para um par de séries de ações, são dadas no primeiro estágio do MIM:

$$\begin{aligned} \hat{\theta}_1 &= \arg \max \sum_{t=1}^T \ln(f_1(R_{1t}|w_1; \theta_1)) \\ \hat{\theta}_2 &= \arg \max \sum_{t=1}^T \ln(f_2(R_{2t}|w_2; \theta_2)) \end{aligned}$$

em que w_i corresponde ao subconjunto de informações passadas relevantes, para cada série, representado pela parte ARMA das marginais.

A modelagem adequada para as séries de retornos, é definida pelo menor critério de informação de Akaike (AIC) e com o diagnóstico nos resíduos, por meio do teste Box-Pierce, verificado em Morettin e Tolo (2006), que avalia a existência de auto-correlação nos resíduos estimados. O AIC é dado por:

$$AIC = \frac{-2LV + 2m}{n}$$

onde n é o número de observações da série temporal, m o número de parâmetros estimados e LV o logaritmo natural da função de verossimilhança do modelo.

Com as distribuições marginais das séries determinadas, ajustam-se as cópulas nos resíduos padronizados (Z_{it}) transformados, obtidos de cada modelo para avaliar a estrutura de dependência entre os pares de retornos de interesse. A transformação em observações uniformes (u_t, v_t) é realizada por meio das funções de distribuições empíricas:

$$F_i^T(z) = \frac{1}{T+1} \sum_{t=1}^T \mathcal{I}(Z_{it} \leq z)$$

sendo $\mathcal{I}(\cdot)$ uma função indicadora. As estimativas das pseudo-observações são dadas por $u_t = F_{Z_{1t}|W_{1t-1}}(Z_{1t}|w_{1t-1})$ e $v_t = F_{Z_{2t}|W_{2t-1}}(Z_{2t}|w_{2t-1})$, em que W_{it-1} , com $i = 1, 2$ corresponde ao conjunto de informações considerado na modelagem de cada retorno do par em questão.

A partir das pseudo-observações obtidas é possível estimar os parâmetros da cópula, que foi feita no segundo estágio do MIM da seguinte forma:

$$\hat{\theta}_c = \arg \max \sum_{t=1}^T \ln c(u_t, v_t | w; \hat{\theta}_1, \hat{\theta}_2, \theta_c)$$

As funções de acoplamento usadas são aquelas que podem captar a estrutura de dependência estática específicas presente nos retornos financeiros: Normal, t-Student, Clayton, Gumbel e Frank. A cópula Joe-Clayton (BB7), foi utilizada aqui para dimensionar o grau das dependências de caudas em pares de ativos, que apresentaram essa relação, devido a limitação da cópula t-Student para este fim.

Assim, o método de estimação dos parâmetros de dependência consiste na modelagem das marginais, por meio de modelos ARMA-APARCH pelo método da máxima verossimilhança e com os resíduos padronizados obtidos, que são transformados em observações Uniformes[0,1], ajusta-se então, a respectiva cópula pelo MIM.

Pelo AIC, seleciona-se a cópula cujo ajuste seja mais significativo do ponto de vista estatístico. Conforme Schepsmeier e Brechmann(2015), o AIC de uma família de cópula bivariada com o parâmetro θ_c é definido como:

$$AIC = -2 \sum_t^T \ln c(u_{1t}, u_{2t}; \theta_c) + 2k$$

em que, para cópulas com um parâmetro $k = 1$ e para cópulas com dois parâmetros $k = 2$.

Por meio dos parâmetros de dependência relacionados às funções cópulas estimadas, apura-se o padrão de dependência entre as ações analisadas. Os resultados foram obtidos com o auxílio do software R (R CORE TEAM, 2017) utilizando dos pacotes *rugarch*, *copula*, *CDVine* e *VineCopula*.

4 RESULTADOS

Nesta seção, inicialmente, apresenta-se a descrição das séries de retornos utilizadas, para, em seguida, definir os modelos referentes às distribuições marginais e, enfim, especificar as funções cópulas para captar a estrutura de dependência do par de ações da BM&FBOVESPA.

4.1 Análise Descritiva

A Figura 1, mostra o comportamento dos retornos destas ações no período selecionado. Observa-se que as variâncias dos dados oscilam ao longo do tempo e a existência de *clusters* de volatilidade, verificada em maior intensidade, nas séries PETR4 E VALE3, importantes empresas brasileiras em termos de volume de negócios no mercado internacional, o que é reflexo dos efeitos da recente situação política e econômica do país.

A Tabela 5, apresenta a análise descritiva dos log-retornos e as estatísticas do teste Kolgomorov-Smirnov (KS) para verificar normalidade dos retornos. Observa-se excesso de curtose para ABEV3, BRFS3 e BBDC4 e presença de assimetria positiva exceto a BRFS3 que apresentou indícios de assimetria negativa, indicando que a probabilidade de valores extremos positivos é mais recorrente. A estatística do teste KS indica a não normalidade de todos os retornos. A correlação linear entre os ativos, bem como o gráfico de dispersão e histogramas, encontram-se no apêndice deste trabalho.

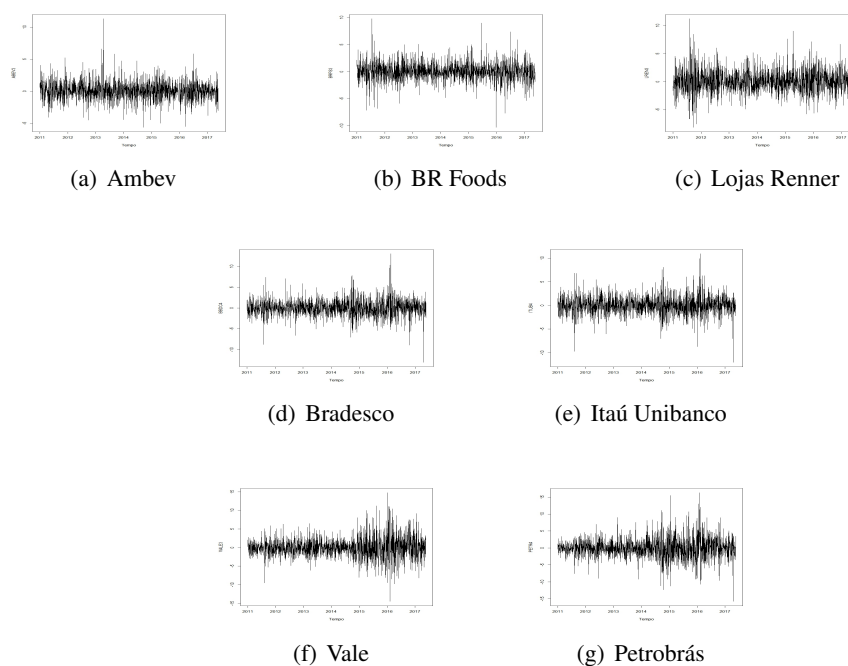


Figura 1 Log-Retornos de (a)ABEV3, (b)BRFS3, (c)LREN3, (d)BBDC4, (e)ITUB4, (f)VALE3 e (g)PETR4, no período de 03 de janeiro de 2011 a 21 de junho de 2017.

Tabela 5 Estatísticas descritivas dos retornos diários

Estatística	ABEV3	LREN3	BRFS3	BBDC4	ITUB4	PETR4	VALE3
Média	0,054	0,067	0,014	0,014	0,178	-0,030	0,003
Mediana	0,000	-0,020	0,000	0,000	0,030	0,000	-0,050
Máximo	11,290	11,200	9,770	13,030	10,920	16,280	14,760
Mínimo	-5,640	-8,140	-10,290	-13,110	-12,050	-15,760	-14,510
Desvio Padrão	1,440	2,060	1,707	2,017	1,957	2,972	2,745
Assimetria	0,409	0,242	-0,030	0,088	0,059	0,194	0,312
Curtose	3,239	1,465	3,067	3,610	2,885	2,942	2,471
KS	0,080	0,157	0,096	0,136	0,132	0,210	0,197

4.2 Modelos de Séries Temporais

Obtiveram-se distribuições marginais com processos ARMA-APARCH, utilizando a distribuição de erros *t-skewed*. As especificações adequadas a cada série, determinadas pelo critério de AIC e com a realização de diagnósticos nos resíduos, por meio do teste Box-Pierce, foram: ARMA(0,0)-APARCH(1,1) para ABEV3, ARMA(1,1)-APARCH(1,1) para LREN3, ARMA(0,0)-APARCH(1,1) para BRF53, ARMA(2,2)-APARCH(1,1) para BBDC4, ARMA(0,0)-APARCH(1,1) para ITUB4, ARMA(0,0)-APARCH(1,1) para PETR4 e ARMA(2,2)-APARCH(1,1) para VALE3.

As estimativas dos parâmetros das marginas das ações e o p-valor do teste de adequabilidade dos resíduos são apresentados na Tabela 6.

Tabela 6 Modelos ARMA-APARCH para as distribuições marginais

Equação da Média							
Coeficientes	ABEV3	LREN3	BRFS3	BBDC4	ITUB4	PETR4	VALE3
μ							
ϕ_1		0,350 (0,142)		-0,630 (0,001)			-0,608 (0,101)
ϕ_2				-0,995 (0,002)			-0,719 (0,169)
θ_1		-0,396 (0,136)		0,626 (0,000)			0,647 (0,072)
θ_2				1,003 (0,000)			0,714 (0,139)
Equação da Variância							
Coeficientes	ABEV3	LREN3	BRFS3	BBDC4	ITUB4	PETR4	VALE3
ω	0,066 (0,032)	0,073 (0,077)	0,379 (0,235)	0,018 (0,005)	0,066 (0,034)	0,015 (0,009)	0,014 (0,010)
α_1	0,050 (0,014)	0,046 (0,018)	0,110 (0,034)	0,042 (0,001)	0,044 (0,014)	0,063 (0,012)	0,056 (0,010)
β_1	0,915 (0,031)	0,934 (0,034)	0,714 (0,116)	0,958 (0,003)	0,936 (0,019)	0,947 (0,011)	0,950 (0,008)
γ_1	0,627 (0,223)	0,460 (0,252)	0,428 (0,206)	0,488 (0,169)	0,473 (0,200)	0,518 (0,126)	0,186 (0,101)
δ_1	0,809 (0,510)	1,736 (0,559)	1,163 (0,439)	0,775 (0,166)	1,409 (0,344)	0,760 (0,197)	1,437 (0,347)
ξ	1,020 (0,034)	1,098 (0,045)	1,010 (0,032)	0,983 (0,035)	1,025 (0,036)	1,019 (0,036)	1,040 (0,039)
ν	6,624 (1,038)	10,455 (2,793)	5,024 (0,650)	6,966 (1,039)	8,306 (1,536)	6,831 (1,097)	10,749 (2,697)
$Q(20)$	0,448	0,828	0,911	0,353	0,962	0,957	0,417

Verifica-se que o efeito de alavancagem (γ_1), foi significativo e positivo, para todos os retornos, indicando que choques negativos passados têm maior impacto sobre a volatilidade condicional no presente. Já a volatilidade incondicional, dada pelo parâmetro ω , foi baixa e significativa para as ações ABEV3,

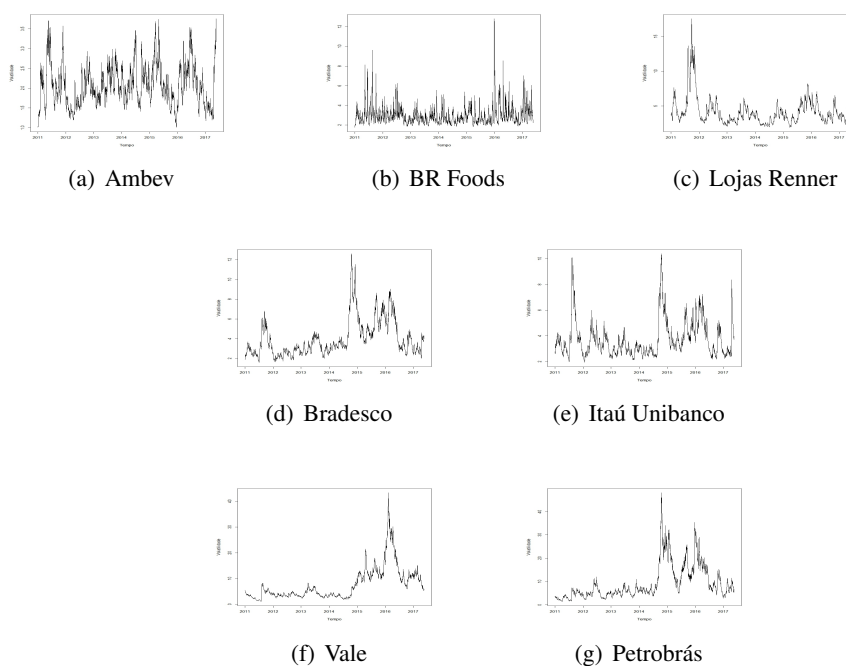


Figura 2 Gráfico da estimativa do desvio padrão condicional dos retornos diários de (a)ABEV3, (b)BRFS3, (c)LREN3, (d)BBDC4, (e)ITUB4, (f)VALE3 e (g)PETR4, no período de 03 de janeiro de 2011 a 21 de junho de 2017.

BBDC4,ITUB4 e PETR4.

A persistência da volatilidade dos retornos, dada pela soma dos coeficientes α_1 e β_1 , apresentou uma alta magnitude no período, indicando que choques do dia anterior persistirão no dia corrente, mas tendendo a se dissipar rapidamente, já que, de forma geral, obtiveram-se valores baixos do coeficiente de reação (α_1).

Ademais, o parâmetro de assimetria (ξ) foi significativo e positivo, conforme os resultados anteriormente obtidos na análise descritiva, exceto para BRFS3 que apresentou assimetria negativa. A estimativa de ν captou a existência de caudas pesadas. Pelo resultado do teste Box-Pierce, constata-se a não correlação serial nos resíduos.

Na Figura 2, os gráficos referem-se ao desvio padrão condicional estimado para cada série de log-retorno. Ao analisar a volatilidade, é possível apurar os

efeitos do cenário verificado, ao longo neste período, em cada retorno de ação e, com isso, compreender o padrão e magnitude de dependência, obtido pelas funções cópulas.

No período analisado, ocorreram transformações no âmbito político-econômico do país associadas à conturbada esfera política e desequilíbrio macroeconômico, que elevaram de forma substancial o ambiente de incerteza impactando o desempenho nas ações da bolsa de valores brasileira, de uma forma geral, como mostra Matos (2017).

De acordo com Lacerda (2017), essa conjuntura refletiu no retorno sobre capital das companhias abertas brasileiras, contribuindo para a queda de rentabilidade dessas empresas, o que prejudicou a capacidade de investimentos, principalmente nos anos de 2015 e 2016, observado na volatilidade apresentada pelos retornos de ações nestes anos.

Salienta-se, também, o aumento da especulação no mercado de capitais brasileiro, graças ao rebaixamento do grau de confiabilidade para investimentos do país e de várias empresas nacionais, por agências mundiais de classificação de risco de crédito, como a Standard & Poor's Ratings Services (S&P), em 2015, o que se estendeu ao longo de 2016, com perspectiva negativa para 2017, fragilizando a imagem positiva do Brasil adquirida nos últimos anos, até então quanto ao mercado internacional (STANDARD & POOR'S, 2015).

4.3 Modelos para Cópulas

Após a estimação das marginais para cada série, utilizam-se as pseudo-observações resultantes das integrais de probabilidade transformadas dos resíduos padronizados, que seguem distribuição Uniforme[0,1], para modelagem de cópulas bidimensionais.

As funções cópulas selecionadas pelo critério de AIC foram a Normal, t-Student, Frank e Clayton que são usualmente utilizadas na literatura em finanças. A cópula t-Student mostrou-se a mais adequada na maioria dos casos, indicando a existência de uma estrutura de dependência de cauda das distribuições. A cópula Joe-clayton é ajustada com intuito de dimensionar a magnitude da dependência de

Tabela 7 Resultado do AIC das Cópulas

Ações		AIC				
1	2	Normal	t-Student	Clayton	Gumbel	Frank
PETR4	VALE3	-438,0	-446,1	-346,7	-394,1	-433,5
LREN3	BBDC4	-405,9	-420,3	-326,7	-370,9	-385,9
ABEV3	BBDC4	-0,98	-3,73	-0,50	-1,71	-1,77
BRFS3	BBDC4	1,33	6,88	1,93	1,61	1,83
LREN3	ITUB4	-391,3	-394,9	-294,0	-356,2	-363,5
ABEV3	ITUB4	0,15	0,93	0,65	0,67	0,10
BRFS3	ITUB4	1,88	5,35	2,00	1,99	2,02
BBDC4	PETR4	-633,1	-648,1	-489,0	-602,5	-601,2
ITUB4	PETR4	-622,5	-636,1	-483,3	-583,0	-599,0
BBDC4	VALE3	-276,4	-300,1	-226,7	-256,2	-291,9
ITUB4	VALE3	-262,8	-276,7	-221,9	-232,8	-271,2
PETR4	LREN3	-286,2	-288,8	-230,0	-249,0	-278,3
PETR4	ABEV3	1,81	2,18	0,22	1,88	2,00
PETR4	BRFS3	1,86	5,54	1,93	1,93	1,89
VALE3	LREN3	-139,15	-138,43	-104,9	-116,56	-135,94
VALE3	ABEV3	1,48	4,35	2,00	2,92	1,95
VALE3	BRFS3	1,73	7,67	2,00	2,01	2,03

cauda em pares de ativos que apresentaram esse padrão de relação. A Tabela 7, contém os valores AIC para as cópulas utilizadas neste trabalho.

Particularidades presentes nos setores de cada ação e os efeitos da conjuntura interna verificada, ao longo deste período, podem explicar substancialmente o padrão e magnitude de dependência aferido entre estas ações.

Analisando os resultados da Tabela 8, verifica-se que no período analisado os pares de retornos de ações PETR4 e VALE3 apresentaram uma relação de dependência considerável e que o padrão de dependência existente é de caudas. Este mesmo padrão é observado entre os ativos do setor bancário com LREN3, PETR4 e VALE3, bem como ABEV3 com BBDC4 e PETR4 com LREN3. Uma relação linear é aferida entre BRFS3 e as ações dos demais setores e para as ações LREN3 e ABEV3 com VALE3. Ademais, uma relação de cauda inferior foi verificada entre PETR4 e ABEV3 e a ausência de dependência de cauda para ABEV3 e ITUB4.

Já no que se refere ao grau da dependência pelos valores do Tau de Kendall (τ), verificou-se a existência de um nível considerável de relação entre as ações

do setor bancário, PETR4, VALE3 e LREN3, diferente do que ocorre entre BRFS3 e ABEV3 com os demais retornos de ações, em que se obteve uma associação com magnitude pequena. Mensurando a dependência das caudas, em pares de ativos que apresentaram este padrão de relação, os valores obtidos, por meio da cópula Joe Clayton, apontam que os valores de cauda superior (λ_U) e inferior (λ_L) são bem próximos, entretanto obteve-se um nível maior dependência de cauda superior, indicando que a relação entre estes pares de ativos se intensificou um pouco mais no período em que ocorreu momentos de alta no mercado.

A associação verificada da LREN3 com ITUB4 e BBDC4 está relacionada com a oferta e demanda de crédito que influenciam o nível de consumo, bem como a captação no mercado de empréstimos, impactando o resultado operacional destas empresas. Oliveira (2017) verificou em sua análise que, neste período, houve uma piora das condições da captação crédito e repasses no país e no exterior e, ainda, um aumento das provisões para crédito de liquidação duvidosa, refletindo na magnitude da cauda negativa. Entretanto, Colombo et al. (2011) salientam que as empresas do setor financeiro e de bens de consumo se beneficiam mais, quando ambas estão em um bom momento, pois há um aumento nas vendas e da demanda por crédito dos consumidores, o que se verifica no valor maior de cauda superior.

A relação entre PETR4 e VALE3, bem como destas ações com LREN3, ITUBB4 e BBDC4, advém do papel importante das *commodities*, para a economia brasileira, que contribui, substancialmente, para obtenção de taxas de crescimento e, conseqüentemente, gera um efeito de aumento de renda real como mostram Me-deiros(2015) e Black (2015). Assim, é possível entender que essas ações, exceto LREN3 e VALE3, associem-se mais em momentos favoráveis, como verifica-se nos valores dos coeficientes de dependência de caudas para estas relações.

No período em questão, no que se refere à PETR4 e VALE3, evidencia-se o choque propiciado pela incerteza do cenário interno e o mercado externo desfavorável, com baixo dinamismo e redução do preço das *commodities* na rentabilidade destas empresas, o que pode ser verificado na volatilidade apresentada por elas, principalmente, nos anos de 2015 e 2016. O resultado foi um impacto negativo no PIB *per capita*, o que implica no desempenho dos demais setores, como mostram Almeida et al. (2016) em sua análise. A influência deste cenário pode ser

observada, principalmente, na magnitude da cauda inferior aferida entre PETR4 e VALE3, e destas ações com ITUBB4 e BBDC4, como entre LREN3 e PETR4 .

O menor nível do parâmetros de dependência e associação apresentado por ABEV3 e BRFS3, com ativos dos demais setores, é resultado da demanda de bens de consumo básicos não se alterar, mesmo com instabilidades e pela menor volatilidade apresentada por estas empresas, ao longo do período, como se verifica na Figura 2. Este contexto, é evidenciado na análise de Almeida et al. (2016) os quais mostram que, mesmo com a retração econômica, os bens básicos de consumo apresentaram estabilidade devido a expansão do seu investimento. O mesmo cenário é verificado nas Lojas Renner, conforme reforça o Relatório Anual de 2016 apresentado pela empresa. Entretanto bens de consumo cíclico são mais susceptivos às variações na renda real, refletindo no nível de vendas, o que pode ser observado no padrão de cauda inferior aferida na relação de LREN3 com o setor financeiro e de petróleo.

Ademais, como em momentos de instabilidades, o sistema financeiro é afetado devido ao aumento de risco, como assinalado no rebaixamento do *rating* pela S&P, é necessário analisar a dependência entre as ações, frisando a influência das ambiguidades no sistema político no nível de confiança dos investidores, como explanam Pozobon e Garcia (2017) e Matos (2017), na relação de dependência verificada entre as ações. Observa-se, por exemplo, que, mesmo com uma baixa associação, PETR4 e ABEV3 apresentaram uma relação de cauda inferior no período pelo choque das investigações de corrupção na Petrobrás, que surgiram em 2014.

5 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Utilizando cópulas condicionais bivariadas com parâmetros fixos, este trabalho analisou a dependência entre pares de séries de retornos de ações, dos principais setores presentes na BM&FBOVESPA. Foram analisadas as ações das empresas Ambev, BR Foods, Renner, Bradesco, Itaú Unibanco, Vale e Petrobrás no período de 03 de janeiro de 2011 a 21 de junho de 2017.

Os resultados dos parâmetros de dependência, obtidos pelas funções cópulas, adequadas a cada par, demonstram a existência de uma considerável relação de dependência entre ações do setor bancário, LREN3, PETR4 e VALE3 que, de forma geral é assimétrica, exceto para o par LREN3/VALE3 que apresenta uma relação linear. Por meio da cópula Joe-Clayton, verificou-se que a relação entre estes pares de ativos com padrão de dependência de caudas intensifica-se um pouco mais em períodos em que ocorrem momentos de alta no mercado, refletindo a natureza da associação econômica pré-existente entre os setores destes pares de ações.

A associação captada pelos valores de cauda negativa é reflexo de fatos incidentes, no ambiente econômico-político, relacionados à corrupção e gestão de política monetária e fiscal do país; influenciou o desempenho da economia como um todo e refletiu no desempenho da bolsa de valores brasileira. No que se refere a Petrobrás e Vale, o impacto é mais acentuado, como verificado nas respectivas volatilidades devido a redução da dinâmica do mercado internacional de *commodities*.

Verifica-se, também, que as ações das empresas Ambev e BR Foods, em meio a essa conjuntura, apresentaram uma menor associação com as ações dos demais setores, o que pode ser explicado pelo fato de que o consumo desses bens apresenta estabilidade, mesmo com momentos de recessão econômica e da menor volatilidade destas ações. Em relação ao padrão de dependência, aferiu-se uma relação linear entre BRFS3 com ações dos demais setores e uma dependência de cauda negativa apurada entre ABEV3 e PETR4, o que ressalta as implicações da crise de confiança em virtude, dentre outros fatores, das investigações de esquemas de corrupção da Petrobrás que aumentaram significativamente o risco do sistema

financeiro brasileiro.

Deste modo, um cenário instável como este impacta diretamente na conjuntura destas empresas, importantes no âmbito econômico-financeiro do país, o que explica, substancialmente, a magnitude mais acentuada e o padrão de associação, bem como o valor do coeficiente de dependência de cauda inferior, observado entre os retornos e possibilita o entendimento do comportamento entre ações da bolsa de valores brasileira ao longo do período analisado.

Como sugestão de trabalhos futuros, pretende-se incorporar a análise de gestão de riscos, inferindo medidas de risco como o Valor em Risco (VaR). Por outro lado, por causa das oscilações, no cenário econômico atual, uma alternativa é, ainda, utilizar a metodologia de *Regime Switching copula* que possibilita a análise da dependência entre as séries de retornos, considerando as alterações na sua magnitude, dadas as mudanças de regime da economia consequência dos movimentos de alta e baixa do mercado.

6 REFERÊNCIAS

ALMEIDA, J. S. G.; NOVAIS, L. F.; ROCHA, M. A. **A fragilização financeira das empresas não financeiras no Brasil pós-crise**. Campinas: IE-Unicamp, 2016. (Texto para Discussão).

ALOUI, R.; AISSA, M. S. B.; NGUYEN, D. K. Global financial crisis, extreme interdependences, and contagion effects: The role of economic structure?. **Journal of Banking & Finance**, v. 35, n. 1, p. 130-141, 2011.

BERGMANN, D. R. et al. US subprime financial crisis contagion on BRIC and European Union stock markets. **Revista de Administração**, São Paulo, v. 50, n. 2, p. 229-240, 2015.

BLACK, C. Preços de commodities, termos de troca e crescimento econômico brasileiro nos anos 2000. **Indicadores Econômicos FEE**, Porto Alegre, v. 42, n. 3, p. 27-44, 2015.

BOLLERSLEV, T. Generalized autoregressive conditional heteroskedasticity. **Journal of Econometrics**, v. 31, n. 3, p. 307-327, 1986.

CERRATO, M. et al. **Modeling dependence structure and forecasting market risk with dynamic asymmetric copula**. Glasgow: Adam Smith Business School-University of Glasgow, 2015. (Texto para Discussão). Disponível em: <<https://papers.ssrn.com/sol3/papers>>. Acesso em: 12 out. 2017.

CHERUBINI, U.; GOBBI, F.; MULINACCI, S. **Convolution Copula Econometrics**. Switzerland: Springer International Publishing, 2016.

CHRISTOFFERSEN, P. et al. Dynamic dependence and diversification in corporate credit. **Review of Finance**, Oxford, v. 22, n. 2, p. 521-560, 2018. Disponível em: <<http://93.174.95.27/scimag9/10.1093>>. Acesso em: 15 mar. 2018.

CLAESSENS, S.; FORBES, K. **International financial contagion**. Springer Science & Business Media, 2013.

COLOMBO, J. A.; WINK JUNIOR, M. V.; HORTA, E.O. Regime Switching Copula: uma análise da dependência intra e inter-setorial. In: Encontro Nacional de

Economia, 39.,2011 ,Foz do Iguauçu. **Anais eletrônicos....** Foz do Iguauçu: ANPEC, 2011.

Disponível em: <<http://www.anpec.org.br/novosite/br/encontro-2011>>. Acesso em: 14 jun. 2017.

CREAL, D. D.; TSAY, R. S. High dimensional dynamic stochastic copula models. **Journal of Econometrics**, v. 189, n. 2, p. 335-345, 2015. Disponível em: <<http://faculty.chicagobooth.edu>>. Acesso em: 15 mai. 2017.

DING, Z.; GRANGER, C. W. J.; ENGLE, R. F. A long memory property of stock market returns and a new model. **Journal of Empirical Finance**, v. 1, n. 1, p. 83-106, 1993.

DING, D. Modeling of market volatility with APARCH mode. **Project Report n. 06/2011**, Uppsala University Department of Mathematics, Sweden, Uppsaka, 2011.

EMBRECHTS, P.; LINDSKOG, F.; MCNEIL, A. **Modelling dependence with copulas**. Rapport technique, Département de mathématiques, Institut Fédéral de Technologie de Zurich, Zurich, 2001. Disponível em: <<https://people.math.ethz.ch>>. Acesso em: 10 mar. 2017.

ENGLE, R. F. Autoregressive conditional heteroscedasticity with estimates of the variance of United Kingdom inflation. **Econometrica**, v. 50, n. 4, p. 987-1007, 1982.

FEI, F.; FUERTES, A. M.; KALOTYCHOU, E. Modeling dependence in cds and equity markets: Dynamic copula with markov-switching. **International journal of forecasting**, v. 5, n. 4, p. 559-583, 2013.

FERMANIAN, J. D.; WEGKAMP, M. H. Time-dependent copulas. **Journal of Multivariate Analysis**, v. 110, p. 19-29, 2012.

FINK, H. et al. Regime switching vine copula models for global equity and volatility indices. **Econometrics**, v. 5, n. 1, p. 3, 2017. Disponível em: <<http://www.mdpi.com>>. Acesso em: 15 mai. 2017.

FRÉCHET, M. Les tableaux de corrélation et les programmes linéaires. **Revue de l'Institut international de statistique**, p. 23-40, 1957.

GENEST, C.; GENDRON, M.; BORDEAU-BRIEN, M. The Advent of Copulas in Finance. **The European Journal of Finance**, v. 15, n. 7, p. 609-618, 2009. Disponível em: <<https://www.researchgate.net>>. Acesso em: 15 mai. 2017.

GODOI, L. G. et al. Concentration function for the skew-normal and skew-t distributions, with application in robust Bayesian analysis. **Brazilian Journal of Probability and Statistics**, v. 31, n. 2, p. 373-393, 2017.

HORTA, P.; LAGOA, S.; MARTINS, L. The impact of the 2008 and 2010 financial crises on the Hurst exponents of international stock markets: Implications for efficiency and contagion. **International Review of Financial Analysis**, v. 35, p. 140-153, 2014. Disponível em: <https://www.researchgate.net>. Acesso em: 18 mai. 2017.

KNIGHT, J; SATCHELL, S. **Forecasting volatility in the financial markets**. 3rd ed. UK: Butterworth-Heinemann, 2007.

JOE, H. **Dependence modeling with copulas**. New York: CRC Press, 2015.

LACERDA, A. C. Dinâmica e evolução da crise: discutindo alternativas. **Estudos Avançados**, v. 31, n. 89, p. 37-49, 2017. Disponível em: <<http://http://www.scielo.br/scielo.php?pid=S0103>>. Acesso em: 13 dez. 2017.

LIU, B.; JI, Q. ; FAN, Y. A new time-varying optimal copula model identifying the dependence across markets. **Quantitative Finance**, v. 17, n. 3, p. 437-453, 2017. Disponível em: <<http://www.tandfonline.com>>. Acesso em: 13 abr. 2017.

MAI, J.; SCHERER, M. **Financial engineering with copulas explained**. Hampshire: Palgrave Macmillan, 2014.

MATOS, P. Uma Avaliação de “Dual Class Shares” no Brasil: Um Estudo da Reforma do Novo Mercado. **Codes, Standards, and Position Papers**, v. 2017, n. 4, p. 1-56, 2017. Disponível em: <<https://www.cfapubs.org>>. Acesso em: 23 out. 2017.

MEDEIROS, C. A. **Inserção externa, crescimento e padrões de consumo na economia brasileira**. Brasília: IPEA, 2015.

MENDES, V. B. **Introdução à análise de eventos extremos**. Rio de Janeiro: E-Papers Serviços Editoriais, 2004.

MORETTIN, A. P; TOLOI, C. M. C. **Análise de series temporais**. 2 ed. São Paulo: Edgard Blucher. 2006.

MORETTIN, A. P. **Econometria Financeira**. 3 ed. São Paulo: Blucher, 2017.

NELSEN, R. B. **An introduction to copulas**. 2nd ed. New York: Springer Science & Business Media, 2006.

OH, D. H.; PATTON, A. J. Time-varying systemic risk: Evidence from a dynamic copula model of cds spreads. **Journal of Business & Economic Statistics**, p. 1-15, 2017.

OLIVEIRA, G. C. **O desempenho do sistema bancário no Brasil no período recente (2007-2015)**. Brasília: Ipea, 2017. (Texto para Discussão, n. 2327). Disponível em: <<https://ipea.gov.br>>. Acesso em 10 dez.2017.

PATTON, A. J. Copula based models for financial time series. In: ANDERSON, T. G. et al., eds. **Handbook of financial time series**. Berlin: Springer, p. 767-785, 2009.

PATTON, A. J. A review of copula models for economic time series. **Journal of Multivariate Analysis**, v. 110, p. 4-18, 2012.

PENG, Y.; NG, W. L. Analysing financial contagion and asymmetric market dependence with volatility indices via copulas. **Annals of Finance**, v. 8, n.1, p. 49-74, 2012.

POZOBON, R. O.; GARCIA, A. D. Brasil “mau pagador”: estratégias argumentativas na construção social da crise política, econômica e de representação do governo Dilma. **Revista Eptic**, v. 19, n. 1, p. 44-59, 2017. Disponível em: <<http://seer.ufs.br>>. Acesso em: 09 out. 2017.

R Core Team 2017. **R: A language and environment for statistical computing**. R Foundation for Statistical Computing, Vienna, Austria. URL <http://www.R-project.org/>.

RIGHI, M. B.; CERETTA, P. S. Analyzing the dependence structure of various sectors in the Brazilian market: A Pair Copula Construction approach. **Economic Modelling**, v. 35, p. 199-206, 2013.

SANTOS, R. P. S; PEREIRA, P. L. V. Modeling Financial Contagion Using Copula. **Brazilian Review of Finance**, v. 9, n. 3, p.335–363, 2011.

SILVA, F. A. B. S. The Copula Opinion Pooling through a Copula-APARCH: An Empirical Application. In: Simpósio Nacional de Probabilidade e Estatística, 21., 2014, Natal. **Anais eletrônicos...** Natal: SINAPE, 2014. Disponível em: <<https://www.researchgate.net>>. Acesso em: 16 abr. 2017.

SILVA FILHO, O. C.; ZIEGELMANN, F. A.; DUEKER, M. J. Modeling dependence dynamics through copulas with regime switching. **Mathematics and Economics**, v. 50, n. 3, p. 346-356, 2012.

SCHEPSMEIER, U.; BRECHMANN, E. C.; ERHARDT, M. T. **Package ‘CD-Vine’**. 2015.

SHEMYAKIN, A.; KNIAZEV, A. **Introduction to Bayesian Estimation and Copula Models of Dependence**. John Wiley & Sons, 2017.

SKLAR, M. Fonctions de répartition à n dimensions et leurs marges. **Publications de l Institut de Statistique de l Université de Paris**, v.8, p. 229-231, 1959.

STANDARD & POOR’S. **Rating soberano em moeda estrangeira do Brasil rebaixado para ‘BB+/B’; perspectiva negativa**. Nota à imprensa. Disponível em:<[http:// www.standardandpoors.com/pt_LA](http://www.standardandpoors.com/pt_LA)>. Acesso em: 08 nov. 2017.

TOFOLI, P. V.; ZIEGELMANN, F. A.; CANDIDO, O. A Comparison Study of Copula Models for European Financial Index Returns. **International Journal of Economics and Finance**, v. 9, n. 10, p. 155-178, 2017. Disponível em: <<http://www.ccsenet.org>>. Acesso em: 20 nov. 2017.

TSAY, R. S. **Analysis of financial time series**. John Wiley & Sons, 2005.

TSUKAHARA, H. Semiparametric estimation in copula models. **Canadian Journal of Statistics**, v. 33, n. 3, p. 357-375, 2005.

WANG, G. et al. Dynamics of foreign exchange networks: a time-varying copula approach. **Discrete Dynamics in Nature and Society**, v. 14, 2014.

ANEXO A- Modelos de Séries Temporais

Modelo ARMA

Denota-se por $ARMA(p,q)$ um processo autorregressivo e de médias móveis de ordem (p,q) que pode ser dado de forma geral por:

$$Y_t = \sum_{i=1}^p \phi_i Y_{t-i} + \sum_{i=1}^q \theta_i \varepsilon_{t-i} + \varepsilon_t$$

em que o termo ε_t é o resíduo que constitui variáveis aleatórias independentes e identicamente distribuídas (iid) com média zero e variância σ^2 , ϕ representa os p coeficientes da componente autoregressiva e θ os q coeficientes da componente de média móvel.

Utilizando o operador de translação para o passado (B), tem-se que

$$\phi(B)Y_t = \theta(B)\varepsilon_t + \varepsilon_t$$

em que $\phi(B)Y_t = \phi_1 Y_{t-1}, \dots, \phi_p Y_{t-p}$ e $\theta(B)\varepsilon_t = \theta_1 \varepsilon_{t-1}, \dots, \theta_q \varepsilon_{t-q}$.

As condições de estacionariedade e invertibilidade são verificadas se as raízes dos respectivos polinômios $\phi(B)$ e $\theta(B)$ estiverem fora do círculo unitário. As funções de autocorrelação e autocorrelação parcial são infinitas e decaem para zero exponencialmente ou segundo uma senóide amortecida (MORETTIN E TOLOI, 2006).

Modelos Heterocedásticos

Um processo denominado ARCH expressa a variância condicional como uma defasagem distribuída do quadrado dos retornos passados. Conforme Morettin (2017), a ideia básica é que o retorno Y_t é não-correlacionado serialmente, mas a volatilidade depende de retornos passados por meio de uma função quadrática. O modelo $ARCH(r)$ é dado por:

$$Y_t = \sqrt{\sigma_t} \varepsilon_t$$

$$\sigma_t^2 = \alpha_0 + \alpha_1 Y_{t-1}^2 + \dots + \alpha_p Y_{t-p}^2$$

em que σ_t é o desvio padrão condicional, ε_t são os resíduos do modelo, que assumem usualmente uma distribuição normal ($\varepsilon_t \sim N(0,1)$) ou *t-Student* ($\varepsilon_t \sim t_\nu$), os parâmetros do modelo estão sujeitos às seguintes restrições $\alpha_0 > 0$, $\alpha_i > 0$ e $i > 0$.

Bollerslev (1986) introduz uma generalização do modelo ARCH(r) que se obtenha um modelo mais parcimonioso para tratar a variância condicional denominado modelo GARCH (*Generalized ARCH*). Um processo GARCH(r,s) é dado por:

$$Y_t = \sqrt{\sigma_t} \varepsilon_t$$

$$\sigma_t^2 = \alpha_0 + \sum_{i=1}^r \alpha_i Y_{t-i}^2 + \sum_{j=1}^s \beta_j \sigma_{t-j}^2$$

em que ε_t i.i.d. (0,1), que assumem usualmente uma distribuição normal ou t-Student, sujeita às restrições dos parâmetros do modelo que são $\alpha_0 > 0$, $\alpha_i \geq 0$, $\beta_j \geq 0$, $i > 0$, $j > 0$ e $\sum_{i=1}^m (\alpha_i + \beta_j) < 1$, sendo $m = \max(p,q)$. Quando $s = 0$, o modelo GARCH se reduz ao modelo ARCH(r).

Outra generalização de modelos de variância condicional da família ARCH é o modelo APARCH (*Asymmetric Power Autoregressive Conditional Heteroscedasticity*) proposto por Ding et al. (1993). Esta modelagem considera o efeito de alavancagem, referente aos diferentes impactos de choques positivos e negativos na volatilidade.

A estrutura geral do modelo APARCH(p,q) pode ser dada por:

$$\epsilon_t = z_t \sigma_t$$

;

$$z_t \sim \mathcal{D}_\nu(0,1)$$

$$\sigma_t^\delta = \omega + \sum_{i=1}^p \alpha_i (|\epsilon_{t-i}| - \gamma_i \epsilon_{t-i})^\delta + \sum_{j=1}^q \beta_j \sigma_{t-j}^\delta$$

sujeita as seguintes restrições nos parâmetros a serem estimados : $\omega \geq 0$, $\alpha_i \geq 0$, $\beta_j \geq 0$, $\delta \geq 0$ e $|\gamma_i| \leq 1$. σ_t é o desvio padrão condicional da série de retorno e σ_t^δ a variância condicional, dado o conjunto de informações disponíveis em $t - 1$, quando $\delta = 2$.

O parâmetro ω corresponde ao nível médio da volatilidade da variância condicional, δ possibilita a estimação de outras potências para o desvio padrão condicional, por meio de uma transformação Box-Cox em σ_t , γ_i capta o efeito de alavancagem, α_i e β_i retratam juntos a persistência da volatilidade, \mathcal{D}_ν capta, se existir, a distribuição com cauda pesada e indica a distribuição dos erros com média 0 e variância 1 em que se $\nu = 0$ trata-se de uma distribuição normal.

Ding et al. (2011) apresentam as generalizações da família ARCH que podem ser representadas por meio do modelo APARCH :

- i. Se $\delta = 2$, $\beta_j = 0$ e $\gamma_i = 0$, tem-se um modelo ARCH clássico;
- ii. Se $\delta = 2$, e $\gamma_i = 0$, tem-se um GARCH clássico de Bollerslev;
- iii. Se $\delta = 2$, e $0 \leq \gamma_i \leq 1$, tem-se um modelo Glostén-Jagannathan-Runkle GARCH (GJR-GARCH);
- iv. Se $\delta = 1$, e $\gamma_i = 0$, tem-se um Taylor/Schwartz's GARCH (TS-GARCH);
- v. Se $\delta = 1$, e $\beta_j = 0$, tem-se um modelo TARCH;
- vi. Se $\gamma_i = 0$, e $\beta_j = 0$, tem-se um modelo ARCH não linear (NARCH);
- vii. Se $\delta \rightarrow 0$ tem-se um LogARCH.

ANEXO B- Rotinas do R

```

#Os dados: ações mais representativas dos principais setores da BM&F Bovespa
dados <- read.csv2("C:\\Users\\Marcela\\Desktop\\Cópulas Fixas\\bovespa.csv")
head(dados)
Data Vale Petrobras Bradesco ItauUni Ambev Renner BRF
1 03/01/2011 2.07 -0.37 0.92 0.81 1.22 -1.38 0.99
2 04/01/2011 1.81 1.19 1.86 1.50 0.61 -0.80 2.15
3 05/01/2011 -1.28 -0.40 -2.65 -2.36 0.79 -2.42 0.54
4 06/01/2011 -0.75 -1.40 -1.69 -2.45 -1.42 -0.92 1.17
5 07/01/2011 -0.19 0.94 0.18 0.80 4.05 -1.09 -0.04
6 10/01/2011 1.05 0.63 0.52 0.62 0.46 1.14 1.23
attach(dados)

#Séries temporais dos retornos

amb<- ts(Ambev, start = 2011, frequency = 240) # Ambev
plot.ts(amb, ylab="ABEV3")

rn <- ts(Renner, start = 2011, frequency = 240) # Renner
plot.ts(rn, ylab="LREN3")

brf <- ts(BRF, start = 2011, frequency = 240) # BRFoods
plot.ts(brf, ylab="BRFS3")

brad<- ts(Bradesco, start = 2011, frequency = 240) # Bradesco
plot.ts(brad, ylab="BBDC4")

itau<- ts(ItauUni, start = 2011, frequency = 240) # Itau
plot.ts(itau, ylab="ITUB4")

petro<- ts(Petrobras, start = 2011, frequency = 240) # Petrobras
plot.ts(petro, ylab="PETR4")

vale<- ts(Vale, start = 2011, frequency = 240) # Vale
plot.ts(vale, ylab="VALE3")

#Definindo as marginais
require(rugarch)

## BBDC4 ##
fit1 <- autoarfima(data = brad,criterion = "AIC", method = "full",arfima = FALSE,include.mean = T)

garchMod1 <- ugarchspec(variance.model=list(model="apARCH"),
mean.model=list(armaOrder = c(2,2),include.mean=F),
distribution.model="sstd") # especificando o modelo ARMA-APARCH
m1<- ugarchfit(spec=garchMod1, data=brad)
u1 <- residuals(m1,standardize=T) # resíduos padronizados

## ITUB4 ##
fit2 <- autoarfima(data = itau,criterion = "AIC", method = "full",arfima = FALSE,include.mean = T)

garchMod2 <- ugarchspec(variance.model=list(model="apARCH"),
mean.model=list(armaOrder = c(0,0),include.mean=F),
distribution.model="sstd")
m2<- ugarchfit(spec=garchMod2, data=itau)

```

```

u2 <- residuals(m2,standardize=T)

## ABEV3 ##
fit3 <- autoarfima(data = amb,criterion = "AIC", method = "full",arfima = FALSE,include.mean = T)

garchMod3 <- ugarchspec(variance.model=list(model="apARCH"),
mean.model=list(armaOrder = c(0,0),include.mean=F),
distribution.model="sstd")
m3<- ugarchfit(spec=garchMod3, data=amb)
u3 <- residuals(m3,standardize=T)

## LREN4 ##
fit4 <- autoarfima(data =rn,criterion = "AIC", method = "full",arfima = FALSE,include.mean = T)

garchMod4 <- ugarchspec(variance.model=list(model="apARCH"),
mean.model=list(armaOrder = c(1,1),include.mean=F),
distribution.model="sstd")
m4<- ugarchfit(spec=garchMod4, data=rn)
u4 <- residuals(m4,standardize=T)

## VALE3 ##
fit5 <- autoarfima(data = vale,criterion = "AIC", method = "full",arfima = FALSE,include.mean = T)

garchMod5 <- ugarchspec(variance.model=list(model="apARCH"),
mean.model=list(armaOrder = c(2,2),include.mean=F),
distribution.model="sstd")
m5<- ugarchfit(spec=garchMod5, data=vale)
u5 <- residuals(m5,standardize=T)

## PETR4 ##
fit6 <- autoarfima(data = petro,criterion = "AIC", method = "full",arfima = FALSE,include.mean = T)

garchMod6 <- ugarchspec(variance.model=list(model="apARCH"),
mean.model=list(armaOrder = c(0,0),include.mean=F),
distribution.model="sstd")
m6<- ugarchfit(spec=garchMod6, data=petro)
u6 <- residuals(m6,standardize=T)

## BRFS3 ##
fit7 <- autoarfima(data = brf,criterion = "AIC", method = "full",arfima = FALSE,include.mean = T)

garchMod7 <- ugarchspec(variance.model=list(model="apARCH"),
mean.model=list(armaOrder = c(0,0),include.mean=F),
distribution.model="sstd")
m7<- ugarchfit(spec=garchMod7, data=brf)
u7 <- residuals(m7,standardize=T)

#Estimativas das cópulas: dependência intra-setorial
require(copula)
require(VineCopula)
require(CDVine)

# setor de materias básicos com petróleo gás e biocombustíveis ##

#PETR4 e VALE3
selectedCopula1 <- BiCopSelect(pobs(u5),pobs(u6),familyset=c(1:9),selectioncrit="AIC")

```

```

cop1<- BiCopEstList(pobs(u5),pobs(u6))
# estimativas e critérios de escolha dos modelos de todas as cópulas

## setor de consumo com setor financeiro ##

#LREN3 e BBDC4
selectedCopula2 <- BiCopSelect(pobs(u4),pobs(u1),familyset=c(1:9),selectioncrit="AIC")
cop2<- BiCopEstList(pobs(u4),pobs(u1))

#LREN3 e ITUB4

selectedCopula3 <- BiCopSelect(pobs(u4),pobs(u2),familyset=c(1:9),selectioncrit="AIC")
cop3<- BiCopEstList(pobs(u4),pobs(u2))

# ABEV3 e BBDC4
selectedCopula4 <- BiCopSelect(pobs(u3),pobs(u1),familyset=c(1:9),selectioncrit="AIC")
cop4<- BiCopEstList(pobs(u3),pobs(u1))

# ABEV3 e ITUB4
selectedCopula5 <- BiCopSelect(pobs(u3),pobs(u2),familyset=c(1:9),selectioncrit="AIC")
cop5<- BiCopEstList(pobs(u3),pobs(u2))

# BRFS3 e BBDC4
selectedCopula6 <- BiCopSelect(pobs(u7),pobs(u1),familyset=c(1:9),selectioncrit="AIC")
cop6<- BiCopEstList(pobs(u7),pobs(u1))

# BRFS3 e ITUB4
selectedCopula7 <- BiCopSelect(pobs(u7),pobs(u2),familyset=c(1:9),selectioncrit="AIC")
cop7<- BiCopEstList(pobs(u7),pobs(u2))

## setor financeiro com petróleo gás e biocombustíveis ##

#PETR4 e BBDC4
selectedCopula8 <- BiCopSelect(pobs(u6),pobs(u1),familyset=c(1:9),selectioncrit="AIC")
cop8<- BiCopEstList(pobs(u6),pobs(u1))

#PETR4 e ITUB4
selectedCopula9 <- BiCopSelect(pobs(u6),pobs(u2),familyset=c(1:9),selectioncrit="AIC")
cop9<- BiCopEstList(pobs(u6),pobs(u2))

## setor financeiro com materias básicos ##

#VALE3 e BBDC4
selectedCopula10 <- BiCopSelect(pobs(u5),pobs(u1),familyset=c(1:9),selectioncrit="AIC")
cop10<- BiCopEstList(pobs(u5),pobs(u1))

#VALE3 e ITUB4
selectedCopula11 <- BiCopSelect(pobs(u5),pobs(u2),familyset=c(1:9),selectioncrit="AIC")
cop11<- BiCopEstList(pobs(u5),pobs(u2))

## setor de consumo com petróleo gás e biocombustíveis ##

#PETR4 e LREN3
selectedCopula12<- BiCopSelect(pobs(u6),pobs(u4),familyset=c(1:9),selectioncrit="AIC")

```

```
cop12<- BiCopEstList (pobs (u6) ,pobs (u4) )

#PETR4 e ABEV3
selectedCopula13 <- BiCopSelect (pobs (u6) ,pobs (u4) ,familyset=c (1:9) ,selectioncrit="AIC")
cop13<- BiCopEstList (pobs (u6) ,pobs (u4) )

#PETR4 e BRFS3
selectedCopula14 <- BiCopSelect (pobs (u6) ,pobs (u7) ,familyset=c (1:9) ,selectioncrit="AIC")
cop14<- BiCopEstList (pobs (u6) ,pobs (u7) )

## setor de consumo com materias básicos ##

#VALE3 e LREN3
selectedCopula15 <- BiCopSelect (pobs (u5) ,pobs (u4) ,familyset=c (1:9) ,selectioncrit="AIC")
cop15<- BiCopEstList (pobs (u5) ,pobs (u4) )

#VALE3 e ABEV3
selectedCopula16 <- BiCopSelect (pobs (u5) ,pobs (u3) ,familyset=c (1:9) ,selectioncrit="AIC")
cop16<- BiCopEstList (pobs (u5) ,pobs (u3) )

#VALE3 e BRFS3
selectedCopula17 <- BiCopSelect (pobs (u5) ,pobs (u7) ,familyset=c (1:9) ,selectioncrit="AIC")
cop17<- BiCopEstList (pobs (u5) ,pobs (u7) )
```

