



ÉDIPO MENEZES DA SILVA

**MODELOS DE REGRESSÃO NA DESCRIÇÃO DO
CRESCIMENTO DE FRUTOS DE AMORA-PRETA**

LAVRAS – MG

2018

ÉDIPO MENEZES DA SILVA

**MODELOS DE REGRESSÃO NA DESCRIÇÃO DO CRESCIMENTO DE FRUTOS
DE AMORA-PRETA**

Dissertação apresentada à Universidade Federal de Lavras, como parte das exigências do Programa de Pós-Graduação em Estatística e Experimentação Agropecuária, para obtenção do título de Mestre.

Prof. Dr. Joel Augusto Muniz

Orientador

Prof. Dr. Tales Jesus Fernandes

Coorientador

LAVRAS – MG

2018

**Ficha catalográfica elaborada pelo Sistema de Geração de Ficha Catalográfica da Biblioteca
Universitária da UFLA, com dados informados pelo(a) próprio(a) autor(a).**

Silva, Édipo Menezes da.

Modelos de regressão na descrição do crescimento de frutos de
amora-preta / Édipo Menezes da Silva. - 2018.

57 p. : il.

Orientador(a): Joel Augusto Muniz.

Coorientador(a): Tales Jesus Fernandes.

Dissertação (mestrado acadêmico) - Universidade Federal de
Lavras, 2018.

Bibliografia.

1. Análise de regressão. 2. Comportamento sigmoide. 3.
Pequenos frutos. I. Muniz, Joel Augusto. II. Fernandes, Tales Jesus.
III. Título.

ÉDIPO MENEZES DA SILVA

**MODELOS DE REGRESSÃO NA DESCRIÇÃO DO CRESCIMENTO DE FRUTOS
DE AMORA-PRETA**

Dissertação apresentada à Universidade Federal de Lavras, como parte das exigências do Programa de Pós-Graduação em Estatística e Experimentação Agropecuária, para obtenção do título de Mestre.

APROVADA em 25 de Abril de 2018.

Prof. Dr. Augusto Ramalho de Morais	UFLA
Prof. Dr. Deive Ciro de Oliveira	UNIFAL
Dra. Maraisa Hellen Tadeu	UFLA

Prof. Dr. Joel Augusto Muniz
Orientador

Prof. Dr. Tales Jesus Fernandes
Co-Orientador

**LAVRAS – MG
2018**

Dedico esta conquista a todos que comigo fizeram mais esse sonho se realizar.

AGRADECIMENTOS

Agradeço a Deus, por me dar forças para continuar caminhando.

Minha mãe, por ser a representação viva de força de vontade de continuar vivendo e lutando.

Aos meus irmãos por estarem comigo.

Aos professores e Tales, pela paciência, dedicação, ensinamentos e conselhos.

Aos professores do Programa de Pós-Graduação em Estatística e Experimentação Agropecuária, pelo ensinamento de qualidade.

À Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (CAPES) pela concessão da bolsa de estudo.

Ao meus amigos do DES, por fazerem os dias na UFLA mais interessantes.

À Nádia, por fazer um excelente trabalho e simpatia.

A galera do "Gases Nobres" pelas festas, bebedeiras, almoços, jantares e principalmente pela amizade.

A Lina, por ser uma das pessoa especial que me ajudou muito.

A Allana, por ter sido uma amiga tão especial e excelente companheira de estudos.

Ao Pablo, por ter se tornado uns dos grandes amigos que fiz na UFLA e que vou levar pra vida toda.

A toda minha turma de mestrado, Allana, Mateus, Mohamed, Lina, Marcela, Pablo e Elianara pelo companheirismo e ajuda nas disciplinas.

Ao Felipe e Henrique, pelas conversas e conselhos.

Ao Victor, pela amizade e companheirismo.

A Cris, por ter sido importante nesta etapa da minha vida.

Ao Luís, por dividir os dias dentro de casa.

Enfim, agradecer a todos que de forma direta ou indireta fizeram parte dessa caminhada.

MUITO OBRIGADO!!!

“No fim tudo dá certo, e se não deu certo é porque ainda não chegou ao fim.”
(Fernando Sabino)

RESUMO

A amora-preta é um pequeno fruto (“small fruits”) com várias propriedades benéficas à saúde humana e seu cultivo constitui uma alternativa para os pequenos produtores, devido ao fato de ter bom retorno financeiro. Estudar o crescimento de frutos ao longo do tempo é extremamente importante para entender o seu desenvolvimento, auxiliando no manejo mais adequado da cultura, evitando, por exemplo, perda após a colheita, que é um dos fatores agravantes das perdas da amora-preta. Por ser um fruto de curto período de desenvolvimento, as curvas de crescimento ganham destaque neste tipo de estudo e a modelagem por meio de modelos estatísticos ajudam a entender como tal crescimento acontece. Os dados utilizados foram obtidos num experimento realizado na Universidade Federal de Lavras, em 2015. Foi ajustado o modelo linear de primeiro grau e os não lineares Brody, Logístico, Gompertz, duplo Logístico e duplo Gompertz com a inclusão do termo autorregressivo de primeira ordem quando necessário. O objetivo deste trabalho foi ajustar o modelo linear de primeiro grau e os não lineares para descrever o crescimento do diâmetro e comprimento de quatro cultivares da amora-preta (Brazos, Choctaw, Guarani e Tupi). A estimação dos parâmetros foi realizada por meio do método de mínimos quadrados utilizando o método Gauss-Newton, por meio da função “nls” e “glns” do software estatístico R. A comparação dos ajustes foram feitas pelos critério de informação Akaike (AIC), critério de informação Bayesiano (BIC), desvio padrão residual (DPR) e coeficiente de determinação ajustado (R_{aj}^2). Os modelos descreveram de forma satisfatória os dados, com predominância para o modelo linear de primeiro grau e o modelo Logístico difásico.

Palavras-chave: Análise de regressão. Seleção de modelos. Qualidade de ajuste. Comportamento sigmoide. Pequenos frutos. Desenvolvimento de frutos.

ABSTRACT

The Blackberry is a small fruit with several properties beneficial to human health and its cultivation is an alternative for small producers due to the fact that it has good financial returns. Studying the fruit growth over time is extremely important to understand its development, helping to better manage the crop, avoiding, for example, post-harvest loss, which is one of the aggravating factors of blackberry losses, since it has a short period of development. Thus, growth curves are highlighted in this type of study and modeling through statistical models helps to understand how such growth happens. The data were obtained in an experiment carried out at the Federal University of Lavras in 2015. The linear model and the non-linear models Brody, Logistic, Gompertz, double logistic and double Gompertz models were adjusted with the inclusion of the first-order autoregressive term when necessary. The objective of this work was to adjust linear and nonlinear models to describe the diameter and length growth of four cultivars of blackberry (Brazos, Choctaw, Guarani and Tupi). The estimation of the parameters was obtained through the least squares methods using the Gauss-Newton method, in addition to the “ nls ” and “ gls ” functions of the statistical software R. The comparison of the adjustments was made by Akaike (AIC), Bayesian information criterion (BIC), residual standard deviation (DPR) and adjusted determination coefficient (R_{aj}^2). The models described satisfactorily the data, with predominance for the linear first-degree model and the logistic-diphasic model. Keywords: Regression analysis. Selection of models. Adjustment quality. Sigmoid. Small fruits. Fruit development.

Keywords: Regression analysis. Selection of models. Adjustment quality. Sigmoid. Small fruits. Fruit development.

LISTA DE FIGURAS

Figura 2.1 – Curva ilustrativa do crescimento de seres vivos.	12
Figura 2.2 – Curva do modelo Gompertz com o ponto de inflexão.	17
Figura 2.3 – Curva do modelo Brody.	18
Figura 2.4 – Curva do modelo Logístico com o ponto de inflexão.	18
Figura 3.1 – Forma como foram retirados as medidas de comprimento e diâmetro das quatro cultivares dos frutos de amora preta.	25
Figura 4.1 – Descrição do comportamento do crescimento do diâmetro do fruto e curvas ajustadas para o modelos Logístico (A), Gompertz (B), linear de primeiro grau (C), duplo Logístico (D) e duplo Gompertz (E) e seus respectivos intervalos de confiança, da amora-preta, cultivar Choctaw.	31
Figura 4.2 – Descrição do comportamento do crescimento do comprimento do fruto e curvas ajustadas para os modelos Logístico AR1 (A), Gompertz AR1 (B), Brody AR1 (C) linear de primeiro grau (D), duplo Logístico (E) e duplo Gompertz (F) e seus respectivos intervalo de confiança para, da amora-preta, cultivar Choctaw.	35
Figura 4.3 – Descrição do comportamento do crescimento do diâmetro do fruto e curvas ajustadas para os modelos Logístico (A), linear de primeiro grau (B) e duplo Logístico (C) e seus respectivos intervalos de confiança, da amora-preta, cultivar Tupy.	38
Figura 4.4 – Descrição do comportamento do crescimento do comprimento do fruto e curvas ajustadas para os modelos Logístico (A) e linear de primeiro grau (B) e seus respectivos intervalos de confiança, da amora-preta, cultivar Tupy.	40
Figura 4.5 – Descrição do comportamento do crescimento do diâmetro do fruto e curvas ajustadas para o modelos Logístico (A), linear de primeiro grau (B), duplo Logístico (C) e duplo Gompertz (D) e seus respectivos intervalos de confiança, da amora-preta, cultivar Brazos.	42
Figura 4.6 – Descrição do comportamento do crescimento do comprimento do fruto e curvas ajustadas para o modelos Logístico (A), Gompertz (B), Brody (C) linear de primeiro grau (D) e seus respectivos intervalos de confiança, da amora-preta, cultivar Brazos.	44

Figura 4.7 – Descrição do comportamento do crescimento do diâmetro do fruto e curvas ajustadas para o modelos Logístico (A), Gompertz (B), linear de primeiro grau (C), duplo Logístico (D) e duplo Gompertz (E) e seus respectivos intervalos de confiança, da amora-preta, cultivar Guarani.	46
Figura 4.8 – Avaliadores de qualidade de ajuste dos modelos Logístico, Gompertz e linear para o comprimento da amora-preta cultivar Guarani.	48

LISTA DE TABELAS

Tabela 4.1 – Valores das estatísticas dos testes Shapiro-Wilk, Durbin-Watson e Breusch-Pagan, com seus respectivos valores p, das análises de resíduos, referente ao diâmetro da cultivar Choctaw.	29
Tabela 4.2 – Estimativas dos parâmetros dos modelos Logístico, Gompertz e linear de primeiro grau com os limites inferiores (LI) e superiores (LS) de seus respectivos intervalos de confiança de 95%, no ajuste do diâmetro do fruto da amora-preta cultivar Choctaw.	30
Tabela 4.3 – Estimativas dos parâmetros do modelo duplo Logístico e duplo Gompertz com os limites inferiores (LI) superiores (LS) de seus respectivos intervalos de confiança de 95%, no ajuste do diâmetro do fruto da amora-preta cultivar Choctaw.	30
Tabela 4.4 – Estimativas dos avaliadores de qualidade de ajuste dos critérios de informação de Akaike (AIC), critério de informação Bayesiano (BIC), coeficiente de determinação ajustado (R_{aj}^2) e desvio padrão residual (DPR) para os modelos Logístico, Gompertz, linear, duplo Logístico e duplo Gompertz na descrição do crescimento do diâmetro do fruto da amora-preta, cultivar Choctaw.	31
Tabela 4.5 – Valores das estatísticas dos testes Shapiro-Wilk, Durbin-Watson e Breusch-Pagan, com seus respectivos valores p, das análises de resíduos, referente ao comprimento da cultivar Choctaw.	33
Tabela 4.6 – Estimativas dos parâmetros dos modelos Logístico (AR1), Gompertz (AR1), Brody (AR1) e linear de primeiro grau com os limites inferiores (LI) e superiores (LS) de seus respectivos intervalos de confiança de 95%, no ajuste do comprimento do fruto da amora-preta cultivar Choctaw.	33
Tabela 4.7 – Estimativas dos parâmetros dos modelos duplo Logístico e duplo Gompertz com os limites inferiores (LI) e superiores (LS) de seus respectivos intervalos de confiança de 95%, no ajuste do comprimento do fruto da amora-preta cultivar Choctaw.	34

Tabela 4.8 – Estimativas dos avaliadores de qualidade de ajuste dos critérios de informação de Akaike (AIC), critério de informação Bayesiano (BIC), coeficiente de determinação ajustado (R_{aj}^2) e desvio padrão residual (DPR) para os modelos Logístico (AR1), Gompertz (AR1), Brody (AR1), linear, duplo Logístico e duplo Gompertz para o diâmetro da amora-preta cultivar Choctaw.	34
Tabela 4.9 – Estimativas dos parâmetros dos modelos Logístico e linear de primeiro grau com os limites inferiores (LI) e superiores (LS) de seus respectivos intervalos de confiança de 95%, no ajuste do diâmetro do fruto da amora-preta cultivar Tupy.	36
Tabela 4.10 – Estimativas dos parâmetros do modelo duplo Logístico com os limites inferiores (LI) superiores (LS) de seus respectivos intervalos de confiança de 95%, no ajuste do diâmetro do fruto da amora-preta cultivar Tupy.	37
Tabela 4.11 – Estimativas dos avaliadores de qualidade de ajuste dos critérios de informação de Akaike (AIC), critério de informação Bayesiano (BIC), coeficiente de determinação ajustado (R_{aj}^2) e desvio padrão residual (DPR) para os modelos Logístico, linear de primeiro grau e duplo Logístico na descrição do crescimento do diâmetro do fruto da amora-preta, cultivar Tupy.	38
Tabela 4.12 – Estimativas dos parâmetros dos modelos Logístico e linear de primeiro grau com os limites inferiores (LI) e superiores (LS) de seus respectivos intervalos de confiança de 95%, no ajuste do comprimento do fruto da amora-preta cultivar Tupy.	39
Tabela 4.13 – Estimativas dos avaliadores de qualidade de ajuste dos critérios de informação de Akaike (AIC), critério de informação Bayesiano (BIC), coeficiente de determinação ajustado (R_{aj}^2) e desvio padrão residual (DPR) para os modelos Logístico e linear de primeiro grau na descrição do crescimento do diâmetro do fruto da amora-preta, cultivar Tupy.	40
Tabela 4.14 – Estimativas dos parâmetros dos modelos Logístico (AR1) e linear de primeiro grau com os limites inferiores (LI) e superiores (LS) de seus respectivos intervalos de confiança de 95%, no ajuste do diâmetro do fruto da amora-preta cultivar Brazos.	41

Tabela 4.15 – Estimativas dos parâmetros do modelo duplo Logístico e duplo Gompertz com os limites inferiores (LI) superiores (LS) de seus respectivos intervalos de confiança de 95%, no ajuste do diâmetro do fruto da amora-preta cultivar Brazos.	41
Tabela 4.16 – Estimativas dos avaliadores de qualidade de ajuste dos critérios de informação de Akaike (AIC), critério de informação Bayesiano (BIC), coeficiente de determinação ajustado (R_{aj}^2) e desvio padrão residual (DPR) para os modelos Logístico (AR1), Gompertz (AR1), linear de primeiro grau, duplo Logístico e duplo Gompertz na descrição do crescimento do diâmetro do fruto da amora-preta, cultivar Brazos.	42
Tabela 4.17 – Estimativas dos parâmetros dos modelos Logístico, Gompertz, Brody e linear de primeiro grau com os limites inferiores (LI) e superiores (LS) de seus respectivos intervalos de confiança de 95%, no ajuste do comprimento do fruto da amora-preta cultivar Brazos.	43
Tabela 4.18 – Estimativas dos avaliadores de qualidade de ajuste dos critérios de informação de Akaike (AIC), critério de informação Bayesiano (BIC), coeficiente de determinação ajustado (R_{aj}^2) e desvio padrão residual (DPR) para os modelos Logístico, Gompertz, Brody e linear de primeiro grau na descrição do crescimento do comprimento do fruto da amora-preta, cultivar Brazos.	43
Tabela 4.19 – Estimativas dos parâmetros dos modelos Logístico (AR1), Gompertz (AR1) e linear de primeiro grau com os limites inferiores (LI) e superiores (LS) de seus respectivos intervalos de confiança de 95%, no ajuste do diâmetro do fruto da amora-preta cultivar Guarani.	45
Tabela 4.20 – Estimativas dos parâmetros do modelo duplo Logístico e duplo Gompertz com os limites inferiores (LI) superiores (LS) de seus respectivos intervalos de confiança de 95%, no ajuste do diâmetro do fruto da amora-preta cultivar Guarani.	45

Tabela 4.21 – Estimativas dos avaliadores de qualidade de ajuste dos critérios de informação de Akaike (AIC), critério de informação Bayesiano (BIC), coeficiente de determinação ajustado (R_{aj}^2) e desvio padrão residual (DPR) para os modelos Logístico, Gompertz, linear, linear de primeiro grau, duplo Logístico e duplo Gompertz na descrição do crescimento do diâmetro do fruto da amora-preta, cultivar Guarani.	46
Tabela 4.22 – Estimativas dos parâmetros dos modelos Logístico, Gompertz e linear de primeiro grau com os limites inferiores (LI) e superiores (LS) de seus respectivos intervalos de confiança de 95%, no ajuste do diâmetro do fruto da amora-preta cultivar Guarani.	47
Tabela 4.23 – Estimativas dos avaliadores de qualidade de ajuste dos critérios de informação de Akaike (AIC), critério de informação Bayesiano (BIC), coeficiente de determinação ajustado (R_{aj}^2) e desvio padrão residual (DPR) para os modelos Logístico, Gompertz e linear de primeiro grau na descrição do crescimento do diâmetro do fruto da amora-preta, cultivar Guarani.	48

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	8
2	REFERENCIAL TEÓRICO	10
2.1	Amora Preta	10
2.2	Curvas de crescimento	12
2.3	Modelos de Regressão	13
2.4	Regressão linear simples	15
2.5	Regressão não linear	16
2.6	Autocorrelação residual	21
2.7	Estimação dos parâmetros	22
2.8	Método iterativos	22
3	MATERIAL E MÉTODOS	24
3.1	Material	24
3.2	Métodos	25
4	RESULTADOS E DISCUSSÃO	29
4.1	Cultivar Choctaw	29
4.2	Cultivar Tupy	36
4.3	Cultivar Brazos	41
4.4	Cultivar Guarani	45
5	CONCLUSÕES	49
	REFERÊNCIAS	50
	ANEXO A –	54

1 INTRODUÇÃO

As pequenas frutas (“small fruits”) como amora preta, morango, framboesa, groselha, mirtilo entre outras, vêm crescendo em importância, qualidade e volume. O cultivo dessas espécies é caracterizado pelo baixo custo de implantação, produção e bom retorno econômico. O ideal de consumo desses frutos é *in natura* mantendo, assim intactas, suas propriedades físico-químicas, nutricionais e biológicas. Contudo a maior parte da produção é destinada ao consumo do fruto processado, em forma de geleias, sucos, polpa para sorvete, entre outras. Esse consumo em forma de processado é justificado pelo fato desses frutos perecerem rápido, ou seja, após colhido, a validade é curta.

A amora-preta pertence ao gênero *Rubus*, é um fruto pequeno, com boa adaptação ao clima ameno. Seu cultivo para a comercialização teve início na Europa no século XVI, posteriormente levada para os EUA e chegando ao Brasil na década de 1970 (RASEIRA; FRANZON, 2012). Essa é uma cultura de rápido retorno financeiro para o produtor, porém pouco explorada no Brasil, com as plantações divididas entre os estados do Rio Grande do Sul, Espírito Santo, Rio de Janeiro e Sul de Minas Gerais (FACHINELLO et al., 2011).

Popularmente a amora é mais conhecida do que a amora-preta (*Rubus*). Por mais que se confunda os dois gêneros, existem algumas diferenças, como por exemplo, a primeira espécie é destinada para a criação do bicho-da-seda que se alimentam de suas folhas e a segunda, a produção é para o consumo humano. Outra característica que as difere é o desenvolvimento de suas plantas, enquanto a amora é uma árvore que pode chegar a 5 metros, a amora-preta é um arbusto ao qual pode chegar a dois metros de altura.

A colheita de frutos se faz de forma subjetiva pela cor e tamanho (CAVALINI et al., 2006). O tempo de conservação *in natura* desses frutos é curto, devido ao rápido amolecimento, com perda de aceitação. Saber o tempo ótimo da colheita é muito importante pois aumenta o tempo de consumo em forma de não processado. Com a rápida perda de qualidade pós-colheita, existe uma limitação muito grande do consumo na sua forma natural, com isso, é muito importante utilizar técnicas para prolongar esse tempo.

Assim, escolher o momento certo de colher de forma mais objetiva é muito importante e ter conhecimento sobre o padrão desse crescimento pode ser útil nesse processo, ajudando a diminuir a perda rápida de qualidade após o período da colheita, que é o principal problema para frutos destinados ao consumo *in natura*.

Os modelos de regressão, linear ou não linear, podem ser de grande valia na obtenção de modelos estatísticos para descrever de forma objetiva como esse padrão de crescimento acontece, destacando os modelos de regressão não lineares, pois estes possuem interpretação prática de seus parâmetros (MAZZINI et al., 2003) e no caso do sigmoide simples possui menos parâmetros.

Na literatura, a maioria dos trabalhos de crescimento de plantas são feitos com modelos sigmoide simples, porém em alguns casos, esse crescimento ocorre em dois estádios de desenvolvimento. No primeiro estádio, tendo um crescimento lento no início, passando para rápido e se estabilizando no final e um segundo estádio essas mesmas características são encontradas, tornando assim, um modelo sigmoide duplo.

Assim, o presente estudo teve como objetivo verificar o padrão de crescimento dos frutos de quatro cultivares (Choctaw, Tupy, Brazos e Guarani) de amora-preta em relação ao seu diâmetro e comprimento utilizando os modelos de regressão linear, sigmoide simples e sigmoide duplo.

2 REFERENCIAL TEÓRICO

2.1 Amora Preta

A amora-preta pertence à família das Rosaceae, mesma família das rosas, e faz parte do gênero *Rubus*. Essa planta produz a amora-preta, um pequeno fruto com o peso entre 4 a 7 gramas, cor negra e sabor ácido a doce-ácido. Essa espécie tem a característica dos frutos agregados, ou seja, aqueles que possuem dezenas de frutos verdadeiros, denominado mini-drupa ou drupete, essa peculiaridade é devido no interior de cada bolinha possuir uma semente. Segundo Antunes (2002), o fruto in natura é constituído de 85% de água, 10% carboidratos, minerais, vitamina A e B e cálcio, possuindo alguns benefícios à saúde humana, como controle de hemorragias, da pressão arterial, efeito sedativo, ação antioxidante, entre outras.

O cultivo da amora-preta ("blackberry"), no Brasil, começou com a iniciativa da Embrapa Clima Temperado em um programa de melhoramento genético, com a criação de três cultivares (Tupy, Guarani e Cainganue), a primeira coleção foi implantada em 1974, no município de Canguçu (RS) (ANTUNES; TREVISAN; PEREIRA, 2007).

De forma oficial, em campo experimental, no estado de Minas Gerais as primeiras coleções foram introduzidas em 1996, na Universidade Federal de Lavras (UFLA) e após, na fazenda da EPAMIG, em Caldas, no mesmo ano (ANTUNES, 2002).

Curi et al. (2015) fizeram um estudo sobre a amora-preta e a framboesa em Lavras- MG, com o objetivo de avaliar diversas características destas espécies. Esses autores chegaram à conclusão que à maioria das cultivares possuem um ciclo de produção de 100 dias, pois podem apresentar mais de uma colheita e a cultivar Brazos tem a maior produtividade, esta é, uma boa opção para os produtores da região.

Esses frutos, para se desenvolverem, necessitam de locais com temperaturas moderadas no verão, pouca luminosidade, com chuva adequada, baixas temperaturas no inverno e preferencialmente locais com mais de 1000 metros de altitude ou com, no mínimo, 200 horas de frio por ano. Essas especificações de clima explicam os motivos das regiões brasileiras do sul e sudeste serem as que mais cultivam esse fruto (ANTUNES; TREVISAN; PEREIRA, 2007).

A cultura da amora-preta está em expansão no mercado brasileiro, devido as suas características, ricas em antioxidante e pigmentos. Esse aumento no cultivo se deve também pelo baixo custo de implementação em comparação com outros frutos, ou seja, outra forma de renda para agricultura familiar (CAMPAGNOLO; PIO, 2012).

Esse fruto é recomendado para o consumo *in natura*, porém ele tende a perecer muito rápido devido à sua estrutura frágil, incidência de doenças e alto metabolismo, logo, pode se perder uma boa parte da produção (PALHARINI et al., 2015). Assim, a maior parte da produção é destinada para o consumo de processados em forma de geleias, sucos, polpa para sorvetes, corantes naturais (FACHINELLO et al., 2011).

Cultivares estudadas

A seguir, apresenta-se uma explicação resumida das principais características das cultivares de amora-preta a serem estudadas neste trabalho. Todas as informações sobre essas espécies foram retiradas de (ANTUNES; RASEIRA, 2004).

Brazos

Variedade lançada pela Texas A&M University, em 1959, em um resultado de uma combinação entre a Lawton e Nessberry. São plantas vigorosas com espinhos e hastes semieretas, com flor branca e grande. Seus frutos são grandes (aproximadamente 8g) e possui sabor ácido. Sua floração começa em setembro, chegando no estágio de maturação em outubro.

Choctaw

Com a mesma origem das cultivares comanche e caingangue, na Universidade de Arkansas, em 1975, entre a Brazos e a Darrow. Prolíficas, eretas, bastante produtivas e com hastes e muito resistente ao frio hibernal. Apresentam sementes pequenas e frutos firmes. Os frutos têm peso médio de 5g e sabor mais ácido do que doce. A floração ocorre em outubro e a maturação em novembro.

Guarani

Sua origem foi de uma parceria entre a Embrapa com a Universidade de Arkansas. Com floração no final de agosto e colheita em novembro. A planta possui espinhos e hastes eretas. O consumo de seus frutos é recomendado *in natura*, mesmo sendo seu sabor mais ácido do que doce.

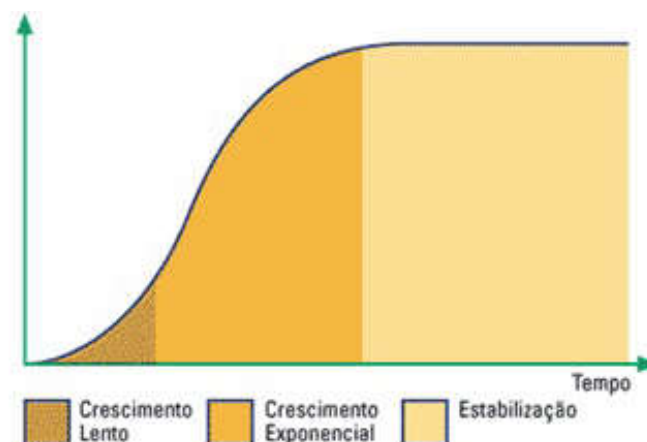
Tupy

Com o resultado da mistura entre Uruguai e a Comanche em 1982. É a cultivar mais produzida no Brasil. No México, ela tem uma posição de destaque, com sua produção destinada aos Estados Unidos. Com porte ereto, vigorosa, com espinhos, com florescimento em setembro e outubro e colheita entre novembro e janeiro. Seus frutos são muito saborosos e grandes (peso médio entre 8 a 10g), assim, recomendado seu consumo *in natura*.

2.2 Curvas de crescimento

Crescimento é um termo relacionado a mudanças de tamanhos ou massa de organismos vivos. Em vários estudos, é de extrema importância medir o crescimento em volume, massa, número de células, etc. Em vegetais, o crescimento é medido em tamanho (altura, diâmetro, comprimento) e em massa (peso após a colheita). De acordo com Peixoto e Peixoto (2009), as curvas de crescimento podem ser descritas por modelos, sendo que sua vantagem é obter informações em intervalos de tempos, sem a necessidade de aparelhos sofisticados ou experimento em laboratório. As fases do crescimento de plantas ou de qualquer organismo vivo podem ser resumidas conforme a Figura 2.1 na qual se observa no início um de crescimento mais lento, passando por uma fase exponencial, e em seguida, passa por um período de estabilização do crescimento.

Figura 2.1 – Curva ilustrativa do crescimento de seres vivos.



Fonte: <http://www.mundovestibular.com.br/articles/18/3/ECOLOGIA/Paacutegina3.html>

Crescimento de frutos

Estudos envolvendo crescimento de frutos têm grande importância no manejo, é possível identificar períodos mais críticos de desenvolvimento, auxiliando na tomada de decisão sobre o manejo como, por exemplo, o momento ótimo de colher os frutos.

Atílio (2009) avaliou o crescimento do diâmetro e comprimento dos frutos de amora-preta cultivar Tupy, com início oito dias após a fase de floração do botão. Uma conclusão retirada deste estudo foi que, tanto para o diâmetro quanto para o comprimento o padrão da curva é um sigmoide duplo e a segunda conclusão, é que a maior velocidade de desenvolvimento foi do 26^o ao 36^o dias.

Com o intuito de verificar o padrão de crescimento de pêssago, Bruna (2007) avaliou vinte variedades desse fruto. Para frutos do coqueiro anão verde, Prado, Savian e Muniz (2013) também estudaram o crescimento do diâmetro externo longitudinal através do modelo Logístico.

Martínez et al. (2017), CUNHA JUNIOR et al. (2007) e Bruckner et al. (2012) verificaram o padrão de crescimento dos frutos de pêssago, chegando à conclusão que é duplo sigmoide. Mesmo padrão encontrado por Fernandes, Pereira e Muniz (2017) para dados de café Obatã IAC 1669-20.

2.3 Modelos de Regressão

A origem dos modelos de regressão foi com Francis Galton em 1886, com a verificação de que a altura de filhos de pais extremamente baixos ou altos tende à média da população, assim, utilizado o termo "regredir". Essa lei foi verificada por Karl Pearson, em 1903, com um estudo no qual coletou mil registros das alturas dos membros dos grupos de família e fez a mesma verificação (DEMETRIO; ZOCHI, 2006).

Os modelos de regressão são largamente utilizados em diversas áreas do conhecimento (computação, engenharia, biologia, etc) com a necessidade de verificar se duas ou mais variáveis possuem alguma relação, podendo ser linear ou não.

Segundo Draper e Smith (1998) o modelo de regressão pode ser escrito da seguinte forma:

$$Y_i = f(X_i, \beta_j) + \varepsilon_i \quad (2.1)$$

em que $i = 1, 2, \dots, n$, $j = 1, 2, \dots, p$, Y_i é o valor observado ou variável dependente, $f(X_i, \beta_j)$ é uma função (ou relação), podendo ser linear ou não, X_i variável explicativa, constante conhecida ou independente, os β_j são os parâmetros e o ε_i os erros associados ao modelo, considerados com distribuição normal, com média zero, independentes e variância constante.

Ainda segundo os autores, esses modelos podem ser classificados de três formas diferentes: lineares, linearizáveis e não lineares.

a) Modelos lineares: são aqueles lineares em relação aos parâmetros, para os quais as derivadas parciais em relação aos parâmetros não dependem dos parâmetros. Como ilustração, tem-se:

$$\frac{\partial}{\partial \beta_j} f(X_i, \beta_j) = g(X_i)$$

para $i = 1, 2, \dots, n$ e $j = 1, 2, \dots, p$; em que n é o número de observações e p o número de parâmetros.

A seguir, no exemplo retirado de (SILVEIRA, 2013), tem-se:

$$y_i = \beta_0 + \beta_1 x + \beta_2 x^2 + \dots + \beta_n x^n + \varepsilon_i$$

no qual:

$\beta_0, \beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n$, são os parâmetros do modelo,

x é a parte determinística,

y a variável resposta,

ε é o erro associado ao modelo.

Fazendo as derivadas parciais de y em relação aos parâmetros obtêm-se:

$$\frac{\partial y}{\partial \beta_0} = 1, \frac{\partial y}{\partial \beta_1} = x, \frac{\partial y}{\partial \beta_2} = x^2, \dots, \frac{\partial y}{\partial \beta_n} = x^n$$

Como as derivadas não dependem dos parâmetros, logo, é um modelo linear.

b) Modelos linearizáveis: são aqueles não lineares na sua forma inicial, mas após uma transformação se transformam em lineares. Para o modelo

$$Y = \beta^X \varepsilon$$

Tem-se que o erro é multiplicativo, logo, é necessário aplicar uma transformação logarítmica para torná-lo linearizar, obtendo.

$$\begin{aligned} \ln Y &= \ln(\beta^X \varepsilon) \\ &= \ln(\beta^X) + \ln(\varepsilon) \\ &= X \ln(\beta) + \ln(\varepsilon) \end{aligned}$$

fazendo $Z = \ln(Y)$; $\lambda = \ln(\beta)$; $\varepsilon_1 = \ln(\varepsilon)$

tem-se um novo modelo

$$Z = \lambda X + \varepsilon_1$$

fazendo a derivada, fica:

$$\frac{dZ}{d\lambda} = X = g(X)$$

c) Modelos não lineares: são aqueles não lineares em relação aos parâmetros e não possuem transformação conhecida capaz de torná-los lineares. Como exemplo, considera-se o modelo não linear:

$$Y = \beta_0 + \beta_1^X + \varepsilon_i$$

Aplicando a derivada parcial em relação a β_0 e β_1 , obtém-se

$$\frac{\partial Y}{\partial \beta_0} = 1 e \frac{\partial Y}{\partial \beta_1} = X \beta_1^{X-1} = g(X, \beta_1)$$

a qual continua dependendo do parâmetro β_1 .

Uma particularidade dos modelos não lineares é a estimação dos parâmetros, que são feitos via métodos iterativos, essa forma de estimação será discutida mais à frente no texto.

2.4 Regressão linear simples

O modelo de regressão linear, com o próprio nome diz, é o mais fácil para descrever a relação existente entre duas variáveis, a independente x com a dependente y . Esse modelo segue uma equação de primeiro grau da seguinte forma:

$$y = \alpha_0 + \alpha_1 x + \varepsilon \quad (2.2)$$

em que y é a variável dependente, α_0 é o intercepto, é o valor no qual a reta encontra com o eixo y quando $x = 0$; α_1 representa a inclinação da reta, chamado coeficiente angular, x_i representa a variável independente, ε é o erro, relacionado ao modelo y e, tal que, $\varepsilon \stackrel{iid}{\sim} N(0, \sigma^2)$.

2.5 Regressão não linear

Os modelos lineares são usados em grande escala nas mais diversas áreas, porém quando esse comportamento foge da linearidade, os modelos não lineares são usados. Para ser considerado um modelo de regressão não linear tem-se que ao menos uma das derivadas parciais em relação aos parâmetros, dependa de pelo menos um parâmetro (SCHABENBERGER; PIERCE, 2001).

Esses modelos possuem grande vantagem em relação aos lineares na descrição do crescimento, possuem interpretação biológica e no caso dos sigmóides simples, geralmente é mais parcimonioso (MAZZINI et al., 2003; FERNANDES et al., 2014) e resumem em poucos parâmetros muitas informações.

Como desvantagem, necessitam de métodos iterativos para estimação de seus parâmetros, e para isso, estes métodos consistem em ter bons valores iniciais para que converjam. E mesmo convergindo, pode ir para mínimos locais, o que na prática pode ser um grande problema. Para se contornar essa situação, é necessário conhecimento prévio do pesquisador para ter bons valores iniciais, pois não há teste que identifique se os parâmetros foram ou não para mínimos locais ou globais e, além disso, deve-se observar os significados práticos de cada parâmetro.

Fernandes et al. (2015) avaliaram três formas distintas de parametrização mais encontradas na literatura de modelos não lineares de crescimento, quanto a sua medida de não linearidade intrínseca e paramétrica. De acordo com os autores, por meio dessas medidas, a melhor parametrização é a descrita neste trabalho e com o parâmetro β_3 sendo a abscissa do ponto de inflexão, possuindo assim, interpretação prática, contrariando diversos autores e trabalhos que dizem que esse parâmetro não tem interpretação.

Existem vários modelos que podem ser utilizados para descrever o comportamento sigmóidal. Serão apresentados os mais conhecidos e usados por pesquisadores de diversas áreas, principalmente na análise de crescimento de plantas e animais.

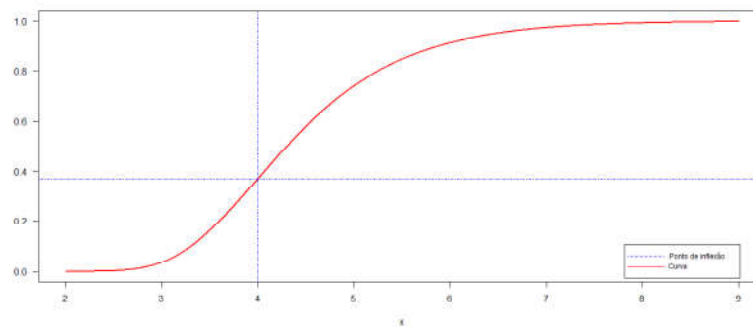
Gompertz

Sugerido por Benjamin Gompertz, o modelo Gompertz é hoje frequentemente usado nas áreas de ciências biológicas. Possui como característica um crescimento grande no início, mudando para um crescimento mais lento até se estabilizar, seu gráfico é em formato de "S" (sigmoidal). O seu ponto de inflexão não é simétrico, acontecendo antes da metade da curva. Este modelo apresenta a seguinte parametrização;

$$y_i = \beta_1 e^{-e^{\beta_2(x_i - \beta_3)}} + \varepsilon_i \quad (2.3)$$

em que, y_i é a i -ésima observação da variável resposta, x_i representa o i -ésimo tempo de avaliação, β_1 é assintota horizontal ou o valor máximo atingido pela variável resposta, β_3 está associado a abscissa do ponto de inflexão, β_2 representa a taxa de crescimento e o ε_i é o erro aleatório associado à observação y_i (FERNANDES et al., 2015).

Figura 2.2 – Curva do modelo Gompertz com o ponto de inflexão.



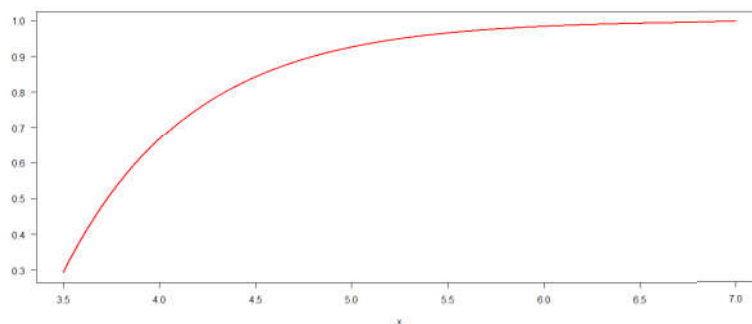
Brody

O modelo Brody é o único entre os modelos não lineares citados neste trabalho que não possui ponto de inflexão. Não apresenta um comportamento sigmoidal, a característica da sua curva é uma exponencial invertida. A seguir, a parametrização do modelo:

$$y_i = \beta_1 (1 - e^{\beta_2(x_i - \beta_3)}) + \varepsilon_i \quad (2.4)$$

em que as interpretações de β_1 e β_2 são as mesmas parodo modelo Gompertz, exceto o β_3 , que no modelo Gompertz é o ponto de inflexão e, nesse modelo, não têm interpretação prática direta.

Figura 2.3 – Curva do modelo Brody.



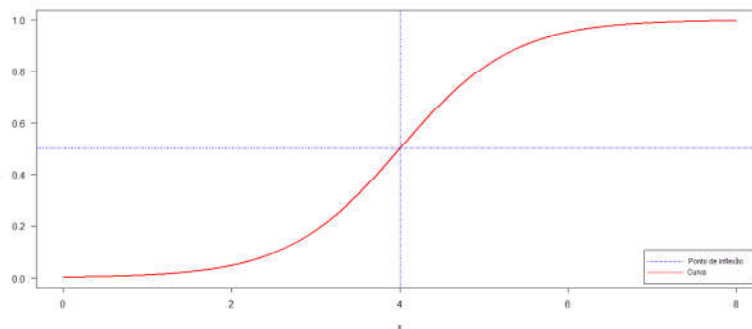
Logístico

O modelo Logístico tem o mesmo aspecto do modelo de Gompertz, apresenta crescimento rápido no início, passando por uma mudança de concavidade da curva de crescimento (ponto de inflexão) e estabilizando ao fim do ciclo de crescimento. Diferente do Gompertz seu ponto de inflexão é simétrico acontecendo na metade da curva. Com a seguinte parametrização:

$$y_i = \beta_1 (1 + e^{\beta_2(x_i - \beta_3)})^{-1} + \varepsilon_i \quad (2.5)$$

em que as interpretações dos parâmetros são as mesmas do modelo Gompertz.

Figura 2.4 – Curva do modelo Logístico com o ponto de inflexão.



Benassi et al. (2007) ajustando curvas de crescimento do diâmetro externo longitudinal e transversal do coco, da variedade verde anão, concluíram que o modelo Logístico foi mais adequado para a medida longitudinal, e para a transversal foi o modelo Logístico combinado com uma exponencial quadrática.

Com o objetivo de conhecer o crescimento de frutos de pêssegos com maturação precoce, média e tardia, Bruna (2007) avaliou 20 variedades desse fruto na Estação Experimental de Urussanga. Essas variedades foram agrupadas em ciclos curto, médio e longo, caracterizando curvas sigmoidais.

Prado, Savian e Muniz (2013) ajustaram o modelo de crescimento Logístico para descrever o diâmetro externo longitudinal de frutos do coqueiro, variedade anão verde, ao longo do tempo, e concluíram que o modelo proposto foi adequado na descrição do crescimento da variável em estudo.

Fernandes et al. (2014) estudaram o crescimento de frutos de café utilizando os modelos de Gompertz e Logístico ponderado, para massa seca, nas diferentes faces de exposição ao sol. Verificaram que o Logístico ponderado se mostrou mais adequado para descrever o crescimento da massa seca do café.

Para obter curvas de crescimento dos frutos de cacau Sial-105, Muniz, Nascimento e Fernandes (2017) fizeram os ajustes dos modelos de Gompertz e Logístico, e verificaram que o Logístico apresentou melhor qualidade de ajustamento.

Muianga et al. (2016) ajustaram os modelos Logístico e Gompertz a dados de comprimento e diâmetro de frutos do cajueiro, com e sem a inclusão dos erros autorregressivos de primeira ordem. Entre esses dois modelos, o modelo Logístico com a estrutura autorregressiva de primeira ordem foi o mais adequado para descrever tal crescimento.

Na evolução do diâmetro da copa de plantas do cafeeiro, cultivada em duas densidades de plantio e submetido a cinco regimes de irrigação, Pereira et al. (2017) estudaram os modelos não lineares Brody e Logístico, percebe-se que o modelo Logístico se mostrou o mais eficiente na descrição dos dados. Em outro estudo, Pereira et al. (2016) compararam os modelos Gompertz e Logístico, com a estrutura autorregressiva de primeira ordem e heterogeneidade de variância aos dados da altura de plantas do cafeeiro, submetidos a diferentes regimes de irrigação, nas densidades de plantio 2500 e 5000 plantas ha^{-1} .

Sigmoide duplo

O uso de sigmoide simples na descrição do crescimento, animal e vegetal é em sua grande maioria usado nas mais diversas áreas do conhecimento. Porém, estudos com sigmoide duplo ainda é pouco explorado, esse fato pode ser explicado pela falta de conhecimento dos pesquisadores sobre como obter expressão sigmoide duplo. As características dessas curvas se assemelham muito ao sigmoide simples, mas em dois estádios de desenvolvimento. A expressão é uma soma de duas funções de crescimento simples, com a escolha de cada etapa dependendo do padrão de cada cada estágio de desenvolvimento (FERNANDES; PEREIRA; MUNIZ, 2017).

No presente trabalho, foram feitas tentativas de ajustes de dois tipos de modelo com sigmoide duplo: Gompertz-Gompertz ou Gompertz difásico e Logístico-Logístico ou Logístico difásico. As equações e as interpretações são as seguintes:

Gompertz-Gompertz

$$y_i = a_1 e^{(-e^{k_1(x_i-b_1)})} + (a_2 - a_1) e^{(-e^{k_2(x_i-b_2)})} + \varepsilon_i \quad (2.6)$$

Logístico-Logístico

$$y_i = \frac{a_1}{1 + e^{k_1(x_i-b_1)}} + \frac{(a_2 - a_1)}{1 + e^{k_2(x_i-b_2)}} + \varepsilon_i \quad (2.7)$$

em que: com $i = 1, 2, \dots, n$, Y_i é a variável dependente, x_i é a variável independente, a_1 e a_2 são os valores médio máximo da assintota horizontal, b_1 e b_2 representam os pontos de inflexão das etapas e k_1 e k_2 é o índice de crescimento das respectivas etapas e ε_i é o erro aleatório do modelo, em que esse erro tem que ter distribuição normal, independentes, com média zero e variância constante.

Mesmo não tendo vários estudos com sigmoide duplo, alguns autores fizeram trabalhos ajustando essas curvas. Tendo como objetivo comparar os modelos duplo Logístico ponderados com três diferentes estruturas de erros, independentes e autoregressivos de primeira e segunda ordem, aos dados de crescimento de peso-idade de bovinos da raça Hereford. Mendes et al. (2008) concluíram que o modelo duplo Logístico com estrutura de erros dependentes de segunda ordem é o mais indicado.

Martínez et al. (2017) ajustaram três diferentes modelos sigmoide duplo (Logístico, Gompertz e monomolecular) para descrever a fenologia do crescimento do pêssego em função da taxa de crescimento e dos diâmetros em diferentes sistemas de tratamento. Com o término do estudo, os autores concluíram que todos os modelos foram adequados, porém não foi mencionado qual teve melhor qualidade de ajuste. CUNHA JUNIOR et al. (2007) e Bruckner et al. (2012) também chegaram à conclusão de que o pêssego possui um crescimento de sigmoide duplo.

Com o objetivo de verificar se o crescimento de frutos de café cultivar Obatã IAC 1669-20 realmente é sigmoide duplo, Fernandes, Pereira e Muniz (2017) fizeram os ajustes e chegaram a conclusão que para esse conjunto de dados o padrão de crescimento é sigmoide duplo, sendo o modelo duplo Logístico é o mais indicado para descrever o padrão de desenvolvimento.

2.6 Autocorrelação residual

Em estudos longitudinais, nos quais as observações são retiradas dos mesmos indivíduos ao longo do tempo, existe a possibilidade de se violar o pressuposto de independência, haja vista que os erros possuem correlação com algum erro anterior. Com essa violação, é necessária a inclusão de um termo autorregressivo de ordem apropriada (HOFFMANN, 1998).

Prado, Savian e Muniz (2013) modelaram curvas de crescimentos, utilizando os modelos Gompertz e Logístico com a inclusão do termo autorregressivo de primeira ordem, para as medidas do diâmetro transversal e longitudinal da cavidade interna dos frutos de coqueiro anão verde. Pelos resultados obtidos, os autores verificaram que o modelo Logístico foi o mais indicado e a inclusão do termo autorregressivo de primeira ordem melhorou a qualidade dos ajuste desse modelo.

SALLUM NETO, Carvalho e Mischan (2013) ajustaram os modelos Gompertz, Logístico, monomolecular, Richards e von Bertalanffy para dados de crescimento de vacas, e ratos, comparando os modelos com e sem a presença do termo autorregressivo de primeira ordem (AR1). Para os ratos os modelos Gompertz, Richards e von Bertalanffy melhores se ajustaram aos dados. Para as vacas o modelo monomolecular se mostrou o mais adequado e em relação aos ratos, os modelos von Bertalanffy, Richards e Gompertz se mostraram melhores. Em todos os modelos, a inclusão do termo autorregressivo de primeira ordem (AR1) melhorou a qualidade dos ajustes, com melhores valores dos critérios de avaliação de ajuste AIC e BIC.

Sousa et al. (2014) utilizaram os modelos Gompertz e Logístico com a inclusão do AR1 para descrever a germinação de sementes de café em cinco diferentes potenciais de germinação. Ambos os modelos apresentaram bons ajustes, com o Gompertz levando ligeira vantagem sobre o Logístico.

Muniz, Nascimento e Fernandes (2017) afirmaram que a inclusão do termo autoregressivo de primeira ordem melhora os ajustes, inclusive reduzindo o desvio padrão residual.

2.7 Estimação dos parâmetros

Método de mínimos quadrados

O método de mínimos quadrados (MMQ) consiste em minimizar a soma de quadrados da diferença entre o valor estimado e os dados observados. Sob algumas condições, os estimadores são não tendenciosos e possui variância mínima (DRAPER; SMITH, 1998). Para se ajustar esses modelos, existem vários métodos na literatura, o mais utilizados é o método de mínimos quadrados. Gallant (1987) através da análise de resíduos, classificou o método de mínimos quadrados de três formas distintas:

- Ordinários - os erros não violam nenhuma pressuposição, ou seja, $\varepsilon \stackrel{iid}{\sim} N(0, \sigma^2)$.
- Ponderados - os erros são heterocedásticos, ou seja, $\varepsilon \sim N(0, \mathbf{D}\sigma^2)$, em que \mathbf{D} é uma matriz diagonal ponderada pela variância σ^2 .
- Generalizados - os erros violam a suposição de homocedasticidade e/ou independência, ou seja, $\varepsilon \sim N(0, \mathbf{M}\sigma^2)$, onde \mathbf{M} é a matriz de variâncias e covariâncias dos resíduos. Na diagonal principal estão as variâncias e os demais valores são as covariâncias de ε_{ij} , com $i \neq j$.

2.8 Método iterativos

Ao minimizar a soma de quadrados ($\varepsilon'\varepsilon$), obtêm-se $\mathbf{X}'\mathbf{X}\hat{\boldsymbol{\beta}} = \mathbf{X}'\mathbf{Y}$, como o sistema de equações normais não lineares, o qual não apresenta solução explícita para estimar os parâmetros, é necessária e a utilização de métodos iterativos os quais são utilizados para se fazer essa estimação. Esses métodos consistem em fazer aproximações lineares para a função $f(\mathbf{x}, \boldsymbol{\beta})$ a cada passo, até que um critério de parada, pré-estabelecido, for atingido.

Existem vários métodos na literatura, tais como, Gradiente, Gauss-Newton, Newton e Maquardt. Conforme Bates e Watts (1988) os métodos diferenciam pela forma como $\boldsymbol{\beta} - \boldsymbol{\beta}^0$ é calculado, em que $\boldsymbol{\beta}^0$ é o valor para dar início ao processo iterativo e $\boldsymbol{\beta}$ o valor real do parâmetro. De um modo geral e como exemplo retirado de (LIMA et al., 2017), os critérios básicos são:

- Gradiente: $\boldsymbol{\beta} - \boldsymbol{\beta}^0 = \mathbf{X}'\boldsymbol{\varepsilon}$
- Gauss-Newton: $\boldsymbol{\beta} - \boldsymbol{\beta}^0 = (\mathbf{X}'\mathbf{X})\mathbf{X}'\boldsymbol{\varepsilon}$
- Newton: $\boldsymbol{\beta} - \boldsymbol{\beta}^0 = G^{-1}\mathbf{X}'\boldsymbol{\varepsilon}$
- Maquardt: $\boldsymbol{\beta} - \boldsymbol{\beta}^0 = [\mathbf{X}'\mathbf{X} + \delta(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}'\boldsymbol{\varepsilon}]$, em que $(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}$ é inversa generalizada.

O método de Gauss-Newton é o mais utilizado, este usa a expansão da série de Taylor de primeira ordem. Vale ressaltar que mesmo com o critério de parada pré-estabelecido não é garantida a convergência. Para que esse método convirja e essa convergência não leve a mínimos locais, é necessário bons valores iniciais, caso contrário a convergência não é garantida. Estudos anteriores e experiência do pesquisador podem ajudar a ter bons valores para a primeira interação.

Gauss-Newton

Considerando que $\boldsymbol{\beta}^0$ é uma aproximação de $\hat{\boldsymbol{\beta}}$ através de mínimos quadrados para modelos não lineares. Para $\boldsymbol{\beta}$ próximo de $\boldsymbol{\beta}^0$, é considerado uma expansão da série de Taylor de primeira ordem.

$$f(\mathbf{x}, \boldsymbol{\beta}) \approx f(\mathbf{x}, \boldsymbol{\beta}^0) + F(\boldsymbol{\beta}^0)(\boldsymbol{\beta} - \boldsymbol{\beta}^0)$$

em que $F(\boldsymbol{\beta}^0)$ é a matriz das derivadas parciais em relação a cada parâmetro do modelo. Fazendo uma troca de variável e definindo $t(\boldsymbol{\beta})$ como sendo um vetor de erros, a expressão fica a seguinte

$$t(\boldsymbol{\beta}) = \mathbf{y} - f(\mathbf{x}, \boldsymbol{\beta}) \approx t(\boldsymbol{\beta}^0) - F(\boldsymbol{\beta}^0)(\boldsymbol{\beta} - \boldsymbol{\beta}^0)$$

assim, a soma de quadrados do resíduo em relação a $\boldsymbol{\beta}$ será minimizada quando

$$(\boldsymbol{\beta} - \boldsymbol{\beta}^0) = [F'(\boldsymbol{\beta}^0)F(\boldsymbol{\beta}^0)]^{-1}F'(\boldsymbol{\beta}^0)t(\boldsymbol{\beta})$$

A próxima etapa vai ser a seguinte:

$$\boldsymbol{\beta}^{0+1} = [F'(\boldsymbol{\beta}^0)F(\boldsymbol{\beta}^0)]^{-1}F'(\boldsymbol{\beta}^0)t(\boldsymbol{\beta})$$

Esse processo é repetido até que tenha a convergência ou algum critério de parada, pré-estabelecido, aconteça. Contudo, tendo critérios de parada, a convergência não é garantida.

3 MATERIAL E MÉTODOS

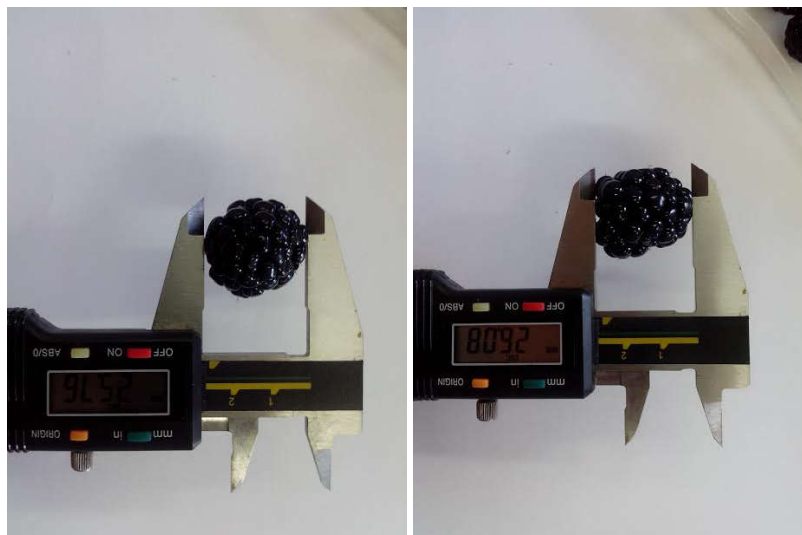
3.1 Material

Os dados foram retirados de um estudo complementar de Tadeu et al. (2015) e representam os resultados do experimento realizado na Universidade Federal de Lavras, Lavras, MG, no período de janeiro 2012 a janeiro de 2014. O clima da região é do tipo Cwb (clima mesotérmico ou tropical de altitude), com inverno seco e verão chuvoso, segundo classificação de Koppen (ALVARES et al., 2013). As variáveis em estudo foram o diâmetro e o comprimento das amoras pretas das cultivares "Brazos", "Choctaw", "Guarani" e "Tupy". As mudas foram plantadas em 2009 com espaldeira de fio em "T" com 60 cm de distância e 80 cm de altura e espaçamento 3,0 m x 0,5 m.

Dos dados, foram coletadas as medidas de comprimento e diâmetro, em milímetros, de 12 frutos de cada cultivar. Tais medidas de comprimento e diâmetro, foram coletadas com auxílio do paquímetro digital (modelo King Tools 150 mm, Cia, São Paulo, SP) conforme ilustrado na Figura 3.1. A escolha do fruto se fez pelo estágio de desenvolvimento, ou seja, aqueles frutos que caíram as pétalas e as anteras ao mesmo tempo foi escolhido.

Foram coletadas 13 medidas, do diâmetro e comprimento das quatro cultivares de amora preta, ao longo do tempo, a primeira três dias após a antese e a última depois de quarenta e um dias, com várias perdas nas observações finais. Esse fato ocorreu devido a alguns fatores, como, por exemplo, pássaros que se alimentaram, frutos caíram por maturação, etc.

Figura 3.1 – Forma como foram retirados as medidas de comprimento e diâmetro das quatro cultivares dos frutos de amora preta.



Fonte: Tadeu.

3.2 Métodos

Para que se tenha um conhecimento prévio de como essas medidas se comportam ao longo do tempo, foram elaborados gráficos de dispersão do comprimento e diâmetro em função dos dias após a antese. Logo após, foram ajustados o modelo de regressão linear de primeiro grau (equação 2.2) e não lineares, Gompertz (equação 2.3), Brody (equação 2.4), Logístico (equação 2.5), duplo Gompertz (equação 2.6) e duplo Logístico (equação 2.7) levando em consideração que todos os pressupostos foram atendidos. Com esses ajustes prontos, o teste de hipótese Durbin-Watson (DURBIN; WATSON, 1951) foi aplicado, para verificar a presença de autocorrelação residual de primeira ordem (AR1). O teste Breusch-Pagan foi usado para verificar a quebra do pressuposto de homocedasticidade e Shapiro-Wilk para normalidade. Como somente o pressuposto de independência foi violado para algumas cultivares, os modelos foram ajustados novamente com a inclusão do termo autoregressivo de ordem adequada, que no caso deste trabalho de primeira ordem (AR1).

Para se conhecer os valores iniciais e dar início ao processo iterativo de Gauss-Newton, procedimentos gráficos foram utilizados através da função “manipulate”, plotando uma curva em cima da nuvem de dados e a criação de um painel interativo. Com esse painel, faz-se aproximações até que a curva esteja o máximo possível próxima a nuvem de dados. Nessa aproximação se retiram os valores iniciais para os ajustes. As análises foram feitas no software estatístico R (R Core Team, 2017), com os pacotes “manipulate”, “nl” e “nlme”.

Crêterios para sele o de modelos

Para verificar qual   o melhor modelo que descreve os dados, foram usados alguns critérios, os quais são apresentados a seguir.

Desvio padrão residual

O desvio padrão residual (DPR), foi calculado pela seguinte expressão

$$DPR = \sqrt{QME}, \quad (3.1)$$

em que

$$QME = \frac{SQR}{n - p}, \quad (3.2)$$

em que, DPR   o desvio padrão residual, QME quadrado médio do resíduo, SQR soma dos quadrados do resíduo, n   o tamanho da amostra e p   o número de parâmetros. O modelo que apresentar o menor valor de DPR,   considerado como o melhor modelo.

Cr terio de informa o de Akaike

O critério de informa o de Akaike (AIC) (AKAIKE, 1974),   uma estatística de compara o entre modelos e foi estimado por meio da seguinte expressão:

$$AIC = -2\log L(\hat{\theta}) + 2p \quad (3.3)$$

em que $\log L(\hat{\theta})$   o logaritmo da fun o de máxima verossimilhança e p   o número de parâmetros do modelo.

O modelo que apresentar os menores valores de AIC, será considerado com o modelo que melhor se ajusta aos dados.

Cr terio de informa o Bayesiano

O critério de informa o Bayesiano (BIC) (SCHWARZ et al., 1978), da mesma forma que o AIC   um critério para escolha do melhor modelo e este tem a seguinte fórmula.

$$BIC = -2\log L(\hat{\theta}) + p\log(n). \quad (3.4)$$

em que $L(\hat{\theta})$ é o logaritmo verossimilhança do modelos ajustado, p é o número de parâmetros a serem estimados e n é o número de observações da amostra.

O modelo que apresentar os menores valores de BIC, será considerado com o modelo que melhor se ajusta aos dados.

Coefficiente de determinação ajustado

Segundo Draper e Smith (1998), o coeficiente determinação ajustado (R_{aj}^2) é utilizado para escolher qual é o melhor modelo. Esse coeficiente é uma alternativa ao coeficiente de determinação (R^2), com a diferença de que o R_{aj}^2 utiliza uma ponderação pelo número de parâmetros, estimado pela seguinte expressão:

$$R^2 = 1 - \left[\frac{(1 - R^2)(n - i)}{n - p} \right]$$

em que R^2 é o coeficiente de determinação, n é o número de observações, p é o número de parâmetros, i está ligado ao intercepto da curva.

Diferente dos demais critérios, para escolher o melhor modelo quanto maior R_{aj}^2 , é o modelo com melhor ajuste em comparação aos demais.

Análise de Resíduos

A análise de resíduos é realizada para verificar a adequabilidade do modelo ao conjunto de dados. Inicialmente, os ajustes e a estimação dos parâmetros foram realizados levando-se em consideração que os pressupostos de normalidade, homoscedasticidade e independência dos erros foram atendidos. A partir desse ajuste, foram obtidos os resíduos ordinários e, em seguida, realizaram-se os testes estatísticos da análise de resíduos.

O teste de Durbin Watson (DURBIN; WATSON, 1951) testa a hipótese de que não há autocorrelação entre os resíduos de dois tempos consecutivos. Caso se rejeite a hipótese nula, tem-se evidência de correlação residual de primeira ordem, tornam-se necessário a inclusão do termo autorregressivo de primeira ordem no modelo. A estatística de teste é a seguinte:

$$D = \frac{\sum_{i=2}^n (\varepsilon_i - \varepsilon_{i-1})^2}{\sum_{i=1}^n \varepsilon_i^2} \quad (3.5)$$

em que ε_i e ε_{i-1} é o resíduo da observação no tempo i e no tempo $i-1$, respectivamente.

Para verificar a normalidade dos resíduos foi utilizado o teste Shapiro-Wilk (SHAPIRO; WILK, 1965). Se a hipótese nula for rejeitada, existe indicativo de que os resíduos não seguem uma distribuição normal, nesse caso existem alguns procedimentos para contornar esse problema, como por exemplo, transformar os dados ou escolher outro modelo. Segue a estatística de teste:

$$W = \frac{b^2}{\sum_{i=1}^n (x_{(i)} - \bar{x})^2} \quad (3.6)$$

em que \bar{x} é a média amostral, x_i são os valores amostrais, b é calculado com base nas médias, variâncias e covariâncias das estatísticas de ordem.

Para a verificação da homoscedasticidade, foi utilizado o teste de Breusch-Pagan, com a hipótese nula é que a variância dos resíduos seja constante. Inicialmente se ajusta um modelo de regressão linear simples, em seguida encontram-se os resíduos padronizados e utilizam-se esses resíduos, calculando da seguinte forma:

$$u_i = \frac{\varepsilon_i^2}{\sum_{i=1}^n \varepsilon_i^2} \quad (3.7)$$

após encontrar esses resíduos é feito o cálculo da estatística de teste:

$$BP = \frac{SQ_{reg}}{2} \quad (3.8)$$

em que, SQ_{reg} é a soma de quadrados da regressão.

4 RESULTADOS E DISCUSSÃO

4.1 Cultivar Choctaw

Diâmetro

Para validar os ajustes dos modelos de regressão, é necessário fazer a análise de resíduos, para verificar se os erros possuem distribuição normal, com média zero, independentes e possuem variância constante. Caso haja uma ou mais violações desses pressupostos, algum procedimento deve ser adotado.

Neste trabalho, quando houve violação do pressuposto de independência dos erros, procedeu-se a inclusão do termo autorregressivo de primeira ordem, para modelar a dependência dos resíduos. Para resíduos com distribuição sem serem normais e heterocedásticos, não foram discutidos seus resultados.

Para que o texto não tenha uma leitura repetitiva e cansativa, essa foi a única cultivar que a análise de resíduos foi exibida detalhadamente, para as demais cultivares só foram feitos comentários rápidos durante a discussão de seus resultados.

Na Tabela 4.1 estão os valores das estatísticas dos teste de normalidade, independência e homogeneidade dos erros e seus valores p da análise de resíduos. Todos os valores p foram maiores que nível de significância de 5 %, indicando que não houve violação de nenhum pressuposto do vetor de resíduos.

A verificação dos pressupostos para os modelos de regressão é muito importante, pois, caso uma ou mais de uma não for atendida, o modelo é considerado não adequado e esse fato deve ser corrigido ou considerado no modelo, conforme comentaram (FERNANDES et al., 2014).

Tabela 4.1 – Valores das estatísticas dos testes Shapiro-Wilk, Durbin-Watson e Breusch-Pagan, com seus respectivos valores p, das análises de resíduos, referente ao diâmetro da cultivar Choctaw.

Modelos	Shapiro-Wilk	valor-p	Durbin-Watson	valor-p	Breusch-Pagan	valor-p
Logístico	0,93	0,39	1,87	0,37	3,05	0,21
Gompertz	0,90	0,18	1,90	0,35	2,60	0,27
Linear	0,93	0,44	1,71	0,39	0,78	0,37
Duplo log	0,96	0,79	3,22	0,57	5,03	0,41
Duplo Gomp	0,93	0,39	3,28	0,54	4,36	0,49

Nas Tabelas 4.2 e 4.3 estão apresentadas as estimativas dos modelos que houve convergência do método de estimação. Todos os modelos, exceto o linear de primeiro grau, apresenta-

ram problema de significância nos parâmetros. Quando as estimativas dos parâmetros são não significativas, com intervalos de confiança que incluem o zero, tem-se o caso em que este modelo não é adequado para descrever o diâmetro, sua utilização é apenas parcial ou aproximada.

Os modelos não lineares simples não apresentaram bons ajustes superestimando a assintota horizontal ($\hat{\beta}_1$), pois suas estimativas foram bastantes maiores que as últimas medidas realizadas aos 41 dias após a antese, como pode-se verificar na Figura ???. Fato este que pode ser explicado pela linearidade dos dados, como argumentado por Bergamasco, Aquino e Muniz (2001) em seu estudo. Já os modelos com sigmoide duplo, não apresentaram superestimação dos parâmetros, porém algumas estimativas foram não significativas.

Tabela 4.2 – Estimativas dos parâmetros dos modelos Logístico, Gompertz e linear de primeiro grau com os limites inferiores (LI) e superiores (LS) de seus respectivos intervalos de confiança de 95%, no ajuste do diâmetro do fruto da amora-preta cultivar Choctaw.

Modelo	LI	$\hat{\beta}_1$	LS	LI	$\hat{\beta}_2$	LS	LI	$\hat{\beta}_3$	LS
Logístico	-102,46	53,65	209,76	0,0007	0,03	0,06	-0,70	58,62	187,7
Gompertz	-1191,75	183,4	1558,47	-0,01	0,01	0,03	-402,35	121,3	644,90
	LI	$\hat{\alpha}_0$	LS	LI	$\hat{\alpha}_1$	LS			
Linear	3,54	4,46	5,38	0,27	0,31	0,35			

Tabela 4.3 – Estimativas dos parâmetros do modelo duplo Logístico e duplo Gompertz com os limites inferiores (LI) superiores (LS) de seus respectivos intervalos de confiança de 95%, no ajuste do diâmetro do fruto da amora-preta cultivar Choctaw.

Parâmetros	Logístico		Gompertz			
	LI	LS	LI	LS		
a_1	6,47	11,48	16,50	7,74	12,64	17,53
b_1	-1,69	4,35	10,41	-1,61	1,83	5,28
k_1	-0,006	0,14	0,29	-0,001	0,09	0,19
a_2	13,07	17,6	22,13	13,28	18,07	22,85
b_2	26,07	31,24	36,41	25,22	30,08	34,94
k_2	-0,26	0,33	36,41	-0,21	0,24	0,69

Analisando os avaliadores de qualidade de ajuste apresentados na Tabela 4.4, nota-se o modelo linear de primeiro grau não apresentou os melhores valores, contudo os demais tiveram problemas de significância em um ou mais de seus parâmetros. Pelos avaliadores de qualidade de ajuste, o modelo duplo Gompertz testa como aquele que apresenta menores estimativas de AIC, BIC e DPR e maior R_{aj}^2 , no entanto, três de seus parâmetros não diferem de zero, portanto invalida o seu uso. Com isso, o linear de primeiro grau é o único, entre os modelos propostos,

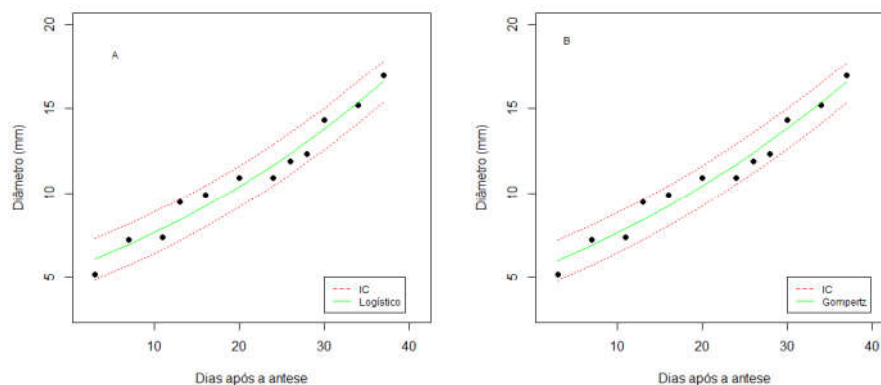
capaz de descrever de forma satisfatória o crescimento do diâmetro do fruto da amora-preta, cultivar Choctaw.

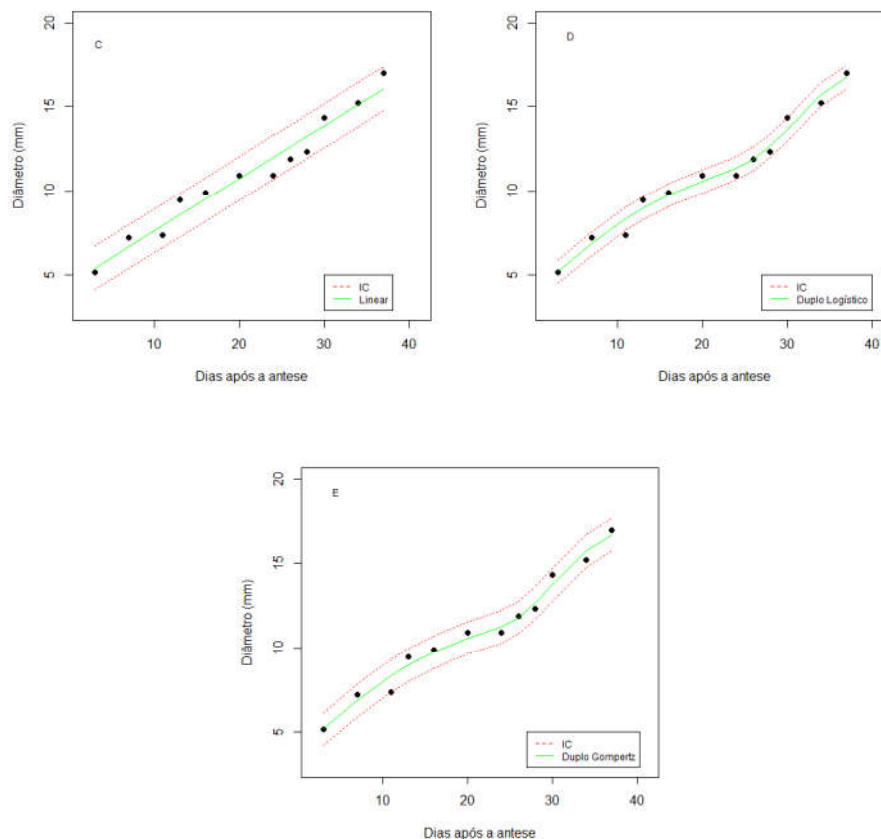
Tabela 4.4 – Estimativas dos avaliadores de qualidade de ajuste dos critérios de informação de Akaike (AIC), critério de informação Bayesiano (BIC), coeficiente de determinação ajustado (R_{aj}^2) e desvio padrão residual (DPR) para os modelos Logístico, Gompertz, linear, duplo Logístico e duplo Gompertz na descrição do crescimento do diâmetro do fruto da amora-preta, cultivar Choctaw.

Modelo	Logístico	Gompertz	Linear	Duplo log	Duplo Gomp
AIC	31,45	31,18	30,28	30,01	29,06
BIC	33,39	33,12	31,73	33,40	32,45
R_{aj}^2	0,95	0,95	0,95	0,96	0,96
DPR	0,74	0,73	0,72	0,66	0,64

O modelo linear de primeiro grau (C) teve boa qualidade de ajuste, e a estimativa do diâmetro ao final dos quarenta e um dias de avaliação foi de 16,25 mm, na Figura 4.1 pode-se notar que a tendência de crescimento do fruto, não observando nenhum valor superestimado. Em estudo similar feito por Attílio (2009) para descrição do crescimento do diâmetro do fruto da amora-preta cultivar Tupy utilizou-se o modelo linear de terceiro grau.

Figura 4.1 – Descrição do comportamento do crescimento do diâmetro do fruto e curvas ajustadas para o modelos Logístico (A), Gompertz (B), linear de primeiro grau (C), duplo Logístico (D) e duplo Gompertz (E) e seus respectivos intervalos de confiança, da amora-preta, cultivar Choctaw.





Comprimento

De acordo os resultados apresentados na Tabela 4.5 para o ajuste dos modelo propostos, para a descrição do comprimento do fruto da amora preta, cultivar Choctaw, observando-se que para o comprimento os modelos Logístico, Gompertz e Brody violaram o pressuposto de independência dos erros, pois o valor-p do teste Durbin-Watson foi menor que o nível de significância de 0,05; os demais pressupostos foram atendidos. Com essa violação, novamente foram feitos os ajustes dos três modelos, e nesses novos ajustes foi modelada a dependência residual com a inclusão do termo autoregressivo de primeira ordem (AR1), o que de acordo com Muniz, Nascimento e Fernandes (2017) com a inclusão do AR1 devem ocorrer melhorias da qualidade de ajuste.

Tabela 4.5 – Valores das estatísticas dos testes Shapiro-Wilk, Durbin-Watson e Breusch-Pagan, com seus respectivos valores p, das análises de resíduos, referente ao comprimento da cultivar Choctaw.

Modelos	Shapiro-Wilk	valor-p	Durbin-Watson	valor-p	Breusche-Pagan	valor-p
Logístico	0,90	0,16	1,05	0,004	0,60	0,73
Gompertz	0,91	0,25	1,10	0,001	1,29	0,52
Brody	0,92	0,35	1,12	0,006	1,56	0,45
Linear	0,93	0,82	1,01	0,200	2,58	0,10
Duplo log	0,96	0,82	2,98	0,680	8,45	0,13
Duplo Gomp	0,98	0,98	2,96	0,500	7,40	0,19

Nas Tabelas 4.6 e 4.7, são apresentadas as estimativas dos parâmetros e seus respectivos intervalos de confiança, limite inferior (LI) e superior (LS), para os modelos Logístico, Gompertz e Brody (Tabela 4.6) e duplo Logístico e duplo Gompertz (Tabela 4.7) para o ajuste do crescimento em comprimento do fruto de amora-preta. Os modelos Brody e sigmoide duplo Gompertz não tiveram significância nos parâmetros, β_3 e k_2 , respectivamente, para os demais modelos todos os parâmetros foram significativos, com intervalo de confiança que não incluíram o zero.

Tabela 4.6 – Estimativas dos parâmetros dos modelos Logístico (AR1), Gompertz (AR1), Brody (AR1) e linear de primeiro grau com os limites inferiores (LI) e superiores (LS) de seus respectivos intervalos de confiança de 95%, no ajuste do comprimento do fruto da amora-preta cultivar Choctaw.

Modelo	LI	$\hat{\beta}_1$	LS	LI	$\hat{\beta}_2$	LS	LI	$\hat{\beta}_3$	LS	ϕ
Logístico	12,65	14,74	16,82	0,06	0,11	0,17	5,59	9,35	13,11	0,49
Gompertz	12,86	15,44	18,03	0,04	0,07	0,1	2,4	5,29	8,19	0,46
Brody	12,85	17,29	21,73	0,01	0,04	0,07	-8,08	-4,02	0,02	0,40
	LI	$\hat{\alpha}_0$	LS	LI	$\hat{\alpha}_1$	LS				
Linear	3,94	4,89	5,85	0,23	0,27	0,31				

Tabela 4.7 – Estimativas dos parâmetros dos modelos duplo Logístico e duplo Gompertz com os limites inferiores (LI) e superiores (LS) de seus respectivos intervalos de confiança de 95%, no ajuste do comprimento do fruto da amora-preta cultivar Choctaw.

Parâmetros	Logístico		Gompertz			
	LI	LS	LI	LS	LI	LS
a_1	11,08	11,71	12,34	11,42	12,16	12,90
b_1	4,86	5,72	6,57	2,42	3,23	4,04
k_1	0,15	0,18	0,21	0,10	0,13	0,16
a_2	14,08	14,47	14,86	14,13	14,58	15,03
b_2	27,69	28,50	29,32	27,47	28,14	28,80
k_2	0,06	0,13	0,20	-0,17	1,09	2,36

Com a inclusão do termo autorregressivo houve melhora nos resultados dos avaliadores de qualidade de ajuste, com diminuição nas estimativas dos critérios AIC, BIC, DPR e aumento de R_{aj}^2 , resultado que é concordante nos obtidos por Muniz, Nascimento e Fernandes (2017), porém, pelos critérios de comparação entre modelos, que estão apresentados na Tabela 4.8, o modelo duplo Logístico apresentou melhor qualidade de ajuste em relação aos modelos Logístico, Gompertz, Brody, linear de primeiro grau, e duplo Gompertz, foi o mais indicado para descrever o crescimento do comprimento do fruto da amora-preta cultivar Choctaw.

Tabela 4.8 – Estimativas dos avaliadores de qualidade de ajuste dos critérios de informação de Akaike (AIC), critério de informação Bayesiano (BIC), coeficiente de determinação ajustado (R_{aj}^2) e desvio padrão residual (DPR) para os modelos Logístico (AR1), Gompertz (AR1), Brody (AR1), linear, duplo Logístico e duplo Gompertz para o diâmetro da amora-preta cultivar Choctaw.

Modelo	Logístico	Gompertz	Brody	Linear	Duplo log	Duplo Gomp
AIC	29,93	27,38	25,32	31,12	8,965	10,49
BIC	31,87	29,81	27,74	32,58	12,34	13,88
R_{aj}^2	0,94	0,95	0,96	0,94	0,99	0,99
DPR	0,71	0,64	0,57	0,94	0,27	0,29

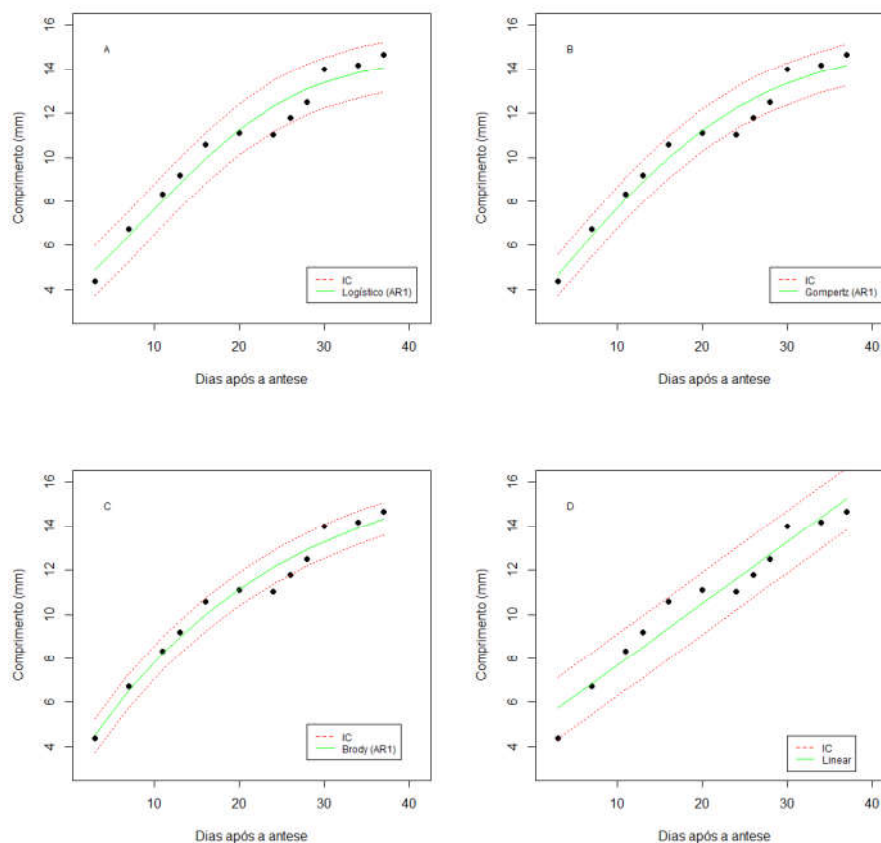
No modelo duplo Logístico, a primeira fase de crescimento é mais acelerada do que a segunda, com $k_1 = 0,18$ maior que $k_2 = 0,13$, indicando um crescimento mais rápido no primeiro sigmoide, e com um comportamento semelhante ao encontrado por Fernandes, Pereira e Muniz (2017), para dados de crescimento de frutos de café e, por e Mendes et al. (2008) na descrição do crescimento de bovinos da raça Hereford.

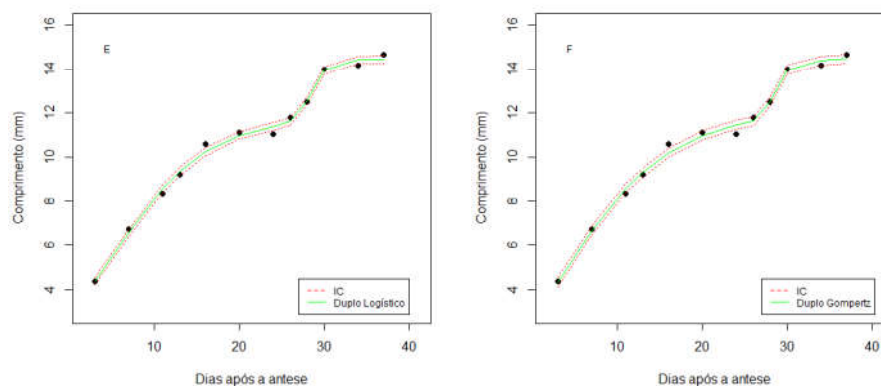
Pelas estimativas do modelo duplo Logístico a primeira fase de crescimento termina próximo aos 15 dias após a antese, com uma taxa de crescimento nesta fase $0,18 \text{ mm dia}^{-1}$.

Com esse primeiro estágio de crescimento estabilizado, o crescimento em comprimento voltou a ser acelerado, chegando uma taxa de $0,20 \text{ mm dia}^{-1}$, terminando em $14,08 \text{ mm}$, aos 41 dias após a antese. Esses resultados diferem dos encontrados por Curi et al. (2015), o quais verificaram que o crescimento máximo do comprimento da amora-preta cultivar Choctaw foi de aproximadamente $22,5 \text{ mm}$.

Na Figura 4.2 é possível observar que o comportamento de crescimento do comprimento do fruto de amora-preta possui dois estágios de desenvolvimento (duas assíntotas, dois pontos de inflexão e duas taxas), caracterizando assim um sigmoide duplo. Para dados de pêssego, Martínez et al. (2017) encontraram esse mesmo padrão de crescimento, e o modelo que melhor se ajustou a esse padrão foi o duplo Logístico (E) e para dados de amora preta, cultivar Tupy, Attílio (2009) destacou um padrão de crescimento do tipo duplo sigmoide, porém, esse autor não ajustou um modelo não linear difásico ou duplo sigmoide.

Figura 4.2 – Descrição do comportamento do crescimento do comprimento do fruto e curvas ajustadas para os modelos Logístico AR1 (A), Gompertz AR1 (B), Brody AR1 (C) linear de primeiro grau (D), duplo Logístico (E) e duplo Gompertz (F) e seus respectivos intervalo de confiança para, da amora-preta, cultivar Choctaw.





4.2 Cultivar Tupy

Diâmetro

Nas Tabelas 4.9 e 4.10, estão apresentadas as estimativas dos parâmetros e os intervalos de confiança de 95% os modelos linear, Logístico e duplo Logístico, respectivamente. No caso dos demais modelos, para o modelo Brody, o processo de estimação não convergiu. Em relação ao modelo Gompertz, o parâmetro ligado ao ponto de inflexão (β_3) não foi significativo pelo teste t ($p > 0,05$), e concordando com esse teste, o intervalo de confiança passou pela origem, assim, não é confiável usá-lo para fazer inferência sobre seus resultados. Para o modelo duplo Gompertz, vários parâmetros não foram significativos, com isso, os modelos Brody, Gompertz e duplo Gompertz não tiveram seus resultados discutidos para essa característica.

Tabela 4.9 – Estimativas dos parâmetros dos modelos Logístico e linear de primeiro grau com os limites inferiores (LI) e superiores (LS) de seus respectivos intervalos de confiança de 95%, no ajuste do diâmetro do fruto da amora-preta cultivar Tupy.

Modelo	LI	$\hat{\beta}_1$	LS	LI	$\hat{\beta}_2$	LS	LI	$\hat{\beta}_3$	LS
Logístico	16,38	28,80	41,22	0,03	0,06	0,08	9,33	27,72	46,11
Modelo	LI	$\hat{\alpha}_0$	LS	LI	$\hat{\alpha}_1$	LS			
Linear	3,62	4,60	5,57	0,34	0,38	0,42			

Tabela 4.10 – Estimativas dos parâmetros do modelo duplo Logístico com os limites inferiores (LI) superiores (LS) de seus respectivos intervalos de confiança de 95%, no ajuste do diâmetro do fruto da amora-preta cultivar Tupy.

Parâmetros	Duplo Logístico		
	LI		LS
a_1	8,60	13,87	19,16
b_1	0,26	6,18	12,09
k_1	0,02	0,13	0,25
a_2	18,54	20,19	21,85
b_2	27,71	30,91	34,11
k_2	0,08	0,38	0,85

Os parâmetros dos demais modelos foram significativos ($p < 0,05$) pelo teste t e os intervalos de confiança não passaram pelo zero. O modelo Logístico se ajustou bem aos dados, mas a assintota horizontal foi superestimada por esse modelo em 20% do seu valor, atingindo 28,80 mm, acima do crescimento médio máximo do diâmetro, como pode ser verificado na Figura 4.3 que é de aproximadamente 20 mm.

Com a superestimação da assíntota horizontal, o ponto de inflexão também foi superestimado. O ponto de inflexão para o modelo Logístico ocorreu quando o diâmetro atinge $\beta_1/2$ conforme comentado por Fernandes et al. (2015) e Tsoularis e Wallace (2002), assim a estimativa do ponto de inflexão ($\hat{\beta}_3$), a estimativa do diâmetro foi de 14,40 mm. Prado, Savian e Muniz (2013) também encontraram chegaram à conclusão de que o modelo Logístico é o mais indicado para descrever o crescimento do diâmetro de coco.

As estimativas dos parâmetros do modelo duplo Logístico foram todas significativas, com intervalo de confiança sem a inclusão do zero (Tabela 4.10). A fase inicial estabilizou-se em aproximadamente 20 dias após a antese, voltando a crescer exponencialmente após essa fase e estabilizando novamente aos 40 dias ou em 20 mm de diâmetro, concordando com Attílio (2009) que ajustou um modelo de terceiro grau para o diâmetro da cultivar Tupy, chegando à estimativa do diâmetro em 22 mm aos 36 dias após a antese, porém, com valores um pouco abaixo em relação ao encontrado por Curi et al. (2015) que encontraram valores do diâmetro máximo de aproximadamente 24 mm. Para o modelo linear de primeiro grau, as estimativas dos parâmetros, foram significativas, podendo estimar que ao final dos 41 dias (tempo até a colheita) um diâmetro do fruto de amora-preta de 21,6 mm.

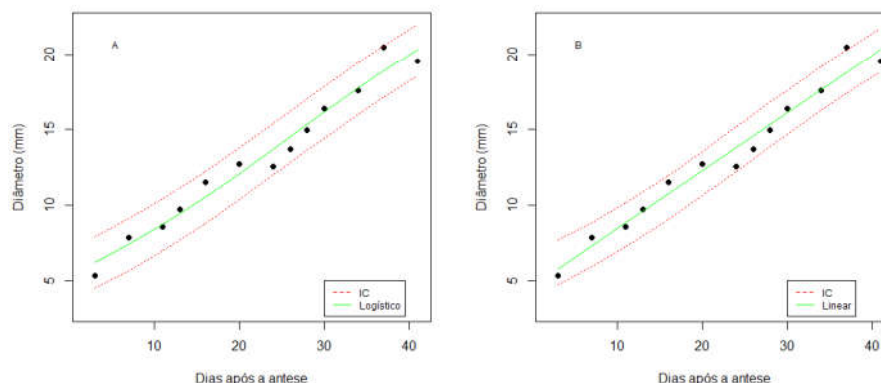
Tabela 4.11 – Estimativas dos avaliadores de qualidade de ajuste dos critérios de informação de Akaike (AIC), critério de informação Bayesiano (BIC), coeficiente de determinação ajustado (R_{aj}^2) e desvio padrão residual (DPR) para os modelos Logístico, linear de primeiro grau e duplo Logístico na descrição do crescimento do diâmetro do fruto da amora-preta, cultivar Tupy.

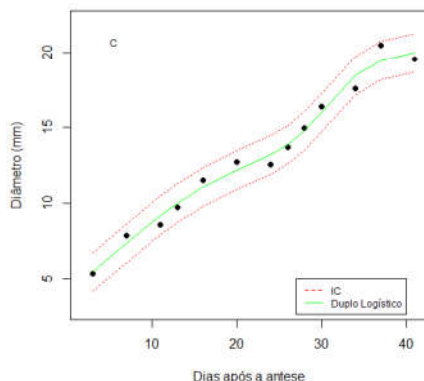
Modelo	Logístico	Linear	Duplo log
AIC	38,0796	35,3168	34,8559
BIC	40,3394	37,0117	38,8205
R_{aj}^2	0,9630	0,9687	0,9743
DPR	0,8774	0,8123	0,7353

Na Tabela 4.11, estão apresentadas as estimativas dos avaliadores de qualidade de ajuste, nas quais se observa que o modelo duplo Logístico apresentou os melhores valores de AIC, BIC e DPR e maior R_{aj}^2 , sendo considerado o melhor modelo para a descrição do diâmetro do fruto de amora-preta cultivar Tupy. Esses resultados são semelhantes aos encontrados por Fernandes, Pereira e Muniz (2017) e Mendes et al. (2008) em seus estudos. Esses resultados também, podem ser utilizados pelas curvas ajustadas da Figura 4.3, na qual nota-se que a curva ajustada pelo duplo Logístico melhor se adéqua aos dados.

A primeira fase de crescimento do diâmetro desta cultivar é menos acelerado ($k_1 = 0,38$) em relação a segunda ($k_2 = 0,13$), é contrário ao crescimento do comprimento da cultivar Choctaw e dos resultados encontrados por Fernandes, Pereira e Muniz (2017) e Mendes et al. (2008). A assíntota do segundo estágio de desenvolvimento ou ponto de colheita foi estimada em 20,19 mm, enquanto que Attílio (2009) encontrou um valor de 22 mm.

Figura 4.3 – Descrição do comportamento do crescimento do diâmetro do fruto e curvas ajustadas para os modelos Logístico (A), linear de primeiro grau (B) e duplo Logístico (C) e seus respectivos intervalos de confiança, da amora-preta, cultivar Tupy.





Comprimento

Na Tabela 4.12, estão as estimativas dos modelos ajustados, com seus respectivos intervalos de confiança de 95 %. Pelo teste t a 5%, todos os parâmetros dos modelos Logístico e linear foram significativos, para o modelo Brody não houve significância de seus parâmetros e com relação ao modelo Gompertz, novamente o ponto de inflexão não foi significativo. O duplo sigmoide, Gompertz e Logístico, tiveram alguns parâmetros não significativos.

Tabela 4.12 – Estimativas dos parâmetros dos modelos Logístico e linear de primeiro grau com os limites inferiores (LI) e superiores (LS) de seus respectivos intervalos de confiança de 95%, no ajuste do comprimento do fruto da amora-preta cultivar Tupy.

Modelo	LI	$\hat{\beta}_1$	LS	LI	$\hat{\beta}_2$	LS	LI	$\hat{\beta}_3$	LS
Logístico	16,69	24,08	31,46	0,03	0,07	0,10	5,27	15,76	26,26
Modelo	LI	$\hat{\alpha}_0$	LS	LI	$\hat{\alpha}_1$	LS			
Linear	5,10	6,39	7,67	0,30	0,35	0,41			

Para os parâmetros dos modelos Logístico, não houve superestimação da assíntota horizontal ($\hat{\beta}_1$), mas este ficou ligeiramente superior em relação ao máximo observado no gráfico de dispersão que está na Figura 4.4. Com isso, o ponto de inflexão aconteceu como esperado e comentado por Fernandes et al. (2015) e Tsoularis e Wallace (2002), ou seja, na metade da assíntota ($\hat{\beta}_1/2$) que foi de 12,04 mm. Com resultado semelhante Benassi et al. (2007) e Prado, Savian e Muniz (2013) tiveram bons ajustes com o modelo Logístico no crescimento de pêssego e coco, respectivamente.

Ao analisar a Figura 4.4, é difícil verificar visualmente onde ocorre a mudança do estágio de crescimento lento para o rápido, esse fato pode ser explicado pela dispersão dos dados que não estão em um formato claro de sigmoide.

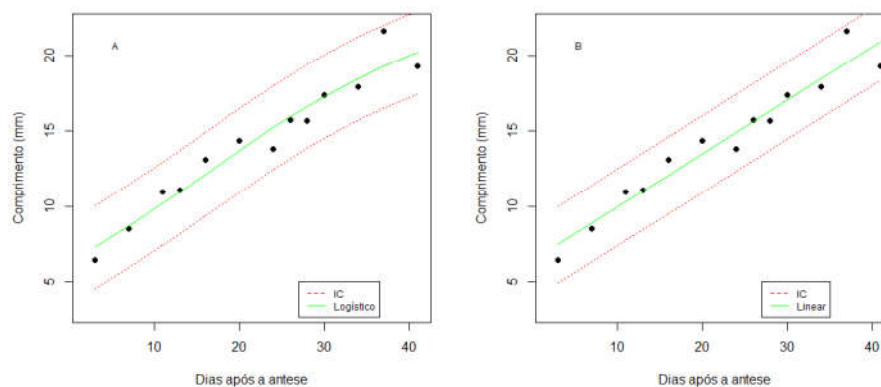
Para o modelo linear de primeiro grau, todos os parâmetros foram significativos e seus resultados são coerentes com os de Attílio (2009), que ajustou um modelo linear de terceiro grau e o resultado do crescimento máximo esta bem próximo com os deste trabalho, mas com valores distantes encontrados por Curi et al. (2015).

Tabela 4.13 – Estimativas dos avaliadores de qualidade de ajuste dos critérios de informação de Akaike (AIC), critério de informação Bayesiano (BIC), coeficiente de determinação ajustado (R_{aj}^2) e desvio padrão residual (DPR) para os modelos Logístico e linear de primeiro grau na descrição do crescimento do diâmetro do fruto da amora-preta, cultivar Tupy.

Modelo	Logístico	Linear
AIC	44,2901	42,623
BIC	46,5501	44,3012
R_{aj}^2	0,9317	0,9377
DPR	1,1143	1,0752

Na Tabela 4.13, estão os valores de AIC, BIC, R_{aj}^2 e DPR, em todos o valores de comparação entre modelos, o linear de primeiro grau para o comprimento da amora-preta cultivar Tupy se mostrou com melhores valores, esse é, o mais indicado para descrever o crescimento do comprimento. Fato este que pode ser observado na Figura 4.4, com os dados observados tendo um padrão linear.

Figura 4.4 – Descrição do comportamento do crescimento do comprimento do fruto e curvas ajustadas para os modelos Logístico (A) e linear de primeiro grau (B) e seus respectivos intervalos de confiança, da amora-preta, cultivar Tupy.



4.3 Cultivar Brazos

Diâmetro

Nas Tabelas 4.14 e 4.15, estão as estimativas dos parâmetros dos modelos Logísticos simples, difásico e modelo linear simples. Nos demais modelos não houve convergência de seus parâmetros. A análise de resíduos foi feita e o modelo Logístico simples violou o pressuposto de independência dos erros. Mesmo com a inclusão do termo autoregressivo de primeira ordem, os parâmetros continuaram não significativos.

Tabela 4.14 – Estimativas dos parâmetros dos modelos Logístico (AR1) e linear de primeiro grau com os limites inferiores (LI) e superiores (LS) de seus respectivos intervalos de confiança de 95%, no ajuste do diâmetro do fruto da amora-preta cultivar Brazos.

Modelo	LI	$\hat{\beta}_1$	LS	LI	$\hat{\beta}_2$	LS	LI	$\hat{\beta}_3$	LS
Logístico	-14,87	39,50	93,88	0,01	0,03	0,06	-24,74	43,70	112,15
Modelo	LI	$\hat{\alpha}_0$	LS	LI	$\hat{\alpha}_1$	LS			
Linear	4,52	5,51	6,50	0,27	0,31	0,35			

Tabela 4.15 – Estimativas dos parâmetros do modelo duplo Logístico e duplo Gompertz com os limites inferiores (LI) superiores (LS) de seus respectivos intervalos de confiança de 95%, no ajuste do diâmetro do fruto da amora-preta cultivar Brazos.

Parâmetros	Logístico			Gompertz		
	LI		LS	LI		LS
a_1	9,75	11,71	13,68	10,67	12,47	14,26
b_1	0,86	2,76	4,67	-0,93	0,06	2,2
k_1	0,07	0,18	0,28	0,05	0,12	0,19
a_2	17,56	19,31	21,07	17,56	19,88	22,2
b_2	29,78	32,08	34,37	28,54	30,91	33,28
k_2	0,09	0,28	0,46	0,06	0,18	0,3

Pelos critérios de seleção de modelos que estão na Tabela 4.16, o modelo Gompertz duplo apresentou melhores valores, contudo o parâmetro ligado ao ponto de inflexão da primeira fase de crescimento não foi significativo, ou seja não confiável. Com isso, o modelo duplo Logístico é o melhor para descrever o diâmetro da cultivar Brazos.

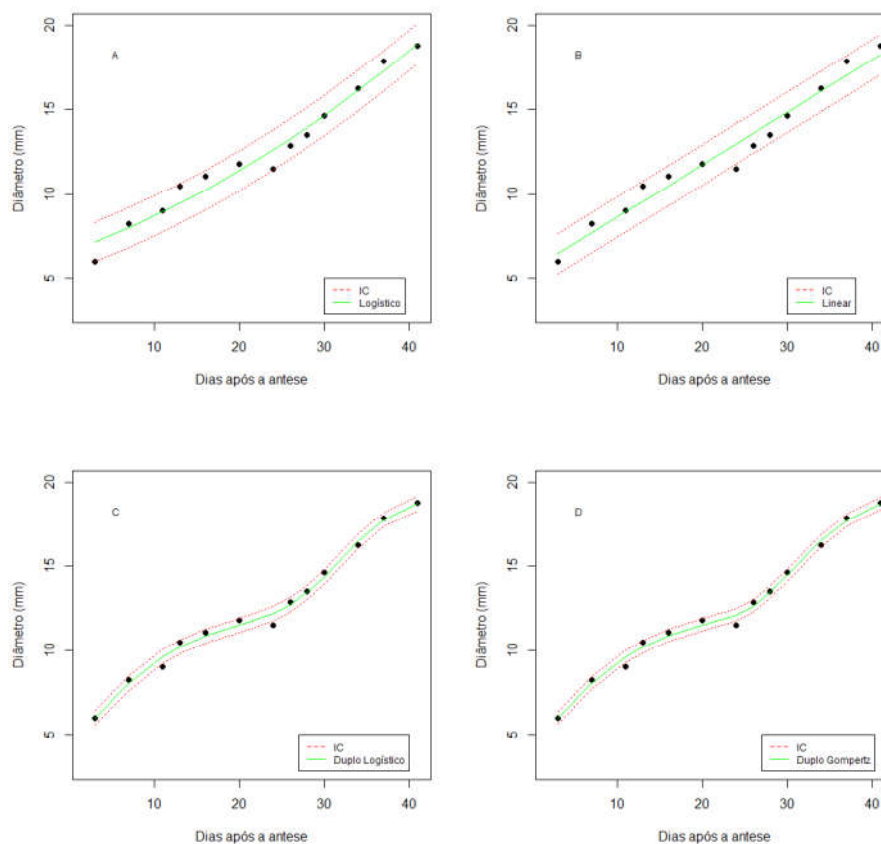
Na Figura 4.5, é possível verificar que o duplo Logístico se ajuste muito bem aos dados. No gráfico, é possível verificar as duas fases de crescimento, em que a primeira fase se estabiliza com 11,71 mm e a segunda com 19,31, ou seja próximas da realidade. Valores estes abaixo do

Tabela 4.16 – Estimativas dos avaliadores de qualidade de ajuste dos critérios de informação de Akaike (AIC), critério de informação Bayesiano (BIC), coeficiente de determinação ajustado (R_{aj}^2) e desvio padrão residual (DPR) para os modelos Logístico (AR1), Gompertz (AR1), linear de primeiro grau, duplo Logístico e duplo Gompertz na descrição do crescimento do diâmetro do fruto da amora-preta, cultivar Brazos.

Modelo	Logístico (AR1)	Linear	Duplo log	Duplo Gomp
AIC	34,22	32,76	20,58	18,73
BIC	37,04	34,45	24,54	22,69
R_{aj}^2	0,96	0,96	0,98	0,98
DPR	0,74	0,73	0,42	0,39

encontrado por Curi et al. (2015), em que esse valor foi próximo de 26 mm para o crescimento final.

Figura 4.5 – Descrição do comportamento do crescimento do diâmetro do fruto e curvas ajustadas para o modelos Logístico (A), linear de primeiro grau (B), duplo Logístico (C) e duplo Gompertz (D) e seus respectivos intervalos de confiança, da amora-preta, cultivar Brazos.



Comprimento

As estimativas dos modelos que tiveram convergência estão na Tabela 4.17. Os modelos que tiveram convergência os parâmetros foram significativos. Verificando o parâmetro β_2 do modelo Brody, ele foi negativo, mesmo assim pode-se usá-lo, devido ao fato de que este não possui interpretação prática.

Tabela 4.17 – Estimativas dos parâmetros dos modelos Logístico, Gompertz, Brody e linear de primeiro grau com os limites inferiores (LI) e superiores (LS) de seus respectivos intervalos de confiança de 95%, no ajuste do comprimento do fruto da amora-preta cultivar Brazos.

Modelo	LI	$\hat{\beta}_1$	LS	LI	$\hat{\beta}_2$	LS	LI	$\hat{\beta}_3$	LS
Logístico	14,92	18,49	22,06	4,00	9,46	14,9	0,03	0,07	0,11
Gompertz	14,71	19,31	23,92	-0,03	3,81	7,66	0,02	0,05	0,08
Brody	13,59	21,25	28,91	-16,01	-8,17	-0,32	0,002	0,03	0,06
	LI	$\hat{\alpha}_0$	LS	LI	$\hat{\alpha}_1$	LS			
Linear	5,47	6,83	8,19	0,21	0,27	0,33			

Tabela 4.18 – Estimativas dos avaliadores de qualidade de ajuste dos critérios de informação de Akaike (AIC), critério de informação Bayesiano (BIC), coeficiente de determinação ajustado (R_{aj}^2) e desvio padrão residual (DPR) para os modelos Logístico, Gompertz, Brody e linear de primeiro grau na descrição do crescimento do comprimento do fruto da amora-preta, cultivar Brazos.

Modelo	Logístico	Gompertz	Brody	Linear
AIC	39,97	39,08	38,15	40,96
BIC	42,23	41,34	40,41	42,65
R_{aj}^2	0,91	0,92	0,93	0,90
DPR	0,94	0,91	0,87	1,00

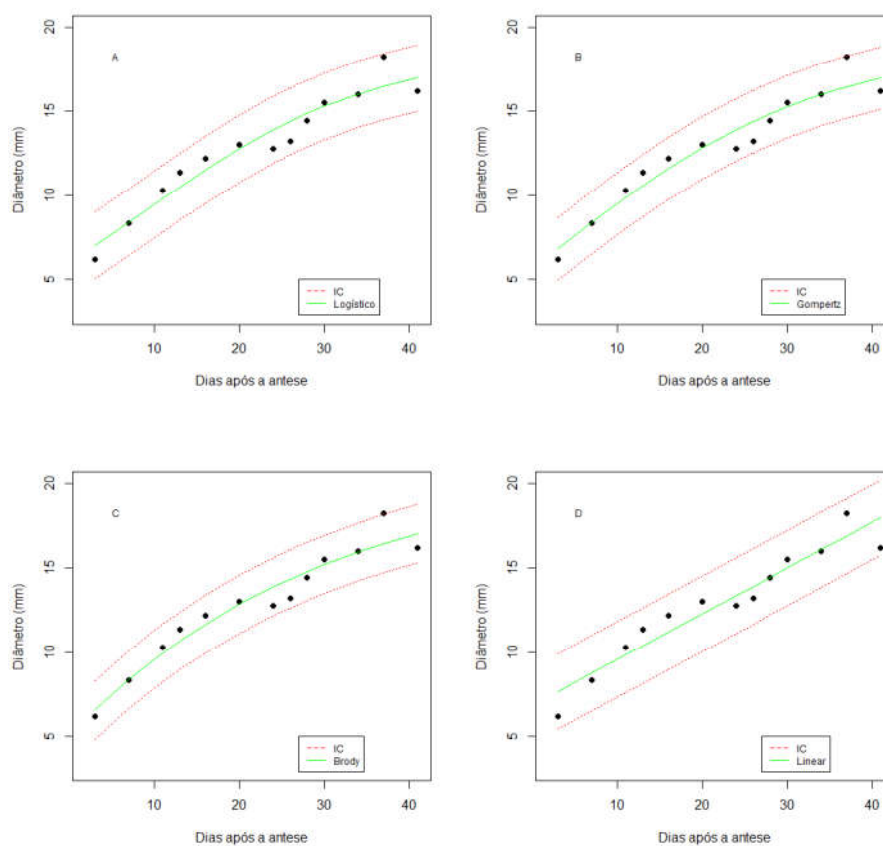
A análise de resíduos dos modelos Logístico, Gompertz, Brody e linear foi feita e todos os pressupostos foram atendidos, então os quatro modelos podem ser utilizados para descrever o crescimento do comprimento da cultivar Brazos.

Na Tabela 4.18, encontram os valores de AIC, BIC, R_{aj}^2 , os três modelos não lineares apresentaram valores muito próximos com uma ligeira vantagem para o modelo Brody, este é o mais indicado para descrever tal desenvolvimento, PUIATTI et al. (2013), Pereira et al. (2014), Maia et al. (2009) também fizeram o ajuste desse modelo em seus estudos.

Os modelos não lineares superestimaram um pouco a assíntota horizontal com comprimento. Conforme comentado por Pereira et al. (2017) e Pereira et al. (2014) o parâmetro β_3 não possui interpretação prática direta, não foi possível estimar esse parâmetro.

Na Figura 4.6, estão as curvas ajustadas do modelos que houve convergência, corroborando os valores dos critérios de seleção de modelos, os ajustes estão muito próximos entre os modelos não lineares. O crescimento final do comprimento da cultivar está em um valor próximo ao encontrado por Curi et al. (2015), com valores de crescimento final em mais ou menos 20 mm.

Figura 4.6 – Descrição do comportamento do crescimento do comprimento do fruto e curvas ajustadas para o modelos Logístico (A), Gompertz (B), Brody (C) linear de primeiro grau (D) e seus respectivos intervalos de confiança, da amora-preta, cultivar Brazos.



4.4 Cultivar Guarani

Diâmetro

O modelo Brody não teve convergência do método de estimação de parâmetros. O modelo Logístico e Gompertz simples violaram o pressuposto de independência do vetor de resíduos. Com essa violação, novamente foram feitos ajustes com a inclusão do termo autoregressivo de primeira ordem (AR1). Após modelar a dependência residual, o modelo Gompertz não teve o seu parâmetro referente ao ponto de inflexão (β_3) significativo e o modelo duplo Gompertz teve o parâmetro do ponto de inflexão do primeiro estágio de desenvolvimento (k_1) não significativo também pelo teste t a 5 % de significância.

Tabela 4.19 – Estimativas dos parâmetros dos modelos Logístico (AR1), Gompertz (AR1) e linear de primeiro grau com os limites inferiores (LI) e superiores (LS) de seus respectivos intervalos de confiança de 95%, no ajuste do diâmetro do fruto da amora-preta cultivar Guarani.

Modelo	LI	$\hat{\beta}_1$	LS	LI	$\hat{\beta}_2$	LS	LI	$\hat{\beta}_3$	LS	$\hat{\phi}$
Logístico	12,50	22,62	32,74	0,02	0,04	0,06	1,09	21,70	42,30	0,31
Gompertz	6,39	28,54	50,79	0,003	0,02	0,04	-14,17	18,47	51,11	0,28
	LI	$\hat{\alpha}_0$	LS	LI	$\hat{\alpha}_1$	LS				
Linear	5,26	5,82	6,39	0,23	0,25	0,27				

Tabela 4.20 – Estimativas dos parâmetros do modelo duplo Logístico e duplo Gompertz com os limites inferiores (LI) superiores (LS) de seus respectivos intervalos de confiança de 95%, no ajuste do diâmetro do fruto da amora-preta cultivar Guarani.

Parâmetros	Logístico			Gompertz		
	LI		LS	LI		LS
a_1	10,75	12,74	14,73	10,92	13,33	15,74
b_1	1,04	3,85	6,12	-1,87	-0,05	1,75
k_1	0,06	0,11	0,16	0,03	0,08	0,12
a_2	15,71	16,52	17,33	15,59	16,99	18,4
b_2	30,86	32,94	35,02	28,92	31,51	34,1
k_2	0,05	0,43	0,8	0,006	0,25	0,50

Nas Tabelas 4.19 e 4.20, estão as estimativas dos modelos. Como mencionado por Muniz, Nascimento e Fernandes (2017) a inclusão do termo autorregressivo de primeira ordem melhora a qualidade dos ajustes, isso ocorreu com o modelo Logístico sigmoide simples, porém este não foi o mais indicado para descrever esse conjunto de dados, como pode-se observar na Tabela 4.21, como o mais indicado, com melhores valores de AIC, BIC, DPR e R_{aj}^2 , o modelo Logístico duplo.

Tabela 4.21 – Estimativas dos avaliadores de qualidade de ajuste dos critérios de informação de Akaike (AIC), critério de informação Bayesiano (BIC), coeficiente de determinação ajustado (R_{aj}^2) e desvio padrão residual (DPR) para os modelos Logístico, Gompertz, linear, linear de primeiro grau, duplo Logístico e duplo Gompertz na descrição do crescimento do diâmetro do fruto da amora-preta, cultivar Guarani.

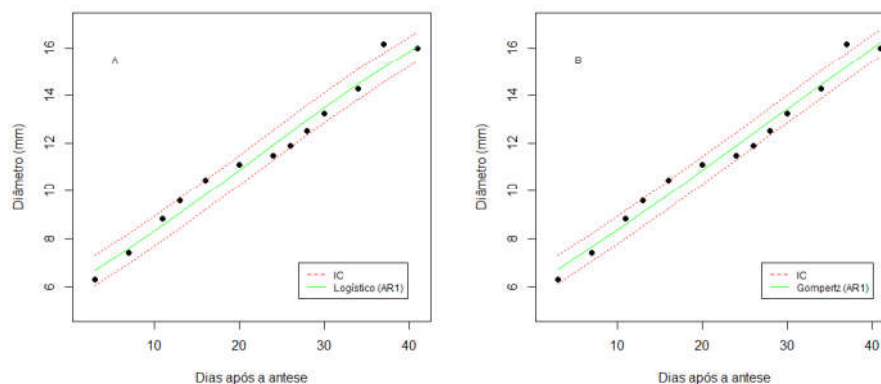
Modelo	Logístico (AR1)	Gompertz (AR1)	Linear	Duplo Log	Duplo Gomp
AIC	26,66	25,08	21,26	13,17	15,09
BIC	26,92	27,9	22,96	17,12	19,04
R_{aj}^2	0,9697	0,97	0,97	0,98	0,98
DPR	0,52	0,51	0,47	0,31	0,34

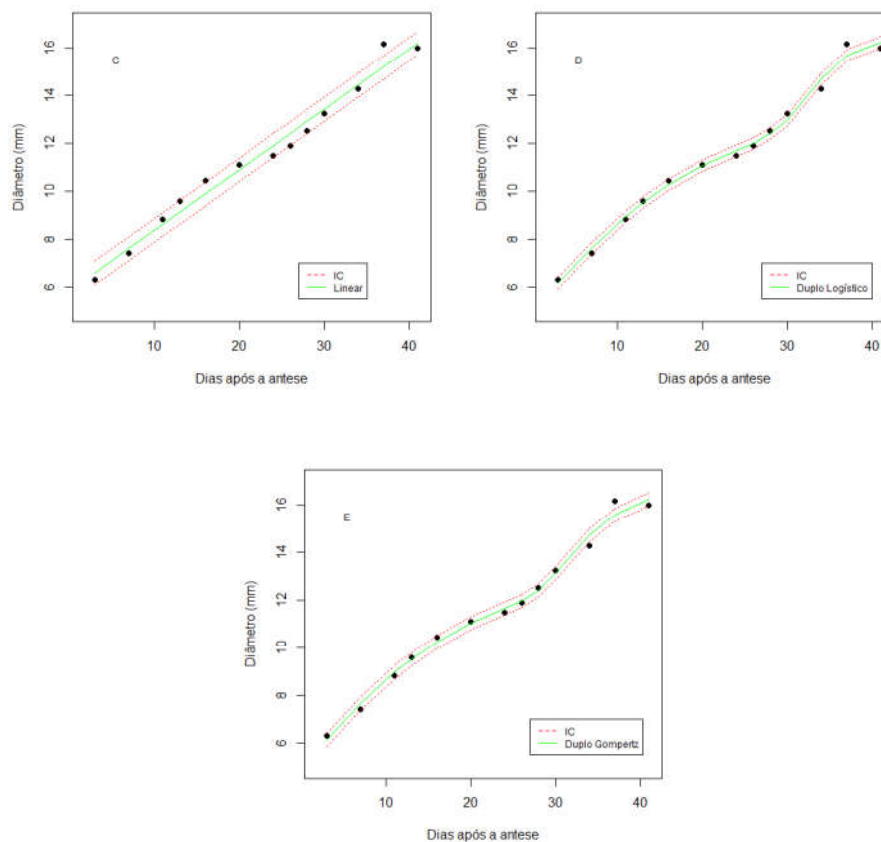
Conforme Fernandes, Pereira e Muniz (2017), o valor a_1 representa o crescimento final do primeiro estágio de desenvolvimento e a_2 representa a assíntota horizontal ou maturação final do fruto, que neste trabalho foram 12,74 mm e 16,52 mm, respectivamente.

Em relação à taxa de crescimento para as duas fases, forma 0,11 para a primeira e 0,43 para a segunda, indicando um crescimento mais acelera na segunda fase, contrariando os resultados encontrado por Fernandes, Pereira e Muniz (2017) no crescimento de frutos de café e concordando com Silva et al. (2013) para o crescimento de pêssego.

Analisando a Figura 4.7, é possível verificar um padrão de crescimento de sigmoide duplo. Ainda fazendo uma análise do gráfico Logístico duplo sigmoide e dos parâmetros desse modelo, o primeiro estágio de desenvolvimento termina em aproximadamente 25 dias após a antese ou com 12,74 mm. Já o segundo estágio, esse crescimento termina aos 41 dias com 16,52 mm.

Figura 4.7 – Descrição do comportamento do crescimento do diâmetro do fruto e curvas ajustadas para o modelos Logístico (A), Gompertz (B), linear de primeiro grau (C), duplo Logístico (D) e duplo Gompertz (E) e seus respectivos intervalos de confiança, da amora-preta, cultivar Guarani.





Comprimento

Para essa característica, os modelos Brody, duplo Logístico e duplo Gompertz não tiveram convergência. Para os demais modelos, houve convergência, porém os para os não lineares, alguns parâmetros não foram significativos, com isso, e segundo Regazzi e Silva (2010) não é confiável usar modelos com parâmetros não significativos.

Tabela 4.22 – Estimativas dos parâmetros dos modelos Logístico, Gompertz e linear de primeiro grau com os limites inferiores (LI) e superiores (LS) de seus respectivos intervalos de confiança de 95%, no ajuste do diâmetro do fruto da amora-preta cultivar Guarani.

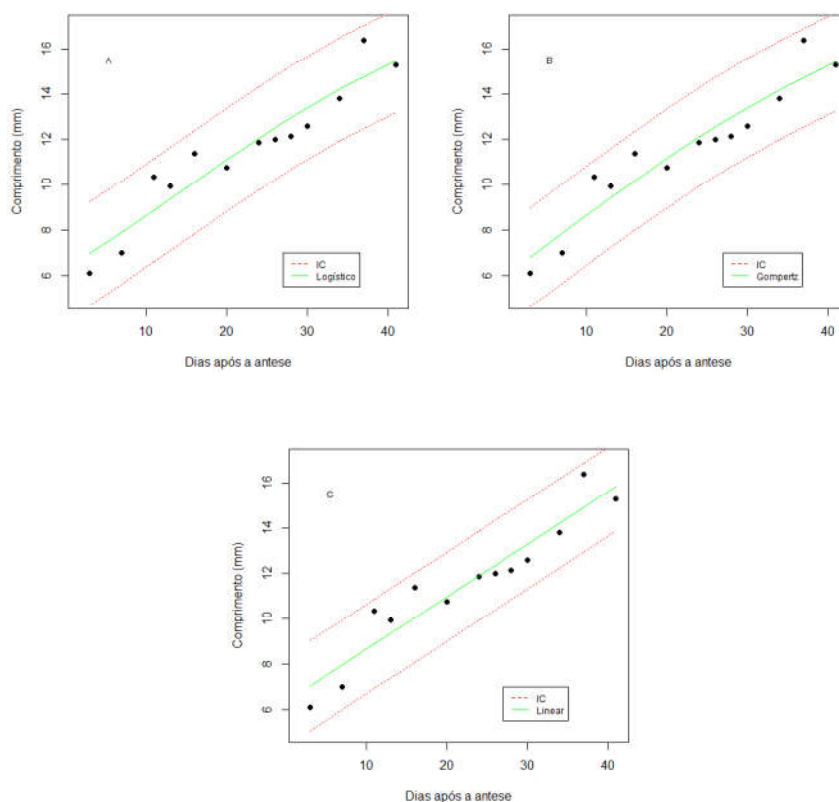
Modelo	LI	$\hat{\beta}_1$	LS	LI	$\hat{\beta}_2$	LS	LI	$\hat{\beta}_3$	LS
Logístico	8,82	19,45	30,08	0,006	0,05	0,09	-8,23	14,50	37,17
Gompertz	6,33	20,93	-12,62	-0,006	0,03	0,07	-12,62	6,48	25,58
Modelo	LI	$\hat{\alpha}_0$	LS	LI	$\hat{\alpha}_1$	LS			
Linear	5,21	6,34	7,48	0,18	0,23	0,27			

As estimativas dos modelos estão na Tabela 4.22, o único modelo que está com todos os pressupostos e os parâmetros significativos foi o linear de primeiro grau, Attílio (2009) também ajustou modelo linear para crescimento do comprimento da amora-preta cultivar Tupy. Com valores próximos com a realidade, chegando ao final dos 41 dias, ponto que a colheita foi feita, com 15,77 mm. Na Figura 4.8, estão os ajustes dos modelos, na qual pode-se notar que o modelo linear de primeiro grau se ajusta melhor aos dados.

Tabela 4.23 – Estimativas dos avaliadores de qualidade de ajuste dos critérios de informação de Akaike (AIC), critério de informação Bayesiano (BIC), coeficiente de determinação ajustado (R_{aj}^2) e desvio padrão residual (DPR) para os modelos Logístico, Gompertz e linear de primeiro grau na descrição do crescimento do diâmetro do fruto da amora-preta, cultivar Guarani.

Modelo	Logístico	Gompertz	Linear
AIC	41,74	41,21	39,31
BIC	44,00	43,47	41,01
R_{aj}^2	0,87	0,87	0,97
DPR	1,01	0,98	0,94

Figura 4.8 – Avaliadores de qualidade de ajuste dos modelos Logístico, Gompertz e linear para o comprimento da amora-preta cultivar Guarani.



5 CONCLUSÕES

O modelo linear de primeiro grau e os não lineares apresentaram bons ajustes para descrição do crescimento em diâmetro e comprimento de frutos das cultivares de amora-preta. O modelo não linear duplo Logístico apresentou melhor qualidade de ajuste, foi o mais indicado. O diâmetro das cultivares Tupy, Brazos e Guarani possuem um padrão de crescimento sigmoide duplo. Já o comprimento, não teve uma predominância entre os modelos, que foram linear de primeiro grau, sigmoide simples e sigmoide duplo.

O diâmetro do frutos das cultivares possuem um padrão de crescimento do tipo sigmoide duplo. O comprimento do fruto das cultivares Tupy e Guarani apresentou um padrão de crescimento linear, da cultivar Choctaw foi duplo sigmoide e, da cultivar Brazos um sigmoide simples.

As cultivares estudadas possuem padrão de crescimento diferentes, ocorrendo divergência entre os modelos mais adequados para cada cultivar.

REFERÊNCIAS

- AKAIKE, H. A new look at the statistical model identification. **IEEE Transactions on Automatic Control**, Boston, v. 19, n. 6, p. 716–723, Dec. 1974.
- ALVARES, C. A. et al. Köppen's climate classification map for Brazil. **Meteorologische Zeitschrift**, E. Schweizerbart'sche Verlagsbuchhandlung, v. 22, n. 6, p. 711–728, 2013.
- ANTUNES, L. E. C. Amora-preta: nova opção de cultivo no Brasil. **Ciência Rural**, Santa Maria, v. 32, n. 1, p. 151–158, 2002.
- ANTUNES, L. E. C.; RASEIRA, M. C. B. **Aspectos técnicos da cultura da amora-preta**. Embrapa Clima Temperado, 2004.
- ANTUNES, L. E. C.; TREVISAN, R.; PEREIRA, I. d. S. Produção de amora-preta. **Seminário brasileiro sobre pequenas frutas**, v. 4, p. 65–71, 2007.
- ATTÍLIO, L. B. **Avaliação fenológica, produtividade, curva de crescimento, qualidade dos frutos e custos de produção de amoreira-preta cv. Tupy**. 2009. 67 p. Dissertação (Mestrado em Especialidade em Sistemas de Produção Vegetal) — Universidade Estadual Paulista, São Paulo, 2009.
- BATES, D. M.; WATTS, D. G. **Nonlinear regression analysis and its applications**. New York: John Wiley, 1988. 365 p.
- BENASSI, A. C. et al. Caracterização biométrica de frutos de coqueiro, *Coccoloba nucifera* L. variedade anã-verde, em diferentes estádios de desenvolvimento. **Revista Brasileira de Fruticultura**, Jaboticabal, v. 29, n. 2, p. 302–307, 2007.
- BERGAMASCO, A. F.; AQUINO, L. D.; MUNIZ, J. Ajuste de modelos não-lineares a dados de crescimento de fêmeas da raça holandesa. **Ciênc Agrotec**, Lavras, v. 25, p. 235–241, 2001.
- BRUCKNER, C. H. et al. Curva de crescimento e padrão respiratório de frutos de genótipos de pessegueiro em região de clima subtropical. **Revista Brasileira de Fruticultura**, Jaboticabal, v. 35, n. 2, p. 235–241, 2012.
- BRUNA, E. D. Curva de crescimento de frutos de pêssego em regiões subtropicais. **Revista Brasileira de Fruticultura**, Jaboticabal, v. 29, n. 3, p. 685–689, 2007.
- CAMPAGNOLO, M. A.; PIO, R. Enraizamento de estacas caulinares e radiculares de cultivares de amoreira-preta coletadas em diferentes épocas, armazenadas a frio e tratadas com aib. **Ciência Rural**, Santa Maria, v. 42, n. 2, p. 232–237, 2012.
- CAVALINI, F. C. et al. Maturity indexes for 'kumagai' and 'paluma' guavas. **Revista Brasileira de Fruticultura**, Jaboticabal, v. 28, n. 2, p. 176–179, 2006.
- CUNHA JUNIOR, L. C. et al. Caracterização da curva de maturação de pêssegos 'aurora-1', na região de Jaboticabal-sp. **Revista Brasileira de Fruticultura**, Jaboticabal, v. 29, n. 3, p. 661–665, 2007.
- CURI, P. N. et al. Produção de amora-preta e amora-vermelha em Lavras-MG. **Ciência Rural**, Santa Maria, v. 45, n. 8, p. 1368–1374, 2015.
- DEMETRIO, C. G. B.; ZOCHI, S. S. **Modelos de Regressão**. Piracicaba:ESALQ/USP, 2006.

- DRAPER, N. R.; SMITH, H. **Applied Regression Analysis**. 3. ed. New York: John Wiley, 1998. 706 p.
- DURBIN, J.; WATSON, G. S. Testing for serial correlation in least squares regression. ii. **Biometrika**, JSTOR, v. 38, n. 1/2, p. 159–177, 1951.
- FACHINELLO, J. C. et al. Situação e perspectivas da fruticultura de clima temperado no brasil. **Revista Brasileira de Fruticultura**, Jaboticabal, v. 33, n. S1, p. 109–120, 2011.
- FERNANDES, T. J. et al. Seleção de modelos não lineares para a descrição das curvas de crescimento do fruto do cafeeiro. **Coffee Science**, Lavras, v. 9, n. 2, p. 207–215, 2014.
- FERNANDES, T. J. et al. Parameterization effects in nonlinear models to describe growth curves. **Acta Scientiarum**, Maringá, v. 37, n. 4, p. 397, 2015.
- FERNANDES, T. J.; PEREIRA, A. A.; MUNIZ, J. A. Double sigmoidal models describing the growth of coffee berries. **Ciência Rural**, Santa Maria, v. 47, n. 8, 2017.
- GALLANT, A. R. **Nonlinear statistical models**. 1. ed. Raleigh: John Wiley & Sons, 1987. 310 p.
- HOFFMANN, R. **Análise de regressão: uma introdução à econometria**. 3. ed. São Paulo: Hucitec, 1998. 379 p.
- LIMA, K. P. et al. Uso de modelos não lineares na descrição do acúmulo de boro em diferentes partes do feijoeiro cultivar jalo. **Revista Brasileira de Biometria**, Lavras, v. 35, n. 4, p. 834–861, 2017.
- MAIA, E. et al. Método de comparação de modelos de regressão não-lineares em bananeiras. **Ciência Rural**, Santa Maria, v. 39, n. 5, p. 1380–1386, 2009.
- MARTÍNEZ, J. D. et al. Growth models of peach fruit *prunus persica* (l) in three handling systems. **Interciencia**, Caracas, v. 42, n. 9, p. 596 – 602, 2017.
- MAZZINI, A. d. A. et al. Análise da curva de crescimento de machos hereford. **Ciência e Agrotecnologia**, Lavras, v. 27, n. 5, p. 1105–1112, 2003.
- MENDES, P. N. et al. Modelo logístico difásico no estudo do crescimento de fêmeas da raça hereford. **Ciência Rural**, Santa Maria, v. 38, n. 7, p. 1984 – 1990, 2008.
- MUIANGA, C. A. et al. Descrição da curva de crescimento de frutos do cajueiro por modelos não lineares. **Revista Brasileira de Fruticultura**, Jaboticabal, v. 38, n. 1, p. 22–32, 2016.
- MUNIZ, J. A.; NASCIMENTO, M. d. S.; FERNANDES, T. J. Nonlinear models for description of cacao fruit growth with assumption violations. **Revista Caatinga**, Mossoró, v. 30, n. 1, p. 250–257, 2017.
- PALHARINI, M. C. de A. et al. Efeito da temperatura de armazenamento na conservação pós-colheita de amora-preta. **Pesquisa Agropecuária Tropical**, Goiânia, v. 45, n. 4, p. 413–419, 2015.
- PEIXOTO, C. F.; PEIXOTO, M. Dinâmica do crescimento vegetal: princípios básicos. **Tópicos em Ciências Agrárias**, p. 38, 2009.

- PEREIRA, A. A. et al. Modelagem não linear do crescimento em altura do cafeeiro irrigado e não irrigado em diferentes densidades. **IRRIGA**, Botucatu, v. 1, n. 1, p. 140–149, 2016.
- PEREIRA, A. A. et al. Modelagem do diâmetro de copa do cafeeiro podado cultivado em diferentes densidades e regimes hídricos. **Coffee Science**, Lavras, v. 11, n. 4, p. 495–501, 2017.
- PEREIRA, N. N. et al. Modelos não lineares mistos na análise de curvas de crescimento de bovinos da raça tabapuã. Universidade Federal de Viçosa, Viçosa, 2014.
- PRADO, T. K. L. do; SAVIAN, T. V.; MUNIZ, J. A. Ajuste dos modelos gompertz e logístico aos dados de crescimento de frutos de coqueiro anão verde. **Ciência Rural**, Santa Maria, v. 43, n. 5, p. 803–809, 2013.
- PUIATTI, G. A. et al. Análise de agrupamento em seleção de modelos de regressão não lineares para descrever o acúmulo de matéria seca em plantas de alho. **Revista Brasileira de Biometria**, v. 31, p. 337–351, 2013.
- R Core Team. **R: A Language and Environment for Statistical Computing**. Vienna, Austria, 2017. Disponível em: <<https://www.R-project.org/>>.
- RASEIRA, M. C. B.; FRANZON, R. C. Melhoramento genético e cultivares de amora-preta e mirtilo. **Informe Agropecuário**, Belo Horizonte, v. 33, n. 268, p. 11–20, 2012.
- REGAZZI, A. J.; SILVA, C. H. O. Teste para verificar a igualdade de parâmetros e a identidade de modelos de regressão não-linear. i. dados no delineamento inteiramente casualizado. **Revista Ceres**, Viçosa, v. 57, n. 3, p. 315–320, 2010.
- SALLUM NETO, F.; CARVALHO, L. R. d.; MISCHAN, M. M. Ajustes de modelos não lineares a dados de crescimento com estrutura de erros independentes e autoregressivos de primeira ordem-aplicações. **Revista Brasileira de Biometria**, Jaboticabal, v. 31, n. 4, p. 631–644, 2013.
- SCHABENBERGER, O.; PIERCE, F. J. **Contemporary Statistical Models for the Plant and Soil Sciences**. Boca Raton: CRC, 2002. 753p.
- SCHWARZ, G. et al. Estimating the dimension of a model. **The annals of statistics**, Beachwood, v. 6, n. 2, p. 461–464, 1978.
- SHAPIRO, S. S.; WILK, M. B. An analysis of variance test for normality (complete samples). **Biometrika**, Cambridge, v. 52, n. 3-4, p. 591–611, 1965.
- SILVA, D. F. P. et al. Growth curve and respiratory pattern of genotypes of peach fruit in subtropical region. **Revista Brasileira de Fruticultura**, Jaboticabal, v. 35, n. 2, p. 642–649, 2013.
- SILVEIRA, S. **Modelagem não linear com erros correlacionados da frequência cardíaca com cargas crescentes de trabalho**. 2013. 59 p. Dissertação (Mestrado em Estatística e Experimentação Agropecuária) — Universidade Federal de Lavras, Lavras, 2013.
- SOUSA, I. F. et al. Ajuste de modelos não lineares autorregressivos na descrição da germinação de sementes de café. **Ciência Rural**, Santa Maria, v. 44, n. 11, p. 2016–2021, 2014.
- TADEU, M. H. et al. Poda drástica de verão e produção de cultivares de amoreira-preta em região subtropical. **Pesquisa Agropecuária Brasileira**, Brasília, v. 50, n. 2, p. 132–140, 2015.

TSOULARIS, A.; WALLACE, J. Analysis of logistic growth models. **Mathematical biosciences**, Chicago, v. 179, n. 1, p. 21–55, 2002.

ANEXO A –

```
#limpando a memória do R
rm(list=ls())

#instalando os pacotes
install.packages("nlme")
install.packages("car")
install.packages("lmtest")
install.packages("qpcR")
install.packages("manipulate")
install.packages("lattice")

#carregando os pacotes
library(nlme)    ## Precisa caso queira usar a gnl
library(car)    ## Precisa para o teste de Durbin-Watson
library(lmtest) ## Precisa para o teste de Breush-Pagan
library(qpcR)   ## Precisa para calcular o R2_ajustado direto

#Pacotes para achar os valores iniciais
library(manipulate)
library(lattice)

##Todas as análises para o comprimento da variável CHOCTAW#####
#Entrando com os dados
setwd("F:\\UFLA\\QUALIFICAÇÃO1\\analises\\choctaw")
dados = read.csv("dados.csv", h=T, sep=";", dec = ".")
head(dados)
attach(dados)
```

```

##Como foi obtido os valores iniciais pelo pacote manipulate

idade<-tempo
comp<-comp

### Logístico ####

nlsajust <- function(panel){
n0 <- try(nls(comp~a1/(1+exp(k1*(b1-tempo)))+(a2-a1)/
(1+exp(k2*(b2-tempo))), start=start))
#mensagem de erro
  if(class(n0)=="try-error"){
    par(usr=c(0, 1, 0,1))
    text(0.5, 0.5, "Não convergiu!\nAproxime mais.", col="red", cex=2)
  } else {
    with(as.list(coef(n0)), curve(a1/(1+exp(k1*(b1-x)))+
((a2-a1)/(1+exp(k2*(b2-x))))), add=TRUE, col=2))
    aju[[i]] <- n0
  }
  panel
}

vg <- function(panel){
  start <- panel[c("a1", "a2", "b1", "b2", "k1", "k2")]
  plot(idade, comp)
  with(start, curve(a1/(1+exp(k1*(b1-x)))+(a2-a1)/(1+exp(k2*(b2-x))),
  add=TRUE, col=2, lty=2))
  panel
}

par(mar=c(4.1,4.2,3.1,1))

```



```

da <- c(); start <- list(); aju <- list(); i <- c()
panel <- rp.control()
rp.slider(panel, a1, 8, 15, initval=12, showvalue=TRUE, action=vg)
rp.slider(panel, b1, 0, 10, initval=5, showvalue=TRUE, action=vg)
rp.slider(panel, k1, 0, 1, initval=0.2, showvalue=TRUE, action=vg)
rp.slider(panel, a2, 0, 25, initval=15, showvalue=TRUE, action=vg)
rp.slider(panel, b2, 0, 40, initval=25, showvalue=TRUE, action=vg)
rp.slider(panel, k2, 0, 1, initval=0.2, showvalue=TRUE, action=vg)
rp.button(panel, action=nlsajust, title="Ajustar")

start

#SIGMOIDAL DUPLO COMPRIMENTO
start=c(a1=11.4,k1=0.18,b1=5.72,a2=14.47,k2=0.27,b2=28.5)
logis22=nls(comp~a1/(1+exp(k1*(b1-tempo)))+(a2-a1)/(1+exp(k2*(b2-tempo))),
            start=start)
summary(logis22)

confint.default(logis22)

# NORMALIDADE
shapiro.test(residuals(logis22))
# INDEPENDÊNCIA
MG1=attr(logis22$m$fitted(),"gradient")
mlg1=lm(diam~-1+MG1, data=dados)
durbinWatsonTest(mlg1)
# HOMOCEASTICIDADE
bptest(mlg1)

#Calculando AIC e BIC
AIC(logis22)

```

```
BIC(logis22)
#Calculando o R2 e R2aj dos modelos
Rsq(logis22)
Rsq.ad(logis22)

#Gráfico com os intervalos de confiança

#GRAFICO
SQR = sum((comp-fitted(logis22))^2)
yest = fitted(logis22)
ep = SQR/(length(comp)-6) # aqui é menos 6, pois são 6 parâmetros o modelo.
#INTERVALOR DE CONFIANÇA
LS = yest+qt(0.975,7)*ep
LI = yest-qt(0.975,7)*ep
plot(tempo,comp,pch=16, xlab="Dias após a antese",
      ylab="Comprimento (mm)",ylim=c(4,15),xlim=c(2,38))
lines(tempo,fitted(logis22),col="green")
lines(tempo,LS,col="red",lty=3)
lines(tempo,LI,col="red",lty=3)
legend(25,6,c("IC","Duplo Logístico"),lty=c(2,1),col=c("red","green"),cex=0.75)
```