

**OBTENÇÃO DAS SOMAS DE QUADRADOS  
TIPO I, II E III EM EXPERIMENTOS EM  
PARCELAS SUBDIVIDIDAS COM  
TESTEMUNHAS NA PARCELA**

**JANAINA RIBEIRO COSTA**

1999

**JANAINA RIBEIRO COSTA**

**OBTENÇÃO DAS SOMAS DE QUADRADOS TIPO I, II  
E III EM EXPERIMENTOS EM PARCELAS  
SUBDIVIDIDAS COM TESTEMUNHAS NA PARCELA**

Dissertação apresentada à Universidade Federal de Lavras, como parte das exigências do Curso de Mestrado em Agronomia, área de concentração em Estatística e Experimentação Agropecuária, para obtenção do título de "Mestre".

Orientador

Prof. Dr. Joel Augusto Muniz

LAVRAS

MINAS GERAIS - BRASIL

1999

**Ficha Catalográfica Preparada pela Divisão de Processos Técnicos da  
Biblioteca Central da UFLA**

Costa, Janaina Ribeiro

Obtenção das somas de quadrados tipo I, II e III em experimentos em parcelas  
Subdivididas com testemunhas na parcela / Janaina Ribeiro Costa. – Lavras :  
UFLA, 1999.

117 p. : il.

Orientador: Joel Augusto Muniz.

Dissertação (Mestrado) – UFLA.

Bibliografia.

1. Parcela subdividida. 2. Testemunha. 3. Tipo de soma de quadrado. 4.  
Redução. 5. Análise de variância. 6. Inversa de Searle. I. Universidade Federal de  
Lavras. II. Título.

CDD-630.219

-311.2

-519.538

**JANAINA RIBEIRO COSTA**

**OBTENÇÃO DAS SOMAS DE QUADRADOS TIPO I, II E III EM  
EXPERIMENTOS EM PARCELAS SUBDIVIDIDAS COM  
TESTEMUNHAS NA PARCELA**

Dissertação apresentada à Universidade Federal de Lavras, como parte das exigências do Curso de Mestrado em Agronomia, área de concentração em Estatística e Experimentação Agropecuária, para obtenção do título de "Mestre".

Aprovada em 19 de fevereiro de 1999

Prof. Dr. Augusto Ramalho de Moraes

UFLA

Prof. Dr. Daniel Furtado Ferreira

UFLA

Prof. Dr. Ruben Delly Veiga

UFLA



Prof. Dr. Joel Augusto Muniz

UFLA

(Orientador)

LAVRAS

MINAS GERAIS - BRASIL

## **DEDICATÓRIA**

**À minha mãe pela paciência, incentivo e dedicação durante todos os momentos de minha vida.**

**Ao meu pai que, mesmo ausente, tenho certeza de que sempre olhou por mim.**

**A DEUS, que me iluminou para cumprir mais essa tarefa.**

**Aos meus familiares e amigos, sempre presentes nas horas difíceis e de alegria.**

**Obrigado é pouco para agradecer tamanho incentivo!**

## **AGRADECIMENTOS**

Ao meu orientador Prof. Dr. Joel Augusto Muniz, pela orientação, dedicação, incentivo e amizade.

À Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (CAPES), pela concessão de bolsas de estudos.

Aos professores do Departamento de Ciências Exatas da UFLA, Luiz Henrique, Augusto, Daniel, Eduardo, Júlio, Agostinho, Paulo César, Thelma e Lucas, pelos ensinamentos durante o curso.

Às funcionárias do departamento, Edila, Cláudia, Maria, Ivone e Renata, pela amizade.

Aos meus colegas, Dileta, Marcelo, Telde e Hugo, pelo companheirismo.

À UFLA, pelos seus ensinamentos e pela minha formação.

A todos que, direta ou indiretamente, contribuíram para que esse trabalho fosse realizado.

## SUMÁRIO

	Página
<b>RESUMO</b> .....	i
<b>ABSTRACT</b> .....	ii
<b>1 INTRODUÇÃO</b> .....	1
<b>2 REFERENCIAL TEÓRICO</b> .....	4
2.1 Experimentos em parcelas subdivididas.....	4
2.2 Análise de variância.....	14
2.2.1 A notação $R(\cdot)$ .....	14
2.2.2 Somas de quadrados tipo I, II, III e IV.....	20
2.2.3 Somas de quadrados e análise segundo Regazzi (1984).....	24
<b>3 MATERIAL E MÉTODOS</b> .....	30
3.1 Material.....	30
3.2 Métodos.....	32
3.2.1 Caracterização.....	32
3.2.2 Modelo linear.....	32
3.2.3 Equações normais.....	34
3.2.4 Reduções $R(\cdot)$ .....	43
3.2.4.1 Modelos utilizados na obtenção das SQ's tipo I com suas respectivas reduções, equações normais e soluções.....	44
3.2.4.2 Modelos utilizados na obtenção das SQ's tipo II com suas respectivas reduções, equações normais e soluções.....	46
3.2.4.3 Modelos utilizados na obtenção das SQ's tipo III com suas respectivas reduções, equações normais e soluções.....	48

3.2.5 Somas de quadrados tipo II e III para grupo 1( $G_1$ ) e grupo 1 versus grupo 2 ( $G_1$ vs $G_2$ ) .....	53
3.2.5.1 Somas de quadrados tipo II.....	53
3.2.5.2 Somas de quadrados tipo III.....	57
3.2.6 Análise usando R(.) e o processo da inversa de partes da inversa de Searle (1971) .....	59
3.2.7 Somas de quadrados tipo I, II e III obtidas pelo SAS.....	61
<b>4 RESULTADOS E DISCUSSÃO.....</b>	<b>62</b>
4.1 Reduções.....	62
4.1.1 Reduções utilizadas na obtenção das somas de quadrados tipo I.....	62
4.1.2 Reduções utilizadas na obtenção das somas de quadrados tipo II.....	63
4.1.3 Reduções utilizadas na obtenção das somas de quadrados tipo III.....	64
4.2 Somas de quadrados através da notação R(.) ou usando o processo da inversa de partes da inversa de Searle (1971) .....	64
4.2.1 Somas de quadrados tipo I.....	65
4.2.2 Somas de quadrados tipo II.....	66
4.2.3 Somas de quadrados tipo III.....	69
4.2.4 Comparação dos resultados dos três tipos de somas de quadrados.....	72
4.3 Somas de quadrados tipo I, II e III obtidas pelo SAS.....	73
4.4 Somas de quadrados conforme expressões de Regazzi (1984) .....	74
4.4.1 Análise de variância de acordo com Regazzi (1984) .....	79
<b>5 CONCLUSÕES.....</b>	<b>81</b>
<b>6 REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS.....</b>	<b>82</b>
<b>ANEXOS.....</b>	<b>86</b>



## RESUMO

**COSTA, Janaina Ribeiro. Obtenção das somas de quadrados tipo I, II e III em experimentos em parcelas subdivididas com uma testemunha na parcela. Lavras: UFLA, 1999. 108 p. (Dissertação - Mestrado em Estatística e Experimentação Agropecuária - Agronomia).\***

Com o objetivo de obter as somas de quadrados tipo I, tipo II e tipo III adequadas para as diversas causas de variação dos experimentos em blocos casualizados em esquema de parcelas subdivididas com uma testemunha nas parcelas de cada bloco, através do uso da notação R(.) e do software MATLAB, foi avaliado o comprimento do fruto central da terceira penca da bananeira cultivar Prata anã, testando-se nas parcelas lâminas d'água correspondentes a 40%, 60%, 80% e 100% mais um tratamento sem irrigação (testemunha) e nas subparcelas testou-se porcentagens de áreas de umedecimento correspondentes a uma e duas linhas de irrigação (16,6% e 33,2% de área umedecida). Os resultados foram comparados com aqueles obtidos pela metodologia de Regazzi (1984), sendo que as somas de quadrados tipos I e III, com exceção da soma de quadrados de blocos, foram equivalentes as obtidas pelas expressões propostas por esse autor, havendo diferença nas somas de quadrados tipo II de algumas causas de variação. Os resultados para os três tipos de somas de quadrados corresponderam àqueles fornecidos pelo SAS, com exceção da soma de quadrados tipo III para tratamentos principais.

---

\*Comitê Orientador: Joel Augusto Muniz - UFLA (Orientador), Augusto Ramalho de Moraes - UFLA e Daniel Furtado Ferreira - UFLA.

## ABSTRACT

**COSTA, Janaina Ribeiro. Obtainment of type I, II and III sums of squares in split-plot experiments with a check in the plot. Lavras: UFLA, 1999. 108 p. (Dissertation - Master in Statistics and Agricultural Experimentation - Agronomy).\***

With a view to obtaining the type I, type II and type III sums of squares suitable for the several causes of variation of the randomized block experiments in split-plot scheme with a check in the plots of each block, through the use of the notation  $R(.)$  and the MATLAB software, the length of the central fruit in the third bunch of the banana tree cultivar Prata anã was evaluated by testing, in the plots, water levels corresponding to 40%, 60%, 80% e 100% plus one treatment without irrigation (check). In the subplots, percentages of wetting areas corresponding to one and two irrigation lines (16,6% and 33,2% of wetted area) were tested. The results were compared with those obtained by Regazzi's methodology (1984), being that the type I and III sums of squares, apart from the block sums of squares, were equivalent to those obtained by the expression proposed by that author, there being a difference in the type II sums of squares of some causes of variation. The results for the three types of sums of squares corresponded to those provided by SAS, with exception of the type III sum of squares for chief treatments.

---

\*Guidance Committee: Joel Augusto Muniz - UFLA (Major Professor), Augusto Ramalho de Morais - UFLA and Daniel Furtado Ferreira - UFLA.

# 1 INTRODUÇÃO

Nos experimentos fatoriais, todas as combinações de tratamentos são distribuídas nas unidades experimentais, seguindo a casualização característica de um delineamento inteiramente casualizado, em blocos ao acaso, ou em quadrado latino. Entretanto, outros tipos de casualização são possíveis e uma dessas alternativas leva ao esquema experimental em parcelas subdivididas, que se caracteriza como sendo uma variação do experimento fatorial com dois fatores.

A principal característica destes experimentos é que parcelas ou unidades inteiras são divididas em subparcelas ou subunidades. Os tratamentos das parcelas podem ser chamados de primários ( T ) e são dispostos segundo um tipo qualquer de delineamento, sendo mais usados os de blocos casualizados, e os tratamentos secundários ( T ' ) das subparcelas são dispostos aleatoriamente dentro de cada parcela. Assim, cada parcela funciona como um bloco para os tratamentos secundários.

A tendência dos pesquisadores para a disposição dos tratamentos primários em blocos casualizados tem o objetivo de procurar controlar a variabilidade que possa haver no material experimental. A casualização é feita em dois estágios; primeiro casualizam-se os níveis do fator primário nas parcelas de cada bloco; em seguida, casualizam-se os níveis do fator secundário nas subparcelas de cada parcela. No entanto, se por um lado os blocos casualizados são recomendáveis, por outro eles podem trazer dificuldades de instalação, quando num ensaio em parcelas subdivididas, o fator primário exigir área extensa, pois pode haver perda de homogeneidade do material experimental dentro do bloco.

Os experimentos em parcelas subdivididas apresentam uma grande

utilidade na pesquisa agropecuária, além de outras diversas áreas, apesar de haver uma redução do número de graus de liberdade do resíduo, comparativamente ao esquema fatorial, redução esta decorrente da existência de dois resíduos, o resíduo (a) referente às parcelas e o resíduo (b), correspondente às subparcelas dentro das parcelas.

Tais experimentos são úteis em situações como: a) quando os níveis de um ou mais dos fatores exigem grandes quantidades de material experimental (por exemplo, níveis de irrigação); b) quando informações prévias asseguram que as diferenças entre os níveis de um dos fatores são maiores que as do outro fator; c) quando se deseja maior precisão para comparações entre níveis de um dos fatores; d) quando existe um fator de maior importância e outro de importância secundária, sendo este incluído para aumentar a extensão dos resultados e e) nas situações práticas, onde é difícil a instalação do experimento no esquema fatorial.

Existem situações em que o pesquisador, por alguma razão, é levado a realizar um experimento em parcelas subdivididas, onde alguns dos tratamentos das parcelas ( T ) não apresentam tratamentos das subparcelas ( T ' ); ou seja, usando testemunhas, dificultando, assim, a análise estatística e complicando relativamente algumas comparações entre combinações de tratamentos. Isto acontece, por exemplo, no caso de irrigação, quando os tratamentos das parcelas são lâminas de irrigação, estando em estudo também a testemunha, representada pela ausência de irrigação. Os níveis dos fatores das subparcelas podem ser linhas de irrigação, que não aparecem na testemunha.

Figueiredo (1998) utiliza, em seu estudo, um esquema de parcelas subdivididas onde comparou-se, nas parcelas, quatro lâminas de irrigação e uma testemunha, e nas subparcelas, uma e duas linhas de gotejadores.

O objetivo do presente trabalho foi desenvolver um estudo através do

software MATLAB- Matrix Laboratory (Matlab,1994), utilizando a notação  $R(\cdot)$ , de tal forma a obter as somas de quadrados tipo I, II e III adequadas para as diversas causas de variação dos experimentos em parcelas subdivididas com uma testemunha na parcela, procurando-se comparar os resultados com aqueles obtidos pela metodologia apresentada por Regazzi (1984).

## 2 REFERENCIAL TEÓRICO

### 2.1 Experimentos em parcelas subdivididas

Segundo Leonard e Clark (1939), os ensaios em parcelas subdivididas foram introduzidos por Yates, em 1933.

O esquema do experimento em parcelas subdivididas é apresentado, dentre outros, por Kempthorne (1952), Anderson e Bancroft (1952), Cochran e Cox (1976), Steel e Torrie (1980), como sendo uma variação do experimento fatorial em  $T$  e  $T'$  tratamentos, onde os tratamentos das parcelas são dispostos em qualquer tipo de delineamento, sendo os mais usados os em blocos casualizados, e os tratamentos  $T'$  das subparcelas, dispostos ao acaso dentro de cada parcela.

Cochran e Cox (1976) apresentam várias considerações sobre o experimento em parcelas subdivididas, e mostram ser vantajoso o seu uso, se os efeitos de  $T'$  e da interação  $T \times T'$  são de maior interesse que os efeitos de  $T$ . Afirmam ainda que o aumento da precisão de  $T'$  se obtém mediante a redução da precisão de  $T$ .

Leal (1979) enfoca o uso dos experimentos em parcelas subdivididas, na análise dos ensaios com medidas repetidas sobre unidades experimentais, como uma alternativa para o uso da análise multivariada, quando se constata a uniformidade da matriz de variâncias e covariâncias. Sob esse prisma, concorda com Calzada Benza (1970) e Little e Hills (1972), Steel e Torrie (1980), que argumentam que os experimentos onde observações sucessivas são feitas sob a mesma unidade experimental, durante um certo período de tempo, em muitos

aspectos se assemelham a experimentos em parcelas subdivididas, nos quais cada unidade experimental é dividida em subunidades distintas.

Segundo Cochran e Cox (1976), na análise estatística dos experimentos em parcelas subdivididas, deve ser considerado o fato de que as observações das diferentes subparcelas de uma mesma parcela podem estar correlacionadas. Para ressaltar sua colocação, exemplificam, alegando que, em experimentos de campo, essa correlação pode ser motivada pela proximidade das plantas, que nessas condições tendem a ser similares em suas propriedades agronômicas.

No que se refere à eficiência dos testes para tratamentos primários e secundários, Taylor (1950), Kempthorne (1952), Federer (1955) e Pimentel Gomes (1990), dentre outros, são unânimes em afirmar a maior precisão existente no teste de tratamentos secundários.

De acordo com Vieira e Hoffmann (1989), nos experimentos em esquema de parcelas subdivididas, o valor do teste F para os tratamentos da parcela ( T ) é obtido dividindo-se o quadrado médio respectivo pelo quadrado médio do resíduo (a), indicado por QMR (a); enquanto os valores do teste F para os tratamentos da subparcela ( T ' ) e da interação T x T ' , obtêm-se dividindo cada quadrado médio pelo quadrado médio do resíduo (b). Em geral, tem-se que  $QMR(b) < QMR(a)$ , de modo que os efeitos dos tratamentos das subparcelas são determinados com maior precisão do que os efeitos dos tratamentos das parcelas.

Condé (1974) fez um estudo dos componentes de variância nos experimentos em parcelas subdivididas, cujo esquema de análise de variância com as esperanças dos quadrados médios está apresentado na Tabela 1.

**TABELA 1.** Esquema da análise de variância com as esperanças dos quadrados médios, de um experimento em parcelas subdivididas em blocos casualizados, segundo Condé (1974)

CAUSAS DE VARIACÃO	G.L.	ESPERANÇA DOS QUADRADOS MÉDIOS (*)
Blocos	$J - 1$	$\sigma^2 + K \sigma_{\delta}^2 + f_1(\theta)$
Tratamentos primários ( T )	$I - 1$	$\sigma^2 + K \sigma_{\delta}^2 + f_2(\theta)$
Resíduo (a)	$(I - 1)(J - 1)$	$\sigma^2 + K \sigma_{\delta}^2$
Tratamentos secundários ( T ' )	$K - 1$	$\sigma^2 + f_3(\theta)$
T x T '	$(I - 1)(K - 1)$	$\sigma^2 + f_4(\theta)$
Resíduo (b)	$I(J - 1)(K - 1)$	$\sigma^2$
Total	$IJK - 1$	

(\*)

$$\cdot f_1(\theta) = IK \sum_j b_j^2 / (J - 1),$$

$$\cdot f_2(\theta) = JK \sum_i t_i^2 / (I - 1),$$

$$\cdot f_3(\theta) = IJ \sum_k t_k'^2 / (K - 1),$$

$$\cdot f_4(\theta) = J \sum_{ik} (tt')_{ik}^2 / (I - 1)(K - 1),$$

sendo:

I : número de tratamentos primários ( T );

J : número de blocos;

K : número de tratamentos secundários ( T ' );

$\sigma_{\delta}^2$  : variância associada ao efeito residual das parcelas;

$\sigma^2$  : variância associada ao efeito residual das subparcelas;

$f_i(\theta)$  : refere-se às formas quadráticas.



As hipóteses preliminares de interesse, em ensaios com parcelas subdivididas segundo Condé (1974), Lemma (1981), entre outros, são:

- $H_0(1) : t_i = 0$  ,  $i = 1, 2, \dots, I$  tratamentos primários;
- $H_0(2) : t'_k = 0$  ,  $k = 1, 2, \dots, K$  tratamentos secundários;
- $H_0(3) : tt'_{ik} = 0$  .

Para Condé (1974), os resíduos apropriados para testar essas hipóteses são evidentes quando se observam as esperanças dos quadrados médios apresentados no Tabela 1.

Se as hipóteses de nulidade  $H_0(1)$  e ou  $H_0(2)$  forem rejeitadas, conclui-se que pelo menos um efeito é estatisticamente diferente de zero sob restrição paramétrica. Nesse caso, torna-se recomendável a utilização de algum dos métodos de comparações múltiplas, como os de Tukey, Duncan, Scheffé, ou outros, quando os níveis do fator em estudo forem qualitativos e regressão, quando estes forem quantitativos.

Segundo Leal (1979) e Pimentel Gomes (1990) , dentre outros, quando a interação  $T \times T'$  é significativa, o esquema da análise de variância deve ser modificado, pois este fato pode ser um indício de que os tratamentos secundários comportam-se de modo diferente em relação aos tratamentos primários, ou vice-versa. Assim, recomendam que seja estudado o efeito dos tratamentos secundários dentro de cada tratamento primário, isoladamente.

Sob esse aspecto, se  $H_0(3)$  resulta significativa, então  $H_0(2)$  e  $H_0(3)$  conjuntamente podem ser decompostas em  $I$  subhipóteses do tipo:

- $H'_0(1): t' / t_1 = 0,$
- $H'_0(2): t' / t_2 = 0,$
- ⋮
- $H'_0(I): t' / t_I = 0,$

com o seguinte critério para os respectivos testes, conforme apresentado na Tabela 2.

**TABELA 2.** Graus de liberdade e expressões para cálculo da estatística F para os testes das  $I$  subhipóteses que estudam tratamentos secundários dentro de cada tratamento primário

SUBHIPÓTESES	G.L.	F (OBSERVADO)
$H'_0(1)$	$(K - 1) ; [I (J - 1) (K - 1)]$	$(QMT' / T_1) / QMR (b)$
$H'_0(2)$	$(K - 1) ; [I (J - 1) (K - 1)]$	$(QMT' / T_2) / QMR (b)$
⋮	⋮	⋮
$H'_0(I)$	$(K - 1) ; [I (J - 1) (K - 1)]$	$(QMT' / T_I) / QMR (b)$

sendo

$$• SQT' / T_i = \frac{1}{J} \left[ \sum_{k=1}^K y_{i.k}^2 - \frac{(\sum_{k=1}^K y_{i.k})^2}{K} \right];$$

$$• QMT' / T_i = (SQT' / T_i) / (K - 1).$$

A adoção desse procedimento modificaria apenas a parte da análise relativa às subparcelas, cuja decomposição de tratamentos secundários ( T ' ) e interação T x T ' em I subhipóteses podem ser visualizadas na Tabela 3.

**TABELA 3.** Esquema de análise de variância, mostrando a decomposição de tratamentos secundários ( T ' ) e interação T x T ' em I subhipóteses

CAUSAS DE VARIAÇÃO	GRAUS DE LIBERDADE
T' / T <sub>1</sub>	K - 1
T' / T <sub>2</sub>	K - 1
⋮	⋮
T' / T <sub>I</sub>	K - 1
Resíduo (b)	I (J - 1) (K - 1)

Conforme os autores, outra alternativa se H<sub>0</sub>(3) resulta significativa, caso haja interesse, as hipóteses H<sub>0</sub>(1) e H<sub>0</sub>(3), conjuntamente, podem ser decompostas em K subhipóteses do tipo:

- H<sub>0</sub><sup>''</sup>(1): t / t<sub>1</sub>' = 0 ,
- H<sub>0</sub><sup>''</sup>(2): t / t<sub>2</sub>' = 0 ,
- ⋮
- H<sub>0</sub><sup>''</sup>(K): t / t<sub>K</sub>' = 0 .

Para o teste destas  $K$  subhipóteses, no experimento em parcelas subdivididas completo, a estatística F tem como denominador uma combinação linear do resíduo (a) e do resíduo (b), ou seja,

$$QMR_{\text{Res Combinado}} = \frac{1}{K} [QMR(a) + (K - 1)QMR(b)] .$$

Segundo Regazzi (1984), no estudo do experimento em parcelas subdivididas com tratamentos secundários em apenas alguns dos tratamentos primários, o teste é análogo, com algumas considerações. Sabe-se que só existe interação de  $I$  tratamentos primários com os  $K$  tratamentos secundários. Assim, conforme o autor, o resíduo apropriado para os testes das  $K$  subhipóteses é dado por:

$$QMR_{\text{Res}} = \frac{1}{K} [QMR_s(G_1) + (K - 1)QMR(b)] ,$$

sendo que  $QMR_s(G_1)$  refere-se ao quadrado médio do resíduo (a), e é obtido ignorando da análise os  $(L-I)$  tratamentos primários que não possuem tratamentos secundários. Denominou-se grupo 1 ( $G_1$ ) os tratamentos primários que possuem tratamentos secundários.

Assim, o critério para o teste das  $K$  subhipóteses está apresentado na Tabela 4.

**TABELA 4.** Graus de liberdade e expressões para cálculo da estatística F para os testes das K subhipóteses que estudam tratamentos primários dentro de cada tratamento secundário

SUBHIPÓTESES	G.L.	F (OBSERVADO)
$H_o^-(1)$	$(I - 1) ; n^*$	$(QMT / T'_1) / QMRes$
$H_o^-(2)$	$(I - 1) ; n^*$	$(QMT / T'_2) / QMRes$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$H_o^-(K)$	$(I - 1) ; n^*$	$(QMT / T'_K) / QMRes$

sendo  $n^*$  o número de graus de liberdade obtido pela aproximação proposta por Satterthwaite (1946), cujo estimador é dado por:

$$n^* = \frac{[QMR_a(G_1) + (K - 1)QMR(b)]^2}{\frac{[QMR_a(G_1)]^2}{(I - 1)(J - 1)} + \frac{[(K - 1)QMR(b)]^2}{I(J - 1)(K - 1)}}$$

e,

$$\bullet \quad SQT / T'_k = \frac{1}{J} \left[ \sum_{i=1}^I y_{i,k}^2 - \frac{(\sum_{i=1}^I y_{i,k})^2}{I} \right];$$

$$\bullet \quad QMT / T'_k = (SQT / T'_k) / (I - 1).$$

Assim, com a adoção desse procedimento, tem-se a decomposição das causas de variação de tratamentos secundários  $T'$  e interação  $T \times T'$  em  $K$  subhipóteses apresentadas na Tabela 5.

**TABELA 5.** Esquema de análise de variância, mostrando a decomposição de tratamentos primários ( $T$ ) e interação  $T \times T'$  em  $K$  subhipóteses

CAUSAS DE VARIAÇÃO	GRAUS DE LIBERDADE
$T/T'_1$	$I - 1$
$T/T'_2$	$I - 1$
$\vdots$	$\vdots$
$T/T'_K$	$I - 1$
Resíduo	$n^*$

De acordo com Regazzi (1984), com exceção do teste para blocos, os resíduos adequados para os testes das hipóteses básicas ficam evidentes quando se observa a coluna relativa às esperanças dos quadrados médios, no esquema de análise de variância, em experimentos em parcelas subdivididas envolvendo testemunhas, conforme apresentado na Tabela 6.

**TABELA 6.** Esquema da análise de variância com as causas de variação, graus de liberdade e esperanças dos quadrados médios de um experimento em parcelas subdivididas com tratamentos secundários em apenas alguns dos tratamentos primários

CAUSAS DE VARIACÃO	G.L.	E [ Q.M. ]*
Blocos	J - 1	$\sigma^2 + K_1 \sigma_\delta^2 + f_1(\theta)$
Tratamentos primários ( T )	L - 1	$\sigma^2 + K_2 \sigma_\delta^2 + f_2(\theta)$
Resíduo (a)	(J - 1) (L - 1)	$\sigma^2 + K_2 \sigma_\delta^2$
Parcelas	L J - 1	
Tratamentos secundários ( T ' )	K - 1	$\sigma^2 + f_3(\theta)$
T x T '	(I - 1) (K - 1)	$\sigma^2 + f_4(\theta)$
Resíduo (b)	I (J - 1) (K - 1)	$\sigma^2$
Total	IJK + (L - I) J - 1	

(\*)

$$\cdot f_1(\theta) = \frac{(IK + L - I)}{(J - 1)} \sum_{j=1}^J b_j^2, \quad \cdot K_1 = \frac{IK^2 + L - I}{IK + L - I},$$

$$\cdot f_2(\theta) = \frac{J}{(L - 1)} \sum_{i=1}^L s_i t_i^2, \quad \cdot K_2 = \frac{(IK + L - I)^2 - (IK^2 + L - I)}{(L - 1)(IK + L - I)},$$

$$\cdot f_3(\theta) = \frac{IJ}{(K - 1)} \sum_{k=1}^K t_k^2,$$

$$\cdot f_4(\theta) = \frac{J}{(I - 1)(K - 1)} \sum_{i,k=1}^{IK} (tt')_{ik}^2,$$

sendo:

J : número total de blocos;

L : número de tratamentos primários ( T );

K : número de tratamentos secundários ( T ' );

I : número de tratamentos primários que possuem tratamentos secundários com  $I < L$ . Caso exista uma testemunha nos tratamentos primários,  $L = I+1$ .

## 2.2 Análise de variância

### 2.2.1 A notação R(.)

Segundo Searle (1971), o estudo de modelos mais complexos do que os de classificação simples, que envolvem apenas a média, um fator e o erro experimental, permite comparar a adequação destes modelos para o mesmo conjunto de dados. Visto que na identidade

$$SQ_{\text{Erro}} = SQ_{\text{Total}} - SQR$$

tem-se SQR como a redução na soma de quadrados total, devida ao ajuste de algum modelo em particular; SQR é uma medida da variação em  $y$ , explicada por esse modelo.

A comparação de diversos modelos que se ajustam a um determinado



conjunto de dados pode ser feita comparando-se os diferentes valores das SQR que resultam do ajuste destes modelos.

Para facilitar a discussão das comparações, o autor considera SQR como uma redução na soma de quadrados total, que é simbolizada por  $R(\cdot)$ , com os conteúdos dos parêntesis indicando o modelo ajustado. Assim, ao ajustar

$$y_{ij} = \mu + \alpha_i + e_{ij} ,$$

a redução na soma de quadrados total devida aos parâmetros  $\mu$  e  $\alpha_i$  é  $R(\mu, \alpha)$ , indicando, no modelo, que houve um ajuste, considerando os parâmetros  $\mu$  e  $\alpha$ . Similarmente,  $R(\mu, \alpha, \beta)$  é a redução na soma de quadrados total para ajustar os parâmetros do modelo

$$y_{ijk} = \mu + \alpha_i + \beta_j + e_{ijk} .$$

e  $R(\mu, \alpha, \beta : \alpha)$  é a redução devida aos parâmetros, no ajuste do modelo hierárquico

$$y_{ijk} = \mu + \alpha_i + \beta_{j/i} + e_{ijk} ,$$

o símbolo  $\beta : \alpha$  na  $R(\mu, \alpha, \beta : \alpha)$  indicando que o fator  $\beta$  está aninhado dentro do fator  $\alpha$ . A extensão para modelos mais complexos é clara, e todas as vezes a letra R é mencionada para “redução” na soma de quadrados e não para “residual”, como usado por alguns autores.

Para o modelo

$$y_i = \mu + e_i ,$$

tem-se a equação normal  $N\mu = y. ,$  e a redução correspondente na soma de

quadrados,  $R(\mu)$ , é interpretada como sendo  $N\bar{y}^2 = \frac{(\sum y_i)^2}{N}$ . Mas  $N\bar{y}^2$  é, para todos os modelos, a soma de quadrados da correção (SQC). Portanto,

$$R(\mu) = N\bar{y}^2 = \text{SQC}.$$

Com o modelo de classificação simples

$$y_{ij} = \mu + \alpha_i + e_{ij} ,$$

a redução na soma de quadrados  $R(\mu, \alpha)$  é

$$\text{SQR} \equiv R(\mu, \alpha) = \sum y_i^2 / n_i ,$$

e conseqüentemente,

$$\text{SQR}_m = \text{SQR} - \text{SQC} = R(\mu, \alpha) - R(\mu)$$

sendo  $\text{SQR}_m$  a diferença entre a redução na soma de quadrados, devida ao ajuste de dois modelos diferentes, um contendo  $\mu$  e um fator  $\alpha$  e o outro contendo

apenas  $\mu$ . Uma interpretação equivalente é que a diferença  $R(\mu, \alpha) - R(\mu)$  é a redução devida ao ajuste de “ $\alpha$  já tendo ajustado  $\mu$ ”, ou ao ajuste de  $\alpha$  após  $\mu$ . Em vista disso, usa-se o símbolo  $R(\alpha / \mu)$  para essa diferença. Logo,

$$R(\alpha / \mu) = R(\mu, \alpha) - R(\mu).$$

A notação  $R(\cdot)$  admite extensões, como por exemplo

$$R(\alpha / \mu, \beta) = R(\mu, \alpha, \beta) - R(\mu, \beta)$$

que representa a redução na soma de quadrados devida ao ajuste de “ $\alpha$ , após  $\mu$  e  $\beta$ ”; isto é, a redução devida ao ajuste de um modelo contendo  $\mu$ , um fator  $\alpha$  e um fator  $\beta$ , tendo já ajustado um modelo contendo  $\mu$  e um fator  $\beta$ . É uma medida do grau no qual um modelo pode explicar mais da variação em  $y$  tendo nele, de maneira específica, algo mais do que apenas  $\mu$  e um fator  $\beta$ .

Todos os termos  $R(\cdot)$  são, por definição, as somas de quadrados de reduções (SQR's) de algum modelo. Sua expressão é portanto da forma

$$y' X(X'X)^{-1} X' y$$

em que  $X$  é a matriz associada ao modelo, sendo  $X(X'X)^{-1} X'$  matriz com propriedades de ser simétrica e idempotente. Portanto, para  $y \sim N(\mu, \sigma^2 I)$  para qualquer vetor  $\mu$ , a distribuição de  $R(\cdot) / \sigma^2$  é uma qui-quadrado ( $\chi^2$ ) não central independente da SQErro.

Supondo que  $R(b_1, b_2)$  seja a redução para ajustar  $y = Xb_1 + Zb_2 + e$ , e que  $R(b_1)$  seja a redução para ajustar  $y = Xb_1 + e$ , então pode-se mostrar que

$R(b_2 / b_1) / \sigma^2$  tem uma distribuição  $\chi^2$  não central, independente da  $R(b_1)$  e da SQErro. Conseqüentemente, sempre que a redução na soma de quadrados  $R(b_1, b_2)$  para ajustar um modelo for desdobrada como  $R(b_1, b_2) = R(b_2 / b_1) + R(b_1)$ , sabe-se que tanto  $R(b_2 / b_1)$  quanto  $R(b_1)$  têm distribuições  $\chi^2$  não centrais e que são independentes uma da outra e da SQErro.

De acordo com Mischan e Pinho (1996), no modelo de parcelas subdivididas

$$y_{ijk} = \mu + \alpha_i + \beta_j + (\alpha\beta)_{ij} + \gamma_k + (\alpha\gamma)_{ik} + e_{ijk}$$

tem-se que  $y_{ijk}$  representa a  $j$ -ésima observação no  $i$ -ésimo nível do fator  $\alpha$  e  $k$ -ésimo nível do fator  $\gamma$ , com  $i = 1, \dots, I$ ;  $k = 1, \dots, K$  e  $j = 1, \dots, J$ .

A soma de quadrados de parâmetros deste modelo pode ser indicada por  $R(\mu, \alpha, \beta, \alpha\beta, \gamma, \alpha\gamma)$  e seu valor é determinado matricialmente por  $\theta' X' y$ .

Assim,

$$R(\mu, \alpha, \beta, \alpha\beta, \gamma, \alpha\gamma) = \theta' X' y = y' X(X'X)^{-1} X' y$$

sendo  $\theta'$  o vetor transposto de soluções das equações normais,  $X'$  a matriz transposta do delineamento do experimento e  $y$  o vetor das observações.

Segundo as autoras, deve-se obter, além de  $R(\mu, \alpha, \beta, \alpha\beta, \gamma, \alpha\gamma)$ , os termos  $R(\mu, \alpha, \beta, \alpha\beta, \gamma)$ ,  $R(\mu, \alpha, \beta, \alpha\beta)$ ,  $R(\mu, \alpha, \beta)$ ,  $R(\mu, \alpha)$  e  $R(\mu)$  para realizar a análise de variância. Estas são as somas de quadrados de parâmetros devidas ao ajuste de um modelo linear, como o representado acima, somente com os parâmetros indicados pela notação  $R(\cdot)$ .

A análise de variância, obtida a partir destas somas de quadrados, está apresentada na Tabela 7.

**TABELA 7.** Esquema de análise de variância de experimentos em parcelas subdivididas, usando a notação R(.)

C. V.	G.L.	S.Q.
Blocos	J - 1	$R(\beta / \mu, \alpha)$
Tratamentos primários ( T )	I - 1	$R(\alpha / \mu)$
Resíduo (a)	(I - 1) (J - 1)	$R(\alpha\beta / \mu, \alpha, \beta)$
Parcelas	I J - 1	Soma
Tratamentos secundários ( T ' )	K - 1	$R(\gamma / \mu, \alpha, \beta, \alpha\beta)$
T x T '	(I - 1) (K - 1)	$R(\alpha\gamma / \mu, \alpha, \beta, \alpha\beta, \gamma)$
Resíduo (b)	I (J - 1) (K - 1)	Diferença
Total	I J K - 1	$y' y - R(\mu)$

As somas de quadrados para as diferentes causas de variação são obtidas através das seguintes expressões :

- SQ Blocos =  $R(\beta / \mu, \alpha) = R(\mu, \alpha, \beta) - R(\mu, \alpha)$  ;
- SQ Tratamentos T =  $R(\alpha / \mu) = R(\mu, \alpha) - R(\mu)$  ;
- SQ Resíduo (a) =  $R(\alpha\beta / \mu, \alpha, \beta) = R(\mu, \alpha, \beta, \alpha\beta) - R(\mu, \alpha, \beta)$  ;
- SQ Tratamento T ' =  $R(\gamma / \mu, \alpha, \beta, \alpha\beta) = R(\mu, \alpha, \beta, \alpha\beta, \gamma) - R(\mu, \alpha, \beta, \alpha\beta)$  ;
- SQ Interação T x T ' =  $R(\alpha\gamma / \mu, \alpha, \beta, \alpha\beta, \gamma) =$   
 $= R(\mu, \alpha, \beta, \alpha\beta, \gamma, \alpha\gamma) - R(\mu, \alpha, \beta, \alpha\beta, \gamma)$  ;
- SQ Total =  $y' y - R(\mu)$  .

### 2.2.2 Somas de quadrados tipo I, II, III e IV

De acordo com Speed e Hocking (1976), Goodnight (1980), os quatro tipos de somas de quadrados (SQ's) são chamados tipo I, tipo II, tipo III e tipo IV.

Conforme Littell, Freund e Spector (1997), as SQ's tipo I, ou seqüenciais, como são freqüentemente denominadas, representam a adição de cada causa de variação, ou seja, de cada fator, seqüencialmente no modelo na ordem listada. Assim sendo, elas são dependentes da ordem dos parâmetros no modelo e, em vista disso, a partição da soma de quadrados do modelo não é única. Cada efeito é ajustado somente para os efeitos precedentes no modelo.

As SQ's tipo I podem não ser úteis para análise de estruturas de classificação múltiplas desbalanceadas, mas podem ser proveitosas para modelos hierárquicos, modelos polinomiais e, é claro, testes envolvendo a homogeneidade dos coeficientes de regressão.

Segundo Searle (1987), a seqüência dos fatores do modelo determina a seqüência das SQ's tipo I, correspondendo precisamente à seqüência da entrada dos fatores, devendo fatores de efeitos principais precederem interações. Fatores que tenham outros hierárquicos a eles devem preceder os fatores hierárquicos. Considerando um modelo com dois fatores e interação, identificados na ordem A, B e A\*B, as SQ's tipo I são  $R(\alpha / \mu)$ ,  $R(\beta / \mu, \alpha)$  e  $R(\alpha\beta / \mu, \alpha, \beta)$ , respeitando a ordem.

As SQ's tipo II para um efeito U, que pode ser um efeito principal ou interação, conforme descrito por Littell, Freund e Spector (1997), é ajustada para um efeito V se e somente se V não contém U. Para classificação dupla, como A, B e A\*B, as SQ's tipo II são  $R(\alpha / \mu, \beta)$ ,  $R(\beta / \mu, \alpha)$  e  $R(\alpha\beta / \mu, \alpha, \beta)$ .

Para Iemma (1994), a notação R(cada fator / todos os outros apropriados) é mais adequada para definir SQ's tipo II, onde "apropriados" significa que esta soma de quadrados é para algum fator ajustado para todos os outros, exceto para interações que envolvem este fator e fatores hierárquicos com este. Assim, uma soma de quadrados tipo II, devida a A, é uma soma de quadrados ajustada para todos os outros fatores e interação, exceto para interações envolvendo A e para fatores hierárquicos com A.

Santos (1994) ressaltou que, enquanto para as SQ's do tipo I tem-se:

$$\begin{aligned} R(\mu) + R(\alpha / \mu) + R(\beta / \mu, \alpha) + R(\alpha\beta / \mu, \alpha, \beta) &= \\ = R(\mu) + R(\beta / \mu) + R(\alpha / \mu, \beta) + R(\alpha\beta / \mu, \alpha, \beta) &= \\ = R(\mu, \alpha, \beta, \alpha\beta) , \end{aligned}$$

para as SQ's do tipo II, isto em geral não ocorre, ou seja,

$$R(\mu) + R(\alpha / \mu) + R(\beta / \mu, \alpha) + R(\alpha\beta / \mu, \alpha, \beta) \neq R(\mu, \alpha, \beta, \alpha\beta) ,$$

devido ao fato de que as SQ's do tipo II nem sempre são provenientes de uma partição ortogonal da soma de quadrados dos parâmetros.

Khattree e Naik (1995) afirmaram que as somas de quadrados tipo III são também uma espécie de somas de quadrados parciais e SQ's tipos II e III não dependem da ordem em que os efeitos principais e interações são listados no modelo estabelecido.

Para Speed e Hocking (1976), Searle (1987), a soma de quadrados tipo III ou parcial refere-se ao ajuste de cada fonte de variação para todos os efeitos remanescentes do modelo, inclusive para interações que envolvem esta fonte de

variação, sob restrição paramétrica do tipo soma dos efeitos igual a zero.

Segundo Veiga e Ferreira (1996), no caso de modelos com dois fatores e interação, a soma de quadrados tipo III devida ao fator A equivale a

$$R(\hat{\alpha} / \hat{\mu}, \hat{\beta}, \hat{\alpha}\beta) \neq R(\alpha / \mu, \beta, \alpha\beta) = 0.$$

De acordo com Littell, Freund e Spector (1997), deve-se ter cuidado em usar a notação redução em modelos de posto completo. Se as restrições não estiverem especificadas no modelo para a estrutura de classificação dupla considerada acima, então  $R(\alpha / \mu, \beta, \alpha\beta) = 0$ , porque as colunas da matriz  $X$ , correspondentes aos  $\alpha_i$ 's, serão linearmente dependentes das colunas correspondentes a  $\mu$  e a  $\alpha\beta_{ij}$ . Se o modelo contém somente os efeitos principais, então as somas de quadrados tipo II e III são as mesmas.

As somas de quadrados tipo III podem ser obtidas, dentre outros, através do método da inversa da parte da inversa de Searle (1971), conforme usado por Santos (1994).

Para este autor, as somas de quadrados do tipo I, II, III e IV são derivadas ao se ajustar um modelo e diferentes submodelos. Por outro lado, as SQ's do tipo IV testam hipóteses que são geradas automaticamente pelo GLM do SAS, que podem usualmente ser interpretadas. Contudo, uma interpretação apropriada não pode ser feita sem primeiro examinar as funções estimáveis do tipo IV, para se ver que hipóteses são geradas e testadas. Isto é, não existe uma única interpretação apropriada para todo o conjunto de dados. Se não existem caselas vazias, as somas de quadrados do tipo IV são similares às do tipo III; se, no entanto, existe pelo menos uma casela vazia, então as SQ's dos tipos III e IV



são em geral diferentes e referem-se a diferentes hipóteses, e observa-se ainda que, se isto ocorrer, as somas de quadrados tipo IV podem não ser únicas, uma vez que elas dependem da posição e do número de caselas vazias.

De acordo com Searle (1971) e Santos (1994), os quatro tipos de somas de quadrados podem ser relacionados, como abaixo, nas seguintes situações:

a) Se as amostras são equilibradas tem-se:

$$\text{SQ tipo I} = \text{SQ tipo II} = \text{SQ tipo III} = \text{SQ tipo IV}$$

b) Se todas as caselas são ocupadas tem-se:

$$\text{SQ tipo III} = \text{SQ tipo IV}$$

c) Se o modelo não contém interação tem-se:

$$\text{SQ tipo II} = \text{SQ tipo III} = \text{SQ tipo IV}$$

d) Se o modelo contém interação, e se existe caselas vazias, então

$$\text{SQ tipo III} \neq \text{SQ tipo IV}.$$

Considerando o modelo

$$y_{ijk} = \mu + \alpha_i + \beta_j + \alpha\beta_{ij} + e_{ijk}$$

de classificação dupla com interação e sem caselas vazias, as somas de quadrados tipo I, II, III e IV, para utilização da análise de variância deste modelo, estão sumarizadas na Tabela 8.

**TABELA 8.** Síntese dos quatro tipos de somas de quadrados para um modelo de classificação dupla com interação

Efeito	Tipo I	Tipo II	Tipo III = Tipo IV
A	$R(\alpha / \mu)$	$R(\alpha / \mu, \beta)$	$R(\hat{\alpha} / \hat{\mu}, \hat{\beta}, \alpha \cdot \beta)$
B	$R(\beta / \mu, \alpha)$	$R(\beta / \mu, \alpha)$	$R(\hat{\beta} / \hat{\mu}, \hat{\alpha}, \alpha \cdot \beta)$
A*B	$R(\alpha\beta / \mu, \alpha, \beta)$	$R(\alpha\beta / \mu, \alpha, \beta)$	$R(\alpha \cdot \beta / \hat{\mu}, \hat{\alpha}, \hat{\beta})$

Quando o delineamento for balanceado, no sentido de que cada grupo tem o mesmo número de medidas, ou quando certas condições de ortogonalidade forem encontradas, a análise segundo Searle (1971) é relativamente mais simples, com respeito aos cálculos, bem como às interpretações. Neste caso, para uma dada variável resposta, a partição da soma de quadrados total em várias causas de variação especificadas no modelo é única. Isto infelizmente não ocorre em experimentos desbalanceados. A partição das somas de quadrados não é única, uma vez que depende do modelo utilizado, bem como da especificação de seus vários submodelos e da ordem, nas quais as várias somas de quadrados são extraídas. Neste caso, pode ocorrer que

$$R(\beta / \mu, \alpha) \neq R(\beta / \mu) \text{ e } R(\alpha / \mu, \beta) \neq R(\alpha / \mu).$$

### 2.2.3 Somas de quadrados e análise segundo Regazzi (1984)

A partição da soma de quadrados total, para o modelo de parcelas

subdivididas

$$y_{ijk} = \mu + \alpha_i + \beta_j + (\alpha\beta)_{ij} + \gamma_k + (\alpha\gamma)_{ik} + e_{ijk}$$

adotado por Regazzi (1984), é dada por:

$$\text{SQTotal} = \text{SQBlocos} + \text{SQTratamentos T} + \text{SQResíduo (a)} + \\ + \text{SQTratamentos T'} + \text{SQ(T x T')} + \text{SQResíduo (b)}.$$

Segundo o autor, as expressões das somas de quadrados para as diversas causas de variação dos delineamentos em blocos casualizados em esquema de parcelas subdivididas envolvendo testemunhas nas parcelas são:

$$\bullet C = \frac{G^2}{n} = \frac{(\sum_{i=1}^L \sum_{j=1}^J \sum_{k=1}^{s_i} y_{ijk})^2}{n};$$

$$\bullet \text{SQBlocos} = \frac{1}{IK + L - I} \sum_{j=1}^J B_j^2 - C;$$

$$\bullet \text{SQTratamentos T} = \sum_{i=1}^L \frac{T_i^2}{Js_i} - C;$$

$$\bullet \text{SQParcelas} = \sum_{i=1}^L \sum_{j=1}^J \frac{P_{ij}^2}{s_i} - C;$$

• SQResíduo (a) = SQParcelas - SQBlocos - SQTratamentos T ;

$$\bullet \text{ SQTratamentos T}' = \frac{1}{IJ} \sum_{k=1}^K T_k'^2 - C_1 ,$$

$$\text{sendo } C_1 = \frac{(\sum_{i=1}^I \sum_{j=1}^J \sum_{k=1}^K y_{ijk})^2}{IJK} ;$$

$$\bullet \text{ SQ T x T}' = \frac{1}{J} \sum_{i=1}^I \sum_{k=1}^K (TT'_{ik})^2 - C_1 - (\frac{1}{JK} \sum_{i=1}^I T_i^2 - C_1) - \text{SQTratamentos T}' ;$$

$$\bullet \text{ SQTotal Corrigida} = \sum_{i=1}^L \sum_{j=1}^J \sum_{k=1}^{s_i} y_{ijk}^2 - C ;$$

• SQResíduo (b) = SQTotal - SQParcelas - SQTratamentos T' - SQ T x T' ;

com  $i = 1, 2, \dots, I, I+1, I+2, \dots, L;$

$j = 1, 2, \dots, J;$

$k = 1, 2, \dots, s_i;$

em que,  $s_i = K$ , para  $i = 1, 2, \dots, I$  e  $s_i = 1$ , para  $i = I+1, I+2, \dots, L$ ; sendo

$I$  : número de tratamentos primários que possuem tratamentos secundários,

$J$  : número de blocos,

$K$  : número de tratamentos secundários,

$L$  : número total de tratamentos primários,

$L - I$  : número de tratamentos primários que não possuem tratamentos secundários, ou seja, número total de testemunhas,

$n$  :  $J(K + L - I)$  : número total de observações.

Nas expressões das somas de quadrados, têm-se que:

$y_{ijk}$ : é o valor observado da  $k$ -ésima subparcela, na  $i$ -ésima parcela, do  $j$ -ésimo bloco,

$B_j$  : total do  $j$ -ésimo bloco,

$T_i$  : total do  $i$ -ésimo tratamento primário  $T$ ,

$T'_k$  : total do  $k$ -ésimo tratamento secundário  $T'$ ,

$(TT')_{ik}$  : total da interação do  $i$ -ésimo tratamento primário  $T$  com o  $k$ -ésimo tratamento secundário  $T'$ ,

$P_{ij}$  : total da parcela correspondente ao  $i$ -ésimo tratamento primário  $T$  e  $j$ -ésimo bloco,

$C_i$  : correção obtida eliminando-se da análise os  $(L-I)J$  valores do tipo  $y_{ij1}$  para  $i = 1, 2, \dots, I, I+1, I+2, \dots, L$  e  $j = 1, 2, \dots, J$ .

O esquema de análise de variância com as estatísticas  $F$  para as diversas causas de variação envolvidas, no caso de homogeneidade de variâncias residuais, segundo Regazzi (1984), está apresentado na Tabela 9.

**TABELA 9.** Esquema da análise de variância com a decomposição dos tratamentos primários T em  $G_1$  e  $G_1$  vs  $G_2$ , segundo Regazzi (1984)

C.V.	G.L.	S.Q.	Q.M.	F
Blocos	(J-1)	SQBlocos		
$G_1$	(I-1)	SQG <sub>1</sub>	$\frac{SQG_1}{I-1}$	$\frac{QMG_1}{QMRes.(a)}$
Grupos ( $G_1$ vs $G_2$ )	1	SQG <sub>1</sub> x $G_2$	$\frac{SQGrupos}{1}$	$\frac{QMGrupos}{QMRes.(a)}$
(Tratamentos T)	(L-1)	SQT		
Resíduo (a)	(J-1)(L-1)	SQRes.(a)		
<hr/>				
Parcelas	(LJ-1)			
Tratamentos T'	(K-1)	SQT'	$\frac{SQT'}{K-1}$	$\frac{QMT'}{QMRes.(b)}$
Int. $G_1$ x T'	(I-1)(K-1)	SQT x T'	$\frac{SQG_1 \times T'}{(I-1)(K-1)}$	$\frac{QMG_1 \times T'}{QMRes.(b)}$
Resíduo (b)	I(J-1)(K-1)	SQRes.(b)	$\frac{SQRes.(b)}{I(J-1)(K-1)}$	
<hr/>				
Total	IJK+(L-I)J-1	SQTotal		

Considerando-se:

Grupo 1 ( $G_1$ ): tratamentos primários que possuem tratamentos secundários,

Grupo 2 ( $G_2$ ): tratamentos primários que não possuem tratamentos secundários,

tem-se:

$$\cdot \text{SQG}_1 = \frac{1}{JK} \sum_{i=1}^I T_i^2 - C_1,$$

$$\cdot \text{SQG}_1 \text{ vs } G_2 = \sum_{i=1}^L \frac{T_i^2}{J s_i} - C - \text{SQG}_1 = \text{SQTratamentos T} - \text{SQG}_1.$$

### 3. MATERIAL E MÉTODOS

#### 3.1 Material

Os dados utilizados nesse trabalho foram adaptados de Figueiredo (1998) e se referem ao comprimento do fruto central da terceira penca e estão apresentados na Tabela 10, sendo provenientes de um experimento com a cultura da banana (cultivar Prata anã), que foi instalado e conduzido na Universidade Federal de Lavras (UFLA), localizada em Lavras-M.G., visando à comparação de 4 lâminas de irrigação correspondentes a  $T_1 = 40\%$  (12 mm),  $T_2 = 60\%$  (18 mm),  $T_3 = 80\%$  (24 mm) e  $T_4 = 100\%$  (30 mm) da evaporação do tanque classe "A", usando 2 áreas umedecidas ( $T'_1 = 1$  linha e  $T'_2 = 2$  linhas de gotejadores por linha de plantas) e 1 testemunha. O delineamento foi o de blocos casualizados com 4 repetições, no esquema de parcelas subdivididas. Dos 5 tratamentos primários, 4 possuíram tratamentos secundários, e o outro era constituído por uma parcela adicional (testemunha) que não foi irrigada. Os tratamentos das parcelas (lâminas e testemunha) foram sorteados dentro de cada bloco e os das subparcelas (linhas de irrigação) dentro de cada parcela dentro de cada bloco. Cada parcela foi composta de 14 plantas, sendo sete em cada subparcela. Nas subparcelas, foram consideradas cinco plantas úteis para as avaliações previstas. Para uma melhor composição da área plantada, a extremidade do experimento foi completada com plantas que não receberam irrigação, assim como algumas linhas de plantio interna.



**TABELA 10.** Comprimento (cm) do fruto central da terceira penca de banana cultivar Prata anã, no experimento de irrigação, comparando lâminas d'água e linhas de gotejadores

BLOCOS	TRATAMENTOS								
	T <sub>1</sub>		T <sub>2</sub>		T <sub>3</sub>		T <sub>4</sub>		T <sub>5</sub>
	T' <sub>1</sub>	T' <sub>2</sub>	T' <sub>1</sub>	T' <sub>2</sub>	T' <sub>1</sub>	T' <sub>2</sub>	T' <sub>1</sub>	T' <sub>2</sub>	
I	19,00	18,90	19,20	18,10	19,80	20,80	20,70	21,10	16,90
II	17,10	17,60	19,50	20,20	18,30	20,90	21,30	22,70	17,70
III	17,50	14,90	17,50	15,80	19,30	18,60	17,40	21,00	16,40
IV	17,60	18,20	20,20	20,10	19,00	21,70	19,80	19,90	18,60

Tratamentos primários ( T ):

- T<sub>1</sub>- Lâmina de 40%;
- T<sub>2</sub>- Lâmina de 60%;
- T<sub>3</sub>- Lâmina de 80%;
- T<sub>4</sub>- Lâmina de 100%;
- T<sub>5</sub>-Testemunha (sem irrigação).

Tratamentos secundários ( T' ):

- T'<sub>1</sub>- 1 linha de gotejadores;
- T'<sub>2</sub>- 2 linhas de gotejadores.

De acordo com a notação de Regazzi (1984), tem-se:

- J = 4, número total de blocos;
- L = 5, número de tratamentos primários ( T );
- K = 2, número de tratamentos secundários ( T' );
- I = 4, número de tratamentos primários que possuem tratamentos secundários;
- n = J (IK+L-I) = 36, o número total de observações.

Denominou-se, ainda, de grupo 1 (G<sub>1</sub>), o grupo formado pelos tratamentos primários que possuem tratamentos secundários e, de grupo 2 (G<sub>2</sub>), o que não possui esses tratamentos.

## 3.2 Métodos

### 3.2.1 Caracterização

A metodologia aplicada tem por finalidade a obtenção das somas de quadrados tipo I, II e III para análise de dados da Tabela 10, através do uso da notação  $R(\cdot)$ , que representa a soma de quadrados de parâmetros de algum modelo em particular.

### 3.2.2 Modelo linear

O modelo linear para os dados da Tabela 10 é:

$$y_{ijk} = \mu + \alpha_i + \beta_j + \delta_{ij} + \gamma_k + (\alpha\gamma)_{ik} + e_{ijk}$$

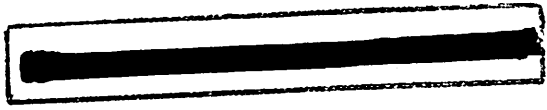
com  $i = 1, 2, \dots, I, I+1, I+2, \dots, L$ ;

$j = 1, 2, \dots, J$ ;

$k = 1, 2, \dots, s_i$ ;

em que,  $s_i = K$ , para  $i = 1, 2, \dots, I$  e  $s_i = 1$ , para  $i = I+1, I+2, \dots, L$ ; sendo  $n = J(IK + L - I)$  o número total de observações.

É necessário considerar que, na análise em questão, quando  $s_i = 1$ , os  $(L-I)J$  valores do tipo  $y_{ij1}$ , para  $i = I+1, I+2, \dots, L$  e  $j = 1, 2, \dots, J$ , são descritos



pelo modelo acima, eliminando os efeitos  $\gamma_k$  e  $(\alpha\gamma)_{ik}$ , uma vez que os L-I tratamentos primários não possuem tratamentos secundários.

Os termos do modelo apresentado são descritos por:

$y_{ijk}$  : valor observado da k-ésima subparcela, na i-ésima parcela do j-ésimo bloco;  
 $\mu$  : constante associada a todas observações;

$\alpha_i$  : efeito do i-ésimo nível do tratamento primário T;

$\beta_j$  : efeito do j-ésimo bloco;

$\delta_{ij} = (\alpha\beta)_{ij}$  : efeito residual das parcelas, caracterizado como componente do erro  
(a);

$\gamma_k$  : efeito do k-ésimo nível do tratamento secundário T' ;

$(\alpha\gamma)_{ik}$  : efeito da interação do i-ésimo nível do tratamento primário T com o k-ésimo nível do tratamento secundário T' ;

$e_{ijk}$  : efeito residual das subparcelas, caracterizado como componente do erro  
(b).

Sobre as distribuições das variáveis aleatórias  $\delta_{ij}$  e  $e_{ijk}$ , as seguintes pressuposições foram consideradas:

- i)  $\delta_{ij}$  são variáveis aleatórias independentes e identicamente distribuídas com distribuição normal de média 0 e variância  $\sigma_\delta^2$  ;
- ii)  $e_{ijk}$  são variáveis aleatórias independentes e identicamente distribuídas com distribuição normal de média 0 e variância  $\sigma^2$  ;
- iii)  $\delta_{ij}$  e  $e_{ijk}$  são não correlacionadas.

### 3.2.3 Equações normais

Na forma matricial, o modelo linear adotado é

$$y = X\theta + e$$

sendo

$y$  : o vetor das observações, de dimensões  $(n) \times (1)$ ;

$X$  : a matriz dos coeficientes dos parâmetros no delineamento, de dimensões  $(n) \times (L + J + K + IK + LJ + 1)$ ;

$\theta$  : o vetor de parâmetros, de dimensões  $(L + J + K + IK + LJ + 1) \times (1)$ ;

$e$  : o vetor de erros, supostos independentes e normalmente distribuídos, de dimensões  $(n) \times (1)$ ;

e usando o método dos quadrados mínimos, tem-se o sistema de equações normais

$$X'X\theta^\circ = X'y$$

sendo que  $\theta^\circ$  indica uma solução das equações normais e  $X'$  é a matriz transposta de  $X$ .

De acordo com Pimentel Gomes (1968), Iemma (1981) e Morais (1992), a matriz  $X$  foi particionada convenientemente em:

$$X = [x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6]$$

em que

$x_1$  é o vetor composto de 1's (uns) referentes aos coeficientes da constante  $\mu$ , de dimensões  $(n) \times (1)$ ;

$x_2$  é a matriz dos coeficientes referentes aos tratamentos primários, de dimensões  $(n) \times (L)$ ;

$x_3$  é a matriz dos coeficientes referentes aos blocos, de dimensões  $(n) \times (J)$ ;

$x_4$  é a matriz dos coeficientes referentes às "interações"  $(\alpha\beta)_{ij}$ , denotada por  $\delta_{ij}$ , de dimensões  $(n) \times (L J)$ ;

$x_5$  é a matriz dos coeficientes referentes aos tratamentos secundários de dimensões  $(n) \times (K)$ ;

$x_6$  é a matriz dos coeficientes referentes às interações  $(\alpha\gamma)_{ik}$ , de dimensões  $(n) \times (I K)$ .

Desse modo,  $X'X$  resultou em:

$$X'X = \begin{bmatrix} x_1'x_1 & x_1'x_2 & x_1'x_3 & x_1'x_4 & x_1'x_5 & x_1'x_6 \\ x_2'x_1 & x_2'x_2 & x_2'x_3 & x_2'x_4 & x_2'x_5 & x_2'x_6 \\ x_3'x_1 & x_3'x_2 & x_3'x_3 & x_3'x_4 & x_3'x_5 & x_3'x_6 \\ x_4'x_1 & x_4'x_2 & x_4'x_3 & x_4'x_4 & x_4'x_5 & x_4'x_6 \\ x_5'x_1 & x_5'x_2 & x_5'x_3 & x_5'x_4 & x_5'x_5 & x_5'x_6 \\ x_6'x_1 & x_6'x_2 & x_6'x_3 & x_6'x_4 & x_6'x_5 & x_6'x_6 \end{bmatrix}$$

$(L + J + K + I K + L J + 1)$ 
 $(L + J + K + I K + L J + 1)$

A matriz  $X'X$  é simétrica, e suas submatrizes têm a seguinte composição:

- $x_1'x_1 = J(IK + L - I) = n =$  número total de observações;
- $x_1'x_2 = (1) [JK, JK, \dots, JK, J, J, \dots, J]'_{(L)} =$  vetor linha associado ao número de repetições dos tratamentos primários, sendo JK para  $i = 1, 2, \dots, I$ , e J para  $i = I+1, I+2, \dots, L$ ;
- $x_1'x_3 = (1) [(IK + L - I), (IK + L - I), \dots, (IK + L - I)]'_{(J)} =$  vetor linha associado ao número de subparcelas por bloco;
- $x_1'x_4 = (1) [K, K, \dots, K, 1, 1, \dots, 1]'_{(LJ)} =$  vetor linha associado ao número de repetições das “interações”  $(\alpha\beta)_{ij}$ , denotada por  $\delta_{ij}$ , onde seus elementos valem K para  $i = 1, 2, \dots, I$ , e 1 para  $i = I+1, I+2, \dots, L$ ;
- $x_1'x_5 = (1) [IJ, IJ, \dots, IJ]'_{(K)} =$  vetor linha associado ao número de repetições dos tratamentos secundários;
- $x_1'x_6 = (1) [J, J, \dots, J]'_{(IK)} =$  vetor linha associado ao número de repetições das interações  $(\alpha\gamma)_{ik}$ ;
- $x_2'x_2 = \text{diag} \{JK, JK, \dots, JK, J, J, \dots, J\} =$  matriz diagonal das repetições dos tratamentos primários, de dimensões  $(L) \times (L)$ ;
- $x_2'x_3 = (L) [n_{ij}]_{(J)}$ , sendo

$$n_{ij} = \begin{cases} K, & \text{para } i = 1, 2, \dots, I \\ 1, & \text{para } i = I+1, I+2, \dots, L \end{cases}$$



$$\cdot \mathbf{x}_2' \mathbf{x}_6 = \begin{bmatrix} J & \dots & J & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & J & \dots & J & \dots & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & J & \dots & J \\ 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}$$

(L) (I K)

é a matriz de incidência dos tratamentos primários nos pares  $(\alpha\gamma)_{ik}$ ;

$$\cdot \mathbf{x}_3' \mathbf{x}_3 = \text{diag} \{ I K + L - I \}$$

é a matriz diagonal do número de subparcelas por bloco, de dimensões  $(J) \times (J)$ ;

$$\cdot \mathbf{x}_3' \mathbf{x}_4 = \begin{bmatrix} K \cdot I_{(1)} & \dots & K \cdot I_{(1)} & I_{(1)} & \dots & I_{(1)} \end{bmatrix}$$

(J) (L J)

é a matriz de incidência da “interação”  $\delta_{ij}$  nos blocos;  $I_{(i)}$  é uma matriz identidade de dimensão  $(J)$ , onde têm-se  $K \cdot I_{(i)}$ , para  $i = 1, 2, \dots, I$  e  $I_{(i)}$  para  $i = I+1, I+2, \dots, L$ ;



$$\cdot x_3'x_5 = \begin{matrix} & \begin{matrix} \text{I} & \text{I} & \dots & \text{I} \\ \text{I} & \text{I} & \dots & \text{I} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \text{I} & \text{I} & \dots & \text{I} \end{matrix} & \\ \text{(J)} & & & \text{(K)} \end{matrix} = \text{I} \cdot \text{}_{(J)}\text{E}_{(K)}$$

é a matriz controle do número de tratamentos primários que possuem tratamentos secundários, por bloco; I é o número de tratamentos primários que possuem tratamentos secundários; e  $\text{}_{(J)}\text{E}_{(K)}$  é uma matriz cujos elementos são todos iguais a uns (1's), de dimensões (J) x (K);

$$\cdot x_3'x_6 = \begin{matrix} & \begin{matrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1 & \dots & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & \dots & 1 \end{matrix} & \\ \text{(J)} & & & \text{(I K)} \end{matrix} = \text{}_{(J)}\text{E}_{(IK)}$$

é a matriz de incidência da interação  $(\alpha\gamma)_{ik}$ , nos blocos, de dimensões (J) x (I K);

$$\cdot x_4'x_4 = \text{diag} \{K, K, \dots, K, 1, 1, \dots, 1\}$$

é a matriz diagonal associada ao número de repetições dos pares  $\delta_{ij}$ , de dimensões (L J) x (L J), onde têm-se o valor K para  $i = 1, 2, \dots, I$ , e 1 para  $i = I+1, I+2, \dots, L$ ;

$$\cdot X_4'X_5 = \left[ \begin{array}{c} (IJ)E_{(K)} \\ \hline [(L-I)J]\Phi_{(K)} \end{array} \right]$$

(LJ) (K)

é a matriz de incidência dos tratamentos secundários nos pares  $\delta_{ij}$ , e  $\Phi$  é uma matriz nula;

$$\cdot X_4'X_6 = \left[ \begin{array}{ccccc} \Omega & \Phi & \Phi & \dots & \Phi \\ \Phi & \Omega & \Phi & \dots & \Phi \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \Phi & \Phi & \Phi & \dots & \Omega \end{array} \right]$$

(L J)  $\Phi^*$  (I K)

é a matriz de incidência das interações  $(\alpha\gamma)_{ik}$  nos pares  $\delta_{ij}$ , onde  $\Omega = (IJ)E_{(K)}$ ,

$\Phi = (IJ)\Phi_{(K)}$ , e  $\Phi^* = [(L-I)J]\Phi_{(IK)}$ ;

$$\cdot X_5'X_5 = \text{diag} \{ I J \}$$

é a matriz diagonal associada ao número de repetições dos tratamentos secundários, de dimensões  $(K) \times (K)$ ;

$$\cdot X_5'X_6 = \left[ \begin{array}{c|c|c|c} J \cdot I_{(K)} & J \cdot I_{(K)} & \dots & J \cdot I_{(K)} \end{array} \right]$$

(K) (I K)

é a matriz de incidência dos tratamentos secundários nos pares  $(\alpha\gamma)_{ik}$ ;

$$\cdot x_6'x_6 = \text{diag } \{J\}$$

é a matriz diagonal associada ao número de repetições dos pares  $(\alpha\gamma)_{ik}$ , de dimensões  $(I K) \times (I K)$ .

Assim, o sistema de equações normais  $X'X\theta^\circ = X'y$  resulta em:

$$\begin{bmatrix} x_1'x_1 & x_1'x_2 & x_1'x_3 & x_1'x_4 & x_1'x_5 & x_1'x_6 \\ x_2'x_1 & x_2'x_2 & x_2'x_3 & x_2'x_4 & x_2'x_5 & x_2'x_6 \\ x_3'x_1 & x_3'x_2 & x_3'x_3 & x_3'x_4 & x_3'x_5 & x_3'x_6 \\ x_4'x_1 & x_4'x_2 & x_4'x_3 & x_4'x_4 & x_4'x_5 & x_4'x_6 \\ x_5'x_1 & x_5'x_2 & x_5'x_3 & x_5'x_4 & x_5'x_5 & x_5'x_6 \\ x_6'x_1 & x_6'x_2 & x_6'x_3 & x_6'x_4 & x_6'x_5 & x_6'x_6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mu^\circ \\ \alpha^\circ \\ \beta^\circ \\ \delta^\circ \\ \gamma^\circ \\ \tau^\circ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1'y \\ x_2'y \\ x_3'y \\ x_4'y \\ x_5'y \\ x_6'y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} G \\ T \\ B \\ \Delta \\ T^* \\ B^* \end{bmatrix}$$

sendo

$\mu^\circ$  : solução para constante  $\mu$  ;

$G$  = total geral observado;

$\alpha^\circ$  : o vetor das soluções para tratamentos primários, de dimensões  $(L) \times (1)$ ;

- T** : o vetor dos totais observados para os tratamentos primários, de dimensões  $(L) \times (1)$ ;
- $\beta^\circ$  : o vetor das soluções para blocos, de dimensões  $(J) \times (1)$ ;
- B** : o vetor dos totais observados para blocos, de dimensões  $(J) \times (1)$ ;
- $\delta^\circ$  : o vetor das soluções para a “interação”  $(\alpha\beta)_{ij}$  denotada por  $\delta_{ij}$ , de dimensões  $(LJ) \times (1)$ ;
- $\Delta$  : o vetor dos totais observados para a “interação”  $\delta_{ij}$ , de dimensões  $(LJ) \times (1)$ ;
- $\gamma^\circ$  : o vetor das soluções para os tratamentos secundários, de dimensões  $(K) \times (1)$ ;
- T\***: o vetor dos totais observados para os tratamentos secundários, de dimensões  $(K) \times (1)$ ;
- $\tau^\circ$  : o vetor das soluções para a interação  $(\alpha\gamma)_{ik}$ , de dimensões  $(IK) \times (1)$ ;
- B\***: o vetor dos totais observados para a interação  $(\alpha\gamma)_{ik}$ , de dimensões  $(IK) \times (1)$ .

Como a matriz  $X$  não é de posto coluna completo, a matriz  $X'X$  é singular e o sistema de equações normais, sempre consistente (Lemma, 1994), é indeterminado, sendo que suas soluções podem ser obtidas, entre outras, por:

$$\theta^\circ = (X'X)^G X'y$$

onde  $(X'X)^G$  é uma inversa generalizada qualquer de  $X'X$ , isto é, pode ser uma inversa condicional, de mínimos quadrados, de Moore-Penrose ou a reflexiva, que é a inversa generalizada fornecida pelo sistema SAS (Statistical Analysis

System). Estas soluções do sistema de equações normais são, também, soluções aproximadas de mínimos quadrados para  $y = X\theta^0$ , que é inconsistente.

### 3.2.4 Reduções R(.)

Para obter as somas de quadrados das diversas causas de variação do delineamento em esquema de parcelas subdivididas em estudo, foram considerados vários modelos, através de parametrizações dos mesmos, sendo que cada um deles possui uma matriz  $X$  correspondente, uma soma de quadrados de parâmetros representada por  $R(.)$  e um vetor de soluções do sistema de equações normais. Assim, através de subtrações entre as somas de quadrados de parâmetros de dois modelos ou, em alguns casos, usando o método da inversa da parte da inversa de Searle (1971), obtêm-se as somas de quadrados tipo I, II ou III conforme interesse do pesquisador.

Para os dados da Tabela 10, a matriz  $X$  correspondente tem dimensões  $(n) \times (L+J+K+IK+LJ+1)$  podendo, então, ser particionada em diversas submatrizes, que são constituídas de uma ou mais colunas desta matriz  $X$ .

Para cada modelo, uma solução do sistema de equações normais (SEN)

$$X'X\theta = X'y$$

foi obtida por:

$$\theta^0 = (X'X)^+ X'y$$

sendo  $(X'X)^+$  a inversa generalizada de Moore-Penrose da matriz  $X'X$ , que é a inversa generalizada fornecida pelo software MATLAB, considerando cada partição adequada da matriz  $X$ , obtida a partir de cada modelo reduzido.

Define-se

$$\theta^{\circ} X' y$$

representada por  $R(\cdot)$ , como a soma de quadrados de parâmetros ou, a redução devida aos parâmetros do modelo em questão.

#### **3.2.4.1 Modelos utilizados na obtenção das SQ's tipo I com suas respectivas reduções, equações normais e soluções**

Para cada modelo utilizado na obtenção das somas de quadrados tipo I das diversas causas de variação do delineamento em estudo, foram obtidas as somas de quadrados de parâmetros (SQP), o SEN com seu vetor solução e a partição da matriz  $X$  correspondente, que estão apresentados na Tabela 11.

**TABELA 11.** Modelos utilizados na obtenção das SQ's tipo I das diversas causas de variação de um experimento em esquema de parcelas subdivididas com uma testemunha na parcela, com suas respectivas R(.)'s, equações normais e suas soluções e partição da matriz X correspondente

Modelo	SQP	SEN	Vetor Solução	Matriz Envolvida
$y_{ijk} = \mu + e_{ijk}$	R(1)	$X_1'X_1 \theta_1 = X_1'y$	$\theta_1^o = [\mu^o]$	$X_1 = \text{coluna 1 de X}$
$y_{ijk} = \mu + \alpha_i + e_{ijk}$	R(2)	$X_2'X_2 \theta_2 = X_2'y$	$\theta_2^o = [\mu^o \ \alpha^o]$	$X_2 = \text{colunas 1 a 6 de X}$
$y_{ijk} = \mu + \alpha_i + \beta_j + e_{ijk}$	R(3)	$X_3'X_3 \theta_3 = X_3'y$	$\theta_3^o = [\mu^o \ \alpha^o \ \beta^o]$	$X_3 = \text{colunas 1 a 10 de X}$
$y_{ijk} = \mu + \alpha_i + \beta_j + \delta_{ij} + e_{ijk}$	R(4)	$X_4'X_4 \theta_4 = X_4'y$	$\theta_4^o = [\mu^o \ \alpha^o \ \beta^o \ \delta^o]$	$X_4 = \text{colunas 1 a 30 de X}$
$y_{ijk} = \mu + \alpha_i + \beta_j + \delta_{ij} + \gamma_k + e_{ijk}$	R(5)	$X_5'X_5 \theta_5 = X_5'y$	$\theta_5^o = [\mu^o \ \alpha^o \ \beta^o \ \delta^o \ \gamma^o]$	$X_5 = \text{colunas 1 a 32 de X}$
$y_{ijk} = \mu + \alpha_i + \beta_j + \delta_{ij} + \gamma_k + \alpha\gamma_{ik} + e_{ijk}$	R(6)	$X_6'X_6 \theta_6 = X_6'y$	$\theta_6^o = [\mu^o \ \alpha^o \ \beta^o \ \delta^o \ \gamma^o \ \alpha\gamma^o]$	$X_6 = \text{colunas 1 a 40 de X}$
$y_{sjk} = \mu + \alpha_s + e_{sjk}$ *	R(7)	$X_7'X_7 \theta_7 = X_7'y$	$\theta_7^o = [\mu^o \ \alpha_s^o]$	$X_7 = \text{colunas 1 e 6 de X}$

\* modelo somente com os parâmetros  $\mu$  e  $\alpha_s$  referente a testemunha.

As somas de quadrados de parâmetros correspondentes às reduções, para cada modelo considerado na Tabela 11, são obtidas por:

$$R(1) = R(\mu) = \theta_1^{\circ'} X_1' y ;$$

$$R(2) = R(\mu, \alpha) = \theta_2^{\circ'} X_2' y ;$$

$$R(3) = R(\mu, \alpha, \beta) = \theta_3^{\circ'} X_3' y ;$$

$$R(4) = R(\mu, \alpha, \beta, \delta) = \theta_4^{\circ'} X_4' y ;$$

$$R(5) = R(\mu, \alpha, \beta, \delta, \gamma) = \theta_5^{\circ'} X_5' y ;$$

$$R(6) = R(\mu, \alpha, \beta, \delta, \gamma, \alpha\gamma) = \theta_6^{\circ'} X_6' y ;$$

$$R(7) = R(\mu, \alpha_s) = \theta_7^{\circ'} X_7' y .$$

Ressalta-se ainda que, aqui, cada modelo é representado matricialmente por

$$y = X\theta + e$$

considerando a matriz X correspondente a uma dada partição.

### **3.2.4.2 Modelos utilizados na obtenção das SQ's tipo II com suas respectivas reduções, equações normais e soluções**

A Tabela 12 ilustra os diferentes modelos utilizados na obtenção das SQ's tipo II das causas de variação do delineamento em questão com suas somas de quadrados de parâmetros, os SEN's com seus vetores soluções e a partição da matriz X correspondente.



**TABELA 12.** Modelos utilizados na obtenção das SQ's tipo II das diversas causas de variação de um experimento em esquema de parcelas subdivididas com uma testemunha na parcela, com suas respectivas  $R(\cdot)$ 's, equações normais e suas soluções e partição da matriz X correspondente

Modelo	SQP	SEN	Vetor Solução	Matriz Envolvida
$Y_{ijk} = \mu + \beta_j + \gamma_k + e_{ijk}$	R(8)	$X'_8 X_8 \theta_8 = X'_8 y$	$\theta'_8 = [\mu^\circ \beta^\circ \gamma^\circ]$	$X_8 = \text{colunas 1, 7 a 10, 31 e 32 de X}$
$Y_{ijk} = \mu + \alpha_i + \beta_j + \gamma_k + e_{ijk}$	R(9)	$X'_9 X_9 \theta_9 = X'_9 y$	$\theta'_9 = [\mu^\circ \alpha^\circ \beta^\circ \gamma^\circ]$	$X_9 = \text{colunas 1 a 10, 31 e 32 de X}$
$Y_{ijk} = \mu + \alpha_i + \gamma_k + \alpha\gamma_{ik} + e_{ijk}$	R(10)	$X'_{10} X_{10} \theta_{10} = X'_{10} y$	$\theta'_{10} = [\mu^\circ \alpha^\circ \gamma^\circ \alpha\gamma^\circ]$	$X_{10} = \text{colunas 1 a 6 e 31 a 40 de X}$
$Y_{ijk} = \mu + \alpha_i + \beta_j + \gamma_k + \alpha\gamma_{ik} + e_{ijk}$	R(11)	$X'_{11} X_{11} \theta_{11} = X'_{11} y$	$\theta'_{11} = [\mu^\circ \alpha^\circ \beta^\circ \gamma^\circ \alpha\gamma^\circ]$	$X_{11} = \text{colunas 1 a 10 e 31 a 40 de X}$

As reduções para os modelos da Tabela 12 são dadas por:

$$R(8) = R(\mu, \beta, \gamma) = \theta_8' X_8' y ;$$

$$R(9) = R(\mu, \alpha, \beta, \gamma) = \theta_9' X_9' y ;$$

$$R(10) = R(\mu, \alpha, \gamma, \alpha\gamma) = \theta_{10}' X_{10}' y ;$$

$$R(11) = R(\mu, \alpha, \beta, \gamma, \alpha\gamma) = \theta_{11}' X_{11}' y .$$

### 3.2.4.3 Modelos utilizados na obtenção das SQ's tipo III com suas respectivas reduções, equações normais e soluções

De acordo com em Searle (1987), as restrições paramétricas do tipo  $\Sigma$  são as seguintes:

$$\cdot \sum_{i=1}^5 \hat{\alpha}_i = 0 \quad \therefore \quad \hat{\alpha}_5 = -\hat{\alpha}_1 - \hat{\alpha}_2 - \hat{\alpha}_3 - \hat{\alpha}_4 ;$$

$$\cdot \sum_{j=1}^4 \hat{\beta}_j = 0 \quad \therefore \quad \hat{\beta}_4 = -\hat{\beta}_1 - \hat{\beta}_2 - \hat{\beta}_3 ;$$

$$\cdot \sum_{j=1}^4 \hat{\delta}_{ij} = 0 \quad \forall_i \quad \therefore \quad \begin{aligned} \hat{\delta}_{14} &= -\hat{\delta}_{11} - \hat{\delta}_{12} - \hat{\delta}_{13} && \text{para } i = 1 , \\ \hat{\delta}_{24} &= -\hat{\delta}_{21} - \hat{\delta}_{22} - \hat{\delta}_{23} && \text{para } i = 2 , \\ \hat{\delta}_{34} &= -\hat{\delta}_{31} - \hat{\delta}_{32} - \hat{\delta}_{33} && \text{para } i = 3 , \end{aligned}$$

$$\dot{\delta}_{44} = -\dot{\delta}_{41} - \dot{\delta}_{42} - \dot{\delta}_{43} \quad \text{para } i = 4 ,$$

$$\dot{\delta}_{54} = -\dot{\delta}_{51} - \dot{\delta}_{52} - \dot{\delta}_{53} \quad \text{para } i = 5 ;$$

$$\cdot \sum_{i=1}^5 \dot{\delta}_{ij} = 0 \quad \forall j \quad \therefore \quad \dot{\delta}_{51} = -\dot{\delta}_{11} - \dot{\delta}_{21} - \dot{\delta}_{31} - \dot{\delta}_{41} \quad \text{para } j = 1 ,$$

$$\dot{\delta}_{52} = -\dot{\delta}_{12} - \dot{\delta}_{22} - \dot{\delta}_{32} - \dot{\delta}_{42} \quad \text{para } j = 2 ,$$

$$\dot{\delta}_{53} = -\dot{\delta}_{13} - \dot{\delta}_{23} - \dot{\delta}_{33} - \dot{\delta}_{43} \quad \text{para } j = 3 ,$$

$$\dot{\delta}_{54} = -\dot{\delta}_{14} - \dot{\delta}_{24} - \dot{\delta}_{34} - \dot{\delta}_{44} \quad \text{para } j = 4 ;$$

substituindo os termos em  $\dot{\delta}_{54}$  , tem-se:

$$\dot{\delta}_{54} = \dot{\delta}_{11} + \dot{\delta}_{12} + \dot{\delta}_{13} + \dot{\delta}_{21} + \dot{\delta}_{22} + \dot{\delta}_{23} + \dot{\delta}_{31} + \dot{\delta}_{32} + \dot{\delta}_{33} + \dot{\delta}_{41} + \dot{\delta}_{42} + \dot{\delta}_{43} ,$$

$$\cdot \sum_{k=1}^2 \dot{\gamma}_k = 0 \quad \therefore \quad \dot{\gamma}_2 = -\dot{\gamma}_1 ;$$

$$\cdot \sum_{k=1}^2 \alpha \dot{\gamma}_{ik} = 0 \quad \forall i \quad \therefore \quad \alpha \dot{\gamma}_{12} = -\alpha \dot{\gamma}_{11} \quad \text{para } i = 1 ,$$

$$\alpha \dot{\gamma}_{22} = -\alpha \dot{\gamma}_{21} \quad \text{para } i = 2 ,$$

$$\alpha \dot{\gamma}_{32} = -\alpha \dot{\gamma}_{31} \quad \text{para } i = 3 ,$$

$$\alpha \dot{\gamma}_{42} = -\alpha \dot{\gamma}_{41} \quad \text{para } i = 4 ;$$

$$\sum_{i=1}^5 \alpha \dot{\gamma}_{ik} = 0 \quad \forall k \quad \therefore \quad \alpha \dot{\gamma}_{41} = -\alpha \dot{\gamma}_{11} - \alpha \dot{\gamma}_{21} - \alpha \dot{\gamma}_{31} \quad \text{para } k = 1 ,$$

$$\alpha \dot{\gamma}_{42} = -\alpha \dot{\gamma}_{12} - \alpha \dot{\gamma}_{22} - \alpha \dot{\gamma}_{32} \quad \text{para } k = 2 ;$$

substituindo os termos em  $\alpha \dot{\gamma}_{42}$  , tem-se:

$$\alpha \dot{\gamma}_{42} = \alpha \dot{\gamma}_{11} + \alpha \dot{\gamma}_{21} + \alpha \dot{\gamma}_{31} .$$

O modelo na forma matricial, considerando estas restrições, é:

$$y = Z \hat{\theta} + e$$

caracterizado por:

$$y_{ijk} = \mu + \alpha_i + \beta_j + \delta_{ij} + \gamma_k + (\alpha \dot{\gamma})_{ik} + e_{ijk} .$$

A matriz Z, de dimensões 36 x 24, referente aos dados da Tabela 10, foi obtida a partir do conjunto das restrições paramétricas impostas, que constituem um conjunto de funções paramétricas conjuntamente não estimáveis e independentes entre si, as quais completam o posto dessa matriz. Assim sendo, Z é de posto coluna completo e a solução para o sistema de equações normais restrito  $Z' Z \hat{\theta} = Z' y$  é obtida de modo único por:

$$\hat{\theta} = (Z' Z)^{-1} Z' y ,$$

pois a matriz  ${}_{24}(Z'Z)_{24}$  é positiva definida, logo, possui inversa clássica.

De modo análogo às Tabelas 11 e 12, para cada modelo- $\Sigma$  considerado abaixo, obteve-se uma partição da matriz  $Z$  correspondente, uma soma de quadrados de parâmetros representada por  $R(\cdot)$  e um vetor de soluções do sistema de equações normais, agora restrito (SENR), os quais estão apresentados na Tabela 13.

**TABELA 13.** Modelos utilizados na obtenção das SQ's tipo III das diversas causas de variação de um experimento em esquema de parcelas subdivididas com uma testemunha na parcela, com suas respectivas equações normais restritas e suas soluções e partição da matriz Z correspondente

52

Modelo	SQP	SEN	Vetor Solução	Matriz Envolvida
$y_{ijk} = \hat{\mu} + e_{ijk}$	R(12)	$Z'_{12}Z_{12}\hat{\theta}_{12} = Z'_{12}y$	$\hat{\theta}'_{12} = [\hat{\mu}]$	$Z_{12}$ =coluna 1 de Z
$y_{ijk} = \hat{\mu} + \hat{\alpha}_i + \hat{\delta}_{ij} + \hat{\gamma}_k + (\hat{\alpha}\hat{\gamma})_{ik} + e_{ijk}$	R(13)	$Z'_{13}Z_{13}\hat{\theta}_{13} = Z'_{13}y$	$\hat{\theta}'_{13} = [\hat{\mu} \hat{\alpha} \hat{\delta} \hat{\gamma} \hat{\alpha}\hat{\gamma}]$	$Z_{13}$ =colunas 1 a 5, 9 a 24 de Z
$y_{ijk} = \hat{\mu} + \hat{\beta}_j + \hat{\delta}_{ij} + \hat{\gamma}_k + (\hat{\alpha}\hat{\gamma})_{ik} + e_{ijk}$	R(14)	$Z'_{14}Z_{14}\hat{\theta}_{14} = Z'_{14}y$	$\hat{\theta}'_{14} = [\hat{\mu} \hat{\beta} \hat{\delta} \hat{\gamma} \hat{\alpha}\hat{\gamma}]$	$Z_{14}$ =colunas 1, 6 a 24 de Z
$y_{ijk} = \hat{\mu} + \hat{\alpha}_i + \hat{\beta}_j + \hat{\delta}_{ij} + (\hat{\alpha}\hat{\gamma})_{ik} + e_{ijk}$	R(15)	$Z'_{15}Z_{15}\hat{\theta}_{15} = Z'_{15}y$	$\hat{\theta}'_{15} = [\hat{\mu} \hat{\alpha} \hat{\beta} \hat{\delta} \hat{\alpha}\hat{\gamma}]$	$Z_{15}$ =colunas 1 a 20, 22 a 24 de Z
$y_{ijk} = \hat{\mu} + \hat{\alpha}_i + \hat{\beta}_j + \hat{\gamma}_k + (\hat{\alpha}\hat{\gamma})_{ik} + e_{ijk}$	R(16)	$Z'_{16}Z_{16}\hat{\theta}_{16} = Z'_{16}y$	$\hat{\theta}'_{16} = [\hat{\mu} \hat{\alpha} \hat{\beta} \hat{\gamma} \hat{\alpha}\hat{\gamma}]$	$Z_{16}$ =colunas 1 a 8, 21 a 24 de Z
$y_{ijk} = \hat{\mu} + \hat{\alpha}_i + \hat{\beta}_j + \hat{\delta}_{ij} + \hat{\gamma}_k + e_{ijk}$	R(17)	$Z'_{17}Z_{17}\hat{\theta}_{17} = Z'_{17}y$	$\hat{\theta}'_{17} = [\hat{\mu} \hat{\alpha} \hat{\beta} \hat{\delta} \hat{\gamma}]$	$Z_{17}$ =colunas 1 a 21 de Z
$y_{ijk} = \hat{\mu} + \hat{\alpha}_i + \hat{\beta}_j + \hat{\delta}_{ij} + \hat{\gamma}_k + (\hat{\alpha}\hat{\gamma})_{ik} + e_{ijk}$	R(18)	$Z'_{18}Z_{18}\hat{\theta}_{18} = Z'_{18}y$	$\hat{\theta}'_{18} = [\hat{\mu} \hat{\alpha} \hat{\beta} \hat{\delta} \hat{\gamma} \hat{\alpha}\hat{\gamma}]$	$Z_{18}$ =colunas 1 a 24 de Z

As reduções envolvidas neste caso, correspondentes às somas de quadrados de parâmetros de cada modelo da Tabela 13, são obtidas por :

$$R(12) = R(\hat{\mu}) = \hat{\theta}_{12}' Z_{12}' y ;$$

$$R(13) = R(\hat{\mu}, \hat{\alpha}, \hat{\delta}, \hat{\gamma}, \alpha \cdot \gamma) = \hat{\theta}_{13}' Z_{13}' y ;$$

$$R(14) = R(\hat{\mu}, \hat{\beta}, \hat{\delta}, \hat{\gamma}, \alpha \cdot \gamma) = \hat{\theta}_{14}' Z_{14}' y ;$$

$$R(15) = R(\hat{\mu}, \hat{\alpha}, \hat{\beta}, \hat{\delta}, \alpha \cdot \gamma) = \hat{\theta}_{15}' Z_{15}' y ;$$

$$R(16) = R(\hat{\mu}, \hat{\alpha}, \hat{\beta}, \hat{\gamma}, \alpha \cdot \gamma) = \hat{\theta}_{16}' Z_{16}' y ;$$

$$R(17) = R(\hat{\mu}, \hat{\alpha}, \hat{\beta}, \hat{\delta}, \hat{\gamma}) = \hat{\theta}_{17}' Z_{17}' y ;$$

$$R(18) = R(\hat{\mu}, \hat{\alpha}, \hat{\beta}, \hat{\delta}, \hat{\gamma}, \alpha \cdot \gamma) = \hat{\theta}_{18}' Z_{18}' y .$$

### 3.2.5 Somas de quadrados tipo II e III para grupo 1 ( $G_1$ ) e grupo 1 versus grupo 2 ( $G_1$ vs $G_2$ )

#### 3.2.5.1 Somas de quadrados tipo II

Para obter as SQ's tipo II de  $G_1$  e  $G_1$  vs  $G_2$  , foram consideradas as seguintes restrições paramétricas ponderadas:

$$\cdot \sum_{i=1}^5 n_{i..} \alpha_i = 0 \quad \therefore \quad \alpha_5 = -2\alpha_1 - 2\alpha_2 - 2\alpha_3 - 2\alpha_4 ;$$

$$\cdot \sum_{j=1}^4 n_{.j} \beta_j = 0 \quad \therefore \quad \beta_4 = -\beta_1 - \beta_2 - \beta_3 ;$$

$$\cdot \sum_{j=1}^4 n_{ij} \delta_{ij} = 0 \quad \forall_i \quad \therefore \quad \begin{aligned} \delta_{14} &= -\delta_{11} - \delta_{12} - \delta_{13} \quad \text{para } i = 1 , \\ \delta_{24} &= -\delta_{21} - \delta_{22} - \delta_{23} \quad \text{para } i = 2 , \\ \delta_{34} &= -\delta_{31} - \delta_{32} - \delta_{33} \quad \text{para } i = 3 , \\ \delta_{44} &= -\delta_{41} - \delta_{42} - \delta_{43} \quad \text{para } i = 4 , \\ \delta_{54} &= -\delta_{51} - \delta_{52} - \delta_{53} \quad \text{para } i = 5 ; \end{aligned}$$

$$\cdot \sum_{i=1}^5 n_{ij} \delta_{ij} = 0 \quad \forall_j \quad \therefore \quad \begin{aligned} \delta_{51} &= -2\delta_{11} - 2\delta_{21} - 2\delta_{31} - 2\delta_{41} \quad \text{para } j = 1 , \\ \delta_{52} &= -2\delta_{12} - 2\delta_{22} - 2\delta_{32} - 2\delta_{42} \quad \text{para } j = 2 , \\ \delta_{53} &= -2\delta_{13} - 2\delta_{23} - 2\delta_{33} - 2\delta_{43} \quad \text{para } j = 3 , \\ \delta_{54} &= -2\delta_{14} - 2\delta_{24} - 2\delta_{34} - 2\delta_{44} \quad \text{para } j = 4 ; \end{aligned}$$

substituindo os termos em  $\delta_{54}$  , tem-se:

$$\delta_{54} = 2\delta_{11} + 2\delta_{12} + 2\delta_{13} + 2\delta_{21} + 2\delta_{22} + 2\delta_{23} + 2\delta_{31} + 2\delta_{32} + 2\delta_{33} + 2\delta_{41} + 2\delta_{42} + 2\delta_{43}$$



$$\cdot \sum_{k=1}^2 n_{..k} \gamma_k = 0 \quad \therefore \quad \gamma_2 = -\gamma_1 ;$$

$$\cdot \sum_{k=1}^2 n_{i.k} \alpha \gamma_{ik} = 0 \quad \forall_i \quad \therefore \quad \alpha \gamma_{12} = -\alpha \gamma_{11} \quad \text{para } i = 1 ,$$

$$\alpha \gamma_{22} = -\alpha \gamma_{21} \quad \text{para } i = 2 ,$$

$$\alpha \gamma_{32} = -\alpha \gamma_{31} \quad \text{para } i = 3 ,$$

$$\alpha \gamma_{42} = -\alpha \gamma_{41} \quad \text{para } i = 4 ;$$

$$\cdot \sum_{i=1}^5 n_{i.k} \alpha \gamma_{ik} = 0 \quad \forall_k \quad \therefore \quad \alpha \gamma_{41} = -\alpha \gamma_{11} - \alpha \gamma_{21} - \alpha \gamma_{31} \quad \text{para } k = 1 ,$$

$$\alpha \gamma_{42} = -\alpha \gamma_{12} - \alpha \gamma_{22} - \alpha \gamma_{32} \quad \text{para } k = 2 ;$$

substituindo os termos em  $\alpha \gamma_{42}$  , tem-se:

$$\alpha \gamma_{42} = \alpha \gamma_{11} + \alpha \gamma_{21} + \alpha \gamma_{31} .$$

O modelo

$$y_{ijk} = \mu + \alpha_i + \beta_j + \delta_{ij} + \gamma_k + \alpha \gamma_{ik} + e_{ijk}$$

pode, neste caso, ser expresso matricialmente por

$$y = \mathbf{WB} + \mathbf{e} ,$$

em que a matriz  $W$ , de dimensões  $36 \times 24$ , referente aos delineamento em estudo, é obtida a partir das restrições paramétricas ponderadas.

A matriz  $W$  é de posto coluna completo, e o sistema de equações normais com restrições paramétricas ponderadas (SENRP)

$$W'WB = W'y$$

é consistente e determinado, pois  $W'W$  é positiva definida, e o vetor único de solução com dimensões  $24 \times 1$ , é dado por

$$\hat{B} = (W'W)^{-1} W'y.$$

Assim, obtêm-se as seguintes somas de quadrados:

i) Soma de quadrados tipo II do grupo 1

$$SQG_1 = (A' \hat{B}_\alpha)' [A' (W'_\alpha W_\alpha)^{-1} A]^{-1} (A' \hat{B}_\alpha),$$

sendo

- $A'$  : matriz dos coeficientes de quaisquer contrastes entre grupo 1, de dimensões  $(3) \times (4)$  e  $A$ , a sua matriz transposta;
- $\hat{B}_\alpha$  : parte do vetor  $\hat{B}$ , constituído pelas linhas 2, 3, 4 e 5 correspondentes aos  $\hat{\alpha}_i$ 's;
- $(W'_\alpha W_\alpha)^{-1}$ : matriz constituída pelas colunas de 2 a 5 e linhas de 2 a 5 da matriz  $(W'W)^{-1}$ , de dimensões  $(4) \times (4)$ .

ii) Soma de quadrados tipo II entre grupos ( $G_1$  vs  $G_2$ ), usando o processo da inversa de partes da inversa de Searle (1971)

$$SQ_{G_1 \text{ vs } G_2} = \hat{\alpha}_s [\lambda' (W_\alpha' W_\alpha)^{-1} \lambda]^{-1} \hat{\alpha}_s,$$

sendo

- $\hat{\alpha}_s$ : um escalar obtido a partir da restrição paramétrica ponderada

$$\sum_{i=1}^5 n_{i..} \alpha_i = 0,$$

- $\lambda'$ : o vetor linha composto pelos coeficientes da combinação linear para estimar  $\hat{\alpha}_s$ , de dimensões (1) x (4).

### 3.2.5.2 Somas de quadrados tipo III

Considerando as restrições paramétricas do tipo  $\Sigma$ :

$$\sum_{i=1}^5 \hat{\alpha}_i = 0, \quad \sum_{j=1}^4 \hat{\beta}_j = 0, \quad \sum_{i=1}^5 \hat{\delta}_{ij} = 0 \quad \forall j, \quad \sum_{j=1}^4 \hat{\delta}_{ij} = 0 \quad \forall i,$$

$$\sum_{k=1}^2 \hat{\gamma}_k = 0, \quad \sum_{i=1}^5 \alpha' \gamma_{ik} = 0 \quad \forall k \quad \text{e} \quad \sum_{k=1}^2 \alpha' \gamma_{ik} = 0 \quad \forall i$$

as SQ's tipo III para  $G_1$  e  $G_1$  vs  $G_2$  foram:

i) Soma de quadrados tipo III do grupo 1

$$SQ_{G_1} = (A' \hat{\theta}_\alpha)' [A' (Z'_\alpha Z_\alpha)^{-1} A]^{-1} (A' \hat{\theta}_\alpha),$$

sendo

- $A'$  : matriz dos coeficientes de quaisquer contrastes entre grupo 1, de dimensões (3) x (4) e  $A$ , a sua matriz transposta;
- $\hat{\theta}_\alpha$  : parte do vetor  $\hat{\theta}_\alpha$ , constituído pelas linhas 2, 3, 4 e 5 correspondentes aos  $\hat{\alpha}_i$ 's ;
- $(Z'_\alpha Z_\alpha)^{-1}$  : matriz constituída pelas colunas de 2 a 5 e linhas de 2 a 5 da matriz  $(Z' Z)^{-1}$ , de dimensões (4) x (4) .

ii) Soma de quadrados tipo III entre grupos ( $G_1$  vs  $G_2$ ), usando o processo da inversa de partes da inversa de Searle (1971)

$$SQ_{G_1 \text{ vs } G_2} = \hat{\alpha}_5 [\lambda' (Z'_\alpha Z_\alpha)^{-1} \lambda]^{-1} \hat{\alpha}_5,$$

sendo

- $\hat{\alpha}_5$  : um escalar obtido a partir da restrição paramétrica  $\sum_{i=1}^5 \hat{\alpha}_i = 0$ ,
- $\lambda'$  : o vetor linha composto pelos coeficientes da combinação linear para estimar  $\hat{\alpha}_5$ , de dimensões (1) x (4).

### **3.2.6 Análise usando $R(.)$ e o processo da inversa de partes da inversa de Searle (1971)**

As expressões para as somas de quadrados tipo I, II e III em termos da notação  $R(.)$  ou, em alguns casos, usando o processo da inversa de partes da inversa de Searle (1971), para as causas de variação do delineamento em blocos casualizados em esquema de parcelas subdivididas com tratamentos secundários ( $T'$ ) em apenas alguns dos tratamentos primários ( $T$ ), estão sumarizadas na Tabela 14.

**TABELA 14.** Somas de quadrados tipo I, II e III para as causas de variação em um modelo de parcelas subdivididas com tratamentos secundários em apenas alguns dos tratamentos principais

CV	SQ Tipo I	SQ Tipo II	SQ Tipo III
Blocos	$R(\beta/\mu, \alpha)$	$R(\beta/\mu, \alpha, \gamma, \alpha\gamma)$	$R(\hat{\beta}/\hat{\mu}, \hat{\alpha}, \hat{\delta}, \hat{\gamma}, \alpha\gamma)$
$G_1$	$R(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4/\mu, \alpha_5)$	$(A' \hat{B}_\alpha)' [A' (W'_\alpha W_\alpha)^{-1} A]^{-1} (A' \hat{B}_\alpha)$	$(A' \hat{\theta}_\alpha)' [A' (Z'_\alpha Z_\alpha)^{-1} A]^{-1} (A' \hat{\theta}_\alpha)$
$G_1$ vs $G_2$	$R(\alpha_5/\mu)$	$\hat{\alpha}_5 [\lambda' (W'_\alpha W_\alpha)^{-1} \lambda]^{-1} \hat{\alpha}_5$	$\hat{\alpha}_5 [\lambda' (Z'_\alpha Z_\alpha)^{-1} \lambda]^{-1} \hat{\alpha}_5$
T	$R(\alpha/\mu)$	$R(\alpha/\mu, \beta, \gamma)$	$R(\hat{\alpha}/\hat{\mu}, \hat{\beta}, \hat{\delta}, \hat{\gamma}, \alpha\gamma)$
Res.(a)	$R(\delta/\mu, \alpha, \beta)$	$R(\delta/\mu, \alpha, \beta, \gamma, \alpha\gamma)$	$R(\hat{\delta}/\hat{\mu}, \hat{\alpha}, \hat{\beta}, \hat{\gamma}, \alpha\gamma)$
Parc.	soma	—	—
$T'$	$R(\gamma/\mu, \alpha, \beta, \delta)$	$R(\gamma/\mu, \alpha, \beta, \delta)$	$R(\hat{\gamma}/\hat{\mu}, \hat{\alpha}, \hat{\beta}, \hat{\delta}, \alpha\gamma)$
$T \times T'$	$R(\alpha\gamma/\mu, \alpha, \beta, \delta, \gamma)$	$R(\alpha\gamma/\mu, \alpha, \beta, \delta, \gamma)$	$R(\hat{\alpha}\hat{\gamma}/\hat{\mu}, \hat{\alpha}, \hat{\beta}, \hat{\delta}, \hat{\gamma})$
Res. (b)	$y'y - R(\mu, \alpha, \beta, \delta, \gamma, \alpha\gamma)$	$y'y - R(\mu, \alpha, \beta, \delta, \gamma, \alpha\gamma)$	$y'y - R(\hat{\mu}, \hat{\alpha}, \hat{\beta}, \hat{\delta}, \hat{\gamma}, \alpha\gamma)$
Total	$y'y - R(\mu)$	$y'y - R(\mu)$	$y'y - R(\hat{\mu})$

### **3.2.7 Somas de quadrados tipo I, II e III obtidas pelo SAS**

Com a finalidade de comparar os resultados das somas de quadrados tipo I, II e III, obtidos através do software MATLAB, os dados da Tabela 10 foram também analisados usando-se o software SAS considerando, quando se trata de observações provenientes da testemunha, um nível arbitrário diferente de 1 e 2, que são os níveis designados para 1 e 2 linhas de irrigação, respectivamente.

## 4 RESULTADOS E DISCUSSÃO

Para os dados da Tabela 10, em que tem-se:

$J = 4$  blocos;

$L = 5$  tratamentos primários (  $T$  );

$K = 2$  tratamentos secundários (  $T'$  );

$I = 4$  tratamentos primários que possuem tratamentos secundários;

$n = 36$  observações;

$s_i = 2$ , para  $i = 1, 2, \dots, 4$ , e  $s_i = \begin{cases} 1 \text{ (algebricamente)} \\ 0 \text{ (matricialmente)} \end{cases}$ , para  $i = 5$  ;

foram efetuados todos os cálculos necessários, e os resultados estão aqui ilustrados, sendo que as matrizes, os vetores soluções do SEN e o vetor das observações, utilizados na obtenção dos cálculos, estão apresentados no anexo.

### 4.1 Reduções

#### 4.1.1 Reduções utilizadas na obtenção das somas de quadrados tipo I

As somas de quadrados de parâmetros para cada modelo considerado na Tabela 11, que correspondem às reduções nas SQ's devidas ao ajuste de cada um



deles em particular, foram:

$$R(1) = R(\mu) = \theta_1^{\circ} X_1' y = 12969,4136 ;$$

$$R(2) = R(\mu, \alpha) = \theta_2^{\circ} X_2' y = 13018,3862 ;$$

$$R(3) = R(\mu, \alpha, \beta) = \theta_3^{\circ} X_3' y = 13041,2960 ;$$

$$R(4) = R(\mu, \alpha, \beta, \delta) = \theta_4^{\circ} X_4' y = 13055,8450 ;$$

$$R(5) = R(\mu, \alpha, \beta, \delta, \gamma) = \theta_5^{\circ} X_5' y = 13057,5103 ;$$

$$R(6) = R(\mu, \alpha, \beta, \delta, \gamma, \alpha\gamma) = \theta_6^{\circ} X_6' y = 13064,4712 ;$$

$$R(7) = R(\mu, \alpha_s) = \theta_7^{\circ} X_7' y = 12980,6553.$$

#### 4.1.2 Reduções utilizadas na obtenção das somas de quadrados tipo II

Para os modelos da Tabela 12 e considerando os dados da Tabela 10, as reduções foram:

$$R(8) = R(\mu, \beta, \gamma) = \theta_8^{\circ} X_8' y = 13005,2303 ;$$

$$R(9) = R(\mu, \alpha, \beta, \gamma) = \theta_9^{\circ} X_9' y = 13042,9613 ;$$

$$R(10) = R(\mu, \alpha, \gamma, \alpha\gamma) = \theta_{10}^{\circ} X_{10}' y = 13027,0125 ;$$

$$R(11) = R(\mu, \alpha, \beta, \gamma, \alpha\gamma) = \theta_{11}^{\circ} X_{11}' y = 13049,9222 .$$

Ainda foram utilizadas as reduções R(1), R(4), R(5) e R(6) na obtenção

das SQ's tipo II das causas de variação do delineamento em estudo.

### 4.1.3 Reduções utilizadas na obtenção das somas de quadrados tipo III

As reduções para os dados da Tabela 10, correspondentes às somas de quadrados de parâmetros de cada modelo da Tabela 13, foram:

$$R(12) = R(\hat{\mu}) = \hat{\theta}'_{12} Z'_{12} y = 12969,4136 ;$$

$$R(13) = R(\hat{\mu}, \hat{\alpha}, \hat{\delta}, \hat{\gamma}, \alpha \gamma) = \hat{\theta}'_{13} Z'_{13} y = 13044,2139 ;$$

$$R(14) = R(\hat{\mu}, \hat{\beta}, \hat{\delta}, \hat{\gamma}, \alpha \gamma) = \hat{\theta}'_{14} Z'_{14} y = 13015,4916 ;$$

$$R(15) = R(\hat{\mu}, \hat{\alpha}, \hat{\beta}, \hat{\delta}, \alpha \gamma) = \hat{\theta}'_{15} Z'_{15} y = 13062,8059 ;$$

$$R(16) = R(\hat{\mu}, \hat{\alpha}, \hat{\beta}, \hat{\gamma}, \alpha \gamma) = \hat{\theta}'_{16} Z'_{16} y = 13049,9222 ;$$

$$R(17) = R(\hat{\mu}, \hat{\alpha}, \hat{\beta}, \hat{\delta}, \hat{\gamma}) = \hat{\theta}'_{17} Z'_{17} y = 13057,5103 ;$$

$$R(18) = R(\hat{\mu}, \hat{\alpha}, \hat{\beta}, \hat{\delta}, \hat{\gamma}, \alpha \gamma) = \hat{\theta}'_{18} Z'_{18} y = 13064,4712 .$$

## 4.2 Somas de quadrados através da notação R(.) ou usando o processo da inversa de partes da inversa de Searle (1971)

Baseado na comparação dos diferentes modelos adotados em função do conjunto de dados da Tabela 10, através da diferença entre reduções R(.)'s, ou

seja, por meio da diferença entre a redução na soma de quadrados devida ao ajuste de dois modelos diferentes, foram obtidas as somas de quadrados tipo I, II e III das diversas causas de variação do esquema em parcelas subdivididas em questão, com exceção das somas de quadrados tipo II e III de  $G_1$  e  $G_1$  vs  $G_2$ , obtidas por outros métodos.

#### 4.2.1 Somas de quadrados tipo I

Considerando-se os modelos na Tabela 11 e as reduções nas somas de quadrados, onde cada fator é ajustado somente para os demais precedentes no modelo, foram obtidas as somas de quadrados tipo I para as seguintes causas de variação do delineamento em parcelas subdivididas com uma testemunha na parcela:

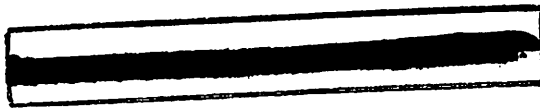
$$SQ_{\text{Blocos}} = R(\beta/\mu, \alpha) = R(\mu, \alpha, \beta) - R(\mu, \alpha) = R(3) - R(2) = 22,9097 ;$$

$$SQ_{G_1} = R(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4/\mu, \alpha_5) = R(\mu, \alpha) - R(\mu, \alpha_5) = R(2) - R(7) = 37,7309 ;$$

$$\begin{aligned} SQ_{G_1 \text{ vs } G_2} &= SQT - SQ_{\text{Grupo 1}} = R(\alpha_5 / \mu) = R(\mu, \alpha_5) - R(\mu) \\ &= R(7) - R(1) = 11,2417 ; \end{aligned}$$

$$SQ_{\text{Tratamento T}} = R(\alpha/\mu) = R(\mu, \alpha) - R(\mu) = R(2) - R(1) = 48,9726 ;$$

$$\begin{aligned} SQ_{\text{Resíduo (a)}} &= R(\delta/\mu, \alpha, \beta) = R(\mu, \alpha, \beta, \delta) - R(\mu, \alpha, \beta) \\ &= R(4) - R(3) = 14,5490 ; \end{aligned}$$



$$\begin{aligned} \text{SQ Tratamento } T' &= R(\gamma/\mu, \alpha, \beta, \delta) = R(\mu, \alpha, \beta, \delta, \gamma) - R(\mu, \alpha, \beta, \delta) \\ &= R(5) - R(4) = 1,6653 ; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{SQ } T \times T' &= R(\alpha\gamma / \mu, \alpha, \beta, \delta, \gamma) = R(\mu, \alpha, \beta, \delta, \gamma, \alpha\gamma) - R(\mu, \alpha, \beta, \delta, \gamma) \\ &= R(6) - R(5) = 6,9609 ; \end{aligned}$$

$$\text{SQ Resíduo (b)} = y'y - R(\mu, \alpha, \beta, \delta, \gamma, \alpha\gamma) = y'y - R(6) = 12,6788 ;$$

$$\text{SQ Total Corrigida} = y'y - R(\mu) = y'y - R(1) = 107,7364 .$$

#### 4.2.2 Somas de quadrados tipo II

Referindo-se à soma de quadrados de uma causa de variação, ajustada para as demais que não contenha o efeito que se está testando, as somas de quadrados tipo II ou parciais, como também são denominadas, considerando-se os modelos apresentados na Tabela 12, são dadas por:

$$\begin{aligned} \text{SQ Blocos} &= R(\beta/\mu, \alpha, \gamma, \alpha\gamma) = R(\mu, \alpha, \beta, \gamma, \alpha\gamma) - R(\mu, \alpha, \gamma, \alpha\gamma) \\ &= R(11) - R(10) = 22,9097 ; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{SQ Tratamentos } T &= R(\alpha/\mu, \beta, \gamma) = R(\mu, \alpha, \beta, \gamma) - R(\mu, \beta, \gamma) \\ &= R(9) - R(8) = 37,7309 ; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{SQ Resíduo (a)} &= R(\delta/\mu, \alpha, \beta, \gamma, \alpha\gamma) = R(\mu, \alpha, \beta, \delta, \gamma, \alpha\gamma) - R(\mu, \alpha, \beta, \gamma, \alpha\gamma) \\ &= R(6) - R(11) = 14,5490 ; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{SQTratamentos } T' &= R(\gamma / \mu, \alpha, \beta, \delta) = R(\mu, \alpha, \beta, \delta, \gamma) - R(\mu, \alpha, \beta, \delta) \\ &= R(5) - R(4) = 1,6653 ; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{SQ } T \times T' &= R(\alpha\gamma / \mu, \alpha, \beta, \delta, \gamma) = R(\mu, \alpha, \beta, \delta, \gamma, \alpha\gamma) - R(\mu, \alpha, \beta, \delta, \gamma) \\ &= R(6) - R(5) = 6,9609 ; \end{aligned}$$

$$\text{SQResíduo (b)} = y' y - R(\mu, \alpha, \beta, \delta, \gamma, \alpha\gamma) = y' y - R(6) = 12,6788 ;$$

$$\text{SQTotal Corrigida} = y' y - R(\mu) = y' y - R(1) = 107,7364 .$$

As somas de quadrados tipo II de  $G_1$  e  $G_1$  vs  $G_2$  foram:

$$i) \text{SQ}G_1 = (A' \hat{B}_\alpha)' [A' (W_\alpha' W_\alpha)^{-1} A]^{-1} (A' \hat{B}_\alpha) = 47,1493 ;$$

sendo

$$A' = \begin{bmatrix} 3 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 2 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

(3) (4)

a matriz dos seguintes contrastes:

$$3\alpha_1 - \alpha_2 - \alpha_3 - \alpha_4 = 0$$

$$2\alpha_2 - \alpha_3 - \alpha_4 = 0$$

$$\alpha_3 - \alpha_4 = 0 ;$$

$$\cdot \hat{\mathbf{B}}_{\alpha} = \begin{matrix} \begin{bmatrix} -1,3806 \\ -0,1556 \\ 0,8194 \\ 1,5069 \end{bmatrix} \\ (4) \qquad (1) \end{matrix}$$

parte do vetor  $\hat{\mathbf{B}}$ , correspondentes aos  $\hat{\alpha}_i$ 's ;

$$\cdot (W_{\alpha}' W_{\alpha})^{-1} = \begin{matrix} \begin{bmatrix} 0,0972 & -0,0278 & -0,0278 & -0,0278 \\ -0,0278 & 0,0972 & -0,0278 & -0,0278 \\ -0,0278 & -0,0278 & 0,0972 & -0,0278 \\ -0,0278 & -0,0278 & -0,0278 & 0,0972 \end{bmatrix} \\ (4) \qquad (4) \end{matrix}$$

matriz constituída pelas colunas de 2 a 5 e linhas de 2 a 5 da matriz  $(W'W)^{-1}$ .

Usando o processo da inversa de partes da inversa de Searle (1971), obteve-se:

$$\text{ii) } SQG_1 \text{ vs } G_2 = \hat{\alpha}_5 [\lambda' (W_{\alpha}' W_{\alpha})^{-1} \lambda]^{-1} \hat{\alpha}_5 = 11,3090 ;$$

sendo

$$\begin{aligned} \cdot \hat{\alpha}_5 &= -2\hat{\alpha}_1 - 2\hat{\alpha}_2 - 2\hat{\alpha}_3 - 2\hat{\alpha}_4 = -2 \times (-1,3806 - 0,1556 + 0,8194 + 1,5069) \\ &= -1,5802 \end{aligned}$$

um escalar obtido a partir da restrição paramétrica ponderada  $\sum_{i=1}^5 n_i \alpha_i = 0$ ,

$$\lambda' = {}_{(1)}[-2 \ -2 \ -2 \ -2]_{(4)}$$

o vetor linha composto pelos coeficientes da combinação linear para estimar  $\hat{\alpha}_5$ .

### 4.2.3 Somas de quadrados tipo III

As somas de quadrados tipo III, referentes ao ajuste de cada causa de variação para todos os efeitos remanescentes do modelo, sob restrição paramétrica do tipo soma dos efeitos igual a zero, partindo-se dos modelos apresentados na Tabela 13, foram obtidas por:

$$\begin{aligned} \text{SQBlocos} &= R(\hat{\beta} / \hat{\mu}, \hat{\alpha}, \hat{\delta}, \hat{\gamma}, \alpha \gamma) = R(\hat{\mu}, \hat{\alpha}, \hat{\beta}, \hat{\delta}, \hat{\gamma}, \alpha \gamma) - R(\hat{\mu}, \hat{\alpha}, \hat{\delta}, \hat{\gamma}, \alpha \gamma) \\ &= R(18) - R(13) = 20,2573 ; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{SQTratamentos T} &= R(\hat{\alpha} / \hat{\mu}, \hat{\beta}, \hat{\delta}, \hat{\gamma}, \alpha \gamma) = R(\hat{\mu}, \hat{\alpha}, \hat{\beta}, \hat{\delta}, \hat{\gamma}, \alpha \gamma) - R(\hat{\mu}, \hat{\beta}, \hat{\delta}, \hat{\gamma}, \alpha \gamma) \\ &= R(18) - R(14) = 48,9726 ; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{SQResíduo (a)} &= R(\hat{\delta} / \hat{\mu}, \hat{\alpha}, \hat{\beta}, \hat{\gamma}, \alpha \gamma) = R(\hat{\mu}, \hat{\alpha}, \hat{\beta}, \hat{\delta}, \hat{\gamma}, \alpha \gamma) - R(\hat{\mu}, \hat{\alpha}, \hat{\beta}, \hat{\gamma}, \alpha \gamma) \\ &= R(18) - R(15) = 14,5490 ; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{SQTratamentos } T' &= R(\hat{\gamma}/\hat{\mu}, \hat{\alpha}, \hat{\beta}, \hat{\delta}, \hat{\alpha}\hat{\gamma}) = R(\hat{\mu}, \hat{\alpha}, \hat{\beta}, \hat{\delta}, \hat{\gamma}, \hat{\alpha}\hat{\gamma}) - R(\hat{\mu}, \hat{\alpha}, \hat{\beta}, \hat{\delta}, \hat{\alpha}\hat{\gamma}) \\ &= R(18) - R(16) = 1,6653 ; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{SQ } T \times T' &= R(\hat{\alpha}\hat{\gamma}/\hat{\mu}, \hat{\alpha}, \hat{\beta}, \hat{\delta}, \hat{\gamma}) = R(\hat{\mu}, \hat{\alpha}, \hat{\beta}, \hat{\delta}, \hat{\gamma}, \hat{\alpha}\hat{\gamma}) - R(\hat{\mu}, \hat{\alpha}, \hat{\beta}, \hat{\delta}, \hat{\gamma}) \\ &= R(18) - R(17) = 6,9609 ; \end{aligned}$$

$$\text{SQResíduo (b)} = y'y - R(\hat{\mu}, \hat{\alpha}, \hat{\beta}, \hat{\delta}, \hat{\gamma}, \hat{\alpha}\hat{\gamma}) = y'y - R(18) = 12,6788 ;$$

$$\text{SQ Total Corrigida} = y'y - R(\hat{\mu}) = y'y - R(12) = 107,7364 .$$

As somas de quadrados tipo III de  $G_1$  e  $G_1$  vs  $G_2$  foram:

$$i) \text{SQG}_1 = (A' \hat{\theta}_\alpha)' [A' (Z'_\alpha Z_\alpha)^{-1} A]^{-1} (A' \hat{\theta}_\alpha) = 47,0820 ;$$

sendo

$$A' = \begin{matrix} \begin{bmatrix} 3 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 2 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} & ; \\ (3) & (4) \end{matrix}$$

a matriz dos seguintes contrastes:

$$3\alpha_1 - \alpha_2 - \alpha_3 - \alpha_4 = 0$$

$$2\alpha_2 - \alpha_3 - \alpha_4 = 0$$

$$\alpha_3 - \alpha_4 = 0 ;$$





um escalar obtido a partir da restrição paramétrica  $\sum_{i=1}^5 \hat{\alpha}_i = 0$ ,

$$\lambda = {}_{(1)}[-1 \ -1 \ -1 \ -1]_{(4)}.$$

o vetor linha composto pelos coeficientes da combinação linear para estimar  $\hat{\alpha}_5$ .

#### 4.2.4 Comparação dos resultados dos três tipos de somas de quadrados

Os resultados obtidos das análises feitas com os dados da Tabela 10, para os três tipos de somas de quadrados, podem ser comparados observando-se a Tabela 15.

**TABELA 15.** Resultados obtidos das somas de quadrados tipo I, II e III para as causas de variação do delineamento em estudo, com seus graus de liberdade

CAUSAS DE VARIAÇÃO	G.L.	SQ TIPO I	SQ TIPO II	SQ TIPO III
Blocos	3	22,9097	22,9097	20,2573
G <sub>1</sub>	3	37,7309	37,7309	37,7309
G <sub>1</sub> vs G <sub>2</sub>	1	11,2417	11,3090	11,2417
Tratamentos primários ( T )	(4)	(48,9726)	37,7309	48,9726
Resíduo (a)	12	14,5490	14,5490	14,5490
Parcelas	(19)	86,4314	—	—
Tratamentos Secundários ( T ' )	1	1,6653	1,6653	1,6653
T x T '	3	6,9609	6,9609	6,9609
Resíduo (b)	12	12,6788	12,6788	12,6788
Total	35	107,7364	107,7364	107,7364

Observa-se que os valores para os três tipos de somas de quadrados, para as causas de variação referentes aos tratamentos das subparcelas, foram iguais, pois o desbalanceamento existente na análise em estudo afeta somente as causas de variação referentes aos tratamentos das parcelas. Isso propiciou alterações nas diferentes somas de quadrados, fazendo com que a soma de quadrados tipo III, para blocos, diferenciasse da tipo I e II e, soma de quadrados tipo II, para  $G_1$  vs  $G_2$ , diferenciasse da tipo I e III.

Nota-se também que as somas de quadrados tipo I e tipo III de  $G_1$  e  $G_2$ , somadas, correspondem à soma de quadrados de tratamentos primários, sendo que o mesmo não ocorre nas SQ's tipo II.

Em um delineamento desbalanceado, é mais prudente ponderar um tratamento que repetiu mais vezes por um número maior de repetições e um tratamento que repetiu menos, por um número menor; assim, para o delineamento em questão, recomenda-se a utilização da soma de quadrados tipo II, pois esta testa a igualdade de efeitos sob restrição paramétrica ponderada.

#### **4.3 Somas de quadrados tipo I, II e III obtidas pelo SAS**

Os resultados fornecidos pelo SAS dos três tipos de somas de quadrados para os dados da Tabela 10 estão apresentados na Tabela 16.

**TABELA 16.** Somas de quadrados tipo I, II e III e respectivos graus de liberdade para os dados da Tabela 1, fornecidos pelo SAS

CAUSA DE VARIAÇÃO	G.L.	SQ TIPO I	G.L.	SQ TIPO II	G.L.	SQ TIPO III
Blocos	3	22,9097	3	22,9097	3	20,2573
Trat. Primários ( T )	4	48,9726	3	37,7309	3	37,7309
Resíduo (a)	12	14,5490	12	14,5490	12	14,5490
Trat. Secundários ( T ' )	1	1,6653	1	1,6653	1	1,6653
T x T '	3	6,9609	3	6,9609	3	6,9609
Resíduo (b)	12	12,6788	12	12,6788	12	12,6788
Total	35	107,7364	35	107,7364	35	107,7364

As somas de quadrados obtidas pelo software SAS foram semelhantes às obtidas pela notação R(.), com exceção da soma de quadrados tipo III para tratamentos primários (T). No entanto, neste software, não houve o desdobramento de T em  $G_1$  e  $G_1$  vs  $G_2$ , pelo fato dos contrastes não serem constituídos de funções paramétricas estimáveis.

#### 4.4 Somas de quadrados conforme expressões de Regazzi (1984)

De acordo com as expressões obtidas por Regazzi (1984) para análise de experimentos em parcelas subdivididas com tratamentos secundários em apenas alguns dos tratamentos primários e baseado nas Tabelas auxiliares (Tabelas 17, 18, 19 e 20), foram obtidas as somas de quadrados para as diversas causas de variação que compõem este tipo de experimento, considerando-se os dados da Tabela 10.

**TABELA 17.** Totais da interação de blocos com os tratamentos primários ( T )

BLOCOS	TRATAMENTOS PRINCIPAIS ( T )					Totais
	T <sub>1</sub>	T <sub>2</sub>	T <sub>3</sub>	T <sub>4</sub>	T <sub>5</sub> (Test.)	
I	37,9	37,3	40,6	41,8	16,9	174,5
II	34,7	39,7	39,2	44	17,7	175,3
III	32,4	33,3	37,9	38,4	16,4	158,4
IV	35,8	40,3	40,7	39,7	18,6	175,1
Totais	140,8	150,6	158,4	163,9	69,6	683,3

**TABELA 18.** Totais da interação entre tratamentos primários ( T ) e tratamentos secundários ( T ' )

LINHAS ( T ' )	LÂMINAS ( T )				Totais
	T <sub>1</sub>	T <sub>2</sub>	T <sub>3</sub>	T <sub>4</sub>	
T' <sub>1</sub>	71,2	76,4	76,4	79,2	303,2
T' <sub>2</sub>	69,6	74,2	82	84,7	310,5
Totais	140,8	150,6	158,4	163,9	613,7

**TABELA 19.** Totais da interação entre grupo 1 e blocos

BLOCOS	G <sub>1</sub>				Totais
	T <sub>1</sub>	T <sub>2</sub>	T <sub>3</sub>	T <sub>4</sub>	
I	37,9	37,3	40,6	41,8	157,6
II	34,7	39,7	39,2	44	157,6
III	32,4	33,3	37,9	38,4	142,0
IV	35,8	40,3	40,7	39,7	156,5
Totais	140,8	150,6	158,4	163,9	613,7

**TABELA 20.** Totais da interação entre grupo 2 e blocos

BLOCOS	G <sub>2</sub>
	T <sub>3</sub>
I	16,9
II	17,7
III	16,4
IV	18,6
Totais	69,6

Assim, obteve-se:

$$C = \frac{G^2}{n} = \frac{\left( \sum_{i=1}^L \sum_{j=1}^J \sum_{k=1}^{s_i} y_{ijk} \right)^2}{n} = \frac{(683,30)^2}{36} = 12969,4136 ;$$

$$\begin{aligned} \text{SQBlocos} &= \frac{1}{IK+L-I} \sum_{j=1}^J B_j^2 - C \\ &= \frac{1}{9} (174,50^2 + 175,30^2 + 158,40^2 + 175,10^2) - 12969,4136 \\ &= 22,9097 ; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{SQG}_1 (\text{Entre Lâminas}) &= \frac{1}{JK} \sum_{i=1}^I T_i^2 - C_1 \\ &= \frac{1}{8} (140,80^2 + 150,60^2 + 158,40^2 + 163,90^2) - \frac{(613,70)^2}{32} = 37,7309 ; \end{aligned}$$

$$\bullet \text{ SQG}_1 \text{ vs G}_2 = \sum_{i=1}^L \frac{T_i^2}{J s_i} - C - \text{SQ G}_1 = \text{SQ Tratamentos T} - \text{SQ G}_1$$

$$= 48,9726 - 37,7309 = 11,2417;$$

$$\bullet \text{ SQ Tratamentos T} = \sum_{i=1}^L \frac{T_i^2}{J s_i} - C$$

$$= \frac{(140,8^2 + 150,6^2 + 158,4^2 + 163,9^2)}{4 \times 2} + \frac{69,60^2}{4 \times 1} - 12969,4136$$

$$= 48,9726 ;$$

$$\bullet \text{ SQ Parcelas} = \sum_{i=1}^L \sum_{j=1}^J \frac{p_{ij}^2}{s_i} - C =$$

$$\frac{(37,9^2 + 34,7^2 + \dots + 38,7^2 + 39,7^2)}{2} + \frac{(16,9^2 + 17,7^2 + 16,4^2 + 18,60^2)}{1} - 12969,4136$$

$$= 86,4314 ;$$

$$\bullet \text{ SQ Resíduo (a)} = \text{SQ Parcelas} - \text{SQ Blocos} - \text{SQ Tratamentos T}$$

$$= 86,4314 - 22,9097 - 48,9726$$

$$= 14,5490 ;$$

$$\cdot \text{SQTratamentos (T')} = \frac{1}{IJ} \sum_{k=1}^K T_k'^2 - C_1,$$

$$\text{sendo } C_1 = \frac{(\sum_{i=1}^I \sum_{j=1}^J \sum_{k=1}^K y_{ijk})^2}{IJK} = \frac{(613,70)^2}{32} = 11769,6153;$$

$$\begin{aligned} \cdot \text{SQTratamentos T'} &= \frac{1}{16} (313,2^2 + 310,5^2) - 11769,6153 \\ &= 1,6653; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \cdot \text{SQ T x T'} &= \frac{1}{J} \sum_{i=1}^I \sum_{k=1}^K (TT')_{ik}^2 - C_1 - \left( \frac{1}{JK} \sum_{i=1}^I T_i'^2 - C_1 \right) - \text{SQTratamentos T'} \\ &= \frac{1}{4} (71,2^2 + 69,6^2 + \dots + 84,7^2) - 11769,6153 - \\ &\quad - \left[ \frac{1}{8} (140,8^2 + \dots + 163,9^2) - 11769,6153 \right] - 1,6653 \\ &= 6,9609; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \cdot \text{SQTotal} &= \sum_{i=1}^L \sum_{j=1}^J \sum_{k=1}^{s_i} y_{ijk}^2 - C \\ &= (19,00^2 + 18,9^2 + \dots + 16,40^2 + 18,60^2) - 12969,4136 \\ &= 107,7364; \end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
 \bullet \text{ SQResíduo (b)} &= \text{SQTotal} - \text{SQParcelas} - \text{SQTratamentos T}' - \text{SQ T x T}' \\
 &= 107,7364 - 86,4314 - 1,6653 - 6,9609 \\
 &= 12,6788 .
 \end{aligned}$$

#### 4.4.1 Análise de variância de acordo com Regazzi (1984)

Com os dados da Tabela 10 e com as somas de quadrados obtidas através das expressões de Regazzi (1984), têm-se, na Tabela 21, os resultados da análise de variância.

**TABELA 21.** Análise de variância dos dados da Tabela 10, referentes ao comprimento (cm) do fruto central da terceira penca da banana cultivar Prata anã, com decomposição dos tratamentos primários em  $G_1$  e  $G_1$  vs  $G_2$ , de acordo com Regazzi (1984)

C.V.	G.L.	S.Q.	Q.M.	F	Prob.
Blocos	3	22,9097	7,6366		
Entre lâminas ( $G_1$ )	3	37,7309	12,5770	10,37	0,0012
Grupos ( $G_1$ vs $G_2$ )	1	11,2417	11,2417	9,27	0,0102
( Tratamentos T )	(4)	(48,9726)	12,2432	10,10	0,0008
Resíduo (a)	12	14,5490	1,2124		
Tratamentos T'	1	1,6653	1,6653	1,58	0,2327
Int. $G_1$ x T'	3	6,9609	2,3203	2,20	0,1409
Resíduo (b)	12	12,6788	1,0566		
<b>Total</b>	<b>35</b>	<b>107,7364</b>			

Verificou-se efeito significativo entre lâminas e para grupos ( $G_1$  vs  $G_2$ ),

indicando um efeito positivo da aplicação das diferentes lâminas d'água; e que a testemunha apresentou um comprimento do fruto central menor do que os tratamentos irrigados.

Para estudar o efeito de lâmina d'água, que é um fator quantitativo, aconselha-se o uso da análise de regressão e, para tal, deve-se considerar as matrizes  $X$  adequadas para se testar os coeficientes de regressão na análise de variância.

Nota-se que os resultados obtidos através das expressões de Regazzi (1984) coincidem com as somas de quadrados tipo I.

## 5 CONCLUSÕES

i) As somas de quadrados tipo I obtidas através de diferenças entre reduções  $R(.)$  foram equivalentes aos resultados obtidos pela metodologia proposta por Regazzi (1984).

ii) Os resultados para os três tipos de somas de quadrados correspondem àqueles fornecidos pelo SAS, com exceção da soma de quadrados tipo III para tratamentos primários.

iii) As somas de quadrados tipo III para as causas de variação, obtidas através de diferenças entre reduções  $R(.)$  ou usando, em alguns casos, o processo da inversa de partes da inversa de Searle (1971), foram equivalentes às somas de quadrados tipo I, exceto para a causa de variação de blocos; as somas de quadrados tipo II para grupo 1 versus grupo 2 e para tratamentos primários, diferiram dos outros dois tipos de somas de quadrados obtidas.

iv) A metodologia utilizada pode ser adaptada para experimentos em parcelas subdivididas envolvendo mais de uma testemunha, bastando para tal utilizar as matrizes adequadas.

## 6 REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- ANDERSON, R.L.; BANCROFT, T.A. **Statistical theory in research**. New York: McGraw-Hill, 1952. 399p.
- BANZATTO, D.A.; KRONKA, S. do N. **Experimentação agrícola**. Jaboticabal: Funep, 1995. 247p.
- CALZADA BENZA, J. **Métodos estadísticos para la investigación**. 3.ed. Lima: Editorial Jurídica, 1970. 644p.
- COCHRAN, W.G. Some consequences when the assumptions for the analysis of variance are not satisfied. **Biometrics**, Raleigh, v.3, p.22-38, 1947.
- COCHRAN, W.G.; COX, G.M. **Diseños experimentales**. 3.ed. Trillas: México, 1976. 661p.
- CONDÉ, A.R. **Estudo dos componentes de variância nos experimentos em parcelas subdivididas**. Piracicaba: ESALQ/USP, 1974. 57p. (Dissertação-Mestrado em Experimentação e Estatística).
- FEDERER, W.T. **Experimental design**. New York: McMillan, 1955. 544p.
- FIGUEIREDO, F. P. de. **Efeito de diferentes lâminas d'água e da área umedecida sobre o desenvolvimento vegetativo, produção e qualidade do fruto da bananeira (*Musa sp*) cv. Prata anã**. Lavras: UFLA, 1998. 96p. (Dissertação-Mestrado em Engenharia Agrícola).
- GOODNIGHT, J.H. Tests of hypothesis in fixed effects linear models. **Communication Statistical Theoretical Methodology**, v.9, n.2. p.167-180. 1980.

**HOFFMANN, R. Decomposição da soma de quadrados de tratamento.**  
Piracicaba: ESALQ/USP, 1975. 22p. Mimeografado.

**IEMMA, A.F. Análise de experimentos em parcelas subdivididas com tratamentos principais dispostos em blocos incompletos balanceados.**  
Piracicaba: ESALQ/USP, 1981. 145p. (Tese-Doutorado em Agronomia/Estatística e Experimentação Agronômica).

**IEMMA, A.F. Modelos lineares.** Piracicaba: ESALQ/USP, 1994. 182p.

**IEMMA, A.F. Testes de hipóteses em modelos lineares com amostras desequilibradas.** Belgique: Gembloux, 1991. 101p.

**KHATTREE, R.; NAIK, D. N. Applied multivariate statistics with SAS® software.** Cary, NC: SAS Institute, 1995. 396p.

**KEMPTHORNE, O. The design and analysis of experiments.** New York: J. Wiley, 1952. 631p.

**LEAL, M.L.S. Análise de dados experimentais com medidas repetidas.**  
Brasília: UnB, 1979. 99p. (Dissertação-Mestrado em Métodos Quantitativos).

**LEONARD, W.H. ; CLARK, A.G. Field plot technique.** Minneapolis: Burgess, 1939. 288p.

**LITTEL, R. C.; FREUND, R.J.; SPECTOR, P.C. SAS® system for linear models.** 6 ed. Cary, NC: SAS Institute, 1997. 329p.

**LITTLE, T.M.; HILLS, F.J. Statistical methods in agricultural research.**  
Davis: University of California, 1972. 242p.

**MISCHAN, M.M.; PINHO, S.Z. de. Experimentação agronômica: dados não balanceados.** Botucatu: Fundibio, 1996. 457p.

- MORAIS, A.R. **Análise intrablocos de experimentos em parcelas subdivididas com tratamentos principais em blocos incompletos parcialmente balanceados.** Piracicaba: ESALQ/USP, 1992. 115p. (Tese-Doutorado em Agronomia/Estatística e Experimentação Agronômica).
- MATLAB-Matrix Laboratory.** High-performance numeric computation and visualization software, 1994. 443p.
- PIMENTEL GOMES, F. **Curso de estatística experimental.** 13.ed. Piracicaba: Nobel, 1990. 468 p.
- PIMENTEL GOMES, F. The solution of normal equations of experiments in incomplete blocks. **Ciência e Cultura**, São Paulo, v.20, p.733-746, 1968.
- REGAZZI, A.J. **Análise de experimentos em parcelas subdivididas com tratamentos secundários em apenas alguns tratamentos principais.** Piracicaba: ESALQ/USP, 1984. 105p. (Tese-Doutorado em Agronomia /Estatística e Experimentação Agronômica).
- SANTOS, E.S. **Utilização de “softwares” estatísticos na interpretação de hipóteses com dados desbalanceados.** Piracicaba: ESALQ/USP, 1994. 175p. (Tese-Doutorado em Agronomia/Estatística e Experimentação Agronômica).
- SATTERTHWATE, F.E. An approximate distribution of estimates of variance components. **Biometrics**, Fort Collins, v.2, p.110-114, 1946.
- SEARLE, S.R. **Linear models.** New York: J. Wiley, 1971. 532p.
- SEARLE, S.R. **Linear models for unbalanced data.** New York: J. Wiley, 1987. 536p.

**SPEED, F.M.; HOCKING, R.R.** The use of the R(.) notation with unbalanced data. **The American Statistician**, Washington, v.28, n.1, p.30-33, 1976.

**STATISTICAL ANALYSIS SYSTEM INSTITUTE.** SAS Language and Procedures: usage. Version 6. Cary, NC: SAS Institute, 1995. 373p.

**STEEL, R.G.D.; TORRIE, J.H.** Principles and procedures of statistics. New York: McGraw-Hill, 1960. 481p.

**TAYLOR, J.** The comparison of pairs of treatments in split-plot experiments. **Biometrika**, Londres, v.37, p.443-444, 1950.

**VEIGA, R.D.; FERREIRA, D.F.** Introdução ao sistema SAS. Lavras: UFLA, 1997. 77p.

**VIEIRA, S.; HOFFMANN, R.** Estatística experimental. São Paulo: Atlas, 1989. 179 p.

ANEXOS A		Página
ANEXO 1A	Vetor das observações.....	88
ANEXO 2A	Matriz dos coeficientes dos parâmetros $\mu, \alpha, \beta, \delta, \gamma, \alpha\gamma$ .....	89
ANEXO 3A	Matriz envolvida no SEN do modelo com os parâmetros $\mu, \alpha, \beta, \delta, \gamma, \alpha\gamma$ .....	90
ANEXO 4A	Vetor solução do SEN envolvendo os parâmetros $\mu, \alpha, \beta, \delta, \gamma, \alpha\gamma$ .....	92

ANEXOS B		Página
ANEXO 1B	Vetor dos coeficientes do parâmetro $\mu$ .....	94
ANEXO 2B	Matriz dos coeficientes dos parâmetros $\mu$ e $\alpha$ .....	95
ANEXO 3B	Matriz dos coeficientes dos parâmetros $\mu, \alpha$ e $\beta$ .....	96
ANEXO 4B	Matriz dos coeficientes dos parâmetros $\mu, \alpha, \beta$ e $\delta$ .....	97
ANEXO 5B	Matriz dos coeficientes dos parâmetros $\mu, \alpha, \beta, \delta, \gamma$ .....	98
ANEXO 6B	Matriz dos coeficientes dos parâmetros $\mu, \alpha_s$ .....	99

ANEXOS C		Página
ANEXO 1C	Matriz dos coeficientes dos parâmetros $\mu, \beta, \gamma$ .....	100
ANEXO 2C	Matriz dos coeficientes dos parâmetros $\mu, \alpha, \beta, \gamma$ .....	101
ANEXO 3C	Matriz dos coeficientes dos parâmetros $\mu, \alpha, \gamma, \alpha\gamma$ .....	102
ANEXO 4C	Matriz dos coeficientes dos parâmetros $\mu, \alpha, \beta, \delta, \gamma, \alpha\gamma$ .....	103
ANEXO 5C	Matriz dos coeficientes dos parâmetros $\mu, \alpha, \beta, \delta, \gamma, \alpha\gamma$ , considerando restrições paramétricas ponderadas.....	104



ANEXO 6C	Matriz envolvida no SEN do modelo com os parâmetros $\mu, \alpha, \beta, \delta, \gamma, \alpha\gamma$ , considerando restrições paramétricas ponderadas.....	105
ANEXO 7C	Vetor solução do SEN envolvendo os parâmetros $\mu, \alpha, \beta, \delta, \gamma, \alpha\gamma$ , considerando restrições paramétricas ponderadas.....	106

#### ANEXOS D

Página

ANEXO 1D	Matriz dos coeficientes dos parâmetros $\hat{\mu}, \hat{\alpha}, \hat{\beta}, \hat{\delta}, \hat{\gamma}, \hat{\alpha}\hat{\gamma}$ , considerando restrições paramétricas do tipo - $\Sigma$ .....	107
ANEXO 2D	Matriz envolvida no SEN do modelo com os parâmetros $\hat{\mu}, \hat{\alpha}, \hat{\beta}, \hat{\delta}, \hat{\gamma}, \hat{\alpha}\hat{\gamma}$ considerando restrições paramétricas do tipo - $\Sigma$ .....	108
ANEXO 3D	Vetor solução do SEN envolvendo os parâmetros $\hat{\mu}, \hat{\alpha}, \hat{\beta}, \hat{\delta}, \hat{\gamma}, \hat{\alpha}\hat{\gamma}$ , considerando restrições paramétricas do tipo - $\Sigma$ .....	109
ANEXO 4D	Vetor dos coeficientes do parâmetro $\hat{\mu}$ .....	110
ANEXO 5D	Matriz dos coeficientes dos parâmetros $\hat{\mu}, \hat{\alpha}, \hat{\delta}, \hat{\gamma}, \hat{\alpha}\hat{\gamma}$ .....	111
ANEXO 6D	Matriz dos coeficientes dos parâmetros $\hat{\mu}, \hat{\beta}, \hat{\delta}, \hat{\gamma}, \hat{\alpha}\hat{\gamma}$ .....	112
ANEXO 7D	Matriz dos coeficientes dos parâmetros $\hat{\mu}, \hat{\alpha}, \hat{\beta}, \hat{\delta}, \hat{\alpha}\hat{\gamma}$ .....	113
ANEXO 8D	Matriz dos coeficientes dos parâmetros $\hat{\mu}, \hat{\alpha}, \hat{\beta}, \hat{\gamma}, \hat{\alpha}\hat{\gamma}$ .....	114
ANEXO 9D	Matriz dos coeficientes dos parâmetros $\hat{\mu}, \hat{\alpha}, \hat{\beta}, \hat{\delta}, \hat{\gamma}$ .....	115

#### ANEXOS E

Página

ANEXO 1E	Programa usado no software SAS para análise de experimentos em parcelas subdivididas com testemunhas na parcela.....	116
----------	--	-----

## ANEXO 1A Vetor das observações

$$y = \begin{bmatrix} Y_{111} \\ Y_{112} \\ Y_{121} \\ Y_{122} \\ Y_{131} \\ Y_{132} \\ Y_{141} \\ Y_{142} \\ Y_{211} \\ Y_{212} \\ Y_{221} \\ Y_{222} \\ Y_{231} \\ Y_{232} \\ Y_{241} \\ Y_{242} \\ Y_{311} \\ Y_{312} \\ Y_{321} \\ Y_{322} \\ Y_{331} \\ Y_{332} \\ Y_{341} \\ Y_{342} \\ Y_{411} \\ Y_{412} \\ Y_{421} \\ Y_{422} \\ Y_{431} \\ Y_{432} \\ Y_{441} \\ Y_{442} \\ Y_{510} \\ Y_{520} \\ Y_{530} \\ Y_{540} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 19,00 \\ 18,90 \\ 17,10 \\ 17,60 \\ 17,50 \\ 14,90 \\ 17,60 \\ 18,20 \\ 19,20 \\ 18,10 \\ 19,50 \\ 20,20 \\ 17,50 \\ 15,80 \\ 20,20 \\ 20,10 \\ 19,80 \\ 20,80 \\ 18,30 \\ 20,90 \\ 19,30 \\ 18,60 \\ 19,00 \\ 21,70 \\ 20,70 \\ 21,10 \\ 21,30 \\ 22,70 \\ 17,40 \\ 21,00 \\ 19,80 \\ 19,90 \\ 16,90 \\ 17,70 \\ 16,40 \\ 18,60 \end{bmatrix}$$

de dimensões 36 x 1.







**ANEXO 4A** Vetor solução do SEN envolvendo os parâmetros  $\mu, \alpha, \beta, \delta, \gamma,$   
 $\alpha\gamma$

$$\theta^\circ = \begin{bmatrix} 10,3130 \\ 0,7747 \\ 1,4747 \\ 2,0319 \\ 2,4247 \\ 3,6070 \\ 2,8428 \\ 2,9762 \\ 1,4595 \\ 3,0345 \\ 1,2791 \\ -0,4542 \\ -0,0876 \\ 0,0374 \\ -0,0709 \\ 0,9958 \\ -0,6876 \\ 1,2374 \\ 0,7434 \\ -0,0900 \\ 0,7767 \\ 0,6017 \\ 0,7541 \\ 1,7208 \\ 0,4374 \\ -0,4876 \\ 0,1372 \\ 0,8038 \\ 1,0205 \\ 1,6455 \\ 3,1705 \\ 3,5355 \\ 0,7699 \\ 0,0049 \end{bmatrix}$$

“...continua...”

“ANEXO 4A, Cont.”

1,1949
0,2799
0,4984
1,5334
0,7074
1,7174

de dimensões 40 x 1.





**ANEXO 2B Matriz dos coeficientes dos parâmetros  $\mu$  e  $\alpha$**

$$X_2 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

de dimensões 36 x 6.

**ANEXO 3B Matriz dos coeficientes dos parâmetros  $\mu$ ,  $\alpha$  e  $\beta$**

$$X_3 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

de dimensões 36 x 10.







**ANEXO 1C Matriz dos coeficientes dos parâmetros  $\mu, \beta, \gamma$**

$$X_3 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

de dimensões 36 x 7.









**ANEXO 5C Matriz dos coeficientes dos parâmetros  $\mu$ ,  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\delta$ ,  $\gamma$ ,  $\alpha\gamma$ , considerando restrições paramétricas ponderadas**

W =

1	1	0	0	0	1	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	0	0
1	1	0	0	0	1	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	-1	-1	0	0
1	1	0	0	0	0	1	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	0	0
1	1	0	0	0	0	1	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	-1	-1	0	0
1	1	0	0	0	0	0	1	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	1	1	0	0
1	1	0	0	0	0	0	1	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	-1	-1	0	0
1	1	0	0	0	-1	-1	-1	-1	-1	-1	0	0	0	0	0	0	0	1	1	0	0
1	1	0	0	0	-1	-1	-1	-1	-1	-1	0	0	0	0	0	0	0	-1	-1	0	0
1	0	1	0	0	1	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	1	0	1	0
1	0	1	0	0	1	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	-1	0	-1	0
1	0	1	0	0	0	1	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	1	0	1	0
1	0	1	0	0	0	1	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	-1	0	-1	0
1	0	1	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	1	0	1	0
1	0	1	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	-1	0	-1	0
1	0	1	0	0	-1	-1	-1	0	0	0	-1	-1	-1	0	0	0	0	1	0	1	0
1	0	1	0	0	-1	-1	-1	0	0	0	-1	-1	-1	0	0	0	0	-1	0	-1	0
1	0	0	1	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	1	0	0	1
1	0	0	1	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	-1	0	0	-1
1	0	0	1	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	1	0	0	1
1	0	0	1	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	-1	0	0	-1
1	0	0	1	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	1	0	0	1
1	0	0	1	0	-1	-1	-1	0	0	0	0	0	0	-1	-1	-1	0	0	0	1	0
1	0	0	1	0	-1	-1	-1	0	0	0	0	0	0	-1	-1	-1	0	0	0	-1	0
1	0	0	0	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	1	-1	-1	-1
1	0	0	0	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	-1	1	1	1
1	0	0	0	1	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	1	-1	-1	-1
1	0	0	0	1	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	-1	-1	-1	-1
1	0	0	0	1	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	1	-1	1	1	1	1
1	0	0	0	1	-1	-1	-1	0	0	0	0	0	0	0	0	-1	-1	-1	1	-1	-1
1	0	0	0	1	-1	-1	-1	0	0	0	0	0	0	0	0	-1	-1	-1	-1	1	1
1	-2	-2	-2	-2	1	0	0	-2	0	0	-2	0	0	-2	0	0	-2	0	0	0	0
1	-2	-2	-2	-2	0	1	0	0	-2	0	0	-2	0	0	-2	0	0	-2	0	0	0
1	-2	-2	-2	-2	0	0	1	0	0	-2	0	0	-2	0	0	-2	0	0	-2	0	0
1	-2	-2	-2	-2	-1	-1	-1	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	0	0



**ANEXO 7C** Vetor solução do SEN envolvendo os parâmetros  $\mu, \alpha, \beta, \delta, \gamma, \alpha\gamma$ , considerando restrições paramétricas ponderadas

$$\hat{\mathbf{B}} = \begin{bmatrix} 18,9806 \\ -1,3806 \\ -0,1556 \\ 0,8194 \\ 1,5069 \\ 0,4083 \\ 0,4972 \\ -1,3806 \\ 0,9417 \\ -0,7472 \\ -0,0194 \\ -0,5833 \\ 0,5278 \\ -0,7944 \\ 0,0917 \\ -0,6972 \\ 0,5306 \\ 0,0042 \\ 1,0153 \\ 0,0931 \\ -0,2281 \\ 0,4281 \\ 0,5031 \\ -0,4719 \end{bmatrix}$$

de dimensões 24 x 1.

**ANEXO 1D Matriz dos coeficientes dos parâmetros  $\mu, \alpha, \beta, \delta, \gamma, \alpha\gamma,$   
considerando restrições paramétricas do tipo -  $\Sigma$**

Z =

1	1	0	0	0	1	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	0	0
1	1	0	0	0	1	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	-1	-1	0	0
1	1	0	0	0	0	1	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	0	0
1	1	0	0	0	0	1	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	-1	-1	0	0
1	1	0	0	0	0	0	1	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	0	0
1	1	0	0	0	0	0	1	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	-1	-1	0	0
1	1	0	0	0	-1	-1	-1	-1	-1	-1	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	0	0
1	1	0	0	0	-1	-1	-1	-1	-1	-1	0	0	0	0	0	0	0	0	-1	-1	0	0
1	0	1	0	0	1	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	1	0	1	0
1	0	1	0	0	1	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	-1	0	-1	0
1	0	1	0	0	0	1	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	1	0	1	0
1	0	1	0	0	0	1	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	-1	0	-1	0
1	0	1	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	1	0	1	0
1	0	1	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	-1	0	-1	0
1	0	1	0	0	-1	-1	-1	0	0	0	-1	-1	-1	0	0	0	0	0	1	0	1	0
1	0	1	0	0	-1	-1	-1	0	0	0	-1	-1	-1	0	0	0	0	0	-1	0	-1	0
1	0	0	1	0	1	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	1	0	0	1
1	0	0	1	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	-1	0	0	-1
1	0	0	1	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	-1	0	0	-1
1	0	0	1	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	1	0	0	1
1	0	0	1	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	-1	0	0	-1
1	0	0	1	0	-1	-1	-1	0	0	0	0	0	-1	-1	-1	0	0	0	1	0	0	1
1	0	0	1	0	-1	-1	-1	0	0	0	0	0	-1	-1	-1	0	0	0	-1	0	0	-1
1	0	0	0	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	1	-1	-1	-1
1	0	0	0	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	-1	1	1	1
1	0	0	0	1	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	1	-1	-1	-1
1	0	0	0	1	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	-1	1	1	1
1	0	0	0	1	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	-1	-1	-1	-1
1	0	0	0	1	-1	-1	-1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	-1	1	1	1	1
1	0	0	0	1	-1	-1	-1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	-1	-1	-1	-1	1	1
1	-1	-1	-1	-1	1	0	0	-1	0	0	-1	0	0	-1	0	0	-1	0	0	0	0	0
1	-1	-1	-1	-1	0	1	0	0	-1	0	0	-1	0	0	-1	0	0	-1	0	0	0	0
1	-1	-1	-1	-1	0	0	1	0	0	-1	0	0	-1	0	0	-1	0	0	-1	0	0	0
1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	0	0



**ANEXO 3D Vetor solução do SEN envolvendo os parâmetros  $\hat{\mu}, \hat{\alpha}, \hat{\beta}, \hat{\delta}, \hat{\gamma}, \alpha, \gamma$ , considerando restrições paramétricas do tipo -  $\Sigma$**

$$\hat{\theta} = \begin{bmatrix} 18,8225 \\ -1,2225 \\ 0,0025 \\ 0,9775 \\ 1,6650 \\ 0,3175 \\ 0,4775 \\ -1,3425 \\ 1,0325 \\ -0,7275 \\ -0,0575 \\ -0,4925 \\ 0,5475 \\ -0,8325 \\ 0,1825 \\ -0,6775 \\ 0,4925 \\ 0,0950 \\ 1,0350 \\ 0,0550 \\ -0,2281 \\ 0,4281 \\ 0,5031 \\ -0,4719 \end{bmatrix}$$

de dimensões 24 x 1.











**ANEXO 8D Matriz dos coeficientes dos parâmetros  $\mu, \alpha, \beta, \gamma, \alpha \gamma$**

$$Z_{16} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & -1 & -1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & -1 & -1 & -1 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & -1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & -1 & -1 & -1 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & -1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & -1 & -1 & 1 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

de dimensões 36 x 12.



**ANEXO 1E Programa usado no software SAS para análise de experimentos em parcelas subdivididas com testemunhas na parcela**

```
data lamina;
input lam bl lin comp;
cards;
1 1 1 19.0
1 1 2 18.9
1 2 1 17.1
1 2 2 17.6
1 3 1 17.5
1 3 2 14.9
1 4 1 17.6
1 4 2 18.2
2 1 1 19.2
2 1 2 18.1
2 2 1 19.5
2 2 2 20.2
2 3 1 17.5
2 3 2 15.8
2 4 1 20.2
2 4 2 20.1
3 1 1 19.8
3 1 2 20.8
3 2 1 18.3
3 2 2 20.9
3 3 1 19.3
3 3 2 18.6
3 4 1 19.0
3 4 2 21.7
4 1 1 20.7
4 1 2 21.1
4 2 1 21.3
4 2 2 22.7
4 3 1 17.4
4 3 2 21.0
4 4 1 19.8
4 4 2 19.9
5 1 0 16.9
5 2 0 17.7
5 3 0 16.4
5 4 0 18.6
;
```

“...continua...”

“ANEXO 1E, Cont.”

```
proc GLM;
class lam bl lin;
model comp=lam bl lin lam*bl lam*lin/e e1 e2 e3 SS1 SS2
SS3;
test H=bl lam e=bl*lam/etype=3 htype=3;
test H=bl lam e=bl*lam/etype=2 htype=2;
test H=bl lam e=bl*lam/etype=1 htype=1;
contrast '1, 2, 3, 4 vs 5' lam 1 1 1 1 -4; /*não estimável*/
contrast '1 vs 2' lam 1 -1; /*não estimável*/
contrast '2 vs 3' lam 0 1 -1; /*não estimável*/
contrast '3 vs 4 ' lam 0 0 1 -1; /*não estimável*/
run;quit;
```