



JAQUELINE ALVARENGA SILVEIRA

**UMA SOLUÇÃO DA EQUAÇÃO DE
LAPLACE PELO MÉTODO DOS VOLUMES
FINITOS COM DIAGRAMA DE VORONOI E
REFINAMENTO ADAPTATIVO DE
DELAUNAY**

**LAVRAS – MG
2011**

JAQUELINE ALVARENGA SILVEIRA

**UMA SOLUÇÃO DA EQUAÇÃO DE LAPLACE PELO MÉTODO
DOS VOLUMES FINITOS COM DIAGRAMA DE VORONOI E
REFINAMENTO ADAPTATIVO DE DELAUNAY**

Monografia apresentada ao Colegiado do
Curso de Sistemas de Informação, para a
obtenção do título de Bacharel em
Sistemas de Informação.

(Orientador)
Prof. Sanderson Lincoln Gonzaga de Oliveira, D.Sc.

**LAVRAS – MG
2011**

JAQUELINE ALVARENGA SILVEIRA

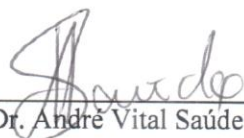
**UMA SOLUÇÃO DA EQUAÇÃO DE LAPLACE PELO MÉTODO
DOS VOLUMES FINITOS COM DIAGRAMA DE VORONOI E
REFINAMENTO ADAPTATIVO DE DELAUNAY**

Monografia apresentada ao Colegiado do
Curso de Sistemas de Informação, para a
obtenção do título de Bacharel em
Sistemas de Informação.

APROVADA em 21 de Novembro de 2011



Dra. Amanda Castro Oliveira (DEX/UFLA)



Dr. André Vital Saúde (DCC/UFLA)



Prof. Sanderson Lincohn Gonzaga de Oliveira, D.Sc. (DCC/UFLA)
(Orientador)

**LAVRAS – MG
2011**

Dedico esse trabalho primeiramente à Deus, que sempre segurou-me em todos os momentos difíceis durante toda esta longa jornada. Ao meu pai Rogério e a minha mãe Margareth, pois eles dão-me apoio emocional e financeiro e com certeza continuarão apoiando-me em todos os momentos da minha vida. Dedico também ao meu irmão Anderson e a meu namorado Eudes, que sempre apoiam-me e dão-me paz, amor e carinho além de forças para sempre seguir em frente. Por fim, quero agradecer ao meu orientador Sanderson pelo apoio e compreensão durante a minha iniciação científica e durante este trabalho, aos meus colegas de laboratório Talles e Jéssica que nas horas mais difíceis nunca deixaram de apoiar-me. Agradeço ainda, ao Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico (CNPq) e à Fundação de Amparo à Pesquisa de Minas Gerais (FAPEMIG) pelo apoio financeiro.

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

| | |
|---|----|
| Figura 1: Malha regular. | 5 |
| Figura 2: Malha irregular. | 6 |
| Figura 3: Parâmetros adaptados na triangulação de Delaunay. | 7 |
| Figura 4: Pode ser observado que em (b) e (c) o círculo é vazio, já em (a) pode-se observar que o círculo não é vazio. | 8 |
| Figura 5: Em (a) pode-se observar uma aresta ilegal $e = ab$ pontilhada. Já em (b) pode-se observar que a aresta ilegal $e = ab$ foi removida por meio da primitiva <i>flip-edge</i> e uma aresta legal $e = dc$ foi inserida. | 9 |
| Figura 6: Propriedades do diagrama de Voronoi (em linha contínua) que é o dual geométrico da triangulação de Delaunay (em linha pontilhada). | 11 |
| Figura 7: Pode-se observar que o centro de alguns círculos que passam pelos três vértices de alguns triângulos. | 13 |
| Figura 8: Pode-se observar uma ligação entre os circuncentros de alguns triângulos gerando dois polígonos de Voronoi. | 13 |
| Figura 9: Cada vértice da triangulação aponta para um vértice adjacente a ele e para triângulos em que ele incide. | 18 |
| Figura 10: Relações entre entidades que constituem a estrutura de dados grafo. | 19 |
| Figura 11: Pode-se observar o domínio de solução empregado neste trabalho. Os vértices pertencentes à borda que estiverem ao norte, leste (exceto em $x = 1$ e $y = 0$) e oeste (exceto em $x = 0$ e $y = 0$) terão um valor igual a dez e ao sul terão um valor igual à zero. | 21 |
| Figura 12: Pode-se observar que o segmento de reta L_{pi} é normal ao segmento de reta da interface pi que separa o polígono U_p do polígono U_i e, portanto, diagrama de Voronoi respeita a propriedade de ortogonalidade. ... | 22 |
| Figura 13: Pode-se observar uma triangulação de Delaunay com 33 vértices e 48 triângulos. | 23 |
| Figura 14: Triangulação de Delaunay com vértices internos. | 24 |
| Figura 15: Triangulação de Delaunay com vértices na borda. | 25 |
| Figura 16: Sistema linear gerado pelo método dos volumes finitos a partir da malha inicial. | 27 |
| Figura 17: Pode-se observar o diagrama de atividades do projeto computacional desenvolvido. | 28 |
| Figura 18: Diagrama de classes do projeto computacional desenvolvido. | 29 |
| Figura 19: Malha inicial com diagrama de Voronoi. As arestas de Voronoi ligadas à borda do domínio são infinitas. | 30 |

| | |
|---|----|
| Figura 20: Inserção do novo vértice n no centro do círculo inscrito ao triângulo abc . | 31 |
| Figura 21: Inserção do novo vértice n na mediatriz do segmento de reta bc que pertence ao triângulo abc . | 32 |
| Figura 22: Diagrama de atividades do refinamento adaptativo da malha. | 33 |
| Figura 23: Solução da equação de Laplace em cada vértice da triangulação. | 34 |
| Figura 24: Teste do circuncírculo realizado na malha inicial. | 35 |
| Figura 25: Refinamento adaptativo da malha. | 35 |
| Figura 26: Teste <i>in-circle</i> na triangulação de Delaunay gerada com o critério de refinamento $\epsilon > 3,0$. | 36 |
| Figura 27: Solução da equação de Laplace, com as condições de contorno dadas na subseção 3.3.1, no centróide de cada polígono de Voronoi com o critério de refinamento $\epsilon > 3,0$. | 37 |
| Figura 28: Triangulação de Delaunay gerada com o critério de refinamento $\epsilon > 2,0$. | 38 |
| Figura 29: Diagrama de Voronoi gerado a partir de uma triangulação de Delaunay com o critério de refinamento $\epsilon > 2,0$. | 38 |
| Figura 30: Teste <i>in-circle</i> na triangulação de Delaunay gerada com o critério de refinamento $\epsilon > 2,0$. | 39 |
| Figura 31: Solução da equação de Laplace, com as condições de contorno dadas na subseção 3.3.1, no centróide de cada polígono de Voronoi com o critério de refinamento $\epsilon > 2,0$. | 40 |
| Figura 32: Triangulação de Delaunay gerada com o critério de refinamento $\epsilon > 1,5$. | 40 |
| Figura 33: Diagrama de Voronoi gerado a partir de uma triangulação de Delaunay com o critério de refinamento $\epsilon > 1,5$. | 41 |
| Figura 34: Solução da equação de Laplace, com as condições de contorno dadas na subseção 3.3.1, no centróide de cada polígono de Voronoi com o critério de refinamento $\epsilon > 1,5$. | 42 |
| Figura 35: Malha com 34191 vértices e 66902 triângulos. | 42 |
| Figura 36: Malha com 45994 vértices e 90126 triângulos. | 43 |
| Figura 37: Malha com 48599 vértices e 95137 triângulos. | 43 |
| Figura 38: Malha com 38366 vértices e 75468 triângulos. | 44 |
| Figura 39: Malha com 53882 vértices e 105943 triângulos. | 44 |

RESUMO

O principal objetivo deste trabalho é encontrar uma solução numérica para a equação de Laplace pelo método dos volumes finitos com o diagrama de Voronoi. Para a discretização do domínio, utiliza-se uma triangulação de Delaunay e seu dual geométrico, o diagrama de Voronoi. Emprega-se o método do gradiente conjugado para a resolução do sistema linear. Para obter uma solução com qualidade, é necessário, ainda, realizar o refinamento adaptativo da malha. Empregam-se as propriedades de Delaunay e a suavização Laplaciana para obter uma melhoria na qualidade dos elementos da malha.

Palavras-chave: Equação de Laplace, método dos volumes finitos, diagrama de Voronoi.

Abstract

The main objective of this study is to test a numerical solution to Laplace's equation by the method of finite volumes with Voronoi diagram. For the discretization of the domain use the Delaunay triangulation and its dual Voronoi diagram. It's used the conjugate gradient method for solving the linear system. To achieve a quality solution, it is still necessary to perform the adaptive mesh refinement. For an improvement in the quality of the elements, the properties of smoothing Laplacian and Delaunay are employed.

Keywords: Laplace equation, method of finite volumes, Voronoi diagram.

SUMÁRIO

| | |
|--|-----------|
| 1. INTRODUÇÃO..... | 1 |
| 1.1. CONTEXTUALIZAÇÃO E MOTIVAÇÃO | 1 |
| 1.2. OBJETIVOS | 2 |
| 1.3. ESTRUTURA DO TRABALHO | 2 |
| 2. REFERENCIAL TEÓRICO..... | 3 |
| 2.1. MÉTODOS DE DISCRETIZAÇÃO | 4 |
| 2.1.1. Método dos volumes finitos | 4 |
| 2.2. MALHA | 5 |
| 2.2.1. Malha regular | 5 |
| 2.2.2. Malha irregular | 6 |
| 2.2.3. Triangulação de Delaunay | 6 |
| 2.2.3.1. Algoritmo de Lawson | 9 |
| 2.2.4. Diagrama de Voronoi | 10 |
| 2.2.4.1. Geração do diagrama de Voronoi | 12 |
| 2.3. VOLUMES DE CONTROLE..... | 14 |
| 2.4. SUAVIZAÇÃO LAPLACIANA | 14 |
| 2.5. MÉTODO DO GRADIENTE CONJUGADO | 15 |
| 2.6. TIPOS DE ERROS NOS MÉTODOS DE SOLUÇÃO..... | 16 |
| 3. METODOLOGIA | 17 |
| 3.1. ERRO NO PROGRAMA DESENVOLVIDO | 17 |
| 3.2. ESTRUTURA DE DADOS | 17 |
| 3.2.1. Estrutura da malha | 18 |
| 3.3. SOLUÇÃO DA EQUAÇÃO DE LAPLACE PELO MÉTODO DOS VOLUMES FINITOS | 20 |
| 3.3.1. Introdução à equação de Laplace | 20 |
| 3.3.2. Geração da Malha | 21 |
| 3.3.3. Discretização da equação de Laplace | 23 |
| 3.3.4. Montagem do sistema linear | 23 |
| 4. RESULTADOS E DISCUSSÃO | 28 |
| 4.1. REFINAMENTO ADAPTATIVO DE DELAUNAY | 29 |
| 4.1.1. Técnica de subdivisão de triângulos..... | 30 |
| 4.1.2. Critério de refinamento | 32 |
| 4.2. RESULTADOS OBTIDOS DO PROJETO COMPUTACIONAL DESENVOLVIDO | 33 |
| 4.2.1. Simulação com a malha inicial | 33 |
| 4.2.2. Simulação com o critério de refinamento $\epsilon > 3,0$ | 35 |
| 4.2.3. Simulação com o critério de refinamento $\epsilon > 2,0$ | 37 |
| 4.2.4. Simulação com o critério de refinamento $\epsilon > 1,5$ | 40 |
| 4.2.5. Simulação com o critério de refinamento $\epsilon > 0,25$ | 42 |
| 4.2.6. Simulação com o critério de refinamento $\epsilon > 0,2$ | 44 |
| 5. CONCLUSÃO E TRABALHOS FUTUROS..... | 45 |
| BIBLIOGRAFIA..... | 47 |

1. INTRODUÇÃO

Neste capítulo será descrita uma breve introdução do trabalho, as motivações que levaram a realização do mesmo e os objetivos a serem alcançados ao término dos estudos.

1.1. Contextualização e motivação

A análise computacional de problemas que envolvem fluxo de fluidos é tratada na dinâmica de fluidos computacional (DFC). A DFC utiliza métodos numéricos para a solução dos problemas envolvendo fluidos. Mais especificamente, DFC é a análise de sistemas envolvendo fluxo de fluido, transferência de calor e fenômenos associados, como reações química por meio de simulação baseados em computador (VERSTEEG e MALALASEKERA, 1995, p.1).

Segundo Maliska (2004, p.1) existem três maneiras de resolver estes problemas de dinâmica de fluidos:

- a) métodos analíticos;
- b) métodos numéricos;
- c) experimentação em laboratório.

Métodos analíticos consistem em resolver equações diferenciais parciais de forma limitada. Ou seja, para fenômenos físicos reais em que as geometrias são, em geral complexas, a utilização de um método analítico torna-se inviável. A experimentação em laboratório seria vivenciar o problema na sua forma real. Porém, a experimentação em laboratório pode ser inviável, pois a vivência de alguns experimentos pode ser algo perigoso e a implementação do mesmo pode ser muito cara. Métodos numéricos são mais fáceis de serem implementados, que os esquemas anteriores, e a implementação não oferece riscos e não é cara. A desvantagem é que a solução gerada para um problema qualquer é uma solução aproximada de uma solução exata (ALVES, 2010, p.10).

A motivação deste estudo surgiu do fato de que malhas irregulares são mais adaptáveis em domínios complexos, devido à variedade de elementos em malhas irregulares, se comparada à variedade de elementos em malhas regulares (MALISKA, 2004, p.322). Malhas regulares e irregulares são descritas na sub-seção 2.2. Para a aplicação direta do método dos volumes finitos, a malha deve obedecer uma propriedade de ortogonalidade. A ortogonalidade é descrita na subseção 3.3.2.

1.2. Objetivos

Este trabalho consiste em encontrar uma solução numérica para a equação de Laplace. Para a discretização da equação diferencial parcial, utiliza-se o método dos volumes finitos. Para a discretização do domínio de solução utiliza-se uma triangulação adaptativa de Delaunay e o seu dual geométrico, o diagrama de Voronoi. Para uma melhoria na qualidade da malha, emprega-se a suavização Laplaciana. Para a solução do sistema linear, emprega-se o método do gradiente conjugado, pois há evidências de que as matrizes geradas são simétricas e definidas-positivas.

1.3. Estrutura do trabalho

Este trabalho está dividido em cinco capítulos. O capítulo 2 é o referencial teórico, em que apresentam-se conceitos que foram fundamentais para o desenvolvimento do estudo. No capítulo 3, apresenta-se a equação de Laplace e a montagem do sistema linear com a aplicação do método dos volumes finitos. No capítulo 4, apresenta-se uma solução numérica da equação de Laplace gerada pelo projeto computacional desenvolvido. O capítulo 5 é destinado às conclusões deste trabalho e pontos em que é possível aprimorar e enriquecer as investigações apresentadas. Na sequência do documento são listadas as referências bibliográficas de todos os documentos utilizados no trabalho.

2. REFERENCIAL TEÓRICO

Neste capítulo são apresentados os seguintes conceitos:

Na subseção 2.1, descreve-se a finalidade de métodos de discretização, isso porque, neste trabalho, aplica-se um método de discretização, o método dos volumes finitos descrito na subseção 2.1.1, para encontrar uma solução aproximada da solução analítica para a equação de Laplace.

Na subseção 2.2, conceitua-se malha, requisito crucial para um método de discretização. Uma malha pode ser classificada como: regular, descrita na subseção 2.2.1, e irregular, descrita na subseção 2.2.2.

Na subseção 2.2.3, descreve-se a triangulação de Delaunay. Os elementos de uma triangulação de Delaunay devem obedecer alguns critérios, e para isso, aplica-se o algoritmo de Lawson, descrito na subseção 2.2.3.1.

Na subseção 2.2.4, descreve-se o diagrama de Voronoi e suas propriedades, isso porque, utiliza-se o diagrama de Voronoi para representar a malha. Para a geração do diagrama de Voronoi, que é descrita na subseção 2.2.4.1, utiliza-se o seu dual geométrico, a triangulação de Delaunay.

Na subseção 2.3, descreve-se um volume de controle, que é um requisito de um método de discretização e é representado, neste trabalho, por um polígono de Voronoi.

Na subseção 2.4, descreve-se a suavização Laplaciana, que visa uma melhoria na qualidade dos elementos da malha. Na subseção 2.5, descreve-se o método do gradiente conjugado, isso porque este método é aplicado para resolver os sistemas lineares, gerados pelo método dos volumes finitos. Na subseção 2.6, descreve os tipos de erros nos métodos de solução, isso porque, quando um erro numérico é maior que o aceitável a solução numérica encontrada pode estar comprometida.

2.1. Métodos de discretização

Segundo Maliska (2004, p. 27) “A tarefa de um método numérico é resolver uma ou mais equações diferenciais, substituindo as derivadas existentes por expressões algébricas que envolvem a função incógnita.” Existem diversos métodos de discretização, dentre eles estão o método dos volumes finitos (MVF), métodos das diferenças finitas (MDF) e o método dos elementos finitos (MEF). Este trabalho utiliza o MVF.

2.1.1. Método dos volumes finitos

[...] todo método que, para obter as equações aproximadas, satisfaz a conservação da propriedade em nível de volumes elementares é um método de volumes finitos. Existem duas maneiras de se obter as equações aproximadas no método dos volumes finitos. A primeira é a realização de balanços da propriedade em questão nos volumes elementares, ou volumes finitos, e a segunda é integrar sobre o volume elementar, no espaço e no tempo, as equações na forma conservativa. Forma conservativa é aquela em que na equação diferencial os fluxos estão dentro do sinal da derivada e, na primeira integração, aparecem os fluxos nas fronteiras do volume elementar, equivalente, portanto, ao balanço (MALISKA, 2004, p.28).

De acordo com Gonçalves (2007, p. 16), o MVF utiliza como ponto de partida a forma integral de uma equação diferencial na forma conservativa. O domínio de solução é dividido em um número finito de volumes de controle. A equação na forma conservativa é aplicada a cada volume de controle. No centro geométrico de cada volume de controle são calculados os valores das variáveis. Estes valores são obtidos por interpolação em função do centro geométrico de um volume de controle. Os integrais de volume e de superfície são aproximados usando fórmulas de quadratura apropriadas. Como resultado, obtém-se uma equação algébrica para cada volume de controle.

2.2. Malha

Malha é uma representação do domínio geométrico discretizado. Gerar uma malha representa uma grande parcela do esforço total para a simulação de um problema real (MALISKA, 2004, p.371). Malhas podem ser do tipo regular ou irregular.

2.2.1. Malha regular

Uma malha é chamada regular quando é formada por geometrias elementares semelhantes. Na Figura 1 pode-se observar uma malha regular.

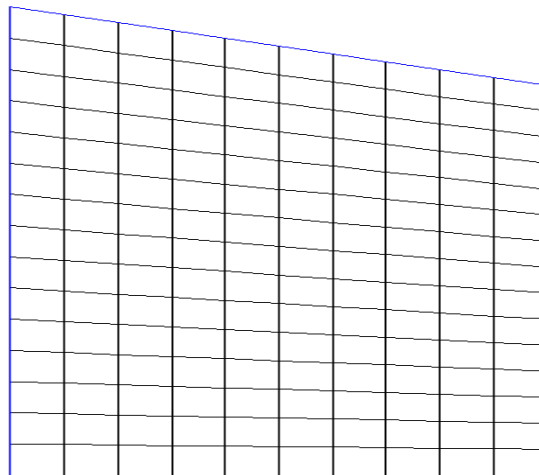


Figura 1: Malha regular.

Um fator importante para o método numérico é a estrutura da matriz resultante do processo de discretização das derivadas parciais. Isso porque pode-se tirar proveito dessa estrutura, em que o modo como se numera os volumes resulta em uma matriz de coeficientes do tipo diagonal. Desse modo, é permitida a utilização de métodos numéricos mais eficientes e mais fáceis de serem desenvolvidos para a solução do sistema linear (BURGARELLI, 1998, p. 71).

2.2.2. Malha irregular

Uma malha é chamada irregular quando é formada por geometrias elementares distintas, em que há uma variação no tamanho e na forma dos elementos. Na Figura 2 representa-se uma malha irregular.

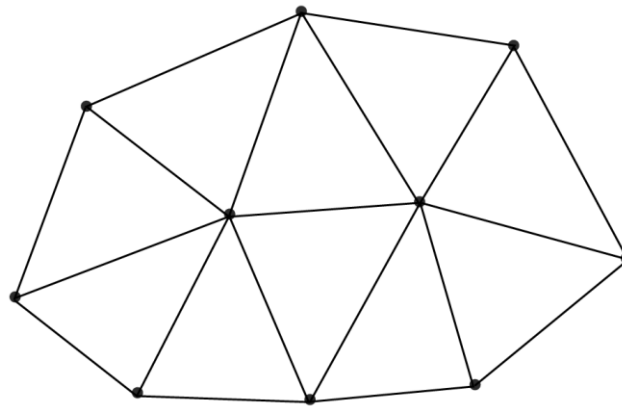


Figura 2: Malha irregular.

Malhas irregulares são mais adaptáveis em domínios complexos, devido a sua variedade de elementos. O uso de malhas irregulares para discretização de domínios está cada vez mais presente nos métodos numéricos (MALISKA, 2004, p.190). Isto se justifica pela facilidade de adaptação destas malhas em domínios de solução complexos (SCHNEIDER e MALISKA, 2000, p.1).

2.2.3. Triangulação de Delaunay

Uma triangulação de Delaunay consiste na subdivisão do domínio de solução em triângulos, a partir de um conjunto de pontos dados, que respeite os critérios descritos a seguir. Estes critérios em conjunto garantem a geração de boas malhas como pode ser observado na Figura 3.

Segundo Maliska (2004, p.372), a triangulação de Delaunay otimiza os seguintes critérios:

- a) Maximização do mínimo ângulo interno dos triângulos;
- b) Minimização do circuncírculo máximo dos triângulos; e
- c) Minimização do máximo círculo de contenção das arestas.

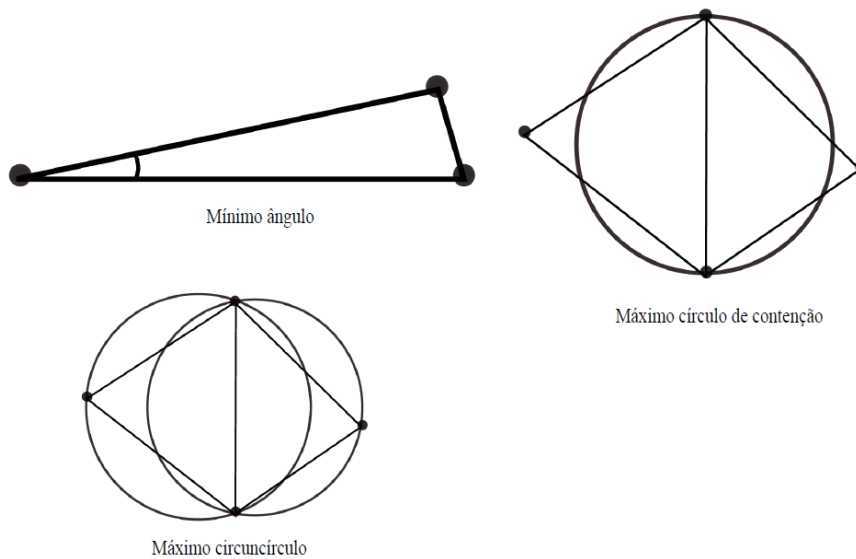


Figura 3: Parâmetros adaptados na triangulação de Delaunay.

Fonte: Figura adaptada de Maliska (2004, p.373).

Seja $e = \overline{ab}$ uma aresta pertencente a dois triângulos formados pelos pontos abc e adb , e C um círculo que passa pelos pontos a e b . Diz-se que C é um círculo de contenção da aresta e se e, somente se, C não contém nenhum outro ponto em seu interior. A seguir, são descritas algumas propriedades de uma triangulação de Delaunay de acordo com Pereira (2006, p. 23).

Propriedade 1: *Sejam três pontos a , b e c co-circulares que determinam um círculo C diz-se que C é um círculo vazio se e somente se não contiver nenhum outro ponto d no seu interior. (Figura 4).*

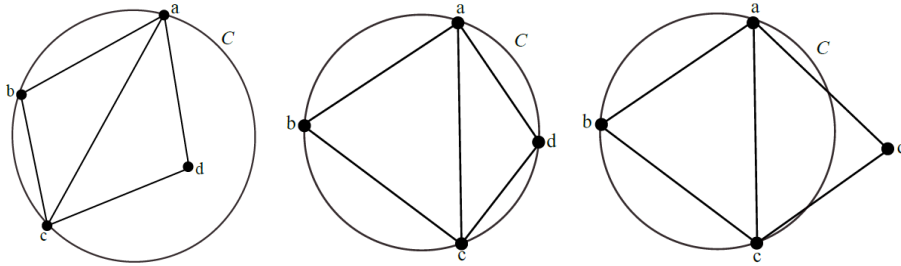


Figura 4: Pode ser observado que em (b) e (c) o círculo é vazio, já em (a) pode-se observar que o círculo não é vazio.

Propriedade 2: *Uma triangulação é de Delaunay se e, somente se, cada triângulo da malha possui um círculo vazio que o circunscreve.*

Propriedade 3: *Uma triangulação de Delaunay é única, exceto em casos degenerados, em que existem quatro ou mais pontos co-circulares.*

Na figura 4 pode-se observar na ilustração (b) um caso degenerado, em que quatro pontos são co-circulares.

Propriedade 4: *Seja $e = \overline{ab}$ uma aresta pertencente a dois triângulos formados pelos pontos abc e adb e C um círculo que passa pelos pontos a , b e c . Diz-se que a aresta e é ilegal se e, somente se, o ponto d estiver no interior de C e se os pontos $abcd$ formam um quadrilátero convexo e não são co-circulares, então, tem-se que \overline{ab} ou \overline{cd} é ilegal. Arestas ilegais não são arestas de Delaunay.*

Em diversas situações, tem-se uma triangulação qualquer e quer-se convertê-la em uma triangulação de Delaunay. Para realizar esta conversão, as arestas ilegais devem ser removidas e inserem-se outras. Na Figura 5, pode-se observar um ponto d no interior do círculo C , em que desrespeita a propriedade 2 e torna a aresta e ilegal. Para tornar a aresta $e = \overline{ab}$ legal deve-se aplicar a primitiva *flip-edge* que irá torná-la uma aresta legal $e = \overline{cd}$ respeitando a propriedade 2.

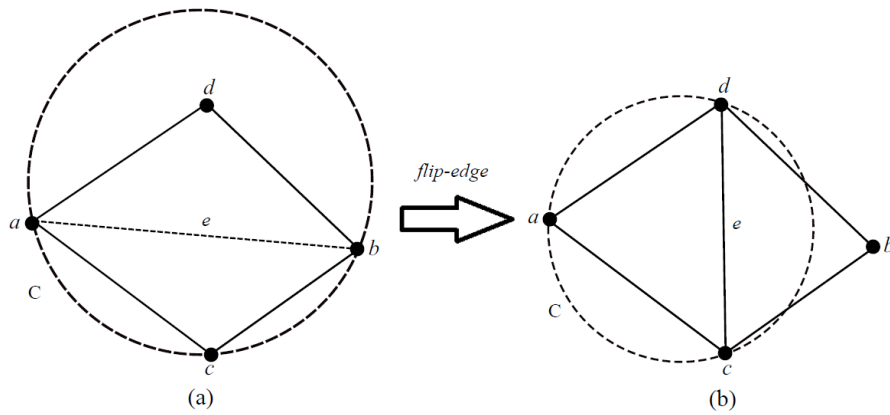


Figura 5: Em (a) pode-se observar uma aresta ilegal $e = \overline{ab}$ pontilhada. Já em (b) pode-se observar que a aresta ilegal $e = \overline{ab}$ foi removida por meio da primitiva *flip-edge* e uma aresta legal $e = \overline{ac}$ foi inserida.

2.2.3.1. Algoritmo de Lawson

Lawson (1977) criou um algoritmo baseado em *flip* de arestas. O algoritmo começa com uma triangulação arbitrária e verifica se esta triangulação contém uma aresta ilegal por meio da primitiva *in-circle*. Caso não satisfaça os critérios de Delaunay, a aresta ilegal será removida por meio da primitiva *flip-edge* e uma nova aresta será inserida respeitando os critérios de uma triangulação de Delaunay. Neste trabalho o algoritmo de Lawson (1977) é implementado.

Primitiva *in-circle*

Definição 1 Dado um triângulo formado pelos pontos a , b e c e seja d um ponto em que se deseja encontrar sua posição em relação ao circuncírculo do triângulo abc . Para encontrar a posição do ponto d basta verificar o resultado da primitiva *in-circle* (a, b, c, d) .

Definição 2 O teste *in-circle* (a, b, c, d) pode ser equivalente ao cálculo do determinante como pode ser observado a seguir:

$$\text{In-circle}(a, b, c, d) = \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_x^2 + a_y^2 & 1 \\ b_x & b_y & b_x^2 + b_y^2 & 1 \\ c_x & c_y & c_x^2 + c_y^2 & 1 \\ d_x & d_y & d_x^2 + d_y^2 & 1 \end{vmatrix}$$

A primitiva *in-circle* pode retornar os seguintes resultados de acordo com Guibas e Stolf (1985):

- Se $\text{in-circle}(a, b, c, d) = 0$ pode-se dizer que os pontos são concirculares.
- Se $\text{in-circle}(a, b, c, d) > 0$ pode-se dizer que d pertence ao exterior do círculo.
- Se $\text{in-circle}(a, b, c, d) < 0$ pode-se dizer que d pertence ao interior do círculo.

Primitiva *flip-edge*

Considera-se uma aresta $e = \overline{ab}$ de uma triangulação qualquer, em que e é adjacente a dois triângulos (abc e abd) e uma das arestas não satisfaz os critérios de Delaunay. Caso o quadrilátero $abdc$ seja convexo, pode-se obter uma triangulação de Delaunay, removendo-se a aresta ilegal \overline{ab} e inserindo-se \overline{cd} . Essa operação é denominada *flip-edge*. Na Figura 5 pode ser observado um *flip* de arestas.

2.2.4. Diagrama de Voronoi

Dado um número finito de pontos no plano bidimensional, o diagrama de Voronoi divide o plano de acordo com a regra do vizinho mais próximo. Nesta regra cada ponto é associado com a região do plano mais próxima a ele. Na Figura 6 pode ser observado um diagrama de Voronoi em que pode-se notar algumas propriedades:

- O segmento de reta \overline{ab} é normal ao segmento de reta $\overline{p2}$ e divide $\overline{p2}$ ao meio.
- O vértice a do diagrama de Voronoi é equidistante aos vértices p , 2 e 3 da triangulação de Delaunay.
- O vértice a do diagrama de Voronoi tem grau três.

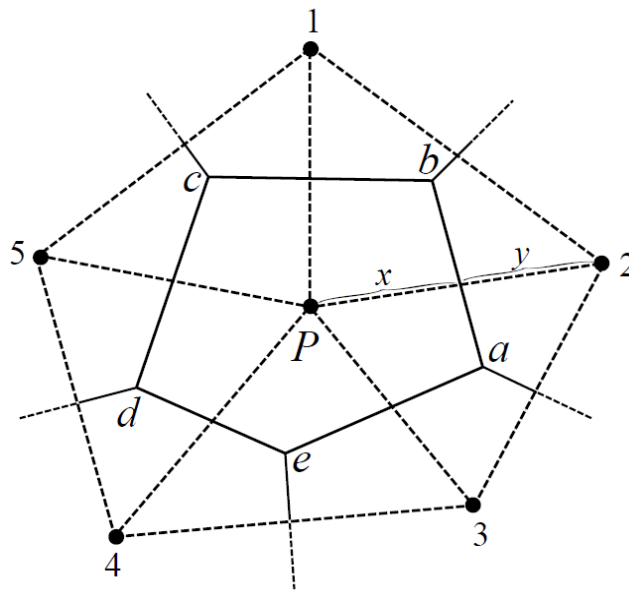


Figura 6: Propriedades do diagrama de Voronoi (em linha contínua) que é o dual geométrico da triangulação de Delaunay (em linha pontilhada).

Fonte: Figura adaptada de Maliska (2004, p. 355).

A seguir são descritas algumas aplicações do diagrama de Voronoi:

Geometria - Na busca pelo par de pontos mais próximos

Dado um conjunto de pontos N , e um ponto p , quer se descobrir qual o ponto do conjunto N é mais próximo do ponto p . Para isto, basta gerar o diagrama de Voronoi do conjunto de pontos N e descobrir em qual célula o ponto p incide (FERREIRA, 2006, p. 17).

Ecologia – Crescimento de plantas

O diagrama pode ser utilizado no estudo da intensidade de árvores em uma floresta. O diagrama representa a área potencialmente disponível para a árvore e serve para analisar a “competição” entre as árvores pelo solo. O mesmo conceito pode ser usado para pequenas plantas (FERREIRA, 2006, p.17).

Robótica - Planejamento de trajeto

Suponha que se queira que um robô se mova no plano de modo mais seguro possível, evitando os obstáculos. Levando em conta que os obstáculos são os pontos geradores do diagrama de Voronoi, os caminhos mais seguros possíveis são aqueles sobre as arestas de Voronoi, pois desta forma os robôs estarão andando o mais longe possível dos obstáculos (FERREIRA, 2006, p. 15).

O diagrama de Voronoi pode ser computado a partir da triangulação de Delaunay, ou sem ela, a partir do conjunto de pontos geradores. Neste trabalho, o diagrama de Voronoi é gerado a partir de uma triangulação de Delaunay.

2.2.4.1. Geração do diagrama de Voronoi

Dada uma triangulação de Delaunay, o primeiro passo do algoritmo é encontrar o circuncentro proveniente de cada triângulo. O circuncentro consiste em encontrar o centro de um círculo que passa pelos três vértices de um triângulo (ver Figura 7).

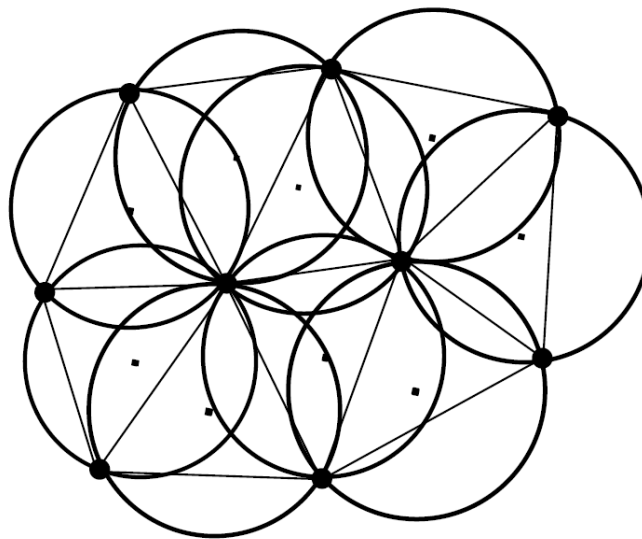


Figura 7: Pode-se observar que o centro de alguns círculos que passam pelos três vértices de alguns triângulos.

Os centros desses círculos devem ser os vértices dos polígonos de Voronoi. Dado que cada círculo é proveniente de um triângulo, ligam-se os centros dos círculos cujos triângulos são vizinhos (triângulos que compartilham arestas em comum). Na Figura 8 (a), pode-se observar que foram encontrados os circuncentros de alguns triângulos. Na Figura 8 (b) pode-se observar uma ligação entre os circuncentros de alguns triângulos gerando dois polígonos de Voronoi.

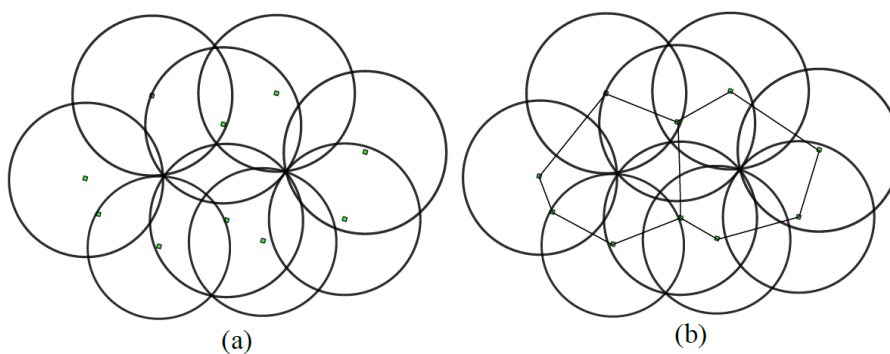


Figura 8: Pode-se observar uma ligação entre os circuncentros de alguns triângulos gerando dois polígonos de Voronoi.

2.3. Volumes de controle

De acordo com Maliska (2004, p. 192) criação de volumes de controle é baseada em elementos. Existem duas classes básicas de métodos baseadas na relação geométrica entre o volume de controle e o elemento. A formulação em que o volume de controle é escolhido como sendo o próprio elemento, em que as variáveis a serem determinadas que ficam armazenadas no centro do volume de controle, pode ser denominada como *cell center*. Em outra classe, que pode ser denominada *cell vertex*, o volume de controle é construído de forma que o volume de controle tem seu centróide em um vértice dos triângulos da malha.

Os volumes de controle serão gerados neste trabalho a partir da classe *cell vertex* em que um volume de controle é um polígono de Voronoi e o centróide do volume de controle é um vértice da triangulação de Delaunay (ver Figura 6).

2.4. Suavização laplaciana

O método dos volumes finitos (entre outros) é uma maneira de solucionar uma variedade de problemas físicos em várias aplicações da engenharia. O requisito crucial deste método é a construção de uma malha adequada à solução de um problema formulado por uma equação. Após realizar o refinamento adaptativo da malha, elementos de má qualidade podem ser criados e podem causar uma distorção na solução de uma equação.

Felizmente, existem técnicas que podem melhorar a qualidade da malha. A suavização (também conhecida como relaxação da malha) é um dos métodos que pode ser utilizado para melhorar a qualidade da malha. O método consiste, basicamente, em reposicionar os nós da malha para minimizar a distorção dos elementos. A suavização laplaciana é uma das técnicas mais comuns de suavização. A suavização Laplaciana em sua forma

simples calcula uma nova posição para cada nó por meio da média dos nós adjacentes a cada nó. No entanto, ela pode resultar em distorções ou então inverter elementos próximos a concavidades no modelo (CANANN, TRISTANO e STATEN, 1988, p.2).

Muitos pesquisadores têm usado a suavização Laplaciana como Blacker e Stephenson (1990), Blacker, Stephenson e Canann, Blacker e Stephenson (1991), Briere de L'Isle e George (1995), Canann, Liu e Mobley (1997), Field (1988), George (1991), George e Borouchaki (1998), Hansbo (1995), Herrmann (1976), Jones e Wright (1991), Jones (1974). Neste trabalho, utiliza-se a suavização Laplaciana a fim de minimizar as distorções dos triângulos em detrimento do refinamento e obter uma melhoria na solução da equação de Laplace. A suavização Laplaciana foi escolhida, neste trabalho, por ser simples de ser implementada.

2.5. Método do gradiente conjugado

O método do gradiente conjugado foi criado por Hestnes e Stiefel (1952) e Lanczos (1952) para a solução de sistemas lineares de maneira iterativa. Considera-se uma matriz simétrica e definida positiva. O método converge em um número finito de iterações.

O método do gradiente conjugado consiste em um método iterativo de busca do mínimo local da função. Geram-se aproximações para a solução e em cada iteração do método, dois produtos internos são realizados para que se calculem dois escalares definidos de forma que a sequência obedeça às condições de ortogonalidade (BECKER, PANTA PAZOS e CROSSETI, 2008, p.334).

De acordo com Fischer (2006, p. 1), “a vantagem do método é que ele pode ser empregado para obter-se um controle ótimo, em sistemas não lineares e sujeitos a funcionais de custo também não lineares.” No entanto, quando se trata de uma matriz não simétrica o método não converge da mesma maneira. Neste trabalho, aplica-se o método do gradiente conjugado,

implementado pela equipe de métodos numéricos do DCC-UFLA, para a resolução dos sistemas lineares.

2.6. Tipos de erros nos métodos de solução

A imprecisão numérica é uma das principais questões na escrita de um código robusto em geometria computacional. De acordo com Alves (2010, p.20), “toda solução numérica contém erro; portanto, é importante estimá-lo porque quando o erro é maior do que o aceitável a confiabilidade do uso da solução numérica fica comprometida.” Existem basicamente dois tipos de erros que afetam uma solução numérica: numéricos e de modelagem.

O erro da solução numérica E é a diferença entre a solução analítica exata Φ de uma variável de interesse, e a sua solução numérica ϕ (SCHNEIDER, 2003, p. 26). Este erro pode ser dado por

$$E(\phi) = \Phi - \phi \quad (1)$$

Segundo Oberkampf e Blottner (1998, p. 688), Celik e Zhang (1995, p. 442), o erro numérico pode ser causado por: erros de truncamento, erros de iteração, erros de arredondamento. De acordo com Schneider (2003, p. 41) “o erro de truncamento de uma equação diferencial é o resíduo que resulta quando se substitui a solução analítica exata de uma variável dependente na equação discretizada do modelo matemático.” De acordo com Alves (2010, p. 21) erros de iteração é a diferença entre a solução exata e a solução numérica de uma equação discretizada em uma determinada iteração e diminui de acordo com o aumento do número de iterações. O erro de arredondamento advém da representação de um valor em uma quantidade limitada de dígitos e aumenta com a redução do tamanho dos elementos da malha (SCHNEIDER, 2003, p. 44).

3. METODOLOGIA

Os procedimentos utilizados para pesquisa bibliográfica de consulta foi a base de periódicos da CAPES. Neste trabalho, a pesquisa classifica-se como teórica, com o objetivo de encontrar uma solução numérica para a equação de Laplace. Em relação aos procedimentos utilizados, a pesquisa é classificada como operacional, pois trata-se de escolher métodos numéricos de forma a utilizá-los com o erro numérico reduzido. Além disso, a pesquisa foi realizada em laboratório.

3.1. Erro no programa desenvolvido

Neste trabalho, foi desenvolvido um código computacional a fim de verificar uma solução para um problema de dinâmica de fluidos. No entanto, na trigésima primeira iteração o programa emite um erro de segmentação. Mais especificamente, o programa imprime células que contêm dois vértices iguais. O programa pode estar gerando estes erros em detrimento de erros de arredondamento e de truncamento que até então não foram tratados.

3.2. Estrutura de dados

Nesta seção descreve-se a estrutura de dados usada para representar a malha. Além disso, analisam-se os procedimentos para conexão entre os vértices e os triângulos e aplica-se o algoritmo busca em profundidade para a numeração dos vértices.

De acordo com Burgarelli (1998, p. 5), a simulação computacional de um processo físico modelado por equações diferenciais parciais envolve quatro níveis. Inicialmente, um problema físico é modelado por uma equação diferencial com condições de contorno apropriadas. Em seguida, as derivadas de um problema diferencial são substituídas por equações algébricas com um número finito de variáveis. A discretização do espaço e do tempo requer a existência de relações topológicas e geométricas entre as células e os

vértices que pertencem ao domínio discretizado. Em um terceiro nível, essas relações são representadas neste trabalho por meio de um grafo. A estrutura de dados, assim como os algoritmos que constituem um programa de computador, são o quarto nível de representação do problema físico inicial.

3.2.1. Estrutura da malha

Considera-se inicialmente um domínio representado por uma triangulação de Delaunay. Sabe-se que o dual de uma triangulação de Delaunay é o diagrama de Voronoi. Na Figura 9 (a), observa-se um polígono de Voronoi e na Figura 9 (b) observam-se as ligações entre vértices e entre vértices e células.

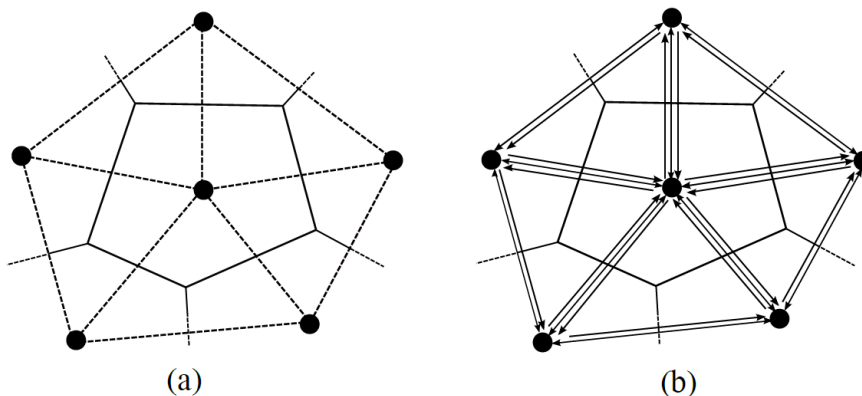


Figura 9: Cada vértice da triangulação aponta para um vértice adjacente a ele e para triângulos em que ele incide.

Cada vértice de uma triangulação de Delaunay e as ligações (arestas) entre eles constituem um grafo de acordo com a Figura 9 (b). Tem-se uma lista de adjacências de vértices e uma lista de incidências de vértices a triângulos. Além disso, há uma lista entre triângulos. A estrutura mantém uma representação de seis entidades:

- Grid: representa cada componente conexa da malha;
- Vertex: representa os vértices da malha;
- Cell: representa cada triângulo da malha;

- ListInc: representa a lista de triângulos que cada vértice incide;
- ListAdj: representa a lista de vértices adjacentes aos vértices;
- ListCell: representa a lista entre triângulos.

As relações entre as entidades topológicas podem ser observadas na Figura 10.

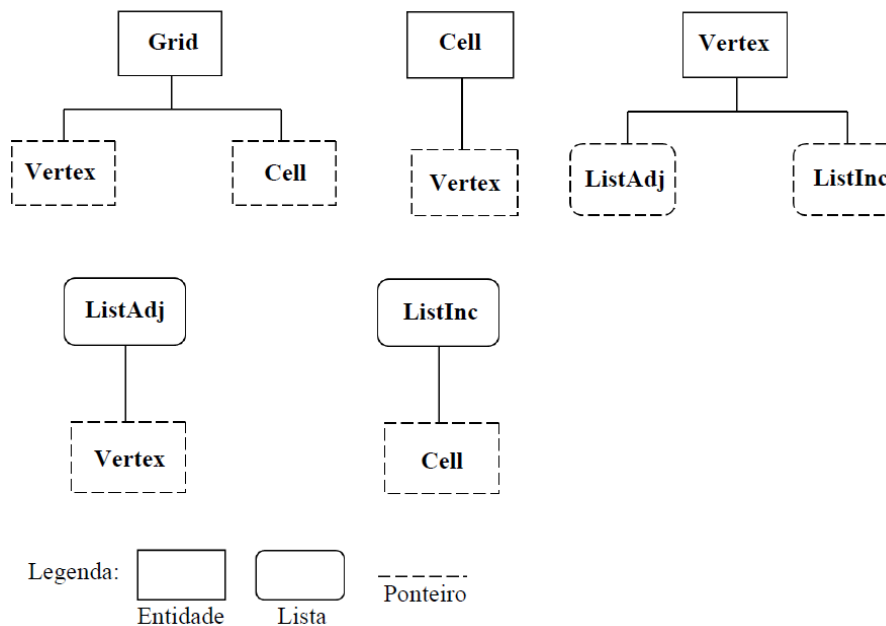


Figura 10: Relações entre entidades que constituem a estrutura de dados grafo.

A entidade **Grid** tem um ponteiro para cada uma de suas componentes: **Vertex** e **Cell**. Da entidade **Vertex**, que representa os vértices da malha, parte um ponteiro para a lista de adjacências **ListAdj** e para a lista de incidências **ListInc**. Da entidade **Cell**, que representa as células da malha, parte um ponteiro para **Vertex**. Da lista de adjacências, representada pela entidade **ListAdj**, parte um ponteiro para **Vertex** e, da lista de incidências, representada pela entidade **ListInc**, parte um ponteiro para **Cell**. A estrutura de dados e um conjunto de métodos para acessar as informações armazenadas no grafo foram implementados por meio do paradigma de orientação a objetos utilizando a linguagem C++ padrão Stroustrup (2000)

utilizando a OpenGL (1993) para desenhar os elementos da saída do programa.

3.3. Solução da equação de Laplace pelo método dos volumes finitos

De acordo com Maliska (2004, p.5), o método dos volumes finitos é um método de discretização utilizado na simulação numérica de problemas elípticos, hiperbólicos e parabólicos. O método dos volumes finitos é muito utilizado em escoamentos de fluidos, pois satisfaz os princípios de conservação de massa em nível discreto. Além do mais, se o que se busca com um método numérico é a solução da equação diferencial, que é a representação da conservação da propriedade em nível de ponto, então, as equações aproximadas representam a conservação em nível de volumes. Contudo, não existe a possibilidade de gerações ou sumidouros de quantidades.

A seguir, descreve-se os passos para a solução da equação de Laplace pelo método dos volumes finitos.

3.3.1. Introdução à equação de Laplace

A equação analítica a ser modelada é a equação de Laplace que, na forma conservativa, pode ser escrita como,

$$\nabla^2 U(x, y) = \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} = 0, \text{ em que } (x, y) \in \mathbb{R}^2. \quad (2)$$

Essa é uma equação diferencial parcial linear, de segunda ordem e homogênea, em que x e y são as variáveis independentes da equação e U representa a variável dependente da equação e não há termo fonte.

O domínio de solução é definido como um quadrado unitário, ou seja: $0 \leq x \leq 1$ e $0 \leq y \leq 1$. Neste trabalho, a equação de Laplace está sujeita às condições de contorno do tipo Dirichlet. As condições de contorno são: $U(x, 1) = U(0, y) = U(1, y) = 10$ (exceto em $U(0, 0)$ e $U(1, 0)$) e $U(x, 0) = 0$.

Na Figura 11 pode ser observado o domínio de solução e as condições de contorno empregadas neste trabalho.

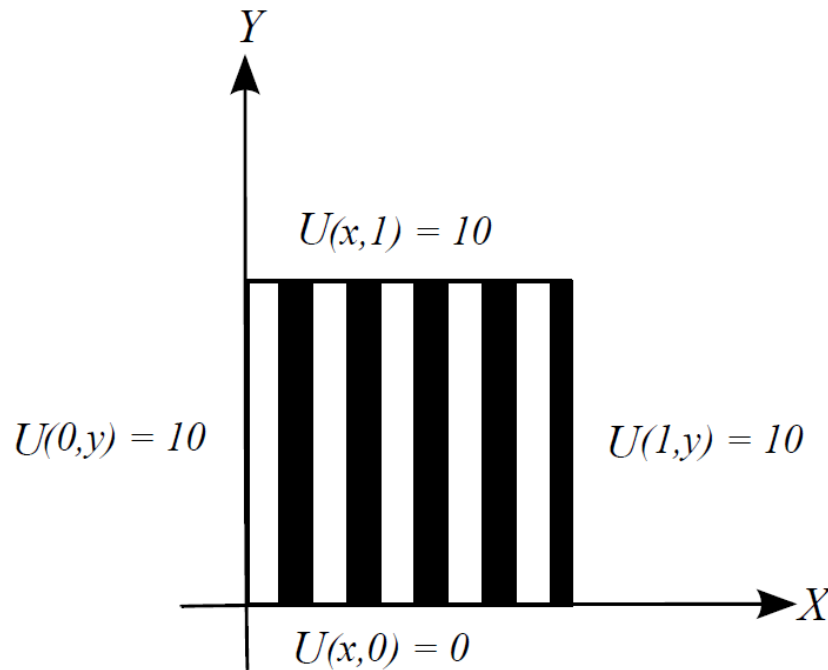


Figura 11: Pode-se observar o domínio de solução empregado neste trabalho. Os vértices pertencentes à borda que estiverem ao norte, leste (exceto em $x = 1$ e $y = 0$) e oeste (exceto em $x = 0$ e $y = 0$) terão um valor igual a dez e ao sul terão um valor igual à zero.

3.3.2. Geração da Malha

Para a resolução de uma EDP pelo método dos volumes finitos é necessária uma malha inicial. Para a aplicação direta do método dos volumes finitos, a malha deve obedecer a uma propriedade de ortogonalidade. A ortogonalidade consiste em um ângulo de 90° entre o segmento de reta que liga o centro geométrico U_p de um volume de controle ao centro geométrico U_i do volume de controle de seu vizinho e o segmento de reta da interface que os separa como pode ser observado na Figura 12.

Outro ponto importante é o uso de malhas irregulares. O emprego de malhas irregulares fornece uma boa solução quando comparada à solução obtida em uma malha regular. Sendo assim, uma malha irregular que obedeça à propriedade de ortogonalidade é conveniente para ser empregada pelo MVF.

No presente trabalho, para a geração dos pontos da malha inicial adaptou-se um programa elaborado em Fortran encontrado em Burkardt (2006). Para a geração da triangulação de Delaunay, utilizou-se um programa em C++ encontrado em Burkardt (2009). Na Figura 13 pode-se observar a malha inicial deste trabalho.

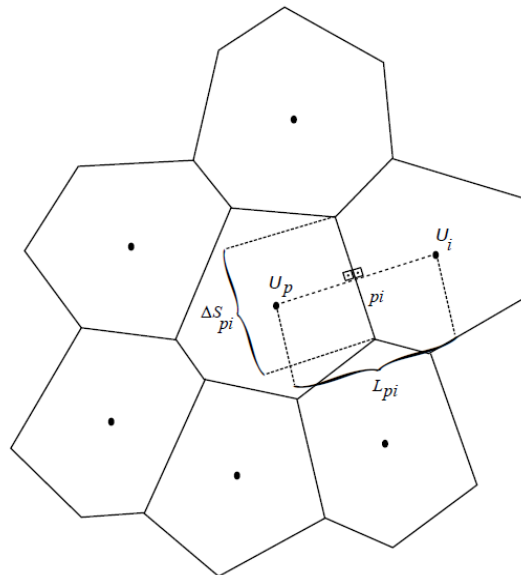


Figura 12: Pode-se observar que o segmento de reta L_{pi} é normal ao segmento de reta da interface pi que separa o polígono U_p do polígono U_i e, portanto, diagrama de Voronoi respeita a propriedade de ortogonalidade.

Fonte: Figura adaptada de Maliska (2004, p. 356).

Na malha da Figura 13, podem ser observados, inicialmente, 48 triângulos e 33 vértices. Nessa malha, 16 vértices pertencem à borda e 17 pertencem ao interior do domínio.

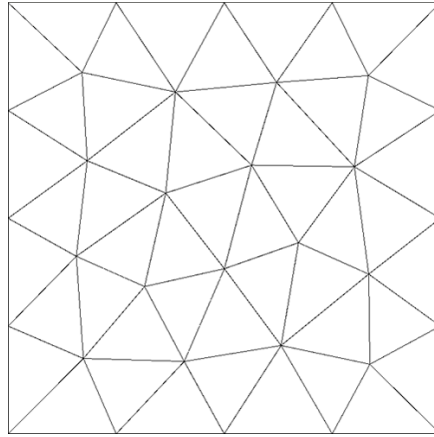


Figura 13: Pode-se observar uma triangulação de Delaunay com 33 vértices e 48 triângulos.

3.3.3. Discretização da equação de Laplace

Para se obter as equações algébricas por volumes finitos, integra-se a equação de Laplace em cada volume de controle U_p e aproximam-se as derivadas da equação de Laplace por diferenças finitas centrais. Sendo assim, para cada volume U_p tem-se

$$\sum_{i=1}^n \left(\frac{U_i - U_p}{\Delta L_{ip}} \right) \Delta S_{pi}, \quad (3)$$

em que n é o número de volumes adjacentes a um volume U_p , o qual é um valor de massa a ser encontrado no centro geométrico de cada volume, ΔL_{ip} é a distância entre dois volumes U_p e U_i e ΔS_{pi} é a distância entre o circuncentros de dois triângulos em que U_p e U_i incidem.

3.3.4. Montagem do sistema linear

Por ocorrer aproximação das derivadas parciais da equação de Laplace em sua forma conservativa por diferenças finitas centrais, obtém-se uma equação algébrica para cada volume de controle. Na Figura 14 observa-se um volume de controle U_p e seus adjacentes U_1, U_2, U_3, U_4 e U_5 .

Após avaliar as derivadas parciais nas interfaces dos volumes finitos, as derivadas parciais podem ser aproximadas por diferenças finitas centrais. Na equação 4 apresenta-se uma aproximação para um volume U_p interno, sendo que todos os seus vizinhos também são internos como na Figura 14.

$$\left(\frac{U_1 - U_p}{\Delta U_{1p}}\right) \Delta S_1 + \left(\frac{U_2 - U_p}{\Delta U_{2p}}\right) \Delta S_2 + \left(\frac{U_3 - U_p}{\Delta U_{3p}}\right) \Delta S_3 + \left(\frac{U_4 - U_p}{\Delta U_{4p}}\right) \Delta S_4 + \left(\frac{U_5 - U_p}{\Delta U_{5p}}\right) \Delta S_5 = 0$$

(4)

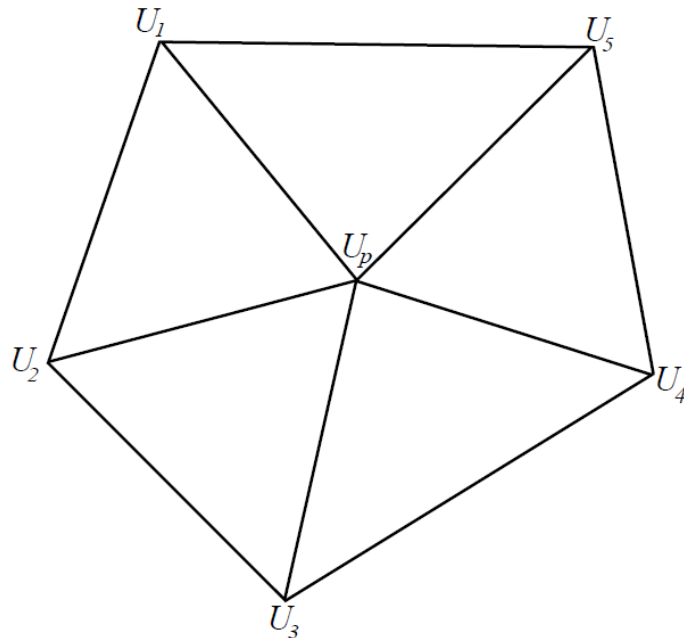


Figura 14: Triangulação de Delaunay com vértices internos

Separando-se as variáveis tem-se

$$\left(\frac{\Delta S_1}{\Delta U_{1p}}\right) U_1 - \left(\frac{\Delta S_1}{\Delta U_{1p}}\right) U_p + \left(\frac{\Delta S_2}{\Delta U_{2p}}\right) U_2 - \left(\frac{\Delta S_2}{\Delta U_{2p}}\right) U_p + \left(\frac{\Delta S_3}{\Delta U_{3p}}\right) U_3 - \left(\frac{\Delta S_3}{\Delta U_{3p}}\right) U_p + \left(\frac{\Delta S_4}{\Delta U_{4p}}\right) U_4 - \left(\frac{\Delta S_4}{\Delta U_{4p}}\right) U_p + \left(\frac{\Delta S_5}{\Delta U_{5p}}\right) U_5 - \left(\frac{\Delta S_5}{\Delta U_{5p}}\right) U_p = 0.$$

(5)

Agrupando os termos semelhantes e definindo-se os coeficientes de U_p e seus vizinhos tem-se

$$\left(-\frac{\Delta S_1}{\Delta U_{1p}} - \frac{\Delta S_2}{\Delta U_{2p}} - \frac{\Delta S_3}{\Delta U_{3p}} - \frac{\Delta S_4}{\Delta U_{4p}} - \frac{\Delta S_5}{\Delta U_{5p}}\right)U_p + \left(\frac{\Delta S_1}{\Delta U_{1p}}\right)U_1 + \left(\frac{\Delta S_2}{\Delta U_{2p}}\right)U_2 + \left(\frac{\Delta S_3}{\Delta U_{3p}}\right)U_3 + \left(\frac{\Delta S_4}{\Delta U_{4p}}\right)U_4 + \left(\frac{\Delta S_5}{\Delta U_{5p}}\right)U_5 = 0.$$

(6)

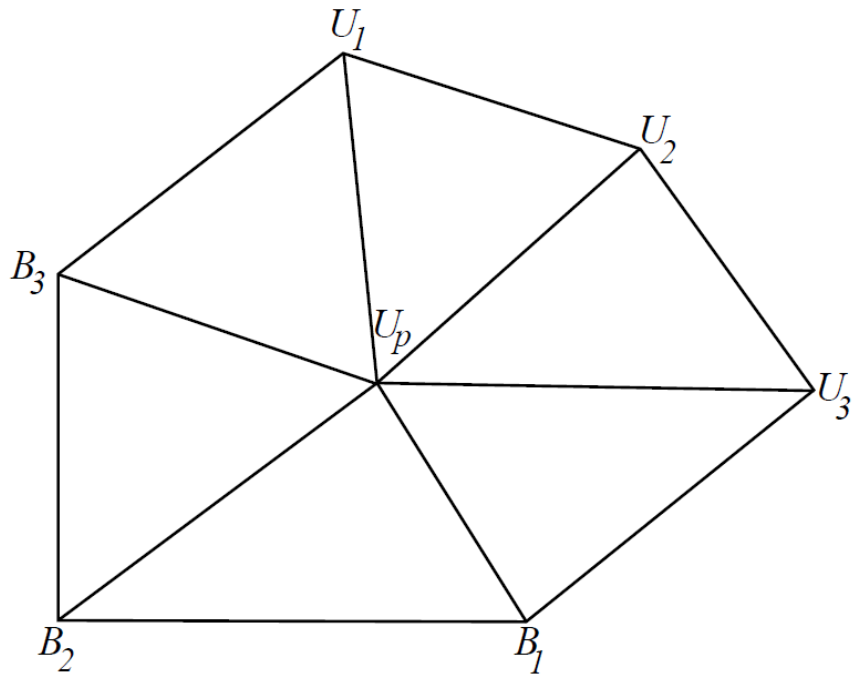


Figura 15: Triangulação de Delaunay com vértices na borda

Na equação 7 apresenta-se uma aproximação para um volume U_p que contém vizinhos na borda B_1, B_2 e B_3 e vizinhos internos U_1, U_2 e U_3 como observa-se na Figura 15.

$$\left(\frac{U_1 - U_p}{\Delta U_{1p}}\right)\Delta S_1 + \left(\frac{U_2 - U_p}{\Delta U_{2p}}\right)\Delta S_2 + \left(\frac{U_3 - U_p}{\Delta U_{3p}}\right)\Delta S_3 + \left(\frac{B_1 - U_p}{\Delta B_{1p}}\right)\Delta S_4 + \left(\frac{B_2 - U_p}{\Delta B_{2p}}\right)\Delta S_5 + \left(\frac{B_3 - U_p}{\Delta B_{3p}}\right)\Delta S_6 = 0.$$

(7)

Separando as variáveis tem-se

$$\begin{aligned} & \left(\frac{\Delta S_1}{\Delta U_1 U_p} \right) U_1 - \left(\frac{\Delta S_1}{\Delta U_1 U_p} \right) U_p + \left(\frac{\Delta S_2}{\Delta U_2 U_p} \right) U_2 - \left(\frac{\Delta S_2}{\Delta U_2 U_p} \right) U_p + \left(\frac{\Delta S_3}{\Delta U_3 U_p} \right) U_3 - \\ & \left(\frac{\Delta S_3}{\Delta U_3 U_p} \right) U_p + \left(\frac{\Delta S_4}{\Delta B_1 U_p} \right) B_1 - \left(\frac{\Delta S_4}{\Delta B_1 U_p} \right) U_p + \left(\frac{\Delta S_5}{\Delta B_2 U_p} \right) B_2 - \left(\frac{\Delta S_5}{\Delta B_2 U_p} \right) U_p + \\ & \left(\frac{\Delta S_6}{\Delta B_3 U_p} \right) B_3 - \left(\frac{\Delta S_6}{\Delta B_3 U_p} \right) U_p = 0. \end{aligned} \quad (8)$$

Agrupando os termos semelhantes e definindo coeficientes de U_p e seus vizinhos tem-se

$$\begin{aligned} & \left(\frac{\Delta S_1}{\Delta U_1 U_p} - \frac{\Delta S_2}{\Delta U_2 U_p} - \frac{\Delta S_3}{\Delta U_3 U_p} - \frac{\Delta S_4}{\Delta U_4 U_p} - \frac{\Delta S_5}{\Delta U_5 U_p} - \frac{\Delta S_6}{\Delta U_6 U_p} \right) U_p + \\ & \left(\frac{\Delta S_1}{\Delta U_1 U_p} \right) U_1 + \left(\frac{\Delta S_2}{\Delta U_2 U_p} \right) U_2 + \left(\frac{\Delta S_3}{\Delta U_3 U_p} \right) U_3 = \\ & - \left(\frac{\Delta S_4}{\Delta B_1 U_p} \right) B_1 - \left(\frac{\Delta S_5}{\Delta B_2 U_p} \right) B_2 - \left(\frac{\Delta S_6}{\Delta B_3 U_p} \right) B_3. \end{aligned} \quad (9)$$

As equações de cada volume de controle formam um sistema algébrico linear que, quando resolvido fornecerá um valor aproximado da equação no centróide U_p de cada volume da malha. Na Figura 16 pode ser observado um sistema na forma matricial gerado por 17 polígonos de Voronoi.

| | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
|----------|----------|----------|----------|----------|----------|----------|----------|----------|----------|----------|----------|----------|----------|----------|----------|----------|---|-----|----------|
| -3.72391 | 0.712568 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0.640309 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | T1 | -23.7103 |
| 0.712568 | -3.58217 | 0.545601 | 0.92121 | 0 | 0 | 0.288308 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | T2 | -11.1448 |
| 0 | 0.545601 | -3.70456 | 0.241463 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1.06872 | 0.33854 | 0 | 0 | 0 | T3 | -15.1023 |
| 0 | 0.92121 | 0.241463 | -3.58489 | 0.781742 | 0 | 0.550159 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0.558747 | 0.531572 | 0 | 0 | 0 | 0 | T4 | 0 |
| 0 | 0 | 0 | 0.781742 | -3.58782 | 0.90458 | 0.421003 | 0.503576 | 0 | 0 | 0 | 0.694172 | 0.282744 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | T5 | 0 |
| 0 | 0 | 0 | 0 | 0.90458 | -3.57713 | 0.524443 | 0.257025 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0.675048 | 0 | T6 | -12.1604 |
| 0.640309 | 0.288308 | 0 | 0.550159 | 0.421003 | 0.524443 | -3.41751 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | T7 | -9.93284 |
| 0 | 0 | 0 | 0 | 0.503576 | 0.257025 | 0 | -3.4533 | 0.299376 | 0 | 0 | 0.620546 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0.69353 | 0 | T8 | -10.7925 |
| 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0.299376 | -3.69035 | 0.64081 | 0.242061 | 1.09066 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | T9 | -14.1744 |
| 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0.64081 | -3.71066 | 0.705736 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | T10 | -14.1079 |
| 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0.242061 | 0.705736 | -3.44622 | 0.403928 | 0.597571 | 0 | 0 | 0.562697 | 0 | 0 | T11 | 0 |
| 0 | 0 | 0 | 0 | 0.694172 | 0 | 0 | 0.620546 | 1.09066 | 0 | 0.403928 | -3.77962 | 0.970312 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | T12 | 0 |
| 0 | 0 | 0 | 0.558747 | 0.282744 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0.597571 | 0.970312 | -3.61462 | 0.814507 | 0 | 0.390739 | 0 | 0 | T13 | 0 |
| 0 | 0 | 1.06872 | 0.531572 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0.814507 | -3.72585 | 0.548451 | 0.762593 | 0 | 0 | T14 | 0 |
| 0 | 0 | 0.33854 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0.548451 | -3.62371 | 0.417006 | 0 | 0 | T15 | -13.8003 |
| 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0.562697 | 0 | 0.390739 | 0.762593 | 0.417006 | -3.56303 | 0 | 0 | T16 | 0 |
| 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0.675048 | 0 | 0.69353 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | -3.71623 | 0 | T17 | -23.4765 |

Figura 16: Sistema linear gerado pelo método dos volumes finitos a partir da malha inicial.

4. RESULTADOS E DISCUSSÃO

O objetivo deste capítulo é apresentar os resultados obtidos por meio do projeto computacional desenvolvido. Na Figura 17 observa-se o diagrama de atividades do projeto computacional desenvolvido.

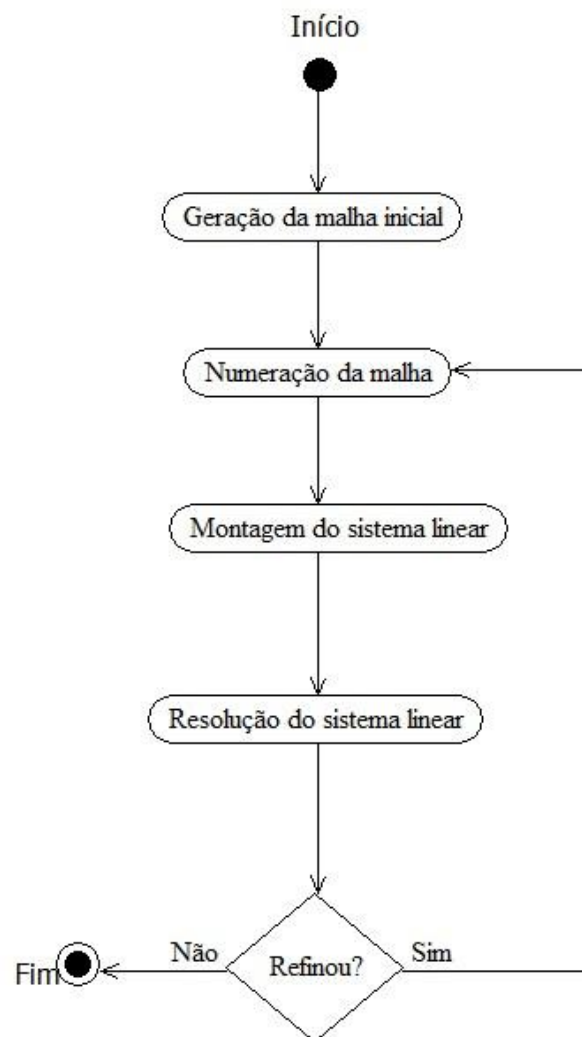


Figura 17: Pode-se observar o diagrama de atividades do projeto computacional desenvolvido.

Para ilustrar as classes e as relações entre elas, os métodos e os atributos do programa, gerou-se um diagrama de classes. Na Figura 18 observa-se o diagrama de classes do projeto computacional desenvolvido.

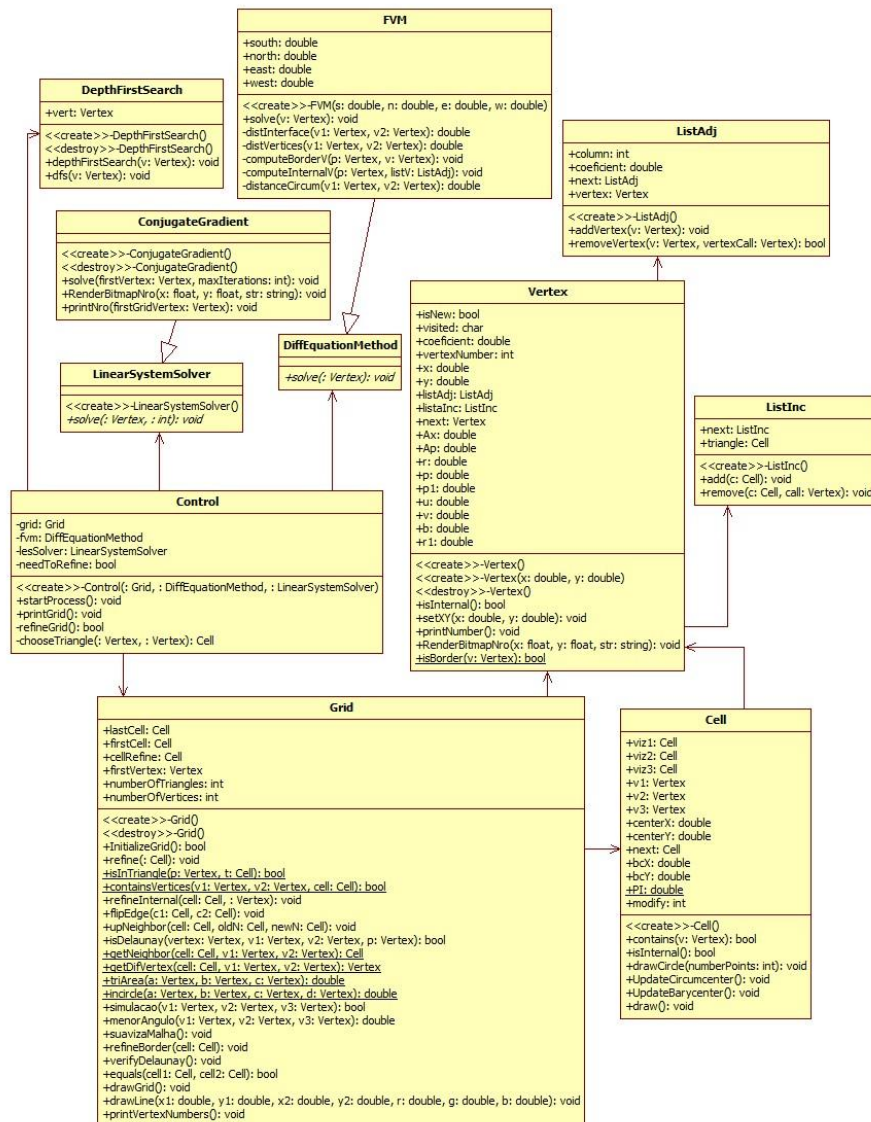


Figura 18: Diagrama de classes do projeto computacional desenvolvido.

4.1. Refinamento adaptativo de Delaunay

Para a solução de uma EDP pelo MVF, pode-se utilizar uma malha inicial grosseira em que as arestas de Voronoi ligadas à borda do domínio

são infinitas como pode ser observada na Figura 19. A necessidade de refinar a malha surge após a constatação de que o tamanho e a posição dos elementos influenciam a qualidade da solução obtida pelo método dos volumes finitos. Sendo assim, é necessário concentrar elementos em determinadas regiões do domínio que não atendam aos requisitos de precisão inicialmente propostos (PEREIRA, 2006, p.35). Neste trabalho, foi utilizado o refinamento da malha implementado por Oliveira (2011).

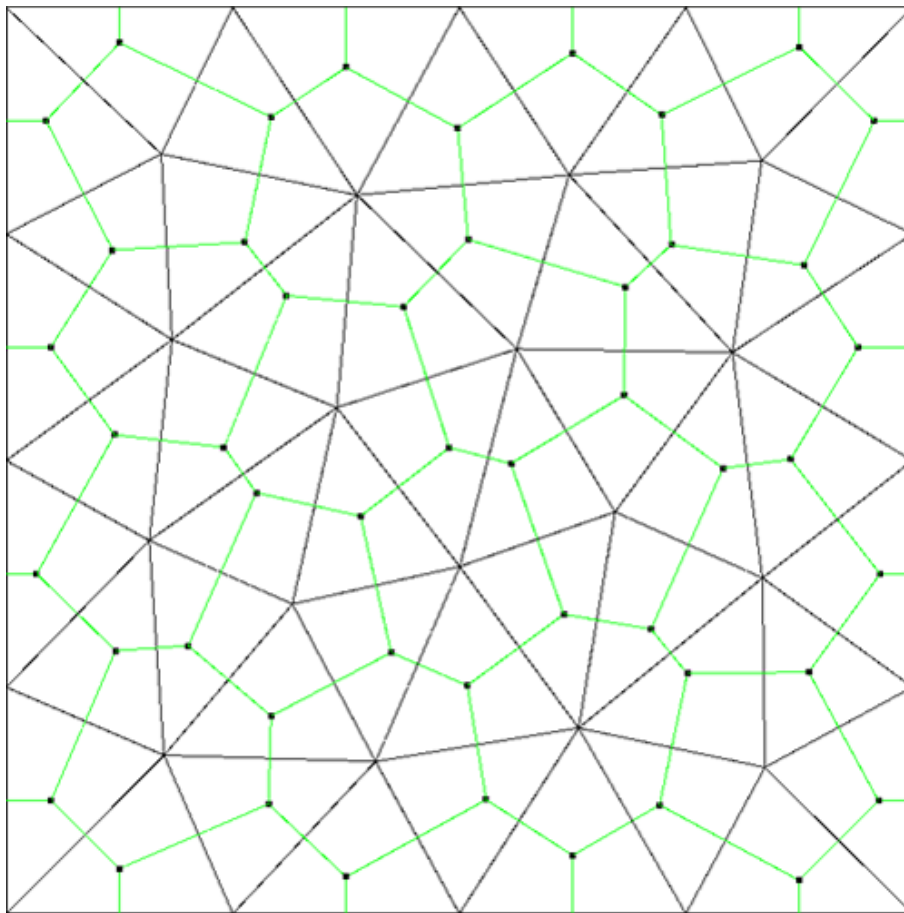


Figura 19: Malha inicial com diagrama de Voronoi. As arestas de Voronoi ligadas à borda do domínio são infinitas.

4.1.1. Técnica de subdivisão de triângulos

A inserção de um novo vértice no centro do círculo inscrito ao triângulo é implementada neste trabalho para triângulos de categoria interna.

Quando um triângulo não contém arestas na borda do domínio de solução diz que este triângulo é de categoria interna. Seja abc um triângulo e n o novo vértice inserido. Os vértices do triângulo abc conectam ao novo vértice n , gerando-se três novos triângulos abn , acn e bnc como pode ser observado na Figura 20.

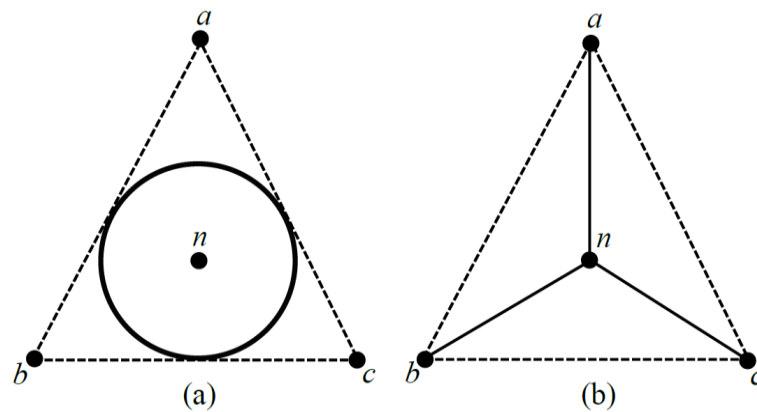


Figura 20: Inserção do novo vértice n no centro do círculo inscrito ao triângulo abc .

Para triângulos na borda, seja \overline{bc} um segmento de reta que pertence à borda do domínio de solução e ao triângulo abc . A inserção do novo vértice n passa a ser na mediatriz do segmento de reta \overline{bc} . Os vértices do triângulo abc conectam-se ao novo vértice n inserido e formam-se dois novos triângulos abn e anc como pode ser observado na Figura 21.

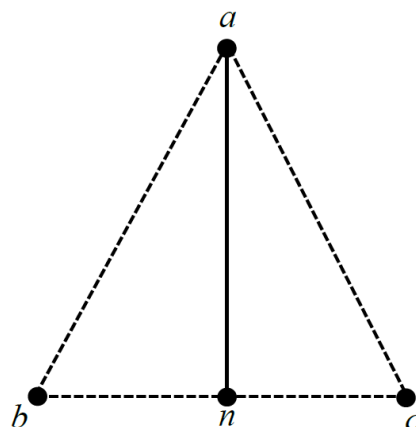


Figura 21: Inserção do novo vértice n na mediatriz do segmento de reta \overline{bc} que pertence ao triângulo abc .

4.1.2. Critério de refinamento

Dentre vários critérios de refinamento existentes, tem-se um critério de Chew (1989), de Ruppert (1992, 1995) e de Shewchuk (1997, 2002). Estes critérios são utilizados por Pereira (2006) para obter uma melhoria da qualidade dos triângulos de uma malha arbitrária porém, o objetivo deste trabalho vai além de manter a qualidade dos elementos pertencentes da malha, deseja-se encontrar uma solução adequada para a equação de Laplace com as condições de contorno dadas na subseção 3.3.1. O critério de refinamento estabelecido neste trabalho é simples: Seja $\varepsilon = |U_p - U_i|$ e ν um determinado valor, se $\varepsilon > \nu$ então refina-se um dos triângulos que contém a aresta $U_p U_i$. Na Figura 22, observa-se o diagrama de atividades do refinamento adaptativo da malha.

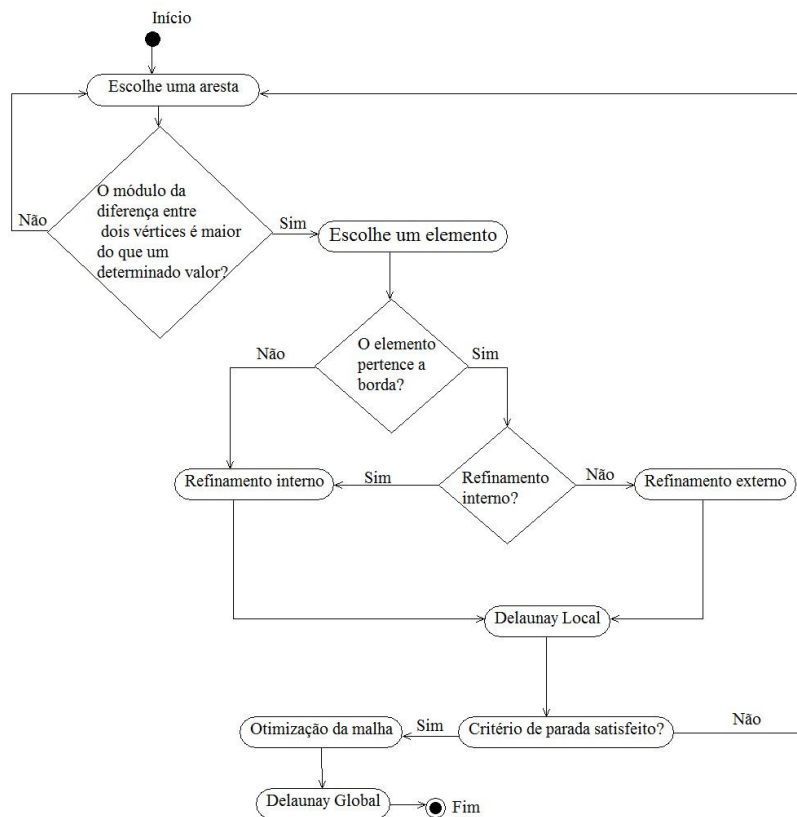


Figura 22: Diagrama de atividades do refinamento adaptativo da malha.

4.2. Resultados obtidos do projeto computacional desenvolvido

Nesta seção, apresentam-se algumas simulações e experimentos realizados com o projeto computacional desenvolvido.

4.2.1. Simulação com a malha inicial

Na Figura 23, observa-se uma solução numérica obtida com a malha inicial.

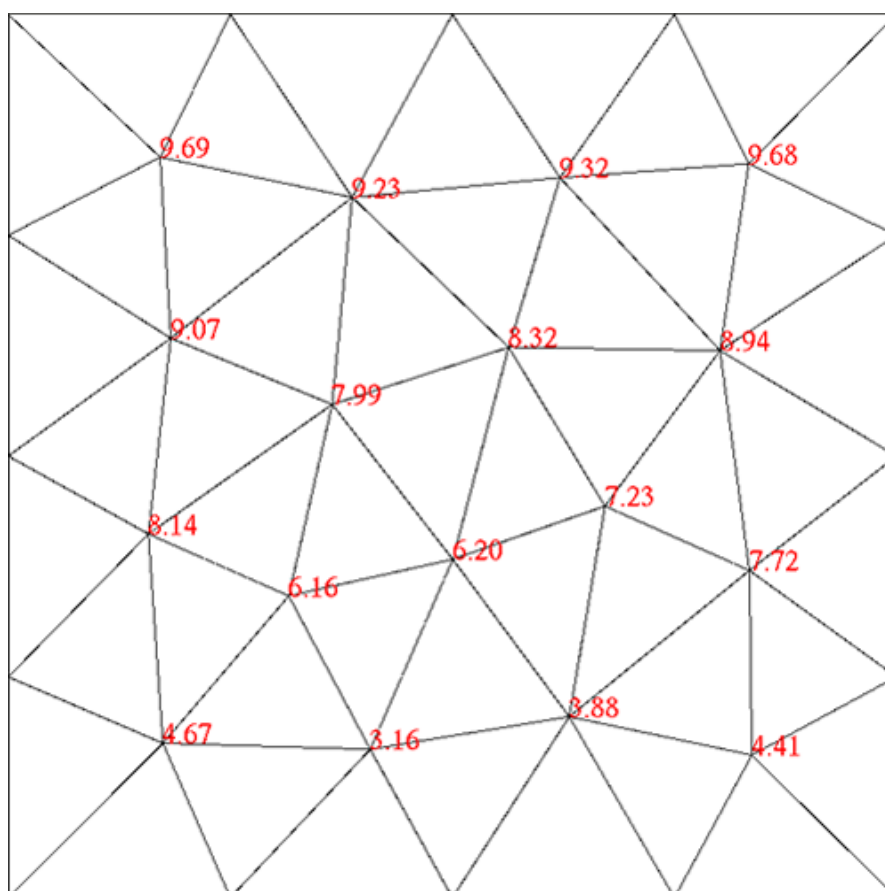


Figura 23: Solução da equação de Laplace em cada vértice da triangulação.

O teste do circuncírculo foi aplicado em cada triângulo para verificar se a triangulação gerada é de Delaunay. Na Figura 24 pode-se observar a realização do teste do circuncírculo aplicado em cada triângulo da malha inicial.

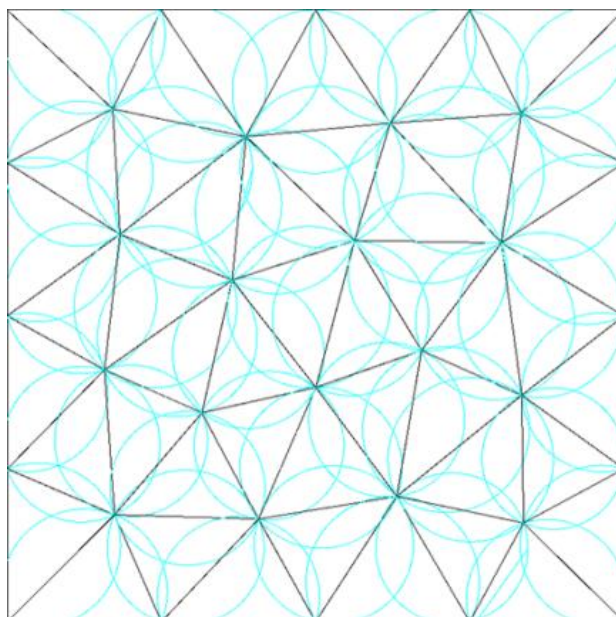


Figura 24: Teste do circuncirculo realizado na malha inicial.

4.2.2. Simulação com o critério de refinamento $\epsilon > 3,0$

Nesta simulação, refinou-se a malha inicial com o critério de refinamento $\epsilon > 3,0$. Na Figura 25, observa-se o refinamento adaptativo da malha.

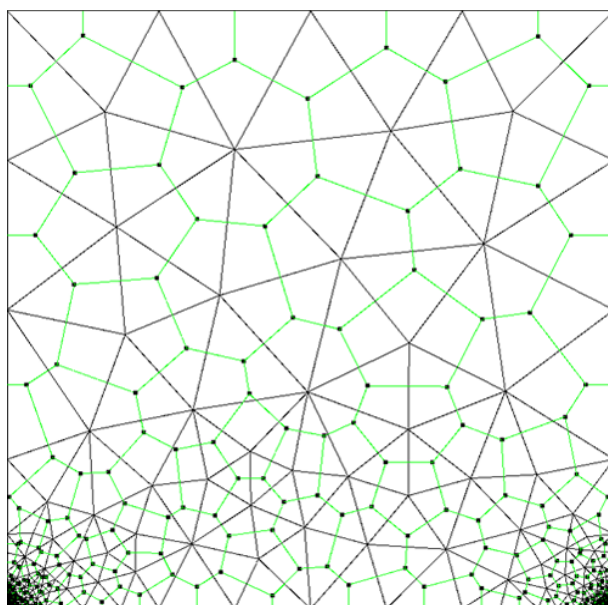


Figura 25: Refinamento adaptativo da malha.

De acordo com o critério de refinamento estabelecido e com 15 iterações, gerou-se uma triangulação de Delaunay, com 513 triângulos e 420 vértices, e um diagrama de Voronoi com 420 polígonos, sendo que, as arestas de Voronoi ligadas à borda do domínio são infinitas. Na Figura 26, visualiza-se uma triangulação de Delaunay com o teste do circuncírculo em, cada um dos triângulos.

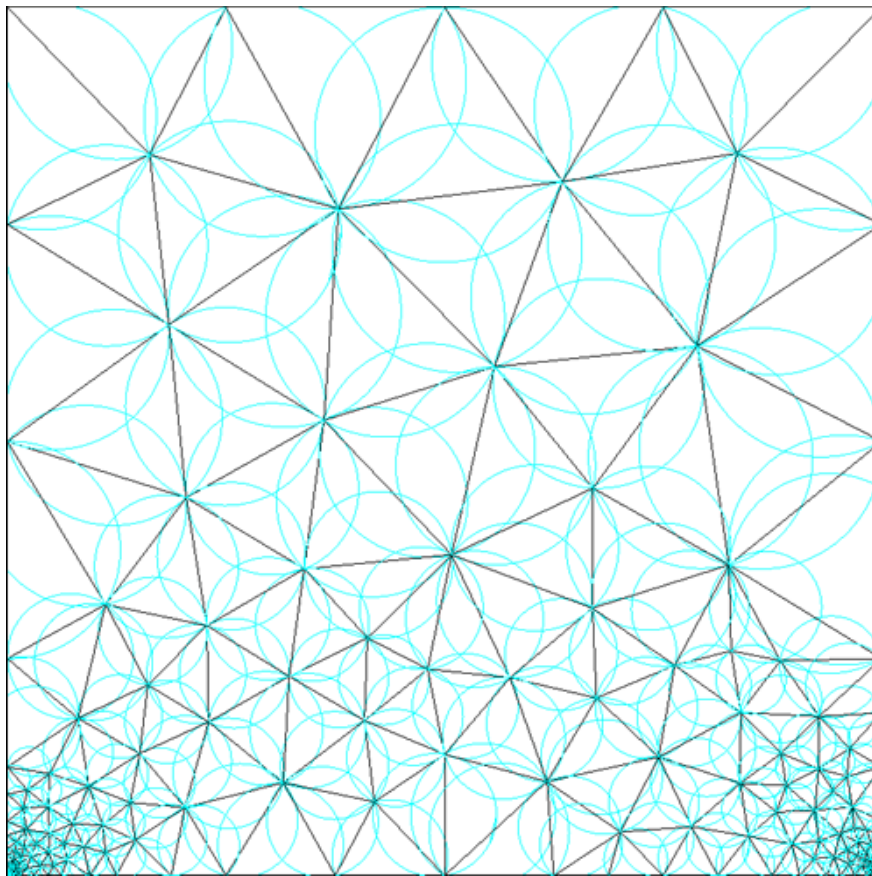


Figura 26: Teste *in-circle* na triangulação de Delaunay gerada com o critério de refinamento $\epsilon > 3,0$.

Na Figura 27 verifica-se uma solução da equação de Laplace, com as condições de contorno dadas na subseção 3.3.1, no centróide do diagrama de Voronoi. As arestas de Voronoi ligadas à borda do domínio são infinitas. Com o refinamento adaptativo da malha obteve-se um número maior de elementos e, portanto uma solução mais precisa em relação à malha inicial.

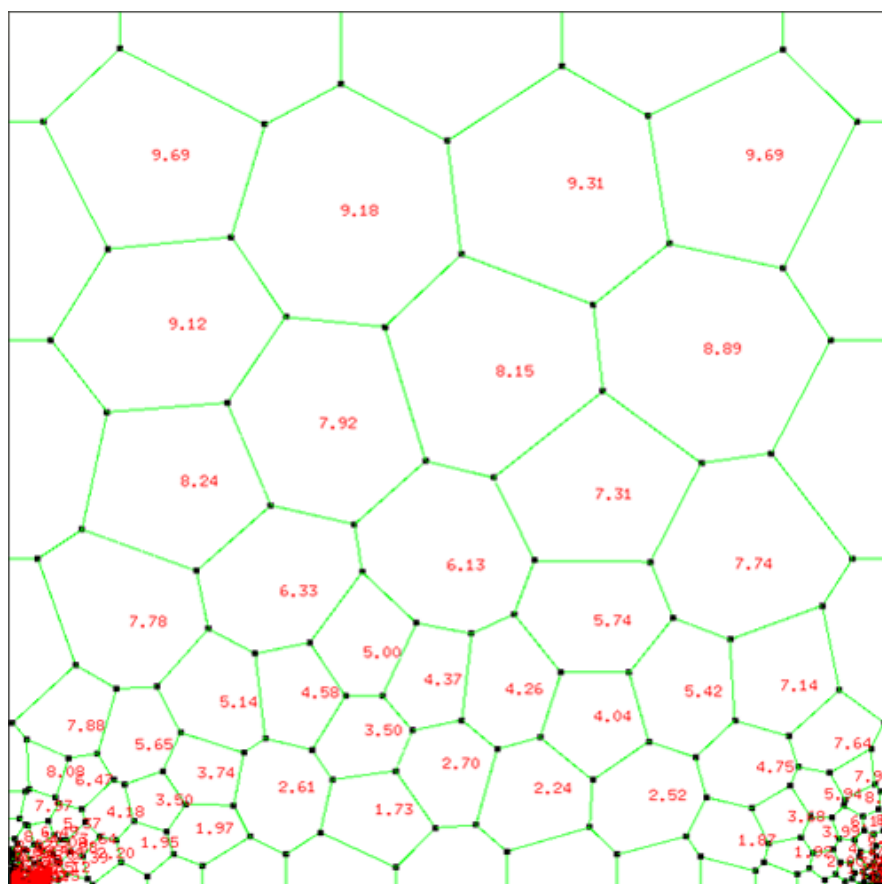


Figura 27: Solução da equação de Laplace, com as condições de contorno dadas na subseção 3.3.1, no centróide de cada polígono de Voronoi com o critério de refinamento $\varepsilon > 3,0$.

4.2.3. Simulação com o critério de refinamento $\varepsilon > 2,0$

De acordo com o critério de refinamento $\varepsilon > 2,0$ e com 15 iterações gerou-se uma triangulação de Delaunay com 809 triângulos e 575 vértices como pode ser observado na Figura 28.

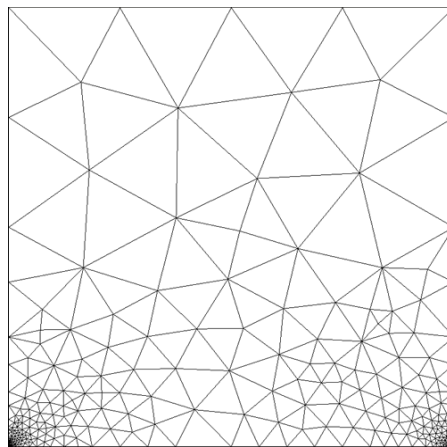


Figura 28: Triangulação de Delaunay gerada com o critério de refinamento $\varepsilon > 2,0$.

Seja o critério de refinamento $\varepsilon > 2,0$ e com 15 iterações gerou-se uma triangulação de Delaunay com 809 triângulos e 575 vértices e um diagrama de Voronoi com 575 polígonos de Voronoi como pode ser observado na Figura 29.

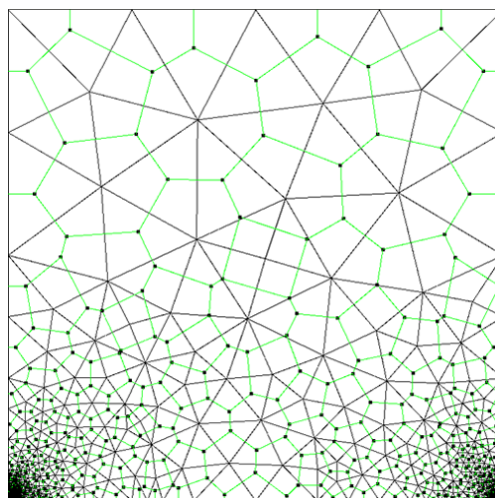


Figura 29: Diagrama de Voronoi gerado a partir de uma triangulação de Delaunay com o critério de refinamento $\varepsilon > 2,0$.

Com o critério de refinamento $\varepsilon > 2,0$ e com 15 iterações gerou-se uma triangulação de Delaunay com 809 triângulos e 575 vértices como pode ser observado na Figura 30.

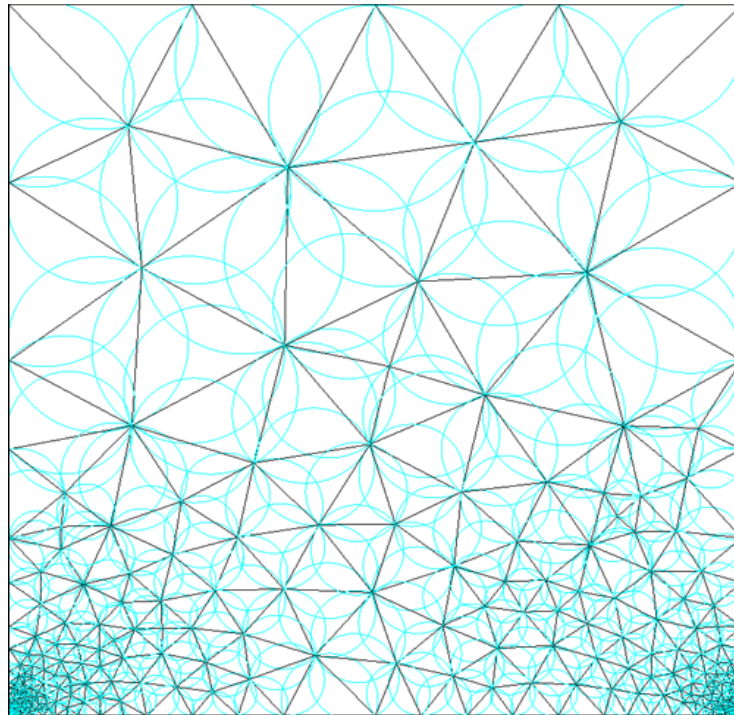


Figura 30: Teste *in-circle* na triangulação de Delaunay gerada com o critério de refinamento $\varepsilon > 2,0$.

De acordo com o critério de refinamento $\varepsilon > 2,0$ e com 15 iterações gerou-se um diagrama de Voronoi, com 575 polígonos de Voronoi, e uma solução da equação de Laplace, com as condições de contorno dadas na subseção 3.3.1, no centróide de cada polígono como pode ser observado na Figura 31. As arestas de Voronoi ligadas à borda do domínio são infinitas.

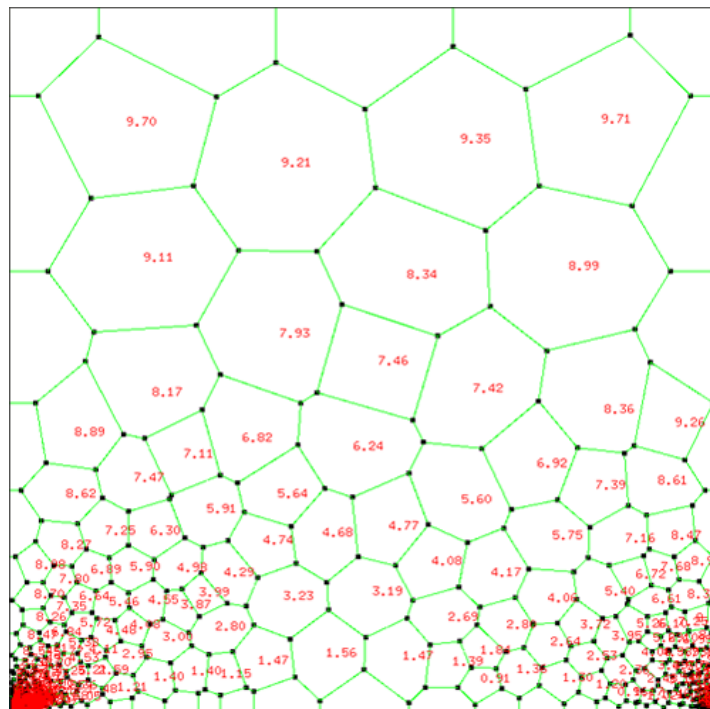


Figura 31: Solução da equação de Laplace, com as condições de contorno dadas na subsecção 3.3.1, no centróide de cada polígono de Voronoi com o critério de refinamento $\varepsilon > 2,0$.

4.2.4. Simulação com o critério de refinamento $\varepsilon > 1,5$

Para o critério de refinamento $\varepsilon > 1,5$ e com 15 iterações gerou-se uma triangulação de Delaunay com 1326 vértices e 1968 triângulos como pode ser observado na Figura 32.

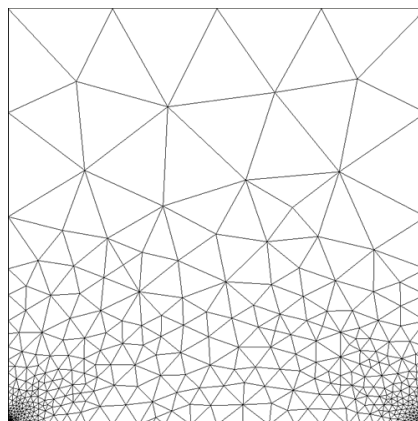


Figura 32: Triangulação de Delaunay gerada com o critério de refinamento $\varepsilon > 1,5$.

Seja o critério de refinamento $\varepsilon > 1,5$ e com 15 iterações gerou-se uma triangulação de Delaunay com 1326 vértices e 1968 triângulos e um diagrama de Voronoi com 1326 polígonos de Voronoi como pode ser observado na Figura 33. As arestas de Voronoi ligadas à borda do domínio são infinitas.

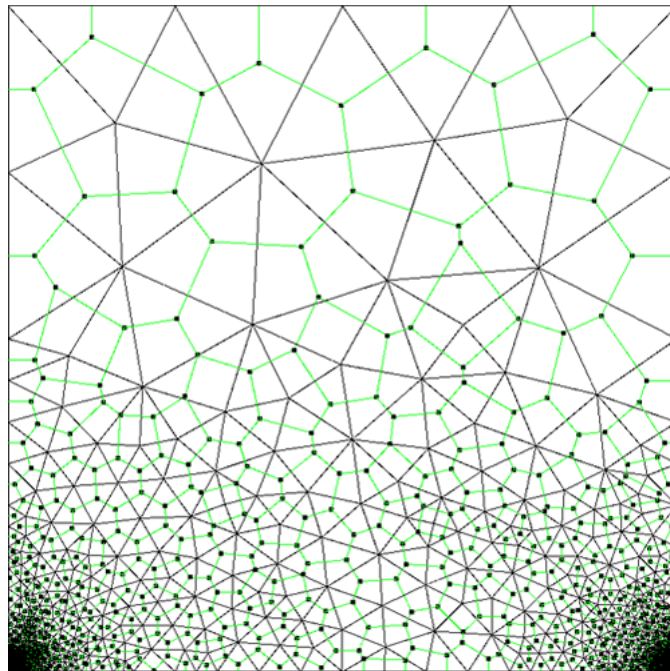


Figura 33: Diagrama de Voronoi gerado a partir de uma triangulação de Delaunay com o critério de refinamento $\varepsilon > 1,5$.

Com o critério de refinamento $\varepsilon > 1,5$ e com 15 iterações gerou-se um diagrama de Voronoi, com 1326 polígonos de Voronoi, e uma solução da equação de Laplace, com as condições de contorno dadas na subseção 3.3.1, no centróide de cada polígono como pode ser observado na Figura 34. As arestas de Voronoi ligadas à borda do domínio são infinitas.

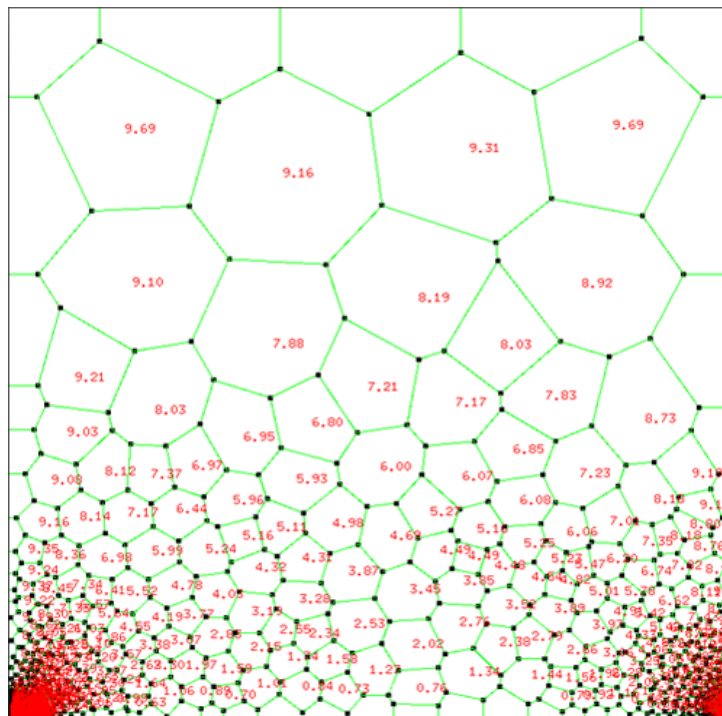


Figura 34: Solução da equação de Laplace, com as condições de contorno dadas na subseção 3.3.1, no centróide de cada polígono de Voronoi com o critério de refinamento $\varepsilon > 1,5$.

4.2.5. Simulação com o critério de refinamento $\varepsilon > 0,25$

De acordo com o critério de refinamento $\varepsilon > 0,25$ e com 20 iterações gerou-se uma triangulação de Delaunay com 34191 vértices e 66902 triângulos como pode ser observado na Figura 35.

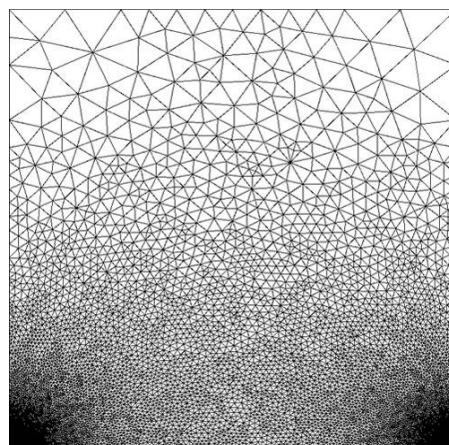


Figura 35: Malha com 34191 vértices e 66902 triângulos.

Com o critério de refinamento $\varepsilon > 0,25$ e com 25 iterações gerou-se uma triangulação de Delaunay com 45994 vértices e 90126 triângulos como pode ser observado na Figura 36.

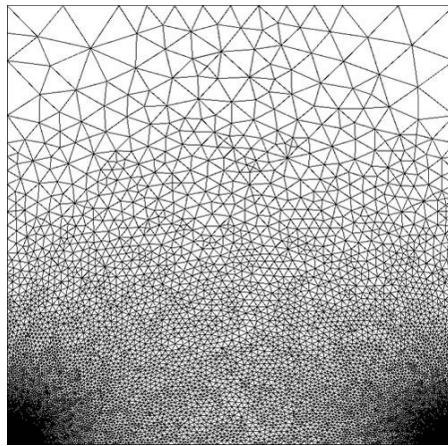


Figura 36: Malha com 45994 vértices e 90126 triângulos.

Seja o critério de refinamento $\varepsilon > 0,25$ e com 26 iterações gerou-se uma triangulação de Delaunay com 48599 vértices e 95137 triângulos como pode ser observado na Figura 37.

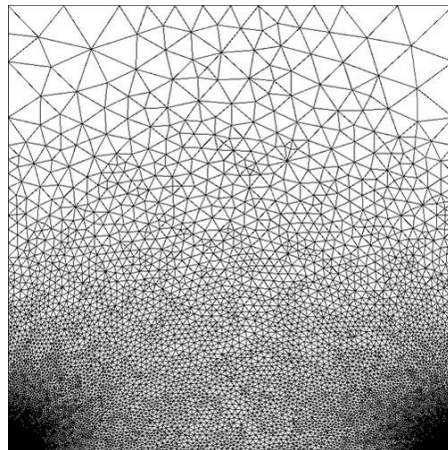


Figura 37: Malha com 48599 vértices e 95137 triângulos.

4.2.6. Simulação com o critério de refinamento $\epsilon > 0,2$

Com o critério de refinamento $\epsilon > 0,2$ e com 15 iterações gerou-se uma triangulação de Delaunay com 38366 vértices e 75468 triângulos como pode ser observado na Figura 38.

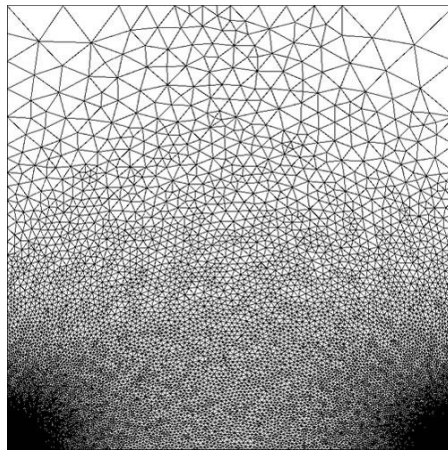


Figura 38: Malha com 38366 vértices e 75468 triângulos.

De acordo com o critério de refinamento $\epsilon > 0,2$ e com 20 iterações gerou-se uma triangulação de Delaunay com 53882 vértices e 105943 triângulos como pode ser observado na Figura 39.

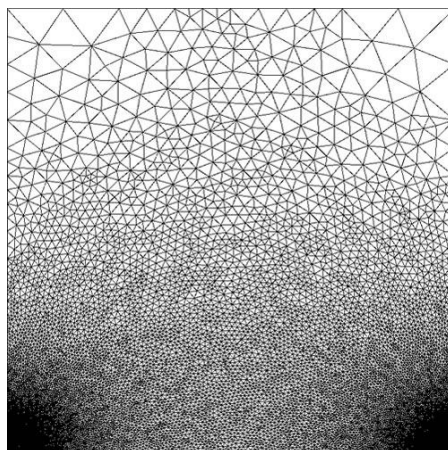


Figura 39: Malha com 53882 vértices e 105943 triângulos.

5. CONCLUSÃO E TRABALHOS FUTUROS

Neste trabalho, elaborou-se um projeto computacional com o objetivo de encontrar uma solução numérica para a equação de Laplace, com determinadas condições de contorno. Para alcançar este objetivo, utilizou-se o método dos volumes finitos com malhas irregulares. Para resolver o sistema linear gerado pelo método dos volumes finitos, utilizou-se o método do gradiente conjugado. Além disso, realizou-se um refinamento adaptativo de Delaunay.

O desenvolvimento deste código pode permitir um aproveitamento das funções desenvolvidas para a resolução de outras equações diferenciais. Além disso, pode haver um refinamento adaptativo da malha e uma melhoria na qualidade da malha com o uso da suavização Laplaciana para encontrar uma boa solução para a equação de Laplace.

Como trabalhos futuros, sugere-se:

- Tratar os erros do projeto computacional desenvolvido, descritos na subseção 3.1.
- Estudar outros algoritmos de refinamento, como o algoritmo *The Terminator*, que foi proposto por Shewchuk (1997, 2002) e oferece garantia de terminação e garantia de ângulo mínimo.
- Estudar e tratar outros algoritmos de suavização da malha, como o algoritmo proposto por Canann, Tristano e Staten (1998), que oferece uma combinação da suavização Laplaciana com algoritmos de suavização da malha baseados em otimizações.
- Tratar erros de arredondamento e erros de truncamento, de operações matemáticas processadas no computador, que podem tornar o retorno das rotinas do projeto computacional desenvolvido, impreciso.
- Estudar e tratar outras equações diferenciais parciais, como a equação do calor.

BIBLIOGRAFIA

ALVES, A. C. **Verificação de soluções numéricas da equação de Laplace 2D com malhas triangulares e multiplas interpolações de Richardson**. Curitiba: Universidade Federal do Paraná, 2010. Tese de doutorado em Engenharia Mecânica.

BECKER, C.; PANTA PAZOS, R. E.; CROSSETI, G. L. Método do Gradiente Conjugado na Otimização de Problemas Modelados na Catalização de Polímeros. **XXXI - Congresso Nacional de Matemática Aplicada e Computacional - CNMAC**, 8 Setembro 2008. 332-336.

BLACKER, T. D.; STEPHENSON, M. B. Paving: A new approach to automated quadrilateral mesh generation. **Sandia National Laboratories**, 1990. ISSN SAND90-0240.

BLACKER, T. D.; STEPHENSON, M. B. Paving: A new approach to automated quadrilateral mesh generation. **International Journal for Numerical Methods in Engineering**, v. 32, p. 811-847, 1991.

BLACKER, T. D.; STEPHENSON, M. B.; CANANN, S. A. Analysis automation with paving: a new quadrilateral meshing technique, Honolulu, Feb 1991.

BRIERE DE L'ISLE, E.; GEORGE, P. L. Otimization of tetrahedral meshes. **IMA Volumes in Mathematics and its Applications**, v. 75, p. 97-128, 1995.

BURGARELLI, D. **Modelagem computacional e simulação numérica adaptativa de equações diferenciais parciais evolutivas aplicadas a um problema termoacústico**. 1998. Tese de Doutorado, PUC-Rio, Rio de Janeiro, 1998.

BURKARDT, J. CVT_FIXED_PRB, 2006. Disponível em:
<http://people.sc.fsu.edu/~jburkardt/f_src/cvt_fixed2/cvt_fixed2_prb.f90>. Acesso em: 5 Setembro 2011.

BURKARDT, J. TABLE_DELAUNAY. **Triangulate points in 2D**, 2009. Disponível em:
<http://people.sc.fsu.edu/~jburkardt/cpp_src/table_delaunay/table_delaunay.html>. Acesso em: 5 Setembro 2011.

CANANN, S. A.; LIU, Y. C.; MOBLEY, A. V. Automated 3D Surface meshing to address today's industrial needs. **Finite Elements in Analysis and Design**, v. 25, p. 185-198, Março 1997.

CANANN, S.; TRISTANO, J.; STATEN, M. An Approach to Combined Laplacian and Optimization-Based Smoothing for Triangular, Quadrilateral and Quad-Dominant Meshes. **7th. Int. Meshing Roundtable**, 1988.

CELIK, I.; ZHANG, W. M. Calculation of Numerical uncertainty using Richardson extrapolation: application to some simple turbulent flow calculations. **ASME Journal of Fluids Engineering**, v. 117, p. 439-445, 1995.

CHEW, L. P. **Guaranteed-Quality Triangular Meshes**. 1989. Relatório Técnico (Ciência da Computação) - Department of Computer Science, Cornell University, Ithaca, NY 14853-7501.

FERREIRA, R. D. F. **Um Analisador de jogo de futebol através de diagrama de Voronoi**. Florianópolis. 2006.

FIELD, D. Laplacian smoothing and Delaunay triangulations. **Communications in Numerical Methods in Engineering**, v. 4, p. 704-712, 1988.

FISCHER, B. R. **Aplicação do método do Gradiente Conjugado no Controle da Estabilidade Longitudinal de Aeronaves**. In: XXIX Congresso Nacional de Matemática Aplicada e Computacional, 2006, Campinas. ANAIS DO XXIX CNMAC -CD. São Carlos : aissystems.com.br, 2006.

GEORGE, P. L. Automatic Mesh Generation, Paris, Masson, p. 234-236, 1991.

GEORGE, P. L.; BOROUCHEKI, H. Delaunay triangulations and Meshing. **Application to Finite Elements**, Paris, France, p. 230-234, 1998.

GONÇALVES, N. D. F. **Método dos Volumes Finitos em Malhas não Estruturadas**. Faculdade de Ciências da Universidade do Porto, 2007. Dissertação em Engenharia Matemática.

GUIBAS, L. J.; STOLFI, J. Primitives for the Manipulation of General Subdivisions and the Computation of Voronoi Diagrams. **ACM Transactions on Graphics**, 4, n. 2, Abril 1985. 74-123.

HANSBO, P. Generalized Laplacian smoothing of unstructured grids. **Communications in Numerical Methods in Engineering**, v. 11, p. 455-464, 1995.

HERRMANN, L. R. Laplacian-isoparametric grid generation scheme. **Journal of Engineering Mechanics**, p. 749-756, Outubro 1976.

HESTNES, M. R.; STIEFEL, E. Methods of Conjugate Gradients for Solving Linear Systems. **Journal of Research of the National Bureau of Standards**, 49, n. 6, Dezembro 1952. 409-436.

JONES, N. L.; WRIGHT, S. G. Algorithm for smoothing triangulated surfaces. **J. Comput. Civil Eng.**, 1991. 85-102.

JONES, R. E. QMESH: A self-organizing mesh generation program. **Sandia National Laboratories**, p. 23, 1974.

LANCZOS, CORNELIUS. **Solution of systems of linear equations by minimized iterations**, J. Res. Natl. Bur. Stand 49 (1952), 33-53.

LAWSON, C. L. **Software for C^1 Surface Interpolation**. 1977. p. 161 – 194.

MALISKA, C. R. **Transferência de Calor e Mecânica dos Fluidos**. LTC, 2004.

OBERKAMPF, W. L.; BLOTTNER, F. G. Issues in Computational Fluid Dynamics Code Verification and Validation. **AIAA Journal**, v. 36, n. 5, p. 687-695, 1998.

OLIVEIRA, T. H. **Resolução de equações diferenciais parciais pelo método dos volumes finitos com refinamento adaptativo**. Universidade Federal de Lavras. Lavras. 2011. Relatório de iniciação científica.

OPENGL, A. R. B. **OpenGL Reference Manual**. Addison Wesley, 1993.

PEREIRA, D. R. Refinamentos adaptativos bidimensionais de Delaunay. **Universidade Estadual Paulista "Júlio de Mesquita Filho"**, 2006. Trabalho de conclusão de curso.

RUPPERT, J. **A new and simple algorithm for quality 2-dimensional mesh generation**. University of California. Berkeley. 1992.

RUPPERT, J. A delaunay refinement algorithm for quality 2-dimensional mesh generation. **Journal of Algorithms**, San Diego, v. 18, n. 3, p. 548-585, Maio 1995.

SCHNEIDER, F. A.; MALISKA, C. R. **Uma Formulação em Volumes Finitos Usando Malhas Não-Estruturadas**. 8th Brazilian Congress of Engineering and Thermal Sciences. Porto Alegre-RS, Brasil: ENCIT. 2000. p. 74.

SCHNEIDER, F. A. **Verificação de soluções numéricas bidimensionais em malhas não-estruturadas**. Proposta de pesquisa para tese de doutorado, Programa de Pós-Graduação em Métodos Numéricos em Engenharia, UFPR, Curitiba, 2003.

SHEWCHUK, J. R. **Delaunay Mesh Refinement**. Carnegie Mellon University. Pittsburgh, Pensilvania. 1997.

SHEWCHUK, J. R. Delaunay refinement algorithms for triangular mesh generations. **Computational Geometry**, v. 22, p. 21-74, 2002.

STROUSTRUP, B. **The C++ Programming Language**. 3°. ed. Addison Wesley Pub, 2000.

VERSTEEG, H. K.; MALALASEKERA, W. **An introduction to Computational Fluid Dynamics**. Longman Scientific and Technical, 1995.