

**ANÁLISE BAYESIANA DO MODELO DE
INTERVENÇÃO COM ERRO ARMA**

LETÍCIA LIMA MILANI

2000

LETÍCIA LIMA MILANI

ANÁLISE BAYESIANA DO MODELO DE INTERVENÇÃO COM ERRO ARMA

Dissertação apresentada à Universidade Federal de Lavras, como parte das exigências do Programa de Pós-Graduação em Agronomia, área de concentração em Estatística e Experimentação Agropecuária, para obtenção do título de Mestre”.

Orientadora:

Prof^a Dr^a Thelma Sáfadi

LAVRAS

MINAS GERAIS – BRASIL

2000

**Ficha Catalográfica Preparada pela Divisão de Processos Técnicos da
Biblioteca Central da UFLA**

Milani, Leticia Lima

**Análise Bayesiana do modelo de intervenção com erro arma / Leticia Lima
Milani. -- Lavras : UFLA, 2000.**

142 p. : il.

Orientador: Thelma Sáfadi.

Dissertação (Mestrado) – UFLA.

Bibliografia.

**1. Estatística. 2. Análise Bayesiana. 4. Inferência Bayesiana. 4. Distribuição. I.
Universidade Federal de Lavras. II. Título.**

CDD-519.542

LETÍCIA LIMA MILANI

ANÁLISE BAYESIANA DO MODELO DE INTERVENÇÃO COM ERRO ARMA

Dissertação apresentada à Universidade Federal de Lavras, como parte das exigências do Programa de Pós-Graduação em Agronomia, área de concentração em Estatística e Experimentação Agropecuária, para obtenção do título de Mestre”.

APROVADA em 24 de fevereiro de 2000

Prof. Marinho Gomes Andrade USP

Prof. Ruben Delly Veiga UFLA

Prof. Eduardo Bearzoti UFLA

Prof^a: Thelma Sáfadi
UFLA
(Orientadora)

LAVRAS
MINAS GERAIS - BRASIL

Aos meus pais Dirceu e Maria.
Aos meus irmãos Fabricio e Gustavo.
Ao meu noivo Wilson.

AGRADECIMENTOS

A Deus por mais esta etapa vencida.

A Thelma Sáfadi pela sua orientação, dedicação, apoio, confiança e principalmente pela sua amizade.

Aos professores Eduardo Bearzoti, Augusto de Moraes, Daniel Furtado Ferreira, Luís Henrique de Aquino, Júlio Silvio de Souza Bueno pelos ensinamentos, apoio e dedicação.

A Maria das Dores Correa Santos por sua dedicação.

Ao professor Joel Augusto Muniz pela grande dedicação e esforço para a melhora constante no curso.

Aos colegas Adriano, Carlos, Marcelo, Andrea, Ivani e Monica, pela convivência que tivemos, pela amizade e apoio nas horas difíceis.

SUMÁRIO

	Página
RESUMO.....	i
ABSTRACT.....	ii
1 INTRODUÇÃO.....	1
2 REFERENCIAL TEÓRICO.....	3
2.1 Análise Bayesiana.....	3
2.1.1 Considerações Iniciais.....	3
2.1.2 Inferência Bayesiana.....	4
2.1.3 Amostrador de Gibbs.....	9
2.2 Séries Temporais.....	14
2.2.1 Considerações Iniciais.....	14
2.2.2 Modelos de Decomposição.....	16
2.2.3 Modelos de Box & Jenkins.....	17
2.3 Modelos de Intervenção.....	20
2.3.1 Considerações Iniciais.....	20
2.3.2 Modelos de Função de Transferência.....	21
2.3.3 Modelos de Intervenção.....	24
2.3.4 Alguns Exemplos de Intervenção.....	30
2.4 Descrição do Modelo de Intervenção.....	31
2.4.1 Análise Bayesiana do Modelo de Intervenção com Erro ARMA(p,q).....	31
2.4.2 Análise Bayesiana do Modelo de Intervenção com Erro MA(q).....	35
3 MATERIAL E MÉTODOS.....	40

4 RESULTADOS E DISCUSSÃO	41
4.1 Considerações Iniciais.....	41
4.2 Distribuições a Posteriori Condicionais Completas para o Modelo de Intervenção com Erro ARMA(p,q) Utilizando a Priori de Jeffreys.....	41
4.2.1 Distribuição Condicional Completa para o Parâmetro ϕ	42
4.2.2 Distribuição Condicional Completa para o Parâmetro θ	43
4.2.3 Distribuição Condicional Completa para o Parâmetro β	45
4.2.4 Distribuição Condicional Completa para o Parâmetro τ	46
4.3 - Distribuições a Posteriori Condicionais Completas para o Modelo de Intervenção com Erro MA(q) Utilizando a Priori Própria.....	48
4.3.1 Distribuição Condicional Completa para o Parâmetro β	48
4.3.2 Distribuição Condicional Completa para o Parâmetro θ	49
4.3.3 Distribuição Condicional Completa para o Parâmetro τ	50
4.4 Distribuições a Posteriori Condicionais Completas para o Modelo de Intervenção com Erro MA(q) Utilizando a Priori Imprópria.....	50
4.4.1 Distribuição Condicional Completa para os Parâmetros β , θ e τ	50
5 APLICAÇÃO	52
5.1 Análise do Modelo com Duas Intervenções e Erro ARMA(2, 2).....	52
5.2 Análise do Modelo com Duas Intervenções e Erro MA(2).....	63
6 CONCLUSÃO	72
REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICA	73
ANEXOS	77

RESUMO

MILANI, Leticia Lima. **Análise Bayesiana do modelo de intervenção com erro ARMA**. Lavras: UFLA, 2000. 143p. (Dissertação – Mestrado em Estatística e Experimentação Agropecuária).

O presente trabalho teve como objetivo principal apresentar um estudo detalhado sobre a análise Bayesiana de um modelo de intervenção com erro ARMA, em que a inferência sobre os parâmetros foi feita aplicando o Amostrador de Gibbs. Para a análise Bayesiana do modelo de intervenção com erro ARMA, foi usada a priori imprópria de Jeffreys. Também foi feita a análise Bayesiana do modelo de intervenção com erro MA. Para a análise deste modelo foi considerada uma priori própria e a priori imprópria de Jeffreys. Foram feitas aplicações do método através de dois exemplos para os quais os dados foram simulados; em ambos os casos foi adotado o modelo com duas intervenções, a priori utilizada foi a priori imprópria de Jeffreys e foram consideradas duas cadeias em paralelo. O primeiro exemplo referiu-se à análise do modelo de intervenção com erro ARMA(2, 2), e o segundo ao modelo de intervenção com erro MA(2). A inferência sobre os parâmetros foi obtida através do Amostrador de Gibbs, considerando as distribuições marginais condicionais completas. Para o primeiro exemplo, considerou-se a análise com 6000 iterações; já no segundo exemplo, a análise foi feita com 10000 iterações. Para verificar a convergência, foram utilizados o método de técnicas gráficas e o método proposto por Gelman e Rubin (1992), baseado no fator \hat{R} .

Orientadora: Thelma Sáfydi - UFLA
Co-Orientador: Eduardo Bearzoti – UFLA

ABSTRACT

MILANI, L. L. **Bayesian Analysis of the intervention model with ARMA error**. Lavras: UFLA, 2000; 143p. (Dissertation – master in Statistical and Agricultural Experimentation).

This work was designed to present a detailed study about the Bayesian analysis of the time series intervention model with ARMA and MA error. Inference about the parameters was done by applying Gibbs Sampler. For the Bayesian analysis of the intervention model with ARMA error, Jeffreys' improper prior was used. Bayesian analysis of the intervention model with MA error considering a proper prior and the improper prior of Jeffreys. Two examples of simulated data were presented, with two interventions and Jeffreys' improper prior. The first example was concerned with the analysis of the intervention model with ARMA(2,2) error and the latter dealt with the intervention model with MA(2) error. The inference about the parameters was accomplished through Gibbs Sampler, considering the complete conditional marginal distributions. The former example required 6000 iterations and the latter, the analysis was carried out with 10000 iterations. To verify the convergence, the method of graphic techniques was utilized, as well as the method of Gelman and Rubin(1992), which is based on the \hat{R} factor.

Adviser: Thelma Sáfaci - UFLA
Co-Adviser: Eduardo Berazoti - UFLA

1 INTRODUÇÃO

Frequentemente, na teoria de séries temporais, existe o interesse em modelos tais que a série possa ter mudado de nível devido à ocorrência de um dado evento em algum instante de tempo. O objetivo da análise de intervenção é avaliar o impacto do evento ocorrido no comportamento da série.

A análise de séries temporais tem uma grande aplicação em diversas áreas. A literatura em séries temporais é numerosa, sendo a maior parte delas não Bayesiana.

A maioria dos trabalhos com um enfoque Bayesiano ocorreram depois de 1970, apesar de Jeffreys (1939) ter sido o primeiro a estudar a teoria espectral. Mas foi a partir de 1980 que as técnicas Bayesianas mostraram ser uma boa alternativa para a metodologia de Box & Jenkins, tida como um padrão de análise. Esta linha de pensamento foi iniciada por Monahan (1983), que usou integração numérica para pôr em prática uma completa análise Bayesiana de séries temporais, incluindo identificação, verificação, estimação e previsão.

Existem poucos trabalhos que dão um enfoque Bayesiano para a análise de séries temporais com intervenção. Uma boa referência ao tratamento Bayesiano de um modelo de intervenção é dada por Diaz (1988), segundo o qual o procedimento de fazer uma análise de intervenção com enfoque Bayesiano é aplicado a dois exemplos. O primeiro corresponde a uma série de médias mensais do nível de O_3 na atmosfera no centro da cidade de Los Angeles, esta série já havia sido estudada, utilizando um enfoque clássico, por Tiao, Box; Hamming (1975); e no segundo exemplo têm-se dados simulados. Diaz (1988)

não utilizou o Amostrador de Gibbs para fazer inferência sobre os parâmetros. O interesse de Diaz (1988) era apenas estimar o parâmetro de intervenção.

Vários autores têm feito a análise de séries temporais com intervenção, mas são poucos os trabalhos em que se aplica a análise Bayesiana.

Desta forma, este trabalho teve por objetivo fazer uma análise Bayesiana do modelo de intervenção descrito por Diaz (1988), utilizando o Amostrador de Gibbs na inferência sobre os parâmetros.

2 REFERENCIAL TEÓRICO

2.1 Análise Bayesiana

2.1.1 Considerações Iniciais

O problema fundamental da estatística é fazer inferência. Alguns dados são observados e deseja-se fazer inferência sobre uma ou mais características desconhecidas do sistema que teria dado origem a este dados.

A inferência Bayesiana trabalha na presença de observações y , cujos valores inicialmente incertos são descritos através de uma distribuição de probabilidade $f(y / \theta)$. O parâmetro θ é o que interessa ao pesquisador, e tem um sentido exato dentro da questão em estudo. O pesquisador deve ter alguma informação prévia sobre θ , e esta informação deve ser incorporada à análise.

Para Gelman et al. (1997), a inferência Bayesiana é o processo de ajustar um modelo de probabilidade para um grupo de dados e resumir o resultado por uma distribuição de probabilidade nos parâmetros do modelo e em quantidades não observáveis como predição para novas observações.

A característica essencial dos métodos Bayesianos é o uso explícito de probabilidades para quantificar as incertezas. Portanto, a inferência Bayesiana é baseada no conceito de probabilidade subjetiva, que mede o grau de confiança que alguém deposita no acontecimento de um determinado evento do espaço amostral. Se existe uma incerteza, a descrição desta incerteza deve ser feita usando a probabilidade subjetiva. Então, o Bayesiano descreve toda quantidade

desconhecida através da probabilidade. Ao descrever uma incerteza usando a probabilidade, deve-se ter o cuidado com certas condições de coerência.

2.1.2 Inferência Bayesiana

Ao incorporar uma opinião sobre θ à análise através de uma densidade de probabilidade $P(\theta)$, o Bayesiano está denominando a *densidade a priori*. A *densidade a priori* possui este nome por ser a distribuição de probabilidade de θ antes que se observem os dados.

A densidade conjunta de um grupo de observações y_1, \dots, y_n , examinada como uma função do parâmetro, é denominada de *função de verossimilhança* e é representada por $L(y_1, \dots, y_n / \theta)$.

Se y_1, \dots, y_n denota uma amostra de distribuição com função de verossimilhança L indexada por um parâmetro contínuo θ , com densidade a priori $P(\theta)$, então a *densidade a posteriori* de θ é dada pelo *Teorema de Bayes*, ou seja

$$P(\theta / S_n) = \frac{L(S_n / \theta)P(\theta)}{\int L(S_n / \theta)P(\theta)d\theta},$$

onde $S_n = \{y_1, y_2, \dots, y_n\}$.

Press (1989) enumerou as seguintes observações sobre o Teorema de Bayes:

a) Desde que o denominador dependa somente de S_n (e não de θ), o Teorema de Bayes pode ser escrito como $P(\theta/S_n) \propto L(\theta/S_n)P(\theta)$, onde \propto denota proporcionalidade.

b) $P(\theta)$ é chamada de *função de probabilidade a priori* de θ , desde que ela seja determinada a priori, observando S_n no experimento atual, isto é, $P(\theta)$ é baseada em compreensão e experiência anteriores.

c) $P(\theta/S_n)$ é chamada de *função de probabilidade a posteriori* de θ , dada a observação atual.

d) Equação equivalente do Teorema de Bayes é dada por

$$POSTERIORI \propto \text{VEROSSIMILHANÇA} * \text{PRIORI}.$$

Pode-se pensar no Teorema de Bayes como um mecanismo de atualização da opinião do estatístico sobre θ .

O Teorema de Bayes é um elemento essencial para a análise Bayesiana, pois toda inferência é feita a partir da posteriori.

Por muitos anos, o uso de priori subjetiva gerou uma grande controvérsia para a inferência estatística baseada no Teorema de Bayes. A escolha da distribuição a priori é um problema pertinente na abordagem Bayesiana. Existem dois tipos de priori, a priori informativa (ou própria) e a priori não-informativa (ou imprópria). Quando o pesquisador tem alguma informação prévia sobre o que está estudando, ele pode usar uma priori informativa. De todos os aspectos da inferência Bayesiana, a priori informativa é a mais difícil e a que traz maior controvérsia. Mas pode acontecer que em determinado estudo o pesquisador tenha pouca ou nenhuma informação para se incorporar à priori; quando isto acontece, a distribuição considerada é a não-informativa. Existe igualmente controvérsia quanto à priori não-informativa,

pois muitas vezes esta priori faz com que se tenha uma distribuição a posteriori imprópria. A priori não-informativa mais usada é a priori de Jeffreys.

Um outro elemento na inferência Bayesiana é a *distribuição preditiva*, sendo usada quando se quer fazer uma inferência sobre uma observação futura, y_{n+1} , utilizando as observações passadas y_1, \dots, y_n . A distribuição preditiva é baseada na distribuição a posteriori de y_{n+1} , $P(y_{n+1} / y_1, \dots, y_n)$ e pode ser obtida da posteriori de y_{n+1} e θ pela integração:

$$P(y_{n+1} / S_n) = \int P(y_{n+1}, \theta / S_n) d\theta = \int P(y_{n+1} / \theta, S_n) P(\theta / S_n) d\theta$$

onde S_n é o vetor das observações passadas e o primeiro termo da integral é a densidade condicional de y_{n+1} , dadas as observações anteriores e θ , e o segundo termo é a densidade a posteriori de θ .

Broemeling (1985) apresentou um diagrama, para ilustrar a técnica usada na inferência estatística, que está apresentado na Figura 1.

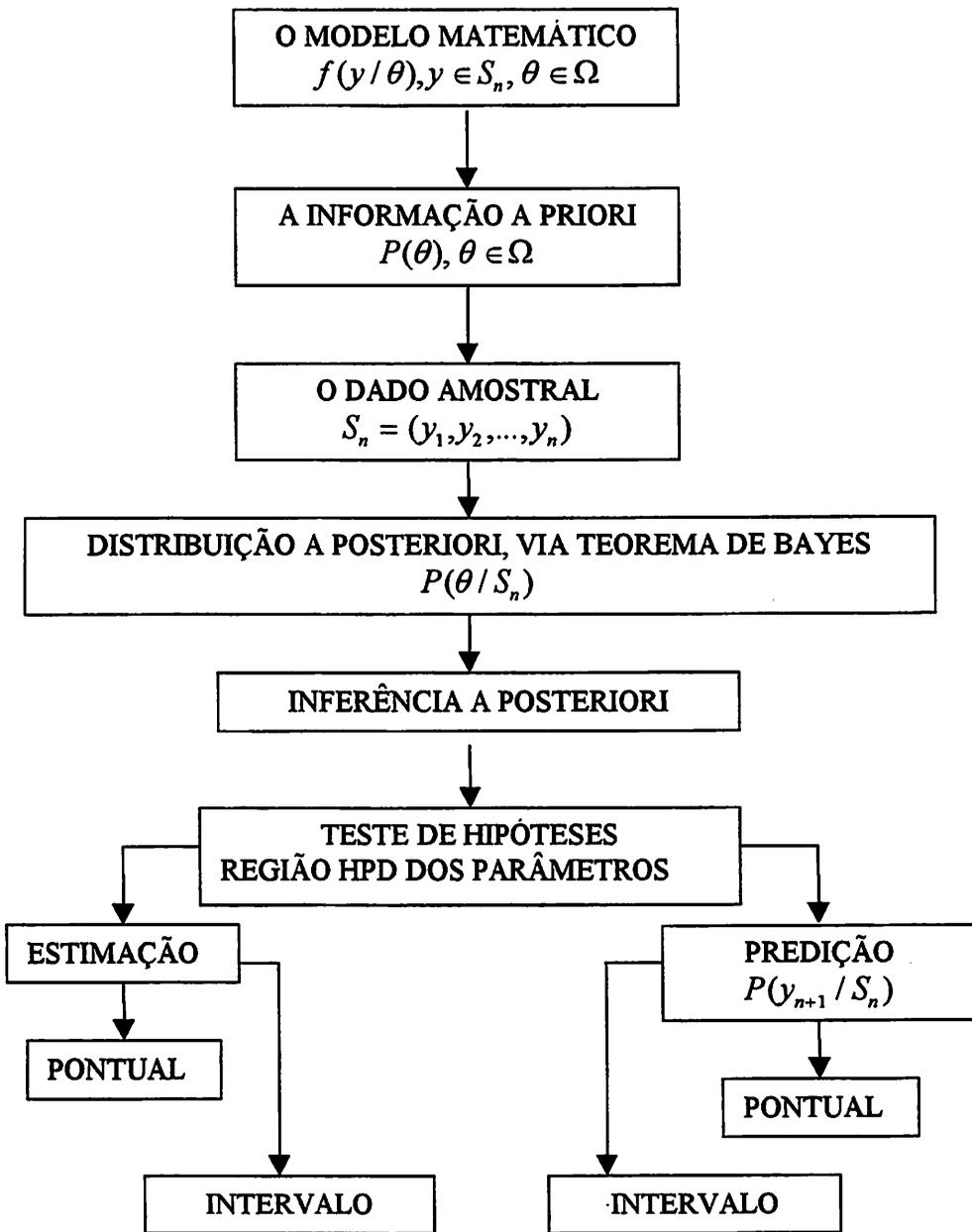


FIGURA 1 – Técnicas da Inferência Bayesiana, apresentada por Broemeling (1985)

Os componentes de inferência estatística consistem da informação a priori, dos dados amostrais, do cálculo da densidade a posteriori dos parâmetros, e por vezes do cálculo da distribuição preditiva de observações futuras. A informação a priori é expressa pela densidade de probabilidade $P(\theta)$. A informação nos dados y_1, \dots, y_n , onde y_1, \dots, y_n é uma amostra aleatória de uma população com densidade f , está contida na função de verossimilhança $L(y_1, \dots, y_n / \theta)$, que é a densidade conjunta dos dados amostrais; então a função de verossimilhança é combinada com a densidade a priori de θ , pelo Teorema de Bayes, sendo a densidade a posteriori de θ encontrada.

Broemeling (1985) afirma que a base da inferência Bayesiana, é a distribuição a posteriori de θ , pois qualquer conclusão é feita a partir desta distribuição.

A diferença formal entre a inferência Bayesiana e a frequentista (clássica) é que, para a inferência Bayesiana os parâmetros θ são variáveis aleatórias possuindo, então, uma distribuição de probabilidade. E para a inferência frequentista, os parâmetros são valores fixos, não sendo possível atribuir a eles uma distribuição de probabilidade.

O'Hagan (1994) comenta o porquê de usar a inferência Bayesiana ao invés da inferência clássica. Ele diz que, em termos gerais, alguns dos argumentos a favor do enfoque Bayesiano são os de que a análise Bayesiana é fundamentalmente completa, muito flexível, produz conclusões claras e diretas e faz uso de toda informação disponível. Em contraste, o enfoque clássico ignora a informação a priori.

Press (1989) apresentou um resumo das vantagens da inferência Bayesiana:

a) Pode-se levar em conta o conhecimento prévio explicitamente.

- b) Obtêm-se, frequentemente, intervalos de credibilidade de menor comprimento usando uma distribuição a priori própria.
- c) Obtêm-se, frequentemente, estimadores com menor variância ou menor erro quadrático médio (em relação à inferência clássica) usando prioris próprias para incorporar conhecimento anterior.
- d) Frequentemente, têm-se previsões mais acuradas utilizando a priori própria.
- e) Estimadores Bayesianos são sempre admissíveis pelo uso de priori próprias.
- f) Pode-se aplicar métodos Bayesianos, em situações em que o conhecimento anterior não é utilizado, usando a priori imprópria. E neste caso, frequentemente chega-se às mesmas conclusões que a inferência clássica.
- g) Pode-se testar hipóteses sem predeterminar o resultado do teste de acordo com a seleção do tamanho de amostra, não sendo necessário pre-especificar um nível de significância.

Na literatura, podem ser encontrado alguns exemplos em que a análise Bayesiana foi aplicada, assim como Broemeling e Shaarawy (1988); Pole, West e Harrison (1984); Sáfadi (1997) e Zellner (1971).

2.1.3 Amostrador de Gibbs

O Amostrador de Gibbs é uma técnica para gerar variáveis aleatórias de uma distribuição (marginal) sem que se conheça a sua densidade. Embora a maior parte das aplicações do Amostrador de Gibbs tenha sido em modelos Bayesianos, ele também é extremamente útil para se amostrar a função de verossimilhança nos métodos frequentistas.

O Amostrador de Gibbs teve uma onda inicial de popularidade com o trabalho de Geman e Geman (1984), que estudaram modelos de processamento de imagens. Porém, a origem do método pode ser descrita por Metropolis et al. (1953) e, posteriormente, um novo desenvolvimento de Hastings (1970). Mais

recentemente, Gelfand e Smith (1990) geraram um novo interesse na aplicação do método por seu revelador potencial em uma ampla variedade de problemas da estatística convencional.

Usando técnicas como o Amostrador de Gibbs, cálculos difíceis e complicados podem ser evitados substituindo-os por uma sequência de cálculos fáceis.

Em modelos complicados, raramente se consegue obter amostras diretamente das distribuições a posteriori. A idéia do método de Monte Carlo via Cadeia de Markov é simular um passeio aleatório no espaço do parâmetro θ , o qual converge para uma distribuição estacionária, que é a distribuição a posteriori $P(\theta / S_n)$ onde S_n é o vetor de observações.

O Amostrador de Gibbs é um particular algoritmo de Monte Carlo via Cadeia de Markov, tem sido extremamente útil na resolução de problemas multidimensionais e é definido em termos de subvetores de θ .

Pode-se pensar no Amostrador de Gibbs como uma implementação prática do fato de que o conhecimento das distribuições condicionais completas é suficiente para determinar a distribuição conjunta (se ela existir).

O Amostrador de Gibbs, então, fornece uma forma alternativa de obtenção baseada em sucessivas gerações das distribuições condicionais completas.

Seja o vetor de parâmetros θ dividido em k subvetores, $(\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_k)'$, e que as distribuições condicionais de cada parâmetro θ_i , dado todos os outros, sejam conhecidas. Essas distribuições são denotadas por $f_1(\theta_1 / \theta_2, \dots, \theta_k, S_n)$, $f_2(\theta_2 / \theta_1, \theta_3, \dots, \theta_k, S_n)$, ..., $f_k(\theta_k / \theta_1, \dots, \theta_{k-1}, S_n)$, onde S_n denota o vetor de n observações consecutivas observadas em igual espaço de intervalo de tempo; estas distribuições são denominadas distribuições condicionais completas.

McCulloch e Tsay (1994) foram os primeiros a utilizarem o Amostrador de Gibbs em séries temporais e eles descreveram o algoritmo do Amostrador de Gibbs da seguinte forma:

- (i) dados os valores iniciais $\theta^0 = (\theta_1^{(0)}, \theta_2^{(0)}, \dots, \theta_k^{(0)})'$ para os parâmetros
- (ii) gerando $M + N$ grupos de números aleatórios retira-se iterativamente

$$\theta_1^{(1)} \text{ de } f_1(\theta_1 / \theta_2^{(0)}, \theta_3^{(0)}, \dots, \theta_k^{(0)}, S_n),$$

$$\theta_2^{(1)} \text{ de } f_2(\theta_2 / \theta_1^{(1)}, \theta_3^{(0)}, \dots, \theta_k^{(0)}, S_n),$$

.

.

.

$$\theta_k^{(1)} \text{ de } f_k(\theta_k / \theta_1^{(1)}, \theta_2^{(1)}, \dots, \theta_{k-1}^{(1)}, S_n),$$

obtendo-se na primeira iteração $\theta^1 = (\theta_1^{(1)}, \dots, \theta_k^{(1)})'$.

- (iii) descartando as primeiras M realizações no passo (ii), as N restantes realizações são utilizadas para formar uma amostra aleatória $\{(\theta_1^{(i)}, \dots, \theta_k^{(i)})_{i=M+1}^{M+N}\}$ e estima-se a posteriori usando esta amostra aleatória.

Geman e Geman (1984) mostraram que a distribuição conjunta desta amostra aleatória converge exponencialmente para a distribuição a posteriori conjunta de θ .

Um problema encontrado é a escolha apropriada dos valores de M e N . Uma solução geral para a escolha de N é monitorar a convergência da sequência de Gibbs sob algum aspecto. Cowles e Carlin (1996) apresentam um estudo comparativo entre vários métodos para monitoração da convergência,

alguns com uma única cadeia, outros com cadeias múltiplas; e a monitoração é feita com métodos gráficos, quantitativos ou qualitativos.

Para a monitoração da convergência, serão ilustrados dois critérios simples.

2.1.3.1 Monitoração Informal da Convergência

Uma das propostas iniciais de verificação informal de convergência foi feita por Gelfand e Smith (1990), sugerindo técnicas gráficas para a verificação da convergência.

Após um número suficientemente grande N de iterações em n cadeias paralelas, forma-se uma amostra de θ e pode-se construir um histograma de qualquer uma de suas componentes. O mesmo processo pode ser repetido após $N + k$ iterações. Se não houver diferença perceptível a olho nu entre os gráficos obtidos após N e $N + k$ iterações, então conclui-se pela convergência das cadeias. O valor de k não pode ser muito pequeno, pois a correlação inerente à cadeia de Markov estará exercendo sua influência e não se poderá dizer que a similaridade é devida à convergência ou à correlação do processo. Valores de k muito grande não são necessários, pois se há suspeita de convergência após N iterações não há necessidade de ir muito além na cadeia apenas para uma verificação. Valores de k entre 10 e 50 são apropriados.

Pela verificação gráfica, é possível observar a trajetória de uma única cadeia ao longo das iterações. Se o gráfico após um período inicial apresenta repetidamente o mesmo comportamento qualitativo e quantitativo, então pode se concluir pela convergência da cadeia.

A técnica de monitoração gráfica deve ser usada com muita cautela, pois as técnicas gráficas podem ser ilusórias, indicando uma constância que não pode

ser tão evidente sob outra escala. Além disso, muitas cadeias podem exibir um comportamento similar ao de convergência, sem que a convergência tenha sido atingida.

2.1.3.2 Verificação Formal de Convergência

Os métodos de verificação de convergência são baseados em propriedades estatísticas das cadeias de Markov consideradas.

Uma forma simples de verificar a convergência é proposta por Gelman e Rubin (1992), a qual consiste na utilização de várias cadeias em paralelo, começando de valores iniciais distintos. Para cada parâmetro (escalar) de interesse, compara-se a variabilidade dentro e entre as cadeias amostradas, sendo cada um desses parâmetros denotado por θ ; e uma vez que a estacionariedade tenha sido atingida, por exemplo, na i -ésima iteração, consideram-se as realizações $\theta_j, \theta_{j+h}, \dots, \theta_{j+Nh}, j \geq i$ como uma amostra aleatória da distribuição desejada.

A convergência é monitorada através do fator \hat{R} , introduzido por Gelman e Rubin (1992). Deve-se tomar $n \geq 2$ cadeias de comprimento N . No caso de multimodalidade, é recomendável pelo menos uma cadeia a partir de cada moda. Calcula-se a variabilidade média dentro das cadeias, W , e a média B das N variâncias entre as cadeias,

$$W = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n s_j^2,$$

$$B = \frac{N}{n-1} \sum_{j=1}^n (\bar{\theta}_{.j} - \bar{\theta}_{..})^2,$$

onde $\bar{\theta}_j = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \theta_{ij}$ e $s_j^2 = \frac{1}{N-1} \sum_{i=1}^N (\theta_{ij} - \bar{\theta}_j)^2$.

Sob convergência, todos os nN valores são gerados da posteriori e a variância da distribuição pode ser estimada de forma não-viciada por

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{N-1}{N} W + \frac{1}{N} B.$$

Definindo $\sqrt{\hat{R}} = \sqrt{\frac{\hat{\sigma}^2}{W} \frac{df}{df-2}}$, onde df é o grau de liberdade. Se o

valor de $\sqrt{\hat{R}}$ for grande, será necessário considerar mais iterações para obter uma melhor estimativa dos parâmetros. Quando $\sqrt{\hat{R}} \approx 1$, a convergência ocorre e a amostra selecionada das iterações é *i.i.d.*.

Gamerman (1996) comenta que apesar dos resultados teóricos garantirem a convergência do Amostrador de Gibbs, sua utilização na prática pode ser bastante complicada pela complexidade dos modelos utilizados. Essa complexidade faz com que a convergência do Amostrador de Gibbs seja de difícil caracterização.

A lentidão na convergência pode estar relacionada com a alta correlação entre as componentes de θ .

2.2 Séries Temporais

2.2.1 Considerações Iniciais

A partir da possibilidade de se medir o tempo, foi possível estabelecer algumas relações entre a passagem do tempo e a ocorrência de determinados fenômenos. Desta forma, define-se que uma série temporal é um conjunto de observações ordenadas em intervalos de tempo equidistantes, e que apresentam uma dependência serial entre elas; entretanto, a variável tempo pode ser substituída por qualquer outra variável como espaço, profundidade, etc. Existem séries temporais discretas e contínuas. Quantidades anuais de chuva de uma determinada cidade e valores diários do preço das ações de uma empresa são exemplos de séries temporais discretas. As séries temporais contínuas podem ser o registro de um eletrocardiograma de uma pessoa, alturas de marés no porto de Santos, obtidas através de um marégrafo.

Na análise de séries temporais, usam-se, basicamente, dois enfoques, sendo que em ambos o objetivo é construir modelos para as séries. O primeiro enfoque é utilizado quando a análise é feita no domínio do tempo e os modelos propostos são modelos paramétricos. Já no segundo enfoque, a análise é feita no domínio da frequência e os modelos propostos são os modelos não-paramétricos. Neste trabalho, foi considerado o primeiro enfoque. Uma classe bastante geral de modelos no domínio de tempo é a dos modelos denominados autorregressivos – integrado – médias móveis, conhecido por *ARIMA*, apresentados por Box e Jenkins (1976).

Um aspecto importante é que os modelos não-paramétricos, como os espectrais, não permitem fazer previsões para a série, ao contrário dos modelos paramétricos, como o *ARIMA*.

O objetivo da análise de séries temporais é construir modelos para a série, com propósitos determinados. No estudo da série, pode-se estar interessado em descrever apenas o comportamento da série, investigar o mecanismo gerador da série temporal, procurar periodicidades relevantes nos dados e fazer previsões de valores futuros da série.

Os modelos construídos para a série devem ser simples e o número de parâmetros envolvidos deve ser o menor possível.

Um modelo é uma descrição probabilística de uma série temporal e cabe ao usuário decidir como utilizar este modelo, tendo em vista seus objetivos.

O estudo das séries temporais se apoia unicamente no comportamento passado e presente de um conjunto de observações de um fenômeno. Segundo Gonçalves (1983), nos modelos de séries temporais, deixa-se que os dados falem por si próprios.

Uma definição importante é a de processo estacionário. Uma série temporal é estacionária se ela se desenvolve no tempo aleatoriamente ao redor de uma média constante, refletindo alguma forma de equilíbrio estável. Mas a maior parte das séries apresentam alguma forma de não estacionariedade. Sendo assim, algumas séries apresentam, em geral, tendências. Podemos também ter uma forma de não estacionariedade explosiva, em que a variância não é constante.

2.2.2 Modelos de Decomposição

Segundo Morettin e Tolo (1987), um modelo clássico de séries temporais supõe que a série temporal Z_1, \dots, Z_n pode ser escrita como a soma de três componentes: uma tendência T_t , uma componente sazonal S_t e um termo aleatório a_t :

$$Z_t = T_t + S_t + a_t, \quad t = 1, \dots, N$$

O modelo acima é dito aditivo, e é adequado, por exemplo, quando S_t não depende das outras componentes, como T_t . Se as amplitudes sazonais variam com a tendência, um modelo mais adequado é o multiplicativo,

$$Z_t = T_t S_t a_t$$

É claro que o modelo multiplicativo pode ser transformado em um modelo aditivo, tomando-se o logaritmo.

A componente tendência pode ser encarada como um aumento ou uma diminuição gradual das observações ao longo de um período.

A componente sazonal aparece quando as observações são intra-anuais, isto é, registradas mensalmente, trimestralmente ou diariamente, por exemplo.

Removendo-se as componentes T_t e S_t , o que sobra é a componente aleatória, residual ou irregular, a_t . A suposição usual é que a_t seja uma série puramente aleatória ou *ruido branco* (RB), com média zero e variância constante.

A análise das séries temporais pode, pois, ser encarada simplesmente como uma tentativa para decompor uma série temporal nessas componentes.

2.2.3 Modelos de Box & Jenkins

Na análise de modelos paramétricos, o método de Box & Jenkins tem recebido muita atenção na última década. Tal método consiste em ajustar

modelos autorregressivos – integrado – médias móveis, $ARIMA(p,d,q)$, a um conjunto de dados.

Pino (1980) diz que os modelos de Box & Jenkins se caracterizam por dois aspectos fundamentais. O primeiro está ligado ao fato de que os modelos devem conter o menor número possível de parâmetros a serem estimados e o segundo está ligado ao fato de que o modelo é construído a partir dos próprios dados, ao invés de se considerar um modelo potencialmente apropriado e testar seu ajustamento.

2.2.3.1 Modelo Autorregressivos – Integrado – Médias Móveis ($ARIMA$)

Na prática, a maioria das séries temporais apresentam algum tipo de não-estacionariedade.

Como a maioria dos procedimentos de análise estatística de séries temporais supõe que estas sejam estacionárias, será necessário transformar os dados originais se estes não forem uma série estacionária. A transformação mais comum consiste em tomar diferenças sucessivas da série original até se obter uma série estacionária. Morettin e Tolo (1987) definem que a primeira diferença de Z_t é dada por

$$\Delta Z_t = Z_t - Z_{t-1},$$

de modo geral, a d -ésima diferença de Z_t é

$$\Delta^d Z_t = \Delta[\Delta^{d-1} Z_t].$$

Uma série pode apresentar várias formas de não-estacionariedade. Contudo, serão considerados modelos que são apropriados para representar séries cujo comportamento é não explosivo, em particular séries que apresentam alguma homogeneidade em seu comportamento não-estacionário.

Se $W_t = \Delta^d Z_t$ é estacionária, pode-se representar W_t por um modelo $ARMA(p, q)$ ou seja

$$\phi(B)W_t = \theta(B)\alpha_t$$

Se W_t é uma diferença de Z_t , então Z_t é uma integral de W_t , por isso pode-se dizer que Z_t segue um modelo autorregressivo - integrado - médias móveis, ou modelo $ARIMA(p, d, q)$:

$$\phi(B)(1-B)^d Z_t = \theta(B)\alpha_t$$

onde

$$\phi(B) = 1 - \phi_1 B - \dots - \phi_p B^p, \quad (1)$$

$$\theta(B) = 1 + \theta_1 B + \dots + \theta_q B^q. \quad (2)$$

O modelo acima supõe que a d -ésima diferença da série Z_t pode ser representada por um modelo $ARMA$, estacionário e invertível.

Morettin e Toloi (1987) dizem que, na maioria dos casos, $d = 1$ ou $d = 2$ fazem com que a série não-estacionária se transforme numa série estacionária.

A série pode ser não-estacionária quanto ao nível ou ser não estacionária quanto à inclinação.

Existem casos particulares dos modelos $ARIMA(p,d,q)$. O primeiro deles é quando $d = 0$, neste caso tem-se o *modelo autorregressivo – média móvel*, $ARMA(p,q)$. O segundo caso é quando $d = 0$ e $q = 0$, e então tem-se o *modelo autorregressivo*, $AR(p)$ E o último caso é quando $d = 0$ e $p = 0$, e tem-se o *modelo média móveis*, $MA(q)$.

2.2.3.2 Modelos Autorregressivos - Médias Móveis (ARMA)

O modelo autorregressivo-médias móveis, $ARMA(p,q)$, é dado por

$$Z_t = \phi_1 Z_{t-1} + \dots + \phi_p Z_{t-p} + a_t - \theta_1 a_{t-1} - \dots - \theta_q a_{t-q}$$

ou

$$\phi(B)Z_t = \theta(B)a_t,$$

onde $\phi(B)$ e $\theta(B)$ são polinômios em B de ordem p e q , respectivamente.

O modelo $ARMA$ é invertível se as raízes de $\theta(B) = 0$ estiverem fora do círculo unitário e é estacionário se as raízes de $\phi(B) = 0$ estiverem fora do círculo unitário.

2.3 Modelos de Intervenção

2.3.1 Considerações Iniciais

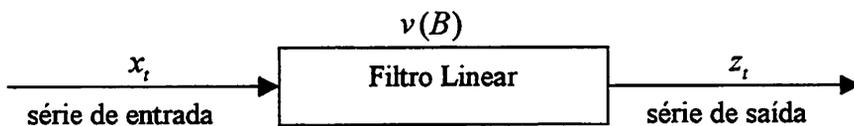
Frequentemente, há interesse na análise de séries temporais quando o modelo que gerou a série pode ter mudado de nível devido à ocorrência de um dado evento E em algum instante de tempo t . O objetivo da análise de intervenção é avaliar o impacto do evento E no comportamento da série. A análise de intervenção tem uma grande utilidade em várias áreas, tais como meio ambiente, economia, ciências sociais e políticas, sociologia, história e várias outras áreas.

Serão descritos os modelos de função de transferência, que são a base dos modelos de intervenção, e as formas pelas quais uma intervenção pode afetar uma série temporal.

2.3.2 Modelos de Função de Transferência

Segundo Pino (1980), os modelos de função de transferência são a base dos modelos de intervenção.

O modelo de função de transferência considera a série temporal z_t como sendo gerada a partir de outra série temporal x_t através de um filtro linear, como esquematizado abaixo:



Então, a série de saída z_t pode ser escrita como uma soma ponderada de observações prévias da série de entrada x_t :

$$z_t = v_0x_t + v_1x_{t-1} + v_2x_{t-2} + \dots$$

utilizando o operador retroativo B , tal que $Bx_t = x_{t-1}$. Pode-se escrever a equação acima na forma

$$z_t = (v_0 + v_1B + v_2B^2 + \dots)x_t,$$

ou ainda

$$z_t = v(B)x_t,$$

A relação acima diz-se um filtro linear ou modelo de função de transferência linear e $v(B)$ é a função de transferência. Os pesos v_0, v_1, v_2, \dots são chamados de função de resposta de impulso do sistema.

O sistema diz-se estável se $v(B)$ converge para $|B| \leq 1$. Isto implica que mudanças finitas na entrada x_t possuem mudanças finitas na saída z_t .

O modelo de função de transferência pode conter, também, um ruído. Então, o modelo é dado por

$$z_t = v(B)x_t + N_t. \quad (3)$$

O termo N_t não é necessariamente um ruído branco; o caso mais usual é aquele em que N_t segue um modelo $ARIMA(p, d, q)$.

Morettin e Tolo (1989) dizem que o modelo (3) não é parcimonioso, no sentido de haver necessidade de estimar muitos pesos v_j . Mas, se $v(B)$ for uma função racional, pode ser escrita como

$$v(B) = \frac{\omega(B)B^b}{\delta(B)}$$

onde

$$\omega(B) = \omega_0 - \omega_1 B - \omega_2 B^2 - \dots - \omega_s B^s$$

e

$$\delta(B) = 1 - \delta_1 B - \delta_2 B^2 - \dots - \delta_r B^r$$

são polinômios de graus s e r , respectivamente.

Às vezes, o efeito de uma mudança na série de entrada não se manifesta imediatamente sobre a série de saída, mas após b instantes de tempo:

$$z_t = v(B)x_{t-b} + N_t$$

$$\delta(B)z_t = \omega(B)x_{t-b} + N_t \quad (4)$$

Comparando (3) e (4), obtêm-se

$$v(B)\delta(B) = \omega(B)B^b,$$

ou seja

$$(v_0 + v_1B + v_2B^2 + \dots)(1 - \delta_1B - \dots - \delta_rB^r) = (\omega_0 - \dots - \omega_sB^s)B^b.$$

O comportamento da função resposta de impulso, v_j , é dado por

- a) $v_0 = v_1 = \dots = v_{b-1} = 0$, isto é, os b valores iniciais iguais a zero;
- b) $v_b, v_{b+1}, \dots, v_{b+s-r}$ sem padrão fixo, isto só ocorre se $s > r$.
- c) $v_j, j \geq b + s - r + 1$, que seguem o padrão dado pela equação de diferenças, $\delta(B)v_j = 0$.

Estas informações são fundamentais para o procedimento de identificação do modelo de função de transferência.

2.3.3 Modelos de Intervenção

Seja uma série temporal para a qual identificou-se e estimou-se um modelo *ARIMA*. Num dado instante ocorre um evento independente do fenômeno que originou a série temporal, mas cujos efeitos podem se manifestar sobre a série. Um exemplo dado por Pino (1980) exemplifica um evento externo, cujo efeito deve ser incorporado ao modelo. Seja uma série de produção anual de determinado produto agrícola, para a qual se dispõe de um modelo adequado para fazer previsões. Num dado instante ou intervalo de tempo, a ocorrência de alterações climáticas como geada, seca ou enchente podem afetar, temporária ou permanentemente, essa produção agrícola e, conseqüentemente, o modelo utilizado para representar esta série. Esse evento externo recebe o nome de intervenção.

O termo intervenção foi introduzido por Glass (1972), baseado em Box e Tiao (1965).

Seja uma série temporal Z_t . Define-se uma intervenção I como sendo um evento E , ao qual se associa uma variável aleatória x , cuja ocorrência num dado instante ou intervalo de tempo T pode estar ligada a mudanças na série Z_t .

O modelo de intervenção é equivalente a um modelo de função de transferência em que a série de entrada é binária.

Pack (1977) citado em Pino (1980), traça um paralelo entre o desenvolvimento da construção de modelos para séries temporais e a análise de regressão. Assim: a) modelos de função de transferência de entrada simples podem ser comparados a modelos de regressão simples; b) modelos de função de transferência de entrada múltipla são comparáveis a modelos de regressão múltipla; e c) modelos de intervenção representam a introdução de séries indicadoras (ou binárias, ou “dummy”) como séries de entrada.

Usualmente, as séries indicadoras de intervenção podem ser representadas por dois tipos de variáveis binárias:

a) Função Degrau (“step function”)

$$x_{i,t} = s_{i,t}^{(T)} = \begin{cases} 0, & t < T \\ 1, & t \geq T \end{cases}$$

b) Função Impulso

$$x_{i,t} = I_{i,t}^{(T)} = \begin{cases} 0, & t \neq T \\ 1, & t = T \end{cases}$$

No caso da função degrau, o efeito da intervenção é permanente após o instante T , ao passo que para a função impulso, o efeito é temporário.

O efeito da intervenção é mudar o nível da série, ou então a inclinação. Mas existem três fontes de ruído que podem obscurecer o efeito da intervenção: tendência, sazonalidade e erro aleatório.

2.3.3.1 Efeitos da Intervenção

Há muitas formas pelas quais uma intervenção pode afetar uma série temporal. As alterações mais comuns são as mudanças no nível da série e as mudanças na direção ou inclinação da série.

A mudança pode ser abrupta (ou imediata) ou, então, só ocorrer depois de algum tempo de iniciada a intervenção. Pode, ainda, ser temporária ou permanente; pode tornar a série mais estável ou aumentar sua variabilidade. A série também pode ser afetada de várias maneiras simultaneamente. A Figura 2, que foi adaptada de Glass, Willson e Gottman (1975), esquematiza os tipos mais comuns de efeitos de uma intervenção sobre uma série temporal.

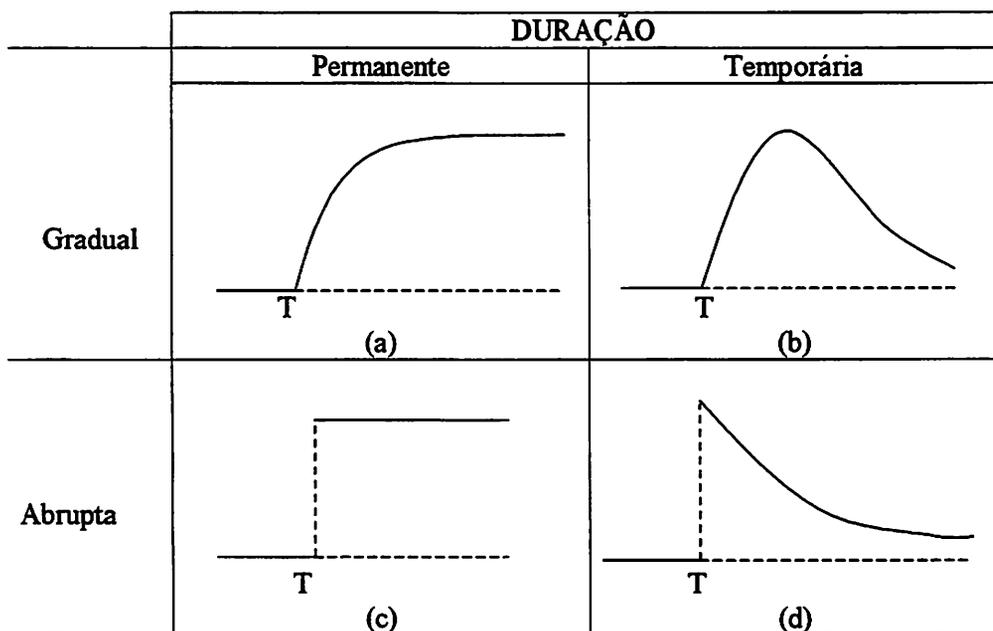


FIGURA 2 – Efeitos de intervenção

Para cada efeito de intervenção, tem-se uma forma apropriada para a função de transferência $v_i(B)$. Por simplicidade, será considerado o caso de uma única função de transferência

$$Z_t = v(B)x_t + N_t$$

com $v(B) = \frac{\omega(B)}{\delta(B)}$.

A Figura 3 mostra algumas formas de $v(B)$.

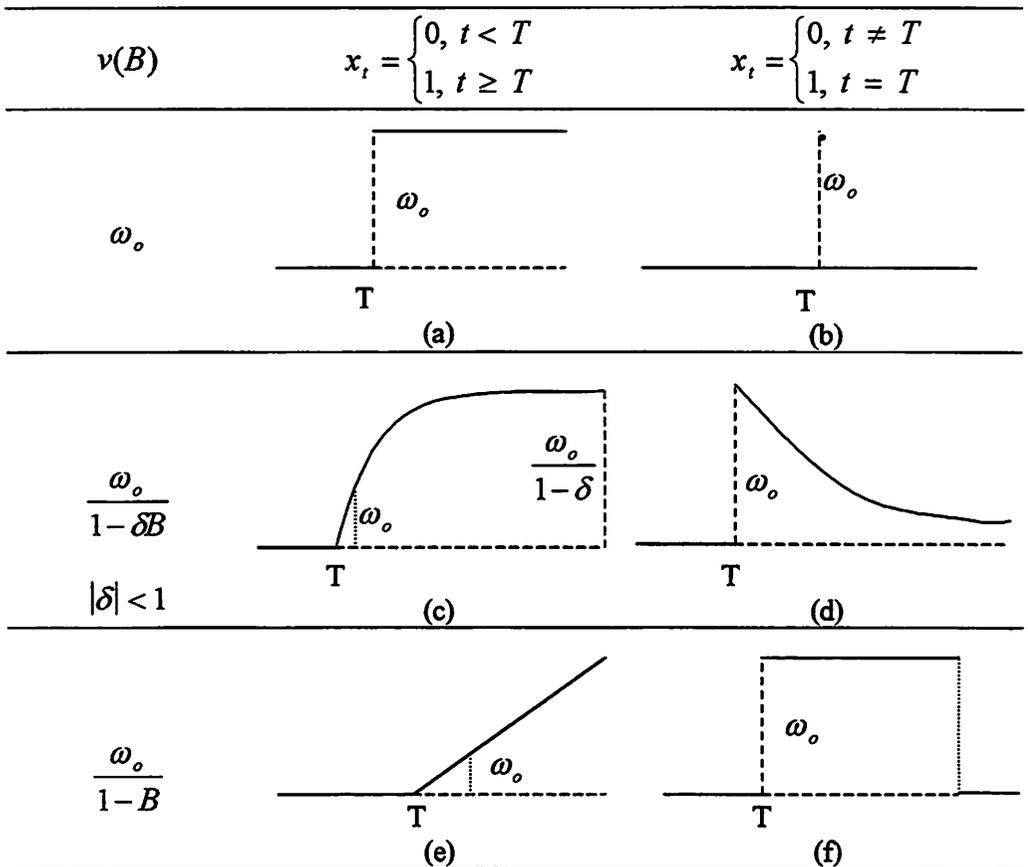


FIGURA 3 – Estruturas da função de transferência.

Para os casos da Figura 3, seja $y_t = v(B)x_t$. Cada caso é comentado a seguir, conforme Glass, Wilson e Gottman (1975),

a) Aqui, $y_t = \begin{cases} 0, & t < T \\ \omega_o, & t \geq T \end{cases}$

obtêm-se a situação (c) da Figura 2, isto é, um efeito permanente, após um início abrupto de mudança de nível.

$$b) \text{ Neste caso, } y_t = \begin{cases} 0, t \neq T \\ \omega_0, t = T \end{cases}$$

de modo que se tem uma mudança do nível da série apenas no instante T.

$$c) \text{ Se } v(B) = \frac{\omega_0}{1 - \delta B}, Z_t = \delta Z_{t-1} + \omega_0 X_t + N_t \text{ tem-se que}$$

$$y_t = \begin{cases} 0, t < T \\ \omega_0 \sum_{j=0}^k \delta^j, t = T + k, k = 0, 1, 2, \dots \end{cases}$$

de modo que $y_t \rightarrow \frac{\omega_0}{1 - \delta}$, quando $t \rightarrow \infty$, e tem-se uma manifestação gradual da

intervenção, com duração permanente, até atingir a assíntota $\frac{\omega_0}{1 - \delta}$. É o caso (a)

da Figura 2.

d) Aqui

$$y_t = \begin{cases} 0, t < T \\ \delta^k \omega_0, t = T + k, k = 0, 1, 2, \dots \end{cases}$$

ou seja, a série muda abruptamente de nível, sendo ω_0 o valor da mudança, e depois decai exponencialmente para zero. É o caso (d) da Figura 2.

e) Aqui, $\delta = 1$, e após a intervenção o modelo, torna-se não estacionário. Aqui,

$$y_t = Z_{t-1} + \omega_0 X_t \quad \text{e}$$

$$y_t = \begin{cases} 0, & t < T \\ (k+1)\omega_0, & t = T+k, k = 0,1,2,3,\dots \end{cases}$$

Esta situação, não explicada na Figura 2, corresponde a uma mudança de direção da série, apresentando uma tendência determinística a partir do instante T.

f) Neste caso, $y_t = \begin{cases} 0, & t < T \\ \omega_0, & t \geq T \end{cases}$

e tem-se novamente a situação (c) da Figura 2.

2.3.4 Alguns Exemplos de Intervenção

As primeiras propostas de se fazer uma análise de intervenção parecem ter sido feitas nas áreas de ciências sociais, com Campbell (1963) e Campbell e Stanley (1966).

Tiao, Box e Hamming (1975) utilizaram a análise de intervenção para estudar dados de poluição em Los Angeles no período de janeiro de 1955 a

dezembro de 1972. Os dados referiam-se a medições horárias de poluentes primários e de poluentes secundários, em diversos locais. Em 1960, houve uma possível mudança no nível de ozônio devido à abertura de Golden State Freeway, que pode ter afetado o tráfego no centro da cidade, e à introdução de regulamento reduzindo a proporção de hidrocarbonetos reativos na gasolina vendida em Los Angeles.

Ledolter et al. citados por Pino(1980) utilizaram a análise de intervenção para estudar dados de poluição atmosférica em New Jersey no período de Janeiro de 1971 a junho de 1977 e verificaram o efeito de vários eventos, tais como leis regulando a emissão de CO, crise de energia em 1973, e outros.

Saboia (1976) utilizou a análise de intervenção para estudar o efeito da queda no padrão de vida sobre o índice de mortalidade infantil no município de São Paulo, e teve por objetivo verificar a influência do poder aquisitivo das famílias sobre esta série.

Pino e Moretinn (1981) aplicaram a análise de intervenção para avaliar o impacto de variações climáticas e medidas de política agrícola sobre séries de produção de café no Brasil.

Bhattacharyya e Layton (1979) analisaram o efeito da introdução de legislação sobre o uso de cinto de segurança em automóveis, no estado de Queensland (Austrália), sobre o número de mortes por acidentes rodoviários.

2.4 Descrição do Modelo de Intervenção

2.4.1 Análise Bayesiana do Modelo de Intervenção com Erro $ARMA(p, q)$

A seguir, será descrito o modelo de intervenção dado por Diaz (1988) com erro autorregressivo-média móvel de ordem p e q , denotado por $ARMA(p, q)$, dado por

$$y_t = X_t' \beta + N_t, \quad t = 1, 2, \dots, n \quad (5)$$

onde os erros são correlacionados e foram tratados como uma série temporal e ajustado um modelo $ARMA(p, q)$, dado por

$$N_t = \frac{\theta(B)}{\phi(B)} a_t, \quad t = 1, 2, \dots, n \quad (6)$$

sendo

$$X_t' = [\xi_{t,1} \quad \xi_{t,2} \quad \dots \quad \xi_{t,m}] \quad (7)$$

uma matriz de variáveis binárias, onde cada elemento é um vetor, e

$$\beta' = [\beta_1 \quad \beta_2 \quad \dots \quad \beta_m] \quad (8)$$

é um vetor de parâmetros da intervenção onde m é o número de intervenções, $t = 1, 2, \dots, n$, $\phi(B)$ e $\theta(B)$ são operadores em B , descrito por (1) e (2), respectivamente.

O resíduo a_t é uma sequência de variáveis aleatórias $i.i.d. \sim N(0, \tau^{-1})$ onde τ é a precisão e $\tau^{-1} = \sigma^2$ é a variância, e os resíduos no instante t podem ser dados em termos das observações y_1, y_2, \dots, y_t pela equação (9)

$$a_t = \phi(B) y_t - \sum_{i=1}^q \theta_i B^i a_t - \phi(B) X_t' \beta \quad (9)$$

Análise a Posteriori com Priori Imprópria de Jeffreys

Para o modelo (5), têm-se os parâmetros $\phi' = (\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_p)$, $\theta' = (\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_q)$, $\beta' = (\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_m)$ e τ , que é a precisão do resíduo a_t .

Uma opção de priori é a de Jeffreys

$$P(\phi, \theta, \beta, \tau) \propto \tau^{-1}. \quad (10)$$

Sendo a_t uma sequência de variáveis aleatórias *i.i.d.* $\sim N(0, \tau^{-1})$, a função de verossimilhança condicionada nas p primeiras observações e assumindo os p primeiros resíduos iguais a zero, onde p é o máximo da ordem do modelo autorregressivo – médias móveis, é dada por

$$L(\phi, \theta, \beta, \tau / S_n) \propto \tau^{\frac{n-p}{2}} \exp\left\{-\frac{\tau}{2} \sum_{t=p+1}^n a_t^2\right\} \quad (11)$$

onde $\phi' = (\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_p)$, $\theta' = (\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_q)$, $\beta' = (\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_m)$, $S_n = \{y_1, \dots, y_n\}$ e a_t , $t = p+1, \dots, n$, são dados em (9).

Sendo a relação (9) não linear, tem-se que a função de verossimilhança também não é linear, podendo ser feita aproximadamente linear se forem usados os resíduos estimados \hat{a}_t . Assumindo $a_0 = a_{-1} = \dots = a_{-p} = 0$ no modelo (9), calcula-se recursivamente os resíduos por

$$\hat{a}_t = \hat{\phi}(B)y_t - \sum_{i=1}^q \hat{\theta}_i B^i \hat{a}_t - \hat{\phi}(B)X_t' \hat{\beta}$$

onde $\hat{\phi}$, $\hat{\theta}$ e $\hat{\beta}$ são os estimadores de mínimos quadrados de ϕ , θ e β , respectivamente, obtidos minimizando a soma de quadrados do resíduo

$$S(\phi, \theta, \beta) = \sum_{t=p+1}^n a_t^2,$$

em relação a ϕ , θ e β , usando um algoritmo de regressão não-linear (Harvey, 1993)

A função de verossimilhança aproximada é dada por

$$L(\phi, \theta, \beta, \tau / S_n) \propto \tau^{\frac{n-p}{2}} \exp\left\{-\frac{\tau}{2} \sum_{t=p+1}^n (Z - U'\beta)'(Z - U'\beta)\right\}, \quad (12)$$

onde os componentes do vetor Z e as linhas da matriz U são dadas por

$$Z_t = y_t - y_t'\phi - \hat{\alpha}'\theta \quad (13)$$

$$U_t' = X_H' - \phi' X_p \quad (14)$$

em que

$$y_t' = [y_{t-1} \quad y_{t-2} \quad \dots \quad y_{t-p}],$$

$$\hat{\alpha}' = [\hat{\alpha}_{t-1} \quad \hat{\alpha}_{t-2} \quad \dots \quad \hat{\alpha}_{t-q}],$$

$$X_H' = [\xi_{t,1} \quad \xi_{t,2} \quad \dots \quad \xi_{t,m}]$$

$$X_p = \begin{bmatrix} \xi_{t-1,1} & \xi_{t-1,2} & \dots & \xi_{t-1,m} \\ \xi_{t-2,1} & \xi_{t-2,2} & \dots & \xi_{t-2,m} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ \xi_{t-p,1} & \xi_{t-p,2} & \dots & \xi_{t-p,m} \end{bmatrix}$$

A distribuição a posteriori para os parâmetros é obtida através do Teorema de Bayes e é dada pelo Teorema 1.

Teorema 1: Se a priori (10) é combinada com a função de verossimilhança (12), obtém-se a distribuição a posteriori

$$P(\phi, \theta, \beta, \tau / S_n) \propto \tau^{\frac{n-p}{2}-1} \exp\left\{-\frac{\tau}{2} \sum_{t=p+1}^n (Z - U' \beta)' (Z - U' \beta)\right\} \quad (15)$$

2.4.2 Análise Bayesiana do Modelo de Intervenção com Erro $MA(q)$

O modelo de intervenção com erro média móveis de ordem q , denotado por $MA(q)$, é dado por

$$y_t = X_t' \beta + N_t, \quad t = 1, 2, \dots, n \quad (16)$$

onde os erros são correlacionados e podem ser tratados como uma série temporal, de maneira que:

$$N_t = \theta(B) a_t, \quad t = 1, 2, \dots, n \quad (17)$$

sendo X_t' uma matriz de variáveis binárias, onde cada elemento é um vetor, definido em (7), e β' é um vetor de parâmetros da intervenção, definido em (8), $t = 1, 2, \dots, n$, $\theta(B)$ é um operador em B , definido por (2).

O resíduo α_t é uma sequência de variáveis aleatórias *i.i.d.* $\sim N(0, \tau^{-1})$ onde τ é a precisão e $\tau^{-1} = \sigma^2$, e os resíduos no instante t podem ser dados em termos das observações y_1, y_2, \dots, y_t pela equação

$$\alpha_t = y_t - X_t' \beta - \sum_{i=1}^q \theta_i B^i \alpha_t \quad (18)$$

Análise a Posteriori com Priori Própria

Para o modelo (16), têm-se os parâmetros $\theta' = (\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_q)$, $\beta' = (\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_m)$ e τ , que é a precisão do resíduo α_t .

Pode-se adotar uma priori própria $P(\beta, \theta, \tau)$, dada por

$$P(\beta, \theta, \tau) = P(\beta, \theta / \tau) P(\tau) \quad (19)$$

sendo

$$P(\beta, \theta / \tau) = P(\beta / \theta, \tau) P(\theta / \tau)$$

em que

$$P(\beta / \theta, \tau) \sim \text{Normal}(\beta_0(\theta), (\tau P_1)^{-1}),$$

$$P(\theta/\tau) \sim Normal(\theta_0, (\tau P_2)^{-1}) \text{ e}$$

$$P(\tau) \sim Gama(\alpha, k),$$

onde os hiperparâmetros $\beta_0(\theta)$, θ_0 , α , k e as matrizes de precisão P_1 e P_2 são conhecidos.

A priori (19) pode ser escrita como

$$P(\beta, \theta, \tau) \propto \tau^{\frac{(m+q+2\alpha)-1}{2}} \exp \left\{ -\frac{\tau}{2} [(\beta - \beta_0(\theta))' P_1 (\beta - \beta_0(\theta)) + (\theta - \theta_0)' P_2 (\theta - \theta_0) + 2k] \right\} \quad (20)$$

Dada uma amostra y_t com $t = 1, \dots, n$, e assumindo $\alpha_0 = \alpha_{-1} = \alpha_{-2} = \dots = \alpha_{-q} = 0$, a função de verossimilhança é dada por

$$L(\beta, \theta, \tau / S_n) \propto \tau^{\frac{n}{2}} \exp \left\{ -\frac{\tau}{2} \sum_{t=1}^n \alpha_t^2 \right\} \quad (21)$$

onde α_t , $t = 1, \dots, n$ é dado em (18).

Para eliminar a não linearidade, pode-se usar os resíduos estimados $\hat{\alpha}_t$,

$$\hat{\alpha}_t = y_t - X_t' \hat{\beta} - \sum_{i=1}^q \hat{\theta}_i B^i \hat{\alpha}_t,$$

onde $\hat{\theta}$ e $\hat{\beta}$ são os estimadores de mínimos quadrados de θ e β , respectivamente, obtidos da forma descrita na análise Bayesiana do modelo de intervenção com erro $ARMA(p, q)$.

A função de verossimilhança aproximada é dada por

$$L(\beta, \theta, \tau / S_n) \propto (\tau)^{\frac{n}{2}} \exp \left\{ -\frac{\tau}{2} \sum_{t=1}^n (y_t - X_t' \beta - \sum_{i=1}^q \theta_i B^i \hat{a}_t)' (y_t - X_t' \beta - \sum_{i=1}^q \theta_i B^i \hat{a}_t)' \right\} \quad (22)$$

A distribuição a posteriori para os parâmetros é obtida através do Teorema de Bayes e é dada pelo Teorema 2.

Teorema 2: Se a priori (20) é combinada com a função de verossimilhança (22), obtém-se a distribuição a posteriori

$$P(\beta, \theta, \tau / S_n) \propto \tau^{\frac{m+q+2\alpha+n}{2}-1} \exp \left\{ -\frac{\tau}{2} [(\beta - \beta_0(\theta))' P_1 (\beta - \beta_0(\theta)) + (\theta - \theta_0)' P_2 (\theta - \theta_0) + 2k + \sum_{t=1}^n (y_t - X_t' \beta - \sum_{i=1}^q \theta_i B^i \hat{a}_t)' (y_t - X_t' \beta - \sum_{i=1}^q \theta_i B^i \hat{a}_t)] \right\} \quad (23)$$

Análise a Posteriori com Priori Imprópria de Jeffreys

Uma outra opção é a de se utilizar a priori imprópria de Jeffreys

$$P(\phi, \theta, \beta, \tau) \propto \tau^{-1}. \quad (24)$$

A distribuição a posteriori dos parâmetros é obtida através do Teorema de Bayes e é dada pelo Teorema 3.

Teorema 3: Se a priori (24) é combinada com a função de verossimilhança (22), obtém-se a posteriori

$$P(\beta, \theta, \tau / S_n) \propto \tau^{\frac{n}{2}-1} \exp \left\{ -\frac{\tau}{2} \sum_{i=1}^n (y_i - X_i' \beta - \sum_{i=1}^q \theta_i B^i \hat{a}_i)' \right. \\ \left. (y_i - X_i' \beta - \sum_{i=1}^q \theta_i B^i \hat{a}_i) \right\} \quad (25)$$

3 MATERIAL E MÉTODOS

3.1 – Material

Os dados utilizados para a aplicação dos modelo com duas intervenções e erros *ARMA* (2,2) e *MA*(2) foram simulados, para o modelo dado em (5), com erro dado por (6) e (17) respectivamente.

3.2 – Método

O método consistiu em estimar os parâmetros do modelo de intervenção com erro *ARMA* e *MA* através do Amostrador de Gibbs. Para utilizar o Amostrador de Gibbs, foi preciso encontrar as posterioris condicionais completas a partir da distribuição a posteriori , a qual foi obtida pelo Teorema de Bayes.

4 RESULTADOS E DISCUSSÃO

4.1 Considerações Iniciais

Para fazer a inferência sobre os parâmetros, é necessário determinar as distribuições marginais a posteriori. Para cada parâmetro, a distribuição marginal é obtida integrando a distribuição a posteriori conjunta em relação aos outros parâmetros. Neste trabalho, estas distribuições não são facilmente obtidas. Este problema foi resolvido através do Amostrador de Gibbs. No entanto, para se aplicar o Amostrador de Gibbs e estimar os parâmetros, é necessário ter as distribuições a posteriori de cada parâmetro condicionada a todos os outros. Estas distribuições para os modelos de intervenção com erro $ARMA(p, q)$ e $MA(q)$ estão apresentadas abaixo, e as demonstrações estão apresentadas nos Anexo A, B e C.

4.2 Distribuições a Posteriori Condicionais Completas para o Modelo de Intervenção com Erro $ARMA(p, q)$ Utilizando a Priori de Jeffreys

As distribuições a posteriori condicionais completas para os parâmetros ϕ , θ , β e τ foram obtidas através da equação (15) e as demonstrações estão apresentadas no Anexo A.

Para os cálculos abaixo, estar-se-á representando $\sum_{t=p+1}^n$ por \sum_t .

4.2.1. Distribuição Condicional Completa Para o Parâmetro ϕ

Corolário 1: A distribuição condicional completa para o parâmetro ϕ é dada por

$$P(\phi / \theta, \beta, \tau, S_n) \propto \exp\left\{-\frac{\tau}{2}(\phi - N^{-1}M)'N(\phi - N^{-1}M)\right\},$$

isto é,

$$\phi / \theta, \beta, \tau, S_n \sim \text{Normal}(N^{-1}M, \tau^{-1}N^{-1}), \quad (26)$$

onde

$$N = N_1 - N_2 - N_3 + N_4$$

em que N_1 é uma matriz simétrica, com $i, j=1, \dots, p$, cujo ij -ésimo termo é

$$N_1(i, j) = \sum_t y_{t-i} y_{t-j}, \quad N_2 \text{ é uma matriz simétrica com } i, j=1, \dots, p, \text{ cujo } ij\text{-}$$

ésimo termo é $N_2(i, j) = \sum_t \sum_{k=1}^m \beta_k y_{t-i} \xi_{t-j, k}$, $N_3 = N_2'$, e N_4 é uma matriz

simétrica, com $i, j=1, \dots, p$, onde o ij -ésimo elemento é

$$N_4(i, j) = \sum_t \sum_{k=1}^m \sum_{l=1}^m \beta_k \beta_l \xi_{t-i, k} \xi_{t-j, l}.$$

Sendo $M = M_1 - M_2 - M_3 - M_4 + M_5 + M_6$, onde

$$M_1 = \begin{bmatrix} \sum_t y_t \xi_{t-1} \\ \sum_t y_t \xi_{t-2} \\ \vdots \\ \sum_t y_t \xi_{t-p} \end{bmatrix}, \quad M_2 = \begin{bmatrix} \sum_t \sum_{i=1}^q \theta_i y_{t-1} \hat{a}_{t-i} \\ \sum_t \sum_{i=1}^q \theta_i y_{t-2} \hat{a}_{t-i} \\ \vdots \\ \sum_t \sum_{i=1}^q \theta_i y_{t-p} \hat{a}_{t-i} \end{bmatrix},$$

$$M_3 = \begin{bmatrix} \sum_t \sum_{i=1}^m \beta_i y_t \xi_{t-1,i} \\ \sum_t \sum_{i=1}^m \beta_i y_t \xi_{t-2,i} \\ \vdots \\ \sum_t \sum_{i=1}^m \beta_i y_t \xi_{t-p,i} \end{bmatrix}, \quad M_4 = \begin{bmatrix} \sum_t \sum_{i=1}^m \beta_i y_{t-1} \xi_{t,i} \\ \sum_t \sum_{i=1}^m \beta_i y_{t-2} \xi_{t,i} \\ \vdots \\ \sum_t \sum_{i=1}^m \beta_i y_{t-p} \xi_{t,i} \end{bmatrix},$$

$$M_5 = \begin{bmatrix} \sum_t \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^q \beta_i \theta_j \xi_{t-1,i} \hat{a}_{t-j} \\ \sum_t \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^q \beta_i \theta_j \xi_{t-2,i} \hat{a}_{t-j} \\ \vdots \\ \sum_t \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^q \beta_i \theta_j \xi_{t-p,i} \hat{a}_{t-j} \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad M_6 = \begin{bmatrix} \sum_t \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^m \beta_i \beta_j \xi_{t,i} \xi_{t-1,j} \\ \sum_t \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^m \beta_i \beta_j \xi_{t,i} \xi_{t-2,j} \\ \vdots \\ \sum_t \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^m \beta_i \beta_j \xi_{t,i} \xi_{t-p,j} \end{bmatrix}.$$

4.2.2 Distribuição Condicional Completa Para o Parâmetro θ

Corolário 2 A distribuição condicional completa para o parâmetro θ é dada por

$$P(\theta | \phi, \beta, \tau, S_n) \propto \exp\left\{-\frac{\tau}{2}(\theta - C^{-1}P)'C(\theta - C^{-1}P)\right\}$$

isto é,

$$\theta | \phi, \beta, \tau, S_n \sim \text{Normal}(C^{-1}P, \tau^{-1}C^{-1}) \quad (27)$$

onde C é uma matriz simétrica com $i, j=1, \dots, q$, cujo ij -ésimo termo é $C(i, j) = \sum_t \hat{a}_{t-i} \hat{a}_{t-j}$ e $P = P_1 - P_2 - P_3 + P_4$ em que

$$P_1 = \begin{bmatrix} \sum_t y_t \hat{a}_{t-1} \\ \sum_t y_t \hat{a}_{t-2} \\ \vdots \\ \sum_t y_t \hat{a}_{t-q} \end{bmatrix}, \quad P_2 = \begin{bmatrix} \sum_t \sum_{i=1}^p \phi_i \hat{a}_{t-1} y_{t-i} \\ \sum_t \sum_{i=1}^p \phi_i \hat{a}_{t-2} y_{t-i} \\ \vdots \\ \sum_t \sum_{i=1}^p \phi_i \hat{a}_{t-q} y_{t-i} \end{bmatrix},$$

$$P_3 = \begin{bmatrix} \sum_t \sum_{i=1}^m \beta_i \hat{a}_{t-1} \xi_{\tau, i} \\ \sum_t \sum_{i=1}^m \beta_i \hat{a}_{t-2} \xi_{\tau, i} \\ \vdots \\ \sum_t \sum_{i=1}^m \beta_i \hat{a}_{t-q} \xi_{\tau, i} \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad P_4 = \begin{bmatrix} \sum_t \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^p \beta_i \phi_j \hat{a}_{t-1} \xi_{\tau-j, i} \\ \sum_t \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^p \beta_i \phi_j \hat{a}_{t-2} \xi_{\tau-j, i} \\ \vdots \\ \sum_t \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^p \beta_i \phi_j \hat{a}_{t-q} \xi_{\tau-j, i} \end{bmatrix}.$$

4.2.3 Distribuição Condicional Completa Para o Parâmetro β

Corolário 3 A distribuição condicional completa para o parâmetro β é dada por

$$P(\beta / \phi, \theta, \tau, S_n) \propto \exp\left\{-\frac{\tau}{2}(\beta - B^{-1}A)'B(\beta - B^{-1}A)\right\},$$

isto é,

$$\beta / \phi, \theta, \tau, S_n \sim \text{Normal}(B^{-1}A, \tau^{-1}B^{-1}), \quad (28)$$

onde

$$A = A_1 - A_2 - A_3 + A_4 - A_5 + A_6,$$

com

$$A_1 = \begin{bmatrix} \sum_t y_t \xi_{t,1} \\ \sum_t y_t \xi_{t,2} \\ \vdots \\ \sum_t y_t \xi_{t,m} \end{bmatrix}, \quad A_2 = \begin{bmatrix} \sum_t \sum_{i=1}^p \phi_i y_t \xi_{t-i,1} \\ \sum_t \sum_{i=1}^p \phi_i y_t \xi_{t-i,2} \\ \vdots \\ \sum_t \sum_{i=1}^p \phi_i y_t \xi_{t-i,m} \end{bmatrix},$$

$$A_3 = \begin{bmatrix} \sum_t \sum_{i=1}^p \phi_i y_{t-i} \xi_{t,1} \\ \sum_t \sum_{i=1}^p \phi_i y_{t-i} \xi_{t,2} \\ \vdots \\ \sum_t \sum_{i=1}^p \phi_i y_{t-i} \xi_{t,m} \end{bmatrix}, \quad A_4 = \begin{bmatrix} \sum_t \sum_{i=1}^p \sum_{j=1}^p \phi_i \phi_j y_{t-i} \xi_{t-j,1} \\ \sum_t \sum_{i=1}^p \sum_{j=1}^p \phi_i \phi_j y_{t-i} \xi_{t-j,2} \\ \vdots \\ \sum_t \sum_{i=1}^p \sum_{j=1}^p \phi_i \phi_j y_{t-i} \xi_{t-j,m} \end{bmatrix},$$

$$A_5 = \begin{bmatrix} \sum_t \sum_{i=1}^q \theta_i \hat{a}_{t-i} \xi_{t,1} \\ \sum_t \sum_{i=1}^q \theta_i \hat{a}_{t-i} \xi_{t,2} \\ \vdots \\ \sum_t \sum_{i=1}^q \theta_i \hat{a}_{t-i} \xi_{t,m} \end{bmatrix} \text{ e } \quad A_6 = \begin{bmatrix} \sum_t \sum_{i=1}^q \sum_{j=1}^p \theta_i \phi_j \hat{a}_{t-i} \xi_{t-j,1} \\ \sum_t \sum_{i=1}^q \sum_{j=1}^p \theta_i \phi_j \hat{a}_{t-i} \xi_{t-j,2} \\ \vdots \\ \sum_t \sum_{i=1}^q \sum_{j=1}^p \theta_i \phi_j \hat{a}_{t-i} \xi_{t-j,m} \end{bmatrix}.$$

Além disso, $B = B_1 - B_2 - B_3 + B_4$, onde B_1 é uma matriz simétrica, com $i, j=1, \dots, m$, onde o ij -ésimo termo é $B_1(i, j) = \sum_t \xi_{t,i} \xi_{t,j}$, B_2 é uma matriz simétrica, com $i, j=1, \dots, m$, onde o ij -ésimo elemento é $B_2(i, j) = \sum_t \sum_{k=1}^m \phi_k \xi_{t,i} \xi_{t-k,j}$, $B_3 = B_2'$ e B_4 é uma matriz simétrica, com $i, j=1, \dots, m$, onde o ij -ésimo elemento é $\sum_t \sum_{k=1}^p \sum_{l=1}^p \phi_k \phi_l \xi_{t-k,i} \xi_{t-l,j}$.

4.2.4 Distribuição condicional completa para o parâmetro τ

Corolário 4 A distribuição condicional completa para o parâmetro τ é dada por

$$P(\tau / \phi, \theta, \beta, S_n) \propto \tau^{\frac{(n-p)}{2}-1} \exp\left\{-\frac{\tau}{2} \sum_{t=p+1}^n (Z_t - U_t' \beta)(Z_t - U_t' \beta)\right\},$$

isto é,

$$\tau / \phi, \theta, \beta, S_n \sim \text{Gama} \left(\frac{n-p}{2}, \frac{\sum_{t=p+1}^n (Z_t - U_t' \beta)' (Z_t - U_t' \beta)}{2} \right), \quad (29)$$

onde

$$Z_t = y_t - y' \phi - \hat{a}' \theta$$

$$U_t' = X_H' - \phi' X_p,$$

em que

$$y' = [y_{t-1} \quad y_{t-2} \quad \dots \quad y_{t-p}],$$

$$\hat{a}' = [\hat{a}_{t-1} \quad \hat{a}_{t-2} \quad \dots \quad \hat{a}_{t-q}],$$

$$X_H' = [\xi_{t,1} \quad \xi_{t,2} \quad \dots \quad \xi_{t,m}]$$

$$X_p = \begin{bmatrix} \xi_{t-1,1} & \xi_{t-1,2} & \cdots & \xi_{t-1,m} \\ \xi_{t-2,1} & \xi_{t-2,2} & \cdots & \xi_{t-2,m} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ \xi_{t-p,1} & \xi_{t-p,2} & \cdots & \xi_{t-p,m} \end{bmatrix}.$$

4.3 Distribuições a Posteriori Condicionais Completas para o Modelo de Intervenção com Erro $MA(q)$ Utilizando a Priori Própria

As distribuições a posteriori condicionais para os parâmetros β , θ e τ foram obtidas da equação (23), sendo que as demonstrações estão apresentadas no Anexo C.

Para os cálculos abaixo, estar-se-á representando $\sum_{t=1}^n$ por \sum_t .

4.3.1 Distribuição Condicional Completa Para o Parâmetro β

Corolário 5 A distribuição condicional completa para o parâmetro β é dada por

$$\beta \mid \theta, \tau, S_n \sim \text{Normal}(L^{-1}T, \tau^{-1}L^{-1}),$$

onde $L = (P_1 + B)$ e $T = P_1\beta_0(\theta) + D$, sendo B uma matriz simétrica, com $i, j = 1, \dots, m$, onde o ij -ésimo termo é $B(i, j) = \sum_t \xi_{t,i} \xi_{t,j}$, $D = A - C$ com

$$A = \begin{bmatrix} \sum_t y_t \xi_{t,1} \\ \sum_t y_t \xi_{t,2} \\ \vdots \\ \sum_t y_t \xi_{t,m} \end{bmatrix} \text{ e } C = \begin{bmatrix} \sum_t \sum_{i=1}^q \xi_{t,1} \theta_i \hat{a}_{t-i} \\ \sum_t \sum_{i=1}^q \xi_{t,2} \theta_i \hat{a}_{t-i} \\ \vdots \\ \sum_t \sum_{i=1}^q \xi_{t,m} \theta_i \hat{a}_{t-i} \end{bmatrix}.$$

4.3.2 Distribuição Condicional Completa Para o Parâmetro θ

Corolário 6 A distribuição condicional completa para o parâmetro θ é dada por

$$\theta \mid \beta, \tau, S_n \sim \text{Normal}(M^{-1}N, \tau^{-1}M^{-1}),$$

onde $M = P_2 + G$ e $N = (P_2\theta_0 + H)$, sendo G uma matriz simétrica, com $i, j = 1, \dots, q$, onde o ij -ésimo termo é $G(i, j) = \sum_t \hat{a}_{t-i} \hat{a}_{t-j}$, $H = E - F$ com

$$E = \begin{bmatrix} \sum_t \hat{a}_{t-1} y_t \\ \sum_t \hat{a}_{t-2} y_t \\ \vdots \\ \sum_t \hat{a}_{t-q} y_t \end{bmatrix} \text{ e } F = \begin{bmatrix} \sum_t \sum_{j=1}^m \beta_j \xi_{t,j} \hat{a}_{t-1} \\ \sum_t \sum_{j=1}^m \beta_j \xi_{t,j} \hat{a}_{t-2} \\ \vdots \\ \sum_t \sum_{j=1}^m \beta_j \xi_{t,j} \hat{a}_{t-q} \end{bmatrix}.$$

4.3.3 Distribuição Condicional Completa Para o Parâmetro τ

Corolário 7 A distribuição condicional completa para o parâmetro τ é dada por

$$\tau \mid \beta, \theta, S_n \sim \text{Gama}\left(\frac{n}{2}, \frac{R}{2}\right),$$

onde

$$R = (\beta - \beta_0(\theta))' P_1 (\beta - \beta_0(\theta)) + (\theta - \theta_0)' P_2 (\theta - \theta_0) + 2k + \sum_{t=1}^n (y_t - X_t' \beta - \sum_{i=1}^q \theta_i B^i \hat{\alpha}_t)' (y_t - X_t' \beta - \sum_{i=1}^q \theta_i B^i \hat{\alpha}_t)$$

4.4 Distribuições a Posteriori Condicionais Completas para o Modelo de Intervenção com Erro $MA(q)$ Utilizando a Priori de Jeffreys

As distribuições a posteriori condicionais para os parâmetros β , θ e τ foram obtidas da equação (25), as demonstrações estão apresentadas no Anexo B.

Para os cálculos abaixo, estar-se-á representando $\sum_{t=1}^n$ por \sum_t .

4.4.1 Distribuição condicional completa para os parâmetros β , θ e τ .

Corolário 8 As distribuições condicionais completa são dadas por

$$\beta \mid \theta, \tau, S_n \sim \text{Normal}(B^{-1}D, \tau^{-1}B^{-1}), \quad (30)$$

$$\theta \mid \beta, \tau, S_n \sim \text{Normal}(G^{-1}H, \tau^{-1}G^{-1}), \quad (31)$$

$$\tau \mid \beta, \theta, S_n \sim \text{Gama}\left(\frac{n}{2}, \frac{J}{2}\right), \quad (32)$$

onde

$$J = \sum_{t=1}^n (y_t - X_t' \beta - \sum_{i=1}^q \theta_i B^i \hat{a}_t)(y_t - X_t' \beta - \sum_{i=1}^q \theta_i B^i \hat{a}_t) \text{ e as matrizes } B, D,$$

G e H já foram definidas acima.

5 APLICAÇÃO

O método será ilustrado através de exemplos para os quais os dados foram simulados. A simulação foi feita no software MATLAB. O primeiro exemplo refere-se à análise Bayesiana do modelo com duas intervenções e erro $ARMA(2, 2)$; para a análise foi usada a priori imprópria de Jeffreys, e a inferência sobre os parâmetros foi feita utilizando o Amostrador de Gibbs. O segundo exemplo refere-se à análise Bayesiana do modelo com duas intervenções e erro $MA(2)$; para a análise, também foi considerada a priori imprópria. Foi utilizado o Amostrador de Gibbs para fazer inferência sobre os parâmetros.

5.1 Análise do Modelo com Duas Intervenções e Erro $ARMA(2, 2)$

Foram geradas 500 observações para o modelo, com duas intervenções e erro $ARMA(2, 2)$ dado por

$$y_t = X_t' \beta + N_t, \quad t = 1, 2, \dots, n,$$

onde N_t é dado pela expressão (6).

Os valores escolhidos para os parâmetros foram $\phi_1 = 0,5$, $\phi_2 = -0,3$, $\theta_1 = -0,3$, $\theta_2 = 0,5$, $\beta_1 = -30$, $\beta_2 = 20$ e $\tau = 1$. Os valores para os

parâmetros foram escolhidos de forma que a série seja estacionária e invertível, como descrito em 2.2.3.2.

A matriz de variáveis binárias $X_t' = [\xi_{t,1} \quad \xi_{t,2}]$ é dada por

$$\xi_{t,1} = \begin{cases} 0, & \text{se } t \leq 120 \\ 1, & \text{se } t > 120 \end{cases} \quad \xi_{t,2} = \begin{cases} 0, & \text{se } t \leq 300 \\ 1, & \text{se } t > 300 \end{cases} \quad (33)$$

As variáveis binárias apresentadas na expressão (33) caracterizam uma função degrau (Figura 3(a)), tanto para a primeira intervenção quanto para a segunda, cujo efeito da intervenção é permanente.

A Figura 4 apresenta a série simulada.

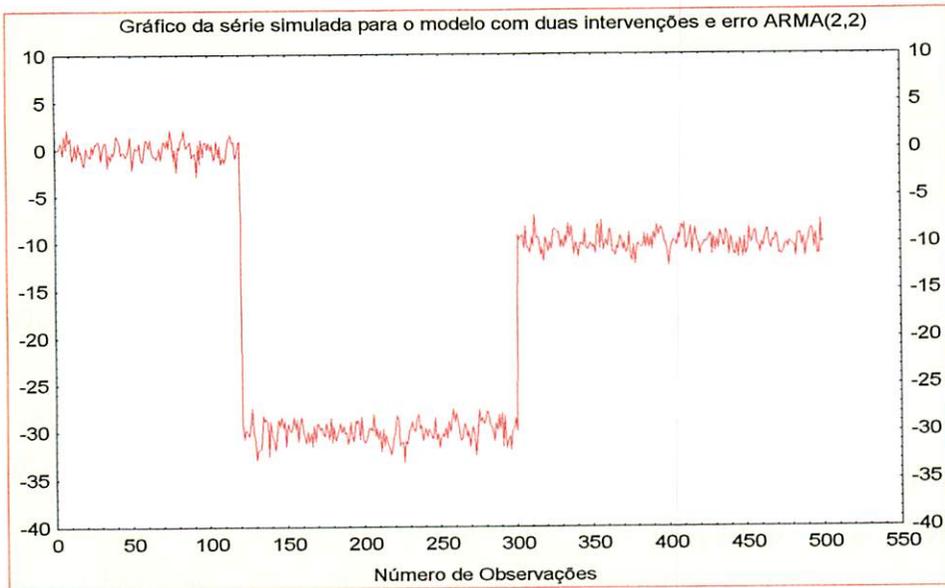


FIGURA 4 – Gráfico da série simulada para o modelo com duas intervenções e erro $ARMA(2,2)$.

Como já foi dito, existem algumas fontes de ruído, como a tendência, que podem obscurecer o efeito da intervenção. Para saber se alguma fonte de ruído está obscurecendo o efeito da intervenção, foi feita a primeira diferença da série, que está apresentada na Figura 5.

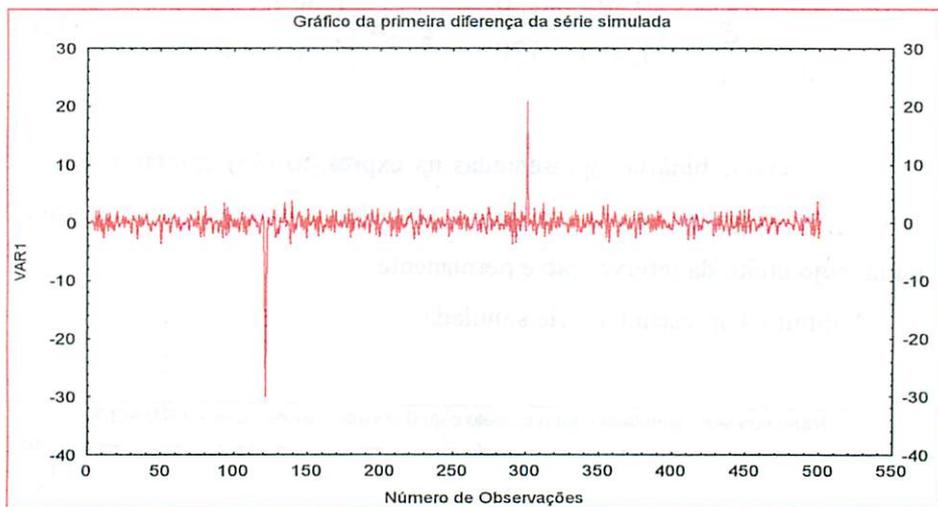


FIGURA 5 – Gráfico da primeira diferença da série simulada para o modelo com duas intervenções e erro ARMA(2, 2)

Através da Figura 5, pode-se observar que o efeito da intervenção não está obscurecido por alguma fonte de ruído.

Através do Amostrador de Gibbs, foi possível obter as estimativas para os parâmetros ϕ , θ , β e τ . As distribuições condicionais completas envolvidas são dadas por (26), (27), (28) e (29).

Aplicando-se o Amostrador de Gibbs foram usadas duas cadeias em paralelo, e a convergência foi verificada através de técnicas gráficas e do fator $\sqrt{\hat{R}}$ proposto por Gelman e Rubin (1992).

A seguir, serão apresentados os resultados para a análise Bayesiana do modelo com duas intervenções e erro ARMA(2,2), considerando 2000 iterações.

Foram feitas 3000 e 6000 iterações, mas serão apresentados somente os resultados referentes a 6000 observações, devido a um melhor resultado.

Para verificar o número ideal de observações a serem desprezadas, para diminuir o efeito dos valores iniciais, construíram-se os gráficos (Figuras 6 a 10), mostrando como se comportam as observações que vão ser desprezadas.

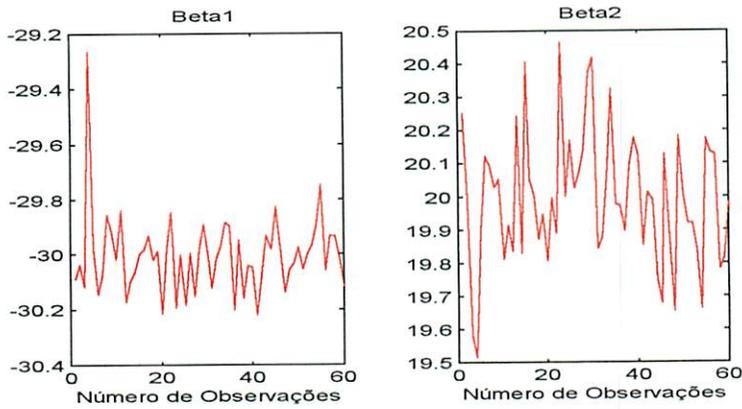


FIGURA 6 – Gráfico para verificar o número de observações a serem descartadas para os parâmetros β_1 e β_2

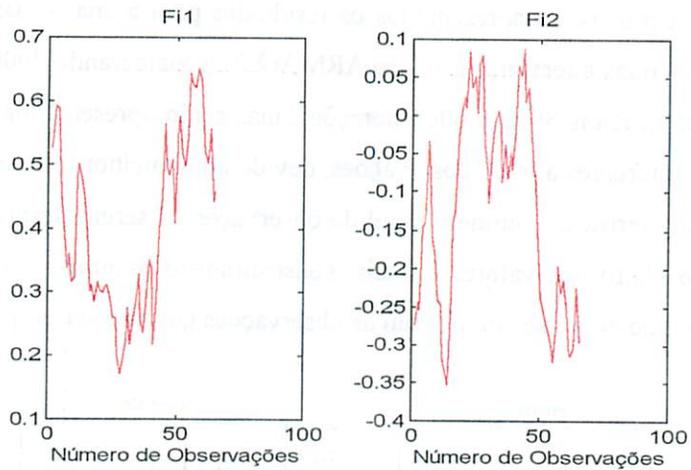


FIGURA 7 - Gráfico para verificar o número de observações a serem descartadas para os parâmetros ϕ_1 e ϕ_2

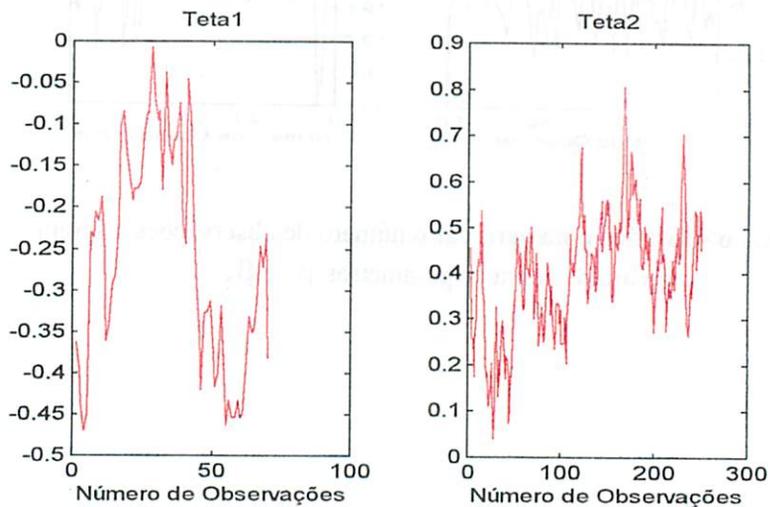


FIGURA 8 - Gráfico para verificar o número de observações a serem descartadas para os parâmetros θ_1 e θ_2

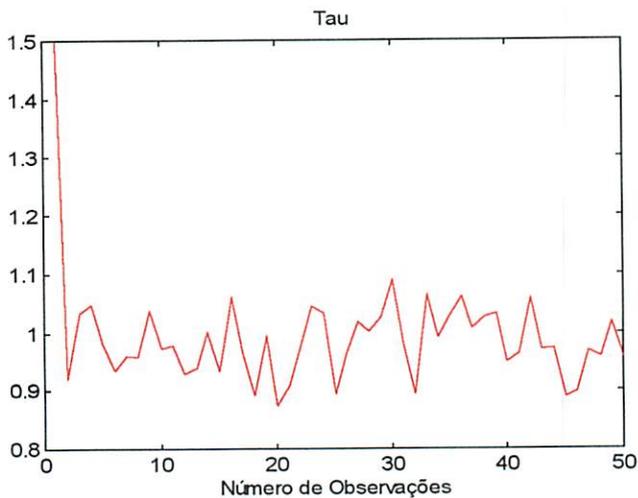


FIGURA 9 - Gráfico para verificar o número de observações a serem descartadas para o parâmetro τ

Pela Figura 8, pode-se perceber que o parâmetro θ_2 exigiu que se descartasse um número maior de observações. Portanto, considerando 6000 iterações, e com a finalidade de diminuir o efeito dos valores iniciais, desprezamos as 200 primeiras observações. Ficamos com uma amostra de 5600 observações. Os resultados obtidos pelo Amostrador de Gibbs são apresentados na Tabela 1.

TABELA 1 – Resultado da inferência sobre os parâmetros, considerando 6000 iterações, com duas cadeias em paralelo

Parâmetros	Valor Real	Média	Mediana	Moda	d.p.	\hat{R}	I.C.
β_1	-30,0	-30,0259	-30,0235	-30,063	0,0952	1,0015	(-30,2385, -298136)
β_2	20,0	20,0402	20,0413	19,945	0,1518	1,0008	(19,7562, 0,3314)
ϕ_1	0,5	0,5262	0,5220	0,5376	0,2064	1,0402	(0,1469, 0,9325)
ϕ_2	-0,3	-0,2999	-0,3002	-0,3372	0,1820	1,0165	(-0,6204, 0,0319)
θ_1	-0,3	-0,3793	-0,3773	-0,3842	0,2104	1,0396	(-0,7844, 0,0013)
θ_2	0,5	0,4457	0,4470	0,4756	0,1650	1,0101	(0,1408, 0,7342)
τ	1	0,9893	0,9885	0,9872	0,0613	1,0000	(0,8687, 1,1162)

Podemos ver que as estimativas para os parâmetros foram bem próximas dos valores reais para todos os parâmetros. E os valores do fator \hat{R} estão bem próximas de um, o que já nos indica uma convergência utilizando o critério de Gelman e Rubin (1992). A convergência também será verificada através de técnicas gráficas.

Os gráficos para verificar a convergência, Figuras 10 a 12, assim como os histogramas, Figuras 13 a 16, construídos com as amostras selecionadas para cada um dos parâmetros, são apresentados abaixo.

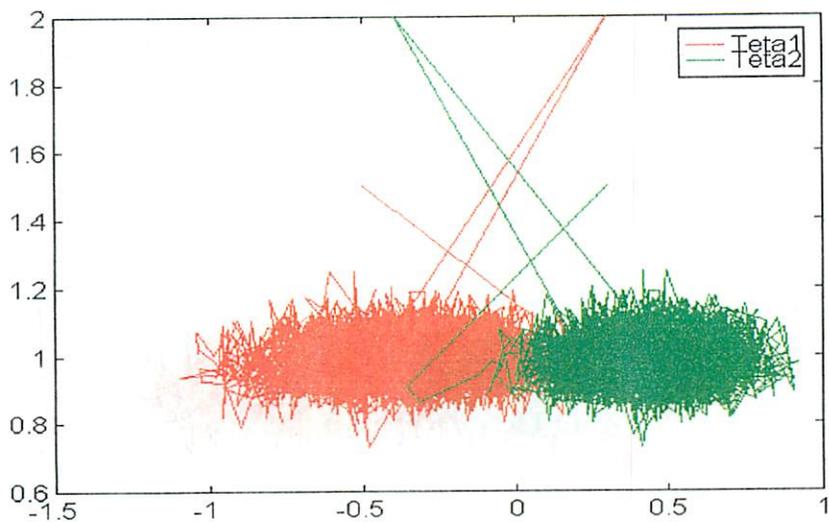


FIGURA 10 – Gráfico para verificar a convergência dos parâmetros θ_1 e θ_2 .

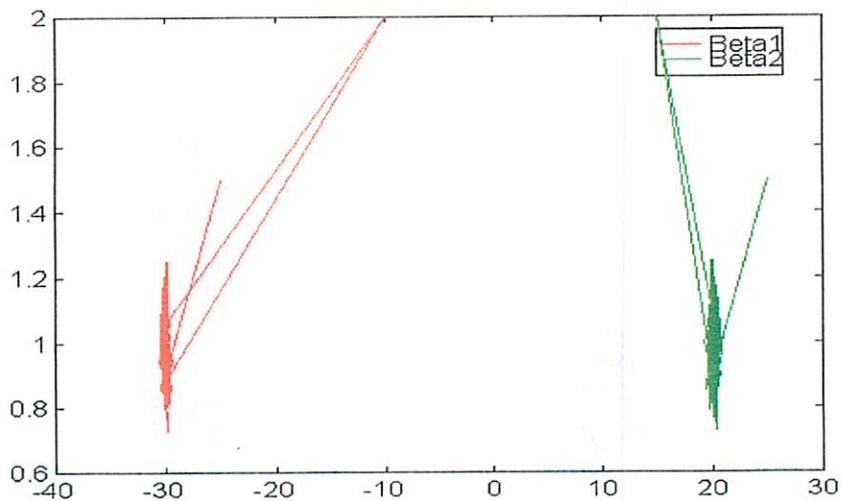


FIGURA 11 – Gráfico para verificar a convergência dos parâmetros β_1 e β_2

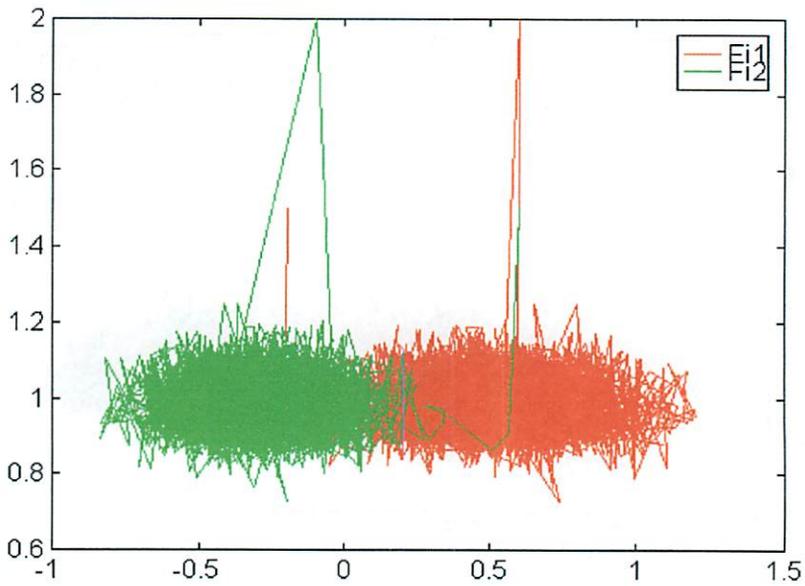


FIGURA 12 – Gráfico para verificar a convergência dos parâmetros ϕ_1 e ϕ_2

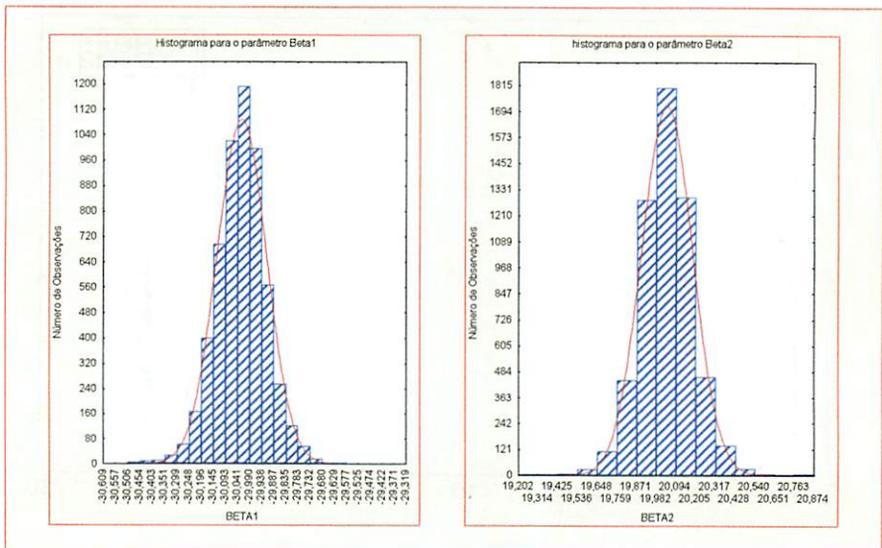


FIGURA 13 – Histograma para os parâmetros β_1 e β_2

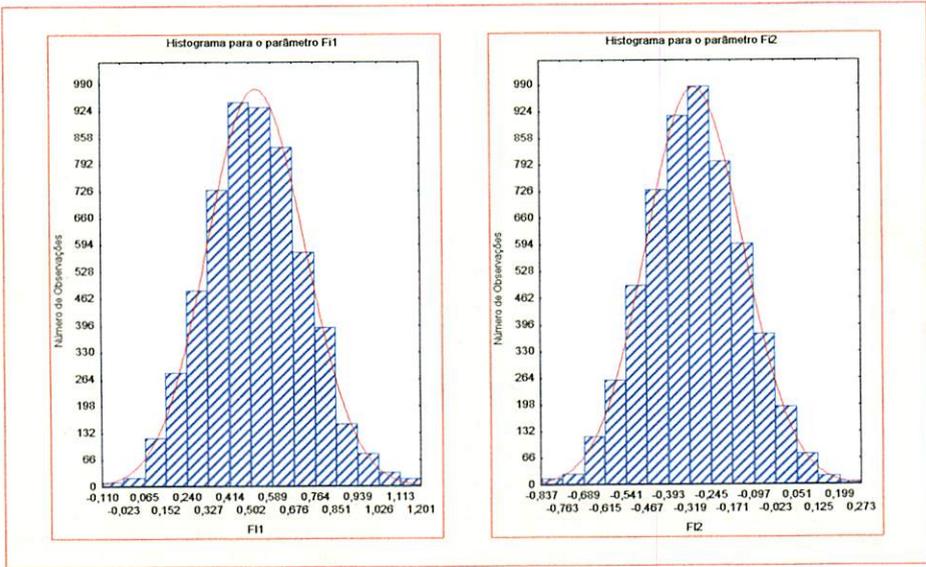


FIGURA 14 – Histograma para os parâmetros ϕ_1 e ϕ_2

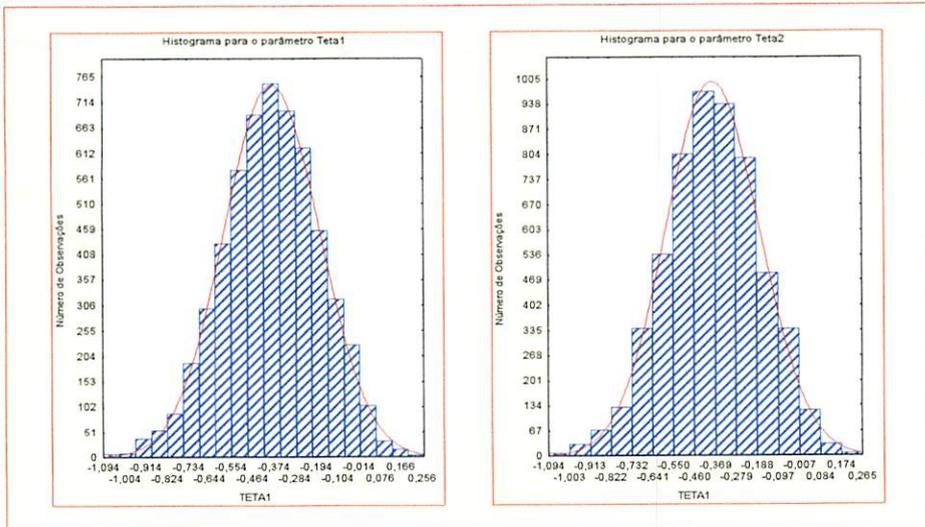


FIGURA 15 – Histograma para os parâmetros θ_1 e θ_2

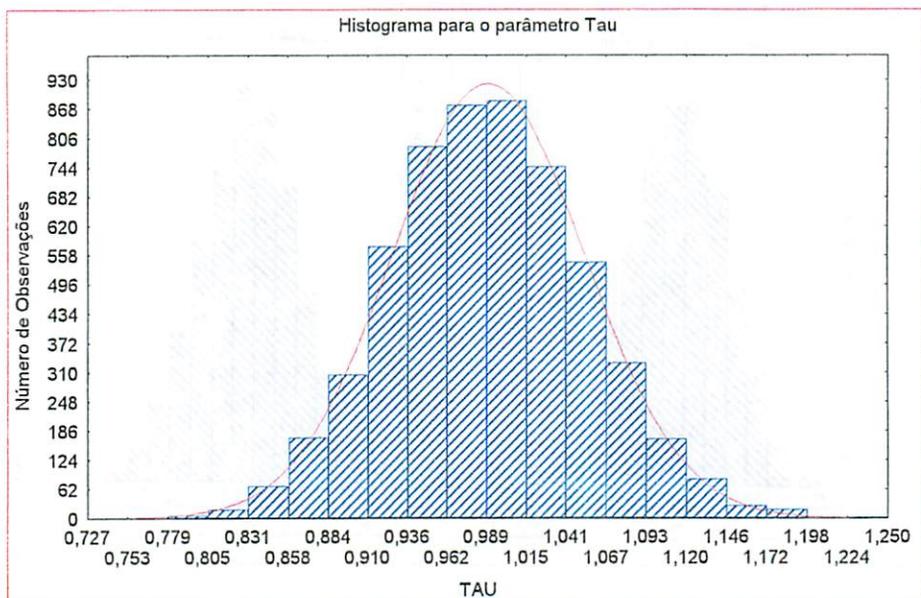


FIGURA 16 – Histograma para o parâmetro τ .

As Figuras 10, 11 e 12 estão indicando que todos os parâmetros convergiram, considerando 6000 iterações.

5.2 Análise do Modelo com Duas Intervenções e Erro MA(2)

Foram geradas 500 observações para o modelo com duas intervenções e erro MA(2) dado por

$$y_t = X_t' \beta + N_t, \quad t = 1, 2, \dots, n,$$

onde N_t é dado pela expressão (17).

Os valores escolhidos para os parâmetros foram, $\theta_1 = -0,3$, $\theta_2 = 0,5$, $\beta_1 = 30$, $\beta_2 = -20$ e $\tau = 1$. Os valores para os parâmetros devem ser escolhidos de forma que a série seja estacionária e invertível.

A matriz de variáveis binárias, $X_t' = [\xi_{t,1} \quad \xi_{t,2}]$ é dada por

$$\xi_{t,1} = \begin{cases} 0, & \text{se } t \leq 120 \\ 1, & \text{se } t > 120 \end{cases} \quad \xi_{t,2} = \begin{cases} 0, & \text{se } t \leq 300 \\ 1, & \text{se } t > 300 \end{cases} \quad (34)$$

As variáveis binárias apresentadas na expressão (34) caracterizam uma função degrau, tanto para a primeira intervenção quanto para a segunda, cujo efeito da intervenção é permanente.

A Figura 18 apresenta a série simulada.

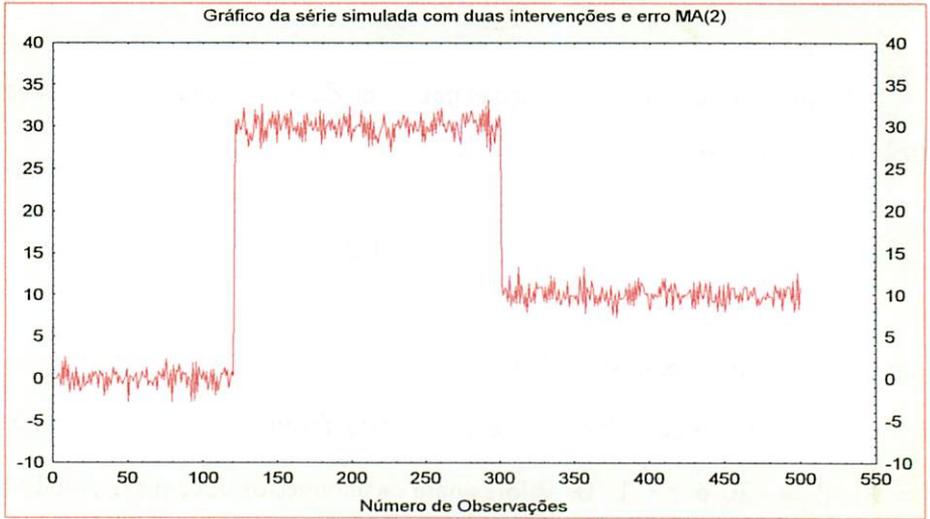


FIGURA 18 – Gráfico da série simulada para o modelo com duas intervenções e erro MA(2).

Para verificar se existe alguma fonte de ruído obscurecendo o efeito da intervenção, foi feito o gráfico da primeira diferença da série.

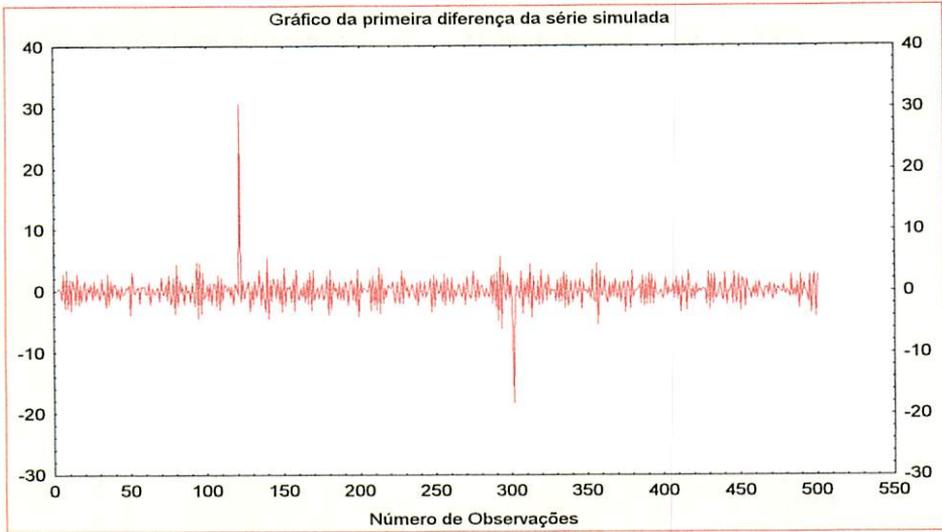


FIGURA 19 – Gráfico da primeira diferença da série simulada.

Através da Figura 19, pode-se perceber que não existe nenhuma fonte de ruído que poderia estar obscurecendo o efeito da intervenção.

Através do Amostrador de Gibbs, foi possível obter as estimativas para os parâmetros θ , β e τ . As distribuições condicionais completas envolvidas são dadas por (30), (31) e (32).

Aplicando-se o Amostrador de Gibbs, foram usadas duas cadeias em paralelo, e a convergência foi verificada através de técnicas gráficas e do fator $\sqrt{\hat{R}}$ proposto por Gelman e Rubin (1992).

A seguir, serão apresentados os resultados para a análise Bayesiana do modelo com duas intervenções e erro MA(2,2), considerando 10000 iterações.

Foram feitas 5000 e 10000 iterações, mas serão apresentadas somente os resultados referentes a 10000 observações, devido a um melhor resultado.

Para verificar o número ideal de observações a serem desprezadas, a fim de diminuir o efeito dos valores iniciais, construíram-se os gráficos mostrando como se comportam as observações que vão ser desprezadas.

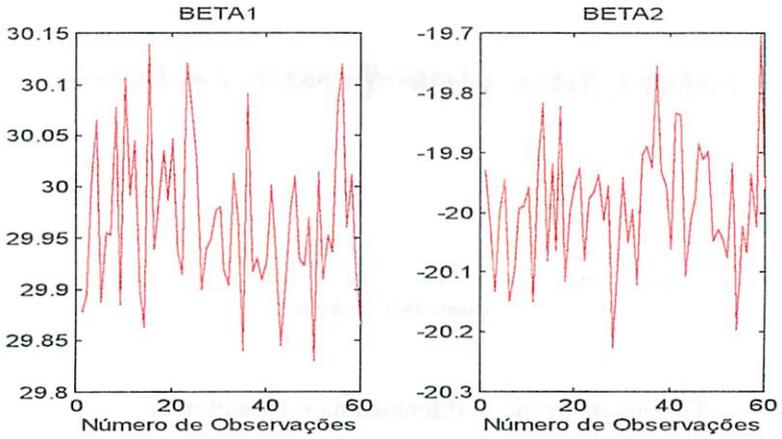


FIGURA 20 – Gráfico para verificar o número de observações a serem descartadas para os parâmetros β_1 e β_2

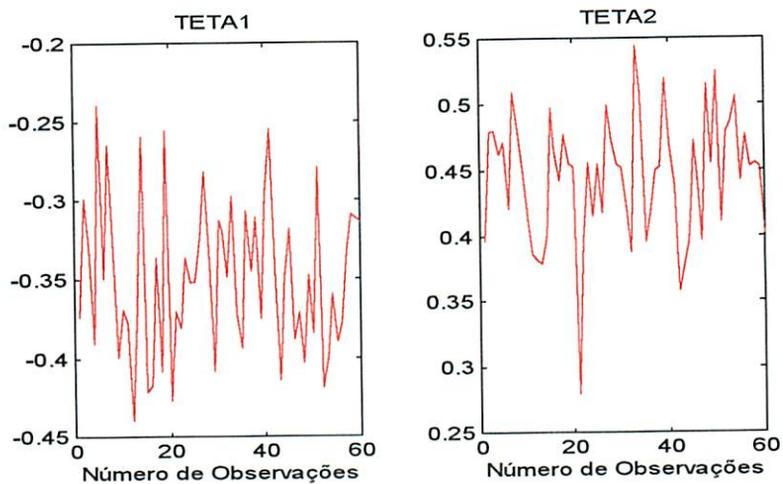


FIGURA 21 – Gráfico para verificar o número de observações a serem descartadas para os parâmetros θ_1 e θ_2

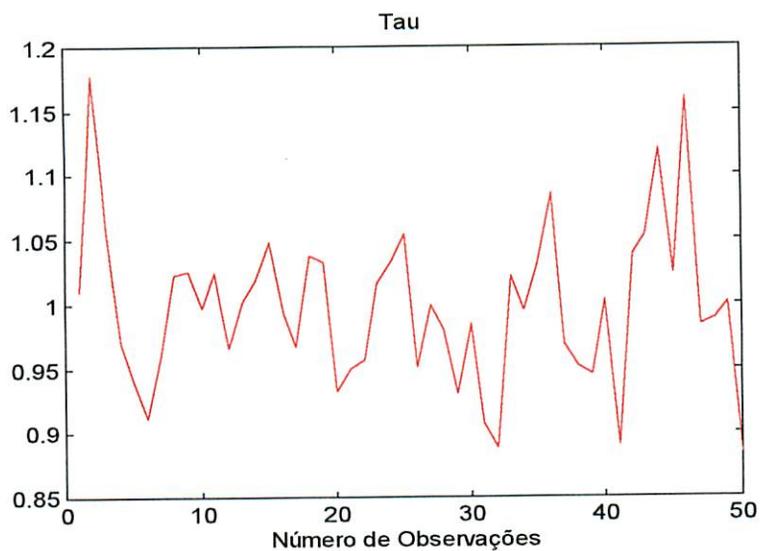


FIGURA 22 - Gráfico para verificar o número de observações a serem descartadas para o parâmetro τ

Através das Figuras 20, 21 e 22, pode-se perceber que se são descartadas as 50 primeiras observações, os efeitos dos valores iniciais já diminuíram. Portanto, considerando 10000 iterações, e com a finalidade de diminuir o efeito dos valores iniciais, desprezamos as 50 primeiras observações. Ficamos com uma amostra de 9900 observações. Os resultados obtidos pelo Amostrador de Gibbs são apresentados na Tabela 2.

TABELA 2 – Resultado da inferência sobre os parâmetros, considerando 10000 iterações, com duas cadeias em paralelo.

Parâmetros	Valor Real	Média	Mediana	Moda	d.p.	\hat{R}	I.C.
β_1	30	29,9760	29,9766	29,9210	0,0751	1,0000	(29,8388, 30,1251)
β_2	-20	-19,9656	-19,9647	-19,9623	0,1038	1,0003	(-20,1727, -19,7601)
θ_1	-0,3	-0,3529	-0,3532	-0,3217	0,0453	1,0003	(-0,4419, -0,2617)
θ_2	0,5	0,4503	0,4503	0,4432	0,0450	1,0002	(0,3628, 0,5390)
τ	1	0,9979	0,9970	0,9971	0,0638	0,9999	(0,8756; 1,1236)

Podemos ver que as estimativas para os parâmetros foram bem próximas dos valores reais para todos os parâmetros. E os valores do fator \hat{R} estão bem próximas de um, o que já nos indica uma convergência utilizando o critério de Gelman e Rubin (1992). A convergência também será verificada através de técnicas gráficas.

Os gráfico para verificar a convergência, assim como os histogramas construídos com as amostras selecionadas para cada um dos parâmetros, estão apresentados abaixo.

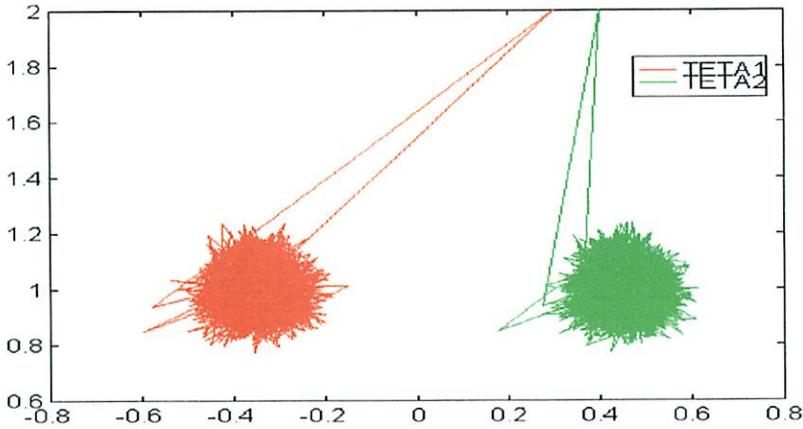


FIGURA 23 – Gráfico para verificar a convergência dos parâmetros θ_1 e θ_2 .

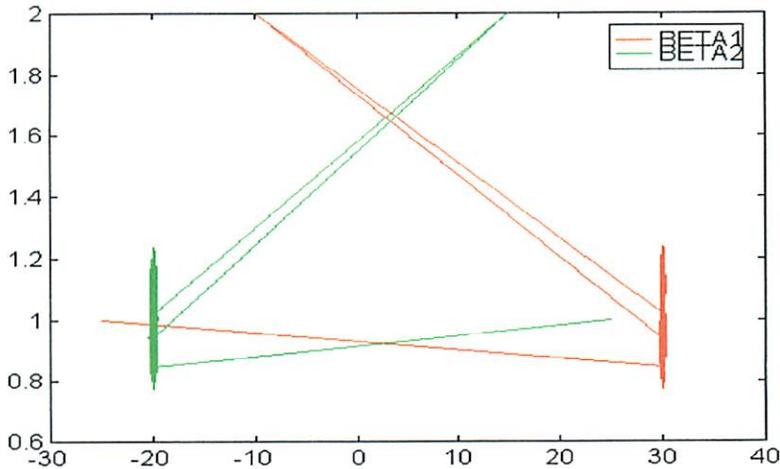


FIGURA 24 - Gráfico para verificar a convergência dos parâmetros β_1 e β_2

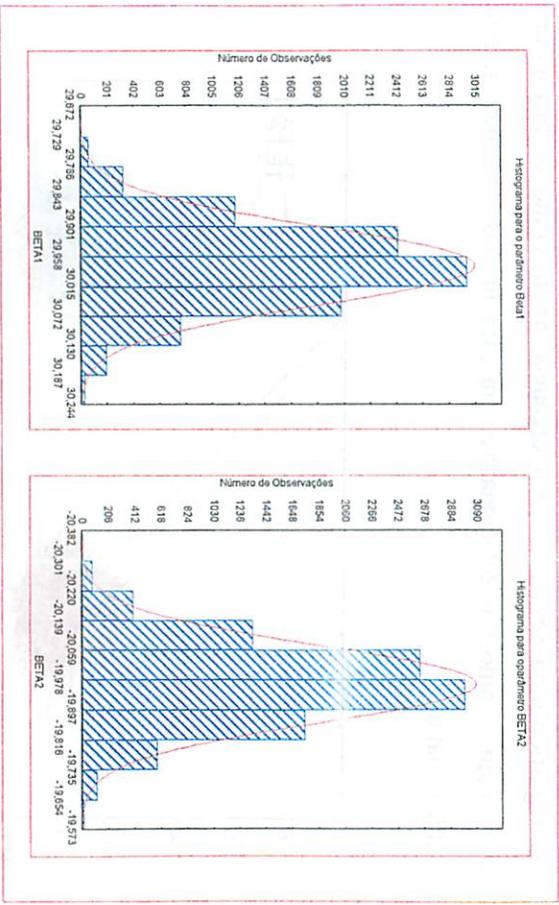


FIGURA 25 – Histograma para os parâmetros β_1 e β_2 .

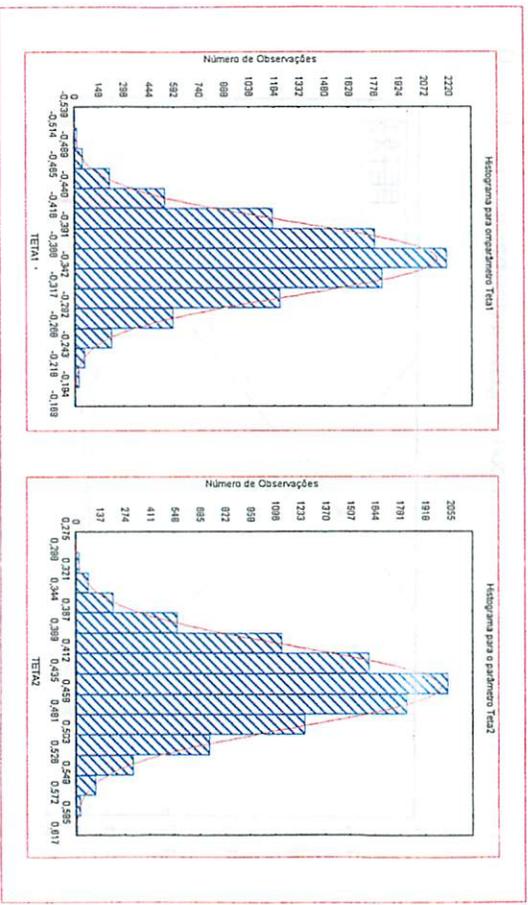


FIGURA 26 – Histograma para os parâmetros θ_1 e θ_2 .

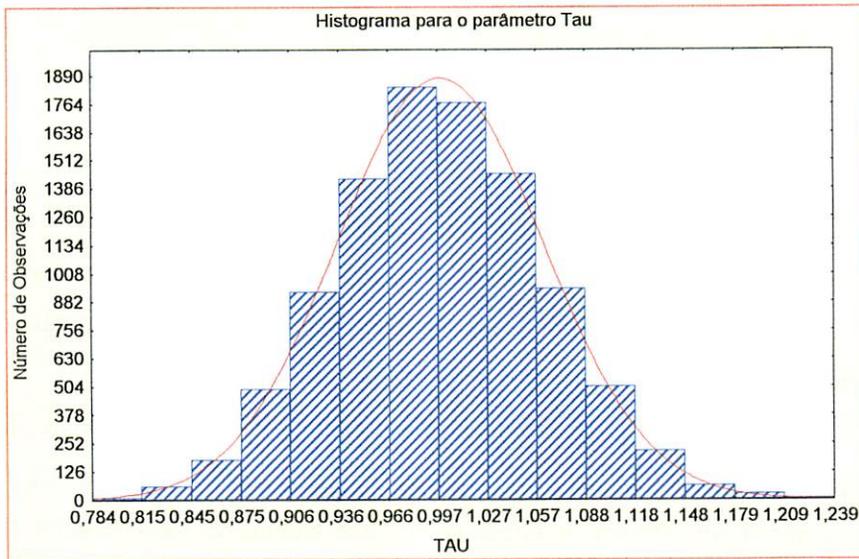


FIGURA 27 – Histograma para o parâmetro τ .

As Figuras 23 e 24 estão indicando que todos os parâmetros convergiram, considerando 10000 iterações.

6 CONCLUSÃO

A contribuição deste trabalho foi a análise Bayesiana do modelo de intervenção com erro ARMA através do Amostrador de Gibbs, embora fosse possível encontrar, na literatura, uma análise Bayesiana, para o modelo, envolvendo distribuições condicionais e métodos numéricos.

O Amostrador de Gibbs forneceu boas estimativas para o modelo de intervenção com erro ARMA e para o modelo de intervenção com erro MA, o que indica que o Amostrador de Gibbs é uma boa alternativa para se obter as estimativas sobre os parâmetros.

Comprovou-se, também, que para os casos em estudo a convergência foi alcançada, verificando-se, através de técnicas gráficas (verificação informal da convergência) e através do fator \hat{R} , proposto por Gelman e Rubin (1992) (verificação formal da convergência).

A literatura para a análise Bayesiana de modelos de intervenção ainda é muito limitada, apesar do crescente interesse nesta área. Trabalhos futuros envolvem a análise Bayesiana do modelo de intervenção com erro ARMA, fazendo uso da priori própria, e o cálculo da distribuição preditiva para o modelo de intervenção com erro ARMA e MA.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

BHATTACHARYYA, M.N.; LAYTON, A.P. Effectiveness of seat belt legislation on the Queensland road toll – An Australian case study in intervention analysis. *Journal of the American Statistical Association*, Alexandria, v. 74, n.367, p. 596-603, Sept. 1979.

BOX, G.E.P.; JENKINS, G.M. *Time series analysis, forecasting and control*. San Francisco : Holden-Day, 1976. 575p.

BOX, G.E.P. ; TIAO, G.C. A change in level of a non-stationary time series. *Biometrika*, London, v. 52, n. 1 / 2 , p. 181-192, June 1965.

BROEMELING, L.D. *Bayesian analysis of linear models*. New York: M. Dekker, 1985. 454 p.

BROEMELING, L.D. ; SHAARAWY, S. Time series: a Bayesian analysis in the time domain. In SPALL, J.C., (ed). *Bayesian analysis of time series and dynamic models*. New York:: M. Dekker., 1988. P.1-21.

CAMPBELL, D.T. From description to experimentation: Interpreting trends as quasi-experiments. In . Harris, C.W (ed.), *Problems of measuring change.*: proceedings. Madison: University of Wisconsin Press, 1963. 259p.

CAMPBELL, D.T; STANLEY, J.C. *Experimental and quasi-experimental designs for research*. Dallas: H. Mifflin, 1966. 84p.

COWLES, M.K.; CARLIN, B.P. Markov chain Monte Carlo convergence diagnostics: a comparative review. *Journal of the American Statistical Associations*, Alexandria, v.91, n.434, p.883-904, June 1996.

DIAZ, J. Bayesian analysis of regression models with time series erros. In SPALL, J.C., (ed), New York: M. Dekker, 1988, p.347-358.

GAMERMAN, D. *Simulação estocástica via cadeias de Markov*. São Paulo: ABE, 1996. 196p.

GELFAND, A.E.; SMITH, A.F.M. Sampling based approaches to calculating marginal densities. **Journal of the American Statistical Association**, Alexandria, v.85, n.410, p.398-409, June 1990.

GELMAN, A.; RUBIN, D.B. Inference from iterative simulation using multiple sequence. **Statistical Science**, Hayward, v.7, n.4, p.457-511, 1992.

GELMAN, A.; CARLIN, J.B.; STERN, H.S.; RUBIN, D.B. **Bayesian data analysis**. London: Chapman ; Hall, 1997. 526p.

GEMAN, A.; GEMAN, D. Stochastic relaxation, Gibbs distributions and the Bayesian restoration of images. **IEEE Transaction on Pattern Analysis and Machine Intelligence**, v.6, p.721-741, 1984.

GLASS, G.V. Estimating the effects of intervention into a non-stationary time series. **American Educational Research Journal**, Washington. V.9, n.3, p.463-477, 1972.

GLASS, G.V.; WILLSON V.L; GOTTMAN, J.M. **Design and analysis of time series experiments**. Boulder: Colorado Associated University Press, 1975. 241p.

GONÇALVES, E. B. **Comparação de modelos para previsão de séries temporais: série de precipitações pluviiais mensais no município de Pindorama – SP**. Piracicaba: ESALq, 1983. (Dissertação de Mestrado em Estatística e Experimentação Agronômica).

HARVEY, A.C. **Time series models**. Hardcover: J. Wiley, 1981.

HASTINGS, W.K. Monte Carlo sampling methods using Markov chains and their applications. **Biometrika**, v.57, n.1, p.97-109, Apr. 1970.

JEFFREYS, H. **Theory of Probability**. Oxford: Claredon Press, 1939. 380p.

McCULLOCH; R.E.; TSAY, R.S. Bayesian analysis of autoregressive time series via Gibbs sampler. **Journal of Time Series Analysis**, v.15, n.2, p.235-250, 1994.

METROPOLIS, N.; ROSEMBLUTH, A.W.; ROSEMBLUTH, M.N.; TELLER, A.H.; TELLER, E. Equations of state calculations by fast computing machines. **Journal of Chemical Physics**, New York, v.21, p.1087-1092, 1953.

MONAHAN, J.F. Fully Bayesian analysis of ARMA time series models. *Journal of Econometrics*, Lausanne, v.21, p.307-331, 1983.

MORETTIN, P.A.; TOLOI, C.M.C. *Previsão de séries temporais*. 2 ed, São Paulo: Atual, 1987. 439p.

MORETTIN, P.A.; TOLOI, C.M.C. *Modelos de funções de transferência*. III Escola de Séries Temporais e Econometria. USP, 1989. 166p.

O'HAGAN, A. *Bayesian inference. Kendall's advanced theory of statistic*. London: Cambridge University Press, 1994. 330p.

PACK, D. J. *Forecasting time series affected by identifiable isolated events*. Columbus,: The Ohio State University, College of Administrative Science, 1977.

PINO, F.A. *Análise de intervenção em séries temporais: aplicações em economia agrícola*. São Paulo: USP, 1980. (Dissertação- Mestrado em Estatística).

PINO, F.A.; MORETTIN, P.A. *Intervention analysis applied to brazilian milk and coffee time series*. RT-MAE – 8105, São Paulo: IME-USP, 1981.

POLE, A.; WEST, M.; HARRISON, J. *Applied Bayesian forecasting and time series analysis*. New York: Chapman and Hall, 1984.

PRESS, S.J. *Bayesian statistics: principles, models, and applications*. New York: J. Wiley, 1989. 237p.

SABOIA, J.L.M. Mortalidade infantil e salário mínimo: uma análise de intervenção para o município de São Paulo. *Revista de Administração de Empresas*, Rio de Janeiro, v.16, n.3, p.47-50, maio/jun. 1976.

SÁFADI, T., *Análise Bayesiana de alguns modelos de séries temporais*. São Paulo: USP, 1997. 100p. (Tese – Doutorado).

TIAO, G.C.; BOX, G.E.P.; HAMMING, W.J. Analysis of Los Angeles photochemical smog data: a statistical overview. *Journal of the Air Pollution Control Association*, v.25, n.3, p.260-268, Mar. 1975.

ZELLNER, A. An introduction to Bayesian inference in econometrics. New York: J. Wiley, 1971.431p.

ANEXOS

ANEXO A	Página
Anexo A1 Distribuição a posteriori condicional completa de ϕ para o modelo de intervenção com erro $ARMA(p, q)$	79
Anexo A2 Distribuição a posteriori condicional completa de θ para o modelo de Intervenção com erro $ARMA(p, q)$	94
Anexo A3 Distribuição a posteriori condicional completa de β para o modelo de intervenção com erro $ARMA(p, q)$	104
Anexo A4 Distribuição a posteriori condicional completa de τ para o modelo de intervenção com erro $ARMA(p, q)$	117

Anexo A

A seguir será apresentado como foram encontradas as distribuições a posteriori condicionais completas de cada parâmetro, para o modelo de intervenção com erro $ARMA(p, q)$.

Distribuições a posteriori condicionais completas para o modelo de intervenção com erro $ARMA(p, q)$

Considerando a priori de Jeffreys descrita em (10) e a função de verossimilhança aproximada dada por (12), temos a distribuição a posteriori dada por (15). Para todos os parâmetros e as distribuições a posteriori condicionais completas foram obtidas a partir da equação (15).

Anexo A1

Distribuição a Posteriori Condicional de ϕ , dado que todos os outros parâmetros são conhecidos

A distribuição a posteriori condicional de ϕ , dado que θ , β , τ e S_n são conhecidos, foi obtida da equação

$$P(\phi, \theta, \beta, \tau / S_n) \propto \tau^{\frac{n-p}{2}-1} \exp\left\{-\frac{\tau}{2} \sum_{i=p+1}^n (Z_i - U_i' \beta)' (Z_i - U_i' \beta)\right\}.$$

Para os cálculos abaixo, foram considerados somente os termos em que o ϕ está envolvido; então, tem-se

$$P(\phi / \theta, \beta, \tau, S_n) \propto \exp\left\{-\frac{\tau}{2} \sum_{i=p+1}^n (Z_i - U_i' \beta)' (Z_i - U_i' \beta)\right\} \quad (35)$$

desenvolvendo a equação (35)

$$P(\phi / \theta, \beta, \tau, S_n) \propto \exp\left\{-\frac{\tau}{2} \sum_{i=p+1}^n (Z_i' Z_i - Z_i' U_i' \beta - \beta' U_i Z_i + \beta' U_i U_i' \beta)\right\}$$

que pode ser reescrita como

$$\propto \exp \left\{ -\frac{\tau}{2} \left[\sum_{t=p+1}^n Z_t' Z_t - \left(\sum_{t=p+1}^n Z_t' U_t \right) \beta - \beta' \left(\sum_{t=p+1}^n U_t Z_t \right) + \beta' \left(\sum_{t=p+1}^n U_t U_t \right) \beta \right] \right\} \quad (36)$$

sendo Z_t e U_t' definidos em (13) e (14) respectivamente. Para os cálculos

abaixo, $\sum_{t=p+1}^n$ foi representado por \sum_t .

Cada termo da equação (36) foi resolvido separadamente, então:

$$\begin{aligned} \text{(i)} \quad \sum_t Z_t' Z_t &= \sum_t (y_t - y' \phi - \hat{\alpha}' \theta)' (y_t - y' \phi - \hat{\alpha}' \theta) \\ &= \sum_t [y_t' y_t - y_t' y' \phi - y_t' \hat{\alpha}' \theta - \phi' y y_t + \phi' y y' \phi + \\ &\quad \phi' y \hat{\alpha}' \theta - \theta' \hat{\alpha} y_t + \theta' \hat{\alpha} y' \phi + \theta' \hat{\alpha} \hat{\alpha}' \theta] \\ &= -\left(\sum_t y_t' y' \right) \phi - \phi' \left(\sum_t y y_t \right) + \phi' \left(\sum_t y y' \right) \phi + \\ &\quad \phi' \left(\sum_t y \hat{\alpha}' \theta \right) + \left(\theta' \sum_t \hat{\alpha} y' \right) \phi \end{aligned} \quad (37)$$

Resolvendo o primeiro termo da equação (37)

$$-\left(\sum_t y_t' y' \right) \phi =$$

$$-y_t' [y_{t-1} \ y_{t-2} \ \dots \ y_{t-p}] \phi = [y_t' y_{t-1} \ y_t' y_{t-2} \ \dots \ y_t' y_{t-p}] \phi$$

Aplicando o \sum_t

$$- = \left[\sum_t y_t' y_{t-1} \quad \sum_t y_t' y_{t-2} \quad \dots \quad \sum_t y_t' y_{t-p} \right] \phi = -M_1' \phi$$

Resolvendo o segundo termo da equação (37)

$$-\phi' (\sum_t y y_t) = -[(\sum_t y_t' y) \phi]'$$

Logo

$$-\phi' (\sum_t y y_t) = -\phi' M_1$$

Resolvendo o terceiro termo da equação (37)

$$\phi' (\sum_t y y') \phi = \phi' \begin{bmatrix} y_{t-1} \\ y_{t-2} \\ \vdots \\ y_{t-p} \end{bmatrix} [y_{t-1} \ y_{t-2} \ \dots \ y_{t-p}] \phi$$

$$= \phi' \begin{bmatrix} y_{t-1} y_{t-1} & y_{t-1} y_{t-2} & \dots & y_{t-1} y_{t-p} \\ y_{t-2} y_{t-1} & y_{t-2} y_{t-2} & \dots & y_{t-2} y_{t-p} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ y_{t-p} y_{t-1} & y_{t-p} y_{t-2} & \dots & y_{t-p} y_{t-p} \end{bmatrix} \phi$$

Aplicando \sum_t

$$= \phi' \begin{bmatrix} \sum_t y_{t-1}y_{t-1} & \sum_t y_{t-1}y_{t-2} & \dots & \sum_t y_{t-1}y_{t-p} \\ \sum_t y_{t-2}y_{t-1} & \sum_t y_{t-2}y_{t-2} & \dots & \sum_t y_{t-2}y_{t-p} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ \sum_t y_{t-p}y_{t-1} & \sum_t y_{t-p}y_{t-2} & \dots & \sum_t y_{t-p}y_{t-p} \end{bmatrix} \phi = \phi' N_1 \phi$$

Resolvendo o quarto termo da equação (37)

$$\phi' \left(\sum_t y \hat{a}' \theta \right) = \phi' \begin{bmatrix} y_{t-1} \\ y_{t-2} \\ \vdots \\ y_{t-p} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{a}_{t-1} & \hat{a}_{t-2} & \dots & \hat{a}_{t-q} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \\ \vdots \\ \theta_q \end{bmatrix}$$

$$= \phi' \begin{bmatrix} y_{t-1} \\ y_{t-2} \\ \vdots \\ y_{t-p} \end{bmatrix} \left[\theta_1 \hat{a}_{t-1} + \theta_2 \hat{a}_{t-2} + \dots + \theta_q \hat{a}_{t-q} \right] = \phi' \begin{bmatrix} y_{t-1} \\ y_{t-2} \\ \vdots \\ y_{t-p} \end{bmatrix} \left[\sum_{i=1}^q \theta_i \hat{a}_{t-i} \right]$$

$$= \phi' \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^q \theta_i y_{t-1} \hat{a}_{t-i} \\ \sum_{i=1}^q \theta_i y_{t-2} \hat{a}_{t-i} \\ \vdots \\ \sum_{i=1}^q \theta_i y_{t-p} \hat{a}_{t-i} \end{bmatrix}$$

Aplicando \sum_t

$$= \phi' \begin{bmatrix} \sum_t \sum_{i=1}^q \theta_i y_{t-1} \hat{a}_{t-i} \\ \sum_t \sum_{i=1}^q \theta_i y_{t-2} \hat{a}_{t-i} \\ \vdots \\ \sum_t \sum_{i=1}^q \theta_i y_{t-p} \hat{a}_{t-i} \end{bmatrix} = \phi' M_2$$

Resolvendo o quinto termo da equação (37)

$$\left(\sum_t \theta' \hat{a} y' \right) \phi = \phi' \left(\sum_t y \hat{a}' \theta \right)$$

Logo

$$\left(\sum_t \theta' \hat{a} y' \right) \phi = M_2' \phi$$

Tem-se, então, que a equação (i) pode ser reescrita como

$$\sum_t Z_t' Z_t = -M_1' \phi - \phi' M_1 + \phi' N_1 \phi + \phi' M_2 + M_2' \phi$$

$$\begin{aligned}
 \text{(ii)} \quad & \left(\sum_t Z_t' U_t \right) \beta = \left(\sum_t (y_t - y' \phi - \hat{\alpha}' \theta)' (X_H' - \phi' X_P) \right) \beta \\
 & = \sum_t [y_t' X_H' \beta - y_t' \phi' X_P \beta - \phi' y X_H' \beta + \phi' y \phi' X_P \beta - \\
 & \quad \theta' \hat{\alpha} X_H' \beta + \theta' \hat{\alpha} \phi' X_P \beta] \\
 & = \sum_t [-y_t' \phi' X_P \beta - \phi' y X_H' \beta + \phi' y \phi' X_P \beta + \theta' \hat{\alpha} \phi' X_P \beta] \\
 & = -\phi' \left(\sum_t X_P \beta y_t' \right) - \phi' \left(\sum_t y X_H' \beta \right) + \\
 & \quad \phi' \left(\sum_t y \beta' X_P' \right) \phi + \left(\sum_t \theta' \hat{\alpha} \beta' X_P' \right) \phi
 \end{aligned} \tag{38}$$

Resolvendo o primeiro termo da equação (38)

$$-\phi' \left(\sum_t X_P \beta y_t' \right) = -\phi' \begin{bmatrix} \xi_{t-1,1} & \xi_{t-1,2} & \cdots & \xi_{t-1,m} \\ \xi_{t-2,1} & \xi_{t-2,2} & \cdots & \xi_{t-2,m} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ \xi_{t-p,1} & \xi_{t-p,2} & \cdots & \xi_{t-p,m} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \vdots \\ \beta_m \end{bmatrix} [y_t]$$

$$= -\phi' \begin{bmatrix} \beta_1 \xi_{t-1,1} + \beta_2 \xi_{t-1,2} + \dots + \beta_m \xi_{t-1,m} \\ \beta_1 \xi_{t-2,1} + \beta_2 \xi_{t-2,2} + \dots + \beta_m \xi_{t-2,m} \\ \vdots \\ \beta_1 \xi_{t-p,1} + \beta_2 \xi_{t-p,2} + \dots + \beta_m \xi_{t-p,m} \end{bmatrix} [y_t]$$

$$= -\phi' \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^m \beta_i \xi_{t-1,i} \\ \sum_{i=1}^m \beta_i \xi_{t-2,i} \\ \vdots \\ \sum_{i=1}^m \beta_i \xi_{t-p,i} \end{bmatrix} [y_t] = -\phi' \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^m \beta_i \xi_{t-1,i} y_t \\ \sum_{i=1}^m \beta_i \xi_{t-2,i} y_t \\ \vdots \\ \sum_{i=1}^m \beta_i \xi_{t-p,i} y_t \end{bmatrix}$$

Aplicando \sum_t

$$= -\phi' \begin{bmatrix} \sum_t \sum_{i=1}^m \beta_i y_t \xi_{t-1,i} \\ \sum_t \sum_{i=1}^m \beta_i y_t \xi_{t-2,i} \\ \vdots \\ \sum_t \sum_{i=1}^m \beta_i y_t \xi_{t-p,i} \end{bmatrix} = -\phi' M_3$$

Resolvendo o segundo termo da equação (38)

$$-\phi' \left(\sum_t y X_H' \beta \right) = -\phi' \begin{bmatrix} y_{t-1} \\ y_{t-2} \\ \vdots \\ y_{t-p} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \xi_{t,1} & \xi_{t,2} & \dots & \xi_{t,m} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \vdots \\ \beta_m \end{bmatrix}$$

$$= -\phi' \begin{bmatrix} y_{t-1}\xi_{t,1} & y_{t-1}\xi_{t,2} & \cdots & y_{t-1}\xi_{t,m} \\ y_{t-2}\xi_{t,1} & y_{t-2}\xi_{t,1} & \cdots & y_{t-2}\xi_{t,m} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ y_{t-p}\xi_{t,1} & y_{t-p}\xi_{t,2} & \cdots & y_{t-p}\xi_{t,m} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \vdots \\ \beta_m \end{bmatrix}$$

$$= -\phi' \begin{bmatrix} \beta_1 y_{t-1}\xi_{t,1} + \beta_2 y_{t-1}\xi_{t,2} + \cdots + \beta_m y_{t-1}\xi_{t,m} \\ \beta_1 y_{t-2}\xi_{t,1} + \beta_2 y_{t-2}\xi_{t,2} + \cdots + \beta_m y_{t-2}\xi_{t,m} \\ \vdots \\ \beta_1 y_{t-p}\xi_{t,1} + \beta_2 y_{t-p}\xi_{t,2} + \cdots + \beta_m y_{t-p}\xi_{t,m} \end{bmatrix}$$

$$= -\phi' \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^m \beta_i y_{t-1}\xi_{t,i} \\ \sum_{i=1}^m \beta_i y_{t-2}\xi_{t,i} \\ \vdots \\ \sum_{i=1}^m \beta_i y_{t-p}\xi_{t,i} \end{bmatrix}$$

Aplicando \sum_t

$$= -\phi' \begin{bmatrix} \sum_t \sum_{i=1}^m \beta_i y_{t-1}\xi_{t,i} \\ \sum_t \sum_{i=1}^m \beta_i y_{t-2}\xi_{t,i} \\ \vdots \\ \sum_t \sum_{i=1}^m \beta_i y_{t-p}\xi_{t,i} \end{bmatrix} = -\phi' M_4$$

Resolvendo o terceiro termo da equação (38)

$$\phi' \left(\sum_t y \beta' X_p' \right) \phi =$$

$$= \phi' \begin{bmatrix} y_{t-1} \\ y_{t-2} \\ \vdots \\ y_{t-p} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \beta_1 & \beta_2 & \dots & \beta_m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \xi_{t-1,1} & \xi_{t-2,1} & \dots & \xi_{t-p,1} \\ \xi_{t-1,2} & \xi_{t-2,2} & \dots & \xi_{t-p,2} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ \xi_{t-1,m} & \xi_{t-2,m} & \dots & \xi_{t-p,m} \end{bmatrix} \phi$$

$$= \phi' \begin{bmatrix} y_{t-1} \\ y_{t-2} \\ \vdots \\ y_{t-p} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^m \beta_i \xi_{t-1,i} & \sum_{i=1}^m \beta_i \xi_{t-2,i} & \dots & \sum_{i=1}^m \beta_i \xi_{t-p,i} \end{bmatrix} \phi$$

$$= \phi' \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^m \beta_i y_{t-1} \xi_{t-1,i} & \sum_{i=1}^m \beta_i y_{t-1} \xi_{t-2,i} & \dots & \sum_{i=1}^m \beta_i y_{t-1} \xi_{t-p,i} \\ \sum_{i=1}^m \beta_i y_{t-2} \xi_{t-1,i} & \sum_{i=1}^m \beta_i y_{t-2} \xi_{t-2,i} & \dots & \sum_{i=1}^m \beta_i y_{t-2} \xi_{t-p,i} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ \sum_{i=1}^m \beta_i y_{t-p} \xi_{t-1,i} & \sum_{i=1}^m \beta_i y_{t-p} \xi_{t-2,i} & \dots & \sum_{i=1}^m \beta_i y_{t-p} \xi_{t-p,i} \end{bmatrix} \phi$$

Aplicando \sum_t

$$\begin{aligned}
&= \phi' \begin{bmatrix} \sum_t \sum_{i=1}^m \beta_i y_{t-1} \xi_{t-1,j} & \sum_t \sum_{i=1}^m \beta_i y_{t-1} \xi_{t-2,i} & \cdots & \sum_t \sum_{i=1}^m \beta_i y_{t-1} \xi_{t-p,i} \\ \sum_t \sum_{i=1}^m \beta_i y_{t-2} \xi_{t-1,j} & \sum_t \sum_{i=1}^m \beta_i y_{t-2} \xi_{t-2,i} & \cdots & \sum_t \sum_{i=1}^m \beta_i y_{t-2} \xi_{t-p,i} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ \sum_t \sum_{i=1}^m \beta_i y_{t-p} \xi_{t-1,j} & \sum_t \sum_{i=1}^m \beta_i y_{t-p} \xi_{t-2,i} & \cdots & \sum_t \sum_{i=1}^m \beta_i y_{t-p} \xi_{t-p,i} \end{bmatrix} \phi \\
&= \phi' N_2 \phi
\end{aligned}$$

Desenvolvendo o quarto termo da equação (38)

$$\left(\sum_t \theta' \hat{\alpha} \beta' X_p \right) \phi =$$

$$= \begin{bmatrix} \theta_1 & \theta_2 & \cdots & \theta_p \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{\alpha}_{t-1} \\ \hat{\alpha}_{t-2} \\ \vdots \\ \hat{\alpha}_{t-q} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \beta_1 & \beta_2 & \cdots & \beta_m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \xi_{t-1,1} & \xi_{t-2,1} & \cdots & \xi_{t-p,1} \\ \xi_{t-1,1} & \xi_{t-2,2} & \cdots & \xi_{t-p,2} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ \xi_{t-1,m} & \xi_{t-2,m} & \cdots & \xi_{t-p,m} \end{bmatrix} \phi$$

$$= \begin{bmatrix} \sum_{j=1}^q \theta_j \hat{\alpha}_{t-j} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^m \beta_i \xi_{t-1,i} & \sum_{i=1}^m \beta_i \xi_{t-2,i} & \cdots & \sum_{i=1}^m \beta_i \xi_{t-p,i} \end{bmatrix} \phi$$

$$= \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^q \beta_i \theta_j \xi_{t-1,i} \hat{\alpha}_{t-j} & \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^q \beta_i \theta_j \xi_{t-2,i} \hat{\alpha}_{t-j} & \cdots & \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^q \beta_i \theta_j \xi_{t-p,i} \hat{\alpha}_{t-j} \end{bmatrix} \phi$$

Aplicando \sum_t

$$= \left[\sum_t \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^q \beta_i \theta_j \xi_{t-1,i} \hat{a}_{t-j} \quad \sum_t \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^q \beta_i \theta_j \xi_{t-2,j} \hat{a}_{t-j} \quad \dots \quad \sum_t \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^q \beta_i \theta_j \xi_{t-p,j} \hat{a}_{t-j} \right] \phi$$

$$= M_5' \phi$$

Então, a equação (ii) pode ser escrita da seguinte forma

$$\left(\sum_t Z_t' U_t' \right) \beta = -\phi' M_3 - \phi M_4 + \phi' N_2 \phi + M_5' \phi$$

(iii) $\beta' \left(\sum_t Z_t U_t \right)$ que é igual a equação (ii) transposta, então

$$\beta' \left(\sum_t Z_t U_t \right) = -M_3' \phi - M_4' \phi + \phi' N_2' \phi + \phi' M_5$$

(iv) $\beta' \left(\sum_t U_t U_t' \right) \beta = \beta' \left(\sum_t (X_H' - \phi' X_P)' (X_H' - \phi' X_P) \right) \beta$

$$= \beta' \left(\sum_t X_H X_H' \right) \beta - \beta' \left(\sum_t X_H \phi' X_P \right) \beta - \beta' \left(\sum_t X_P' \phi X_H' \right) \beta +$$

$$\beta' \left(\sum_t X_P' \phi \phi' X_P \right) \beta$$

$$= - \left(\sum_t \beta' X_H \beta' X_P' \right) \phi - \phi' \left(\sum_t X_P \beta X_H' \beta \right) + \phi' \left(\sum_t X_P \beta \beta' X_P' \right) \phi$$

(39)

Resolvendo o primeiro termo da equação (39)

$$\begin{aligned}
&= -\left(\sum_t \beta' X_H \beta' X_p'\right) \phi \\
&= -\left[\beta_1 \quad \beta_2 \quad \dots \quad \beta_m\right] \begin{bmatrix} \xi_{t,1} \\ \xi_{t,2} \\ \vdots \\ \xi_{t,2} \end{bmatrix} \left[\beta_1 \quad \beta_2 \quad \dots \quad \beta_m\right] \begin{bmatrix} \xi_{t-1,1} & \xi_{t-2,1} & \dots & \xi_{t-p,1} \\ \xi_{t-1,2} & \xi_{t-2,2} & \dots & \xi_{t-p,2} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ \xi_{t-1,m} & \xi_{t-2,m} & \dots & \xi_{t-p,m} \end{bmatrix} \phi \\
&= -\left[\sum_{i=1}^m \beta_i \xi_{t,i}\right] \left[\sum_{j=1}^m \beta_j \xi_{t-1,j} \quad \sum_{j=1}^m \beta_j \xi_{t-2,j} \quad \dots \quad \sum_{j=1}^m \beta_j \xi_{t-p,j}\right] \phi \\
&= -\left[\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^m \beta_i \beta_j \xi_{t,i} \xi_{t-1,j} \quad \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^m \beta_i \beta_j \xi_{t,i} \xi_{t-2,j} \quad \dots \quad \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^m \beta_i \beta_j \xi_{t,i} \xi_{t-p,j}\right] \phi
\end{aligned}$$

Aplicando \sum_t

$$\begin{aligned}
&= -\left[\sum_t \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^m \beta_i \beta_j \xi_{t,i} \xi_{t-1,j} \quad \sum_t \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^m \beta_i \beta_j \xi_{t,i} \xi_{t-2,j} \quad \dots \quad \sum_t \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^m \beta_i \beta_j \xi_{t,i} \xi_{t-p,j}\right] \phi \\
&= -M_6' \phi
\end{aligned}$$

Resolvendo o segundo termo da equação (39)

$$= -\phi' \left(\sum_t X_p \beta X_H' \beta\right) = -\left(\phi' \left(\sum_t X_p \beta X_H' \beta\right)\right)'$$

Logo

$$= -\phi' \left(\sum_t X_p \beta X_H' \beta \right) = \phi' M_6$$

Resolvendo o terceiro termo da equação (39)

$$\phi' \left(\sum_t X_p \beta \beta' X_p' \right) \phi =$$

$$= \phi' \begin{bmatrix} \xi_{t-1,1} & \xi_{t-1,2} & \cdots & \xi_{t-1,m} \\ \xi_{t-2,1} & \xi_{t-2,2} & \cdots & \xi_{t-2,m} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ \xi_{t-p,1} & \xi_{t-p,2} & \cdots & \xi_{t-p,m} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \vdots \\ \beta_m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \beta_1 & \beta_2 & \cdots & \beta_m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \xi_{t-1,1} & \xi_{t-2,1} & \cdots & \xi_{t-p,1} \\ \xi_{t-1,2} & \xi_{t-2,2} & \cdots & \xi_{t-p,2} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ \xi_{t-1,m} & \xi_{t-2,m} & \cdots & \xi_{t-p,m} \end{bmatrix} \phi$$

$$= \phi' \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^m \beta_i \xi_{t-1,i} \\ \sum_{i=1}^m \beta_i \xi_{t-2,i} \\ \vdots \\ \sum_{i=1}^m \beta_i \xi_{t-p,i} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sum_{j=1}^m \beta_j \xi_{t-1,j} & \sum_{j=1}^m \beta_j \xi_{t-2,j} & \cdots & \sum_{j=1}^m \beta_j \xi_{t-p,j} \end{bmatrix} \phi$$

$$= \phi' \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^m \beta_i \beta_j \xi_{t-1,i} \xi_{t-1,j} & \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^m \beta_i \beta_j \xi_{t-1,i} \xi_{t-2,j} & \cdots & \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^m \beta_i \beta_j \xi_{t-1,i} \xi_{t-p,j} \\ \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^m \beta_i \beta_j \xi_{t-2,i} \xi_{t-1,j} & \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^m \beta_i \beta_j \xi_{t-2,i} \xi_{t-2,j} & \cdots & \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^m \beta_i \beta_j \xi_{t-2,i} \xi_{t-p,j} \\ \vdots & \cdots & \cdots & \vdots \\ \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^m \beta_i \beta_j \xi_{t-p,i} \xi_{t-1,j} & \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^m \beta_i \beta_j \xi_{t-p,i} \xi_{t-2,j} & \cdots & \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^m \beta_i \beta_j \xi_{t-p,i} \xi_{t-p,j} \end{bmatrix} \phi$$

Aplicando \sum_t

$$\begin{aligned}
&= \phi' \left[\begin{array}{ccc} \sum_t \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^m \beta_i \beta_j \xi_{\alpha-1,i} \xi_{\alpha-1,j} & \sum_t \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^m \beta_i \beta_j \xi_{\alpha-1,i} \xi_{\alpha-2,j} & \cdots \sum_t \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^m \beta_i \beta_j \xi_{\alpha-1,i} \xi_{\alpha-p,j} \\ \sum_t \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^m \beta_i \beta_j \xi_{\alpha-2,i} \xi_{\alpha-1,j} & \sum_t \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^m \beta_i \beta_j \xi_{\alpha-2,i} \xi_{\alpha-2,j} & \cdots \sum_t \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^m \beta_i \beta_j \xi_{\alpha-2,i} \xi_{\alpha-p,j} \\ \vdots & \cdots & \vdots \\ \sum_t \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^m \beta_i \beta_j \xi_{\alpha-p,i} \xi_{\alpha-1,j} & \sum_t \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^m \beta_i \beta_j \xi_{\alpha-p,i} \xi_{\alpha-2,j} & \cdots \sum_t \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^m \beta_i \beta_j \xi_{\alpha-p,i} \xi_{\alpha-p,j} \end{array} \right] \phi \\
&= \phi' N_4 \phi
\end{aligned}$$

Tem-se, então, que a equação (iv) pode ser reescrita como

$$\beta' \left(\sum_t U_t U_t' \right) \beta = -M_6' \phi - \phi' M_6 + \phi' N_4 \phi$$

Com isto, a equação (36) pode ser escrita como

$$\begin{aligned}
P(\phi / \theta, \beta, \tau, S_n) \propto \exp \left\{ -\frac{\tau}{2} \right. & (-M_1' \phi - \phi' M_1 + \phi' N_1 \phi + \phi' M_2 + M_2' \phi) \\
& - (-\phi' M_3 - \phi' M_4 + \phi' N_2 \phi + M_5' \phi) \\
& - (-M_3' \phi - M_4' \phi + \phi' N_2' \phi + \phi' M_5) \\
& \left. + (-M_6' \phi - \phi' M_6 + \phi' N_4 \phi) \right\} \quad (40)
\end{aligned}$$

Colocando ϕ e ϕ' em evidência, tem-se que a equação (40) fica

$$P(\phi / \theta, \beta, \tau, S_n) \propto \exp \left\{ -\frac{\tau}{2} (-M' \phi - \phi' M + \phi' N \phi) \right\}, \quad (41)$$

onde

$$M = M_1 - M_2 - M_3 - M_4 + M_5 + M_6 \text{ e}$$

$$N = N_1 - N_2 - N_3 + N_4$$

sendo

$$N_3 = N_2'$$

Completando o quadrado em ϕ na equação (41) tem-se

$$P(\phi / \theta, \beta, \tau, S_n) \propto \exp \left\{ -\frac{\tau}{2} (\phi - N^{-1}M)' N (\phi - N^{-1}M) \right\}$$

Portanto,

$$\phi / \theta, \beta, \tau, S_n \sim \text{Normal}(N^{-1}M, \tau^{-1}N^{-1}).$$

Anexo A2

Distribuição a Posteriori Condicional de θ , dado que todos os outros parâmetros são conhecidos

A distribuição a posteriori condicional de θ , dado que ϕ , β , τ e S_n são conhecidos, foi obtida da equação

$$P(\phi, \theta, \beta, \tau / S_n) \propto \tau^{\frac{n-p}{2}-1} \exp\left\{-\frac{\tau}{2} \sum_{t=p+1}^n (Z_t - U_t' \beta)' (Z_t - U_t' \beta)\right\}$$

para os cálculos abaixo foram considerado somente os termos onde o θ está envolvido, então, tem-se

$$P(\theta / \phi, \beta, \tau, S_n) \propto \exp\left\{-\frac{\tau}{2} \sum_{t=p+1}^n (Z_t - U_t' \beta)' (Z_t - U_t' \beta)\right\} \quad (42)$$

desenvolvendo a equação (42)

$$P(\theta / \phi, \beta, \tau, S_n) \propto \exp\left\{-\frac{\tau}{2} \sum_{t=p+1}^n (Z_t' Z_t - Z_t' U_t' \beta - \beta' U_t Z_t + \beta' U_t U_t' \beta)\right\},$$

que pode ser reescrita como

$$\propto \exp \left\{ -\frac{\tau}{2} \left[\sum_{t=p+1}^n Z_t' Z_t - \left(\sum_{t=p+1}^n Z_t' U_t' \beta \right) - \left(\sum_{t=p+1}^n \beta' U_t Z_t \right) + \left(\sum_{t=p+1}^n \beta' U_t U_t' \beta \right) \right] \right\} \quad (43)$$

Sendo Z_t e U_t' definidos em (13) e (14) respectivamente. Para os cálculos abaixo, $\sum_{t=p+1}^n$ foi representado por \sum_t .

Cada termo da equação (43) foi resolvido separadamente, então

$$\begin{aligned} (i) \quad \sum_t Z_t' Z_t &= \sum_t (y_t - y' \phi - \hat{a}' \theta)' (y_t - y' \phi - \hat{a}' \theta) \\ &= \sum_t [y_t' y_t - y_t' y' \phi - y_t' \hat{a}' \theta - \phi' y y_t + \phi' y y' \phi + \\ &\quad \phi' y \hat{a}' \theta - \theta' \hat{a} y_t + \theta' \hat{a} y' \phi + \theta' \hat{a} \hat{a}' \theta] \\ &= -(\sum_t y_t' \hat{a}') \theta + (\sum_t \phi' y \hat{a}') \theta - \theta' (\sum_t \hat{a} y_t) \\ &\quad + \theta' (\sum_t \hat{a} y' \phi) + \theta' (\sum_t \hat{a} \hat{a}') \theta \end{aligned} \quad (44)$$

Resolvendo o primeiro termo da equação (44)

$$\begin{aligned} -(\sum_t y_t' \hat{a}') \theta &= \\ &= -y_t \begin{bmatrix} \hat{a}_{t-1} & \hat{a}_{t-2} & \cdots & \hat{a}_{t-q} \end{bmatrix} \theta = -\begin{bmatrix} y_t \hat{a}_{t-1} & y_t \hat{a}_{t-2} & \cdots & y_t \hat{a}_{t-q} \end{bmatrix} \theta \end{aligned}$$

Aplicando o \sum_t

$$= - \left[\sum_t y_t \hat{a}_{t-1} \quad \sum_t y_t \hat{a}_{t-2} \quad \cdots \quad \sum_t y_t \hat{a}_{t-q} \right] \theta = -P_1' \theta$$

Resolvendo o segundo termo da equação (44)

$$\left(\sum_t \phi' y \hat{a}' \right) \theta =$$

$$= \left[\phi_1 \quad \phi_2 \quad \cdots \quad \phi_p \right] \begin{bmatrix} y_{t-1} \\ y_{t-2} \\ \vdots \\ y_{t-p} \end{bmatrix} \left[\hat{a}_{t-1} \quad \hat{a}_{t-2} \quad \cdots \quad \hat{a}_{t-q} \right] \theta$$

$$= \left[\phi_1 y_{t-1} + \phi_2 y_{t-2} + \cdots + \phi_p y_{t-p} \right] \left[\hat{a}_{t-1} \quad \hat{a}_{t-2} \quad \cdots \quad \hat{a}_{t-q} \right] \theta$$

$$= \left[\sum_{i=1}^p \phi_i y_{t-i} \right] \left[\hat{a}_{t-1} \quad \hat{a}_{t-2} \quad \cdots \quad \hat{a}_{t-q} \right] \theta$$

$$= \left[\sum_{i=1}^p \phi_i \hat{a}_{t-1} y_{t-i} \quad \sum_{i=1}^p \phi_i \hat{a}_{t-2} y_{t-i} \quad \cdots \quad \sum_{i=1}^p \phi_i \hat{a}_{t-q} y_{t-i} \right] \theta$$

Aplicando o \sum_t

$$= \theta' \left(\sum_{i=1}^i \hat{a}_i \right) \theta =$$

Resolvendo o quinto termo da equação (44)

$$\theta' P_2 \left(\sum_{i=1}^i \hat{a}_i \phi \right) = \theta' P_2$$

Logo

$$\theta' \left(\sum_{i=1}^i \hat{a}_i \phi \right) = \left[\sum_{i=1}^i \phi' \gamma_i \hat{a}_i \right] \theta$$

Resolvendo o quarto termo da equação (44)

$$-\theta' P_1 \left(\sum_{i=1}^i \hat{a}_i \gamma_i \right) = -\theta' P_1$$

Logo

$$-\theta' \left(\sum_{i=1}^i \hat{a}_i \gamma_i \right) = - \left[\sum_{i=1}^i \gamma_i' \hat{a}_i \right] \theta$$

Resolvendo o terceiro termo da equação (44)

$$= \left[\sum_{i=1}^i \sum_{p=1}^i \phi' \hat{a}_{i-1} \gamma_{i-1} \right. \\ \sum_{i=1}^i \sum_{p=1}^i \phi' \hat{a}_{i-2} \gamma_{i-1} \dots \left. \sum_{i=1}^i \sum_{p=1}^i \phi' \hat{a}_{i-q} \gamma_{i-1} \right] \theta = P_2' \theta$$

$$= \theta' \begin{bmatrix} \hat{a}_{t-1} \\ \hat{a}_{t-2} \\ \vdots \\ \hat{a}_{t-q} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{a}_{t-1} & \hat{a}_{t-2} & \cdots & \hat{a}_{t-q} \end{bmatrix} \theta$$

$$= \theta' \begin{bmatrix} \hat{a}_{t-1}\hat{a}_{t-1} & \hat{a}_{t-1}\hat{a}_{t-2} & \cdots & \hat{a}_{t-1}\hat{a}_{t-q} \\ \hat{a}_{t-2}\hat{a}_{t-1} & \hat{a}_{t-2}\hat{a}_{t-2} & \cdots & \hat{a}_{t-2}\hat{a}_{t-q} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \hat{a}_{t-q}\hat{a}_{t-1} & \hat{a}_{t-q}\hat{a}_{t-2} & \cdots & \hat{a}_{t-q}\hat{a}_{t-q} \end{bmatrix} \theta$$

Aplicando o \sum_t

$$= \theta' \begin{bmatrix} \sum_t \hat{a}_{t-1}\hat{a}_{t-1} & \sum_t \hat{a}_{t-1}\hat{a}_{t-2} & \cdots & \sum_t \hat{a}_{t-1}\hat{a}_{t-q} \\ \sum_t \hat{a}_{t-2}\hat{a}_{t-1} & \sum_t \hat{a}_{t-2}\hat{a}_{t-2} & \cdots & \sum_t \hat{a}_{t-2}\hat{a}_{t-q} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \sum_t \hat{a}_{t-q}\hat{a}_{t-1} & \sum_t \hat{a}_{t-q}\hat{a}_{t-2} & \cdots & \sum_t \hat{a}_{t-q}\hat{a}_{t-q} \end{bmatrix} \theta = \theta' C \theta$$

Tem-se, então, que a equação (i) pode ser reescrita como

$$\sum_t Z_t' Z_t = -P_1' \theta + P_2' \theta - \theta' P_1 + \theta' P_2 + \theta' C \theta$$

$$(ii) \quad \sum_t Z_t' U_t \beta = \sum_t (y_t - y' \phi - \hat{a}' \theta) (X_H' - \phi' X_P) \beta$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_t [y_t' X_H' \beta - y_t' \phi' X_P \beta - \phi' y X_H' \beta + \phi' y \phi' X_P \beta - \\
&\quad \theta' \hat{\alpha} X_H' \beta + \theta' \hat{\alpha} \phi' X_P \beta] \\
&= \sum_t [-\theta' \hat{\alpha} X_H' \beta + \theta' \hat{\alpha} \phi' X_P \beta] \\
&= -\theta' \sum_t \hat{\alpha} X_H' \beta + \theta' \sum_t \hat{\alpha} \phi' X_P \beta \tag{45}
\end{aligned}$$

Resolvendo o primeiro termo da equação (45)

$$-\theta' \sum_t \hat{\alpha} X_H' \beta =$$

$$= -\theta' \begin{bmatrix} \hat{\alpha}_{t-1} \\ \hat{\alpha}_{t-2} \\ \vdots \\ \hat{\alpha}_{t-q} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \xi_{t,1} & \xi_{t,2} & \dots & \xi_{t,m} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \vdots \\ \beta_m \end{bmatrix}$$

$$= -\theta' \begin{bmatrix} \hat{\alpha}_{t-1} \\ \hat{\alpha}_{t-2} \\ \vdots \\ \hat{\alpha}_{t-q} \end{bmatrix} \left[\beta_1 \xi_{t,1} + \beta_2 \xi_{t,2} + \dots + \beta_m \xi_{t,m} \right]$$

$$= -\theta' \begin{bmatrix} \hat{a}_{t-1} \\ \hat{a}_{t-2} \\ \vdots \\ \hat{a}_{t-q} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^m \beta_i \xi_{t,i} \\ \sum_{i=1}^m \beta_i \xi_{t,i} \\ \vdots \\ \sum_{i=1}^m \beta_i \xi_{t,i} \end{bmatrix} = -\theta' \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^m \beta_i \hat{a}_{t-1} \xi_{t,i} \\ \sum_{i=1}^m \beta_i \hat{a}_{t-2} \xi_{t,i} \\ \vdots \\ \sum_{i=1}^m \beta_i \hat{a}_{t-q} \xi_{t,i} \end{bmatrix}$$

Aplicando \sum_t

$$= -\theta' \begin{bmatrix} \sum_t \sum_{i=1}^m \beta_i \hat{a}_{t-1} \xi_{t,i} \\ \sum_t \sum_{i=1}^m \beta_i \hat{a}_{t-2} \xi_{t,i} \\ \vdots \\ \sum_t \sum_{i=1}^m \beta_i \hat{a}_{t-q} \xi_{t,i} \end{bmatrix} = -\theta' P_3$$

R

Resolvendo o segundo termo da equação (45)

$$= \theta' \sum_t \hat{a} \phi' X_p \beta$$

$$= \theta' \begin{bmatrix} \hat{a}_{t-1} \\ \hat{a}_{t-2} \\ \vdots \\ \hat{a}_{t-q} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \phi_1 & \phi_2 & \cdots & \phi_p \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \xi_{t-1,1} & \xi_{t-1,2} & \cdots & \xi_{t-1,m} \\ \xi_{t-2,1} & \xi_{t-2,2} & \cdots & \xi_{t-2,m} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ \xi_{t-p,1} & \xi_{t-p,2} & \cdots & \xi_{t-p,m} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \vdots \\ \beta_m \end{bmatrix}$$

$$= \theta' \begin{bmatrix} \hat{a}_{t-1} \\ \hat{a}_{t-2} \\ \vdots \\ \hat{a}_{t-q} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \phi_1 & \phi_2 & \dots & \phi_p \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \beta_1 \xi_{t-1,1} + \beta_2 \xi_{t-1,2} + \dots + \beta_m \xi_{t-1,m} \\ \beta_1 \xi_{t-2,1} + \beta_2 \xi_{t-2,2} + \dots + \beta_m \xi_{t-2,m} \\ \vdots \\ \beta_1 \xi_{t-p,1} + \beta_2 \xi_{t-p,2} + \dots + \beta_m \xi_{t-p,m} \end{bmatrix}$$

$$= \theta' \begin{bmatrix} \hat{a}_{t-1} \\ \hat{a}_{t-2} \\ \vdots \\ \hat{a}_{t-q} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^p \beta_i \phi_j \xi_{t-j,i} \end{bmatrix}$$

$$= \theta' \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^p \beta_i \phi_j \hat{a}_{t-1} \xi_{t-j,i} \\ \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^p \beta_i \phi_j \hat{a}_{t-2} \xi_{t-j,i} \\ \vdots \\ \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^p \beta_i \phi_j \hat{a}_{t-q} \xi_{t-j,i} \end{bmatrix}$$

Aplicando \sum_t

$$= \theta' \begin{bmatrix} \sum_t \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^p \beta_i \phi_j \hat{a}_{t-1} \xi_{t-j,i} \\ \sum_t \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^p \beta_i \phi_j \hat{a}_{t-2} \xi_{t-j,i} \\ \vdots \\ \sum_t \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^p \beta_i \phi_j \hat{a}_{t-q} \xi_{t-j,i} \end{bmatrix} = \theta' P_4$$

Tem-se, então, que a equação (ii) pode ser reescrita como

$$\sum_t Z_t' U_t' \beta = -\theta' P_3 + \theta' P_4$$

(iii) $\sum_t \beta' Z_t U_t$, que é igual a equação (ii) transposta, então

$$\sum_t \beta' Z_t U_t = -P_3' \theta + P_4' \theta$$

$$(iv) \quad \beta' \left(\sum_t U_t U_t' \right) \beta = \beta' \left(\sum_t (X_h' - \phi' X_p)' (X_h' - \phi' X_p) \right) \beta$$

a equação (iv) não tem nenhum termo que envolve o parâmetro θ .

Com isto, a equação (43) pode ser escrita como

$$P(\theta | \phi, \beta, \tau, S_n) \propto \exp \left\{ -\frac{\tau}{2} \left[-P_1' \theta + P_2' \theta - \theta' P_1 + \theta' P_2 + \theta' C \theta \right. \right. \\ \left. \left. - (-\theta' P_3 + \theta' P_4) - (-P_3' \theta + P_4' \theta) \right] \right\} \quad (46)$$

Colocando θ e θ' em evidência, tem-se que a equação (46) fica

$$P(\theta / \phi, \beta, \tau, S_x) \propto \exp \left\{ -\frac{\tau}{2} [-P' \theta - \theta' P + \theta' C \theta] \right\}, \quad (47)$$

onde

$$P = P_1 - P_2 - P_3 + P_4$$

Completando o quadrado em θ na equação (47), tem-se

$$P(\theta / \phi, \beta, \tau, S_n) \propto \exp \left\{ -\frac{\tau}{2} (\theta - C^{-1} P)' C (\theta - C^{-1} P) \right\}$$

Portanto,

$$\theta / \phi, \beta, \tau, S_n \sim \text{Normal}(C^{-1} P, \tau^{-1} C^{-1}).$$

Anexo A3

Distribuição a Posteriori Condicional de β , dado que todos os outros parâmetros são conhecidos

A distribuição a posteriori condicional de β , dado que ϕ , θ , τ e S_n são conhecidos, foi obtida da equação

$$P(\phi, \theta, \beta, \tau / S_n) \propto \tau^{\frac{n-p}{2}-1} \exp \left\{ -\frac{\tau}{2} \sum_{t=p+1}^n (Z_t - U_t' \beta)' (Z_t - U_t' \beta) \right\}.$$

Para os cálculos abaixo, foram considerados somente os termos em que o β está envolvido; então, tem-se

$$P(\theta / \phi, \beta, \tau, S_n) \propto \exp \left\{ -\frac{\tau}{2} \sum_{t=p+1}^n (Z_t - U_t' \beta)' (Z_t - U_t' \beta) \right\} \quad (48)$$

desenvolvendo a equação (48)

$$P(\theta / \phi, \beta, \tau, S_n) \propto \exp \left\{ -\frac{\tau}{2} \sum_{t=p+1}^n (-Z_t' U_t' \beta - \beta' U_t Z_t + \beta' U_t U_t' \beta) \right\},$$

que pode ser reescrita como

$$\propto \exp \left\{ -\frac{\tau}{2} \left[-\left(\sum_{t=p+1}^n Z_t' U_t' \right) \beta - \beta' \left(\sum_{t=p+1}^n U_t Z_t \right) + \beta' \left(\sum_{t=p+1}^n U_t U_t' \right) \beta \right] \right\} \quad (49)$$

Sendo Z_t e U_t' definidos em (13) e (14) respectivamente. Para os cálculos abaixo, $\sum_{t=p+1}^n$ foi representado por \sum_t .

Cada termos da equação (49) foi resolvido separadamente então

$$\begin{aligned} (i) \quad \sum_t Z_t' U_t' \beta &= \sum_t (y_t - y' \phi - \hat{\alpha}' \theta)' (X_H' - \phi' X_P) \beta \\ &= \sum_t [y_t' X_H' \beta - y_t' \phi' X_P \beta - \phi' y X_H' \beta + \phi' y \phi' X_P \beta - \\ &\quad \theta' \hat{\alpha} X_H' \beta + \theta' \hat{\alpha} \phi' X_P \beta] \\ &= \left(\sum_t y_t X_H' \right) \beta - \left(\sum_t y_t \phi' X_P \right) \beta - \left(\sum_t \phi' y X_H' \right) \beta + \left(\sum_t \phi' y \phi' X_P \right) \beta - \\ &\quad \left(\sum_t \theta' \hat{\alpha} X_H' \right) \beta + \left(\sum_t \theta' \hat{\alpha} \phi' X_P \right) \beta \end{aligned} \quad (50)$$

Resolvendo o primeiro termo da equação (50)

$$\left(\sum_t y_t X_H' \right) \beta =$$

$$= y_t \begin{bmatrix} \xi_{t,1} & \xi_{t,2} & \cdots & \xi_{t,m} \end{bmatrix} \beta = \begin{bmatrix} y_t \xi_{t,1} & y_t \xi_{t,2} & \cdots & y_t \xi_{t,m} \end{bmatrix} \beta$$

Aplicando \sum_t

$$= \begin{bmatrix} \sum_t y_t \xi_{t,1} & \sum_t y_t \xi_{t,2} & \cdots & \sum_t y_t \xi_{t,m} \end{bmatrix} \beta = A_1' \beta$$

Resolvendo o segundo termo da equação (50)

$$- \left(\sum_t y_t \phi' X_P \right) \beta =$$

$$= -y_t \begin{bmatrix} \phi_1 & \phi_2 & \cdots & \phi_P \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \xi_{t-1,1} & \xi_{t-1,2} & \cdots & \xi_{t-1,m} \\ \xi_{t-2,1} & \xi_{t-2,2} & \cdots & \xi_{t-2,m} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ \xi_{t-p,1} & \xi_{t-p,2} & \cdots & \xi_{t-p,m} \end{bmatrix} \beta$$

$$= -y_t \left[\sum_{i=1}^P \phi_i \xi_{t-i,1} \quad \sum_{i=1}^P \phi_i \xi_{t-i,2} \quad \cdots \quad \sum_{i=1}^P \phi_i \xi_{t-i,m} \right] \beta$$

$$= - \left[\sum_{i=1}^P \phi_i y_t \xi_{t-i,1} \quad \sum_{i=1}^P \phi_i y_t \xi_{t-i,2} \quad \cdots \quad \sum_{i=1}^P \phi_i y_t \xi_{t-i,m} \right] \beta$$

Aplicando \sum_t

$$= - \left[\sum_t \sum_{i=1}^p \phi_i y_t \xi_{t-i,1} \quad \sum_t \sum_{i=1}^p \phi_i y_t \xi_{t-i,2} \quad \cdots \quad \sum_t \sum_{i=1}^p \phi_i y_t \xi_{t-i,m} \right] \beta = -A_2' \beta$$

Resolvendo o terceiro termo da equação (50)

$$- \left(\sum_t \phi' y X_H' \right) \beta =$$

$$= - \begin{bmatrix} \phi_1 & \phi_2 & \cdots & \phi_p \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_{t-1} \\ y_{t-2} \\ \vdots \\ y_{t-p} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \xi_{t,1} & \xi_{t,2} & \cdots & \xi_{t,m} \end{bmatrix} \beta$$

$$= - \begin{bmatrix} \phi_1 & \phi_2 & \cdots & \phi_p \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_{t-1} \xi_{t,1} & y_{t-1} \xi_{t,2} & \cdots & y_{t-1} \xi_{t,m} \\ y_{t-2} \xi_{t,1} & y_{t-2} \xi_{t,2} & \cdots & y_{t-2} \xi_{t,m} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ y_{t-p} \xi_{t,1} & y_{t-p} \xi_{t,2} & \cdots & y_{t-p} \xi_{t,m} \end{bmatrix} \beta$$

$$= - \left[\sum_{i=1}^p \phi_i y_{t-i} \xi_{t,1} \quad \sum_{i=1}^p \phi_i y_{t-i} \xi_{t,2} \quad \cdots \quad \sum_{i=1}^p \phi_i y_{t-i} \xi_{t,m} \right] \beta$$

Aplicando \sum_t

$$= - \left[\sum_t \sum_{i=1}^p \phi_i y_{t-i} \xi_{t,1} \quad \sum_t \sum_{i=1}^p \phi_i y_{t-i} \xi_{t,2} \quad \cdots \quad \sum_t \sum_{i=1}^p \phi_i y_{t-i} \xi_{t,m} \right] \beta = -A_3' \beta$$

Resolvendo o quarto termo da equação (50)

$$\left(\sum_t \phi' y \phi' X_p \right) \beta =$$

$$= \begin{bmatrix} \phi_1 & \phi_2 & \dots & \phi_p \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_{t-1} \\ y_{t-2} \\ \vdots \\ y_{t-p} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \phi_1 & \phi_2 & \dots & \phi_p \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \xi_{t-1,1} & \xi_{t-1,2} & \dots & \xi_{t-1,m} \\ \xi_{t-2,1} & \xi_{t-2,2} & \dots & \xi_{t-2,m} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ \xi_{t-p,1} & \xi_{t-p,2} & \dots & \xi_{t-p,m} \end{bmatrix} \beta$$

$$= \left[\sum_{i=1}^p \phi_i y_{t-i} \right] \left[\sum_{j=1}^p \phi_j \xi_{t-j,1} \quad \sum_{j=1}^p \phi_j \xi_{t-j,2} \quad \dots \quad \sum_{j=1}^p \phi_j \xi_{t-j,m} \right] \beta$$

$$= \left[\sum_{i=1}^p \sum_{j=1}^p \phi_i \phi_j y_{t-i} \xi_{t-j,1} \quad \sum_{i=1}^p \sum_{j=1}^p \phi_i \phi_j y_{t-i} \xi_{t-j,2} \quad \dots \quad \sum_{i=1}^p \sum_{j=1}^p \phi_i \phi_j y_{t-i} \xi_{t-j,m} \right] \beta$$

Aplicando \sum_t

$$= \left[\sum_t \sum_{i=1}^p \sum_{j=1}^p \phi_i \phi_j y_{t-i} \xi_{t-j,1} \quad \sum_t \sum_{i=1}^p \sum_{j=1}^p \phi_i \phi_j y_{t-i} \xi_{t-j,2} \quad \dots \quad \sum_t \sum_{i=1}^p \sum_{j=1}^p \phi_i \phi_j y_{t-i} \xi_{t-j,m} \right] \beta$$

$$= A_4' \beta$$

Resolvendo o quinto termo da equação (50)

$$-\left(\sum_t \theta' \hat{a} X_H'\right) \beta =$$

$$= -\begin{bmatrix} \theta_1 & \theta_2 & \dots & \theta_q \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{a}_{t-1} \\ \hat{a}_{t-2} \\ \vdots \\ \hat{a}_{t-q} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \xi_{t,1} & \xi_{t,2} & \dots & \xi_{t,m} \end{bmatrix} \beta$$

$$= -\begin{bmatrix} \theta_1 & \theta_2 & \dots & \theta_q \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{a}_{t-1} \xi_{t,1} & \hat{a}_{t-1} \xi_{t,2} & \hat{a}_{t-1} \xi_{t,m} \\ \hat{a}_{t-2} \xi_{t,1} & \hat{a}_{t-2} \xi_{t,2} & \hat{a}_{t-2} \xi_{t,m} \\ \hat{a}_{t-p} \xi_{t,1} & \hat{a}_{t-p} \xi_{t,2} & \hat{a}_{t-p} \xi_{t,m} \end{bmatrix} \beta$$

$$= -\left[\sum_{i=1}^q \theta_i \hat{a}_{t-i} \xi_{t,1} \quad \sum_{i=1}^q \theta_i \hat{a}_{t-i} \xi_{t,2} \quad \dots \quad \sum_{i=1}^q \theta_i \hat{a}_{t-i} \xi_{t,m} \right] \beta$$

Aplicando \sum_t

$$= -\left[\sum_t \sum_{i=1}^q \theta_i \hat{a}_{t-i} \xi_{t,1} \quad \sum_t \sum_{i=1}^q \theta_i \hat{a}_{t-i} \xi_{t,2} \quad \dots \quad \sum_t \sum_{i=1}^q \theta_i \hat{a}_{t-i} \xi_{t,m} \right] \beta = -A_5' \beta$$

Resolvendo o sexto termo da equação (50)

$$\left(\sum_t \theta' \hat{a} \phi' X_p\right) \beta =$$

$$\begin{aligned}
&= [\theta_1 \quad \theta_2 \quad \dots \quad \theta_q] \begin{bmatrix} \hat{a}_{t-1} \\ \hat{a}_{t-2} \\ \vdots \\ \hat{a}_{t-q} \end{bmatrix} [\phi_1 \quad \phi_2 \quad \dots \quad \phi_p] \begin{bmatrix} \xi_{t-1,1} & \xi_{t-1,2} & \xi_{t-1,m} \\ \xi_{t-2,1} & \xi_{t-2,2} & \xi_{t-2,m} \\ \xi_{t-p,1} & \xi_{t-p,2} & \xi_{t-p,m} \end{bmatrix} \beta \\
&= \left[\sum_{i=1}^q \theta_i \hat{a}_{t-i} \right] \left[\sum_{j=1}^p \phi_j \xi_{t-j,1} \quad \sum_{j=1}^p \phi_j \xi_{t-j,2} \quad \dots \quad \sum_{j=1}^p \phi_j \xi_{t-j,m} \right] \beta \\
&= \left[\sum_{i=1}^q \sum_{j=1}^p \theta_i \phi_j \hat{a}_{t-i} \xi_{t-j,1} \quad \sum_{i=1}^q \sum_{j=1}^p \theta_i \phi_j \hat{a}_{t-i} \xi_{t-j,2} \quad \dots \quad \sum_{i=1}^q \sum_{j=1}^p \theta_i \phi_j \hat{a}_{t-i} \xi_{t-j,m} \right] \beta
\end{aligned}$$

Aplicando \sum_t

$$= \left[\sum_y \sum_{i=1}^q \sum_{j=1}^p \theta_i \phi_j \hat{a}_{t-i} \xi_{t-j,1} \quad \sum_t \sum_{i=1}^q \sum_{j=1}^p \theta_i \phi_j \hat{a}_{t-i} \xi_{t-j,2} \quad \dots \quad \sum_t \sum_{i=1}^q \sum_{j=1}^p \theta_i \phi_j \hat{a}_{t-i} \xi_{t-j,m} \right] \beta$$

Tem-se, então, que a equação (i) pode ser reescrita como

$$\left(\sum_t Z_t' U_t' \right) \beta = A_1' \beta - A_2' \beta - A_3' \beta + A_4' \beta - A_5' \beta + A_6' \beta$$

Colocando β em evidência, tem-se

$$\left(\sum_t Z_t' U_t' \right) \beta = A' \beta,$$

onde

$$A' = A_1' - A_2' - A_3' + A_4' - A_5' + A_6'$$

(ii) $\sum_t \beta' Z_t U_t$, que é igual à equação (i) transposta, então

$$\beta' (\sum_t Z_t U_t) = \beta' A$$

$$\begin{aligned} \text{(iii)} \quad \beta' \left(\sum_t U_t U_t' \right) \beta &= \beta' \left(\sum_t (X_H' - \phi' X_P)' (X_H' - \phi' X_P) \right) \beta \\ &= \beta' \left(\sum_t X_H X_H' \right) \beta - \beta' \left(\sum_t X_H \phi' X_P \right) \beta - \beta' \left(\sum_t X_P' \phi X_H' \right) \beta + \\ &\quad \beta' \left(\sum_t X_P' \phi \phi' X_P \right) \beta \end{aligned}$$

(51)

Resolvendo o primeiro termo da equação (51)

$$\beta' \left(\sum_t X_H X_H' \right) \beta =$$

$$= \beta' \begin{bmatrix} \xi_{t,1} \\ \xi_{t,2} \\ \vdots \\ \xi_{t,m} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \xi_{t,1} & \xi_{t,2} & \cdots & \xi_{t,m} \end{bmatrix} \beta$$

$$= \beta' \begin{bmatrix} \xi_{t,1}\xi_{t,1} & \xi_{t,1}\xi_{t,2} & \cdots & \xi_{t,1}\xi_{t,m} \\ \xi_{t,2}\xi_{t,1} & \xi_{t,2}\xi_{t,2} & \cdots & \xi_{t,2}\xi_{t,m} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ \xi_{t,m}\xi_{t,1} & \xi_{t,m}\xi_{t,2} & \cdots & \xi_{t,p}\xi_{t,m} \end{bmatrix} \beta$$

Aplicando \sum_t

$$= \beta' \begin{bmatrix} \sum_t \xi_{t,1}\xi_{t,1} & \sum_t \xi_{t,1}\xi_{t,2} & \cdots & \sum_t \xi_{t,1}\xi_{t,m} \\ \sum_t \xi_{t,2}\xi_{t,1} & \sum_t \xi_{t,2}\xi_{t,2} & \cdots & \sum_t \xi_{t,2}\xi_{t,m} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ \sum_t \xi_{t,m}\xi_{t,1} & \sum_t \xi_{t,m}\xi_{t,2} & \cdots & \sum_t \xi_{t,p}\xi_{t,m} \end{bmatrix} \beta = \beta' B_1 \beta$$

Resolvendo o segundo termo da equação (51)

$$- \beta' \left(\sum_t X_H \phi' X_P \right) \beta =$$

$$= -\beta' \begin{bmatrix} \xi_{t,1} \\ \xi_{t,2} \\ \vdots \\ \xi_{t,m} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \phi_1 & \phi_2 & \cdots & \phi_p \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \xi_{t-1,1} & \xi_{t-1,2} & \cdots & \xi_{t-1,m} \\ \xi_{t-2,1} & \xi_{t-2,2} & \cdots & \xi_{t-2,m} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ \xi_{t-p,1} & \xi_{t-p,2} & \cdots & \xi_{t-p,m} \end{bmatrix} \beta$$

$$\begin{aligned}
&= -\beta' \begin{bmatrix} \xi_{t,1} \\ \xi_{t,2} \\ \vdots \\ \xi_{t,m} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^p \phi_i \xi_{t-i,1} & \sum_{i=1}^p \phi_i \xi_{t-i,2} & \cdots & \sum_{i=1}^p \phi_i \xi_{t-i,m} \end{bmatrix} \beta \\
&= -\beta' \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^p \phi_i \xi_{t,1} \xi_{t-i,1} & \sum_{i=1}^p \phi_i \xi_{t,1} \xi_{t-i,2} & \cdots & \sum_{i=1}^p \phi_i \xi_{t,1} \xi_{t-i,m} \\ \sum_{i=1}^p \phi_i \xi_{t,2} \xi_{t-i,1} & \sum_{i=1}^p \phi_i \xi_{t,2} \xi_{t-i,2} & \cdots & \sum_{i=1}^p \phi_i \xi_{t,2} \xi_{t-i,m} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ \sum_{i=1}^p \phi_i \xi_{t,m} \xi_{t-i,1} & \sum_{i=1}^p \phi_i \xi_{t,m} \xi_{t-i,2} & \cdots & \sum_{i=1}^p \phi_i \xi_{t,m} \xi_{t-i,m} \end{bmatrix} \beta
\end{aligned}$$

Aplicando \sum_t

$$\begin{aligned}
&= -\beta' \begin{bmatrix} \sum_t \sum_{i=1}^p \phi_i \xi_{t,1} \xi_{t-i,1} & \sum_t \sum_{i=1}^p \phi_i \xi_{t,1} \xi_{t-i,2} & \cdots & \sum_t \sum_{i=1}^p \phi_i \xi_{t,1} \xi_{t-i,m} \\ \sum_t \sum_{i=1}^p \phi_i \xi_{t,2} \xi_{t-i,1} & \sum_t \sum_{i=1}^p \phi_i \xi_{t,2} \xi_{t-i,2} & \cdots & \sum_t \sum_{i=1}^p \phi_i \xi_{t,2} \xi_{t-i,m} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ \sum_t \sum_{i=1}^p \phi_i \xi_{t,m} \xi_{t-i,1} & \sum_t \sum_{i=1}^p \phi_i \xi_{t,m} \xi_{t-i,2} & \cdots & \sum_t \sum_{i=1}^p \phi_i \xi_{t,m} \xi_{t-i,m} \end{bmatrix} \beta
\end{aligned}$$

$$= -\beta' B_2 \beta$$

Resolvendo o terceiro termo da equação (51)

$$-\beta' \left(\sum_t X_P' \phi X_H' \right) \beta = -[\beta' \left(\sum_t X_H \phi' X_P \right) \beta]'$$

Logo

$$-\beta' \left(\sum_t X_p' \phi X_H' \right) \beta = -\beta' B_3 \beta$$

onde $B_3 = B_2'$.

Resolvendo o quarto termo da equação (51)

$$\beta' \left(\sum_t X_p' \phi \phi' X_p \right) \beta =$$

$$= \beta' \begin{bmatrix} \xi_{t-1,1} & \xi_{t-2,1} & \cdots & \xi_{t-p,1} \\ \xi_{t-1,2} & \xi_{t-2,2} & \cdots & \xi_{t-p,2} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ \xi_{t-1,m} & \xi_{t-2,m} & \cdots & \xi_{t-p,m} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \\ \vdots \\ \phi_p \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \phi_1 & \phi_2 & \cdots & \phi_p \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \xi_{t-1,1} & \xi_{t-1,2} & \cdots & \xi_{t-1,m} \\ \xi_{t-2,1} & \xi_{t-2,2} & \cdots & \xi_{t-2,m} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ \xi_{t-p,1} & \xi_{t-p,2} & \cdots & \xi_{t-p,m} \end{bmatrix} \beta$$

$$= \beta' \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^p \phi_i \xi_{t-i,1} \\ \sum_{i=1}^p \phi_i \xi_{t-i,2} \\ \vdots \\ \sum_{i=1}^p \phi_i \xi_{t-i,m} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sum_{j=1}^p \phi_j \xi_{t-j,1} & \sum_{j=1}^p \phi_j \xi_{t-j,2} & \cdots & \sum_{j=1}^p \phi_j \xi_{t-j,m} \end{bmatrix} \beta$$

$$= \beta' \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^p \sum_{j=1}^p \phi_i \phi_j \xi_{t-i,1} \xi_{t-j,1} & \sum_{i=1}^p \sum_{j=1}^p \phi_i \phi_j \xi_{t-i,1} \xi_{t-j,2} & \cdots & \sum_{i=1}^p \sum_{j=1}^p \phi_i \phi_j \xi_{t-i,1} \xi_{t-j,m} \\ \sum_{i=1}^p \sum_{j=1}^p \phi_i \phi_j \xi_{t-i,2} \xi_{t-j,1} & \sum_{i=1}^p \sum_{j=1}^p \phi_i \phi_j \xi_{t-i,2} \xi_{t-j,2} & \cdots & \sum_{i=1}^p \sum_{j=1}^p \phi_i \phi_j \xi_{t-i,2} \xi_{t-j,m} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ \sum_{i=1}^p \sum_{j=1}^p \phi_i \phi_j \xi_{t-i,m} \xi_{t-j,1} & \sum_{i=1}^p \sum_{j=1}^p \phi_i \phi_j \xi_{t-i,m} \xi_{t-j,2} & \cdots & \sum_{i=1}^p \sum_{j=1}^p \phi_i \phi_j \xi_{t-i,m} \xi_{t-j,m} \end{bmatrix} \beta$$

Aplicando \sum_t

$$= \beta' \begin{bmatrix} \sum_t \sum_{i=1}^p \sum_{j=1}^p \phi_i \phi_j \xi_{t-i,1} \xi_{t-j,1} & \sum_t \sum_{i=1}^p \sum_{j=1}^p \phi_i \phi_j \xi_{t-i,1} \xi_{t-j,2} & \cdots & \sum_t \sum_{i=1}^p \sum_{j=1}^p \phi_i \phi_j \xi_{t-i,1} \xi_{t-j,m} \\ \sum_t \sum_{i=1}^p \sum_{j=1}^p \phi_i \phi_j \xi_{t-i,2} \xi_{t-j,1} & \sum_t \sum_{i=1}^p \sum_{j=1}^p \phi_i \phi_j \xi_{t-i,2} \xi_{t-j,2} & \cdots & \sum_t \sum_{i=1}^p \sum_{j=1}^p \phi_i \phi_j \xi_{t-i,2} \xi_{t-j,m} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ \sum_t \sum_{i=1}^p \sum_{j=1}^p \phi_i \phi_j \xi_{t-i,m} \xi_{t-j,1} & \sum_t \sum_{i=1}^p \sum_{j=1}^p \phi_i \phi_j \xi_{t-i,m} \xi_{t-j,2} & \cdots & \sum_t \sum_{i=1}^p \sum_{j=1}^p \phi_i \phi_j \xi_{t-i,m} \xi_{t-j,m} \end{bmatrix} \beta$$

$$= \beta' B_4 \beta$$

Tem-se, então, que a equação (iii) pode ser reescrita como

$$\beta' \left(\sum_t U_t U_t' \right) \beta = \beta' B_1 \beta - \beta' B_2 \beta - \beta' B_3 \beta + \beta' B_4 \beta$$

Colocando β' e β em evidência, tem-se

$$\beta' \left(\sum_t U_t U_t' \right) \beta = \beta' B \beta,$$

onde

$$B = B_1 - B_2 - B_3 + B_4$$

Com isto, a equação (49) pode ser escrita como

$$P(\beta | \phi, \theta, \tau, S_n) \propto \exp\left\{-\frac{\tau}{2}(-A' \beta - \beta' A + \beta' B \beta)\right\} \quad (52)$$

Completando o quadrado em β na equação (52) tem-se

$$P(\beta | \phi, \theta, \tau, S_n) \propto \exp\left\{-\frac{\tau}{2}(\beta - B^{-1}A)' B(\beta - B^{-1}A)\right\}$$

Portanto

$$\beta | \phi, \theta, \tau, S_n \sim \text{Normal}(B^{-1}A, \tau^{-1}B^{-1}).$$

Anexo A4

Distribuição a Posteriori Condicional de τ , dado que todos os outros parâmetros são conhecidos

A distribuição a posteriori condicional de τ , dado que ϕ , θ , β e S_n são conhecidos, foi obtida da equação

$$P(\phi, \theta, \beta, \tau / S_n) \propto \tau^{\frac{n-p}{2}-1} \exp\left\{-\frac{\tau}{2} \sum_{t=p+1}^n (Z_t - U_t' \beta)' (Z_t - U_t' \beta)\right\}$$

Para os cálculos abaixo, foram considerados somente os termos em que o τ está envolvido; então, tem-se

$$P(\tau / \phi, \theta, \beta, S_n) \propto \tau^{\frac{n-p}{2}-1} \exp\left\{-\frac{\tau}{2} \sum_{t=p+1}^n (Z_t - U_t' \beta)' (Z_t - U_t' \beta)\right\} \quad (53)$$

Como podemos observar, a distribuição a posteriori condicional completa do parâmetro τ é facilmente obtida da equação (53); portanto,

$$\tau / \phi, \theta, \beta, S_n \sim \text{Gama} \left(\frac{n-p}{2}, \frac{\sum_{t=p+1}^n (Z_t - U_t' \beta)' (Z_t - U_t' \beta)}{2} \right)$$

- Anexo B1 Distribuição a posteriori condicional completa de β para o modelo de intervenção com erro $MA(q)$ utilizando a priori de Jeffreys.....120
- Anexo B2 Distribuição a posteriori condicional completa de θ para o modelo de intervenção com erro $MA(q)$ utilizando a priori de Jeffreys.....125
- Anexo B3 Distribuição a posteriori condicional completa de τ para o modelo de intervenção com erro $MA(q)$ utilizando a priori de Jeffreys.....131

ANEXO B

A seguir, será apresentado como foram encontradas as distribuições a posteriori condicionais completas de cada parâmetro, para o modelo de intervenção com erro $MA(q)$ utilizando a priori de Jeffreys.

Distribuições a posteriori condicionais completas para o modelo de intervenção com erro $MA(q)$

Considerando a priori de Jeffreys descrita em (10) e a função de verossimilhança aproximada dada por (22), temos a distribuição a posteriori apresentada em (25). Para todos os parâmetros, as distribuições a posteriori condicionais completas foram obtidas a partir da expressão (25).

Anexo B1

Distribuição a Posteriori Condicional de β , dado que todos os outros parâmetros são conhecidos

A distribuição a posteriori condicional de β , dado que θ , τ e S_n são conhecidos, foi obtida da expressão

$$P(\beta, \theta, \tau / S_n) \propto \tau^{\frac{n-1}{2}} \exp \left\{ -\frac{\tau}{2} \sum_{t=1}^n (y_t - X_t' \beta - \sum_{i=1}^q \theta_i B^i \hat{a}_t)' (y_t - X_t' \beta - \sum_{i=1}^q \theta_i B^i \hat{a}_t) \right\}$$

Para os cálculos abaixo foram considerado somente os termos em que o parâmetro β está envolvido, então, tem-se

$$P(\beta / \theta, \tau, S_n) \propto \exp \left\{ -\frac{\tau}{2} \sum_{t=1}^n (y_t - X_t' \beta - \sum_{i=1}^q \theta_i B^i \hat{a}_t)' (y_t - X_t' \beta - \sum_{i=1}^q \theta_i B^i \hat{a}_t) \right\} \quad (54)$$

desenvolvendo a expressão (54)

$$P(\beta/\theta, \tau, S_n) \propto \exp \left\{ -\frac{\tau}{2} \sum_{i=1}^n (-y_i' X_i' \beta - \beta' X_i y_i + \beta' X_i X_i' \beta + \beta' X_i \sum_{i=1}^q \theta_i B^i \hat{\alpha}_i + (\sum_{i=1}^q \theta_i B^i \hat{\alpha}_i)' X_i' \beta) \right\}$$

que pode ser reescrita como

$$P(\beta/\theta, \tau, S_n) \propto \exp \left\{ -\frac{\tau}{2} \left(-\sum_{i=1}^n y_i' X_i' \right) \beta - \beta' \left(\sum_{i=1}^n X_i y_i \right) + \beta' \left(\sum_{i=1}^n X_i X_i' \right) \beta + \beta' \left(\sum_{i=1}^n \left(X_i \sum_{i=1}^q \theta_i B^i \hat{\alpha}_i \right) \right) + \left(\sum_{i=1}^n \left(\sum_{i=1}^q \theta_i B^i \hat{\alpha}_i \right)' X_i' \right) \beta \right\} \quad (55)$$

Para os cálculos abaixo, $\sum_{i=1}^n$ foi representado por \sum_i .

Cada termos da expressão (55) foi resolvido separadamente, então:

$$(i) \quad -\left(\sum_i y_i' X_i' \right) \beta = -y_i \begin{bmatrix} \xi_{i,1} & \xi_{i,2} & \cdots & \xi_{i,m} \end{bmatrix} \beta = - \begin{bmatrix} y_i \xi_{i,1} & y_i \xi_{i,2} & \cdots & y_i \xi_{i,m} \end{bmatrix} \beta$$

aplicando o \sum_i

$$= - \left[\sum_t y_t \xi_{t,1} \quad \sum_t y_t \xi_{t,2} \quad \cdots \quad \sum_t y_t \xi_{t,m} \right] \beta = -A' \beta$$

(ii) $-\beta' (\sum_t X_t y_t)$ é igual à expressão (i) transposta, então

$$-\beta' (\sum_t X_t y_t) = -\beta' A$$

(iii) $\beta' (\sum_t X_t X_t') \beta =$

$$= \beta' \begin{bmatrix} \xi_{t,1} \\ \xi_{t,2} \\ \vdots \\ \xi_{t,m} \end{bmatrix} [\xi_{t,1} \quad \xi_{t,2} \quad \cdots \quad \xi_{t,m}] \beta$$

$$= \beta' \begin{bmatrix} \xi_{t,1} \xi_{t,1} & \xi_{t,1} \xi_{t,2} & \cdots & \xi_{t,1} \xi_{t,m} \\ \xi_{t,2} \xi_{t,1} & \xi_{t,2} \xi_{t,2} & \cdots & \xi_{t,2} \xi_{t,m} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ \xi_{t,m} \xi_{t,1} & \xi_{t,m} \xi_{t,2} & \cdots & \xi_{t,m} \xi_{t,m} \end{bmatrix} \beta$$

Aplicando \sum_t

$$= \beta' \begin{bmatrix} \sum_t \xi_{t,1} \xi_{t,1} & \sum_t \xi_{t,1} \xi_{t,2} & \cdots & \sum_t \xi_{t,1} \xi_{t,m} \\ \sum_t \xi_{t,2} \xi_{t,1} & \sum_t \xi_{t,2} \xi_{t,2} & \cdots & \sum_t \xi_{t,2} \xi_{t,m} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ \sum_t \xi_{t,m} \xi_{t,1} & \sum_t \xi_{t,m} \xi_{t,2} & \cdots & \sum_t \xi_{t,m} \xi_{t,m} \end{bmatrix} \beta = \beta' B \beta$$

$$(iv) \quad \beta' \left(\sum_t (X_t \sum_{i=1}^q \theta_i B^i \hat{a}_t) \right) = \beta' X_t (\theta_1 \hat{a}_{t-1} + \theta_2 \hat{a}_{t-2} + \dots + \theta_q \hat{a}_{t-q})$$

$$= \beta' \begin{bmatrix} \xi_{t,1} \\ \xi_{t,2} \\ \vdots \\ \xi_{t,m} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^q \theta_i \hat{a}_{t-i} \end{bmatrix}$$

$$= \beta' \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^n \xi_{t,1} \theta_i \hat{a}_{t-i} \\ \sum_{i=1}^n \xi_{t,2} \theta_i \hat{a}_{t-i} \\ \vdots \\ \sum_{i=1}^n \xi_{t,m} \theta_i \hat{a}_{t-i} \end{bmatrix}$$

Aplicando o \sum_t

$$= \beta' \begin{bmatrix} \sum_t \sum_{i=1}^n \xi_{t,1} \theta_i \hat{a}_{t-i} \\ \sum_t \sum_{i=1}^n \xi_{t,2} \theta_i \hat{a}_{t-i} \\ \vdots \\ \sum_t \sum_{i=1}^n \xi_{t,m} \theta_i \hat{a}_{t-i} \end{bmatrix} = \beta' C$$

(v) $\left(\sum_t (\sum_{i=1}^q \theta_i B^i \hat{a}_t)' X_t' \right) \beta$ é igual à expressão (iv) transposta, então

$$\left(\sum_t (\sum_{i=1}^q \theta_i B^i \hat{a}_t)' X_t' \right) \beta = C' \beta$$

Com isto, a expressão (55) pode ser escrita como

$$P(\beta/\theta, \tau, S_n) \propto \exp\left\{-\frac{\tau}{2}(-A'\beta - \beta'A + \beta'B\beta + \beta'C + C'\beta)\right\} \quad (56)$$

Colocando β e β' em evidência na expressão (56), tem-se

$$P(\beta/\theta, \tau, S_n) \propto \exp\left\{-\frac{\tau}{2}(-D'\beta - \beta'D + \beta'B\beta)\right\} \quad (57)$$

sendo

$$D = A - C.$$

Completando o quadrado em β na expressão (57), tem-se

$$P(\beta/\theta, \tau, S_n) \propto \exp\left\{-\frac{\tau}{2}(\beta - B^{-1}D)'B(\beta - B^{-1}D)\right\}$$

Portanto,

$$\beta/\theta, \tau, S_n \sim \text{Normal}(B^{-1}D, \tau^{-1}B^{-1}).$$

Anexo B2

Distribuição a Posteriori Condicional de θ , dado que todos os outros parâmetros são conhecidos

A distribuição a posteriori condicional de θ , dado que β , τ e S_n são conhecidos, foi obtida da expressão

$$P(\beta, \theta, \tau / S_n) \propto \tau^{\frac{n}{2}-1} \exp \left\{ -\frac{\tau}{2} \sum_{i=1}^n (y_i - X_i' \beta - \sum_{i=1}^q \theta_i B^i \hat{a}_i)' \right. \\ \left. (y_i - X_i' \beta - \sum_{i=1}^q \theta_i B^i \hat{a}_i) \right\}$$

Para os cálculos abaixo, foram considerado somente os termos em que o parâmetro θ está envolvido; então, tem-se

$$P(\theta / \beta, \tau, S_n) \propto \exp \left\{ -\frac{\tau}{2} \sum_{i=1}^n (y_i - X_i' \beta - \sum_{i=1}^q \theta_i B^i \hat{a}_i)' \right. \\ \left. (y_i - X_i' \beta - \sum_{i=1}^q \theta_i B^i \hat{a}_i) \right\} \quad (58)$$

desenvolvendo a expressão (58)

$$P(\theta | \beta, \tau, S_n) \propto \exp \left\{ -\frac{\tau}{2} \sum_{t=1}^n \left[-y_t' \sum_{i=1}^q \theta_i B^i \hat{a}_t + \beta' X_t \sum_{i=1}^q \theta_i B^i \hat{a}_t - \left(\sum_{i=1}^q \theta_i B^i \hat{a}_t \right)' y_t + \left(\sum_{i=1}^q \theta_i B^i \hat{a}_t \right)' X_t' \beta + \left(\sum_{i=1}^q \theta_i B^i \hat{a}_t \right)' \left(\sum_{i=1}^q \theta_i B^i \hat{a}_t \right) \right] \right\} \quad (59)$$

Para os cálculos abaixo, $\sum_{i=1}^q$ foi representado por \sum_i .

Cada termo da expressão (59) foi resolvido separadamente, então:

$$\begin{aligned} (i) \quad & -y_t' \sum_{i=1}^q \theta_i B^i \hat{a}_t = \\ & = -y_t' [\theta_1 \hat{a}_{t-1} + \theta_2 \hat{a}_{t-2} + \dots + \theta_q \hat{a}_{t-q}] \\ & = -[\theta_1 y_t \hat{a}_{t-1} + \theta_2 y_t \hat{a}_{t-2} + \dots + \theta_q y_t \hat{a}_{t-q}] \end{aligned}$$

$$= -[\theta_1 \quad \theta_2 \quad \dots \quad \theta_q] \begin{bmatrix} \hat{a}_{t-1} y_t \\ \hat{a}_{t-2} y_t \\ \vdots \\ \hat{a}_{t-q} y_t \end{bmatrix} = -\theta' \begin{bmatrix} \hat{a}_{t-1} y_t \\ \hat{a}_{t-2} y_t \\ \vdots \\ \hat{a}_{t-q} y_t \end{bmatrix}$$

aplicando \sum_i

$$= -\theta' \begin{bmatrix} \sum_t \hat{a}_{t-1} y_t \\ \sum_t \hat{a}_{t-2} y_t \\ \vdots \\ \sum_t \hat{a}_{t-q} y_t \end{bmatrix} = -\theta' E$$

$$(ii) \quad \beta' X_t \sum_{i=1}^q \theta_i B^i \hat{a}_t =$$

$$= \beta' \begin{bmatrix} \xi_{t,1} \\ \xi_{t,2} \\ \vdots \\ \xi_{t,m} \end{bmatrix} \left[\sum_{i=1}^q \theta_i B^i \hat{a}_t \right] = [\beta_1 \quad \beta_2 \quad \dots \quad \beta_m] \begin{bmatrix} \xi_{t,1} \\ \xi_{t,2} \\ \vdots \\ \xi_{t,m} \end{bmatrix} \left[\sum_{i=1}^q \theta_i B^i \hat{a}_t \right]$$

$$= [\beta_1 \xi_{t,1} + \beta_2 \xi_{t,2} + \dots + \beta_m \xi_{t,m}] \left[\sum_{i=1}^q \theta_i B^i \hat{a}_t \right]$$

$$= \left[\sum_{j=1}^m \beta_j \xi_{t,j} \right] [\theta_1 \hat{a}_{t-1} + \theta_2 \hat{a}_{t-2} + \dots + \theta_q \hat{a}_{t-q}]$$

$$= \left[\theta_1 \sum_{j=1}^m \beta_j \xi_{t,j} \hat{a}_{t-1} + \theta_2 \sum_{j=1}^m \beta_j \xi_{t,j} \hat{a}_{t-2} + \dots + \theta_q \sum_{j=1}^m \beta_j \xi_{t,j} \hat{a}_{t-q} \right]$$

$$= \begin{bmatrix} \theta_1 & \theta_2 & \dots & \theta_q \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sum_{j=1}^m \beta_j \xi_{t,j} \hat{a}_{t-1} \\ \sum_{j=1}^m \beta_j \xi_{t,j} \hat{a}_{t-2} \\ \vdots \\ \sum_{j=1}^m \beta_j \xi_{t,j} \hat{a}_{t-q} \end{bmatrix} = \theta' \begin{bmatrix} \sum_{j=1}^m \beta_j \xi_{t,j} \hat{a}_{t-1} \\ \sum_{j=1}^m \beta_j \xi_{t,j} \hat{a}_{t-2} \\ \vdots \\ \sum_{j=1}^m \beta_j \xi_{t,j} \hat{a}_{t-q} \end{bmatrix}$$

Aplicando \sum_t

$$= \theta' \begin{bmatrix} \sum_t \sum_{j=1}^m \beta_j \xi_{t,j} \hat{a}_{t-1} \\ \sum_t \sum_{j=1}^m \beta_j \xi_{t,j} \hat{a}_{t-2} \\ \vdots \\ \sum_t \sum_{j=1}^m \beta_j \xi_{t,j} \hat{a}_{t-q} \end{bmatrix} = \theta' F$$

(iii) $-\left(\sum_{i=1}^q \theta_i B^i \hat{a}_{t-1}\right)' y_t$ é igual à expressão (i) transposta, então

$$-\left(\sum_{i=1}^q \theta_i B^i \hat{a}_{t-1}\right)' y_t = -E' \theta$$

(iv) $\left(\sum_{i=1}^q \theta_i B^i \hat{a}_t\right)' X_t' \beta$ é igual à expressão (ii) transposta, então

$$\left(\sum_{i=1}^q \theta_i B^i \hat{a}_t\right)' X_t' \beta = F' \theta$$

$$(v) \quad \left(\sum_{i=1}^q \theta_i B^i \hat{a}_t\right)' \left(\sum_{i=1}^q \theta_i B^i \hat{a}_t\right) =$$

$$= \left[\theta_1 \hat{a}_{t-1} + \theta_2 \hat{a}_{t-2} + \dots + \theta_q \hat{a}_{t-q}\right] \left[\theta_1 \hat{a}_{t-1} + \theta_2 \hat{a}_{t-2} + \dots + \theta_q \hat{a}_{t-q}\right]$$

$$= \begin{bmatrix} \theta_1 & \theta_2 & \dots & \theta_q \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{a}_{t-1} \\ \hat{a}_{t-2} \\ \vdots \\ \hat{a}_{t-q} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{a}_{t-1} & \hat{a}_{t-2} & \dots & \hat{a}_{t-q} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \\ \vdots \\ \theta_q \end{bmatrix}$$

$$= \theta' \begin{bmatrix} \hat{a}_{t-1} \hat{a}_{t-1} & \hat{a}_{t-1} \hat{a}_{t-2} & \dots & \hat{a}_{t-1} \hat{a}_{t-q} \\ \hat{a}_{t-2} \hat{a}_{t-1} & \hat{a}_{t-2} \hat{a}_{t-2} & \dots & \hat{a}_{t-2} \hat{a}_{t-q} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ \hat{a}_{t-q} \hat{a}_{t-1} & \hat{a}_{t-q} \hat{a}_{t-2} & \dots & \hat{a}_{t-q} \hat{a}_{t-q} \end{bmatrix} \theta$$

aplicando \sum_t

$$= \theta' \begin{bmatrix} \sum_t \hat{a}_{t-1} \hat{a}_{t-1} & \sum_t \hat{a}_{t-1} \hat{a}_{t-2} & \dots & \sum_t \hat{a}_{t-1} \hat{a}_{t-q} \\ \sum_t \hat{a}_{t-2} \hat{a}_{t-1} & \sum_t \hat{a}_{t-2} \hat{a}_{t-2} & \dots & \sum_t \hat{a}_{t-2} \hat{a}_{t-q} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ \sum_t \hat{a}_{t-q} \hat{a}_{t-1} & \sum_t \hat{a}_{t-q} \hat{a}_{t-2} & \dots & \sum_t \hat{a}_{t-q} \hat{a}_{t-q} \end{bmatrix} \theta = \theta' G \theta$$

Com isto, a expressão (49) pode ser escrita como

$$P(\theta / \beta, \tau, S_n) \propto \exp \left\{ -\frac{\tau}{2} [-\theta' E + \theta' F - E' \theta + F' \theta + \theta' G \theta] \right\} \quad (60)$$

Colocando θ e θ' em evidência na expressão (60), tem-se

$$P(\theta / \beta, \tau, S_n) \propto \exp \left\{ -\frac{\tau}{2} (-\theta' H - H' \theta + \theta' G \theta) \right\} \quad (61)$$

sendo

$$H = E - F$$

Completando o quadrado em θ na expressão (61), tem-se

$$P(\theta / \beta, \tau, S_n) \propto \exp \left\{ -\frac{\tau}{2} (\theta - G^{-1} H)' (\theta - G^{-1} H) \right\}$$

Portanto,

$$\theta / \beta, \tau, S_n \sim \text{Normal}(G^{-1} H, \tau^{-1} G^{-1}).$$

Anexo B3

Distribuição a Posteriori Condicional de τ , dado que todos os outros parâmetros são conhecidos

A distribuição a posteriori condicional de τ , dado que β , θ e S_n são conhecidos, foi obtida da expressão

$$P(\beta, \theta, \tau / S_n) \propto \tau^{\frac{n}{2}-1} \exp \left\{ -\frac{\tau}{2} \sum_{i=1}^n (y_i - X_i' \beta - \sum_{i=1}^q \theta_i B^i \hat{a}_i)' (y_i - X_i' \beta - \sum_{i=1}^q \theta_i B^i \hat{a}_i) \right\}$$

Para os cálculos abaixo, foram considerado somente os termos em que o parâmetro τ está envolvido; então, tem-se

$$P(\tau / \beta, \theta, S_n) \propto \tau^{\frac{n}{2}-1} \exp \left\{ -\frac{\tau}{2} \sum_{i=1}^n (y_i - X_i' \beta - \sum_{i=1}^q \theta_i B^i \hat{a}_i)' (y_i - X_i' \beta - \sum_{i=1}^q \theta_i B^i \hat{a}_i) \right\}$$

(62)

Como podemos observar, a distribuição a posteriori condicional completa do parâmetro τ é facilmente obtida da expressão (62); portanto,

$$\tau | \beta, \theta, S_n \sim \text{Gamma}\left(\frac{n}{2}, \frac{J}{2}\right)$$

onde

$$J = \sum_{i=1}^n (y_i - X_i' \beta - \sum_{i=1}^q \theta_i B^i \hat{a}_i)' (y_i - X_i' \beta - \sum_{i=1}^q \theta_i B^i \hat{a}_i).$$

- Anexo C1 Distribuição a posteriori condicional completa de β para o modelo de intervenção com erro $MA(q)$ utilizando a priori própria.....135
- Anexo C2 Distribuição a posteriori condicional completa de θ para o modelo de intervenção com erro $MA(q)$ utilizando a priori própria.....138
- Anexo C3 Distribuição a posteriori condicional completa de τ para o modelo de intervenção com erro $MA(q)$ utilizando a priori própria.....141

Anexo C

A seguir, será apresentado como foram encontradas as distribuições a posteriori condicionais completas de cada parâmetro, para o modelo de intervenção com erro $MA(q)$, utilizando a priori própria.

Distribuições a posteriori condicionais completas para o modelo de intervenção com erro $MA(q)$

Considerando a priori própria descrita em (20) e a função de verossimilhança aproximada dada por (22), temos a distribuição a posteriori apresentada em (23). Para todos os parâmetros, as distribuições a posteriori condicionais completas foram obtidas a partir da expressão (23).

Anexo C1

Distribuição a Posteriori Condicional de β , dado que todos os outros parâmetros são conhecidos

A distribuição a posteriori condicional de β , dado que θ , τ e S_n são conhecidos, foi obtida da expressão

$$P(\beta, \theta, \tau / S_n) \propto \tau^{\frac{m+q+2\alpha+n}{2}-1} \exp \left\{ -\frac{\tau}{2} [(\beta - \beta_0(\theta))' p_1 (\beta - \beta_0(\theta)) + (\theta - \theta_0)' p_2 (\theta - \theta_0) + 2k + \sum_{i=1}^n (y_i - X_i' \beta - \sum_{i=1}^q \theta_i B^i \hat{a}_i)' (y_i - X_i' \beta - \sum_{i=1}^q \theta_i B^i \hat{a}_i)] \right\}$$

Para os cálculos abaixo, foram considerado somente os termos em que o parâmetro β está envolvido; então, tem-se

$$P(\beta / \theta, \tau, S_n) \propto \exp \left\{ -\frac{\tau}{2} [(\beta - \beta_0(\theta))' p_1 (\beta - \beta_0(\theta)) + \sum_{i=1}^n (y_i - X_i' \beta - \sum_{i=1}^q \theta_i B^i \hat{a}_i)' (y_i - X_i' \beta - \sum_{i=1}^q \theta_i B^i \hat{a}_i)] \right\} \quad (64)$$

Desenvolvendo $(\beta - \beta_0(\theta))' p_1 (\beta - \beta_0(\theta))$, tem-se

$$(\beta - \beta_0(\theta))' p_1 (\beta - \beta_0(\theta)) = \beta' p_1 \beta - \beta' p_1 \beta_0(\theta) - \beta_0'(\theta) p_1 \beta$$

A expressão $\sum_{i=1}^n (y_i - X_i' \beta - \sum_{i=1}^q \theta_i B^i \hat{a}_i)(y_i - X_i' \beta - \sum_{i=1}^q \theta_i B^i \hat{a}_i)$ já foi desenvolvida no Anexo B1; então, tem-se

$$\sum_{i=1}^n (y_i - X_i' \beta - \sum_{i=1}^q \theta_i B^i \hat{a}_i)(y_i - X_i' \beta - \sum_{i=1}^q \theta_i B^i \hat{a}_i) = -D' \beta - \beta' D + \beta' B \beta$$

portanto, a expressão (64) pode ser reescrita como

$$P(\beta / \theta, \tau, S_n) \propto \exp \left\{ -\frac{\tau}{2} [\beta' p_1 \beta - \beta' p_1 \beta_0(\theta) - \beta_0'(\theta) p_1 \beta - D' \beta - \beta' D + \beta' B \beta] \right\}$$

(65)

Colocando β e β' em evidência na expressão (65), tem-se

$$P(\beta / \theta, \tau, S_n) \propto \exp \left\{ -\frac{\tau}{2} (\beta' L \beta - \beta' T - T' \beta) \right\}$$

(66)

sendo

$$L = (p_1 + B) \text{ e } T = p_1 \beta_0(\theta) + D.$$

Completando o quadrado em β na expressão (66), tem-se

$$P(\beta | \theta, \tau, S_n) \propto \exp \left\{ -\frac{\tau}{2} (\beta - L^{-1}T)' L (\beta - L^{-1}T) \right\}$$

Portanto,

$$\beta | \theta, \tau, S_n \sim \text{Normal}(L^{-1}T, \tau^{-1}L^{-1}).$$

Anexo C2

Distribuição a Posteriori Condicional de θ , dado que todos os outros parâmetros são conhecidos

A distribuição a posteriori condicional de θ , dado que β , τ e S_n são conhecidos, foi obtida da expressão

$$P(\beta, \theta, \tau / S_n) \propto \tau^{\frac{m+q+2\alpha+n}{2}-1} \exp \left\{ -\frac{\tau}{2} [(\beta - \beta_0(\theta))' p_1 (\beta - \beta_0(\theta)) + (\theta - \theta_0)' p_2 (\theta - \theta_0) + 2k + \sum_{i=1}^n (y_i - X_i' \beta - \sum_{i=1}^q \theta_i B^i \hat{a}_i)(y_i - X_i' \beta - \sum_{i=1}^q \theta_i B^i \hat{a}_i)] \right\}$$

Para os cálculos abaixo, foram considerado somente os termos em que o parâmetro θ está envolvido; então, tem-se

$$P(\theta / \beta, \tau, S_n) \propto \exp \left\{ -\frac{\tau}{2} [(\theta - \theta_0)' p_2 (\theta - \theta_0) + \sum_{i=1}^n (y_i - X_i' \beta - \sum_{i=1}^q \theta_i B^i \hat{a}_i)(y_i - X_i' \beta - \sum_{i=1}^q \theta_i B^i \hat{a}_i)] \right\} \quad (68)$$

Desenvolvendo $(\theta - \theta_0)' p_2 (\theta - \theta_0)$, tem se

$$(\theta - \theta_0)' p_2 (\theta - \theta_0) = \theta' p_2 \theta - \theta' p_2 \theta_0 - \theta_0' p_2 \theta$$

A expressão $\sum_{i=1}^n (y_i - X_i' \beta - \sum_{i=1}^q \theta_i B^i \hat{a}_i)' (y_i - X_i' \beta - \sum_{i=1}^q \theta_i B^i \hat{a}_i)$ já foi desenvolvida no Anexo B2; então, tem-se

$$\sum_{i=1}^n (y_i - X_i' \beta - \sum_{i=1}^q \theta_i B^i \hat{a}_i)' (y_i - X_i' \beta - \sum_{i=1}^q \theta_i B^i \hat{a}_i) = -\theta' H - H' \theta + \theta' G \theta$$

portanto, a expressão (68) pode ser reescrita como

$$P(\theta / \beta, \tau, S_n) \propto \exp \left\{ -\frac{\tau}{2} (\theta' p_2 \theta - \theta' p_2 \theta_0 - \theta_0' p_2 \theta - \theta' H - H' \theta + \theta' G \theta) \right\} \quad (69)$$

Colocando θ e θ' em evidência na expressão (69), tem-se

$$P(\theta / \beta, \tau, S_n) \propto \exp \left\{ -\frac{\tau}{2} (\theta' M \theta - \theta' N - N' \theta) \right\} \quad (70)$$

sendo

$$M = p_2 + G \text{ e } N = (p_2 \theta_0 + H).$$

Completando o quadrado em θ na expressão (70), tem-se

$$P(\theta / \beta, \tau, S_n) \propto \exp \left\{ -\frac{\tau}{2} (\theta - M^{-1} N)' (\theta - M^{-1} N) \right\}$$

Portanto,

$$\theta | \beta, \tau, S_n \sim \text{Normal}(M^{-1}N, \tau^{-1}M^{-1}).$$

Anexo C3

Distribuição a Posteriori Condicional de τ , dado que todos os outros parâmetros são conhecidos

A distribuição a posteriori condicional de τ , dado que β , θ e S_n são conhecidos, foi obtida da expressão

$$P(\beta, \theta, \tau / S_n) \propto \tau^{\frac{m+q+2\alpha+n}{2}-1} \exp \left\{ -\frac{\tau}{2} [(\beta - \beta_0(\theta))' p_1 (\beta - \beta_0(\theta)) + (\theta - \theta_0)' p_2 (\theta - \theta_0) + 2k + \sum_{i=1}^n (y_i - X_i' \beta - \sum_{i=1}^q \theta_i B^i \hat{a}_i)' (y_i - X_i' \beta - \sum_{i=1}^q \theta_i B^i \hat{a}_i)] \right\}$$

Para os cálculos abaixo, foram considerado somente os termos em que o parâmetro τ está envolvido; então, tem-se

$$P(\tau / \beta, \theta, S_n) \propto \tau^{\frac{m+q+2\alpha+n}{2}-1} \exp \left\{ -\frac{\tau}{2} [(\beta - \beta_0(\theta))' p_1 (\beta - \beta_0(\theta)) + (\theta - \theta_0)' p_2 (\theta - \theta_0) + 2k + \sum_{i=1}^n (y_i - X_i' \beta - \sum_{i=1}^q \theta_i B^i \hat{a}_i)' (y_i - X_i' \beta - \sum_{i=1}^q \theta_i B^i \hat{a}_i)] \right\} \quad (71)$$

Como podemos observar, a distribuição a posteriori condicional completa do parâmetro τ é facilmente obtida da expressão (71); portanto,

$$\tau / \beta, \theta, S_n \sim \text{Gama}\left(\frac{n}{2}, \frac{J}{2}\right),$$

onde

$$J = \sum_{t=1}^n (y_t - X_t' \beta - \sum_{i=1}^q \theta_i B^i \hat{a}_t)(y_t - X_t' \beta - \sum_{i=1}^q \theta_i B^i \hat{a}_t).$$