



**DISTRIBUIÇÃO DE GUMBEL: ESTUDO DE
MÉTODOS DE ESTIMAÇÃO DOS
PARÂMETROS E AJUSTE AOS DADOS DE
PRECIPITAÇÃO MÁXIMA DE LAVRAS,
MINAS GERAIS**

LUIZ ALBERTO BEIJO

2002

LUIZ ALBERTO BEIJO

**DISTRIBUIÇÃO DE GUMBEL: ESTUDO DE MÉTODOS DE
ESTIMAÇÃO DOS PARÂMETROS E AJUSTE AOS DADOS DE
PRECIPITAÇÃO MÁXIMA DE LAVRAS, MINAS GERAIS**

Dissertação apresentada à Universidade Federal de Lavras, como parte das exigências do Programa de Pós-Graduação em Agronomia, área de concentração em Estatística e Experimentação Agropecuária, para obtenção do título de “Mestre”.

Orientador

Augusto Muniz

**LAVRAS
MINAS GERAIS - BRASIL**

2002

**Ficha Catalográfica Preparada pela Divisão de Processos Técnicos da
Biblioteca Central da UFLA**

Beijo, Luiz Alberto

Distribuição de Gumbel: estudo de métodos de estimação dos parâmetros e ajuste aos dados de precipitação máxima de Lavras, Minas Gerais / Luiz Alberto Beijo. -- Lavras : UFLA, 2002.

91 p. : il.

Orientador: Joel Augusto Muniz.

Dissertação (Mestrado) – UFLA.

Bibliografia.

1. Distribuição de Gumbel. 2. Precipitação máxima. 3. Métodos de estimação. 4. Método dos momentos. 5. Método da máxima verossimilhança. 6. Método de reamostragem Jackknife. I. Universidade Federal de Lavras. II. Título.

CDD-519.532

-551.577

LUIZ ALBERTO BEIJO

**DISTRIBUIÇÃO DE GUMBEL: ESTUDO DE MÉTODOS DE
ESTIMAÇÃO DOS PARÂMETROS E AJUSTE AOS DADOS DE
PRECIPITAÇÃO MÁXIMA DE LAVRAS, MINAS GERAIS**

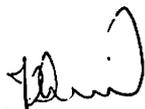
Dissertação apresentada à Universidade Federal de Lavras, como parte das exigências do Programa de Pós-Graduação em Agronomia, área de concentração em Estatística e Experimentação Agropecuária, para obtenção do título de "Mestre".

APROVADA em 20 de dezembro de 2002

Prof. Dr. Pedro Castro Neto UFLA

Prof. Dr. Mário Javier Ferrua Vivanco UFLA

Prof. Dr.ª. Thelma Sáfadi UFLA



Prof. Dr. Joel Augusto Muniz

UFLA

(Orientador)

**LAVRAS
MINAS GERAIS - BRASIL**

À glória de meu Pai Celestial,

Aos meus pais, Sebastião Vicente Beijo e Geraldina Lourenço Beijo,

À minha eterna professora de Matemática, Dona Dorinha,

Aos meus irmãos, Nino e Nina,

Às minhas sobrinhas, Bibi e Vivi,

À Tia Tónica (*in memoriam*),

DEDICO

AGRADECIMENTOS

A DEUS, por tudo.

À Universidade Federal de Lavras (UFLA), em especial ao Departamento de Ciências Exatas (DEX), pela oportunidade de realização do curso.

À Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (Capes) pela bolsa de estudos concedida.

Ao professor Joel Augusto Muniz pela atenção, orientação, amizade e incentivo.

Ao professor Pedro Castro Neto pelo auxílio e sugestões.

Aos professores membros da banca examinadora, Thelma, Mário, Joel e Pedro, pela colaboração e sugestões.

Aos professores do Departamento de Ciências Exatas, pelos conhecimentos transferidos.

A todos os funcionários do Departamento de Ciências Exatas, pela competência e prestabilidade.

Aos meus colegas de curso, Marcelo Cirillo, José Airton, Washington, Otaviano, Lúcia, Waldemar, Élcio, João Marcos, Ana, Alessandra e Ermelino, pelo companheirismo e carinho de verdadeiros irmãos.

Aos colegas da nova turma pela fraternidade.

Aos professores, funcionários e colegas da Escola Estadual Secretário Tristão da Cunha pelos ensinamentos que foram o início da caminhada.

À minha namorada, Natascha, pelo carinho, companheirismo e pela presença e compreensão nos momentos de dificuldades.

Ao meu amigo, Carlos Henrique "Coxete" pelos anos de amizade, sendo verdadeiro irmão.

A todos que direta ou indiretamente contribuíram para a realização deste trabalho.

SUMÁRIO

LISTA DE SÍMBOLOS E ABREVIATURAS.....	i
RESUMO.....	ii
ABSTRACT	iv
1 - INTRODUÇÃO	1
2 - REFERENCIAL TEÓRICO.....	4
2.1 - Teoria dos valores extremos	4
2.2 - Distribuição de Gumbel.....	5
2.2.1- Definições	5
2.2.2 - Estimação dos parâmetros.....	6
2.3 - Métodos de estimação	8
2.3.1 - Método dos momentos.....	9
2.3.2 - Método da máxima verossimilhança	9
2.3.3 - Estimação intervalar	10
2.4 - Métodos de reamostragem: Jackknife e Bootstrap.....	11
2.5 - Precipitação.....	12
2.5.1 - Precipitações máximas.....	13
2.5.2 - Precipitação máxima provável (PMP).....	14
2.6 - Distribuição de Gumbel na análise de precipitações máximas	17
3 - MATERIAL E MÉTODOS.....	20
3.1 - Material.....	20
3.2 - Métodos.....	21
3.2.1 - Definições básicas	21
3.2.1.1 - Função geratriz de momentos.....	23
3.2.2 - Média e variância	25
3.2.2.1 - Média.....	25

3.2.2.2 - Variância	26
3.3 - Inferências na distribuição de Gumbel	27
3.3.1 - Estimação via Método dos Momentos	27
3.3.2 - Estimação de Máxima Verossimilhança	29
3.3.2.1 - Estimação Pontual	30
3.3.2.2 - Intervalos de confiança assintóticos	33
3.3.3 - Intervalos de confiança via Jackknife	35
3.4 - Estimativas de precipitações diárias máximas prováveis	37
3.5 - Ajuste do modelo	38
4 - RESULTADOS E DISCUSSÃO	39
4.1 - Ajuste da distribuição	41
4.2 - Estimativas das precipitações máximas	46
4.3 - Estimativas e intervalos de confiança dos parâmetros u e b	61
5 - CONCLUSÕES	75
6 - REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS	76
7 - ANEXOS	81

LISTA DE SÍMBOLOS E ABREVIATURAS

Ampl.	Amplitude
D	Periodo de Dez dias
E.M.V	Estimador de Máxima Verossimilhança
EPAGRI	Empresa de Pesquisa Agropecuária e Extensão Rural
Estim.	Estimativa
et al.	E outros autores
fdp	Função de densidade de probabilidade
fgm	Função geratriz de momentos
INMET	Instituto Nacional de Meteorologia
LI	Limite inferior
LS	Limite superior
Max	Máximo
Met	Método
Min	Mínimo
mm	Milímetro de lamina d'água
MM	Método dos momentos
MV	Método da Máxima verossimilhança
Parâm.	Parâmetro
PMP	Precipitação Máxima Provável
Q	Periodo de Quinze dias
SAS	Statistical Analysis System
IML	Interactive Matrix Language
WMO	World Meteorological Organization

RESUMO

BEIJO, Luiz Alberto. **Distribuição de Gumbel: estudo de métodos de estimação dos parâmetros e ajuste aos dados de precipitação máxima de Lavras, Minas Gerais.** LAVRAS: UFLA, 2002. 91p. (Dissertação - Mestre)*

O presente trabalho foi desenvolvido com a finalidade de apresentar um estudo detalhado sobre a aplicação da distribuição de Gumbel na análise de precipitações máximas, em especial na análise de dados de precipitação pluviométrica diária máxima de Lavras-MG, e um estudo sobre os métodos de estimação dos parâmetros dessa distribuição, especificamente o método dos momentos e o método da máxima verossimilhança. Foram empregados dados de precipitação pluviométrica diária máxima, expressos em alturas de lâmina d'água (mm), coletados de janeiro de 1914 a dezembro de 2001, na Estação Climatológica Principal de Lavras-MG, que está situada no campus da Universidade Federal de Lavras. As observações foram agrupadas em períodos de um ano, um mês, quinze e dez dias. Em cada período extraiu-se a máxima precipitação pluviométrica diária observada e formaram-se os vetores de precipitações máximas. Utilizando estes vetores, foram determinadas a média das precipitações diárias máximas de cada período, as estimativas dos parâmetros, pelo método dos momentos e pelo método da máxima verossimilhança, as suas variâncias e seus respectivos intervalos de confiança, obtidos via método de reamostragem Jackknife. Utilizando a distribuição de Gumbel com as estimativas dos parâmetros obtidas por ambos os métodos, verificou-se a aderência dos dados pelo teste Kolmogorov-Smirnov a um nível de 5% de significância; em seguida, para os períodos em que o ajuste foi adequado, calculou-se a precipitação pluviométrica diária máxima provável para 17 níveis de probabilidade. Os resultados levaram às seguintes conclusões: o ajuste da distribuição de Gumbel aos dados é mais apropriado nos períodos maiores e nos meses de maiores incidência de precipitações, as estimativas do parâmetro de posição u e do parâmetro escala b são maiores nos períodos mais chuvosos e menores nos meses mais secos; o método da máxima verossimilhança fornece estimativas mais precisas dos parâmetros u e b da distribuição de Gumbel e, conseqüentemente, estimativas mais precisas de precipitações diárias máximas, e as estimativas das precipitações diárias

* Comitê Orientador: Joel Augusto Muniz - UFLA (Orientador), Pedro Castro Neto - UFLA (Co-orientador).

máximas podem ser usadas para auxiliar no planejamento de obras de engenharia hidráulica e agrícola na região de Lavras-MG.

ABSTRACT

BEIJO, Luiz Alberto. **Gumbel distribution: study of methods of estimating of parameters and adjustments to data of maximum rainfall of Lavras, Minas Gerais State, Brazil.** LAVRAS: UFLA, 2002. 91p. (Dissertation - Master Program in Agronomy/Major in Statistics and Agricultural Experimentation)*

This work was developed with the purpose of presenting a thorough study on the application of Gumbel distribution in the study maximum rainfall, in particular the analysis of daily maximum rainfall data at Lavras, Minas Gerais State, Brazil, and a study on the methods of the moments and maximum likelihood method. The daily maximum rainfall data, expressed in water depth heights (mm) collected from January 1914 through 2001 in the Main Climatologic Station of Lavras-MG, which is situated in the campus of the Universidade Federal de Lavras. The observations were grouped into periods of one year, one month, fifteen days and ten days. In each period, the observed daily maximum rainfall was drawn, and the vectors of maximum rainfall were formed. By utilizing these vectors, the mean of the daily maximum rainfalls of each period, the estimates of the parameters by the moments methods and by the maximum likelihood method its variances and its respective confidence intervals obtained via the Jackknife re-sampling method. Using the Gumbel distribution with the estimates of the parameters obtained by both methods, was tested the adherence by Kolmogorov-Smirnov test at the 5% level of significance, and, next, for the periods in which there was the adjustment, the likely daily maximum rainfall for 17 levels of probability was calculated. The results led to the following conclusions: the adjustment of Gumbel distribution to the data is more appropriate in the longest periods and in the months of greatest rainfall incidence, the estimates of the parameter of the u position and scale parameter b are greater in the most rainy periods and less in the driest periods; the maximum likelihood furnishes more precise estimates of the u and b parameters of Gumbel distribution and hence more precise estimates of daily maximum rainfalls. The estimates of the expected daily maximum rainfalls may be used to aid in the planning of hydraulic and agricultural engineering works in the region of Lavras-MG.

* Guidance Committee: Joel Augusto Muniz (Major Professor), Pedro Castro Neto – UFLA.

1 - INTRODUÇÃO

A teoria de valores extremos, em especial a distribuição de Gumbel, tem um papel de grande importância em vários campos da pesquisa, principalmente na estatística aplicada, quando se analisam dados correspondentes a medições físicas.

A distribuição de Gumbel, também conhecida como distribuição assintótica dos extremos do tipo I, distribuição tipo I de Fisher-Tippet, ou dupla exponencial, desenvolvida por Gumbel (1958), é utilizada freqüentemente em estudos de fluxo de água (rios, reservatórios), fenômenos meteorológicos, resistência de materiais, aeronáutica, geologia e engenharia naval entre outros. Esta distribuição se aplica tanto para caso de valores mínimos como de valores máximos, embora as distribuições tenham formas diferentes, e devido a sua enorme aplicabilidade, tem ajudado a solucionar importantes problemas em áreas da Engenharia.

Entre os vários campos da pesquisa em que a distribuição de Gumbel tem sido aplicada, um de grande destaque é o relacionado às pesquisas ligadas a fenômenos meteorológicos, principalmente nos casos em que a variável envolvida no estudo refere-se à precipitação pluviométrica máxima. Nestas pesquisas, os objetivos são de uma forma geral, estimar as precipitações máximas prováveis em um determinado período, estabelecer as curvas de intensidade duração e freqüência ou determinar período de retorno de chuvas máximas.

Sendo a distribuição de Gumbel uma função de probabilidade, necessita que seus parâmetros sejam estimados a partir das amostras. Vários métodos podem ser utilizados para a obtenção dos estimadores dos parâmetros da distribuição de Gumbel, sendo o método dos momentos e o método da máxima

verossimilhança os mais utilizados, com destaque para o primeiro, que tem um alto índice de utilização pela facilidade dos cálculos.

[O estudo da distribuição de dados da precipitação pluviométrica máxima é de grande importância para elaboração de projetos agrícolas e de engenharia hidráulica tais como dimensionamento de canais de irrigação e drenagem, vertedouros de barragens, definição de obras de desvios de cursos d'água, entre outros.]

[Segundo Vieira et al. (1991), o conhecimento da chuva diária máxima provável é importante para trabalhos de conservação do solo, estradas, barragens e drenagem, para cujo dimensionamento adequado é necessário conhecer ocorrências extremas. O fato de os projetos hidráulicos em geral serem concebidos considerando o custo mínimo associado a um risco admissível de falha requer a previsão de grandezas hidrológicas de grande magnitude tais como máximas vazões ou precipitações que podem vir a ocorrer em certa localidade. Assim, as séries de máximos valores são empregadas para ajuste, segundo a lei probabilística que melhor descreva o processo, possibilitando extrapolações.

O conhecimento do comportamento e distribuição das precipitações máximas, na região de Lavras, fornece subsídio para auxiliar no planejamento de obras agrícolas e hidráulicas.]

Tendo em vista a grande importância da distribuição de Gumbel e do conhecimento das possíveis precipitações máximas, utilizaram-se os dados de precipitação máximas de Lavras, coletados no período de 1914 a 2001, com os seguintes objetivos:

- i) Estudar as estimativas dos parâmetros fornecidos pelo método dos momentos e pelo método da máxima verossimilhança, de forma a avaliar os estimadores.

- ii) Estudar o ajustamento da distribuição de Gumbel aos dados agrupados em vários períodos para ambos os métodos.
- iii) Estimar a precipitação pluviométrica diária máxima esperada para períodos de um ano, um mês, dez e quinze dias, em 17 níveis de probabilidade: 2, 4, 5, 10, 20, 25, 30, 40, 50, 60, 70, 75, 80, 90, 95, 96 e 98 por cento, utilizando-se o método dos momentos e o método da máxima verossimilhança para estimação dos parâmetros, e comparar os resultados obtidos pelos dois métodos.

2 - REFERENCIAL TEÓRICO

Inicialmente serão apresentados alguns conceitos e definições sobre a distribuição de Gumbel, procurando destacar suas características e propriedades mais importantes, e depois uma abordagem sobre precipitação.

2.1 - Teoria dos valores extremos

A teoria de valores extremos é uma metodologia que é utilizada para descrever o comportamento dos pontos mais afastados da média de uma distribuição (observações extremas) e tem um papel importante na Estatística Aplicada quando se analisam dados correspondentes a medições físicas. No caso específico do tratamento estatístico de dados meteorológicos tem sido muito usada em estudos que envolvem precipitações máximas, temperaturas mínimas e ventos máximos, entre outros.

De acordo com Souza & Silva (1999), uma das aplicações da teoria dos valores extremos é dada em função da estimabilidade das probabilidades e quantis com razoável precisão nos limites dos valores encontrados dentro da amostra. Porém, a modelagem destes valores corresponde a um ajuste apenas da cauda da distribuição dos dados originais. Desta forma, corre-se o risco de refletir um caráter pouco informativo, mais especificamente para o interior da distribuição para as ocorrências de baixíssima frequência. Uma outra vantagem na teoria dos valores extremos refere-se à extensão dos resultados para outras estatísticas. Nesse aspecto, suponha-se que a teoria dos valores extremos seja para o valor máximo, assim, os resultados poderão ser estendidos para o valor mínimo devido à igualdade $-\text{Max}(-X_1, \dots, -X_n) = \text{Min}(X_1, \dots, X_n)$. Entretanto, é importante reconhecer que devido às particularidades dos valores extremos

(máximo/mínimo) inerentes a cada problema, tem-se que o comportamento de cada um dos valores extremos deve ser estudado separadamente para cada amostra. Devido a este fato, em muitas situações os valores de mínimos poderão apresentar comportamento diferentemente dos máximos.

[De acordo com Vivanco (1994), a teoria dos valores extremos ocupa-se em primeiro lugar da distribuição exata, tanto de mínimos como de máximos, e em segundo lugar das distribuições assintóticas. A condição essencial para ambos os casos é que a distribuição inicial a partir da qual os extremos foram extraídos, e seus parâmetros, permaneçam constantes de uma amostra a outra, ou os câmbios que tem acontecido, ou acontecerão, possam ser determinados ou eliminados. Outra condição é que os extremos observados devem ser extremos de amostras de dados independentes. Segundo o mesmo autor, Gumbel (1954) defende algumas razões para que estas condições não sejam consideradas como críticas. A distribuição dos valores extremos pode ser caracterizada pelos parâmetros clássicos média, mediana e moda, entre as quais a moda exerce um papel muito importante.

2.2 - Distribuição de Gumbel

2.2.1. Definições

A distribuição de Gumbel foi inicialmente apresentada pelo próprio autor como distribuição de dupla exponencial em 1958. A função de probabilidade é definida por meio dos valores de máximos e mínimos. Desta forma, as funções de probabilidade, respectivamente aos valores de máximo e mínimos são denotadas de acordo com as expressões (2.1) e (2.2).

$$f(x) = \frac{1}{b} \exp(-y - e^{-y}); \quad y = \frac{1}{b}(x - u) \quad (2.1)$$

$$f(x) = \frac{1}{b} \exp(y - e^y); \quad y = \frac{1}{b}(x - u). \quad (2.2)$$

Em ambas expressões, o parâmetro u é denominado como parâmetro de posição, cujo domínio é dado por $-\infty < u < \infty$. O parâmetro de escala é representado por b , sendo este restrito a $b > 0$.

De acordo com o mesmo autor, a função geratriz da distribuição de Gumbel é dada por:

$$G(t) = \Gamma(1 - t) \quad (2.3)$$

para valores máximos.

$$G(t) = \Gamma(1 + t) \quad (2.4)$$

para valores mínimos, sendo $\Gamma(\cdot)$ a função gama.

De acordo com Gumbel (1958) e Haan (1977), a média da distribuição dos extremos é definida pelas seguintes expressões.

$$E(X) = u + 0,45005\sigma \quad \text{para valores máximos.} \quad (2.5)$$

$$E(X) = u - 0,45005\sigma \quad \text{para valores mínimos.} \quad (2.6)$$

No caso do desvio padrão, a expressão é única para o caso de valores de máximos e mínimos:

$$\sigma = \frac{\pi}{\sqrt{6}} b \quad (2.7)$$

2.2.2 - Estimação dos parâmetros.

Gumbel (1958) afirma que o parâmetro b pode ser estimado por meio do desvio padrão da amostra de acordo com a expressão (2.8).

$$\hat{b} = \frac{\sqrt{6}}{\pi} s \quad (2.8)$$

O parâmetro u pode ser estimado utilizando-se a média e o desvio padrão amostral, ou seja,

$$\hat{u} = \bar{x} - 0,45005s \quad \text{para valores máximos.} \quad (2.9)$$

$$\hat{u} = \bar{x} + 0,45005s \quad \text{para valores mínimos.} \quad (2.10)$$

Haan (1977) e Assis et al. (1996) apresentam os estimadores (2.9) e (2.10) como estimadores dos momentos. Os mesmos autores definiram os estimadores de máxima verossimilhança para valores máximos dados por (2.11) e (2.12).

$$\hat{b} = \bar{x} - \frac{\sum x_i \exp\left(\frac{-x_i}{\hat{b}}\right)}{\sum \exp\left(\frac{-x_i}{\hat{b}}\right)}, \quad (2.11)$$

$$\hat{u} = -\hat{b} \ln \left[\frac{1}{n} \sum \exp\left(\frac{-x_i}{\hat{b}}\right) \right]. \quad (2.12)$$

Existem atualmente diversas formas de fazer inferências sobre os parâmetros e outras características da Distribuição de Gumbel. Haan (1977), propõe o uso dos estimadores do método dos momentos e do método da máxima verossimilhança para a estimação dos parâmetros da distribuição de Gumbel. Assis et al. (1996) sugerem, além dos dois métodos citados acima o método de regressão e o método de Lieblein, sendo que este último necessita de valores tabelados para a obtenção das estimativas.

Segundo Vivanco (1994), uma boa discussão sobre estimadores lineares na distribuição de Gumbel é feita por Mann et al. (1974). O mesmo autor afirma que Engelhardt & Bain (1977) apresentaram um estudo mais simplificado dos estimadores lineares simples tanto para b como para u , e que outros tipos de estimadores pontuais simples e intervalos de confiança aproximados são dados por Nelson (1982).

Lowery & Nash (1970) compararam os seguintes métodos de estimação da distribuição dupla exponencial: método dos momentos, método da regressão, método de ajuste de Gumbel e método da máxima verossimilhança. Os diferentes métodos foram comparados em termos da eficiência e do viés dos estimadores μ , σ e $X(K)$ (fator de Chow). Os autores concluíram que o método dos momentos é o mais simples de aplicar e virtualmente não viesado, sendo mais eficiente e de maior acurácia que os métodos de regressão e de ajuste de Gumbel. Já sobre o método de máxima verossimilhança, eles concluíram que este é ligeiramente mais eficiente que o método dos momentos, mas pode ser levemente viesado, além de ser extremamente difícil de aplicar, sendo esta última conclusão devida às restrições computacionais da época.

2.3 - Métodos de estimação.

Assumindo X_1, \dots, X_n , uma amostra aleatória proveniente de uma função densidade descrita por $f(., \theta)$, em que θ desconhecido, é um vetor de parâmetros dados por $\theta = (\theta_1, \dots, \theta_k)$, em que k representa um número de parâmetros, os possíveis valores que θ poderá assumir são representados por Θ , que denota o espaço paramétrico. Com base nestas suposições, objetiva-se encontrar funções estatísticas que possam ser usadas como estimadores, de tal forma que estas funções sejam representadas por $\tau_1(\theta_1), \dots, \tau_k(\theta_k)$. Neste âmbito os principais métodos utilizados para obtenção destes estimadores citados por Casella & Berger (1990) e Mood et al. (1974) são os métodos dos momentos e o método da máxima verossimilhança.

Utilizando as mesmas pré-suposições citadas anteriormente ao método dos momentos, define-se a função de verossimilhança por:

$$L(\theta | x) = L(\theta_1, \dots, \theta_k | x_1, \dots, x_n) = \prod_{i=1}^n f(x_i | \theta_1, \dots, \theta_k). \quad (2.14)$$

Definida a função de verossimilhança, o próximo passo é dado pela sua maximização em um ponto $\theta = \hat{\theta}$. Sendo assim, os possíveis candidatos para os valores de θ são dados por:

$$\frac{\partial}{\partial \theta_i} L(\theta | x) = 0, \quad i=1, \dots, k. \quad (2.15)$$

Por questão de simplicidade algébrica é mais conveniente trabalhar com $\ln[L(\theta | x)]$, devido a facilidade na conversão de produtos para somas.

2.3.3 – Estimação intervalar.

Segundo Mood et al. (1974) e Bearzoti (1998), a deficiência observada nos estimadores pontuais é o fato de que a estimação pontual isoladamente fornece uma informação limitada a respeito do parâmetro θ ou $q(\theta)$. A inferência pode ser complementada sempre que possível, com pressuposições acerca de probabilidades de θ ou $q(\theta)$ estarem próximos ou não de suas estimativas pontuais. Isso pode ser feito mediante a construção de intervalos de confiança com probabilidade conhecida de que o valor paramétrico esteja ali contido.

A definição formal do intervalo de confiança é dada por meio das seguintes suposições: Seja $X' = [X_1, X_2, \dots, X_n]$ uma amostra aleatória proveniente de uma população descrita por $f(\cdot)$. Sejam $T_1(x)$ e $T_2(x)$ duas estatísticas que satisfaçam $T_1(x) \leq T_2(x)$, e também, $P[T_1(x) \leq q(\theta) \leq T_2(x)] = \gamma$. O intervalo aleatório $[T_1(x), T_2(x)]$ é chamado de intervalo de confiança para $q(\theta)$ com 100 γ % de probabilidade em que, $T_1(x)$ e $T_2(x)$ indicam respectivamente o limite

inferior e superior do intervalo. A probabilidade γ é chamada coeficiente de confiança do intervalo.

Podem existir vários métodos para obtenção de intervalos de confiança para um determinado parâmetro, todavia a questão é determinar qual é o melhor intervalo. Neste sentido, surge a necessidade de se avaliarem os intervalos de confiança obtidos. Assim, uma das formas para que se avaliem estes intervalos é dada por meio de sua probabilidade de cobertura, conforme mencionado por Casella & Berger (1990). De um modo geral, a probabilidade de cobertura, exceto em casos especiais, é uma função do parâmetro. Assim, não há um valor para considerar, mas um número infinito de valores. O desempenho da probabilidade de cobertura é dado pelo coeficiente de confiança; sendo assim, é comum considerar o ínfimo destas probabilidades como critério para mensurar a cobertura do intervalo. Entretanto, outros critérios poderão ser utilizados, como por exemplo a média das probabilidades de cobertura. No caso de dois intervalos de confiança possuírem a mesma probabilidade de cobertura, conforme exemplo demonstrado por Casella & Berger (1990), o intervalo mais apropriado é aquele que apresenta a menor amplitude.

2.4 - Métodos de reamostragem: Jackknife e Bootstrap

Em muitas situações, torna-se inviável a obtenção de uma expressão explícita para o erro padrão de um estimador. Neste caso, uma alternativa é realizar inferências com base nos processos de reamostragens, os quais segundo Manly (1998), constituem os métodos Bootstrap e Jackknife. Segundo Efron e Tibshirani (1993), o método de Jackknife permite estimar apenas o erro padrão de uma forma empírica, ao passo que o Bootstrap proporciona não só a estimação do erro padrão, mas também a distribuição de amostragem. Computacionalmente, o método de Bootstrap requer um maior esforço. Em

relação ao uso destes métodos em termos de resultados, a diferença é ocasionada pela distribuição das amostras. No caso da distribuição normal, o erro padrão estimado pelo método de Bootstrap é similar ao erro padrão estimado pelo método de Jackknife.

Segundo Manly (1998), o método de Jackknife tem sido largamente usado na Biologia em análise de espécies, genética, evolução, seleção natural e em ecologia comunitária.

✓ 2.5 – Precipitação

A precipitação é entendida em Hidrologia como toda água na forma líquida ou sólida, proveniente do meio atmosférico, que atinge a superfície terrestre. Esta é a maior classe de hidrometeoros, devendo ser distinguida de outras classes tais como a de nuvens, a de nevoeiros, a de orvalho, a de geada, entre outras. Vale ressaltar que os dois últimos tipos de hidrometeoros, orvalho e geada, formam-se junto ao solo, não devendo, portanto, ser confundidos com precipitação (Pinto, 1995).

[A disponibilidade de precipitação numa bacia durante o ano é o fator determinante para quantificar, entre outros fatores, a necessidade de irrigação de culturas e o abastecimento de água doméstico e industrial. A determinação da intensidade da precipitação é importante para o controle de inundação e a erosão do solo. Por sua capacidade de produzir escoamento, a chuva é o tipo de precipitação mais importante para a Hidrologia .]

[As características principais da precipitação são o seu total, duração e distribuições temporal e espacial. O total precipitado não tem significado se não estiver ligado a uma duração.] Por exemplo, 100 mm pode ser pouco em um mês, mas é muito em um dia ou, ainda mais, em uma hora. [A ocorrência da precipitação é um processo aleatório que não permite uma previsão

determinística com grande antecedência. O tratamento dos dados de precipitação para a grande maioria dos problemas hidrológicos é estatístico.

{ Sendo a ocorrência de precipitação um processo aleatório que não permite uma previsão determinística com grande antecedência, estudos das características de precipitação são de grande interesse em Engenharia por sua freqüente aplicação nos projetos relacionados com recursos hídricos (Back, 1996). Dentre as características das precipitações, as de maior interesse são a freqüência e a altura por serem relevantes nos dimensionamentos de obras hidráulicas. }

2.5.1 - Precipitações máximas

{ Segundo Tucci (2001), a precipitação máxima é entendida como a ocorrência extrema com duração, distribuição temporal e espacial crítica para uma área ou bacia hidrográfica. A precipitação pode atuar sobre a erosão do solo, inundações em áreas rurais e urbanas e obras hidráulicas, entre outros. A disponibilidade de longas séries de precipitações é, em geral, muito mais freqüente que a de vazão. O estudo das precipitações máximas é um dos caminhos para se conhecer a vazão de enchente de uma bacia. }

Nobukini (2000) afirma que as alturas máximas de grande duração influenciam mais no que se refere aos assuntos ligados a volume, como dimensionamentos de reservatórios, represamento de água e de terraços em nível., e também influenciam nos problemas relacionados à vazão, como nas previsões de enchentes em bacias hidrográficas. Já as alturas máximas de precipitação de pequena duração têm mais influência nas questões relacionadas à vazão, como no dimensionamento de canais divergentes, canais escoadouros, canais de terraço em desnível e obras do gênero.

As precipitações máximas são retratadas pontualmente pelas curvas de intensidade, duração e frequência (i-d-f) e através da precipitação máxima provável (PMP). A primeira relaciona a duração, a intensidade e o risco de a precipitação ser igualada ou superada. A PMP é definida, segundo WMO (1973), por “a maior coluna pluviométrica, correspondente a uma dada duração, fisicamente possível de ocorrer sobre uma dada área de drenagem em uma dada época do ano”. Este último método é mais utilizado para grandes obras em que o risco de rompimento deve ser mínimo. Os métodos mencionados caracterizam a precipitação máxima pontual, no entanto, as características de sua distribuição temporal e espacial são importantes para a caracterização da vazão na bacia (Tucci, 2001).

2.5.2 – Precipitação máxima provável (PMP)

De acordo com Tucci (2001), a PMP é definida como a quantidade de precipitação que é considerada como o limite superior estatístico (físico) numa dada bacia, para uma determinada duração. Existem controvérsias quanto à existência de um limite superior de precipitação num dado local, como resultante da interação de vários fatores meteorológicos e com base na existência de uma quantidade de massa atmosférica constante ao nível da terra. A PMP pode ser vista não como um limite físico, que pode vir a ocorrer para as condições analisadas, mas como um evento cuja superação está associada a uma probabilidade muito baixa. Banzatto (1973) concluiu, ao analisar distribuições exatas de extremos, que não existe um limite superior para o valor máximo, nem existe um limite inferior para o valor mínimo. Não é possível fixar um limite insuperável, embora um limite superior muito grande deva possuir uma probabilidade muito pequena de ser ultrapassada, o mesmo ocorrendo com o valor mínimo.

Muitas organizações vinculadas à segurança de barragens recomendam explicitamente a PMP para o caso de grandes obras, nas quais o galgamento envolve grandes riscos (Sugai & Fill, 1990). [Os métodos de avaliação da PMP podem ser classificados em duas categorias: a) métodos hidrometeorológicos e b) métodos estatísticos. Dentro dos métodos hidrometeorológicos distinguem-se aqueles baseados na maximização de tormentas severas observadas e os que simulam condições extremas através de modelos de tormentas mais ou menos sofisticados. Quanto aos métodos estatísticos, o enfoque tradicional baseia-se na utilização da equação geral de frequência apresentada por Chow (1964) e Tucci (2001).]

O procedimento mais adequado resulta da consideração de uma série de fatores tais como condições meteorológicas da região, tamanho da bacia, disponibilidade de dados, número e característica das tormentas observadas.

Os dados de eventos extremos apresentam um padrão peculiar de distribuição e as funções probabilísticas acumuladas possuem formas bem caracterizadas. É comum o emprego destas expressões matemáticas na forma parametrizada em relação à média, variância, coeficiente de simetria e outros momentos estatísticos da distribuição. A utilização destas expressões matemáticas facilita a análise estatística dos eventos extremos, como chuvas intensas, já que a determinação da respectiva função pode ser feita a partir de elementos amostrais, com o uso de processos tradicionais como os métodos dos momentos, dos mínimos quadrados ou da máxima verossimilhança (Pinto, 1999).

[Estudando a distribuição dos valores extremos, Gumbel (1958) propôs uma equação para estimar as precipitações máximas prováveis para diversos períodos de retorno. (Entende-se por período de retorno o intervalo médio de tempo a longo prazo ou o número de anos que separam um evento de dimensão conhecida de outro evento com dimensão igual ou superior).]

No caso de períodos de retorno altos, adota-se o procedimento da distribuição de freqüência estimada por lei de probabilidade teórica, possibilitando um cálculo mais preciso da probabilidade. Em geral as distribuições de valores extremos máximos de Gumbel, Log-Normal de dois parâmetros, Log-Normal de três parâmetros, Pearson tipo III e Log-Pearson tipo III têm sido mais utilizadas (Pinto, 1999).

Os métodos estatísticos permitem obter estimativa da PMP e constituem ferramentas de grande utilidade nos casos em que, embora se disponha de suficientes dados de precipitação, os dados climatológicos sejam escassos. Entre os métodos estatísticos propostos, um que tem sido bem aceito é o desenvolvido por Hershfield (1961, 1965), segundo Tucci (2001). Este método é recomendado para se obterem estimativas da PMP em bacias de até 1000 Km² e baseia-se na maximização do fator de recorrência da equação geral de freqüência proposta por Chow (1964).

$$xTr = \bar{X}_n + kTr.S_n, \quad (2.16)$$

em que xTr refere-se à precipitação com período de retorno Tr ; \bar{X}_n e S_n , respectivamente, indicam a média e o desvio padrão da série de N máximos anuais e kTr corresponde ao fator de recorrência ou freqüência, que varia segundo a distribuição de freqüência de valores extremos utilizada.

Em geral, todos os métodos estatísticos para estimar a PMP utilizam distribuições de freqüência assintóticas. Isso equivale a admitir que a probabilidade de excedência da PMP deve tender a zero. De acordo com as distribuições assintóticas exponencial ou de Gumbel, o fator de freqüência kTr tem as seguintes expressões (Tucci, 2001).

$$KTr = \ln(Tr) - 1 \quad (2.17)$$

$$KTr = 0,7797 \cdot \ln(Tr) - 0,45 \quad (2.18)$$

2.6 – Distribuição de Gumbel na análise de precipitações máximas

Sob condições climáticas, em que ocorrem eventos extremos, a distribuição de Gumbel tem se mostrado adequada para descrever estes eventos, principalmente quando se trata de precipitações máximas.

Pfaffstetter (1957), em estudo pioneiro sobre chuvas intensas no Brasil, utilizou séries de valores máximos de precipitações de 98 estações pluviográficas distribuídas em diversas regiões do país, para a construção de curvas de intensidade-duração-freqüência .

Banzatto (1973), com o objetivo de estudar as possíveis relações entre as precipitações máximas prováveis de duração de um dia, com as de 24 horas e com precipitações de menor duração, assim como seus reflexos sobre valores de vazão de enchentes em algumas bacias hidrográficas, procurou estimar as precipitações máximas prováveis com duração de um dia para o estado de São Paulo, optando pelo uso da distribuição de valores extremos proposta por Gumbel.

Estudando o ajustamento da distribuição de Gumbel a dados de precipitação pluviométrica máxima diária coletados no período de 1914 a 1986, na região de Lavras, para o cálculo das precipitações máximas prováveis na estação chuvosa, Gomes et al. (1989) concluíram que os dados das precipitações máximas diárias de chuva ajustaram-se à distribuição de Gumbel em períodos de um ano e um mês, exceto para o mês de julho; em períodos de 10 e 15 dias houve ajustamento do modelo somente na estação chuvosa (Anexo A).

Eltz et al. (1992) analisaram o período de retorno de chuvas em Santa Maria-RS, utilizando o modelo de distribuição de Gumbel. Pinto (1995) analisou a relação entre chuvas intensas de diferentes durações e a chuva com duração de 24 horas para 29 estações pluviométricas distribuídas no estado de Minas Gerais, visando obter fatores de conversão que possibilitem a estimativa de chuvas de

curta duração a partir de informações advindas de pluviômetros, e ajustou as distribuições Gumbel, Log-normal de dois e de três parâmetros, Pearson III e Log- Pearson III, empregando períodos de retorno de 2, 5, 10 e 20 anos. O autor concluiu que as distribuições de Gumbel e Log-normal de dois parâmetros foram as que melhor se ajustaram aos dados observados.

Visando minimizar os riscos assumidos no dimensionamento de obras, Vieira et al. (1994) adotaram o método de Chow-Gumbel para a análise das relações intensidade-duração-freqüência das chuvas intensas registradas em Pindorama-SP e obtiveram uma equação capaz de representá-las e de permitir a previsão para vários períodos de recorrência. Os pluviogramas foram analisados calculando-se as maiores chuvas para cada ano civil na durações de 5, 10, 15, 20, 25, 30, 45, 60, 90 e 120 minutos. Com esses valores, calcularam-se as intensidades máximas de chuvas correspondentes.

Cardoso et al. (1996) estudaram séries anuais de chuvas máximas de “1 dia” obtidas a partir de dados anotados de pluviômetros nas estações meteorológicas da EPAGRI, situadas em Lages e Campos Novos, no Estado de Santa Catarina, durante 30 anos consecutivos. A distribuição de Gumbel foi utilizada para se obterem as alturas de chuvas com períodos de retorno de 2, 5, 10, 15, 20, 25, 50 e 100 anos. Com as alturas de chuvas obtidas, empregou-se o modelo de estimativas de chuvas diárias, encontrando as alturas máximas esperadas para tempo de duração entre 24 horas a 5 minutos e suas respectivas intensidades máximas médias.

Oliveira & Silva (1997) efetuaram um trabalho utilizando as séries máximas anuais pluviométricas das estações Rocado e Pastos Bons, no Estado do Maranhão. Fizeram uma análise das precipitações máximas para determinar os tempos de recorrência através da distribuição de Gumbel e Füller com o objetivo de servir como apoio para projetos de obras hidráulicas. As

pesquisadoras acreditam que tanto a metodologia de Gumbel como a de Füller têm sido muito usadas e procuraram comparar estes dois modelos para verificar qual se ajusta melhor ao dimensionamento de obras hidráulicas. Os resultados entre os dois lugares foram comparados via métodos dos quadrados mínimos (Murray, 1985) para saber qual dos dois métodos era o que melhor se ajustava. Concluiu-se que não existe uma diferenciação discrepante em relação aos dois métodos e que as extrapolações feitas para períodos de retorno superiores a 19 anos conduzem a resultados satisfatórios para utilização do objetivo do estudo.

Vasconcellos (1998) ajustou um modelo para descrever a chuva diária da região de Jaboticabal – SP e obteve, através da distribuição de Gumbel, as curvas intensidade-duração-freqüência pela análise das precipitações máximas observadas utilizando de registros históricos (1956 a 1995) para a região de Jaboticabal. Pinto (1999), utilizando a distribuição de Gumbel, determinou as equações de intensidades-duração-freqüência de precipitação para os estados do Rio de Janeiro e Espírito Santo.

Vários outros autores têm utilizado a distribuição de Gumbel em estudos de precipitações máximas, seja para determinar a precipitação máxima provável, o período de recorrência de chuvas máximas ou as curvas intensidade-duração-freqüência, destacando-se Matos Neto & Fraga (1983), Leopoldo et al. (1984), Vieira et al. (1988), Beltrame et al. (1991), Damé et al. (1993) e Vieira et al. (1998), entre outros .

3 - MATERIAL E MÉTODOS

3.1 - Material

Os dados utilizados no presente estudo foram obtidos a partir dos registros pluviométricos da Estação Climatológica Principal de Lavras-MG, situada no campus da Universidade Federal de Lavras, em Lavras Minas Gerais, em convênio com o Instituto Nacional de Meteorologia (INMET). A Estação Climatológica está situada nas coordenadas geográficas de 21^o14' de latitude Sul, 45^o00' de longitude oeste de Greenwich e 918,8m de altitude média (Brasil, 1992). Segundo a classificação internacional de Koppen (Vianello e Alves, 1991), o clima da região é do tipo Cwa^b, subtropical com chuvas predominantes no verão e tendo o inverno considerado seco. Em Brasil (1992) encontram-se valores médios mensais, no período de 1961 a 1990, de 23,4mm no mês mais seco, 295,8mm no mês mais chuvoso e precipitação total anual de 1529,7mm.

As observações referem-se às precipitações pluviométricas diárias expressas em altura de lâmina d'água (mm), referentes a 88 anos de observação do período compreendido entre janeiro de 1914^c a dezembro de 2001^d, sendo eliminados os períodos do ano que apresentaram falhas nos registros, reduzindo em alguns casos, para 82 anos, permanecendo dentro da faixa recomendada pela Organização Mundial de Meteorologia, que é, segundo Pinto (1999), de 30 anos.

Para o estudo do ajustamento da distribuição de Gumbel aos dados, estes foram agrupados em períodos de 10 e 15 dias, um mês e um ano, sendo que, para os períodos de 10 e 15 dias, o ano foi dividido em 36 e 24 períodos discretos, respectivamente, sendo cada mês dividido em 3 e 2 períodos. Nos meses com 31 dias, o último período para os casos de 10 e 15 dias ficaram com 11 e 16 dias respectivamente, no caso do mês de fevereiro, este período ficou

com um ou dois dias a menos. Para o período de um mês, foram considerados os 12 meses do ano, e o ano foi considerado um período. Extraíndo a máxima precipitação pluviométrica diária observada de cada período, formaram-se os vetores de precipitações máximas. Utilizando estes vetores, foram determinados a média das precipitações máximas de cada período, as estimativas dos parâmetros de distribuição de Gumbel pelo método dos momentos e pelo método da máxima verossimilhança, as variâncias das estimativas dos parâmetros e os intervalos de confiança das estimativas, via método de reamostragem Jackknife.

Utilizando a distribuição de Gumbel com as estimativas dos parâmetros obtidas pelo método dos momentos e pelo método da máxima verossimilhança, calculou-se a precipitação pluviométrica diária máxima provável para 17 níveis de probabilidade: 2, 4, 5, 10, 20, 25, 30, 40, 50, 60, 70, 75, 80, 90, 95, 96 e 98 por cento em cada um dos períodos estudados, sendo que a aderência dos dados foi verificada pelo teste Kolmogorov-Smirnov a um nível de 5% de significância, de acordo com Campos (1979).

3.2 – Métodos

3.2.1 – Definições básicas

Considerando que uma série de variáveis aleatórias X_i seja formada pelos valores máximos de precipitação retirados um de cada período: $Y = \{Y_1, Y_2, \dots, Y_n\}$, onde Y é o espaço amostral constituído de todas as precipitações ocorridas e registradas durante o período “ t ”, a função de densidade de probabilidades (f.d.p) da variável aleatória X é a distribuição de Gumbel para valores máximos, denotada por $f(x;u,b)$, definida como

$$f(x;u,b) = \frac{1}{b} \exp \left\{ -\left(\frac{x-u}{b}\right) - \exp \left[-\left(\frac{x-u}{b}\right) \right] \right\}, -\infty < x < \infty, \quad (3.1)$$

em que u ($-\infty < u < \infty$) é o parâmetro de posição e b ($b > 0$) o parâmetro de escala.

A função de distribuição acumulada da variável aleatória X para valores extremos máximos, denotada por $F(x;u,b)$, que permite obter quaisquer probabilidades acumuladas da variável, é dada por

$$F(x;u,b) = \exp \left\{ -\exp \left[-\left(\frac{x-u}{b}\right) \right] \right\}. \quad (3.2)$$

Prova

Segundo Mood et al. (1974) a função de distribuição acumulada $F(x)$ para o caso de variáveis contínuas é dada pela expressão (3.3)

$$F(x) = \int_{-\infty}^x f(y) dy. \quad (3.3)$$

Aplicando-se (3.1) em (3.3), tem-se,

$$\int_{-\infty}^x \frac{1}{b} \exp \left[-\left(\frac{y-u}{b}\right) \right] \exp \left\{ -\exp \left[-\left(\frac{y-u}{b}\right) \right] \right\} dy.$$

$$\text{Fazendo } t = \exp \left[-\left(\frac{y-u}{b}\right) \right] \Rightarrow \ln t = -\left(\frac{y-u}{b}\right)$$

$$-\ln t = \frac{y-u}{b} \Rightarrow y = u - b \ln(t) \Rightarrow dy = -\frac{b}{t} dt$$

e estudando-se os limites de integração, tem-se que

$$\text{quando } y = x, \quad t = \exp \left[-\left(\frac{x-u}{b}\right) \right],$$

quando $x = \infty, \quad t = \infty$.

Substituindo t e os limites de integração, tem-se

$$\int_{\infty}^{\exp\left[-\left(\frac{x-u}{b}\right)\right]} \frac{1}{b} \exp(\ln t) \exp(-t) \frac{-b}{t} dt = \int_{\exp\left[-\left(\frac{x-u}{b}\right)\right]}^{\infty} t \exp(-t) \frac{1}{t} dt ;$$

logo

$$\left[-\exp(-t)\right]_{\exp\left[-\left(\frac{x-u}{b}\right)\right]}^{\infty} = 0 + \exp\left\{-\exp\left[-\left(\frac{x-u}{b}\right)\right]\right\},$$

e tem-se como resultado

$$\exp\left\{-\exp\left[-\left(\frac{x-u}{b}\right)\right]\right\},$$

conforme (3.2).

3.2.1.1 - Função geratriz de momentos

Se X é uma variável aleatória com distribuição de Gumbel de parâmetros u e b , a sua função geratriz de momentos (f.g.m) denotada por $M_x(t)$ é dada por

$$M_x(t) = e^{ut} \Gamma(1 - bt), \quad (3.4)$$

em que $t < \frac{1}{b}$, $\Gamma(r) = \int_0^{\infty} v^{r-1} e^{-v} dv$, $r > 0$ é a Função Gama.

Prova

A função geratriz de momentos de X , de acordo com Mood et al. (1994), é definida como

$$M_x(t) = E(e^{tx}) = \int_{-\infty}^{\infty} \exp(tx) f(x) dx,$$

e de (3.1) tem-se

$$M_x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \exp(tx) \frac{1}{b} \exp \left\{ -\left(\frac{x-u}{b}\right) - \exp \left[-\left(\frac{x-u}{b}\right) \right] \right\} dx$$

$$\frac{1}{b} \int_{-\infty}^{\infty} \exp(tx) \exp \left[-\left(\frac{x-u}{b}\right) \right] \exp \left\{ -\exp \left[-\left(\frac{x-u}{b}\right) \right] \right\} dx .$$

Fazendo, $y = \exp \left[-\left(\frac{x-u}{b}\right) \right] \Rightarrow \ln y = -\left(\frac{x-u}{b}\right)$

$$\Rightarrow x = u - b \ln(y) \Rightarrow dx = -\frac{b}{y} dy$$

estudando-se os limites de integração, tem-se que quando $x = \infty$, $y = 0$, e quando $x = -\infty$, $y = \infty$.

Substituindo y , os limites de integração e simplificando a integral, obtém-se

$$M_x(t) = \int_{\infty}^0 \frac{1}{b} \exp[t(u - b \ln y)] y \left(\frac{-b}{y}\right) dy$$

$$= - \int_{\infty}^0 \exp(tu) \exp(-tb \ln y) \exp(-y) dy ,$$

$$= \int_0^{\infty} \exp(tu) y^{-tb} \exp(-y) dy = \exp(tu) \int_0^{\infty} y^{-tb} \exp(-y) dy =$$

$$= \exp(tu) \int_0^{\infty} y^{(1-b)-1} \exp(-y) dy ,$$

logo,

$$M_x(t) = \exp(tu) \Gamma(1 - bt) \tag{3.5}$$

Como consequência direta, tem-se que a *função geratriz de momentos da distribuição de Gumbel padrão* ($u=0$ e $b=1$) será dada por

$$M_x(t) = \Gamma(1 - t) . \tag{3.6}$$

3.2.2 - Média e Variância

A partir da f.g.m determinam-se os dois primeiros momentos populacionais, os quais, segundo Mood et al. (1974) e Bearzoti (1998), nos auxiliam a determinar a média e variância de uma distribuição.

A média e a variância da variável aleatória X , na distribuição de Gumbel, serão determinadas a partir de (3.5).

3.2.2.1 - Média

Segundo Bearzoti (1998), o primeiro momento ordinário é muito informativo por que corresponde ao valor médio de uma variável aleatória. Logo, considerando-se a primeira derivada de $M_x(t)$ e quando $t = 0$, ou seja, o primeiro momento ordinário, tem-se na realidade a média aritmética. Para o caso da distribuição de Gumbel, tem-se

$$E(X) = M'_x(t) \Big|_{t=0} = \mu .$$

Calculando-se a primeira derivada de (3.5), tem-se

$$\begin{aligned} E(X) &= \frac{\partial M_x(t)}{\partial t} \Big|_{t=0} = e^{tu} \frac{\partial \Gamma(1-bt)}{\partial(1-bt)} \frac{\partial(1-bt)}{\partial t} + \Gamma(1-bt)e^{tu}u \Big|_{t=0} \\ &= e^{tu} \Gamma'(1-bt)(-b) + \Gamma(1-bt)e^{tu}u \Big|_{t=0} , \end{aligned}$$

utilizando-se as propriedades das funções Gama e Digama (Anexo C), obtém-se

$$= -be^{tu} \Psi(1-bt) \Gamma(1-bt) + ue^{tu} \Gamma(1-bt) \Big|_{t=0} ;$$

aplicando $t = 0$, obtém-se

$$E(X) = be^0 \Psi(1) \Gamma(1) + ue^0 \Gamma(1) = b \Psi(1) \Gamma(1) + u \Gamma(1) = b(-\gamma) + u .$$

Logo,

$$E(X) = b\gamma + u , \tag{3.7}$$

em que $\Psi(r) = \frac{d \log \Gamma(r)}{dr} = \frac{\Gamma'(r)}{\Gamma(r)}$, $r > 0$ é a Função Digama e $\gamma = 0.577215\dots$

é conhecida como a Constante de Euler.

3.2.2.2 - Variância

Segundo Mood et al. (1974), a variância de uma variável aleatória é dada por

$$V(X) = E(X^2) - [E(X)]^2, \quad (3.8)$$

em que $M_2 = E(X^2)$ é o segundo momento ordinário.

Para-se obter o segundo momento ordinário, calcula-se a segunda derivada de (3.5), que é dada por

$$E(X^2) = \frac{\partial^2 M_x(t)}{\partial t^2} \Big|_{t=0} = \frac{\partial [-be^{bt}\Psi(1-bt)\Gamma(1-bt) + ue^{bt}\Gamma(1-bt)]}{\partial t} \Big|_{t=0}.$$

Aplicando $t = 0$ e as propriedades das funções Gama e Digama (Anexo C), obtém-se

$$\begin{aligned} E(X^2) &= -bu\Psi(1)\Gamma(1) - b\Psi'(1)(-b) - b\Psi(1)\Psi(1)\Gamma(1)(-b) + \\ &\quad + u^2\Gamma(1) + u\Psi(1)\Gamma(1)(-b) \\ &= -bu(-\gamma) - b^2 \frac{\pi^2}{6} - b(-\gamma)(-\gamma)(-b) + u^2 + u(-\gamma)(-b), \end{aligned}$$

Logo,

$$E(X^2) = bu\gamma + b^2 \frac{\pi^2}{6} + b^2\gamma^2 + u^2 + u\gamma b. \quad (3.9)$$

Substituindo-se (3.9) em (3.8) e calculando $[E(X)]^2$, tem-se

$$V(X) = bu\gamma + b^2 \frac{\pi^2}{6} + b^2\gamma^2 + u^2 + u\gamma b - (u^2 + 2ub\gamma + b^2\gamma^2)$$

$$= bu\gamma + b^2 \frac{\pi^2}{6} + b^2 \gamma^2 + u^2 + u\gamma b - u^2 - 2ub\gamma - b^2 \gamma^2;$$

simplificando, logo tem-se

$$V(X) = b^2 \frac{\pi^2}{6} = 1,645 b^2 . \quad (3.10)$$

O desvio padrão denotado por $\sigma(X)$ é dado por

$$\sigma(X) = \sqrt{V(X)} = 1,283b . \quad (3.11)$$

3.3 - Inferências na distribuição de Gumbel

Apesar da possibilidade de utilização de vários métodos para se fazerem inferências sobre os parâmetros e outras características da distribuição de Gumbel, Hann (1977) propõe o uso dos estimadores do método dos momentos e do método da máxima verossimilhança, sendo que estes dois últimos serão estudados.

Algumas formas de intervalos de confiança podem ser encontradas em Lawless (1982).

3.3.1 - Estimação via Método dos Momentos

Seja $X = (X_1, X_2, \dots, X_n)$ uma amostra aleatória de tamanho "n", obtida a partir de uma distribuição de Gumbel, cujos parâmetros são dados por: u parâmetro de posição e b parâmetro de escala. Desta forma, a obtenção dos estimadores por meio dos métodos de momentos consistiu em resolver o sistema dado em função dos 2 primeiros momentos amostrais representados pelas equações do sistema (3.12). Segundo Mood et al. (1974), os

estimadores são obtidos substituindo-se os momentos populacionais pelos momentos amostrais.

$$\begin{cases} b\gamma + u = M_1 & (i) \\ bu\gamma + b^2 \frac{\pi^2}{6} + b^2\gamma^2 + u^2 + u\gamma b = M_2 & (ii) \end{cases} \quad (3.12)$$

Resolvendo a segunda equação do sistema (3.12), que foi desenvolvida em (3.9), por simplificação nos cálculos utilizou-se a expressão (3.8), da qual isolou-se o segundo momento, $M_2 = E(X^2)$. Logo,

$$\begin{aligned} E(X^2) &= V(X) + [E(X)]^2 \\ bu\gamma + b^2 \frac{\pi^2}{6} + b^2\gamma^2 + u^2 + u\gamma b &= V(X) + u^2 + 2ub\gamma + b^2\gamma^2. \end{aligned}$$

Simplificando-se e substituindo-se $V(X)$ por seu respectivo estimador amostral s^2 , tem-se

$$s^2 = \hat{b}^2 \frac{\pi^2}{6}.$$

Isolando-se b , obtém-se a equação (3.13), que é o estimador de b pelo método dos momentos.

$$\hat{b} = \frac{\sqrt{6} s}{\pi}. \quad (3.13)$$

Resolvendo a primeira equação do sistema (3.12), que foi desenvolvida em (3.7), tem-se

$$M_1 : E(X) = \gamma b + u = 0,5772b + u.$$

Substituindo-se o $M_1 = E(X)$ por \bar{x} , tem-se

$$\bar{x} = 0,5772\hat{b} + \hat{u} \Rightarrow \hat{u} = \bar{x} - 0,5772\hat{b},$$

e substituindo-se (3.13) na equação acima, obtém-se o estimador dos momentos de u .

$$\hat{u} = \bar{x} - 0,45005s, \quad (3.14)$$

em que \bar{x} e s são respectivamente, as estimativas da média e do desvio padrão amostral.

3.3.2 - Estimação de Máxima Verossimilhança

Segundo Bearzoti (1998), o método da máxima verossimilhança foi introduzido por Fisher em 1941. Trata-se de um processo geral de obtenção de estimadores.

Suponha que $X = (X_1, X_2, \dots, X_n)$ é uma amostra aleatória n , obtida a partir de uma distribuição de Gumbel a f.d.p conjunta de X é dada por

$$f_x(x; u, b) = \prod_{i=1}^n \frac{1}{b} \exp \left\{ - \left(\frac{x_i - u}{b} \right) \exp \left[- \left(\frac{x_i - u}{b} \right) \right] \right\}. \quad (3.15)$$

Considerando-se que (3.1) depende principalmente de u e b , então esta mesma função é chamada Função de Verossimilhança da distribuição de Gumbel e será denotada por $L(u, b)$. Logo,

$$L(u, b) = \frac{1}{b^n} \exp \left\{ \sum_{i=1}^n \left[- \left(\frac{x_i - u}{b} \right) \right] - \sum_{i=1}^n \exp \left[- \left(\frac{x_i - u}{b} \right) \right] \right\}. \quad (3.16)$$

A função Log-Verossimilhança denotada por $\ell(u, b)$ é dada pelo logaritmo neperiano de (3.16), isto é,

$$\begin{aligned} \ell(u, b) &= \ln \left\{ \frac{1}{b^n} \exp \left\{ \sum_{i=1}^n \left[- \left(\frac{x_i - u}{b} \right) \right] - \sum_{i=1}^n \exp \left[- \left(\frac{x_i - u}{b} \right) \right] \right\} \right\} \\ &= \ln b^{-n} + \ln \left\{ \exp \left\{ \sum_{i=1}^n \left[- \left(\frac{x_i - u}{b} \right) \right] - \sum_{i=1}^n \exp \left[- \left(\frac{x_i - u}{b} \right) \right] \right\} \right\} \\ &= -n \ln b + \sum_{i=1}^n \left[- \left(\frac{x_i - u}{b} \right) \right] - \sum_{i=1}^n \exp \left[- \left(\frac{x_i - u}{b} \right) \right]. \quad (3.17) \end{aligned}$$

3.3.2.1 - Estimação Pontual

Os E.M.V., \hat{u} e \hat{b} dos parâmetros u e b , respectivamente, são aqueles valores que maximizam (3.17). Assim, derivando-se parcialmente $\ell(u, b)$ dado em (3.17) em relação a u e b obtém-se:

$$\bullet \frac{\partial \ell(u, b)}{\partial u} = \frac{n}{b} - \frac{1}{b} \sum_{i=1}^n \exp \left[- \left(\frac{x_i - u}{b} \right) \right] \quad (3.18)$$

$$\bullet \frac{\partial \ell(u, b)}{\partial b} = \frac{-n}{b} + \frac{1}{b} \sum_{i=1}^n \left(\frac{x_i - u}{b} \right) - \frac{1}{b} \sum_{i=1}^n \left(\frac{x_i - u}{b} \right) \exp \left[- \left(\frac{x_i - u}{b} \right) \right] \quad (3.19)$$

Resolvendo simultaneamente as seguintes equações,

$$\left. \frac{\partial \ell(u, b)}{\partial u} \right|_{u=\hat{u}, b=\hat{b}} = 0 \text{ e } \left. \frac{\partial \ell(u, b)}{\partial b} \right|_{u=\hat{u}, b=\hat{b}} = 0, \quad (3.20)$$

denominadas Equações de Verossimilhança, tem-se, de (3.18),

$$\frac{n}{b} - \frac{1}{b} \sum_{i=1}^n \exp \left[- \left(\frac{x_i - u}{b} \right) \right] = 0 \Rightarrow n - \exp \left(\frac{\hat{u}}{\hat{b}} \right) \sum_{i=1}^n \exp \left[- \left(\frac{x_i}{\hat{b}} \right) \right] = 0;$$

isolando-se $\exp \left(\frac{\hat{u}}{\hat{b}} \right)$ e aplicando-se a potência (-1) nos dois membros da igualdade.

$$\left[\exp \left(\frac{\hat{u}}{\hat{b}} \right) \right]^{-1} = \left[\frac{n}{\sum_{i=1}^n \exp \left(\frac{-x_i}{\hat{b}} \right)} \right]^{-1}$$

e resolvendo, obtém-se,

$$\exp \left(\frac{\hat{u}}{\hat{b}} \right) = \left[\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \exp \left(\frac{-x_i}{\hat{b}} \right) \right]^{-1} \quad (3.21)$$

Aplicando-se b como potência nos dois membros da igualdade, obtém-se a expressão

$$\exp(\hat{u}) = \left[\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \exp\left(\frac{-x_i}{\hat{b}}\right) \right]^{-b};$$

e aplicando-se logaritmo neperiano, obtém-se o estimador da máxima verossimilhança do parâmetro u , que é dado por

$$\hat{u} = -\hat{b} \ln \left[\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \exp\left(\frac{-x_i}{\hat{b}}\right) \right]. \quad (3.22)$$

Igualando-se a expressão (3.19) a zero, obtém-se,

$$-n + \sum_{i=1}^n \left(\frac{x_i - \hat{u}}{\hat{b}}\right) - \sum_{i=1}^n \left(\frac{x_i - \hat{u}}{\hat{b}}\right) \exp\left[-\left(\frac{x_i - \hat{u}}{\hat{b}}\right)\right] = 0,$$

resolvendo-se os somatórios, tem-se,

$$\begin{aligned} & -n + \sum_{i=1}^n \left(\frac{x_i}{\hat{b}}\right) - \sum_{i=1}^n \left(\frac{\hat{u}}{\hat{b}}\right) - \sum_{i=1}^n \left[\left(\frac{x_i}{\hat{b}}\right) \exp\left(\frac{-x_i}{\hat{b}}\right) \exp\left(\frac{\hat{u}}{\hat{b}}\right)\right] + \\ & + \sum_{i=1}^n \left[\left(\frac{\hat{u}}{\hat{b}}\right) \exp\left(\frac{-x_i}{\hat{b}}\right) \exp\left(\frac{\hat{u}}{\hat{b}}\right)\right] = 0. \end{aligned}$$

Logo,

$$\begin{aligned} & -n + \frac{1}{\hat{b}} \sum_{i=1}^n x_i - \frac{n\hat{u}}{\hat{b}} - \exp\left(\frac{\hat{u}}{\hat{b}}\right) \sum_{i=1}^n \left(\frac{x_i}{\hat{b}}\right) \exp\left(\frac{-x_i}{\hat{b}}\right) + \\ & + \frac{\hat{u}}{\hat{b}} \sum_{i=1}^n \exp\left(\frac{-x_i}{\hat{b}}\right) \exp\left(\frac{\hat{u}}{\hat{b}}\right) = 0. \end{aligned}$$

Substituindo (3.22) na expressão acima, tem-se

$$\begin{aligned} & -n + \frac{1}{\hat{b}} \sum_{i=1}^n x_i - \frac{n\hat{u}}{\hat{b}} - \left[\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \exp\left(\frac{-x_i}{\hat{b}}\right) \right]^{-1} \sum_{i=1}^n \left(\frac{x_i}{\hat{b}}\right) \exp\left(\frac{-x_i}{\hat{b}}\right) + \\ & + \frac{\hat{u}}{\hat{b}} \sum_{i=1}^n \exp\left(\frac{-x_i}{\hat{b}}\right) \left[\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \exp\left(\frac{-x_i}{\hat{b}}\right) \right]^{-1} = 0. \end{aligned}$$

Simplificando-se a expressão acima, obtém-se

$$-n + \frac{1}{\hat{b}} \sum_{i=1}^n x_i - \left[\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \exp\left(\frac{-x_i}{\hat{b}}\right) \right]^{-1} \sum_{i=1}^n \left(\frac{x_i}{\hat{b}}\right) \exp\left(\frac{-x_i}{\hat{b}}\right) = 0,$$

$$-n + \frac{1}{\hat{b}} \sum_{i=1}^n x_i - \frac{\sum_{i=1}^n \left(\frac{x_i}{\hat{b}}\right) \exp\left(\frac{-x_i}{\hat{b}}\right)}{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \exp\left(\frac{-x_i}{\hat{b}}\right)} = 0,$$

$$-\sum_{i=1}^n \exp\left(\frac{-x_i}{\hat{b}}\right) + \frac{1}{\hat{b}n} \sum_{i=1}^n x_i \sum_{i=1}^n \exp\left(\frac{-x_i}{\hat{b}}\right) - \frac{1}{\hat{b}} \sum_{i=1}^n x_i \exp\left(\frac{-x_i}{\hat{b}}\right) = 0.$$

Colocando-se $\sum_{i=1}^n \exp\left(\frac{-x_i}{\hat{b}}\right)$ em evidência e multiplicando-se a

expressão restante por \hat{b} , obtém-se

$$\sum_{i=1}^n \exp\left(\frac{-x_i}{\hat{b}}\right) \left[-1 + \frac{1}{\hat{b}n} \sum_{i=1}^n x_i - \frac{\frac{1}{\hat{b}} \sum_{i=1}^n x_i \exp\left(\frac{-x_i}{\hat{b}}\right)}{\sum_{i=1}^n \exp\left(\frac{-x_i}{\hat{b}}\right)} \right] = 0$$

$$-\hat{b} + \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i - \frac{\sum_{i=1}^n x_i \exp\left(\frac{-x_i}{\hat{b}}\right)}{\sum_{i=1}^n \exp\left(\frac{-x_i}{\hat{b}}\right)} = 0;$$

isolando-se \hat{b} , obtém-se o estimador da máxima verossimilhança (E.M.V.) do parâmetro b , que é dado por

$$\hat{b} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i - \frac{\sum_{i=1}^n x_i \exp\left(\frac{-x_i}{\hat{b}}\right)}{\sum_{i=1}^n \exp\left(\frac{-x_i}{\hat{b}}\right)}. \quad (3.23)$$

Logo, deve-se primeiro determinar \hat{b} como solução de (3.23) e substituir esse valor em (3.22) para obter $\hat{\mu}$. Devido a \hat{b} não podem ser obtido

analiticamente, deve-se determiná-lo por aproximação numérica. Conforme Vivanco (1994), o procedimento iterativo de Newton-Raphson não apresenta complicações e é recomendável neste caso. Para a estimação de u e b foi usado o programa computacional SAS[®] 6.12 na linguagem SAS/IML(SAS[®] 1990). A rotina utilizada está apresentada no Anexo B.

3.3.2.2 - Intervalos de confiança assintóticos

De maneira geral, normalidade assintótica dos estimadores de máxima verossimilhança quer dizer que, para n grande, a distribuição conjunta de, \hat{u} e \hat{b} é aproximadamente Normal com médias u e b e a matriz de covariância igual à inversa da matriz de informação de Fisher.

A matriz de informação de Fisher $I(u,b)$, no caso da distribuição de Gumbel, é dada por

$$I(u,b) = \begin{pmatrix} -E \left[\frac{\partial^2 \ell(u,b)}{\partial u^2} \right] & -E \left[\frac{\partial^2 \ell(u,b)}{\partial u \partial b} \right] \\ -E \left[\frac{\partial^2 \ell(u,b)}{\partial u \partial b} \right] & -E \left[\frac{\partial^2 \ell(u,b)}{\partial b^2} \right] \end{pmatrix}, \quad (3.24)$$

em que $\ell(u,b)$ é a função de Log-Verossimilhança, definida em (3.17). Assim, fazendo-se a derivada parcial segunda de (3.17) em relação a u e b , obtém-se

$$\begin{aligned} \bullet \frac{\partial^2 \ell(u,b)}{\partial u^2} &= \frac{\partial}{\partial u} \left\{ \frac{1}{b} - \frac{1}{b} \sum_{i=1}^n \exp \left[- \left(\frac{x-u}{b} \right) \right] \right\} \\ &= - \frac{1}{b^2} \sum_{i=1}^n \exp \left[- \left(\frac{x-u}{b} \right) \right]. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\bullet \frac{\partial^2 \ell(u, b)}{\partial b^2} &= \frac{\partial}{\partial b} \left\{ \frac{-n}{b} + \frac{1}{b} \sum_{i=1}^n \left(\frac{x-u}{b} \right) - \frac{1}{b} \sum_{i=1}^n \left(\frac{x-u}{b} \right) \exp \left[- \left(\frac{x-u}{b} \right) \right] \right\} \\
&= \frac{n}{b^2} - \frac{2}{b^2} \sum_{i=1}^n \left(\frac{x_i - u}{b} \right) + \frac{2}{b^2} \sum_{i=1}^n \left(\frac{x_i - u}{b} \right) \exp \left[- \left(\frac{x_i - u}{b} \right) \right] + \\
&\quad + \frac{1}{b^2} \sum_{i=1}^n \left(\frac{x_i - u}{b} \right)^2 \exp \left[- \left(\frac{x_i - u}{b} \right) \right]. \\
\bullet \frac{\partial^2 \ell(u, b)}{\partial u \partial b} &= \frac{\partial}{\partial b} \left\{ \frac{n}{b} - \frac{1}{b} \sum_{i=1}^n \exp \left[- \left(\frac{x-u}{b} \right) \right] \right\}, \\
\bullet \frac{\partial^2 \ell(u, b)}{\partial u \partial b} &= \frac{-n}{b^2} - \frac{1}{b^2} \sum_{i=1}^n \left(\frac{x_i - u}{b} \right) \exp \left[- \left(\frac{x-u}{b} \right) \right] + \\
&\quad + \frac{1}{b^2} \sum_{i=1}^n \exp \left[- \left(\frac{x-u}{b} \right) \right].
\end{aligned}$$

A matriz de informação de Fisher pode ser obtida fazendo $z_i = -(x_i - u)/b$ e calculando o negativo da esperança matemática, isto é,

$$-E \left(\frac{\partial^2 \ell(u, b)}{\partial u^2} \right) = \frac{1}{b^2} \sum_{i=1}^n E(e^{z_i}) = \frac{n}{b^2}, \quad (3.25)$$

$$-E \left(\frac{\partial^2 \ell(u, b)}{\partial b^2} \right) = \frac{n}{b^2} \left(1 + \frac{\pi^2}{6} - 2\gamma + \gamma^2 \right) = 1,8237 \frac{n}{b^2}, \quad (3.26)$$

$$\begin{aligned}
-E \left(\frac{\partial^2 \ell(u, b)}{\partial u \partial b} \right) &= \frac{n}{b^2} + \frac{1}{b^2} \sum_{i=1}^n E(z_i e^{z_i}) + \frac{1}{b^2} \sum_{i=1}^n E(e^{z_i}). \\
&= \frac{n}{b^2} (-\gamma + 1) = 0,4228 \frac{n}{b^2}. \quad (3.27)
\end{aligned}$$

Substituindo (3.25), (3.26) e (3.27) em (3.24), tem-se

$$I(u, b) = \begin{pmatrix} \frac{n}{b^2} & 0,4228 \frac{n}{b^2} \\ 0,4228 \frac{n}{b^2} & 1,8237 \frac{n}{b^2} \end{pmatrix}. \quad (3.28)$$

A matriz de covariância assintótica W dos E.M.V. de u e b é dada pela inversa da matriz de informação de Fisher e é representada por

$$W = I^{-1}(\hat{u}, \hat{b}) = \begin{pmatrix} \text{Var}(\hat{u}) & \text{Cov}(\hat{u}, \hat{b}) \\ \text{Cov}(\hat{u}, \hat{b}) & \text{Var}(\hat{b}) \end{pmatrix}$$

$$W = \begin{pmatrix} 1,1087 \frac{\hat{b}^2}{n} & 0,257 \frac{\hat{b}^2}{n} \\ 0,257 \frac{\hat{b}^2}{n} & 0,6079 \frac{\hat{b}^2}{n} \end{pmatrix}. \quad (3.29)$$

Logo os intervalos de confiança assintóticos com $100\gamma\%$ de confiança para u e b são respectivamente,

$$IC(u) = \left[\hat{u} - z_{\left(\frac{1+\gamma}{2}\right)} \frac{1,0529\hat{b}}{\sqrt{n}}, \hat{u} + z_{\left(\frac{1+\gamma}{2}\right)} \frac{1,0529\hat{b}}{\sqrt{n}} \right] \quad (3.30)$$

$$IC(b) = \left[\hat{b} - z_{\left(\frac{1+\gamma}{2}\right)} \frac{0,7797\hat{b}}{\sqrt{n}}, \hat{b} + z_{\left(\frac{1+\gamma}{2}\right)} \frac{0,7797\hat{b}}{\sqrt{n}} \right], \quad (3.31)$$

em que, $z_{\left(\frac{1+\gamma}{2}\right)}$ é o $100 \left(\frac{1+\gamma}{2}\right)$ -ésimo percentil da distribuição normal padrão.

3.3.3 - Intervalos de confiança via Jackknife

Os intervalos de confiança para os parâmetros u e b da distribuição de Gumbel foram obtidos pelo método *Jackknife* de acordo com Manly (1998).

A utilização dos processos de reamostragens, mais especificamente o método de Jackknife, foi de suma importância para a obtenção dos intervalos de confiança via métodos dos momentos, pois é sabido que a estimação dos intervalos de confiança para este método não apresenta uma expressão analítica. No caso da estimação dos intervalos de confiança para o método da máxima verossimilhança, é possível realizar sua estimação analiticamente. Entretanto, para efeito de um estudo comparativo entre as duas metodologias de estimação, aplicou-se o método de Jackknife também para os intervalos de confiança obtidos pelo método da máxima verossimilhança.

Para demonstrar a aplicação do método Jackknife, ilustraram-se os procedimentos para obtenção dos intervalos de confiança via método dos momentos. Assim, utilizou-se o estimador dos métodos dos momentos para o parâmetro de escala b . Em relação ao parâmetro u , segue-se o mesmo princípio. Sendo assim, o procedimento do Jackknife foi dado pelos seguintes passos:

Passo 1 - Definição do estimador. Nesta etapa, caso se deseja aplicar o método Jackknife ao estimador da máxima verossimilhança, basta substituí-lo na expressão a seguir, referente ao parâmetro desejado. Neste exemplo, como já mencionado anteriormente, o parâmetro \hat{b} foi obtido pelo método dos momentos, utilizando-se a expressão (3.13)

$$\hat{E}_j = \hat{b}_j \quad (3.32)$$

Passo 2 – Determinação de b . Elimina-se a j -ésima observação amostral, encontrando \hat{E}_{-j} ; em seguida encontra-se \hat{E} , que é a média dos " n " \hat{E}_{-j} .

Passo 3 – Determinação dos "pseudo-valores", de acordo com a seguinte expressão.

$$\hat{E}_j^* = n\hat{E} - (n-1)\hat{E}_{-j}. \text{ Para } j=1,2,\dots,n., \quad (3.33)$$

O significado do pseudo-valor é similar ao b_j ; a média deles, que é dada pela expressão a seguir, representa o estimador Jackknife.

$$\hat{E}^* = \frac{\sum_{j=1}^n \hat{E}_j}{n}. \quad (3.34)$$

Passo 4 – Determinação dos intervalos de confiança. Nesta etapa, inicialmente calculou-se a variância do estimador Jackknife:

$$\hat{V}(\hat{E}^*) = \frac{S^2}{n}, \text{ em que } S^2 = \hat{V}(\hat{E}_j). \quad (3.35)$$

Obtido a variância amostral do estimador Jackknife, calculou-se o intervalo de confiança para b , dado pela seguinte expressão:

$$IC_{\gamma,b} : \hat{E}^* \pm Z_{\left(\frac{1+\gamma}{2}\right)} \frac{S}{\sqrt{n}}, \quad (3.36)$$

em que $Z_{\left(\frac{1+\gamma}{2}\right)}$ é o $100\left(\frac{1+\gamma}{2}\right)$ -ésimo percentil da distribuição normal padrão.

3.4 - Estimativas de precipitações diárias máximas prováveis

A probabilidade P de que ocorra uma precipitação pluviométrica máxima maior que um certo valor x é estimada utilizando-se a função de distribuição acumulada da seguinte maneira:

$$P = 1 - F(x; u, b) = 1 - \exp\left\{-\exp\left[-\left(\frac{x-u}{b}\right)\right]\right\}, \quad (3.37)$$

em que x é um valor precipitação máxima do período, $0 < x < \infty$, e $F(x; u, b)$ foi definida em (3.2).

A partir de 3.37 pode-se obter a precipitação máxima provável a um certo nível de probabilidade prestabelecido. Para isto, é conveniente aplicar logaritmo neperiano, isto é,

$$\ln \left[\exp \left\{ -\exp \left[-\left(\frac{x-u}{b} \right) \right] \right\} \right] = \ln(1-P),$$

$$\exp \left[-\left(\frac{x-u}{b} \right) \right] = \ln \left(\frac{1}{1-P} \right) \Rightarrow \frac{x-u}{b} = -\ln \left[\ln \left(\frac{1}{1-P} \right) \right],$$

isolando-se x , tem-se

$$x = u - b \ln \left[\ln \left(\frac{1}{1-P} \right) \right]. \quad (3.38)$$

Utilizando as estimativas dos parâmetros obtidas pelo método dos momentos e pelo método da máxima verossimilhança e aplicando-as em (3.38), obtiveram-se as estimativas das precipitações diárias máximas esperadas para cada período analisado, para os 17 níveis de probabilidade preestabelecidos.

✕ 3.5 - Ajuste do modelo

Para avaliar o ajuste da distribuição de Gumbel às séries de precipitações diárias máximas, será empregado o teste Kolmogorov-Smirnov, de acordo com Campos (1979).

Ressalta-se que este teste consiste em rejeitar a hipótese de adequação do ajuste se a diferença máxima entre os valores observados e ajustados for superior ao crítico, para o nível de significância especificado.

4 - RESULTADOS E DISCUSSÃO

A série de precipitações diárias máximas mensais relativas aos anos estudados é apresentada graficamente na Figura 1.

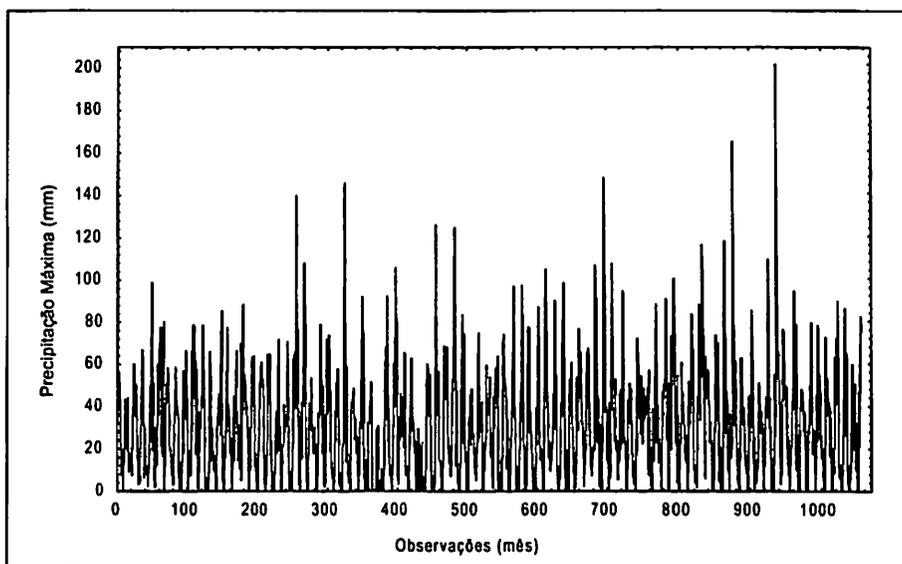


FIGURA 1.: Representação gráfica da série de precipitações diárias máximas mensais em milímetros d'água, no município de Lavras – MG, no período de janeiro de 1914 a dezembro de 2001.

Na Figura 1, pode-se notar que poucas precipitações diárias máximas mensais (acumuladas em 24 horas) superaram 100mm, destacando-se a observação 937, que corresponde a precipitação diária ocorrida no dia 23 de janeiro de 1992, que foi de 202 milímetros de lâmina d'água. As precipitações diárias máximas mensais que superaram 100 mm e o respectivo mês e ano em que ocorreram são apresentadas no Quadro 1.

QUADRO 1.: Precipitações diárias máximas mensais que superaram 100 milímetros de lâmina d'água, no município de Lavras – MG ocorridas entre o período de janeiro de 1914 a dezembro de 2001.

Período de Ocorrência	Precipitação máxima (mm)
Janeiro de 1992	202
Dezembro de 1986	165,8
Dezembro de 1971	148,4
Dezembro de 1940	146
Fevereiro de 1935	140
Novembro de 1951	126,5
Fevereiro de 1954	125
Dezembro de 1985	118,6
Abril de 1983	116,8
Janeiro de 1991	110
Fevereiro de 1936	108,2
Novembro de 1972	108
Novembro de 1970	107,2
Janeiro de 1947	106
Dezembro de 1964	105,3
Janeiro de 1980	100,8

Analisando-se o Quadro 1, pode-se verificar que a maioria das precipitações máximas que superaram 100mm ocorreram no meses de janeiro e dezembro.

4.1 - Ajuste da distribuição

Os resultados do teste Kolmogorov-Smirnov apresentados na Tabela 1, indicaram que os dados de precipitação diária máxima agrupados em períodos de um ano ajustaram-se à distribuição de Gumbel quando se utilizou estimativas dos parâmetros obtidas pelos dois métodos de estimação. Para ambos os métodos quando o período de observação foi de um mês, observou-se o ajustamento de todos os meses, excetuando-se julho e agosto, nos quais houve maior ocorrência de precipitação máxima igual a zero. Resultados semelhantes foram obtidos por Gomes et al. (1989), excetuando-se o mês de agosto do período de um mês, embora os autores tenham utilizado apenas o método da máxima verossimilhança.

Especificamente no caso do método dos momentos, resultados de ajustamento de séries de precipitações máximas para o período anual foram obtidos por Pinto (1999) nos estados do Rio de Janeiro e Espírito Santo e por Vasconcelos (1998) em Piracicaba-SP, embora seja de locais diferentes.

Com relação às médias mensais das precipitações máximas diárias apresentadas na Tabela 1, verificou-se que os meses de janeiro e dezembro foram os que apresentaram maiores valores, (56,9mm e 54,5mm) respectivamente. O mês de julho teve a menor média (8,4mm), sendo que a média das precipitações máximas diárias para o período anual foi de 80,3mm. Valores parecidos foram observados por Beijo et al. (2002), que analisando as precipitações diárias máximas de Jaboticabal (SP), notaram que os meses de janeiro e dezembro, apresentaram como média 55,0mm e 54,5mm respectivamente, e o período anual média de 79,3mm. Isto demonstra que a distribuição das precipitações máximas nas duas regiões são parecidas.

TABELA 1 - Estimativas da média das precipitações diárias máximas (mm) e resultados do teste Kolmogorov-Smirnov referentes aos métodos: dos momentos (MM) e da máxima verossimilhança (MV) para os períodos de um mês e de um ano.

Período	Média	Método	Conclusão	Período	Média	Método	Conclusão
Jan.	56,9	MM	NS	Ago.	9,3	MM	S*
		MV	NS			MV	S*
Fev.	47,8	MM	NS	Set.	21,7	MM	NS
		MV	NS			MV	NS
Mar.	43,9	MM	NS	Out.	36,3	MM	NS
		MV	NS			MV	NS
Abr.	25,7	MM	NS	Nov.	47,7	MM	NS
		MV	NS			MV	NS
Mai.	18,7	MM	NS	Dez.	54,5	MM	NS
		MV	NS			MV	NS
Jun.	11,9	MM	NS	Ano	80,3	MM	NS
		MV	NS			MV	NS
Jul.	8,4	MM	S*				
		MV	S*				

S* significativo ao nível de 5% de probabilidade

NS não significativo ao nível de 5% de probabilidade

Para os períodos de quinze dias, o ajustamento se deu da segunda quinzena de setembro à segunda quinzena de abril, sendo idêntico para ambos os métodos (Tabela 2). Portanto observa-se que não houve ajustamento para as quinzenas de maio, junho, julho, agosto e primeira quinzena de setembro.

Especialmente para o caso do método da máxima verossimilhança, resultados semelhantes foram obtidos por Gomes et al. (1989), excetuando-se a segunda quinzena de maio onde esta série de precipitações máximas diárias estudada pelos autores se ajustou à distribuição de Gumbel, fato este que pode ser explicado pela maior ocorrência de precipitação máxima igual a zero no período após 1986.

Com relação às médias quinzenais das precipitações máximas diárias apresentadas na Tabela 2, verificou-se que a segunda quinzena de dezembro, a

primeira e a segunda quinzena de janeiro, foram as que apresentaram maiores valores, (47,8mm; 44,9mm e 43,8mm) respectivamente. A primeira quinzena de julho teve a menor média (3,2mm).

TABELA 2 - Estimativas da média das precipitações diárias máximas (mm) e resultados do teste Kolmogorov-Smirnov referentes aos métodos: dos momentos (MM) e da máxima verossimilhança (MV) para os períodos de quinze dias (Q)

Período	Média	Método	Conclusão	Período	Média	Método	Conclusão
Jan 1Q	43,8	MM	NS	Jul 1Q	3,2	MM	S*
		MV	NS			MV	S*
Jan 2Q	44,9	MM	NS	Jul 2Q	6,1	MM	S*
		MV	NS			MV	S*
Fev 1Q	37,7	MM	NS	Ago 1Q	6,1	MM	S*
		MV	NS			MV	S*
Fev 2Q	35,7	MM	NS	Ago 2Q	4,9	MM	S*
		MV	NS			MV	S*
Mar 1Q	36,5	MM	NS	Set 1Q	13,5	MM	S*
		MV	NS			MV	S*
Mar 2Q	30,1	MM	NS	Set 2Q	15,4	MM	NS
		MV	NS			MV	NS
Abr 1Q	21,2	MM	NS	Out 1Q	25,9	MM	NS
		MV	NS			MV	NS
Abr 2Q	13,0	MM	NS	Out 2Q	28,4	MM	NS
		MV	NS			MV	NS
Mai 1Q	11,6	MM	S*	Nov 1Q	36,0	MM	NS
		MV	S*			MV	NS
Mai 2Q	12,9	MM	S*	Nov 2Q	38,5	MM	NS
		MV	S*			MV	NS
Jun 1Q	7,1	MM	S*	Dez 1Q	39,6	MM	NS
		MV	S*			MV	NS
Jun 2Q	7,3	MM	S*	Dez 2Q	47,8	MM	NS
		MV	S*			MV	NS

S* significativo ao nível de 5% de probabilidade

NS não significativo ao nível de 5% de probabilidade

Para os períodos de dez dias, os resultados apresentados na Tabela 3 mostram que houve diferença entre os métodos de estimação no ajuste dos dados à distribuição de Gumbel, Observa-se que o ajustamento se deu da terceira dezena de setembro à terceira dezena de março, quando se testou o ajuste utilizando estimativas dos parâmetros obtidas pelo método dos momentos, e da terceira dezena de setembro à segunda dezena de abril, quando se testou o ajuste utilizando estimativas dos parâmetros obtidas pelo método da máxima verossimilhança. Isto demonstra que para períodos de dez dias, o método da máxima verossimilhança fornece estimativas mais adequadas dos parâmetros da distribuição de Gumbel.

Especialmente para o caso do método da máxima verossimilhança, resultados semelhantes foram obtidos por Gomes et al. (1989) sem nenhuma exceção, indicando que as precipitações máximas que ocorreram de 1987 a 2001 não causaram alteração no ajuste da distribuição de Gumbel para os períodos de dez dias.

Com relação às médias mensais das precipitações máximas diárias apresentadas na Tabela 3, verificou-se que a terceira dezena de dezembro apresentou o maior valor (43,0mm), que é 6,4mm maior que a segunda maior média, que ocorreu na primeira dezena de janeiro, e 7,2mm maior que a segunda dezena de dezembro, indicando que, em média, as precipitações máximas ocorridas na terceira dezena de dezembro foram mais elevadas do que as das outras dezenas. A primeira dezena de agosto teve a menor média (2,6mm).

TABELA 3 - Estimativas das médias das precipitações diárias máximas (mm) e resultados do teste Kolmogorov-Smirnov referentes aos métodos: dos momentos (MM) e da máxima verossimilhança (MV) nos períodos de 10 dias (D).

Período	Média	Método	Conclusão	Período	Média	Método	Conclusão
Jan 1D	36,6	MM	NS	Jul 1D	3,4	MM	S*
		MV	NS			MV	S*
Jan 2D	36,3	MM	NS	Jul 2D	3,7	MM	S*
		MV	NS			MV	S*
Jan 3D	34,8	MM	NS	Jul 3D	3,4	MM	S*
		MV	NS			MV	S*
Fev 1D	30,9	MM	NS	Ago 1D	2,6	MM	S*
		MV	NS			MV	S*
Fev 2D	31,8	MM	NS	Ago 2D	4,6	MM	S*
		MV	NS			MV	S*
Fev 3D	29,1	MM	NS	Ago 3D	5,2	MM	S*
		MV	NS			MV	S*
Mar 1D	28,7	MM	NS	Set 1D	9,7	MM	S*
		MV	NS			MV	S*
Mar 2D	28,3	MM	NS	Set 2D	10,8	MM	S*
		MV	NS			MV	S*
Mar 3D	24,3	MM	NS	Set 3D	13,5	MM	NS
		MV	NS			MV	NS
Abr 1D	17,9	MM	S*	Out 1D	19,8	MM	NS
		MV	NS			MV	NS
Abr 2D	12,3	MM	S*	Out 2D	21,3	MM	NS
		MV	NS			MV	NS
Abr 3D	7,1	MM	S*	Out 3D	23,9	MM	NS
		MV	S*			MV	NS
Mai 1D	9,7	MM	S*	Nov 1D	29,4	MM	NS
		MV	S*			MV	NS
Mai 2D	8,7	MM	S*	Nov 2D	31,5	MM	NS
		MV	S*			MV	NS
Mai 3D	9,0	MM	S*	Nov 3D	31,1	MM	NS
		MV	S*			MV	NS
Jun 1D	5,4	MM	S*	Dez 1D	32,0	MM	NS
		MV	S*			MV	NS
Jun 2D	4,8	MM	S*	Dez 2D	35,8	MM	NS
		MV	S*			MV	NS
Jun 3D	4,3	MM	S*	Dez 3D	43,0	MM	NS
		MV	S*			MV	NS

S* significativo ao nível de 5% de probabilidade

NS não significativo ao nível de 5% de probabilidade

4.2 – Estimativas das precipitações máximas

As precipitações diárias máximas prováveis nos períodos de um ano, um mês, quinze e dez dias, que foram calculadas aplicando-se a distribuição de Gumbel utilizando as estimativas dos parâmetros \hat{u} e \hat{b} obtidas pelo método dos momentos e pelo método da máxima verossimilhança para 17 níveis de probabilidade, são apresentadas nas Tabelas 4, 5, 6 e 7.

Na Tabela 4, escolhendo 2 % como o nível adequado para a ocorrência de uma dada precipitação pluviométrica máxima diária, uma interpretação das informações pode ser feita do seguinte modo: verifica-se que existe 2% de probabilidade de que a precipitação diária máxima provável no ano seja maior que 155,4mm para o método dos momentos e maior que 149,4 mm para o método da máxima verossimilhança. Praticamente, para o caso do método da máxima verossimilhança, espera-se que em 1 de cada 50 anos, o valor da precipitação diária máxima no ano seja superior a 149,4mm, ou ainda, espera-se que em 49 de cada 50 anos, o valor da precipitação diária máxima no período de um ano seja inferior ou igual a 149,4mm. Pode-se notar ainda que as precipitações máximas obtidas quando se usaram as estimativas dos parâmetros fornecidas pelo método dos momentos apresentaram valores maiores do que os obtidos utilizando o método da máxima verossimilhança para os níveis de 5, 4 e 2% de probabilidade, quando a diferença entre as estimativas foi superior a 4mm, enquanto, para os demais níveis, não houve grande diferença entre os valores. Esta diferença pode ter sido causada pela variabilidade da série de observações, a qual influencia diretamente nas estimativas do método dos momentos para o parâmetro b , que depende do desvio padrão da série, conforme apresentado em (3.13).

Comparando a Tabela 4 com a Tabela 1A (Anexo A) nota-se, especificamente para caso da máxima verossimilhança nos níveis de 5 a 95 por

cento, que resultados semelhantes foram encontrados por Gomes et al. (1989), o que demonstra que as precipitações diárias máximas ocorridas após 1986 não influenciaram as estimativas das precipitações máximas para o período de um ano.

TABELA 4 – Estimativas das precipitações diárias máximas prováveis (mm), no período de um ano, em diferentes níveis de probabilidade, calculadas pela distribuição de Gumbel utilizando estimativas dos parâmetros obtidas pelo métodos dos momentos (MM) e máxima verossimilhança (MV).

Níveis de Prob. (%)	Método		Níveis de Prob. (%)	Método	
	MM	MV		MM	MV
2	155,4	149,4	60	69,3	69,6
4	139,5	134,7	70	63,1	63,9
5	134,4	129,9	75	59,9	61
10	118,1	114,8	80	56,5	57,8
20	101,2	99,1	90	48,4	50,4
25	95,4	93,8	95	42,5	44,9
30	90,6	89,3	96	40,9	43,4
40	82,5	81,8	98	36,5	39,3
50	75,6	75,5			

Na Tabela 5, escolhendo 4 % como o nível adequado para a ocorrência de uma dada precipitação pluviométrica máxima diária, uma interpretação das informações pode ser feita do seguinte modo: verifica-se que existe 4% de probabilidade de que a precipitação diária máxima provável no mês de dezembro seja maior que 106,3mm para o método dos momentos e maior que 93,0 mm para o método da máxima verossimilhança. Praticamente, para o caso do método da máxima verossimilhança, espera-se que em 1 de cada 25 anos, o valor da precipitação diária máxima provável no mês de dezembro seja superior a 93,0 mm, ou ainda, espera-se que em 24 de cada 25 anos, o valor da precipitação diária máxima provável no mês de dezembro seja inferior ou igual

a 93,0 mm. Observa-se ainda que as precipitações máximas obtidas quando se utilizaram as estimativas dos parâmetros fornecidas pelo método dos momentos apresentaram valores maiores do que os obtidos utilizando o método da máxima verossimilhança para os níveis de probabilidade de 10, 5, 4 e 2 por cento nos meses de janeiro, abril, maio, junho e dezembro, quando a diferença entre as estimativas foi igual ou superior a 4mm, sendo que, para o nível de 2 % no mês de dezembro, a diferença entre os valores (120,2; 103,6) foi de 16,6mm, o que pode ser uma quantidade a ser considerada em certas obras hidráulicas.

Nota-se que nos meses de fevereiro, março, setembro, outubro e novembro as precipitações máximas obtidas por ambos os métodos não apresentaram grande diferença entre os valores, ressaltando que, nos meses de março, setembro e outubro, as estimativas fornecidas pelo método dos momentos foram levemente menores que as fornecidas pelo outro método (Tabela 5). Observa-se que ao nível de 50%, as estimativas obtidas para os dois casos são praticamente iguais em todos os meses, demonstrando que para este nível de probabilidade os dois métodos são similares. Resultado idêntico foi encontrado por Beijo e Muniz (2002). Outra observação importante a ser feita é a de que, ao nível de 50%, as precipitações diárias máximas prováveis, ao longo dos meses, variaram de aproximadamente 9,7 a 52,4, o que demonstra que a maior precipitação diária máxima pode ser geralmente esperada nos meses de janeiro e dezembro. Embora tenha estudado as precipitações médias diárias, resultado semelhante foi obtido por Botelho (1998), que concluiu que a maior precipitação média diária em Lavras pode ser esperada em janeiro e dezembro, o que indica uma relação direta entre as precipitações máximas e a média das precipitações diárias.

Comparando a Tabela 5 com a Tabela 2A (Anexo A) nota-se, especificamente para caso da máxima verossimilhança nos níveis de 5 a 95 por cento, que resultados semelhantes foram encontrados por Gomes et al. (1989),

excetuando-se o mês de dezembro, no qual para os resultados atuais houve uma diminuição de mais de 4mm quando se analisa o nível de 5 por cento, sendo que nos meses de janeiro, fevereiro e março ocorreu um leve acréscimo. Este fato demonstra que as precipitações diárias máximas ocorridas após 1986 influenciaram as estimativas das precipitações máximas para os períodos mensais.

Na Tabela 6, escolhendo 5 % como o nível adequado para a ocorrência de uma dada precipitação pluviométrica máxima diária para o período de quinze dias, uma interpretação das informações pode ser feita do seguinte modo: verifica-se que existe 5% de probabilidade de que a precipitação diária máxima provável na segunda quinzena do mês de dezembro seja maior que 99,5mm para o método dos momentos e maior que 86,5mm para o método da máxima verossimilhança. Praticamente, para o caso do método da máxima verossimilhança, espera-se que em 1 de cada 20 anos, o valor da precipitação diária máxima na segunda quinzena do mês de dezembro seja superior a 86,5mm, ou ainda, espera-se que em 19 de cada 20 anos, o valor da precipitação diária máxima na segunda quinzena do mês de dezembro seja inferior ou igual a 86,5mm.

Realizando uma análise mais minuciosa na Tabela 6, verifica-se que as precipitações máximas obtidas quando se usaram as estimativas dos parâmetros fornecidas pelo método dos momentos apresentaram valores maiores do que os obtidos utilizando o método da máxima verossimilhança nos seguintes casos: para os níveis de probabilidade de 10, 5, 4 e 2 por cento na segunda quinzena de abril e dezembro, para os níveis de 5, 4 e 2 por cento na primeira quinzena de fevereiro e segunda quinzena de abril e novembro e para o nível de 2 por cento na segunda quinzena de janeiro e primeira quinzena de março, sendo que em todos esses períodos a diferença entre as estimativas foi igual ou superior a 4mm.

TABELA 5 – Estimativas das precipitações diárias máximas prováveis (mm), no período de um mês, em diferentes níveis de probabilidade, calculadas pela distribuição de Gumbel utilizando-se estimativas dos parâmetros obtidas pelo métodos dos momentos (MM) e máxima verossimilhança (MV).

Período	Met.	Nível de Probabilidade (%)																
		2	4	5	10	20	25	30	40	50	60	70	75	80	90	95	96	98
Jan.	MM	127,8	112,8	107,9	92,6	76,6	71,2	66,6	58,9	52,4	46,5	40,6	37,6	34,5	26,8	21,2	19,7	15,5
	MV	120,2	106,7	102,3	88,5	74,1	69,3	65,1	58,3	52,4	47,1	41,8	39,1	36,3	29,4	24,4	23,0	19,3
Fev.	MM	113,8	99,9	95,3	81,0	66,1	61,1	56,8	49,6	43,6	38,0	32,6	29,8	26,8	19,7	14,5	13,1	9,2
	MV	111,2	97,7	93,4	79,6	65,2	60,3	56,2	49,3	43,5	38,2	32,9	30,2	27,4	20,5	15,5	14,1	10,4
Mar.	MM	93,3	82,8	79,4	68,8	57,6	53,8	50,6	45,3	40,8	36,6	32,6	30,5	28,3	22,9	19,0	18,0	15,1
	MV	94,8	84,1	80,6	69,5	58,0	54,1	50,8	45,3	40,7	36,4	32,2	30,0	27,7	22,3	18,2	17,1	14,1
Abr.	MM	74,8	64,4	61,0	50,4	39,3	35,6	32,4	27,1	22,6	18,5	14,4	12,3	10,1	4,8	1,0	0,0	0,0
	MV	65,9	57,3	54,5	45,7	36,4	33,3	30,7	26,3	22,5	19,1	15,7	14,0	12,2	7,8	4,6	3,7	1,3
Mai.	MM	64,7	55,0	51,8	41,9	31,5	28,0	25,0	20,0	15,8	12,0	8,2	6,2	4,2	0,0	0,0	0,0	0,0
	MV	57,4	49,1	46,4	37,9	29,1	26,1	23,5	19,3	15,7	12,4	9,2	7,5	5,7	1,5	0,0	0,0	0,0

“ ... continua...”

“TABELA 5, Cont.”

Período	Met.	Nível de Probabilidade (%)																
		2	4	5	10	20	25	30	40	50	60	70	75	80	90	95	96	98
Jun.	MM	46,0	38,8	36,4	29,1	21,4	18,8	16,6	12,9	9,7	6,9	4,1	2,6	1,1	0,0	0,0	0,0	0,0
	MV	37,8	32,2	30,4	24,7	18,7	16,6	14,9	12,1	9,6	7,4	5,2	4,1	2,9	0,0	0,0	0,0	0,0
Set.	MM	57,7	50,1	47,6	39,8	31,7	28,9	26,6	22,7	19,4	16,4	13,4	11,9	10,2	6,4	3,5	2,7	0,6
	MV	60,9	52,7	50,0	41,5	32,7	29,7	27,2	23,0	19,4	16,1	12,9	11,2	9,5	5,3	2,2	1,3	0,0
Out.	MM	78,2	69,3	66,4	57,4	47,9	44,7	42,0	37,5	33,7	30,2	26,7	25,0	23,1	18,6	15,3	14,4	11,9
	MV	78,8	69,8	66,9	57,7	48,1	44,8	42,1	37,5	33,6	30,0	26,5	24,7	22,8	18,3	14,9	14,0	11,5
Nov.	MM	104,4	92,4	88,5	76,2	63,4	59,1	55,4	49,3	44,1	39,3	34,7	32,3	29,7	23,6	19,1	17,9	14,6
	MV	101,0	89,7	86,0	74,3	62,2	58,1	54,6	48,8	43,9	39,4	35,0	32,7	30,3	24,5	20,2	19,1	15,9
Dez.	MM	120,2	106,3	101,8	87,6	72,8	67,7	63,5	56,4	50,3	44,8	39,4	36,6	33,7	26,6	21,4	20,0	16,1
	MV	103,6	93,0	89,6	78,7	67,4	63,6	60,4	55,0	50,4	46,2	42,0	39,9	37,7	32,3	28,3	27,2	24,3

Pode-se notar, ainda na Tabela 6, que para o nível de 2 %, na segunda quinzena do mês de dezembro, a diferença entre as estimativas (120,2 e 103,6) foi de 17,6mm, o que pode ser uma quantidade significativa a ser considerada em certas obras hidráulicas. Também observa-se que, na primeira quinzena dos meses de março e dezembro, as estimativas das precipitações máximas fornecidas pelo método dos momentos foram menores que as fornecidas pelo outro método nos níveis de 5, 4 e 2 por cento. O mesmo fato ocorreu na segunda quinzena de dezembro, só que para os níveis de 80, 90, 95, 96 e 98 por cento, sendo que a diferença entre as estimativas em todos esses casos foi igual ou superior a 4mm. Nos demais períodos de quinze dias, as estimativas obtidas por ambos os métodos não apresentaram grande diferença entre os valores, ressaltando que na segunda quinzena de outubro e na primeira quinzena de novembro as estimativas fornecidas pelo método dos momentos foram levemente menores que as fornecidas pelo outro método.

Comparando a Tabela 6 com a Tabela 3A (Anexo A), nota-se, especificamente para caso da máxima verossimilhança nos níveis de 5 a 95 por cento, que houve uma leve alteração nos valores das estimativas das precipitações máximas na primeira quinzena dos meses de março e novembro e na segunda quinzena dos meses de janeiro, fevereiro, março, novembro e dezembro, em relação aos resultados encontrados por Gomes et al. (1989). Isto vem demonstrar que as precipitações máximas ocorridas após 1986 alteraram as estimativas das precipitações máximas esperadas para Lavras no período de quinze dias, reforçando a importância de, sempre que possível, atualizar o banco de dados para calcular estimativas.

TABELA 6 – Estimativas das precipitações diárias máximas prováveis (mm), no período de quinze dias em diferentes níveis de probabilidade, calculadas pela distribuição de Gumbel utilizando-se estimativas dos parâmetros obtidas pelo métodos dos momentos (MM) e máxima verossimilhança (MV).

Período	Mét.	Nível de Probabilidade (%)																
		2	4	5	10	20	25	30	40	50	60	70	75	80	90	95	96	98
Jan 1Q	MM	104,0	91,3	87,1	74,1	60,5	55,9	52,0	45,5	40,0	34,9	30,0	27,4	24,7	18,2	13,4	12,1	8,6
	MV	103,6	90,9	86,8	73,8	60,3	55,7	51,9	45,4	39,9	34,9	30,0	27,4	24,7	18,3	13,5	12,2	8,7
Jan 2Q	MM	118,8	103,2	98,1	82,1	65,4	59,7	54,9	47,0	40,2	34,0	27,9	24,7	21,4	13,5	7,6	6,0	1,7
	MV	114,6	99,8	95,1	80,0	64,2	58,9	54,4	46,8	40,4	34,6	28,9	25,9	22,8	15,3	9,7	8,2	4,2
Fev 1Q	MM	99,6	86,5	82,3	68,9	54,9	50,2	46,2	39,5	33,8	28,6	23,5	20,9	18,1	11,4	6,5	5,2	1,6
	MV	94,2	82,1	78,2	65,9	53,0	48,6	44,9	38,8	33,5	28,7	24,1	21,6	19,1	12,9	8,4	7,2	3,8
Fev 2Q	MM	95,7	83,0	78,9	65,9	52,3	47,8	43,9	37,4	31,9	26,8	21,9	19,4	16,7	10,2	5,5	4,2	0,6
	MV	92,4	80,4	76,5	64,1	51,3	47,0	43,3	37,2	31,9	27,2	22,5	20,1	17,5	11,4	6,9	5,7	2,4
Mar 1Q	MM	85,1	74,8	71,5	60,9	50,0	46,3	43,1	37,9	33,4	29,3	25,4	23,3	21,1	15,9	12,0	11,0	8,1
	MV	90,1	78,8	75,2	63,6	51,6	47,6	44,1	38,4	33,5	29,0	24,6	22,4	20,0	14,3	10,0	8,9	5,8
Mar 2Q	MM	81,7	70,8	67,2	56,1	44,5	40,5	37,2	31,6	26,9	22,6	18,3	16,1	13,8	8,3	4,2	3,1	0,0
	MV	78,3	68,1	64,7	54,2	43,3	39,6	36,4	31,2	26,7	22,7	18,7	16,6	14,5	9,2	5,4	4,3	1,5
Abr 1Q	MM	72,5	61,7	58,1	47,0	35,4	31,5	28,2	22,6	17,9	13,6	9,4	7,2	4,9	0,0	0,0	0,0	0,0
	MV	61,1	52,5	49,7	40,9	31,7	28,6	25,9	21,5	17,8	14,4	11,0	9,3	7,5	3,1	0,0	0,0	0,0

“... continua...”

“TABELA 6, Cont.”

Período	Mét.	Nível de Probabilidade (%)																
		2	4	5	10	20	25	30	40	50	60	70	75	80	90	95	96	98
Abr 2Q	MM	46,0	39,0	36,8	29,6	22,1	19,6	17,5	13,9	10,9	8,1	5,4	4,0	2,5	0,0	0,0	0,0	0,0
	MV	40,4	34,5	32,6	26,5	20,2	18,0	16,2	13,2	10,6	8,3	6,0	4,8	3,5	0,5	0,0	0,0	0,0
Set 2Q	MM	48,7	41,6	39,4	32,2	24,6	22,1	19,9	16,3	13,3	10,5	7,7	6,3	4,8	1,3	0,0	0,0	0,0
	MV	47,6	40,8	38,5	31,5	24,2	21,7	19,6	16,1	13,2	10,4	7,8	6,4	4,9	1,5	0,0	0,0	0,0
Out 1Q	MM	73,6	63,5	60,3	49,9	39,2	35,5	32,4	27,3	22,9	18,9	15,0	13,0	10,8	5,7	1,9	0,9	0,0
	MV	73,2	63,2	59,9	49,6	38,9	35,3	32,2	27,1	22,7	18,8	14,9	12,9	10,7	5,6	1,9	0,8	0,0
Out 2Q	MM	68,8	60,2	57,5	48,7	39,6	36,5	33,9	29,6	25,9	22,5	19,2	17,5	15,7	11,3	8,1	7,3	4,9
	MV	70,3	61,5	58,6	49,6	40,1	36,9	34,2	29,7	25,9	22,4	18,9	17,1	15,3	10,8	7,4	6,5	4,1
Nov 1Q	MM	86,0	75,4	72,0	61,2	49,9	46,1	42,8	37,4	32,8	28,7	24,5	22,4	20,2	14,8	10,8	9,8	6,8
	MV	87,4	76,5	73,0	61,9	50,4	46,5	43,2	37,6	32,9	28,7	24,4	22,3	20,0	14,5	10,4	9,3	6,3
Nov 2Q	MM	96,0	83,8	79,9	67,4	54,4	50,0	46,3	40,1	34,8	30,0	25,2	22,8	20,2	14,0	9,5	8,2	4,9
	MV	89,2	78,3	74,8	63,7	52,1	48,2	44,8	39,3	34,6	30,3	26,1	23,9	21,6	16,1	12,0	10,9	7,9
Dez 1Q	MM	81,1	72,3	69,5	60,5	51,1	47,9	45,3	40,8	37,0	33,5	30,1	28,3	26,4	22,0	18,7	17,8	15,3
	MV	86,5	76,6	73,5	63,4	52,9	49,3	46,3	41,3	37,0	33,1	29,3	27,3	25,3	20,2	16,6	15,6	12,8
Dez 2Q	MM	119,6	104,4	99,5	83,9	67,7	62,3	57,6	49,9	43,3	37,3	31,4	28,3	25,1	17,4	11,7	10,1	5,9
	MV	102,0	90,3	86,5	74,5	62,1	57,8	54,3	48,3	43,2	38,6	34,0	31,7	29,2	23,3	18,9	17,7	14,4

Na Tabela 7, escolhendo 10 % como o nível adequado para a ocorrência de uma dada precipitação pluviométrica máxima diária para o período de dez dias, uma interpretação das informações pode ser feita do seguinte modo: verifica-se que existe 10% de probabilidade de que a precipitação diária máxima provável na terceira dezena do mês de dezembro seja maior que 80,5mm para o método dos momentos e maior que 70,5mm para o método da máxima verossimilhança. Praticamente, para o caso do método da máxima verossimilhança espera-se que em 1 de cada 10 anos, o valor da precipitação diária máxima na terceira dezena do mês de dezembro seja superior a 70,5mm, ou ainda, espera-se que em 9 de cada 10 anos, o valor da precipitação diária máxima na terceira dezena do mês de dezembro seja inferior ou igual a 70,5mm.

Observa-se na Tabela 7, que as precipitações máximas obtidas quando se usam as estimativas dos parâmetros fornecidas pelo método dos momentos apresentaram valores maiores do que os obtidos utilizando o método da máxima verossimilhança nos seguintes casos: para os níveis de probabilidade de 10, 5, 4 e 2 por cento na terceira dezena dos meses de janeiro e dezembro, e na segunda dezena de novembro, para os níveis de 5, 4 e 2 por cento na primeira dezena de fevereiro e para o nível de 4 por cento na terceira dezena de março e primeira dezena de outubro, sendo que em todos esses casos a diferença entre as estimativas foi igual ou superior a 4mm. Para o nível de 2 %, da terceira dezena do mês de dezembro, nota-se que a diferença entre as estimativas de valores (117,5 e 98,8) foi de 17,6mm, o que pode ser uma quantidade significativa a ser considerada em certas obras hidráulicas.

Pode-se notar ainda que na primeira e segunda dezenas de dezembro, as estimativas das precipitações máximas fornecidas pelo método dos momentos foram menores que as fornecidas pelo outro método, nos níveis de 4 por cento para a primeira e de 4 e 2 por cento para a segunda. O mesmo fato ocorreu na terceira dezena de dezembro, só que nos níveis de 80, 90, 95, 96 e 98 por cento,

sendo que a diferença entre as estimativas nestes casos foi igual ou superior a 4mm. Nos demais períodos de dez dias as estimativas obtidas por ambos os métodos não apresentaram grande diferença entre os valores, ressaltando que na primeira dezena de março as estimativas fornecidas pelo método dos momentos foram levemente menores que as fornecidas pelo outro método (Tabela 7).

Para a primeira e segunda dezena de abril (Tabela 7), percebe-se que não foram apresentados os valores das estimativas das precipitações máximas prováveis obtidas pelo método dos momentos, isto devido ao fato de que a distribuição de Gumbel não se ajustou aos dados quando se utilizaram as estimativas dos parâmetros fornecidas por este método.

Comparando a Tabela 7 com a Tabela 4A (Anexo A), nota-se, especificamente para caso da máxima verossimilhança nos níveis de 5 a 95 por cento, que houve uma leve alteração nos valores das estimativas das precipitações máximas encontradas por Gomes et al. (1989), nos seguintes casos: nas três dezenas dos meses de fevereiro e março, na segunda e terceira dezena de janeiro, na primeira e terceira dezena de novembro e na terceira dezenas dezembro, com destaque para a terceira dezena de dezembro, na qual houve um aumento de até 6mm nas estimativas de precipitações máximas. Um fator que deve ter influenciado este aumento foi a alta precipitação pluvial que ocorreu na terceira dezena de 1992, que foi de 202 mm acumulados em um dia.

Este fato demonstra que as precipitações máximas ocorridas após 1986 alteraram as estimativas das precipitações máximas esperadas para Lavras no período de dez dias, reforçando a importância de, sempre que possível, atualizar o banco de dados para calcular estimativas.

TABELA 7 – Estimativas das precipitações diárias máximas prováveis (mm), no período de dez dias, em diferentes níveis de probabilidade, calculadas pela distribuição de Gumbel utilizando-se estimativas dos parâmetros obtidas pelo métodos dos momentos (MM) e máxima verossimilhança (MV) .

Período	Met.	Nível de Probabilidade (%)																
		2	4	5	10	20	25	30	40	50	60	70	75	80	90	95	96	98
Jan 1D	MM	92,1	80,3	76,5	64,4	51,9	47,6	44,0	38,0	32,8	28,2	23,6	21,2	18,7	12,7	8,3	7,1	3,8
	MV	89,7	78,3	74,6	63,0	50,9	46,8	43,4	37,6	32,7	28,2	23,8	21,5	19,1	13,3	9,1	7,9	4,8
Jan 2D	MM	102,5	88,5	83,9	69,6	54,7	49,6	45,3	38,2	32,1	26,6	21,1	18,3	15,4	8,3	3,0	1,6	0,0
	MV	100,2	86,6	82,2	68,3	53,8	48,9	44,7	37,8	31,9	26,5	21,2	18,5	15,6	8,7	3,6	2,2	0,0
Jan 3D	MM	108,9	93,2	88,1	72,1	55,4	49,7	44,9	36,9	30,2	23,9	17,9	14,7	11,4	3,4	0,0	0,0	0,0
	MV	97,8	84,4	80,0	66,3	51,9	47,1	43,0	36,1	30,3	25,0	19,8	17,1	14,2	7,4	2,4	1,0	0,0
Fev 1D	MM	91,6	78,7	74,6	61,4	47,8	43,1	39,2	32,6	27,1	22,0	17,0	14,4	11,7	5,2	0,0	0,0	0,0
	MV	84,6	73,1	69,4	57,6	45,4	41,2	37,7	31,8	26,9	22,3	17,8	15,5	13,1	7,2	2,9	1,8	0,0
Fev 2D	MM	85,0	73,7	70,1	58,6	46,6	42,5	39,1	33,3	28,4	24,0	19,6	17,4	15,0	9,2	5,0	3,9	0,8
	MV	83,7	72,7	69,1	57,9	46,1	42,1	38,8	33,1	28,4	24,0	19,7	17,5	15,2	9,6	5,5	4,3	1,3
Fev 3D	MM	93,5	79,9	75,4	61,5	47,0	42,0	37,9	30,9	25,0	19,6	14,3	11,6	8,7	1,7	0,0	0,0	0,0
	MV	84,3	72,5	68,6	56,5	43,9	39,6	36,0	30,0	24,8	20,1	15,5	13,2	10,6	4,6	0,0	0,0	0,0

“ ... continua...”

“ TABELA 7, Cont. ”

Período	Met.	Nível de Probabilidade (%)																
		2	4	5	10	20	25	30	40	50	60	70	75	80	90	95	96	98
Mar 1D	MM	78,2	67,7	64,3	53,6	42,4	38,6	35,4	30,1	25,5	21,4	17,3	15,2	13,0	7,6	3,7	2,6	0,0
	MV	78,8	68,2	64,7	53,8	42,5	38,7	35,4	30,0	25,4	21,2	17,1	14,9	12,7	7,3	3,3	2,2	0,0
Mar 2D	MM	78,9	68,2	64,7	53,8	42,4	38,5	35,2	29,8	25,1	20,9	16,8	14,6	12,3	6,9	2,9	1,8	0,0
	MV	77,6	67,2	63,8	53,0	41,9	38,1	34,9	29,5	25,0	20,9	16,8	14,7	12,5	7,1	3,2	2,2	0,0
Mar 3D	MM	74,0	63,5	60,1	49,3	38,1	34,3	31,1	25,7	21,1	17,0	12,9	10,8	8,6	3,2	0,0	0,0	0,0
	MV	69,5	59,8	56,7	46,8	36,5	33,0	30,1	25,2	21,0	17,1	13,4	11,5	9,4	4,5	0,9	0,0	0,0
Abr 1D	MM*	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
	MV	56,3	47,9	45,2	36,7	27,8	24,8	22,2	18,0	14,4	11,0	7,8	6,1	4,4	0,0	0,0	0,0	0,0
Abr 2D	MM*	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
	MV	39,7	33,8	31,9	25,8	19,4	17,3	15,5	12,5	9,9	7,5	5,2	4,0	2,8	0,0	0,0	0,0	0,0
Set 3D	MM	45,5	38,8	36,6	29,6	22,4	20,0	17,9	14,4	11,5	8,8	6,2	4,8	3,4	0,0	0,0	0,0	0,0
	MV	43,5	37,1	35,0	28,5	21,6	19,3	17,3	14,1	11,3	8,7	6,2	5,0	3,6	0,0	0,0	0,0	0,0

“ ... continua...”

“ TABELA 7, Cont. ”

Período	Met.	Nível de Probabilidade (%)																
		2	4	5	10	20	25	30	40	50	60	70	75	80	90	95	96	98
Out 1D	MM	67,9	57,7	54,4	44,0	33,1	29,5	26,4	21,2	16,7	12,7	8,8	6,7	4,6	0,0	0,0	0,0	0,0
	MV	62,8	53,6	50,6	41,2	31,3	28,0	25,2	20,4	16,4	12,8	9,2	7,3	5,4	0,7	0,0	0,0	0,0
Out 3 D	MM	65,0	56,3	53,5	44,6	35,3	32,2	29,5	25,1	21,3	17,9	14,5	12,8	10,9	6,5	3,2	2,3	0,0
	MV	63,8	55,3	52,6	43,9	34,9	31,9	29,3	25,0	21,3	17,9	14,6	13,0	11,2	6,9	3,7	2,8	0,5
Out 2D	MM	63,2	54,3	51,4	42,4	32,9	29,8	27,0	22,5	18,7	15,2	11,7	10,0	8,1	3,6	0,0	0,0	0,0
	MV	62,7	53,9	51,0	42,0	32,7	29,5	26,8	22,3	18,5	15,0	11,6	9,8	8,0	3,5	0,0	0,0	0,0
Out 3 D	MM	65,0	56,3	53,5	44,6	35,3	32,2	29,5	25,1	21,3	17,9	14,5	12,8	10,9	6,5	3,2	2,3	0,0
	MV	63,8	55,3	52,6	43,9	34,9	31,9	29,3	25,0	21,3	17,9	14,6	13,0	11,2	6,9	3,7	2,8	0,5
Nov 1D	MM	83,8	72,3	68,6	56,8	44,5	40,3	36,8	30,9	25,9	21,4	16,9	14,6	12,2	6,3	2,0	0,8	0,0
	MV	80,7	69,8	66,2	55,1	43,4	39,5	36,1	30,6	25,8	21,5	17,3	15,1	12,8	7,2	3,1	2,0	0,0
Nov 2D	MM	87,9	76,0	72,1	59,9	47,1	42,8	39,2	33,1	27,9	23,1	18,5	16,1	13,6	7,5	3,0	1,8	0,0
	MV	80,5	70,0	66,6	55,9	44,7	40,9	37,7	32,3	27,8	23,6	19,6	17,5	15,2	9,9	6,0	4,9	2,0

“ ... continua...”

“ TABELA 7, Cont. ”

Período	Met.	Nível de Probabilidade (%)																
		2	4	5	10	20	25	30	40	50	60	70	75	80	90	95	96	98
Nov 3D	MM	78,9	68,8	65,5	55,2	44,4	40,7	37,6	32,4	28,0	24,0	20,1	18,1	15,9	10,8	7,0	6,0	3,2
	MV	75,8	66,3	63,2	53,4	43,2	39,8	36,9	32,0	27,8	24,1	20,3	18,4	16,4	11,5	8,0	7,0	4,4
Dez 1D	MM	78,1	68,3	65,1	55,2	44,7	41,2	38,2	33,3	29,0	25,2	21,4	19,4	17,4	12,4	8,7	7,7	5,0
	MV	82,6	72,0	68,5	57,6	46,2	42,4	39,1	33,7	29,1	24,8	20,7	18,6	16,3	10,9	6,9	5,8	2,9
Dez 2D	MM	80,8	71,3	68,2	58,5	48,3	44,9	41,9	37,1	32,9	29,2	25,5	23,6	21,5	16,7	13,1	12,1	9,5
	MV	86,4	75,8	72,3	61,5	50,1	46,3	43,0	37,6	33,0	28,8	24,6	22,5	20,3	14,8	10,9	9,8	6,8
Dez 3D	MM	117,5	101,7	96,6	80,5	63,7	58,0	53,2	45,1	38,3	32,0	25,9	22,7	19,4	11,4	5,5	3,9	0,0
	MV	98,8	86,8	82,9	70,5	57,7	53,3	49,7	43,5	38,3	33,5	28,8	26,4	23,9	17,7	13,2	12,0	8,7

* A distribuição de Gumbel não se ajustou aos dados quando se utilizou as estimativas dos parâmetros fornecidas pelo método dos momentos.

4.3 - Estimativas e intervalos de confiança dos parâmetros u e b

Os resultados numéricos encontrados para as estimativas dos parâmetros u e b obtidos pelo método dos momentos e pelo método da máxima verossimilhança, os intervalos de confiança e suas respectivas amplitudes, para ambos os métodos em cada período estudado, e a diferença da amplitude dos intervalos de confiança dos parâmetros obtidos pelo método dos momentos em relação aos da método da máxima verossimilhança em (%) são apresentados nas Tabelas 8, 9, 10 e 11.

Na Tabela 8, observa-se que a estimativa do parâmetro b foi maior quando obtida via método dos momentos e a do parâmetro u , praticamente igual nos dois métodos. Nota-se que a amplitude do intervalo de confiança do parâmetro b obtido pelo método dos momentos foi 56,50% maior que a amplitude do intervalo de confiança obtido para o estimador da máxima verossimilhança, indicando que este último forneceu estimativa de maior precisão do parâmetro b . A amplitude do intervalo de confiança do parâmetro u obtido pelo método dos momentos foi 2,38% maior que a amplitude do intervalo de confiança obtido para o estimador da máxima verossimilhança, mostrando que os dois estimadores apresentaram praticamente a mesma precisão neste caso.

Os diferentes valores das estimativas dos parâmetros, principalmente do b , afetaram as estimativas das precipitações pluviométricas diárias máximas no período de um ano, principalmente nos menores níveis de probabilidade nos meses citados (Tabela 4). Pelo fato de os estimadores de máxima verossimilhança terem apresentado intervalos de confiança de menor amplitude, verifica-se, que as estimativas das precipitações diárias máximas obtidas pela estimativa de máxima verossimilhança foram mais precisas.

TABELA 8 – Estimativa dos parâmetros u e b obtidos pelos métodos: momentos (MM) e da máxima verossimilhança (MV), limite inferior (LI), limite superior (LS) e amplitude do intervalo de confiança* obtidos pelo método Jackknife e diferença da amplitude dos intervalos de confiança dos parâmetros obtidos pelo MM em relação aos da MV em (%) no período de um ano.

Período	Métod.	Parâm	Estim.	LI	LS	Ampl.	Dif. (%)
ANO	MM	b	22,456	16,906	28,006	11,100	56,50
		u	67,363	62,643	72,084	9,440	2,38
	MV	b	20,903	17,357	24,450	7,093	
		u	67,790	63,180	72,401	9,221	

* ao nível de 95% de confiança

Observando a Tabela 9, pode-se verificar que as estimativas dos parâmetros u e b foram menores nos meses mais secos, em que houve ajuste (maio, junho e setembro), e maiores nos meses mais chuvosos. Mesmo não sendo a mesma distribuição, resultados semelhantes foram obtidos por Botelho (1998) para o parâmetro escala (γ) da distribuição Gama, quando a autora analisou dados diários de precipitação de Lavras.

Pode-se notar ainda que os resultados das estimativas do parâmetro b apresentaram valores maiores quando obtidas via método dos momentos nos meses de janeiro, fevereiro, abril, maio, junho, novembro e dezembro, sendo este último o mês que apresentou maior diferença entre os valores, que foram de 19,650 e 15,070 (dando uma diferença de 4,58). Nos meses de março, setembro e outubro, o parâmetro b obtido via método dos momentos apresentou valores levemente menores que os fornecido pelo outro método. O parâmetro u foi praticamente igual nos dois métodos para todos os meses em que houve ajuste da distribuição de Gumbel, excetuando-se apenas o mês de dezembro, em que a estimativa do parâmetro fornecida pelo método da máxima verossimilhança foi 1,663 maior que a outra estimativa.

Nota-se que a amplitude do intervalo de confiança do parâmetro b obtido pelo método dos momentos foi maior que a amplitude do intervalo de confiança obtido para o estimador da máxima verossimilhança para quase todos os meses em que houve o ajuste, excetuando-se apenas o mês de março, no qual a amplitude do intervalo de confiança do estimador dos momentos foi 4,19% menor que o outro. As maiores diferenças entre as amplitudes dos intervalos de confiança do parâmetro b ocorreram principalmente nos meses de janeiro, junho, dezembro, abril e maio, em que as amplitudes dos intervalos de confiança do estimador dos momentos chegaram a ser maiores ou iguais a 80,0 % da amplitude dos intervalos de confiança fornecidos pelo estimador da máxima verossimilhança.

Observando as estimativas das precipitações diárias máximas prováveis obtidas por ambos os métodos nos períodos mensais (Tabela 5), nota-se que as precipitações máximas obtidas quando se usaram as estimativas dos parâmetros fornecidas pelo método dos momentos apresentaram valores maiores, justamente nos meses citados anteriormente, demonstrando que estimativas maiores do parâmetro b tendem a fornecer estimativas de valores maiores de precipitação máxima. Esses valores mais elevados do parâmetro b podem ser justificados pelo fato de o parâmetro b obtido pelo estimador dos momentos depender diretamente do desvio padrão da série.

As amplitudes dos intervalos de confiança do parâmetro u obtido por ambos os métodos de estimação não apresentaram grande diferença entre si, embora em todos os meses, com exceção do mês de dezembro os intervalos de confiança fornecidos pelo estimador dos momentos tenham apresentado maior amplitude (Tabela 9). O fato de a amplitude do intervalo de confiança obtido para o estimador da máxima verossimilhança ter sido bem menor na quase totalidade dos meses demonstra que este estimador apresentou uma melhor precisão nas estimativas.

TABELA 9 – Estimativa dos parâmetros u e b obtidos pelos métodos: momentos (MM) e da máxima verossimilhança (MV), limite inferior (LI), limite superior (LS) e amplitude do intervalo de confiança* obtidos pelo método Jackknife, e a diferença da amplitude dos intervalos de confiança dos parâmetros obtidos pelo MM em relação aos da MV em (%) nos períodos de um mês.

Período	Métod.	Parâm	Estim.	LI	LS	Ampl.	Dif. (%)
Janeiro	MM	b	21,181	13,531	28,832	15,301	114,08
		u	44,679	40,126	49,231	9,105	6,37
	MV	b	19,159	15,585	22,732	7,147	
		u	45,396	41,116	49,676	8,560	
Fever.	MM	b	19,751	15,570	23,932	8,362	29,92
		u	36,369	31,992	40,747	8,754	2,24
	MV	b	19,149	15,931	22,367	6,436	
		u	36,481	32,200	40,762	8,563	
Março	MM	b	14,767	12,606	16,927	4,320	-4,19
		u	35,380	31,766	38,994	7,228	4,94
	MV	b	15,322	13,067	17,577	4,510	
		u	35,039	31,595	38,483	6,888	
Abril	MM	b	14,685	10,009	19,360	9,350	84,14
		u	17,215	14,434	19,996	5,562	3,24
	MV	b	12,277	9,738	14,816	5,078	
		u	18,023	15,330	20,717	5,388	
Maio	MM	b	13,748	9,747	17,749	8,003	81,26
		u	10,806	8,108	13,503	5,395	4,14
	MV	b	11,810	9,602	14,017	4,415	
		u	11,366	8,776	13,957	5,181	
Junho	MM	b	10,194	6,540	13,848	7,308	105,88
		u	6,025	4,143	7,907	3,763	8,63
	MV	b	7,966	6,192	9,741	3,550	
		u	6,724	4,992	8,456	3,464	

“... continua ...”

“TABELA 9, Cont.”

Setem..	MM	b	10,778	9,155	12,402	3,248	7,47
		u	15,447	12,736	18,158	5,422	3,08
	MV	b	11,754	10,243	13,265	3,022	
		u	15,080	12,450	17,710	5,260	
Outubr.	MM	b	12,509	10,385	14,633	4,248	12,66
		u	29,114	26,147	32,081	5,934	3,90
	MV	b	12,781	10,896	14,666	3,770	
		u	28,919	26,063	31,774	5,711	
Novem.	MM	b	16,956	13,624	20,287	6,663	24,52
		u	37,915	34,173	41,658	7,486	5,08
	MV	b	16,159	13,484	18,835	5,351	
		u	37,978	34,416	41,539	7,124	
Dezem.	MM	b	19,650	13,079	26,222	13,143	91,27
		u	43,171	39,913	46,429	6,515	-1,95
	MV	b	15,070	11,634	18,505	6,871	
		u	44,834	41,511	48,156	6,645	

* ao nível de 95 % de confiança

Na Tabela 10, pode-se verificar que os resultados das estimativas do parâmetro b apresentaram valores maiores quando obtidas via método dos momentos nos seguintes períodos: na segunda quinzena de janeiro, abril, novembro e dezembro e na primeira quinzena de fevereiro e abril, sendo os valores das estimativas na segunda quinzena de dezembro (21,453 e 16,625) os que apresentaram maior diferença, de 4,828. Observando os resultados da Tabela 6, pode-se verificar que neste mesmo período ocorreu a maior diferença entre as estimativas de precipitações máximas, em que as obtidas quando se usaram as estimativas dos parâmetros fornecidas pelo método dos momentos apresentaram, conseqüentemente, maiores valores.



Nas primeiras quinzenas dos meses de março, novembro e dezembro, a estimativa do parâmetro b obtida via método dos momentos apresentou valores menores que os fornecidos pelo outro método, sendo que essa diferença não ultrapassou 1,800. Esta diferença para o caso das primeiras quinzenas de março e dezembro refletiram diretamente nas estimativas de precipitação máxima observadas na Tabela 6. Para as demais quinzenas as estimativas do parâmetro b não apresentaram diferenças. Na Tabela 10, pode-se notar que o parâmetro u foi praticamente igual nos dois métodos para quase todas as quinzenas em que houve ajuste da distribuição de Gumbel, excetuando-se apenas a primeira quinzena de abril e a segunda de dezembro, em que a estimativa do parâmetro fornecida pelo método da máxima verossimilhança foi maior que a estimativa fornecida pelo outro método. Este resultado pode ter sido causada pelas diferenças nas estimativas do parâmetro b fornecido pelo método dos momentos e pelo método da máxima verossimilhança para esses meses, já que o parâmetro u é influenciado pelo parâmetro b , conforme apresentado em (3.13).

Nota-se na Tabela 10, que a amplitude do intervalo de confiança do parâmetro b obtido pelo método dos momentos foi maior que a amplitude do intervalo de confiança obtido para o estimador da máxima verossimilhança para quase todas as quinzenas ajustadas, excetuando-se apenas a primeira quinzena dos meses de janeiro e março no quais a amplitude do intervalo de confiança do estimador dos momentos foi 6,13% e 10,07% menor que o outro respectivamente. As maiores diferenças entre as amplitudes dos intervalos de confiança do parâmetro b ocorreram principalmente na segunda quinzena dos meses de janeiro, fevereiro, setembro, novembro e dezembro e na primeira quinzena dos meses de fevereiro e abril. Percebe-se, que em todos esses casos as amplitudes dos intervalos de confiança do estimador dos momentos foram no mínimo 25 % maior que a amplitude dos intervalos de confiança fornecidos pelo estimador da máxima verossimilhança.

TABELA 10 – Estimativa dos parâmetros u e b obtidos pelos métodos: momentos (MM) e da máxima verossimilhança (MV), limite inferior (LI), limite superior (LS) e amplitude do intervalo de confiança* obtidos pelo método Jackknife e a diferença da amplitude dos intervalos de confiança dos parâmetros obtidos pelo MM em relação aos da MV em (%) nos períodos de quinze dias.

Período	Métod.	Parâm	Estim.	LI	LS	Ampl.	Dif. (%)
Janeiro 1 Q	MM	b	18,010	15,014	21,006	5,992	-6,13
		u	33,386	29,220	37,551	8,330	2,95
	MV	b	18,015	14,823	21,206	6,383	
		u	33,298	29,252	37,344	8,092	
Janeiro 2 Q	MM	b	22,107	13,405	30,810	17,404	151,29
		u	32,097	27,193	37,000	9,808	3,56
	MV	b	20,972	17,509	24,434	6,926	
		u	32,762	28,027	37,498	9,471	
Fevereiro 1Q	MM	b	18,503	14,696	22,311	7,615	26,80
		u	27,030	23,019	31,042	8,023	5,18
	MV	b	17,159	14,156	20,162	6,006	
		u	27,249	23,435	31,063	7,628	
Fevereiro 2Q	MM	b	17,947	12,792	23,102	10,310	86,31
		u	25,332	21,458	29,205	7,747	0,26
	MV	b	17,096	14,329	19,863	5,534	
		u	25,674	21,811	29,537	7,727	
Março 1Q	MM	b	14,522	12,398	16,645	4,247	-10,07
		u	28,123	24,406	31,839	7,433	2,72
	MV	b	16,005	13,644	18,366	4,722	
		u	27,610	23,993	31,228	7,236	
Março 2Q	MM	b	15,414	12,378	18,449	6,071	22,70
		u	21,250	17,908	24,592	6,684	3,48
	MV	b	14,588	12,115	17,062	4,947	
		u	21,398	18,168	24,628	6,459	
Abril 1Q	MM	b	15,358	10,342	20,373	10,031	91,57
		u	12,290	9,504	15,075	5,570	4,01
	MV	b	12,256	9,638	14,874	5,236	
		u	13,309	10,631	15,986	5,355	

“ ... continua ... ”

“TABELA 10, Cont.”

Abril	MM	b	9,883	7,995	11,772	3,777	8,53
		u	7,271	5,246	9,297	4,051	10,35
2Q	MV	b	8,425	6,685	10,165	3,480	
		u	7,527	5,691	9,362	3,671	
Setem.	MM	b	9,959	7,990	11,927	3,936	35,35
		u	9,644	7,365	11,923	4,558	5,46
2Q	MV	b	9,745	8,291	11,199	2,908	
		u	9,581	7,420	11,743	4,322	
Outubr.	MM	b	14,258	11,794	16,722	4,928	18,26
		u	17,709	14,355	21,063	6,708	5,32
1Q	MV	b	14,267	12,183	16,350	4,167	
		u	17,519	14,335	20,704	6,369	
Outubr.	MM	b	12,057	9,999	14,114	4,115	9,95
		u	21,475	18,582	24,369	5,786	2,76
2Q	MV	b	12,582	10,710	14,453	3,743	
		u	21,251	18,436	24,067	5,631	
Novem.	MM	b	14,951	11,939	17,963	6,023	8,91
		u	27,390	23,965	30,814	6,850	0,28
1Q	MV	b	15,392	12,626	18,157	5,531	
		u	27,306	23,891	30,721	6,830	
Novem.	MM	b	17,205	13,283	21,127	7,844	36,59
		u	28,521	24,972	32,071	7,098	5,16
2Q	MV	b	15,435	12,564	18,306	5,743	
		u	28,931	25,556	32,306	6,750	
Dezem.	MM	b	12,412	10,607	14,217	3,611	0,78
		u	32,426	29,163	35,690	6,526	2,13
1Q	MV	b	13,985	12,193	15,776	3,583	
		u	31,909	28,714	35,105	6,390	
Dezem.	MM	b	21,453	14,602	28,303	13,701	82,57
		u	35,449	31,808	39,090	7,282	-0,59
2Q	MV	b	16,625	12,873	20,378	7,504	
		u	37,126	33,464	40,789	7,325	

* ao nível de 95% de confiança

As amplitudes dos intervalos de confiança do parâmetro u obtido por ambos os estimadores não apresentaram grande diferença entre si, embora em quase todas as quinzenas, com exceção da segunda quinzena do mês de dezembro, os intervalos de confiança fornecidos pelo estimador dos momentos tenham apresentado maior amplitude (Tabela 10). O fato de a amplitude do intervalo de confiança obtido para o estimador da máxima verossimilhança ter sido bem menor na quase totalidade das quinzenas em que houve ajustes mostra que este método forneceu estimativas mais precisas dos parâmetros e, conseqüentemente, estimativas mais precisas de precipitações diárias máximas.

Observando a Tabela 11, pode-se verificar que os resultados das estimativas do parâmetro b apresentaram valores maiores quando obtidas via método dos momentos em quase todas as dezenas que se ajustaram, excetuando-se a primeira dezena de março e a primeira e a segunda dezena de dezembro em que as estimativas do parâmetro b obtida via método dos momentos mostraram valores menores que os fornecidos pelo outro método. Porém, as maiores diferenças entre as estimativas ocorreram na primeira dezena dos meses de fevereiro, abril e outubro, na segunda dezena de abril e novembro e na terceira dezena de fevereiro, março, setembro e dezembro, sendo os valores das estimativas na terceira dezena de dezembro (22,263 e 17,119) os que apresentaram maior diferença, de 5,144. Analisando as Tabelas 11 e 7 conjuntamente, pode-se notar que os períodos em que ocorreram as maiores diferenças entre as estimativas de precipitações máximas, principalmente nos níveis de 2, 4 e 5 por cento, são os mesmos nos quais houve as maiores diferenças entre as estimativas dos parâmetros fornecidas pelos métodos, indicando uma relação direta entre as estimativas do parâmetro b e as estimativas de precipitações.

Comparando as Tabelas 3 e 11, especificamente a primeira e a segunda dezenas de abril, pode-se verificar que o fato de o estimador dos momentos ter

fornecido estimativas mais elevadas do parâmetro b influenciou diretamente no ajuste da distribuição de Gumbel, sendo que os dados com estas estimativas não se ajustaram, enquanto os dados com as estimativas fornecidas pelo método da máxima verossimilhança se ajustaram .

Na Tabela 11, nota-se que os valores das estimativas do parâmetro u não apresentaram grandes diferenças entre os métodos, excetuando-se apenas a terceira dezena dos meses de janeiro e dezembro e a primeira dezena de abril, em que a estimativa do parâmetro fornecida pelo método da máxima verossimilhança apresentou valores maiores que as estimativas fornecidas pelo método dos momentos. Este resultado pode ter sido causado pelas diferenças entre as estimativas do parâmetro b fornecido pelo método dos momentos e pelo método da máxima verossimilhança nestas dezenas, já que o parâmetro u é influenciado pelo parâmetro b , conforme apresentado em (3.13).

Em relação às amplitudes dos intervalos de confiança do parâmetro b obtido pelo método dos momentos, pode-se notar, na Tabela 11, que estas apresentaram valores maiores que os obtidos para o estimador da máxima verossimilhança para quase todas as dezenas, excetuando-se apenas a terceira dezena do mês de setembro e a segunda dezena dos meses de outubro e dezembro nos quais a amplitude do intervalo de confiança do estimador dos momentos foi 5,61%, 6,00% e 16,57% menor que o outro, respectivamente. As maiores diferenças entre as amplitudes dos intervalos de confiança do parâmetro b ocorreram principalmente na primeira dezena dos meses de fevereiro, abril, outubro e novembro, na segunda dezena dos meses de fevereiro e novembro e na terceira dezena dos meses de janeiro, fevereiro, março e dezembro, em que as amplitudes dos intervalos de confiança do estimador dos momentos foram no mínimo 23 % maiores que a amplitude dos intervalos de confiança fornecidos pelo estimador da máxima verossimilhança. Uma diferença muito alta entre as amplitudes dos intervalos de confiança que deve ser ressaltada foi a encontrada

na terceira dezena de janeiro, em que a amplitudes dos intervalo de confiança do estimador dos momentos foi 190,89 % maior que a amplitude dos intervalo de confiança fornecido pelo estimador da máxima verossimilhança.

As amplitudes dos intervalos de confiança do parâmetro μ obtido por ambos os estimadores não apresentaram grande diferença entre si, embora em todas as dezenas, com exceção da terceira do mês de dezembro os intervalos de confiança fornecidos pelo estimador dos momentos tenha apresentado maior amplitude, sendo a diferença sempre menor que 11,10 % (Tabela 11).

O fato de a amplitude do intervalo de confiança obtido para o estimador da máxima verossimilhança ter sido bem menor na quase totalidade das dezenas ajustadas demonstra que estes estimadores apresentaram uma melhor precisão nas estimativas e, conseqüentemente fornecem estimativas mais precisas de precipitações máximas.

Em uma análise geral de todos os períodos estudados, tem-se que em 87,2% dos intervalos de confiança para o parâmetro b e em 92,8% dos intervalos de confiança para o parâmetro μ houve menor amplitude quando se utilizou o estimador de máxima verossimilhança, mostrando que o método da máxima verossimilhança é mais preciso para se obterem as estimativas dos parâmetros b e μ da distribuição de Gumbel, complementando os resultados obtidos por Lowery & Nash (1970), segundo os quais concluíram que este é ligeiramente mais eficiente que o método dos momentos.

TABELA 11 – Estimativa dos parâmetros u e b obtidos pelos métodos: momentos (MM) e da máxima verossimilhança (MV), limite inferior (LI), limite superior (LS) e amplitude do intervalo de confiança* obtidos pelo método Jackknife, e a diferença da amplitude dos intervalo de confiança dos parâmetros obtidos pelo MM em relação aos da MV em (%) nos períodos de dez dias.

Período	Métod.	Parâm	Estim.	LI	LS	Ampl.	Dif. (%)
Janeiro 1 D	MM	b	16,673	13,744	19,601	5,858	7,59
		u	26,757	22,981	30,532	7,550	4,43
	MV	b	16,119	13,396	18,841	5,445	
		u	26,765	23,150	30,380	7,230	
Janeiro 2 D	MM	b	19,774	16,595	22,953	6,358	1,11
		u	24,912	20,369	29,455	9,086	5,46
	MV	b	19,308	16,164	22,452	6,288	
		u	24,812	20,504	29,119	8,615	
Janeiro 3 D	MM	b	22,127	12,126	32,128	20,002	190,89
		u	22,076	17,351	26,800	9,449	10,12
	MV	b	19,082	15,644	22,520	6,876	
		u	23,322	19,031	27,612	8,581	
Fevere. 1 D	MM	b	18,133	13,888	22,377	8,488	42,15
		u	20,458	16,656	24,261	7,605	4,90
	MV	b	16,345	13,359	19,330	5,971	
		u	20,862	17,237	24,487	7,250	
Fevere. 2 D	MM	b	15,894	12,650	19,139	6,489	30,16
		u	22,642	19,018	26,267	7,249	2,73
	MV	b	15,652	13,160	18,145	4,985	
		u	22,627	19,099	26,155	7,057	
Fevere. 3 D	MM	b	19,257	13,747	24,766	11,018	75,91
		u	17,966	14,067	21,866	7,799	3,69
	MV	b	16,830	13,698	19,961	6,263	
		u	18,660	14,899	22,420	7,521	
Março 1 D	MM	b	14,821	12,369	17,273	4,904	10,80
		u	20,110	16,557	23,664	7,106	4,71
	MV	b	15,103	12,890	17,316	4,426	
		u	19,858	16,464	23,251	6,786	

“... continua ...”

“TABELA 11, Cont.”

Março	MM	b	15,104	12,389	17,819	5,429	16,79
		u	19,626	16,180	23,071	6,892	4,07
2 D	MV	b	14,880	12,555	17,204	4,649	
		u	19,554	16,243	22,865	6,622	
Março	MM	b	14,862	11,774	17,950	6,176	31,03
		u	15,718	12,553	18,883	6,330	4,41
3 D	MV	b	13,717	11,361	16,074	4,713	
		u	15,942	12,911	18,973	6,062	
Abril	MM	b	15,898	10,679	21,118	10,439	79,19
		u	8,769	6,002	11,537	5,535	8,25
1 D	MV	b	11,855	8,942	14,768	5,826	
		u	10,010	7,453	12,566	5,113	
Abril	MM	b	10,312	8,196	12,427	4,231	12,60
		u	6,396	4,368	8,425	4,057	11,05
2 D	MV	b	8,443	6,565	10,322	3,758	
		u	6,781	4,954	8,607	3,654	
Setem.	MM	b	9,567	8,160	10,974	2,814	-5,61
		u	8,017	5,815	10,218	4,403	9,42
1 D	MV	b	9,126	7,635	10,617	2,981	
		u	7,932	5,920	9,944	4,024	
Outubr.	MM	b	14,375	11,509	17,242	5,733	23,69
		u	11,499	8,369	14,630	6,261	8,00
1 D	MV	b	13,119	10,801	15,436	4,635	
		u	11,632	8,733	14,531	5,797	
Outubr.	MM	b	12,508	10,747	14,269	3,522	-6,00
		u	14,120	11,153	17,088	5,935	6,67
2 D	MV	b	12,498	10,624	14,371	3,747	
		u	13,920	11,138	16,702	5,564	

“... continua ...”

“TABELA 11, Cont.”

Outubr.	MM	b	12,291	9,820	14,762	4,942	29,41
		u	16,839	14,112	19,566	5,453	1,93
3 D	MV	b	12,018	10,109	13,928	3,819	
		u	16,878	14,203	19,553	5,350	
Novem.	MM	b	16,273	12,906	19,640	6,734	32,32
		u	20,005	16,475	23,535	7,060	3,13
1 D	MV	b	15,518	12,974	18,063	5,089	
		u	20,144	16,721	23,567	6,846	
Novem.	MM	b	16,883	12,194	21,573	9,379	73,01
		u	21,721	18,369	25,072	6,703	2,40
2 D	MV	b	14,897	12,187	17,608	5,421	
		u	22,325	19,052	25,598	6,546	
Novem.	MM	b	14,303	11,950	16,657	4,707	2,73
		u	22,827	19,667	25,987	6,319	5,97
3 D	MV	b	13,571	11,281	15,862	4,582	
		u	22,865	19,884	25,847	5,963	
Dezem.	MM	b	13,785	11,713	15,857	4,145	2,78
		u	23,999	20,502	27,495	6,993	2,51
1 D	MV	b	15,150	13,133	17,166	4,033	
		u	23,519	20,108	26,930	6,822	
Dezem.	MM	b	13,465	11,692	15,239	3,547	-16,57
		u	28,033	24,468	31,597	7,128	3,51
2 D	MV	b	15,114	12,988	17,239	4,251	
		u	27,445	24,002	30,888	6,887	
Dezem.	MM	b	22,263	15,003	29,524	14,521	85,58
		u	30,143	26,468	33,817	7,348	-2,59
3 D	MV	b	17,119	13,206	21,031	7,825	
		u	32,020	28,248	35,791	7,543	

* ao nível de 95% de confiança

5 - CONCLUSÕES

A partir das análises realizadas neste trabalho, chegou-se às seguintes conclusões:

1. O ajustamento da distribuição de Gumbel aos dados de precipitação máxima diária é mais eficiente nos períodos maiores e nos meses de maior incidência de precipitações.
2. As estimativas do parâmetro de posição u e do parâmetro escala b , para ambos os métodos de estimação, são maiores nos períodos mais chuvosos e menores nos meses mais secos.
3. No nível de 50 por cento de probabilidade, as estimativas das precipitações diárias máximas esperadas obtidas utilizando o método dos momentos e o método da máxima verossimilhança foram iguais em todos os casos.
4. O método da máxima verossimilhança forneceu estimativas mais precisas dos parâmetros u e b da distribuição de Gumbel e, conseqüentemente, estimativas mais precisas de precipitações diárias máximas.
5. As estimativas das precipitações diárias máximas prováveis podem ser usadas para auxiliar no planejamento de obras de engenharia hidráulica e agrícola na região de Lavras (MG).

6 - REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- ASSIS, F. N. de.; ARRUDA, H. V. de.; PEREIRA, A. R. **Aplicações de Estatística à Climatologia: teoria e prática**. Pelotas: Universitária/UFPel, 1996. 161 p.
- BACK, Á. J. **Análise das máximas Intensidades de Chuva para a Região de Urussanga - SC**. In: CONGRESSO NACIONAL DE ENGENHARIA DE AGRIMENSURA, 7., 1996, Salvador. **Anais...** Salvador: FENEA, 1996. p. 75-80.
- BANZATTO, D. A. **Estimativa das precipitações máximas prováveis no Estado de São Paulo**. 1973. 119 p. Tese (Doutorado em Ciências) - Faculdade de Ciências Agrárias e Veterinárias, Universidade Estadual Paulista, Jaboticabal.
- BEARZOTI, E. **Introdução à teoria de probabilidade e à inferência estatística**. Lavras: UFLA, 1998. 288 p. Apostila.
- BEIJO, L. A. ; MUNIZ, J. A. **Comparação de Métodos de Estimção dos Parâmetros da Distribuição Gumbel e Ajuste para dados de Precipitação Pluviométrica Máxima da Região de Jaboticabal, S.P.** In: REUNIÃO ANUAL DA REGIÃO BRASILEIRA DA SOCIEDADE INTERNACIONAL DE BIOMETRIA, 47. 2002. Rio Claro. **Anais....** Rio Claro: UNESP, 2002. 1 CD-Rom.
- BEIJO, L. A.; MUNIZ, J. A.; VOLPE, C. A.; PEREIRA, G. T. **Estudo da precipitação máxima em Jaboticabal (SP) pela distribuição de Gumbel utilizando dois métodos de estimção dos parâmetros**. **Revista Brasileira de Agrometeorologia**, Santa Maria, p. 14, out. 2002. No prelo.
- BELTRAME, L. F. S.; LANA, A. E. L.; LOUZADA, J. A. S. **Chuvas Intensas**. Porto Alegre: IPH-UFRGS, 1991. 69 p.
- BOTELHO, V. A. V. A. **Ajuste de distribuição gama aos dados de precipitação pluvial do município de Lavras Estado de Minas Gerais**. 1998. 121p. Dissertação (Mestrado em Agronomia – Estatística e Experimentação Agropecuária) – Universidade Federal de Lavras, Lavras.
- BRASIL. Ministério de Agricultura. **Normais Climatológicas (1961 - 1990)**. Rio de Janeiro: Ministério da Agricultura, Brasília: 1992. 84 p.

CAMPOS, H. de. *Estatística experimental não-paramétrica*. 3. ed. Piracicaba: ESALQ, 1979. 343 p.

CARDOSO, C. O.; ULLMANN, M. N.; BERTOL, I. *Análise de chuvas intensas a partir da desagregação de chuvas diárias para Santa Catarina - etapa - I- Lages e Campos Novos*. In: CONGRESSO BRASILEIRO DE ENGENHARIA AGRÍCOLA, 25., 1996, Bauru. *Anais...* Bauru, 1996. 1 CD-Rom.

CASELLA, G.; BERGER, R. L. *Statistical Inference*. Belmont, CA: Duxbury Press, 1990. 650 p.

CHOW, V. T. *Handbook of applied hydrology*. New York: McGraw-Hill, 1964. *Paginação irregular*.

DAMÉ, R. de. C. F.; TELXEIRA, C. F. A.; SOUTO, M. V., MOREIRA, N. M. *Análise de frequência hidrológica dos dados de precipitação pluvial de algumas estações agroclimatológicas da região sul do Rio Grande do Sul*. Santa Maria, 1993. Disponível em: <<http://www.ufsm.br/ccr/revista/resumos/r963.html>> . Acesso em: 29 out. 2002.

EFRON, B.; TIBSHIRANI, R. J. *An introduction to the bootstrap*. New York: Chapman & Hall, 1993. 436 p.

ELTZ, F. L. P.; REICHERT, J. M.; CASSOL, E. A. *Período de retorno de chuvas em Santa Maria*. *Revista Brasileira de Ciências do Solo*, Campinas, v. 16, n. 2, p.265-269, maio/ago. 1992.

ENGELHARDT, M.; BAIN, J. L. *Simplified Statistical procedure for the Weibull or extreme value distribution*. *Technometrics*, Whashington, v. 19, n. 3, p. 323-331, Aug. 1977.

GOMES, F. G.; AQUINO, L. H. de.; OLIVEIRA, M. S. de. *Estudo da distribuição e frequência de precipitação pluviométrica máxima em períodos de dez e quinze dias, um mês e um ano, em Lavras (MG) pela distribuição Gumbel*. *Ciência e Prática*, Lavras, v. 13, n. 2, p. 177-184, jul./dez. 1989.

GUMBEL, E. J. *Statistical theory of extreme values and some practical applications*. *National Bureau of Standards Applied. Mathematics. Series*, 33 Washington: DC, 1954.

GUMBEL, E. J. Statistics of Extremes. New York: Columbia University Press, 1958. 375 p.

HAAN, C. T. Statistical methods in hidrology. Ames: The Iowa State University Press, 1977. 377 p.

HERSHFIELD, D. M. Estimating the probable maximum precipitation. Journal of the Hydraulics Division. American Society of Civil Engineers, New York, v. 87, n. 5, p. 99-116, May 1961.

HERSHFIELD, D. M. Method for estimating probable maximum rainfall. Journal American Water Works Association, New York, v. 57, n. 8, p. 965-972, Aug. 1965.

LAWLESS, J.F. Statistical models and methods for lifetime data . New York: Wiley, 1982. 580 p.

LEOPOLDO, P. R.; SANSIGOLO, C. A.; MARTINS, D. Análise estatística das intensidades e precipitações máximas de Botucatu. Irrigação e Tecnologia Moderna, Brasília, n. 16, p. 11-14, mar. 1984.

LOWERY, M. D.; NASH, J. E. A comparison of methods of fitting the Double Exponential Distribution . Journal of Hydrology, Amsterdam, v.10, n. 3, p. 259-275, Feb. 1970.

MANLY, B.F.J. Randomization, Bootstrap and Monte Carlo methods in biology. London: Chapman & Hall, 1998. 399 p.

MANN, N. R.; SCHAFER, R. E.; SINGPURWALLA, N. D. Methods for Statistical Analysis of reliability and life data . New York: Wiley, 1974.

MATOS NETO, C. E.; FRAGA, N. S. Equação de Chuvas intensas para a cidade de Fortaleza. In: SIMPÓSIO BRASILEIRO DE HIDROLOGIA E RECURSOS HÍDRICOS, 5., 1983, Blumenau. Anais... Blumenau: Associação Brasileira de Hidrologia e Recursos Hidricos, 1983. p. 135-143.

MOOD, A. M.; GAYBILL, F. A., BOES, D. C. Introduction to the Theory of Statistics. 3. ed. New York: J. Wiley & Sons, 1974. 564p.

MURRAY, S. R. Ajustamento de curvas e o método dos mínimos quadrados. 2. ed. São Paulo: Shaum McGraw-Hill, 1985. p.272-274.

NELSON, W. **Applied Life Data Analysis**. New York: Wiley, 1982. 580 p.

NOBUKUNI, P. **Análise das precipitações com duração de 5 minutos a 24 horas, nas regiões de Jaboticabal e Presidente Prudente**. 2000. 65p. Dissertação (Mestrado em Agronomia) – Universidade Estadual Paulista, Jaboticabal.

OLIVEIRA, M. M.; SILVA, L. R. Distribuição de frequência pluviométrica para os municípios de Rocado e Pastos Bons. In: CONGRESSO BRASILEIRO DE ENGENHARIA AGRÍCOLA, 26., 1997, Campina Grande. **Anais...** Campina Grande, 1997. 1 CD-Rom.

OSBORN, H. B.; LANE, L.J.; MYERS, V. A. Rainfall watershed relationships for southwesterly thunderstorms. **Transactions of the ASAE**, St. Joseph, v. 23, n.1, p. 82-87, Jan./Feb. 1980.

PFAFSTETTER, O. **Chuvas intensas no Brasil**. Rio de Janeiro: DNOS/MVOP, 1957. 420 p.

PINTO, F. A. **Chuvas intensas no estado de Minas Gerais: análises e modelos**. 1995. 87p. Tese (Doutorado em Irrigação e Drenagem) - Universidade Federal de Viçosa, Viçosa, MG.

PINTO, F. R. L. **Equações de intensidades-duração-freqüência da precipitação para os estados do Rio de Janeiro e Espírito Santo: estimativa e espacialização**. 1999. 70p. Dissertação (Mestrado em Engenharia Agrícola) – Curso de Pós-graduação em Engenharia Agrícola, Universidade Federal de Viçosa, Viçosa, MG.

SAS INSTITUTE SAS / STAT. **SAS/IML Software: Usage and Reference**, version 6. Cary, 1990. 501p.

SOUZA, L. A. E. de.; SILVA, M. E. da. **Teoria de valores extremos para cálculo de VaR**. São Paulo, julho de 1999. Disponível em: < www.risktech.com.br/PDFs/var-evt.pdf. > Acesso em: 29 ago. 2002.

SUGAI, M. R. B.; FILL, H. D. O. A. Tempo de recorrência associado à precipitação máxima provável na região sul do Brasil. **Revista Brasileira de Engenharia. Caderno de Recursos Hídricos**, Rio de Janeiro, v. 8, n. 1, p. 81-110, jun. 1990.

TUCCI, C. M. **Hidrologia: ciência e aplicação**. Porto Alegre: UFRGS, 2001. 943 p.

VASCONCELLOS, S. L. B. de, **Análise da quantidade e distribuição pluviométrica na região de Jaboticabal - SP**. 1998. 63p. Dissertação (Mestrado em Agronomia) – Curso de Pós-graduação em Agronomia, Escola Superior de Agricultura Luiz de Queirós, Universidade de São Paulo, Piracicaba.

VIANELLO, R. L.; ALVES, A. R. **Meteorologia básica e aplicações**. Viçosa: Imprensa Universitária, 1991. 449 p.

VIEIRA, S. R.; LOMBARDI NETO, F.; BURROWS, I. T. Mapeamento da chuva diária máxima provável para o Estado de São Paulo. **Revista Brasileira de Ciências do Solo**, Campinas, v. 15, n. 1, p. 93-8, jan./abr. 1991.

VIEIRA, D. B.; LOMBARDI NETO, F.; SANTOS, R. P. Análise das intensidades máximas de chuva em Pindorama (SP). **Revista Brasileira de Ciências do Solo**, Campinas, v. 18, n. 2, p. 255-60, maio/ago. 1994.

VIEIRA, D. B.; LOMBARDI NETO, F.; SANTOS, R. P. Relação entre intensidade, duração e frequência de chuvas em Mococa, SP. **Pesquisa Brasileira Agropecuária**, v. 33, n. 8, ago. 1998. Disponível em: <<http://atlas.sct.embrapa.br/pab/pab.nsf/FrAnual>>. Acesso em: 17 nov. 2002.

VIEIRA, D. B.; FERRÃO, A. M. A.; ZUFFO, A. C. Estudo das máximas intensidades de chuva para a região de Piracicaba. In: CONGRESSO NACIONAL DE IRRIGAÇÃO E DRENAGEM, 8., 1988, Florianópolis. Anais... Florianópolis: ABID, 1998. p. 1085-1099.

VIVANCO, M. J. F. **Análise de valores extremos no tratamento estatístico da corrosão de equipamentos**. 1994. 107 p. Dissertação (Mestrado em Estatística)– Curso de Pós-graduação em Estatística, Universidade Estadual de Campinas, Campinas.

WORD METEOROLOGICAL ORGANIZATION. **Manual for estimation of probable maximum precipitation**. Geneva: 1973. 190 p.

ANEXOS

ANEXO A	Página
TABELA 1A	Precipitações pluviométricas máximas diárias esperadas, no período de 1 ano, para a região de Lavras, MG, calculadas pela distribuição Gumbel, conforme Gomes et. al. (1989) 82
TABELA 2A	Precipitações pluviométricas máximas diárias esperadas, no período de 1 mês, para a estação chuvosa na região de Lavras, MG, calculadas pela distribuição Gumbel, conforme Gomes et. al. (1989) 82
TABELA 3A	Precipitações pluviométricas máximas diárias esperadas, em períodos de 15 dias, para a estação chuvosa na região de Lavras, MG, calculadas pela distribuição Gumbel, conforme Gomes et. al. (1989).. 83
TABELA 4A	Precipitações pluviométricas máximas diárias esperadas, em períodos de 10 dias, para a estação chuvosa na região de Lavras, MG, calculadas pela distribuição Gumbel, conforme Gomes et. al. (1989).. 84

TABELA 1A – Precipitações pluviométricas máximas diárias esperadas, no período de 1 ano, para a região de Lavras, MG, calculadas pela distribuição Gumbel, conforme Gomes et. al.(1989).

Ano	Níveis de Probabilidade												
	5	10	20	25	30	40	50	60	70	75	80	90	95
1	130	115	100	94	90	83	76	71	65	62	59	51	46

TABELA 2A – Precipitações pluviométricas máximas diárias esperadas, no período de 1 mês, para a estação chuvosa na região de Lavras, MG, calculadas pela distribuição Gumbel, conforme Gomes et. al.(1989).

Meses	Níveis de Probabilidade												
	5	10	20	25	30	40	50	60	70	75	80	90	95
Jan.	99	86	72	68	64	57	52	47	42	39	36	30	25
Fev.	96	82	67	62	58	50	44	39	33	30	28	20	15
Mar.	78	67	56	52	49	44	39	35	31	29	27	22	18
Abr.	58	48	38	35	32	27	23	20	16	14	12	8	4
Mai.	46	38	29	26	24	19	16	13	10	8	6	2	0
Jun.	32	26	19	17	15	12	10	7	5	4	3	0	0
Ago.	27	21	16	14	12	10	8	6	4	3	2	0	0
Set.	50	42	33	30	27	23	19	16	13	11	9	5	2
Out.	66	57	48	45	42	38	34	31	27	26	24	19	16
Nov.	86	74	62	58	54	48	44	39	34	32	30	24	20
Dez.	94	82	70	66	63	57	52	48	43	41	39	33	29

TABELA 3A – Precipitações pluviométricas máximas diárias esperadas, em período de 15 dias, para a estação chuvosa na região de Lavras, MG, calculadas pela distribuição Gumbel, conforme Gomes et. al.(1989).

Meses	Quinzena	Níveis de Probabilidade												
		5	10	20	25	30	40	50	60	70	75	80	90	95
Out.	1	60	50	39	36	32	27	23	19	15	13	11	6	2
	2	57	49	40	37	34	30	26	23	20	18	16	12	9
Nov.	1	74	63	52	48	44	39	34	30	25	23	21	15	11
	2	72	62	50	46	43	38	33	29	25	23	20	15	11
Dez.	1	76	66	55	51	48	42	38	34	30	28	26	20	17
	2	89	76	63	59	55	49	43	38	34	31	29	22	18
Jan.	1	87	74	60	55	51	45	39	34	29	26	24	17	12
	2	92	77	62	57	53	46	40	34	29	26	23	16	11
Fev.	1	78	65	52	48	44	38	33	28	23	21	18	12	7
	2	78	66	52	48	44	38	32	27	23	20	17	11	6
Mar.	1	70	59	48	44	41	36	31	27	23	21	19	14	10
	2	67	56	45	41	37	32	27	23	19	16	14	8	4

TABELA 4A – Precipitações pluviométricas máximas diárias esperadas, em períodos de 10 dias, para a estação chuvosa na região de Lavras, MG, calculadas pela distribuição de Gumbel, conforme Gomes et. al.(1989).

Meses	Dezena	Níveis de Probabilidade												
		5	10	20	25	30	40	50	60	70	75	80	90	95
Out.	1	52	42	32	28	26	21	17	13	9	8	6	1	0
	2	52	43	34	31	28	23	20	16	12	11	9	4	1
	3	52	44	35	32	30	25	22	19	16	14	12	8	5
Nov.	1	68	56	44	40	37	32	27	22	18	16	14	8	4
	2	67	56	45	41	38	32	28	24	20	18	15	10	6
	3	60	51	41	38	35	31	27	23	20	18	16	11	8
Dez.	1	69	58	47	43	40	34	30	25	21	19	17	11	7
	2	72	61	50	46	43	37	32	28	24	22	20	14	10
	3	87	74	60	55	51	45	39	34	29	27	24	17	12
Jan.	1	74	63	50	46	43	37	32	27	23	20	18	12	8
	2	85	70	56	51	47	40	34	28	23	20	17	10	5
	3	74	61	48	44	40	33	28	23	18	16	13	7	2
Fev.	1	67	56	44	40	36	31	26	21	17	15	12	7	2
	2	71	59	47	43	39	34	28	24	20	17	15	9	5
	3	70	58	45	41	37	31	26	21	16	14	11	5	0
Mar.	1	61	51	41	37	34	29	24	21	17	15	13	8	4
	2	62	51	40	37	34	28	24	20	16	14	12	7	3
	3	60	49	38	34	31	26	22	18	14	12	9	4	0

ANEXOS B

PROGRAMA	Página
PROGRAMA 1B Rotina SAS [®] para obtenção dos parâmetros u e b pelo método da máxima verossimilhança (MV) e pelo método dos momentos (MM).....	86
PROGRAMA 2B Rotina SAS [®] para obtenção dos intervalo de confiança dos parâmetros u e b , dos estimadores MV e MM, e suas respectivas amplitudes.....	87

Programa 1B: Rotina SAS[®] para obtenção dos parâmetros μ e b pelo método da máxima verossimilhança (MV) e pelo método dos momentos (MM)

```
data chuva;
input x1;  * x1= vetor de observações, " precipitações máximas".
cards;
34,0
:
.
86,8
;
proc iml;
use chuva;
```

***Cálculo das estimativas da máxima verossimilhança de μ e b .
Método Iterativo de Newton Raphson.**

```
read all into x1;
x=-1#x1;
b0=0.10744;  * Valor de inicialização da estimativa de b.
dr=1;
do until(dr<0.001);  * O procedimento é parado quando a diferença relativa entre
a última e a penúltima aproximação é menor que 0.001.

n=nrow(x); n1=n-1; U=j(n,1,1); x2=x##2; e=exp(x/b0); se=u`*e;
d3=-1*(u`*x)/n; sx2=(u`*x2); med2=(-1*(u`*x))##2/n;
dv=((sx2-med2)/n1)##0.5; d1=(x`*e)/se;
fb0=d1-b0-(u`*x)/n;
d2=(x2`*e)/se;
dfb0=(1/(b0**2))*((d1**2)-d2)-1;

emvb=b0-fb0/dfb0; * Estimativa da máxima verossimilhança de b. Expressão 3.23.
dr=abs(emvb-b0)/b0;
b0=emvb;

mmb=0.7796968*dv;  * Estimativa dos momento de b. Expressão 3.13.

mmu=d3-(0.45005*dv);  * Estimativa dos momentos de  $\mu$ . Expressão 3.14.
end;
emvb=b0;
emvu=-1*emvb*log((u`*exp(x/emvb))/n);  * Estimativa da máxima verossimilhança
de  $\mu$ . Expressão 3.22.

print emvu emvb;
print mmu mmb;
run;quit;
```

Programa 2B: Rotina SAS® para obtenção dos intervalos de confiança dos parâmetros u e b , dos estimadores MV e MM e suas respectivas amplitudes.

```
options nocenter ps=90;
data flows;
input x1;          * x1= vetor de observações, “ precipitações máximas”.
cards;
25,3
:
.
118,6
;
proc iml;
use flows;
read all into x1;
```

*** Método de reamostragem Jackknife.**

```
n=nrow(x1); nlin=n-1; x88=j(n,n,0); bp=j(n,4,0); ic=j(4,5,0);
do i=1 to n;
  x88[,i]=x1;
end;
y=j(nlin,1,0);
do ii=1 to n ;
  do jj=1 to n;
    if jj^=ii then
      do;
        if jj<ii then y[jj]=x88[jj,ii];
        else y[jj-1]=x88[jj,ii];
      end;
    end;
  end;
x=-1#y;
```

*** Procedimento para obtenção dos pseudos-valores dos parâmetros u e b , para os estimadores dos momentos e da máxima verossimilhança.**

```
b0=0.10744;
dr=1;
do until(dr<0.001);
  n=nrow(x);      U=j(n,1,1);    x2=x##2;    e=exp(x/b0);    se=u`*e;
  d3=-1*(u`*x)/n;
  sx2=(u`*x2);
  med2=((-1*(u`*x))##2)/n;
  dv=((sx2-med2)/nlin)##0.5;
```

```

d1=(x`*e)/se; fb0=d1-b0-(u`*x)/n;
d2=(x2`*e)/se;
dfb0=(1/(b0**2))*((d1**2)-d2)-1;
emvb=b0-fb0/dfb0;
dr=abs(emvb-b0)/b0;
b0=emvb;
end;
emvb=b0;
emvu=-1*emvb*log((u`*exp(x/emvb))/n);
mmb=0.7796968*dv;
mmu=d3-(0.45005dv);

```

***bp:** matriz das estimativas sem a j-ésima observação.

```

bp[ii,1]=mmb; bp[ii,2]=mmu; bp[ii,3]=emvb; bp[ii,4]=emvu;
end;

```

```

n=nrow(x1); k=ncol(bp); y2=j(n,1,0); x8=j(n,4,0); icinf=j(4,1,0);
icsup=j(4,1,0); amp=j(4,1,0); p=j(n,1,0); U2=j(n,1,1);

```

```

do iii=1 to k ;
y2=bp[,iii];
dj=(u2`*y2)/n;
p[,1]=dj;
e=(n*dj)-(nlin*y2); *Expressão 3.33.
d4=(u2`*e)/n;
xj=e##2;
sxj=(u2`*xj);
medj=((u2`*e)##2)/n;
dvj=((sxj-medj)/nlin);
varJ=dvj/n; *Expressão 3.35.
icinf=d4-1.96*(varJ##0.5); *Expressão 3.36.
icsup=d4+1.96*(varJ##0.5); *Expressão 3.36.
amp=icsup-icinf;

```

ic: matriz contendo as estimativas Jackknife na primeira coluna, o limite inferior dos IC's na segunda coluna, o limite superior dos IC's na terceira coluna e a amplitude dos IC's na quarta coluna.

```

ic[iii,1]=dj; ic[iii,2]=icinf; ic[iii,3]=icsup; ic[iii,4]=amp;
end;
print ic ; quit;

```

*** Comentários sobre o programa.**

ANEXOS C

Propriedades das funções gama, digama e poligama.....90

Propriedades das funções gama, digama e poligama

De acordo com Lawless (1982), algumas propriedades das funções gama, digama e poligama que podem facilitar a obtenção de alguns resultados são, respectivamente.

- A função gama é definida como

$$\Gamma(z) = \int_0^{\infty} u^{z-1} e^{-u} du, \text{ em que } z > 0.$$

Algumas propriedades importantes:

A- $\Gamma(z+1) = z\Gamma(z)$, em que $z > 0$.

B- $\Gamma(\frac{1}{2}) = \pi^{\frac{1}{2}} = 1.77245\dots$

C- $\log \Gamma(z) = (z - \frac{1}{2}) \log(z) - z + \frac{1}{2} \log(2\pi) + \frac{1}{12z} - \frac{1}{360z^3} + \frac{1}{260z^5} - \dots$

- A função digama é definida como

$$\psi(z) = \frac{d \log \Gamma(z)}{dz} = \frac{\Gamma'(z)}{\Gamma(z)}, \text{ em que } z > 0.$$

Portanto,

$$\Gamma'(z) = \psi(z)\Gamma(z).$$

- A função poligama é definida como

$$\psi^{(n)}(z) = \frac{d^n \psi(z)}{dz^n}, \text{ em que } n = 1, 2, \dots$$

Algumas propriedades importantes:

A- $\psi(z+1) = \psi(z) + \frac{1}{z}$, em que $z > 0$.

B- $\psi(1) = -\gamma = -0.577215\dots$, em que γ é chamada constante de Euler.

C-
$$\psi(z) = \log z - \frac{1}{2z} - \frac{1}{12z^2} + \frac{1}{120z^4} - \frac{1}{252z^6} + \dots$$

D-
$$\psi'(z+1) = \psi'(z) - \frac{1}{z^2}, \text{ em que } z > 0.$$

E-
$$\psi'(1) = -\frac{\pi^2}{6}.$$

F-
$$\psi'(z) = \frac{1}{z} + \frac{1}{2z^2} + \frac{1}{6z^3} - \frac{1}{30z^5} + \frac{1}{42z^7} + \dots$$