



RENATA PIRES GONÇALVES

**AJUSTE DE MODELOS DE PLATÔ DE
RESPOSTA VIA REGRESSÃO ISOTÔNICA**

LAVRAS - MG

2011

RENATA PIRES GONÇALVES

**AJUSTE DE MODELOS DE PLATÔ DE RESPOSTA VIA REGRESSÃO
ISOTÔNICA**

Tese apresentada à Universidade Federal de Lavras, como parte das exigências do Programa de Pós-Graduação em Estatística e Experimentação Agropecuária, área de concentração em Estatística e Experimentação Agropecuária, para a obtenção do título de Doutor.

Orientador

Dr. Lucas Monteiro Chaves

Co-orientadora

Ilana Villela Savian

-

-

-

VRAS - MG

-

2011

-

**Ficha Catalográfica Preparada pela Divisão de Processos Técnicos da
Biblioteca da UFLA**

Gonçalves, Renata Pires.

Ajuste de modelos de platô de resposta via regressão isotônica /
Renata Pires Gonçalves. – Lavras : UFLA, 2011.
89 p. : il.

Tese (doutorado) – Universidade Federal de Lavras, 2011.
Orientador: Lucas Monteiro Chaves.
Bibliografia.

1. Modelo de regressão. 2. Transformação de dados. 3.
Estimador não paramétrico. 4. Estimador semi paramétrico. I.
Universidade Federal de Lavras. II. Título.

CDD – 519.536

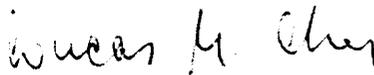
RENATA PIRES GONÇALVES

**AJUSTE DE MODELOS DE PLATÔ DE RESPOSTA VIA REGRESSÃO
ISOTÔNICA**

Tese apresentada à Universidade Federal de Lavras, como parte das exigências do Programa de Pós-Graduação em Estatística e Experimentação Agropecuária, área de concentração em Estatística e Experimentação Agropecuária, para a obtenção do título de Doutor.

APROVADA em 25 de Fevereiro de 2011.

| | |
|-------------------------------|-----------|
| Dr. Fabyano Fonseca e Silva | UFV |
| Dra. Taciana Villela Savian | ESALQ/USP |
| Dr. Augusto Ramalho de Moraes | UFLA |
| Dr. Joel Augusto Muniz | UFLA |



Dr. Lucas Monteiro Chaves
Orientador

LAVRAS - MG

2011

A meus pais,
João e Adriana,
sem filis de vida, sem vocês
isso não seria possível
St. Jo.

com panheira sen. pre... é
nessa a vitória!!!

A meus irmãos,
P. janne, P. gório, Be
lei, Bola e Cacau
pela amixade, incentivo e
carinho

As sobrinhas,
Gu, Ti, fita, Dandan,
Léo, João e Caio
meus grandes amores

As cunhadas
Gia, Tio Ranse,
Di. yse e Ana,
por fcs. jarem comigo essa
cor. quista.

Draico

Flor de ir embora
É uma flor que se alimenta do que a gente
chora
Rompe a terra decidida
Flor do meu desejo de correr o mundo afora
Flor de sentimento
Amadurecendo aos poucos a minha partida
Quando a flor abrir inteira
Muda a minha vida
Esperei o tempo certo
E lá vou eu
E lá vou eu
Flor de ir embora, eu vou
Agora esse mundo é meu
(Fátima Guedes)

AGRADECIMENTOS

A Deus, luz da minha vida.

À Universidade Federal de Lavras (UFLA) e aos professores e funcionários do programa de Pós-Graduação em Estatística e Experimentação Agropecuária da UFLA, pelo conhecimento transmitido durante o curso e pela oportunidade concedida para a realização do doutorado.

À Universidade Federal de Viçosa (UFV) e ao Colégio de Aplicação (Coluni), pelo incentivo e apoio na realização deste trabalho.

À Fundação de Amparo à Pesquisa do Estado de Minas Gerais (FAPEMIG), pela bolsa de estudo concedida.

Ao professor, orientador, Dr. Lucas Monteiro Chaves, pela orientação e amizade nesse percurso.

À professora, co-orientadora, Dra. Taciana Villela Savian, pela competência, apoio, amizade e disposição sempre.

Ao professor, Dr. Fabyano Fonseca e Silva, pela amizade e importante participação na realização deste trabalho.

Ao membros da banca examinadora, pelas críticas e sugestões que tanto contribuíram para o engrandecimento deste trabalho.

À minha família, pelo apoio, amor, amizade, união e incentivo em todos os momentos da minha vida.

À Jô, por aguentar todas as minhas "TPMS" e nunca me deixar esquecer que seria possível. Você é muito especial em minha vida!

Aos amigos, Bebê Urso, Adilson, Lup, Helder (artista), Tatis, Gordito, Carlos, Paty, Lincoln, Gagga, Na, Vê, Anderson, Ade, por todos os momentos inesquecíveis que vivemos.

Aos amigos, Dandan, Petro, Nega Linda, Toco, DB, Kabeção, Clau Clau, Luzinha, Cachiola, Rena, Lilica, Pedroca, Fabis, Taciana, Larinha, Lana, Hamilton, Kibi, Tias, sempre, sempre...juntos, obrigada!

Aos novos amigos e não menos importantes, Ju, Thi, Ted, todas as Caróis, Crysttian, Meire, Liege, Pauline, Everton, Nara, Inah, Bruno, Lucas, Ivone, Manoel, Lu, Abigail, Ed, Paulo, Miréia, Júlio, Giovana, meu carinho.

A Su, Hamilton, Lu, Ma e Dona Luiza, complemento da minha família

A Pepa, Brutus, Gafi e Luma, por todos os latidos de incentivo....

... E A TODOS, NOMINADOS E NÃO NOMINADOS, MEUS SINCEROS AGRADECIMENTOS POR FAZEREM PARTE DESTA CONQUISTA!

RESUMO

A regressão isotônica é uma técnica de transformação de dados que possibilita a incorporação de um conhecimento prévio, em que a variável dependente é não decrescente em relação à variável independente. Tal situação é caracterizada, por exemplo, por dados de platô de resposta, assim tal técnica pode ser utilizada com o intuito de aumentar a qualidade do ajuste de modelos utilizados para descrever estes dados. Dentre estes modelos destacam-se o polinomial quadrático e o não linear exponencial. Diante do exposto, o presente trabalho tem como objetivo utilizar a regressão isotônica no contexto de modelos de platô de resposta, propor um modelo logarítmico e um estimador não paramétrico. Além disso, objetiva-se empregar um estimador semi paramétrico ao se considerar modelos segmentados crescente-linear. Para estes objetivos, utilizaram-se, respectivamente, dados de deposição de Zn em ossos de aves da linhagem Hubbard e dados de peso/altura de crianças avaliadas mensalmente. A avaliação de todos os métodos abordados foi realizada por meio de simulação Monte Carlo, cujos resultados mostraram boa qualidade do modelo logarítmico proposto e dos métodos de estimação empregados.

Palavras-chave: Modelo de Regressão. Transformação de Dados. Estimador Não Paramétrico. Estimador Semi Paramétrico.

ABSTRACT

Isotonic regression is a data transformation technique that provides the incorporation of previous knowledge about the behavior of the dependent variable, widely characterized as a not decreasing, in function of independent variable. For instance, this situation can be occur in response plateau studies, whose the quality fit of the models can be improved by the use of isotonic regression. Among these models, stand out the quadratic polynomial and non linear exponential. Thus, in front of related issues, this work has as main objective to use isotonic regression in context of response plateau models, to propose a new logarithmic model and a nonparametric estimator. Furthermore, other objective is to use a semi parametric estimator for the parameters of segmented linear-increase model. Respectively to these objectives, were used data sets from Zn requirements in bones of Hubbard broiler and children weight-height data measured monthly. The efficiency of the methodologies was evaluated by Monte Carlo simulation, whose results showed a good performance for the proposed logarithmic model and for the used estimation methods.

Keywords: Regression Model. Data Transformation. Non Parametric Estimator. Semi Parametric Estimator.

LISTA DE FIGURAS

| | | |
|-----------|--|----|
| Figura 1 | Representação gráfica do modelo platô de resposta linear (PRL) . | 20 |
| Figura 2 | Representação gráfica do modelo platô de resposta quadrático (MPQ) | 22 |
| Figura 3 | Representação gráfica do modelo platô de resposta não linear exponencial (MNLE) | 24 |
| Figura 4 | Representação gráfica do modelo platô de resposta logarítmico (MLOG) | 39 |
| Figura 5 | Estabilização do platô obtida por meio do estimador não paramétrico para platô de resposta (ENPPR) | 45 |
| Figura 6 | Representação gráfica da regressão linear realizada para obtenção da variância da faixa de tolerância | 47 |
| Figura 7 | Representação gráfica do estimador semi paramétrico para modelos segmentados crescente - linear | 50 |
| Figura 8 | Valores simulados via modelo MPQ, não isotonzados, isotonzados e isotonzados ponderados, em função das doses | 52 |
| Figura 9 | Valores simulados via modelo MNLE, não isotonzados, isotonzados e isotonzados ponderados, em função das doses | 55 |
| Figura 10 | Valores simulados via modelo MLOG, não isotonzados, isotonzados e isotonzados ponderados, em função das doses | 58 |
| Figura 11 | Curvas de deposição de Zn na tíbia de aves machos da linhagem Hubbard, não isotonzados, isotonzados e isotonzados ponderados | 62 |
| Figura 12 | Curvas de deposição de Zn no dedo médio de aves fêmeas da linhagem Hubbard, não isotonzados, isotonzados e isotonzados ponderados | 63 |
| Figura 13 | Estimativas do platô de resposta pelo estimador não paramétrico para platô de resposta (ENPPR) e pelo modelo logarítmico (MLOG) | 79 |
| Figura 14 | Estimativas do platô de resposta pelo estimador não paramétrico para platô de resposta (ENPPR) e pelo modelo não linear exponencial MNLE | 80 |
| Figura 15 | peso/altura em relação ao tempo, em meses, para crianças | 82 |
| Figura 16 | peso/altura isotonzados em relação ao tempo, em meses, para crianças | 83 |

LISTA DE TABELAS

| | | |
|----------|---|----|
| Tabela 1 | Valores paramétricos utilizados no processo de simulação para os modelos: MPQ, MNLE e MLOG | 42 |
| Tabela 2 | Estimativas dos parâmetros, com os respectivos erros padrões (EP), viés, erro quadrático médio (EQM) e limites dos intervalos de 95% de confiança (IC95%), do modelo polinomial quadrático (MPQ) obtidos por meio do processo de simulação | 54 |
| Tabela 3 | Estimativas dos parâmetros, com os respectivos viés, erro quadrático médio (EQM), erros padrões (EP) e limites dos intervalos de 95% de confiança (IC95%), do modelo não-linear exponencial (MNLE) obtidos por meio do processo de simulação | 57 |
| Tabela 4 | Estimativas dos parâmetros, com os respectivos viés, erro quadrático médio (EQM), erros padrões (EP) e limites dos intervalos de 95% de confiança (IC95%), do modelo logarítmico (MLOG) obtidos por meio do processo de simulação | 60 |
| Tabela 5 | Estimativas dos parâmetros, com os respectivos erros padrões (EP) e limites dos intervalos de 95% de confiança (IC95%), do modelo polinomial quadrático (MPQ) ajustado às médias, não isotonzadas, isotonzadas e isotonzadas ponderadas, de deposição de zinco (Zn) na tíbia de aves machos da linhagem Hubbard . . . | 64 |
| Tabela 6 | Estimativas dos parâmetros, com os respectivos erros padrões (EP) e limites dos intervalos de 95% de confiança (IC95%), do modelo polinomial quadrático (MPQ) ajustado às médias, não isotonzadas, isotonzadas e isotonzadas ponderadas, de deposição de zinco (Zn) no dedo médio de aves fêmeas da linhagem Hubbard | 66 |
| Tabela 7 | Estimativas dos parâmetros, com os respectivos erros padrões (EP) e limites dos intervalos de 95% de confiança (IC95%), do modelo não-linear exponencial (MNLE) ajustado às médias, não isotonzadas, isotonzadas e isotonzadas ponderadas, de deposição de zinco (Zn) na tíbia de aves machos da linhagem Hubbard . . . | 68 |
| Tabela 8 | Estimativas dos parâmetros, com os respectivos erros padrões (EP) e limites dos intervalos de 95% de confiança (IC95%), do modelo não-linear exponencial (MNLE) ajustado às médias, não isotonzadas, isotonzadas e isotonzadas ponderadas, de deposição de zinco (Zn) no dedo médio de aves fêmeas da linhagem Hubbard | 69 |

| | | |
|-----------|--|----|
| Tabela 9 | Estimativas dos parâmetros, com os respectivos erros padrões (EP) e limites dos intervalos de 95% de confiança (IC95%), do modelo logarítmico (MLOG) ajustado às médias, não isotonizadas, isotonizadas e isotonizadas ponderadas, de deposição de zinco (Zn) na tibia de aves machos da linhagem Hubbard | 71 |
| Tabela 10 | Estimativas dos parâmetros, com os respectivos erros padrões (EP) e limites dos intervalos de 95% de confiança (IC95%), do modelo logarítmico (MLOG) ajustado às médias, não isotonizadas, isotonizadas e isotonizadas ponderadas, de deposição de zinco (Zn) no dedo médio de aves fêmeas da linhagem Hubbard | 72 |
| Tabela 11 | Estimativas da abscissa do platô x_0 , do platô p , com os respectivos viés, erro quadrático médio (EQM), erros padrões (EP) e limites dos intervalos de 95% de confiança (IC95%), do estimador não paramétrico para platô de resposta, cujos dados foram simulados a partir do modelo segmentado polinomial quadrático (MPQ) | 74 |
| Tabela 12 | Estimativas da abscissa do platô x_0 , do platô p , com os respectivos viés, erro quadrático médio (EQM), erros padrões (EP) e limites dos intervalos de 95% de confiança (IC95%), do estimador não paramétrico para platô de resposta, cujos dados foram simulados a partir do modelo segmentado logarítmico (MLOG) | 76 |
| Tabela 13 | Estimativas da abscissa do platô x_0 , do platô p , com os respectivos viés, erro quadrático médio (EQM), erros padrões (EP) e limites dos intervalos de 95% de confiança (IC95%), do estimador não paramétrico para platô de resposta, cujos dados foram simulados a partir do modelo segmentado <i>linear response plateau</i> (PRL) | 77 |

SUMÁRIO

| | | |
|--------------|---|----|
| 1 | INTRODUÇÃO | 14 |
| 2 | REFERENCIAL TEÓRICO | 17 |
| 2.1 | Modelos estatísticos platô de resposta | 17 |
| 2.1.1 | Modelos estatísticos de platô de resposta aplicados às exigências nutricionais de aves | 17 |
| 2.1.2 | Modelo platô de resposta linear | 19 |
| 2.1.3 | Modelo platô de resposta quadrático | 21 |
| 2.1.4 | Modelo não linear exponencial | 23 |
| 2.2 | Método dos quadrados mínimos | 25 |
| 2.2.1 | Processo iterativo | 28 |
| 2.3 | Regressão Linear, Não Linear e Isotônica | 29 |
| 2.3.1 | Teoria da regressão isotônica | 32 |
| 2.3.2 | O Algoritmo PAVA | 36 |
| 3 | METODOLOGIA | 38 |
| 3.1 | Modelo Logarítmico | 38 |
| 3.2 | Implementação computacional da regressão isotônica | 40 |
| 3.3 | Simulação dos dados para análise com regressão isotônica | 40 |
| 3.4 | Dados Reais | 42 |
| 3.5 | Critérios para avaliação do ajuste dos modelos | 43 |
| 3.5.1 | Método <i>Jackknife</i> | 43 |
| 3.6 | Estimador não paramétrico para platô de resposta | 44 |
| 3.6.1 | Estudo de simulação para o estimador não paramétrico para platô de resposta | 48 |
| 3.6.2 | Estimador semi paramétrico para modelos segmentados crescente - linear | 49 |
| 4 | RESULTADOS E DISCUSSÃO | 51 |
| 4.1 | Estudo por simulação da validade da isotonização de dados | 51 |
| 4.1.1 | Aplicação a dados reais | 61 |
| 4.2 | Estudo por simulação do estimador não paramétrico para platô de resposta | 73 |
| 4.2.1 | Aplicação do estimador não paramétrico para platô de resposta aos dados reais | 78 |
| 4.3 | Aplicação do estimador semi paramétrico para modelos segmentados crescente-linear | 81 |
| 5 | CONCLUSÃO | 84 |
| | REFERÊNCIAS | 85 |

(1) El presente informe tiene por objeto informar a la Junta de Gobierno de la Universidad de Cádiz sobre el desarrollo de las actividades de la Universidad de Cádiz durante el curso académico 2014-2015.

(2) El informe se divide en tres partes: la primera describe el contexto de la Universidad de Cádiz, la segunda describe el desarrollo de las actividades de la Universidad de Cádiz durante el curso académico 2014-2015, y la tercera describe las conclusiones y recomendaciones.

(3) En primer lugar, se describe el contexto de la Universidad de Cádiz. La Universidad de Cádiz es una universidad pública que forma parte del sistema universitario español. Su misión es la de promover el conocimiento y la cultura, y de formar a los ciudadanos en valores democráticos y de respeto a los derechos humanos.

(4) Durante el curso académico 2014-2015, la Universidad de Cádiz ha desarrollado una serie de actividades que han permitido mejorar su calidad académica y de gestión. En primer lugar, se ha trabajado en la mejora de los procesos de enseñanza-aprendizaje, lo que ha permitido aumentar el nivel de satisfacción de los estudiantes.

(5) Además, se ha trabajado en la mejora de la gestión de la Universidad de Cádiz, lo que ha permitido optimizar los recursos y mejorar la eficiencia de los procesos. En tercer lugar, se ha trabajado en la mejora de la comunicación con los stakeholders, lo que ha permitido aumentar la transparencia y la confianza en la Universidad de Cádiz.

(6) En conclusión, el informe describe el desarrollo de las actividades de la Universidad de Cádiz durante el curso académico 2014-2015. Se ha trabajado en la mejora de los procesos de enseñanza-aprendizaje, en la mejora de la gestión de la Universidad de Cádiz, y en la mejora de la comunicación con los stakeholders.

(7) Las conclusiones y recomendaciones del informe son las siguientes:

- Mejorar los procesos de enseñanza-aprendizaje.
- Mejorar la gestión de la Universidad de Cádiz.
- Mejorar la comunicación con los stakeholders.

(8) El informe se presenta a la Junta de Gobierno de la Universidad de Cádiz para su conocimiento y aprobación.

1 INTRODUÇÃO

A avicultura de corte é um dos segmentos da agropecuária que apresentou os maiores avanços tecnológicos. Esses avanços foram obtidos em diversas áreas, incluindo a de melhoramento genético, manejo, sanidade e nutrição. Dentro do contexto nutricional, a suplementação de microminerais em rações para aves frequentemente é feita em quantidades superiores às exigidas na tentativa de assegurar o bom desempenho dos animais. Isso ocorre, geralmente, pelo desconhecimento do nutricionista quanto à real exigência das aves e esses excessos acarretam volumes excessivos de resíduos nas fezes, podendo ocasionar um desequilíbrio ambiental (GOMES et al., 2009).

Segundo Coelho et al. (1987) e Euclides e Rostagno (2001), os experimentos delineados com a finalidade de avaliar exigências nutricionais de animais consideram, a priori, que a adição de um nutriente limitante a rações deficientes nesse nutriente e adequada nos demais resultará em crescimento linear do animal até que a exigência seja atendida, não ocorrendo respostas daí para frente. Os experimentos do tipo dose resposta são muito comuns na determinação de níveis ótimos dos nutrientes na ração e contemplam a utilização de modelos de regressão para atingir tal objetivo. Entre as técnicas utilizadas para modelar esses tipos de experimentos, destaca-se a de platô de resposta, na qual a curva é dividida em duas fases: uma crescente e outra de estabilidade (platô de resposta).

Um dos métodos mais utilizados no processo de estimação é o método de otimização, porém em situações cujos parâmetros estão sujeitos a restrições, métodos matemáticos complexos são necessários para a obtenção dos pontos críticos de interesse.

Para enfocar tais restrições, suponha uma família de distribuições indexadas por um conjunto $X = \{x_1, \dots, x_k\}$, tal que o conjunto X pode ser caracterizado, por exemplo, por doses cujos aumentos acarretam aumentos nas respostas esperadas. Assim, se o interesse é modelar a função média das respostas $\mu(x)$, $x \in X$, esta deve ser uma função não decrescente. Tal fato pode ser abordado no contexto de regressões usuais lineares e não lineares. Porém, uma teoria alternativa foi desenvolvida e apresentada por Barlow et al. (1972), e reestruturada por Robertson, Wright e Dykstra (1988). Esta teoria é denominada regressão isotônica, cujo objetivo é obter a melhor função não decrescente possível.

Uma das razões que talvez explique o relativo pouco uso da regressão isotônica pela comunidade estatística é o fato de que a matemática necessária para desenvolver a teoria, a análise convexa, é bastante complexa. Porém, recentemente tal técnica foi aplicada com sucesso por Araújo e Dias (2006) no ajuste de modelos AMMI e por Rodrigues et al. (2010) na análise de curvas de crescimento.

Uma vez que a regressão isotônica é usada em situações cuja variável dependente é não decrescente em relação à variável independente, a mesma torna-se viável para a análise de dados de platô de resposta, a qual geralmente envolve ajustes de modelos como o polinomial quadrático e o não linear exponencial. Porém, outros modelos podem ser propostos para tal fim, assim como métodos de estimação eficientes como os não paramétricos. Além disso, a técnica de regressão isotônica também pode ser recomendada para aumentar a qualidade de ajuste de modelos segmentados crescentes lineares quando utilizada em conjunto com estimadores não usuais, como os semi paramétricos.

A ideia geral para implementar as técnicas descritas anteriormente é assumir um conhecimento prévio a respeito da média $\mu(x)$ em um processo caracte-

rizado por uma função não decrescente. Assim, quando geradas amostras $\bar{y}(x)$ que não formam um conjunto de valores não decrescentes, é proposto que tais valores sejam isotonizados, de forma a obter $\bar{y}^*(x)$. Portanto, os modelos de regressão de interesse passam a ser ajustados a estes dados que podem ser ditos transformados.

Diante do exposto, o presente trabalho tem como objetivo utilizar a regressão isotônica no contexto de modelos de platô de resposta (modelos polinomial quadrático e não linear exponencial), propor um modelo logarítmico e um estimador não paramétrico. Além disso, objetiva-se empregar um estimador semi paramétrico ao se considerar modelos segmentados crescente-linear. Respectivamente para estes objetivos, utilizaram-se dados de deposição de Zn em ossos de aves da linhagem Hubbard e dados de peso/altura de crianças avaliadas mensalmente. De forma geral, a hipótese a ser defendida nesse trabalho é a de que a isotonização dos dados em conjunto com os estimadores propostos melhorem a qualidade da análise dos dados em questão.

2 REFERENCIAL TEÓRICO

2.1 Modelos estatísticos platô de resposta

Em várias situações, para se modelar a média em processos, é necessário usar uma função dada por leis diferentes no sentido de tentar captar alterações significativas ao longo do processo. Tais modelos são denominados modelos segmentados. Um tipo particular de modelo segmentado são os modelos de platô de resposta. Nesses modelos tem-se uma fase inicial com um comportamento complexo sendo que, a partir de um determinado valor, a resposta se estabiliza em um valor constante denominado platô. Como exemplo desse fenômeno podemos citar a absorção de uma substância por um organismo. A medida que a concentração dessa substância é aumentada na alimentação, o organismo aumenta a absorção de forma bastante complexa, mas um ponto de saturação é obtido de tal forma que, a partir desse ponto, um aumento da concentração dessa substância na alimentação não aumenta mais a quantidade absorvida pelo organismo, segundo (REZENDE et al., 2007).

2.1.1 Modelos estatísticos de platô de resposta aplicados às exigências nutricionais de aves

A avicultura de corte é um dos segmentos da agropecuária que apresentou os maiores avanços tecnológicos. Esses avanços foram obtidos em diversas áreas, incluindo a de melhoramento genético, manejo, sanidade e nutrição. Dentro do contexto nutricional, a suplementação de microminerais em rações para aves

frequentemente é feita em quantidades superiores às exigidas na tentativa de assegurar o bom desempenho dos animais. Isso ocorre, geralmente, pelo desconhecimento do nutricionista quanto à real exigência das aves e esses excessos acarretam volumes excessivos de resíduos nas fezes, podendo ocasionar um desequilíbrio ambiental (GOMES et al., 2009).

O micromineral zinco (Zn) está diretamente associado ao crescimento e ao desenvolvimento do tecido ósseo (UNDERWOOD; SUTTLE, 1999), atua como cofator ou componente de mais de 240 enzimas. A deficiência desse micromineral pode acarretar problemas, como anormalidades de pernas e dedos, além de reduzir o consumo de alimentos e, conseqüentemente, o desenvolvimento animal.

Segundo Coelho et al. (1987) e Euclides e Rostagno (2001), os experimentos delineados com a finalidade de avaliar exigências nutricionais de animais consideram, a priori, que a adição de um nutriente limitante a rações deficientes nesse nutriente e adequada nos demais resultará em crescimento linear do animal até que a exigência seja atendida, não ocorrendo respostas daí para frente.

Para estimar as exigências nutricionais das aves são realizados experimentos de desempenho, esses também conhecidos como dose resposta. Experimentos dessa natureza são muito comuns em várias áreas da experimentação. São utilizados para obter os níveis recomendáveis dos minerais nas formulações de rações para animais, para avaliar níveis de proteína, energia e outros ingredientes em rações animais de diferentes espécies e estudar a conversão alimentar, bem como no estudo das formulações de adubos para plantações cultivadas em diferentes solos (REZENDE et al., 2007). Segundo Rostagno et al. (2007), ensaios do tipo dose resposta é o método que estima a exigência nutricional de determinado nutriente pela avaliação de uma resposta pré-definida, como ganho de peso, produção de

ovos e outros, através do oferecimento de quantidades crescentes do nutriente nas dietas.

Modelos estatísticos adequados a tais situações são modelos definidos por duas funções: inicialmente uma função crescente seguida de uma função constante, denominada platô de resposta. O platô significa que o nível de saturação foi atingido, por exemplo, o aumento de um determinado nutriente após uma certa concentração não gerar mais um aumento na resposta como o ganho de peso (REZENDE et al., 2007).

Walker e Bejarano (1978), para interpretação da resposta de culturas à aplicação de fertilizantes, descreveram vários modelos, dentre os quais o modelo Platô de Resposta Linear (PRL). Boyd (1970) mostrou que a maioria dos ensaios de fertilidade pode ser caracterizada por duas curvas, uma reta ascendente e outra horizontal que representava o rendimento máximo.

Segundo Euclides e Rostagno (2001), a combinação dos dois modelos, a equação quadrática associada ao platô, seria a melhor recomendação. A vantagem deste modelo é que o nível ótimo encontrado não é alto como o geralmente estimado pela derivação da função quadrática, nem tão baixo como o observado no modelo PRL, passando a ser intermediário, no ponto de encontro entre a reta da equação e o platô.

2.1.2 Modelo platô de resposta linear

O modelo platô de resposta linear (PRL) é baseado na ideia que inicialmente tem-se uma resposta linear. Abruptamente, o crescimento se estabiliza tornando-se a curva uma reta paralela ao eixo das abscissas.

Formalmente o modelo PRL, visualizado graficamente na Figura 1, é dado por:

$$Y_i = \begin{cases} a + bx_i + \epsilon_i & \text{se } x_i < x_0 \\ p + \epsilon_i & \text{se } x_i \geq x_0 \end{cases}$$

onde Y_i é a variável resposta, x_i é a i -ésima dose do nutriente, com $i = 1, \dots, n$, p é o platô, x_0 é a abscissa do platô, ϵ_i é o erro aleatório associado ao modelo e a e b são os parâmetros do modelo a serem estimados.

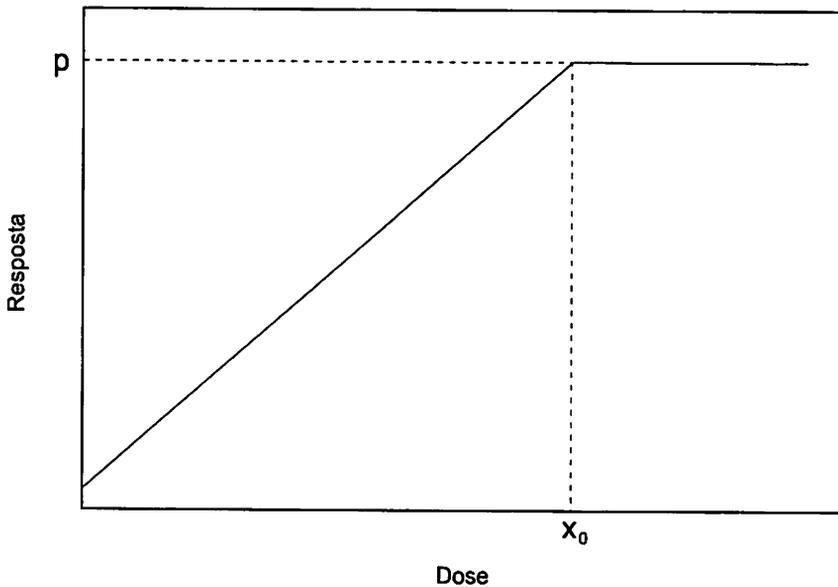


Figura 1 Representação gráfica do modelo platô de resposta linear (PRL)

Para termos continuidade em x_0 , devemos igualar $a + bx_0 = p$, ou seja, $x_0 = (p - a)/b$. Neste caso temos um modelo com três parâmetros (a , b e p) (FERREIRA, 2009).

Como exemplos do uso desses modelos em estudos de exigência nutri-

cional tem-se:

Ao estudarem as exigências de sódio para pintos machos e fêmeas no período de 1 a 21 dias de idade, Barros et al. (2001) concluíram que os valores estimados de exigência, quando ajustados por meio do modelo PRL, foram inferiores aos obtidos por meio do modelo quadrático.

Furuya et al. (2001), em estudo realizado para avaliar os efeitos da adição de diferentes níveis de fitase em dietas para a tilapia do Nilo, concluíram que o modelo PRL apresentou o melhor ajustamento de dados.

Em ensaios conduzidos para determinar a exigência de lisina digestível de frangos de corte machos dos 22 aos 42 dias de idade, Valério et al. (2003) encontraram como melhor modelo o PRL.

Para determinar as exigências de proteína bruta (PB) em função do nível de energia digestível na dieta para alevinos de curimatá, Bomfim et al. (2005) analisaram os efeitos dos níveis de proteína bruta por meio do modelo PRL entre outros.

2.1.3 Modelo platô de resposta quadrático

O modelo platô de resposta quadrática (MPQ) é similar ao PRL. Ele é composto, na fase crescente, por uma equação de segundo grau e, após a estabilização, por um platô.

Rezende (2002) descreveu o modelo polinomial quadrático como sendo:

$$Y_i = \begin{cases} a + bx_i + cx_i^2 + \epsilon_i & \text{se } x_i < x_0 \\ p + \epsilon_i & \text{se } x_i \geq x_0 \end{cases}$$

em que Y_i é a variável resposta, x_i é a i -ésima dose do nutriente, com $i = 1, \dots, n$, p é o platô, x_0 é a abscissa do platô, ϵ_i é o erro aleatório associado ao modelo e a, b, c são os parâmetros do modelo a serem estimados. A representação gráfica é apresentada na Figura 2.

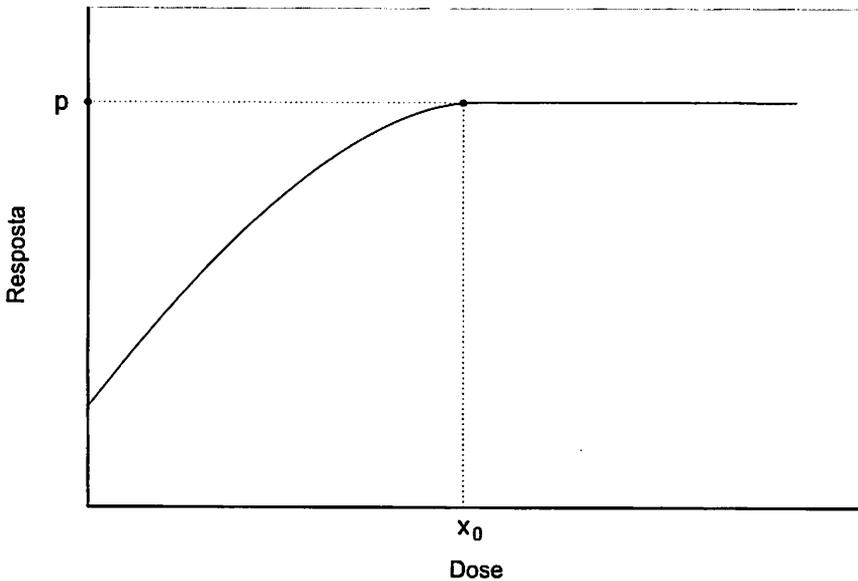


Figura 2 Representação gráfica do modelo platô de resposta quadrático (MPQ)

Para que o número de parâmetros seja diminuído, o platô deve ocorrer no máximo. Para isso, diferenciamos a função $Y = a + bx_0 + cx_0^2$ e igualamos a zero.

Esta condição resulta em:

$$x_0 = \frac{-b}{2c}$$

O platô é obtido quando a função quadrática atinge seu máximo e a a partir

daí ela estabiliza, o que implica em:

$$p = a - \frac{b^2}{4c}$$

e portanto o modelo possui apenas três parâmetros (a , b e c). Como exemplo de aplicação desse modelo, tem-se Siqueira et al. (2009) que avaliaram diferentes modelos ajustados às respostas de ganho de peso obtidos em experimento com aves da linhagem ISA Label no período de 1 a 28 dias de idade. Os autores concluíram que, considerando as limitações de cada um dos modelos propostos, o procedimento para estimar as exigências de lisina digestível, o modelo platô de resposta polinomial quadrático, foi o mais adequado para melhorar o ganho de peso das aves quando variáveis econômicas não foram consideradas.

2.1.4 Modelo não linear exponencial

Vários fenômenos biológicos são modelados com eficiência pela função exponencial. Como essa função é crescente sem apresentar assíntotas horizontais, a ideia para se obter um modelo de platô de resposta, sem perder a diferenciabilidade é considerar funções da forma $f(x) = \exp^{-x^2}$ que apresentam um máximo em $x = 0$.

O modelo não linear exponencial (MNLE), utilizado na técnica de platô de resposta, proposto por Rezende, Muniz e Ferreira (2000), é descrito abaixo e sua visualização gráfica é apresentada na Figura 3:

$$Y_i = \begin{cases} a \exp(-c(x_i - b)^2) + \epsilon_i & \text{se } x_i < x_0 \\ p + \epsilon_i & \text{se } x_i \geq x_0 \end{cases}$$

em que Y_i é a variável resposta, x_i é a i -ésima dose do nutriente, com $i = 1, \dots, n$, p é o platô, x_0 é a abscissa do platô, ϵ_i é o erro aleatório associado ao modelo e a, b, c são os parâmetros do modelo a serem estimados.

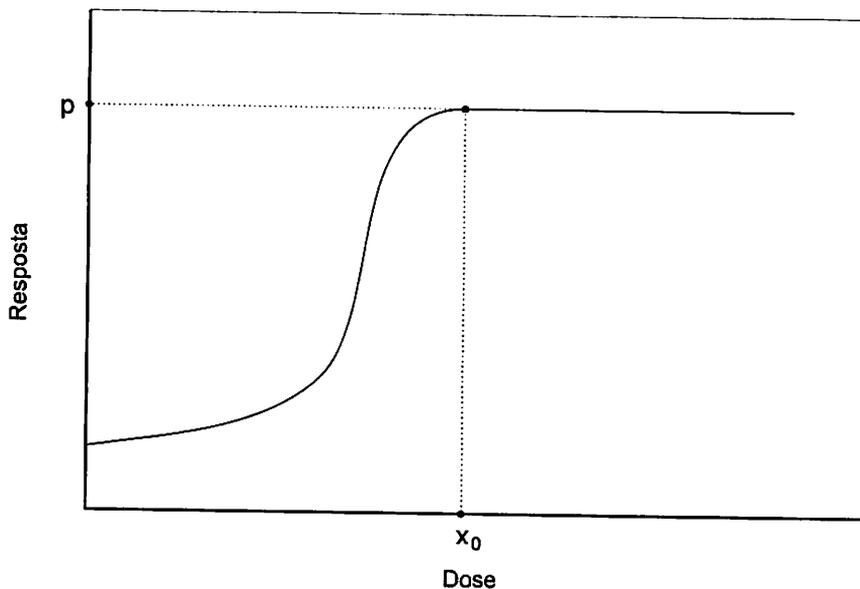


Figura 3 Representação gráfica do modelo platô de resposta não linear exponencial (MNLE)

Para diminuir a quantidade de parâmetros do modelo, o platô ocorre no máximo x_0 . Desta forma, temos:

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= \frac{d\left(a \exp(-c(x-b)^2)\right)}{dx} \\ &= a \exp(-c(x-b)^2) (-2c(x-b)) \end{aligned}$$

Igualando o resultado da derivação a zero e resolvendo para $x = x_0$, temos

que:

$$x_0 = b$$

Substituindo-se x pelo valor de x_0 na equação inicial, encontra-se:

$$p = f(x_0)$$

$$p = a \exp(-c(b - b)^2)$$

$$p = a$$

Os autores compararam este modelo com o modelo platô de resposta quadrático, utilizando o coeficiente de determinação como fator de comparação. Chegaram à conclusão de que, para os dados analisados, os dois modelos se comportam de forma semelhante, sendo o modelo exponencial uma boa opção para interpretar resultados da área de Nutrição Animal (REZENDE, 2002).

2.2 Método dos quadrados mínimos

Seja a função $f(\mathbf{x}, \beta)$ uma generalização para qualquer um dos modelos (MPQ, MNLE, MLOG) e adotando a notação matricial, tem-se que:

$$\mathbf{Y} = f(\mathbf{x}, \beta) + \epsilon,$$

em que:

$$\mathbf{Y} = \begin{bmatrix} Y_1 \\ Y_2 \\ \vdots \\ Y_n \end{bmatrix}$$

O vetor do modelo é dado por:

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}, \beta) = \begin{bmatrix} f_1(\mathbf{x}, \beta) \\ f_2(\mathbf{x}, \beta) \\ \vdots \\ f_n(\mathbf{x}, \beta) \end{bmatrix}$$

O vetor de resíduos, $\epsilon_i \sim N(0, \sigma^2)$, é dado por:

$$\epsilon = \begin{bmatrix} \epsilon_1 \\ \epsilon_2 \\ \vdots \\ \epsilon_n \end{bmatrix}$$

Um dos métodos utilizados para estimação dos parâmetros de modelos não lineares baseia-se na minimização da soma de quadrados dos resíduos. Devemos utilizar um processo iterativo, para isso, precisamos de um valor inicial para o vetor de parâmetros, que deve ser melhorado continuamente até que a soma de quadrados de resíduos (SQR) seja minimizada.

Temos que $\epsilon = \mathbf{Y} - \mathbf{f}(\mathbf{x}, \beta)$, portanto:

$$\text{SQR} = \epsilon' \epsilon.$$

Para a obtenção destes estimadores, utilizou-se a seguinte notação de diferenciação matricial:

$f(\beta)$ é uma função vetor coluna $n \times 1$ de um argumento p dimensional β , denotada por:

$$f(\beta) = \begin{bmatrix} f_1(\beta) \\ f_2(\beta) \\ \vdots \\ f_n(\beta) \end{bmatrix}$$

$F(\beta)$ é a matriz Jacobiana de $f(\beta)$:

$$F(\beta) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1(\beta)}{\partial \beta_1} & \frac{\partial f_1(\beta)}{\partial \beta_2} & \cdots & \frac{\partial f_1(\beta)}{\partial \beta_p} \\ \frac{\partial f_2(\beta)}{\partial \beta_1} & \frac{\partial f_2(\beta)}{\partial \beta_2} & \cdots & \frac{\partial f_2(\beta)}{\partial \beta_p} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \frac{\partial f_n(\beta)}{\partial \beta_1} & \frac{\partial f_n(\beta)}{\partial \beta_2} & \cdots & \frac{\partial f_n(\beta)}{\partial \beta_p} \end{bmatrix}$$

Dessa forma, o estimador de mínimos quadrados, $\hat{\beta}$, satisfaz a equação $\frac{\partial \text{SQR}(\beta)}{\partial \beta} = 0$, para $\beta = \hat{\beta}$, que representa a minimização de interesse. Sendo,

$$\begin{aligned} \frac{\partial \text{SQR}(\beta)}{\partial \beta'} &= \frac{\partial (y - f(\beta))' (y - f(\beta))}{\partial \beta'} \\ &= -2 (y - f(\beta))' F(\beta) \end{aligned}$$

temos que:

$$(y - f(\hat{\beta}))' F'(\hat{\beta}) = 0.$$

O sistema de equações normais não lineares (SEN) é dado por:

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial f_1(\hat{\beta})}{\partial \hat{\beta}_1} & \frac{\partial f_2(\hat{\beta})}{\partial \hat{\beta}_1} & \cdots & \frac{\partial f_n(\hat{\beta})}{\partial \hat{\beta}_1} \\ \frac{\partial f_1(\hat{\beta})}{\partial \hat{\beta}_2} & \frac{\partial f_2(\hat{\beta})}{\partial \hat{\beta}_2} & \cdots & \frac{\partial f_n(\hat{\beta})}{\partial \hat{\beta}_2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \frac{\partial f_1(\hat{\beta})}{\partial \hat{\beta}_p} & \frac{\partial f_2(\hat{\beta})}{\partial \hat{\beta}_p} & \cdots & \frac{\partial f_n(\hat{\beta})}{\partial \hat{\beta}_p} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix} \\ - \\ \begin{bmatrix} f_1(\hat{\beta}) \\ f_2(\hat{\beta}) \\ \vdots \\ f_n(\hat{\beta}) \end{bmatrix} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}.$$

2.2.1 Processo iterativo

Como não existe uma forma fechada para a solução do SEN, deve-se usar processos iterativos para a obtenção da solução do sistema. Um dos métodos iterativos é o Método de Gauss-Newton, que realiza a regressão dos resíduos em relação às primeiras derivadas do modelo não linear em relação aos parâmetros, até que haja a convergência (FERREIRA, 2009).

Seja o modelo $y_i = f(x_i, \beta) + \epsilon$ e $\hat{\beta}_0$ um valor tal que $F'(\hat{\beta}_0)(y - f(\hat{\beta}_0)) \approx 0$. Aproximando $f(\hat{\beta})$ pelo ponto $\hat{\beta}_0$ por uma série de Taylor de primeira ordem, tem-se:

$$f(\hat{\beta}) \approx f(\hat{\beta}_0) + F(\hat{\beta}_0)(\hat{\beta} - \hat{\beta}_0) \quad (1)$$

$$F'(\hat{\beta}) [Y - f(\hat{\beta})] \approx 0 \quad (2)$$

Substituindo (1) em (2), tem-se que:

$$F'(\hat{\beta}) [Y - f(\hat{\beta}_0) - F(\hat{\beta}_0)(\hat{\beta} - \hat{\beta}_0)] \approx 0 \quad (3)$$

multiplicando a esquerda, ambos os lados de (3) por $[F'(\hat{\beta})]^{-1}$, fica:

$$Y - f(\hat{\beta}_0) - F(\hat{\beta}_0)\hat{\beta} + F(\hat{\beta}_0)\hat{\beta}_0 \approx 0$$

$$F(\hat{\beta}_0)\hat{\beta} \approx F(\hat{\beta}_0)\hat{\beta}_0 + [Y - f(\hat{\beta}_0)] \quad (4)$$

Multiplicando a esquerda, ambos os lados de (4) por $[F(\hat{\beta}_0)]^{-1}$, tem-se que:

$$\hat{\beta} \approx \hat{\beta}_0 + [F(\hat{\beta}_0)]^{-1} [Y - f(\hat{\beta}_0)]$$

Fazendo $\hat{\beta} = \hat{\beta}_{k+1}$ e $\hat{\beta}_0 = \hat{\beta}_k$ obtém-se a expressão

$$\hat{\beta}_{k+1} = \hat{\beta}_k + [F(\hat{\beta}_k)]^{-1} [Y - f(\hat{\beta}_k)] \quad (5)$$

A expressão (5) representa o processo iterativo conhecido como Gauss-Newton, o qual é usado para estimação de parâmetros de um modelo não linear. Este processo é repetido um determinado número de vezes, até que algum critério de precisão seja atingido. Um dos critérios de precisão que pode ser utilizado é aquele que adota o seguinte estimador: seja $d_j = \left| \frac{\hat{\beta}_{j,k+1} - \hat{\beta}_{j,k}}{\hat{\beta}_{j,k}} \right|$, para $j = 1, 2, \dots, p$; quando o máximo de $d_j < \delta$ o processo é interrompido. O valor de δ foi especificado de acordo com a facilidade de convergência de cada modelo estudado.

2.3 Regressão Linear, Não Linear e Isotônica

A análise de regressão pode ser realizada usando métodos paramétricos ou não paramétricos. Os modelos paramétricos consistem na obtenção de uma equação com parâmetros a serem estimados. Os modelos não paramétricos são

aqueles em que nenhuma pressuposição é feita sobre a distribuição conjunta de X e Y .

Os modelos paramétricos podem ser classificados em duas categorias: lineares e não lineares, ambos em relação aos parâmetros. Segundo Draper e Smith (1998), um modelo é linear nos parâmetros se qualquer uma das derivadas parciais desse modelo em relação aos parâmetros não dependem especificamente de nenhum deles. A definição de um modelo não linear apresentada pela maioria dos autores, dentre eles Bates e Watts (1988), é que pelo menos uma derivada parcial da variável dependente, com relação a algum parâmetro presente no modelo, dependa de algum parâmetro.

São várias as situações em que a ordenação na variável independente implica em uma ordenação na variável dependente. Visôto et al. (2009) investigaram o efeito de antibióticos em colônias de bactérias do intestino de lagartas da soja (*Lepidoptera*). Neste estudo, a contribuição das bactérias do intestino para a digestão e desenvolvimento da lagarta foram avaliados. A administração oral de tetraciclina foi empregada para eliminar as bactérias a fim de examinar a relação funcional entre a microbiota intestinal e o hospedeiro. Os antibióticos foram incorporados na dieta do inseto em concentrações crescentes.

Na análise de regressão usual, não se usa uma informação a priori sobre uma relação de ordem na variável resposta. Na teoria da regressão isotônica essa informação é essencial, portanto é de se esperar que a eficiência da análise seja aumentada quando faz-se uso da mesma.

Rodrigues et al. (2010) propôs uma metodologia de transformação de dados, via análise de regressão isotônica, para estudos de curvas de crescimento cujos dados apresentam distúrbios caracterizados por decréscimos de pesos em determi-

nadas faixas de idades. Além de investigar a eficiência da metodologia baseada em regressão isotônica em relação ao aumento da convergência e da qualidade do ajuste do modelo, o estudo também propôs um procedimento iterativo de isotonização, cujo intuito foi obter uma transformação ótima para os dados. Os autores concluíram que as metodologias de transformação de dados via análise de regressão isotônica, com pesos iguais e pesos diferentes, possibilitaram aumentar a porcentagem de convergência e a qualidade dos ajustes dos modelos de regressão não-linear Logístico, Von Bertalanffy e Gompertz a dados de crescimento que apresentam distúrbios caracterizados por decréscimos de pesos em determinadas faixas de idades. O método de isotonização baseado em um processo iterativo possibilitou a obtenção de uma transformação considerada ótima para os dados de crescimento com distúrbios.

Com o objetivo de verificar o problema de superestimação e subestimação de autovalores nos modelos AMMI ("additive main effects and multiplicative interaction model"), Araújo e Dias (2006) utilizaram a técnica de regressão isotônica para manter a ordenação dos dados. Os autores concluíram que a regressão isotônica, juntamente com o algoritmo usado, foi necessária em todos os conjuntos de dados.

Gunn e Dunson (2005) aplicaram a transformação baseada em regressão isotônica a dados de concentração de progesterona e eliminaram distúrbios caracterizados pelos picos decrescentes, podendo utilizar modelos de regressão usuais, os quais foram ajustados pela metodologia bayesiana via Gibbs Sampler.

McArthur et al. (2003) investigaram a influência das algas marinhas sobre a quantidade de espécies marinhas disponíveis para a pesca no Sul da Austrália. No estudo, eles consideraram a captura que era definida como o peso vivo de espécies

e o esforço definido como sendo o número de dias de barco. Por experiência dos pescadores, era conhecido que a captura era uma função crescente do esforço e , de posse dessa informação, eles estudaram a influência das algas marinhas nas áreas de pesca, considerando a informação da ordenação existente.

A regressão isotônica é feita em conjuntos ordenados, os quais são divididos em: conjuntos com uma ordenação simples (ou total), conjuntos com uma ordenação parcial e conjuntos com quase ordenação.

2.3.1 Teoria da regressão isotônica

Um problema comum de regressão está associado a um conjunto de números pré-fixados $X = \{x_1, x_2, \dots, x_k\}$, onde $x_1 < x_2 < \dots < x_k$. Para $x_i \in X$, $i = 1, 2, \dots, k$ sejam $y_j(x_i)$ $j = 1, 2, \dots, m(x_i)$, uma amostra i.i.d. de uma distribuição com média desconhecida $\mu(x_i)$ (no caso de experimentos do tipo dose resposta, os valores de X seriam as doses, os valores de $y_j(x_i)$ a resposta para a dose x_i e $m(x_i)$ o número de repetições para cada dose). Se é assumido que $\mu(x)$ é uma função linear de x , uma maneira de se estimar $\mu(x)$ é através da regressão linear que consiste em minimizar

$$\sum_{x \in X} \sum_{j=1}^{m(x)} [y_j(x) - f(x)]^2$$

com $f(x)$ variando na classe de funções lineares f . Se

$$\bar{y}(x) = \frac{1}{m(x)} \sum_{j=1}^{m(x)} y_j(x), \quad x \in X.$$

uma vez que

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^{m(x)} [y_j(x) - f(x)]^2 &= \sum_{j=1}^{m(x)} [y_j(x) - \bar{y}(x) + \bar{y}(x) - f(x)]^2 = \\ \sum_{j=1}^{m(x)} [(y_j(x) - \bar{y}(x)) + (\bar{y}(x) - f(x))]^2 &= \sum_{j=1}^{m(x)} [y_j(x) - \bar{y}(x)]^2 + \\ + 2[\bar{y}(x) - f(x)] \sum_{j=1}^{m(x)} [y_j(x) - \bar{y}(x)] &+ m(x)[\bar{y}(x) - f(x)]^2 = \\ \sum_{j=1}^{m(x)} [y_j(x) - \bar{y}(x)]^2 + m(x)[\bar{y}(x) - f(x)]^2 & \end{aligned}$$

um problema equivalente é minimizar

$$\sum_{x \in X} [\bar{y}(x) - f(x)]^2 m(x) \quad (6)$$

na classe de funções lineares f de X (BARLOW et al., 1972).

Se não existe restrição para μ , a estimativa de mínimos quadrados seria obtida através da minimização de (6) na classe de funções arbitrárias f de X e a solução seria a média amostral \bar{y} . Agora, se é conhecido ou assumido que μ é não decrescente em x , a estimativa de mínimos quadrados de μ poderia ser obtida por minimização da equação (6), na classe de funções não decrescentes $f : X \rightarrow R$.

Barlow et al. (1972) usam as seguintes definições para *função isotônica e regressão isotônica*:

Definição 1. *Seja X um conjunto finito de números $\{x_1, \dots, x_k\}$. Uma função*

de valor real f sobre X é isotônica se para $x_i, x_j \in X$, $x_i < x_j$ implicar em $f(x_i) \leq f(x_j)$.

Definição 2. Seja g uma função em X e $\omega : X \rightarrow \mathbb{R}$, uma função positiva que será denominada peso. Uma função g^* é uma regressão isotônica de g com peso ω , se, e somente se, g^* é uma função isotônica e minimiza

$$\sum_{x \in X} [g(x) - f(x)]^2 \omega(x) \quad (7)$$

onde f varia entre todas as funções isotônicas em X . Portanto, g^* é uma solução de mínimos quadrados restritos para a expressão (7).

Seja $X = \{x_1, x_2, \dots, x_k\}$ um conjunto finito. Uma relação binária \lesssim em X é dita uma ordem simples se são satisfeitas as propriedades abaixo:

1. reflexiva: $x \lesssim x, \forall x \in X$;
2. transitiva: $x, y, z \in X$, $x \lesssim y$ e $y \lesssim z$ então $x \lesssim z$;
3. anti-simétrica: $x, y \in X$, $x \lesssim y$ e $y \lesssim x$ então $x = y$;
4. todo par de elementos de X é comparável: $x, y \in X$, implica que $x \lesssim y$ ou $y \lesssim x$.

Conjuntos simplesmente ordenados podem ser geometricamente interpretados como os elementos de uma fila.

Definição 3. Uma relação binária \lesssim em X estabelece uma ordem parcial em X se ela satisfaz as condições 1, 2 e 3 acima.

Definição 4. *Uma relação binária \lesssim em X estabelece uma quase ordem em X se ela satisfaz as condições 1 e 2 acima.*

Como pode ser observado, toda ordem simples é uma ordem parcial e toda ordem parcial é uma quase ordem. Portanto, se a teoria for realizada sobre uma quase ordem ela será mais geral do que se fosse realizada sobre uma ordem simples. Os teoremas 1 e 2 estão descritos em Barlow et al. (1972).

Teorema 1. *A regressão isotônica g^* de g com peso ω existe e é única.*

A regressão isotônica é a solução de um problema de otimização quadrático, uma vez que minimiza a soma de quadrados. Tal fato, por si só, não seria suficiente para o seu uso em problemas estatísticos, uma justificativa para a sua utilização é obtida pelo resultado:

Teorema 2. *Seja uma família de distribuições indexadas em um conjunto quase ordenado, $X = \{x_1, \dots, x_k\}$ e se $\mu(x)$, a média dessas distribuições, é suposta isotônica para o caso em que as distribuições são: Binomiais, Geométricas, Poisson, Normal ou Gamma. O estimador de máxima verossimilhança restrito às funções isotônicas é obtido pela regressão isotônica com pesos que dependem da variância, da média amostral $\bar{y}(x)$.*

Um resultado, descrito em Robertson et al. (1988), que ocorre para o caso normal é:

Se $\bar{Y}(x_i)$ é a média de uma amostra de tamanho $m(x_i)$ de uma população normal com média desconhecida $\mu(x_i)$ e variâncias conhecidas $\sigma^2(x_i)$ para $i = 1, \dots, k$, e assumindo que as amostras das várias populações são independentes e que é conhecido que μ é isotônica com respeito a ordem simples, x_1, x_2, \dots, x_k em X . Seja \bar{Y}^* com pesos $\omega(x) = \frac{n(x)}{\sigma^2(x)}$ então:

Teorema 3. *Nas condições acima, para cada $x \in X$,*

$$E[(\bar{Y}(x) - \mu(x))^2] \geq E[(\bar{Y}^*(x) - \mu(x))^2]$$

Portanto, além de \bar{Y}^* ser a função isotônica a mais próxima possível no sentido dos mínimos quadrados da média amostral $\bar{Y}(x)$ que é uma propriedade global envolvendo todas as populações normais indexadas pelo conjunto X , também temos essa propriedade que, para cada população a esperança do erro quadrático de \bar{Y}^* como estimador de $\mu(x)$ é menor ou igual à variância do estimador \bar{Y} . Acrescentando o fato que a função $\bar{Y}^*(\cdot)$ é o estimador de máxima verossimilhança da função $\mu(\cdot)$ temos uma forte justificativa de se usar a isotonização dos dados como um estimador natural para problemas onde é conhecido que a média é uma função crescente em relação a uma quase ordem de X .

Baseado na teoria da regressão isotônica, e principalmente no Teorema 3, pode-se propor a isotonização como forma de melhorar a qualidade do ajuste de modelos não lineares associados à técnica de platô de resposta.

2.3.2 O Algoritmo PAVA

O algoritmo *Pool-Adjacent-Violators-Algorithm* (PAVA) é amplamente utilizado para calcular a regressão isotônica de funções definidas em conjuntos munidos de uma ordem simples. Ayer et al. (1955) foram os primeiros a publicarem o algoritmo e apresentam o processo de isotonização que será descrito a seguir.

O algoritmo começa fazendo uma partição de $X = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ em blocos unitários: $\{x_1\}, \{x_2\}, \dots, \{x_n\}$, e por um processo iterativo vai unindo

estes blocos até que uma partição final seja alcançada. Se $g(x_1) \leq g(x_2) \leq \dots \leq g(x_k)$, então g é isotônica e nada se tem a fazer, ou seja, a partição inicial é também a partição final, e $g^*(x_i) = g(x_i)$, $i = 1, 2, \dots, n$. Se não, seleciona-se qualquer um dos violadores, isto é, seleciona-se um x_{i+1} tal que $g(x_i) > g(x_{i+1})$. Faz-se então um *Pool* (junção de coisas diferentes) entre os blocos que contém x_i e x_{i+1} em um novo bloco $\{x_i, x_{i+1}\}$ ordenado entre os blocos $\{x_{i-1}\}$ e $\{x_{i+2}\}$. O valor da função g nos pontos x_i e x_{i+1} é alterado para o valor da média:

$$Av(i, i + 1) = \frac{g(x_i)\omega(x_i) + g(x_{i+1})\omega(x_{i+1})}{\omega(x_i) + \omega(x_{i+1})}. \quad (8)$$

com peso associado aos novos valores de $g(x_i)$ e $g(x_{i+1})$ é igual a $w(x_i) + w(x_{i+1})$.

Depois deste passo do algoritmo, os valores das médias associadas com os blocos são examinados para ver se eles estão ou não na ordem requerida. Se estão, a partição final foi encontrada e os valores de g^* para cada ponto de um bloco são os valores dos *pooled* associados a cada bloco. Se não, um novo par de blocos violadores adjacentes é selecionado e juntado para formar um novo bloco, com os pesos associados sendo a soma dos pesos deles e o valor da média associada sendo a média ponderada dos valores médios deles, completando outro passo do algoritmo. Isto é repetido até a partição final ser encontrada.

3 METODOLOGIA

Para ajustar os modelos de platô de resposta, foi utilizada a função *nls* do pacote *stats* do software R (R DEVELOPMENT CORE TEAM, 2010), apropriado para ajuste de funções não lineares. Os modelos utilizados no presente trabalho são: Modelo Polinomial Quadrático (MPQ) e Modelo Não Linear Exponencial (MNLE) apresentados, respectivamente, nas secções 2.1.3 e 2.1.4. Como proposta do presente trabalho, apresentamos a seguir o Modelo Logarítmico (MLOG).

3.1 Modelo Logarítmico

O modelo logarítmico (MLOG) proposto para o ajuste de dados relacionados à teoria de platô de resposta é dado pela seguinte expressão:

$$Y_i = \begin{cases} b \log(x_i + a) + \epsilon_i & \text{se } x_i < x_0 \\ p + \epsilon_i & \text{se } x_i \geq x_0 \end{cases}$$

em que: Y_i é a variável resposta; x_i é a i -ésima dose do nutriente, com $i = 1, \dots, n$; p é o platô de resposta; x_0 é a abscissa do platô de resposta; ϵ_i é o erro aleatório associado ao modelo e a, b são os parâmetros do modelo.

Uma forma alternativa de definição desse modelo é por meio da utilização de uma variável binária (Dummy), ou seja,

$$Y_i = [b \log(x_i + a)]Z_i + p(1 - Z_i) + \epsilon_i$$

. Em que:

$$Z_i = \begin{cases} 1 & \text{se } x_i < x_0 \\ 0 & \text{se } x_i \geq x_0 \end{cases}$$

A visualização gráfica do MLOG é mostrada na Figura 4.

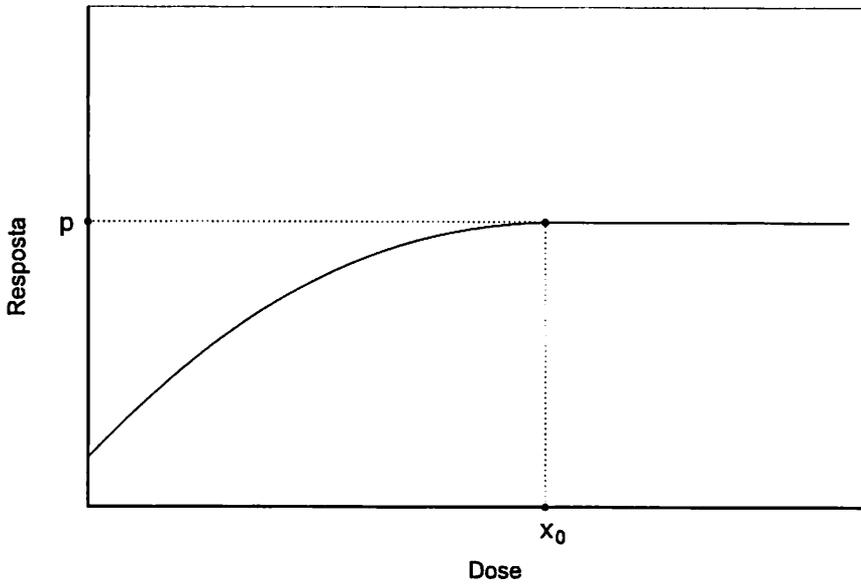


Figura 4 Representação gráfica do modelo platô de resposta logarítmico (MLOG)

Assumindo a continuidade do modelo em x_0 , tem-se a seguinte igualdade:

$$b \log(x_0 + a) = p$$

$$\log(x_0 + a) = \frac{p}{b}$$

$$x_0 + a = \exp^{\frac{p}{b}}$$

$$x_0 = \exp^{\frac{p}{b}} - a$$

Como x_0 pode ser escrito em função de a , b e p , o modelo logarítmico proposto é um modelo indexado por três parâmetros.

As derivadas parciais do MLOG, em sua forma alternativa, com relação aos parâmetros (a , b e p), são dadas por:

$$\begin{aligned}\frac{\partial Y_i}{\partial a} &= \left(\frac{b}{x_i + a} \right) Z_i \\ \frac{\partial Y_i}{\partial b} &= \log(x_0 + a) \\ \frac{\partial Y_i}{\partial p} &= 1 - Z_i\end{aligned}$$

Logo, o MLOG é considerado um modelo não linear nos parâmetros, pois duas derivadas parciais $\frac{\partial Y_i}{\partial a}$ e $\frac{\partial Y_i}{\partial b}$ são funções dos próprios parâmetros.

3.2 Implementação computacional da regressão isotônica

A regressão isotônica foi implementada no software livre R (R DEVELOPMENT CORE TEAM, 2010) que possui as funções e pacotes necessários para o cálculo da mesma. Tal implementação é feita de forma simples e compacta, e por este motivo tal software foi utilizado no presente trabalho. Para a regressão isotônica com pesos iguais (definição 2, pág. 34) utilizou-se a função *isoreg* do pacote *isotone* e, para a ponderada, com pesos diferentes (definição 2, pág. 34), utilizou-se a função *cir.pava* do pacote *cir*.

3.3 Simulação dos dados para análise com regressão isotônica

A fim de avaliar a eficiência da regressão isotônica em estudos de exigência nutricional de aves, foi realizado um estudo de simulação de dados via técnica

Monte Carlo. A simulação consistiu em gerar valores da variável resposta (y_i) por meio da adoção de valores fixos para os parâmetros dos modelos, MPQ, MNLE e MLOG, e considerando o erro aleatório proveniente de uma distribuição normal, com média zero e variância constante σ^2 . O valor paramétrico para a variância foi definido em função do modelo segmentado utilizado para gerar os dados, ou seja, para o modelo MPQ utilizou-se $\sigma^2 = 200 \text{ ppm}^2$, para o modelo MNLE o valor paramétrico foi $\sigma^2 = 130 \text{ ppm}^2$ e para o modelo MLOG o valor utilizado foi $\sigma^2 = 60 \text{ ppm}^2$. Para cada modelo foram geradas 1000 repetições de um conjunto com nove valores y_i , $i = 1, \dots, 9$, que representariam a deposição de zinco nos ossos, correspondentes a nove diferentes valores das doses de Zn (x_i) na ração, sendo $x_i = (0, 15, 30, \dots, 120)$.

A escolha dos pesos para a realização da regressão ponderada é uma questão delicada. Uma possibilidade é utilizar a mesma filosofia de escolha de pesos utilizada recentemente por Rodrigues et al. (2010). Os pesos são definidos como o inverso do módulo da diferença entre os dados originais e os dados obtidos pela regressão isotônica com pesos iguais. Esta escolha visa minimizar o efeito de outliers na curva de regressão isotônica obtida.

O procedimento de isotonização, com e sem ponderação, foram efetuados separadamente para cada uma das 1000 sequências geradas e foram realizados os ajustes dos três modelos, MPQ, MNLE e MLOG, considerando os dados não isotonizados, isotonizados e isotonizados ponderados. Nos ajustes em questão, os valores iniciais requeridos para se iniciar o processo iterativo de estimação foram atribuídos após uma análise exploratória dos dados, uma vez que os parâmetros apresentam interpretação biológica. Os chutes iniciais foram os próprios valores paramétricos.

Os valores paramétricos utilizados no processo de simulação estão apresentados na Tabela 1.

Tabela 1 Valores paramétricos utilizados no processo de simulação para os modelos: MPQ, MNLE e MLOG

| | a | b | c | x_0 | p |
|------|-----|-----|---------|-------|-----|
| MPQ | 198 | 1,5 | -0,01 | 75 | 254 |
| MNLE | 330 | 90 | 0,00009 | 90 | 330 |
| MLOG | 30 | 60 | | 65 | 273 |

3.4 Dados Reais

Os dados utilizados para o ajuste dos modelos, adaptados de Rezende (2002), são provenientes de um experimento, conduzido nas instalações do Departamento de Zootecnia da UFRGS, que foi instalado segundo um delineamento inteiramente casualizado com 8 repetições. Os tratamentos estavam arranjados em uma estrutura fatorial $2 \times 2 \times 9$, sendo 2 experimentos, 2 sexos e 9 doses de Zn adicionadas na ração de aves da linhagem Hubbard. As doses de Zinco foram: 0, 15, 30, 45, 60, 75, 90, 105 e 120 ppm. As variáveis estudadas foram as médias do teor de Zn (em ppm) na tíbia e no dedo médio das aves. Para o presente trabalho, foram utilizados somente os dados referentes ao teor de Zn na tíbia dos machos e no dedo médio das fêmeas. Essa escolha deve-se ao fato de que, para essas duas situações, verificou-se que os dados obtidos não eram crescentes.

A estimação dos parâmetros dos modelos não lineares: MPQ, MNLE e MLOG, aos dados de deposição de Zn na tíbia e dedo médio de aves (dados simulados e reais), foi feita pelo método de mínimos quadrados, sendo que a solução do

sistema de equações normais não lineares foi obtida por meio do processo iterativo de Gauss-Newton.

3.5 Critérios para avaliação do ajuste dos modelos

Os critérios utilizados para avaliar a qualidade de ajuste dos modelos, aos dados reais, foram: erro padrão das estimativas (EP), padrão residual (DPR), intervalo de 95% de confiança (IC) assintóticos para os parâmetros e o coeficiente de determinação R^2 .

Para os parâmetros x_0 e p dos modelos MPQ e MLOG, o desvio padrão das estimativas foi obtido por meio do método *Jackknife*. Como esses parâmetros são funções dos parâmetros a , b e c dos modelos, não se conhece uma expressão exata para a variância dos mesmos. Com relação aos parâmetros a , b e c do modelo MPQ e parâmetros a e b do MLOG, bem como para todos os parâmetros do modelo MNLE, essa estatística foi obtida diretamente dos resultados do pacote *stats* do software R (R DEVELOPMENT CORE TEAM, 2010).

3.5.1 Método *Jackknife*

A obtenção do intervalo de confiança para a abscissa do platô (x_0) e para o platô (p), por meio do método *jackknife*, é dado pelos seguintes passos: primeiramente, obtém-se as estimativas de x_0 e p através do software R (R DEVELOPMENT CORE TEAM, 2010), utilizando o conjunto de dados, sem a primeira dose. Em seguida, repete-se o processo considerando os dados originais sem a segunda dose e, assim, sucessivamente, até que todas as estimativas parciais jack-

knife sejam calculadas, obtendo-se um conjunto de nove estimativas parciais dos parâmetros.

Essas estimativas parciais foram aplicadas à seguinte fórmula:

$$E_i^* = nE^* - (n - 1)E_{-i}^*, \text{ com } i = 1, \dots, 9$$

em que E_i^* é a estimativa corrigida do valor para o parâmetro quando se exclui a i -ésima dose; n é o número de observações; E^* é a estimativa do parâmetro considerando todas as doses e E_{-i}^* é o valor da estimativa parcial do parâmetro obtido pelo ajuste do modelo quando se exclui a i -ésima dose.

Em seguida, obtém-se de forma convencional a média \bar{E}^* , que representa o estimador jackknife e a variância S^2 desse estimador. Obtida a variância, o intervalo de confiança assintótico para o parâmetro é construído da seguinte forma:

$$IC_{100(1-\alpha)\%} = \bar{E}^* \pm t_{(\alpha/2; n-1)} S / \sqrt{n},$$

em que: $t_{(\alpha/2; n-1)}$ é o percentil superior $\alpha/2$ da distribuição t de Student com $n-1$ graus de liberdade e S é o desvio padrão dos pseudo valores E_i^* .

3.6 Estimador não paramétrico para platô de resposta

No presente trabalho é proposto um estimador não paramétrico de platô de resposta (ENPPR), para a obtenção do parâmetro x_0 .

Sejam (x_i, y_i) dados de um fenômeno que por razões teóricas devem ter respostas crescentes em relação aos valores de x_i e que a partir de um valor desconhecido x_0 se estabilizam em um valor constante p . Por razões de aleatoriedade

os valores de y_i , em geral, não são crescentes. A ideia é fazer a regressão isotônica destes dados obtendo-se valores crescentes y_i^* . Como os últimos valores y_i devem estar em torno de uma reta paralela ao eixo das abscissas, a função escada dada pelos valores y_i^* deve se estabilizar em uma reta paralela as abscissas ou em uma função escada com degraus (saltos nas ordenadas) muito pequenos. A ideia agora é tomar o valor da função escada, desprezando os dois últimos valores e em torno deste valor estabelecer um intervalo no eixo das ordenadas. Este intervalo é deslocado para a esquerda no eixo das abscissas, criando uma faixa em torno da função escada. O valor estimado do platô é o primeiro valor x_0 para o qual a função escada sai desta faixa, conforme Figura 5.

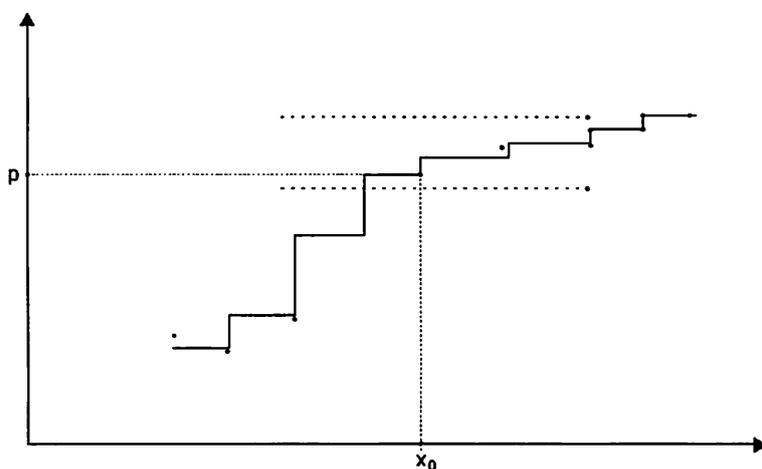


Figura 5 Estabilização do platô obtida por meio do estimador não paramétrico para platô de resposta (ENPPR)

Tem-se que justificar duas passagens nesta construção. Porque desprezar os dois últimos valores? A regressão isotônica depende de todos os valores,

no entanto a regressão isotônica sempre termina em um degrau de valor igual ao último dado se este for por exemplo maior que os anteriores. Neste caso nossa faixa seria deslocada para cima o que acarretaria uma superestimação do platô. Portanto ao se desprezar os dois últimos valores a estimação fica mais robusta, apesar de tal fato merecer uma investigação mais apurada.

O segundo procedimento é bem mais complexo. Qual a largura da faixa? Uma largura excessivamente pequena levaria a uma superestimação de x_0 e larguras excessivamente grandes a uma subestimação. Neste caso a ideia é utilizar a própria variação dos dados para se obter um valor que no caso seria uma percentagem da variância amostral. O problema aqui é que a variância amostral reflete o fato que a média das respostas varia com o aumento dos valores dos x_i . Para os valores iniciais esta variação pode ser de magnitude muito superior à variabilidade da resposta para cada valor x_i , variabilidade que estamos considerando constante.

Uma ideia então é utilizar a variabilidade dos dados mas em valores próximos à abscissa do platô x_0 . Como este é desconhecido optou-se por um análise exploratória dos dados da seguinte forma: para cada x_i com $i = 1, \dots, n$, divide-se o conjunto das doses em dois subconjuntos, $\{x_1, x_2, \dots, x_i\}$ e $\{x_{i+1}, \dots, x_n\}$. Para cada um destes subconjuntos são realizadas regressões lineares simples. Para cada uma delas é calculada a soma de quadrados dos resíduos e vamos tomar como uma estimativa preliminar de x_0 o valor que possui a menor soma de quadrados considerando as duas regressões lineares (Figura 6). É claro que estas duas retas formam um modelo segmentado mas não contínuo e portanto esta estimativa preliminar é bastante inadequada. Toma-se agora a variância amostral para os valores de x_i próximos a esta estimativa preliminar x_0 . Com esta variância a largura da faixa é determinada.

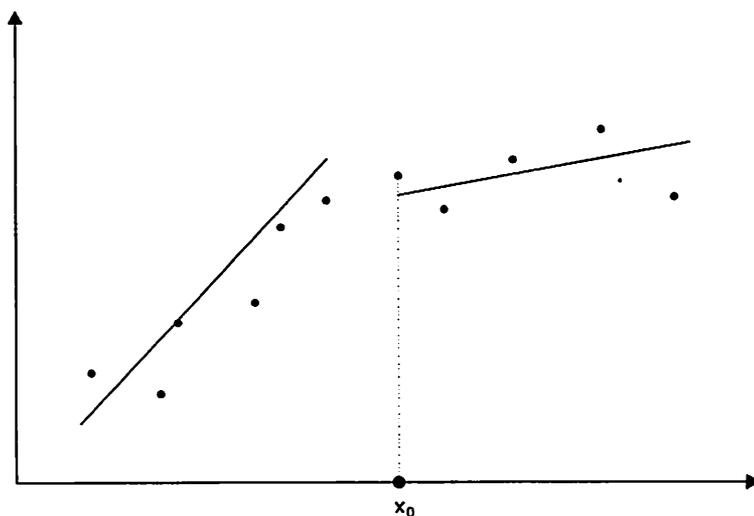


Figura 6 Representação gráfica da regressão linear realizada para obtenção da variância da faixa de tolerância

Mais especificadamente, escolhida a partição que resultou na menor soma de soma de quadrados residuais, toma-se a primeira dose do segundo subconjunto. A partir desta dose considerou-se um intervalo contendo 30% das doses inferiores a esse valor e 30% das doses superiores a ele. Para as respostas destas doses, calcula-se a variância amostral (S^2), que foi utilizada na determinação da largura da faixa de tolerância no valor $0,2S^2$. A faixa foi determinada por meio da cota inferior $c = y_{n-2}^* - 0,2S^2$.

O ENPPR consiste em determinar a dose x_0 por meio da comparação sucessiva e reversa dos valores da variável resposta y_i^* da seguinte forma: para $j = n - 2, n - 3, \dots$ se $y_j^* - c \geq 0$ então a sequência está estabilizada. A estimativa x_0 do platô é obtida pela dose correspondente ao primeiro j tal que, $y_j^* - c < 0$.

3.6.1 Estudo de simulação para o estimador não paramétrico para platô de resposta

Para a avaliação do comportamento do estimador não paramétrico para platô de resposta foram considerados os seguintes cenários:

- a) CENÁRIO 1: foram simuladas 1000 repetições de uma amostra com 9 valores y_i correspondentes a 9 diferentes doses x_i . Para cada uma das amostras simuladas considerou-se uma distribuição normal para os resíduos com média zero e variância constante igual a 3. Os valores paramétricos utilizados no processo de simulação a partir do MPQ, foram: $a = 198$; $b = 1,3$; $c = -0,01$; $x_0 = 65$ e $p = 240$; para o MLOG, os valores utilizados foram: $a = 29$; $b = 62$; $x_0 = 65$ e $p = 283$ e para o PRL utilizou-se: $a = 150$; $b = 2$; $x_0 = 65$ e $p = 280$;
- b) CENÁRIO 2: foram simuladas 1000 repetições de uma amostra com 120 valores y_i correspondentes a 120 diferentes doses x_i . Para cada uma das amostras simuladas considerou-se uma distribuição normal para os resíduos com média zero e variância constante igual a 3. Os valores paramétricos utilizados no processo de simulação a partir do MPQ, foram: $a = 198$; $b = 1,3$; $c = -0,01$; $x_0 = 65$ e $p = 240$; para o MLOG, os valores utilizados foram: $a = 29$; $b = 62$; $x_0 = 65$ e $p = 283$ e para o PRL utilizou-se: $a = 150$; $b = 2$; $x_0 = 65$ e $p = 280$;
- c) CENÁRIO 3: foram simuladas 1000 repetições de uma amostra com 9 valores y_i correspondentes a 9 diferentes doses x_i . Para cada uma das amostras

simuladas considerou-se uma distribuição uniforme para os resíduos no intervalo $(0, \sqrt{12\sigma^2})$, em que $\sigma^2 = 3$. Os valores paramétricos utilizados no processo de simulação a partir do MPQ, foram: $a = 198$; $b = 1,3$; $c = -0,01$; $x_0 = 65$ e $p = 240$; para o MLOG, os valores utilizados foram: $a = 29$; $b = 62$; $x_0 = 65$ e $p = 283$ e para o PRL utilizou-se: $a = 150$; $b = 2$; $x_0 = 65$ e $p = 280$;

- d) CENÁRIO 4: foram simuladas 1000 repetições de uma amostra com 120 valores y_i correspondentes a 120 diferentes doses x_i . Para cada uma das amostras simuladas considerou-se uma distribuição uniforme para os resíduos no intervalo $(0, \sqrt{12\sigma^2})$, em que $\sigma^2 = 3$. Os valores paramétricos utilizados no processo de simulação a partir do MPQ, foram: $a = 198$; $b = 1,3$; $c = -0,01$; $x_0 = 65$ e $p = 240$; para o MLOG, os valores utilizados foram: $a = 29$; $b = 62$; $x_0 = 65$ e $p = 283$ e para o PRL utilizou-se: $a = 150$; $b = 2$; $x_0 = 65$ e $p = 280$.

Os valores utilizados para os parâmetros da uniforme tiveram como objetivo manter a mesma variância para os quatro cenários de simulação.

3.6.2 Estimador semi paramétrico para modelos segmentados crescente - linear

O estimador não paramétrico para platô de resposta pode ser generalizado para um estimador semi paramétrico no caso de modelos segmentados tipo: função crescente - função linear crescente. Tais modelos ocorrem por exemplo em Gallant e Fuller (1973) que propõem vários tipos de modelos segmentados entre os quais

modelos tipo polinomial-linear. Estes modelos pretendem explicar fenômenos que inicialmente se comportam de forma complexa mas que a partir de um valor x_0 passam a ter um comportamento linear. Evidentemente os modelos de platô de resposta são casos particulares destes modelos mais gerais.

O processo de estimação é obtido da mesma forma que no caso não paramétrico. O conjunto dos valores de x são divididos em dois grupos e duas regressões lineares são realizadas e calculados a soma de quadrados dos resíduos. Com a menor soma de quadrados temos uma estimativa preliminar do ponto de mudança x_0 . Temos também uma reta que ajusta os dados para x maior que x_0 . A função escada obtida pela regressão isotônica deve se estabilizar em torno de uma reta (Figura 7). A ideia então é construir, desprezando os dois últimos valores da regressão isotônica, uma faixa com o mesmo coeficiente angular da reta obtida. O primeiro valor da função escada que sair da faixa será estimado como o ponto de mudança x_0 . Novamente aqui a largura da faixa será obtida pela variabilidade dos dados obtidos em torno da estimativa preliminar de x_0 dada pelas duas regressões lineares.

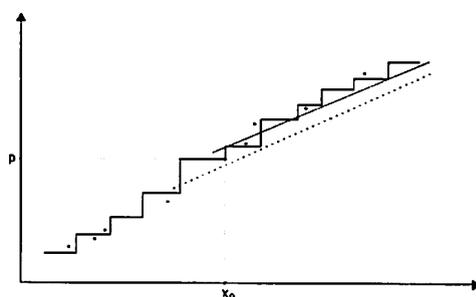


Figura 7 Representação gráfica do estimador semi paramétrico para modelos segmentados crescente - linear

4 RESULTADOS E DISCUSSÃO

4.1 Estudo por simulação da validade da isotonização de dados

A proposta de isotonização dos dados para fenômenos em que a resposta deveria ser crescente é de certa forma uma maneira de redução da aleatoriedade do processo. Baseando-se em dois resultados teóricos de que, em várias situações, a regressão isotônica é o estimador de máxima verossimilhança restrito (Teorema 2, secção 2.3.1) e que a regressão isotônica diminui a esperança do erro quadrático (Teorema 3, secção 2.3.1), tal proposta é coerente no ponto de vista teórico.

Com o objetivo de validar essa proposição, um estudo por simulação, via Monte Carlo, foi realizado para os modelos, MPQ, MNLE e MLOG, de platô de resposta. Foram comparados os ajustes obtidos em três situações: ajuste com os dados sem isotonização, ajuste com os dados isotonizados por meio de regressão isotônica com pesos iguais e ajuste dos dados isotonizados por meio de regressão isotônica com pesos diferentes (isotonizados ponderados). A metodologia para obtenção dos pesos foi a utilizada por Rodrigues et al. (2010) e que tem por objetivo minimizar efeitos de possíveis outliers.

Por meio da Figura 8, visualiza-se as situações consideradas nesta simulação (dados não isotonizados, isotonizados e isotonizados ponderados) via modelo MPQ.

Vê-se por meio da Figura 8 a presença de violadores, justificando a proposta de correção dos dados via regressão isotônica.

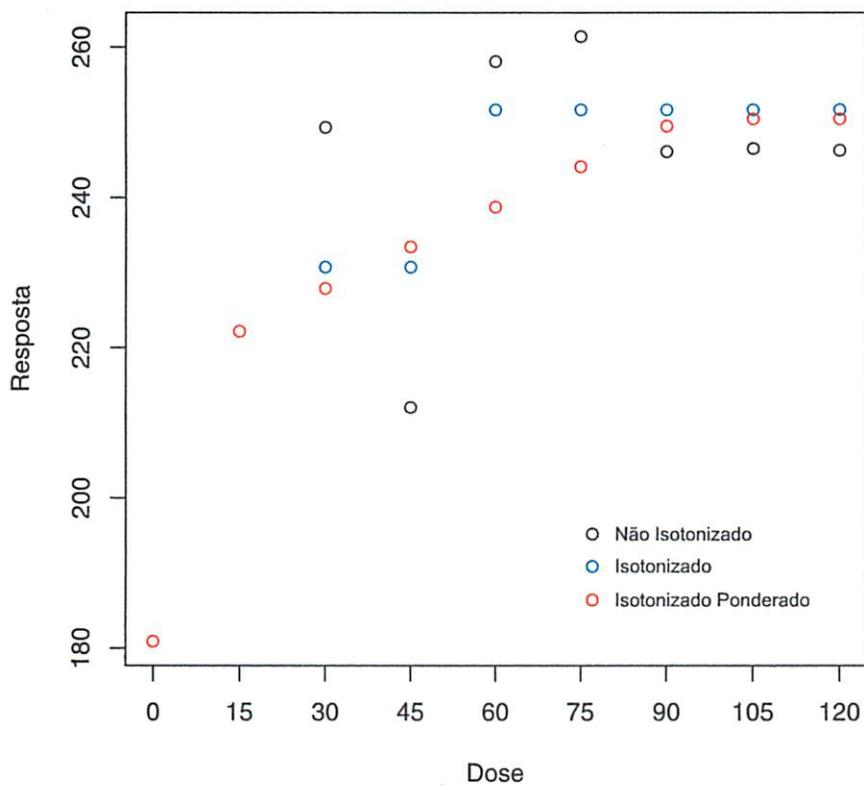


Figura 8 Valores simulados via modelo MPQ, não isotonizados, isotonizados e isotonizados ponderados, em função das doses

Na Tabela 2, estão apresentados os resultados das estimativas dos parâmetros, com os respectivos viés, erro quadrático médio (EQM), erros padrões (EP) e limites, inferior e superior, do intervalo de 95% de confiança (IC95%) considerando o modelo MPQ, para os dados não isotonzados, isotonzados e isotonzados ponderados. Os valores paramétricos utilizados nesse estudo de simulação foram: $a = 198$; $b = 1,5$; $c = -0,01$; $x_0 = 75$, $p = 254$ e com erro normal e variância $\sigma^2 = 200$.

O procedimento de isotonzação dos dados não alterou expressivamente as estimativas dos parâmetros, exceto para x_0 , onde o modelo superestimou esse valor nas três situações consideradas.

Esses resultados estão de acordo com Rezende et al. (2007), que ao estudarem a técnica platô de resposta, utilizando o MPQ, concluíram que o modelo superestimou o valor do parâmetro x_0 . Resultados semelhantes também foram encontrados por Coelho (1984), Euclides e Rostagno (2001), Morris (1983) e Runho et al. (2001), que afirmam ter este modelo a característica de superestimar o valor do parâmetro x_0 .

Com relação à precisão com que as estimativas dos parâmetros foram obtidas, verifica-se nessa tabela que a isotonzação dos dados propiciou uma redução do EP para todos os parâmetros considerados no modelo resultando em IC com menor amplitude e portanto mais precisos. Para os parâmetros x_0 e p , essa redução do EP só é verificada para os dados isotonzados quando comparados aos dados originais, ou seja, dados não isotonzados. Ao se considerar a isotonzação com ponderação a redução do EP apenas é verificada para os parâmetros a , b e c do modelo, para os parâmetros x_0 e p , houve um pequeno aumento para essa mesma medida.

Tabela 2 Estimativas dos parâmetros, com os respectivos erros padrões (EP), viés, erro quadrático médio (EQM) e limites dos intervalos de 95% de confiança (IC95%), do modelo polinomial quadrático (MPQ) obtidos por meio do processo de simulação

| Parâmetros | Estimativa | Viés | EQM | EP | LI | LS |
|------------------|------------|--------|---------|-------|--------|--------|
| Não Isotonizados | | | | | | |
| a | 198,37 | -0,37 | 151,67 | 12,31 | 173,85 | 221,21 |
| b | 1,53 | -0,03 | 0,38 | 0,62 | 0,52 | 2,79 |
| c | -0,01 | 0 | 0,00004 | 0,006 | -0,02 | -0,002 |
| x_0 | 86,67 | -11,67 | 1444,46 | 36,17 | 52,06 | 173,96 |
| p | 258,71 | -4,71 | 109,23 | 9,33 | 244,21 | 280,89 |
| Isotonizados | | | | | | |
| a | 198,52 | -0,52 | 138,33 | 11,75 | 175,33 | 220,81 |
| b | 1,37 | 0,13 | 0,30 | 0,53 | 0,50 | 2,49 |
| c | -0,008 | -0,002 | 0,00003 | 0,005 | -0,02 | -0,002 |
| x_0 | 95,38 | -20,38 | 1495,78 | 32,87 | 54,47 | 169,57 |
| p | 258,68 | -4,68 | 87,19 | 8,08 | 245,68 | 274,41 |
| Iso. Ponderados | | | | | | |
| a | 198,39 | -0,39 | 135,41 | 11,63 | 174,69 | 221,13 |
| b | 1,26 | 0,24 | 0,29 | 0,48 | 0,51 | 2,36 |
| c | -0,007 | -0,003 | 0,00002 | 0,004 | -0,02 | -0,001 |
| x_0 | 104,32 | -29,32 | 2045,78 | 34,44 | 57,25 | 181,54 |
| p | 258,79 | -4,79 | 89,37 | 8,15 | 243,83 | 274,83 |

Verifica-se também na Tabela 2 que o procedimento de isotonzificação dos dados aumenta o viés mas o EQM diminui, exceto para o parâmetro x_0 .

Na Figura 9, visualiza-se as situações consideradas nesta simulação (dados não isotonzificados, isotonzificados e isotonzificados ponderados) via modelo MNLE.

Verifica-se na Figura 9 a presença de violadores justificando a isotonzificação dos dados.

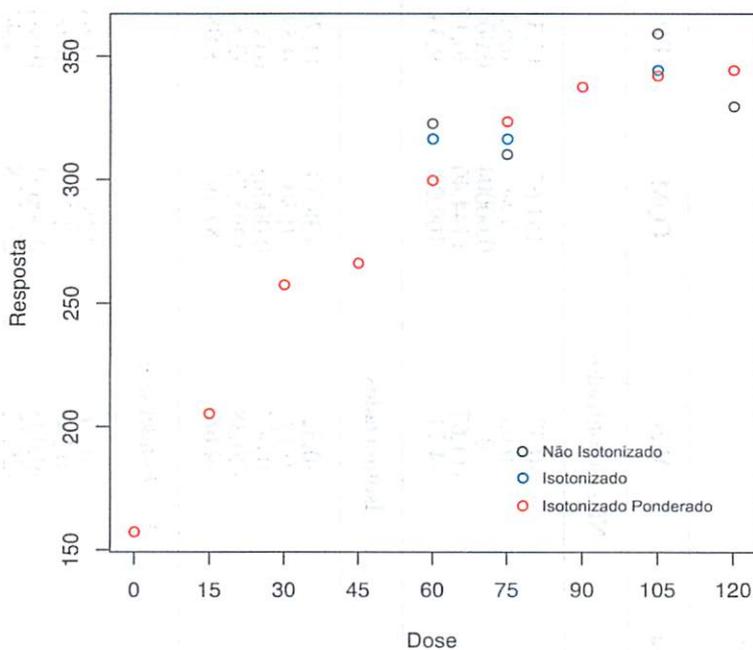


Figura 9 Valores simulados via modelo MNLE, não isotonzificados, isotonzificados e isotonzificados ponderados, em função das doses

Na Tabela 3, estão apresentados os resultados das estimativas dos parâmetros, com os respectivos vies, erro quadrático médio (EQM), erros padrões (EP) e limites, inferior e superior, do intervalo de 95% de confiança (IC95%) considerando o modelo MNLE, para os dados não isotonzados, isotonzados e isotonzados ponderados. Os valores paramétricos utilizados nesse estudo de simulação foram: $a = 330$; $b = 90$; $c = 0,00009$; $x_0 = b = 90$, $p = a = 330$ e com erro normal e variância $\sigma^2 = 130$.

O procedimento de correção dos dados simulados via regressão isotônica não alterou significativamente as estimativas dos parâmetros, para o ajuste do modelo MNLE.

Assim como discutido para o MPQ, com relação à precisão com que as estimativas dos parâmetros foram obtidas, observa-se nessa tabela que a isotonzação dos dados propiciou uma redução do EP para todos os parâmetros considerados no modelo resultando em IC com menor amplitude e portanto mais precisos. Para o parâmetro c , essa redução do EP é verificada para os dados isotonzados quando comparados aos dados originais, ou seja, não isotonzados. Ao se considerar a isotonzação com ponderação a redução do EP apenas é verificada para o parâmetro c do modelo, para os parâmetros a , b , x_0 e p , houve um pequeno aumento para essa mesma medida.

O processo de isotonzação também acarretou em um aumento do vies, mas o EQM corrigiu esse aumento, no sentido que foi inferior para os dados isotonzados não ponderados e ponderados, exceto para os parâmetros b e x_0 .

Tabela 3 Estimativas dos parâmetros, com os respectivos viés, erro quadrático médio (EQM), erros padrões (EP) e limites dos intervalos de 95% de confiança (IC95%), do modelo não-linear exponencial (MNLE) obtidos por meio do processo de simulação

| Parâmetros | Estimativa | Viés | EQM | EP | LI | LS |
|------------------|----------------------|----------------------|------------------------|----------------------|----------------------|-----------------------|
| Não Isotonizados | | | | | | |
| a | 329,2 | 0,8 | 52,48 | 7,2 | 316,6 | 344,2 |
| b | 93,2 | -3,2 | 91,24 | 9 | 76,4 | 111,2 |
| c | 8×10^{-5} | 1×10^{-5} | $4,61 \times 10^{-10}$ | $1,9 \times 10^{-5}$ | $5,4 \times 10^{-5}$ | $12,7 \times 10^{-5}$ |
| x_0 | 93,2 | -3,2 | 91,24 | 9 | 76,4 | 111,2 |
| p | 329,2 | 0,8 | 52,48 | 7,2 | 316,6 | 344,2 |
| Isotonizados | | | | | | |
| a | 330,8 | -0,8 | 48,25 | 6,9 | 318,7 | 344,8 |
| b | 95,2 | -5,2 | 72,25 | 8,5 | 78,3 | 111,1 |
| c | $7,9 \times 10^{-5}$ | $1,1 \times 10^{-5}$ | $4,45 \times 10^{-10}$ | $1,8 \times 10^{-5}$ | $5,4 \times 10^{-5}$ | 12×10^{-5} |
| x_0 | 95,2 | -5,2 | 72,25 | 8,5 | 78,3 | 111,1 |
| p | 330,8 | -0,8 | 48,25 | 6,9 | 318,7 | 344,8 |
| Iso. Ponderados | | | | | | |
| a | 330,5 | -0,5 | 52,09 | 7,2 | 317,5 | 345,3 |
| b | 96,7 | -6,7 | 122,33 | 8,8 | 79,5 | 113,2 |
| c | $7,7 \times 10^{-5}$ | $1,3 \times 10^{-5}$ | $4,58 \times 10^{-10}$ | $1,7 \times 10^{-5}$ | 5×10^{-5} | 12×10^{-5} |
| x_0 | 96,7 | -6,7 | 122,33 | 8,8 | 79,5 | 113,2 |
| p | 330,5 | -0,5 | 52,09 | 7,2 | 317,5 | 345,3 |

Visualiza-se, na Figura 10, as situações consideradas nesta simulação (dados não isotonzados, isotonzados e isotonzados ponderados) via modelo MLOG.

Conforme discutido para as Figuras 8, 9, visualiza-se na Figura 10 a presença de violadores, justificando a proposta do trabalho de correção dos dados via regressão isotônica, permitindo, de certa forma, recuperar a trajetória natural da curva representativa do fenômeno em estudo, que neste caso trata-se de deposição de Zn nos ossos de aves de interesse Zootécnico.

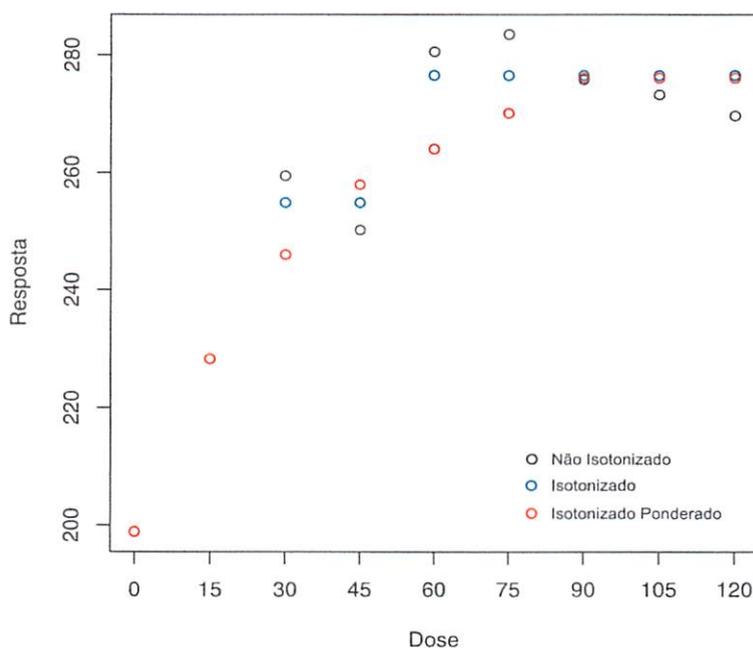


Figura 10 Valores simulados via modelo MLOG, não isotonzados, isotonzados e isotonzados ponderados, em função das doses

Na Tabela 4, estão apresentados os resultados das estimativas dos parâmetros, com os respectivos viés, erro quadrático médio (EQM), erros padrões (EP) e limites, inferior e superior, do intervalo de 95% de confiança (IC95%) considerando o modelo MLOG, para os dados não isotonzados, isotonzados e isotonzados ponderados. Os valores paramétricos utilizados nesse estudo de simulação foram: $a = 30$; $b = 60$; $x_0 = 65$, $p = 273$ e com erro normal e variância $\sigma^2 = 60$.

Com relação à precisão com que as estimativas dos parâmetros foram obtidas, nota-se nessa tabela que a correção via isotonzação dos dados reduziu o EP para todos os parâmetros considerados no modelo resultando em IC com menor amplitude e portanto mais precisos. Para o parâmetro p , essa redução do EP só é verificada para os dados isotonzados quando comparados aos dados originais, ou seja, dados não isotonzados. Ao se considerar a isotonzação com ponderação, a redução do EP é verificada para os parâmetros a , b e x_0 do modelo, para o parâmetro p , houve um pequeno aumento para essa medida.

Assim como discutido para os modelos MPQ e MNLE, o processo de correção dos dados via regressão isotônica aumenta o viés mas o EQM corrige esse aumento. Para o modelo MLOG o EQM foi inferior para todos os parâmetros.

O processo de isotonzação dos dados, em geral, melhorou a qualidade dos ajustes. Certamente essa melhora não foi mais acentuada em razão do fato de que os dados, em geral, apresentaram violadores essencialmente na parte em que o modelo já estava próximo da estabilização do platô. Como a parte mais complexa e de difícil modelagem é justamente a parte inicial crescente do modelo, é razoável afirmar que o uso da metodologia de isotonzação dos dados pode melhorar significativamente a qualidade do ajuste, para o caso em que os dados apresentem um

Tabela 4 Estimativas dos parâmetros, com os respectivos viés, erro quadrático médio (EQM), erros padrões (EP) e limites dos intervalos de 95% de confiança (IC95%), do modelo logarítmico (MLOG) obtidos por meio do processo de simulação

| Parâmetros | Estimativa | Viés | EQM | EP | LI | LS |
|------------------|------------|-------|--------|-------|--------|--------|
| Não Isotonizados | | | | | | |
| a | 29,44 | 0,56 | 18,46 | 4,26 | 21,17 | 37,61 |
| b | 60,37 | -0,37 | 2,70 | 1,60 | 57,30 | 63,39 |
| x_0 | 64,37 | 0,63 | 110,23 | 10,48 | 44,26 | 86,04 |
| p | 273,36 | -0,36 | 18,45 | 4,28 | 264,86 | 281,69 |
| Isotonizados | | | | | | |
| a | 29,88 | 0,12 | 17,74 | 4,21 | 21,93 | 37,72 |
| b | 60,10 | -0,10 | 2,17 | 1,47 | 57,31 | 62,85 |
| x_0 | 66,94 | -1,94 | 85,30 | 9,03 | 51,46 | 86,73 |
| p | 274,27 | -1,27 | 16,36 | 3,84 | 267,35 | 282,20 |
| Iso. Ponderados | | | | | | |
| a | 30,53 | -0,53 | 16,93 | 4,08 | 22,90 | 38,09 |
| b | 59,62 | 0,38 | 2,25 | 1,45 | 56,77 | 62,36 |
| x_0 | 69,30 | -4,30 | 92,79 | 8,62 | 53,72 | 87,93 |
| p | 274,01 | -1,01 | 16,86 | 3,98 | 266,75 | 282,33 |

maior número de violadores na fase crescente do processo.

4.1.1 Aplicação a dados reais

O processo de isotonização foi aplicado a dados relativos à deposição de zinco (Zn) na tíbia de aves machos e dedo médio das fêmeas, da linhagem Hubbard, dados originalmente analisados para os modelos MPQ e MNLE em Rezende (2002).

Por meio das Figuras 11 e 12, visualizam-se os dados de deposição de Zn, na tíbia e dedo médio de aves, respectivamente, para as três situações consideradas neste estudo (dados não isotonizados, isotonizados e isotonizados ponderados).

Vê-se nas Figuras 11 e 12 a presença de violadores, justificando a isotonização dos dados. Do ponto de vista prático, verifica-se na Figura 11 que os dados não isotonizados tendem a apresentar uma estabilização, ou seja, um platô (p) a partir da dose 60 ppm de Zn na ração.

Na mesma figura, ao observar os dados isotonizados e isotonizados ponderados, verifica-se que a ponderação resulta em uma suavização demasiada da curva o que acarreta em uma superestimação do parâmetro x_0 , sendo mais coerente considerar apenas a isotonização para o ajuste dos modelos.

Visualiza-se na Figura 12 que os dados originais tendem a estabilizar a partir da dose 90 ppm de Zn na ração. Assim como discutido para a Figura 11, verifica-se para os dados experimentais de deposição de Zn no dedo médio de aves fêmeas, ao observar os dados isotonizados e os dados isotonizados ponderados, nota-se que a ponderação acarreta em uma superestimação do parâmetro x_0 .

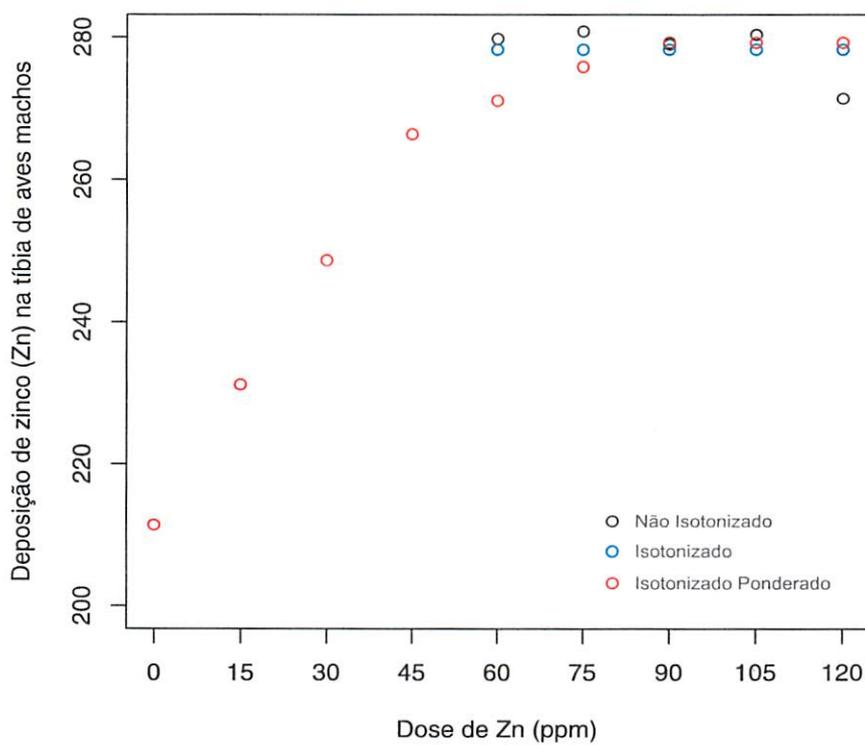


Figura 11 Curvas de deposição de Zn na tíbia de aves machos da linhagem Hubbard, não isotonizados, isotonizados e isotonizados ponderados

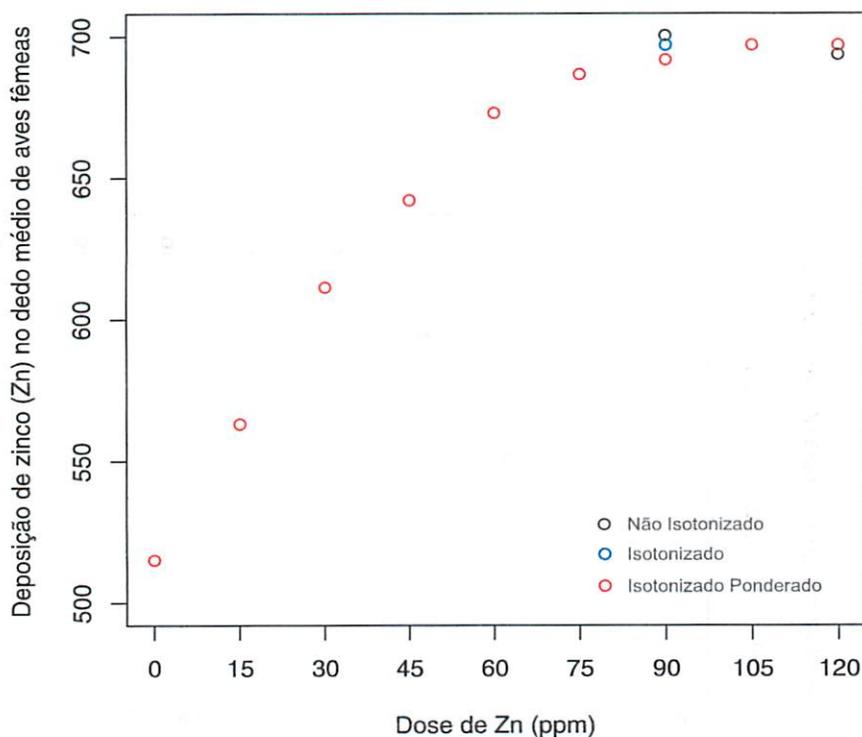


Figura 12 Curvas de deposição de Zn no dedo médio de aves fêmeas da linhagem Hubbard, não isotonizados, isotonizados e isotonizados ponderados

Nas Tabelas 5 a 10 encontram-se as estimativas dos parâmetros, com os respectivos erros padrões das estimativas (EP), limites, inferior e superior, do intervalo de 95% de confiança (IC95%), coeficiente de determinação (R^2) e o desvio padrão residual (DPR) para o ajuste dos modelos MPQ, MNLE e MLOG, respectivamente, aos dados reais.

Para o ajuste do modelo MPQ (Tabela 5), verifica-se que a isotonização não alterou de forma expressiva as estimativas dos parâmetros, exceto para o x_0

Tabela 5 Estimativas dos parâmetros, com os respectivos erros padrões (EP) e limites dos intervalos de 95% de confiança (IC95%), do modelo polinomial quadrático (MPQ) ajustado às médias, não isotonzadas, isotonzadas e isotonzadas ponderadas, de deposição de zinco (Zn) na tíbia de aves machos da linhagem Hubbard

| Parâmetros | Estimativa | EP | LI | LS |
|------------------|------------|------------------------------------|--------|--------|
| Não Isotonizados | | | | |
| a | 209,19 | 3,79 | 200,09 | 218,15 |
| b | 1,77 | 0,22 | 1,34 | 2,30 |
| c | -0,01 | 0,002 | -0,02 | -0,007 |
| x ₀ | 82,70 | 2,83 | 76,17 | 89,24 |
| p | 280,86 | 0,91 | 278,77 | 282,95 |
| | | R ² =0,992 DPR= 4,24 | | |
| Isotonizados | | | | |
| a | 209,54 | 2,08 | 204,48 | 214,56 |
| b | 1,72 | 0,12 | 1,47 | 2,01 |
| c | -0,01 | 0,001 | -0,014 | -0,008 |
| x ₀ | 80,91 | 2,54 | 75,04 | 86,77 |
| p | 279,07 | 0,21 | 278,59 | 279,53 |
| | | R ² =0,994 DPR=2,34 | | |
| Iso.Ponderados | | | | |
| a | 210,90 | 1,54 | 207,08 | 214,67 |
| b | 1,56 | 0,08 | 1,37 | 1,77 |
| c | -0,009 | 0,0008 | -0,01 | -0,007 |
| x ₀ | 86,74 | 2,19 | 81,69 | 91,78 |
| p | 278,73 | 0,19 | 278,30 | 279,16 |
| | | R ² =0,996 DPR=1,76 | | |

em que observa-se um aumento no valor desse parâmetro quando foi considerado a isotonização com ponderação. Verifica-se ainda, nessa tabela, para todos os parâmetros do modelo, uma redução do EP das estimativas à medida que o procedimento de isotonização foi implementado implicando em uma diminuição da amplitude dos IC. É importante salientar que essa melhora na qualidade do ajuste é obtida sem o aumento de parâmetros no modelo e com o mesmo tamanho da amostra original, uma vez que o processo de isotonização somente ordena os dados de forma não decrescente.

Verifica-se para o ajuste do modelo MPQ, aos dados de deposição de zinco (Zn) no dedo médio de aves fêmeas da linhagem Hubbard (Tabela 6), que o processo de correção dos dados originais via regressão isotônica não alterou expressivamente as estimativas dos parâmetros, exceto para os parâmetros p e x_0 em que observa-se uma redução nos valores de suas estimativas quando foi considerada a isotonização ponderada. Nota-se ainda, nessa tabela, que o processo de correção acarretou na diminuição dos EP de todas as estimativas dos parâmetros implicando em IC de menor amplitude.

Com relação à qualidade do ajuste desse modelo, nota-se uma redução expressiva no valor do DPR quando foram consideradas as médias isotonizadas, sejam elas ponderadas ou não, para os dois conjuntos de dados reais considerados no estudo.

Tabela 6 Estimativas dos parâmetros, com os respectivos erros padrões (EP) e limites dos intervalos de 95% de confiança (IC95%), do modelo polinomial quadrático (MPQ) ajustado às médias, não isotonzadas, isotonzadas e isotonzadas ponderadas, de deposição de zinco (Zn) no dedo médio de aves fêmeas da linhagem Hubbard

| Parâmetros | Estimativa | EP | LI | LS |
|-----------------------------------|------------|--------|--------|--------|
| Não Isotonizados | | | | |
| a | 513,48 | 2,59 | 507,19 | 519,73 |
| b | 3,79 | 0,12 | 3,52 | 4,08 |
| c | -0,02 | 0,001 | -0,022 | -0,017 |
| x ₀ | 98,57 | 1,12 | 96,00 | 101,15 |
| p | 698,84 | 0,86 | 696,86 | 700,82 |
| R ² =0,998 DPR=3,03 | | | | |
| Isotonizados | | | | |
| a | 513,75 | 1,77 | 509,42 | 518,05 |
| b | 3,77 | 0,08 | 3,57 | 3,97 |
| c | -0,02 | 0,0007 | -0,021 | -0,017 |
| x ₀ | 97,59 | 0,88 | 95,57 | 99,63 |
| p | 697,46 | 0,20 | 696,99 | 697,93 |
| R ² =0,999 DPR=2,07 | | | | |
| Iso. Ponderados | | | | |
| a | 513,82 | 2,18 | 508,42 | 519,17 |
| b | 3,77 | 0,10 | 3,52 | 4,03 |
| c | -0,02 | 0,0009 | -0,022 | -0,017 |
| x ₀ | 95,88 | 1,07 | 93,40 | 98,36 |
| p | 695,23 | 0,54 | 693,98 | 696,49 |
| R ² =0,999 DPR=2,55 | | | | |

Verifica-se nas Tabelas 7 e 8 que o processo de isotonização dos dados via modelo MNLE não alterou de maneira significativa as estimativas dos parâmetros, porém reduziu de forma mais acentuada o erro padrão e a amplitude dos intervalos de confiança, relativos a todos os parâmetros. Os índices de qualidade de ajuste, R^2 e DPR, melhoraram tanto no caso isotonizado quanto no isotonizado ponderado.

Na Tabela 7 observa-se o ajuste do modelo MNLE aos dados de deposição de zinco (Zn) na tíbia de aves machos da linhagem Hubbard, para as três situações consideradas. De forma semelhante ao ajuste do modelo MPQ, as estimativas dos parâmetros não sofreram alterações expressivas, exceto para o parâmetro x_0 em que observa-se um aumento do valor de sua estimativa à medida que o procedimento de isotonização foi implementado. Com relação à qualidade do ajuste desse modelo, nota-se uma redução expressiva no valor do DPR conforme o processo de isotonização foi sendo implementado.

Na Tabela 8, observa-se que a isotonização, assim como discutido anteriormente, também melhora a qualidade do ajuste do modelo sendo que diminui os EP das estimativas dos parâmetros e acarretou uma diminuição dos DPR.

Tabela 7 Estimativas dos parâmetros, com os respectivos erros padrões (EP) e limites dos intervalos de 95% de confiança (IC95%), do modelo não-linear exponencial (MNLE) ajustado às médias, não isotonzadas, isotonzadas e isotonzadas ponderadas, de deposição de zinco (Zn) na tíbia de aves machos da linhagem Hubbard

| Parâmetros | Estimativa | EP | LI | LS |
|-----------------------------------|-----------------------|-----------------------|-----------------------|-----------------------|
| Não Isotonizados | | | | |
| a | 278,50 | 1,91 | 273,99 | 283,18 |
| b | 75,03 | 6,58 | 61,61 | 90,91 |
| c | $5,04 \times 10^{-5}$ | $0,99 \times 10^{-5}$ | $3,24 \times 10^{-5}$ | $7,83 \times 10^{-5}$ |
| x_0 | 75,03 | 6,58 | 61,61 | 90,91 |
| p | 278,50 | 1,91 | 273,99 | 283,18 |
| R ² =0,982 DPR=3,91 | | | | |
| Isotonizados | | | | |
| a | 278,72 | 0,92 | 276,55 | 280,98 |
| b | 76,34 | 3,18 | 69,40 | 84,27 |
| c | $4,86 \times 10^{-5}$ | $0,46 \times 10^{-5}$ | $3,88 \times 10^{-5}$ | $6,02 \times 10^{-5}$ |
| x_0 | 76,34 | 3,18 | 69,40 | 84,27 |
| p | 278,72 | 0,92 | 276,55 | 280,98 |
| R ² =0,996 DPR=1,84 | | | | |
| Iso. Ponderados | | | | |
| a | 278,58 | 0,95 | 276,23 | 281,04 |
| b | 82,20 | 3,46 | 73,38 | 91,85 |
| c | $4,10 \times 10^{-5}$ | $0,38 \times 10^{-5}$ | $3,20 \times 10^{-5}$ | $5,20 \times 10^{-5}$ |
| x_0 | 82,20 | 3,46 | 73,38 | 91,85 |
| p | 278,58 | 0,95 | 276,23 | 281,04 |
| R ² =0,996 DPR=1,81 | | | | |

Tabela 8 Estimativas dos parâmetros, com os respectivos erros padrões (EP) e limites dos intervalos de 95% de confiança (IC95%), do modelo não-linear exponencial (MNLE) ajustado às médias, não isotonzadas, isotonzadas e isotonzadas ponderadas, de deposição de zinco (Zn) no dedo médio de aves fêmeas da linhagem Hubbard

| Parâmetros | Estimativa | EP | LI | LS |
|-----------------------------------|-----------------------|-----------------------|-----------------------|-----------------------|
| Não Isotonizados | | | | |
| a | 696,38 | 1,67 | 692,43 | 700,51 |
| b | 91,82 | 2,30 | 86,44 | 97,53 |
| c | $3,57 \times 10^{-5}$ | $0,19 \times 10^{-5}$ | $3,12 \times 10^{-5}$ | $4,07 \times 10^{-5}$ |
| x_0 | 91,82 | 2,30 | 86,44 | 97,53 |
| p | 696,38 | 1,67 | 692,43 | 700,51 |
| R ² =0,998 DPR=2,93 | | | | |
| Isotonizados | | | | |
| a | 696,47 | 1,24 | 693,48 | 699,58 |
| b | 92,01 | 1,71 | 87,89 | 96,41 |
| c | $3,55 \times 10^{-5}$ | $0,15 \times 10^{-5}$ | $3,21 \times 10^{-5}$ | $3,93 \times 10^{-5}$ |
| x_0 | 92,01 | 1,71 | 87,89 | 96,41 |
| p | 696,47 | 1,24 | 693,48 | 699,58 |
| R ² =0,999 DPR=2,17 | | | | |
| Iso. Ponderados | | | | |
| a | 694,87 | 1,47 | 691,27 | 698,68 |
| b | 90,71 | 2,04 | 85,69 | 96,32 |
| c | $3,60 \times 10^{-5}$ | $0,18 \times 10^{-5}$ | $3,18 \times 10^{-5}$ | $4,11 \times 10^{-5}$ |
| x_0 | 90,71 | 2,04 | 85,69 | 96,32 |
| p | 694,87 | 1,47 | 691,27 | 698,68 |
| R ² =0,999 DPR=2,64 | | | | |

Para o ajuste do modelo proposto nesse trabalho (MLOG), cujos resultados estão apresentados nas Tabelas 9 e 10, verifica-se o mesmo comportamento para o DPR relatado nos modelos anteriores, ou seja, há uma redução no valor desse avaliador quando o processo de isotonização foi considerado, seja ele ponderado ou não.

Na Tabela 9, ajuste do modelo MLOG aos dados de deposição de zinco (Zn) na tibia de aves machos da linhagem Hubbard, com relação à ponderação verifica-se que, além das estimativas dos parâmetros terem sido superestimadas, com exceção do platô (p) estimado em 278 ppm nas duas situações, as estimativas dos parâmetros apresentaram menores valores de EP.

A regressão isotônica mostrou-se muito eficaz para realizar o ajuste do modelo MLOG (Tabela 10). A isotonização dos dados experimentais, conforme discutido para os modelos MPQ e MNLE, não alterou expressivamente as estimativas dos parâmetros, exceto para o platô (p), sendo que a isotonização ponderada diminuiu o valor dessa estimativa. O procedimento reduziu os EP de todos as estimativas implicando em uma redução nos IC, portanto, mais precisos.

De maneira geral, verifica-se que os modelos que apresentaram os melhores ajustes aos dados experimentais foram o MLOG e o MNLE. Verifica-se para o ajuste do modelo MLOG, para os dados da tibia, que o parâmetro p foi estimado com maior precisão (menor EP) quando comparado ao ajuste dos demais modelos, além da estimativa do x_0 ter sido mais coerente com os dados experimentais (Figura 11). Ressalta-se ainda que o modelo MLOG possui um parâmetro a menos quando comparado ao MPQ e ao MNLE.

O modelo que apresentou o melhor ajuste aos dados experimentais do dedo médio foi o MNLE. Verifica-se para o ajuste desse modelo que a estimativa do

parâmetro p foi 696,47 ppm de Zn, conforme o obtido para o ajuste dos demais modelos, além da estimativa do x_0 ter sido mais coerente com os dados experimentais (Figura 12).

Tabela 9 Estimativas dos parâmetros, com os respectivos erros padrões (EP) e limites dos intervalos de 95% de confiança (IC95%), do modelo logarítmico (MLOG) ajustado às médias, não isotonzadas, isotonzadas e isotonzadas ponderadas, de deposição de zinco (Zn) na tibia de aves machos da linhagem Hubbard

| Parâmetros | Estimativa | EP | LI | LS |
|-------------------------|------------|------|--------|--------|
| Não Isotonzados | | | | |
| a | 29,96 | 2,92 | 24,00 | 38,49 |
| b | 61,52 | 0,93 | 59,15 | 63,77 |
| x_0 | 61,59 | 4,87 | 51,85 | 75,31 |
| p | 280,05 | 0,91 | 277,95 | 282,15 |
| $R^2=0,993$ DPR=3,92 | | | | |
| Isotonzados | | | | |
| a | 30,44 | 1,59 | 26,92 | 34,68 |
| b | 61,30 | 0,49 | 60,06 | 62,52 |
| x_0 | 63,19 | 2,69 | 57,22 | 70,25 |
| p | 278,27 | 0,03 | 278,20 | 278,34 |
| $R^2=0,995$ DPR=2,09 | | | | |
| Iso. Ponderados | | | | |
| a | 32,94 | 2,04 | 28,54 | 38,56 |
| b | 60,24 | 0,58 | 58,66 | 61,62 |
| x_0 | 68,66 | 3,48 | 60,85 | 80,80 |
| p | 278,11 | 0,34 | 277,33 | 278,90 |
| $R^2=0,993$ DPR=2,35 | | | | |

Tabela 10 Estimativas dos parâmetros, com os respectivos erros padrões (EP) e limites dos intervalos de 95% de confiança (IC95%), do modelo logarítmico (MLOG) ajustado às médias, não isotonzadas, isotonzadas e isotonzadas ponderadas, de deposição de zinco (Zn) no dedo médio de aves fêmeas da linhagem Hubbard

| Parâmetros | Estimativa | EP | LI | LS |
|-----------------------------------|------------|--------|--------|--------|
| Não Isotonizados | | | | |
| a | 32,25 | 1,27 | 29,36 | 35,61 |
| b | 147,59 | 0,83 | 145,53 | 150,12 |
| x ₀ | 80,03 | 2,67 | 72,78 | 87,07 |
| p | 698,61 | 0,88 | 696,58 | 700,64 |
| R ² =0,997 DPR=4,14 | | | | |
| Isotonizados | | | | |
| a | 32,25 | 1,12 | 29,68 | 35,19 |
| b | 147,59 | 0,73 | 145,77 | 149,32 |
| x ₀ | 80,03 | 2,36 | 74,04 | 86,22 |
| p | 696,93 | 0,0009 | 696,92 | 696,94 |
| R ² =0,998 DPR=3,65 | | | | |
| Iso. Ponderados | | | | |
| a | 32,25 | 1,24 | 29,45 | 35,53 |
| b | 147,59 | 0,81 | 145,58 | 151,64 |
| x ₀ | 78,74 | 2,57 | 70,89 | 85,48 |
| p | 691,60 | 1,77 | 687,51 | 695,69 |
| R ² =0,997 DPR=4,04 | | | | |

4.2 Estudo por simulação do estimador não paramétrico para platô de resposta

As propriedades do estimador não paramétrico para platô de resposta (ENP-PR) foram verificadas por meio de simulação via Monte Carlo. Os critérios utilizados para avaliar o desempenho desse estimador foram: viés, erro quadrado médio, erro padrão e intervalos de confiança. Os cenários utilizados estão descritos na secção 3.6.1. Ressalta-se que, para os cenários 1 e 3, como a variância utilizada, $\sigma^2 = 3$, é relativamente pequena em relação à variação dos modelos, os dados gerados apresentaram violadores geralmente apenas na região próxima ao platô e na região de estabilização do mesmo. Para os cenários 2 e 4, a ocorrência de violadores é mais frequente ao longo dos valores das doses.

As estimativas dos parâmetros, com os respectivos viés, erro quadrático médio (EQM), erros padrões (EP) e limites, inferior e superior, dos intervalos de 95% de confiança (IC95%), gerados por meio dos modelos, MPQ, MLOG e PRL, estão apresentados nas Tabelas 11, 12 e 13, respectivamente.

Tabela 11 Estimativas da abscissa do platô x_0 , do platô p , com os respectivos viés, erro quadrático médio (EQM), erros padrões (EP) e limites dos intervalos de 95% de confiança (IC95%), do estimador não paramétrico para platô de resposta, cujos dados foram simulados a partir do modelo segmentado polinomial quadrático (MPQ)

| Parâmetros | Estimativa | Viés | EQM | EP | LI | LS |
|------------|------------|-------|--------|-------|--------|--------|
| Cenário 1 | | | | | | |
| x_0 | 55,66 | 9,33 | 214,74 | 11,30 | 54,96 | 56,37 |
| p | 238,94 | 1,31 | 4,44 | 1,65 | 238,84 | 239,04 |
| Cenário 2 | | | | | | |
| x_0 | 62,16 | 2,84 | 540,75 | 23,08 | 60,72 | 63,59 |
| p | 239,57 | 0,68 | 2,23 | 1,33 | 239,48 | 239,65 |
| Cenário 3 | | | | | | |
| x_0 | 54,45 | 10,55 | 223,24 | 10,58 | 53,79 | 55,11 |
| p | 241,81 | -1,56 | 5,26 | 1,68 | 241,71 | 241,91 |
| Cenário 4 | | | | | | |
| x_0 | 60,88 | 4,12 | 502,66 | 22,42 | 59,48 | 62,27 |
| p | 242,45 | -2,20 | 6,64 | 1,34 | 242,37 | 242,54 |

Verifica-se na Tabela 11 que, em relação ao número de doses, os desvios padrões das estimativas dos parâmetros apresentam o mesmo comportamento, isto é, um desvio padrão menor no caso de 9 doses e um desvio padrão maior no caso de 120 doses. O mesmo comportamento foi observado para o viés e o erro quadrático médio. Observa-se que os intervalos de confiança apresentaram amplitude pequena (da ordem de 2) para ambas as situações e nenhum dos intervalos de confiança contém o valor paramétrico real, exceto no Cenário 4 para o parâmetro x_0 . O estimador apresentou uma tendência de subestimar o valor da abscissa do platô, x_0 , o estimador foi bastante eficiente na estimação do parâmetro p .

Para o modelo MLOG, o estimador foi bastante eficiente para estimar ambos os parâmetros. Apesar do verdadeiro valor dos parâmetros não estar contido na maioria dos intervalos de confiança, esses apresentam amplitudes pequenas e próximas dos valores reais.

O comportamento do estimador para o modelo PRL apresentou uma tendência a superestimar o parâmetro x_0 para um número pequeno de doses e subestimá-lo para o caso de um número grande de doses, o mesmo comportamento ocorre para os intervalos de confiança. Para o parâmetro p , o comportamento foi mais uniforme com uma leve tendência de subestimar o parâmetro. Deve-se olhar que o erro padrão, em todas as situações, apresentou-se particularmente pequeno.

Uma comparação do desempenho do estimador não paramétrico para platô de resposta, Tabelas 11, 12 e 13, quando comparados com o desempenho dos estimadores obtidos pelo método dos mínimos quadrados, não isotonzados, isotonzados e isotonzados ponderados, expressos por meio das Tabelas 2, 3 e 4, apresenta em geral erros padrões ligeiramente inferiores e intervalos de confiança com amplitudes sensivelmente menores. Tais fatos levam a crer que o estimador

Tabela 12 Estimativas da abscissa do platô x_0 , do platô p , com os respectivos viés, erro quadrático médio (EQM), erros padrões (EP) e limites dos intervalos de 95% de confiança (IC95%), do estimador não paramétrico para platô de resposta, cujos dados foram simulados a partir do modelo segmentado logarítmico (MLOG)

| Parâmetros | Estimativa | Viés | EQM | EP | LI | LS |
|------------|------------|-------|--------|-------|--------|--------|
| Cenário 1 | | | | | | |
| x_0 | 63,27 | 1,73 | 47,22 | 6,65 | 62,86 | 63,68 |
| p | 281,11 | 2,30 | 8,18 | 1,79 | 280,99 | 281,22 |
| Cenário 2 | | | | | | |
| x_0 | 64,01 | 0,99 | 138,81 | 11,74 | 63,28 | 64,74 |
| p | 281,99 | 1,42 | 4,67 | 1,63 | 281,88 | 282,09 |
| Cenário 3 | | | | | | |
| x_0 | 63,85 | 1,14 | 49,19 | 6,92 | 63,42 | 64,28 |
| p | 284,25 | -0,84 | 4,28 | 1,89 | 284,13 | 284,37 |
| Cenário 4 | | | | | | |
| x_0 | 65,19 | -0,19 | 188,55 | 13,73 | 64,34 | 66,05 |
| p | 285,21 | -1,79 | 5,57 | 1,54 | 285,11 | 285,30 |

Tabela 13 Estimativas da abscissa do platô x_0 , do platô p , com os respectivos viés, erro quadrático médio (EQM), erros padrões (EP) e limites dos intervalos de 95% de confiança (IC95%), do estimador não paramétrico para platô de resposta, cujos dados foram simulados a partir do modelo segmentado *linear response plateau* (PRL)

| Parâmetros | Estimativa | Viés | EQM | EP | LI | LS |
|------------|------------|-------|-------|------|--------|--------|
| Cenário 1 | | | | | | |
| x_0 | 73,15 | -8,15 | 90,73 | 4,93 | 72,85 | 73,46 |
| p | 278,54 | 1,46 | 8,69 | 2,56 | 278,38 | 278,70 |
| Cenário 2 | | | | | | |
| x_0 | 62,33 | 2,67 | 14,86 | 2,78 | 62,16 | 62,50 |
| p | 275,82 | 4,18 | 33,47 | 4,00 | 275,57 | 276,07 |
| Cenário 3 | | | | | | |
| x_0 | 73,83 | -8,83 | 94,13 | 4,02 | 73,58 | 74,08 |
| p | 281,79 | -1,79 | 8,0 | 2,19 | 281,65 | 281,92 |
| Cenário 4 | | | | | | |
| x_0 | 62,00 | 3,00 | 14,38 | 2,32 | 61,85 | 62,14 |
| p | 278,29 | 1,71 | 22,73 | 4,45 | 278,01 | 278,57 |

não paramétrico para platô de resposta é uma proposta viável em relação aos demais estimadores, sendo de fácil implementação e pelo fato de ser não paramétrico não depender de uma escolha de modelo.

4.2.1 Aplicação do estimador não paramétrico para platô de resposta aos dados reais

O estimador não paramétrico para platô de resposta também foi aplicado aos dados reais. As estimativas obtidas para os parâmetros x_0 e p , pelo ENPPR, para os dados de deposição de Zn na tíbia de machos e dedo médio de aves fêmeas da linhagem Hubbard, foram, respectivamente, 60 e 278,27; 90 e 696,93. Para comparação as estimativas desses parâmetros com o uso dos modelos, com isotonzificação dos dados, MLOG para a tíbia, $x_0 = 63,19$ e $p = 278,27$ e MNLE para o dedo médio com valores $x_0 = 92,01$ e $p = 696,47$. As situações acima são apresentadas nas Figuras 13 e 14.

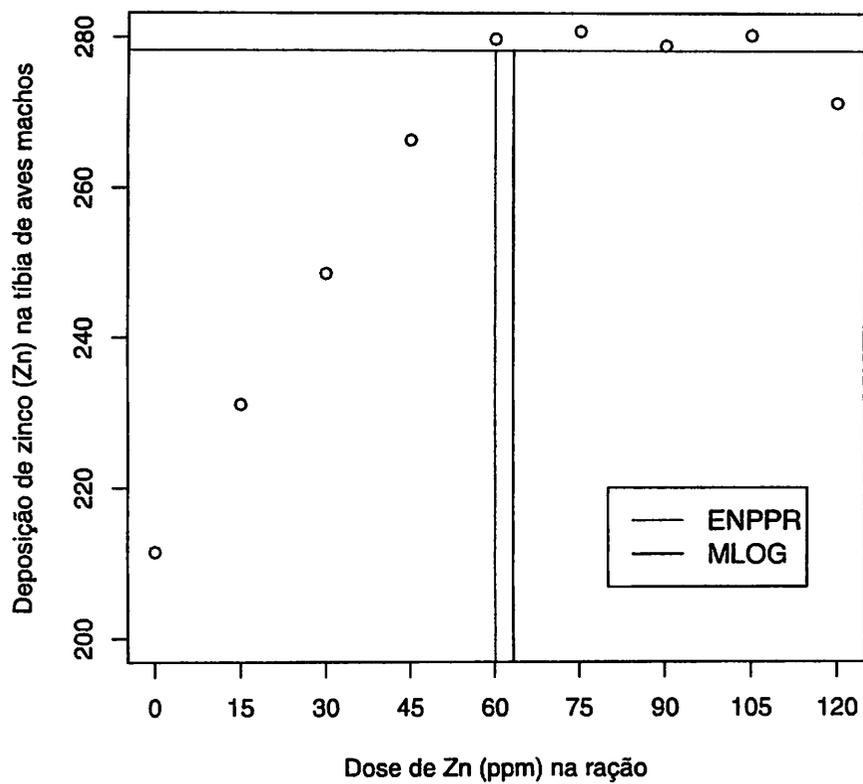


Figura 13 Estimativas do platô de resposta pelo estimador não paramétrico para platô de resposta (ENPPR) e pelo modelo logarítmico (MLOG)

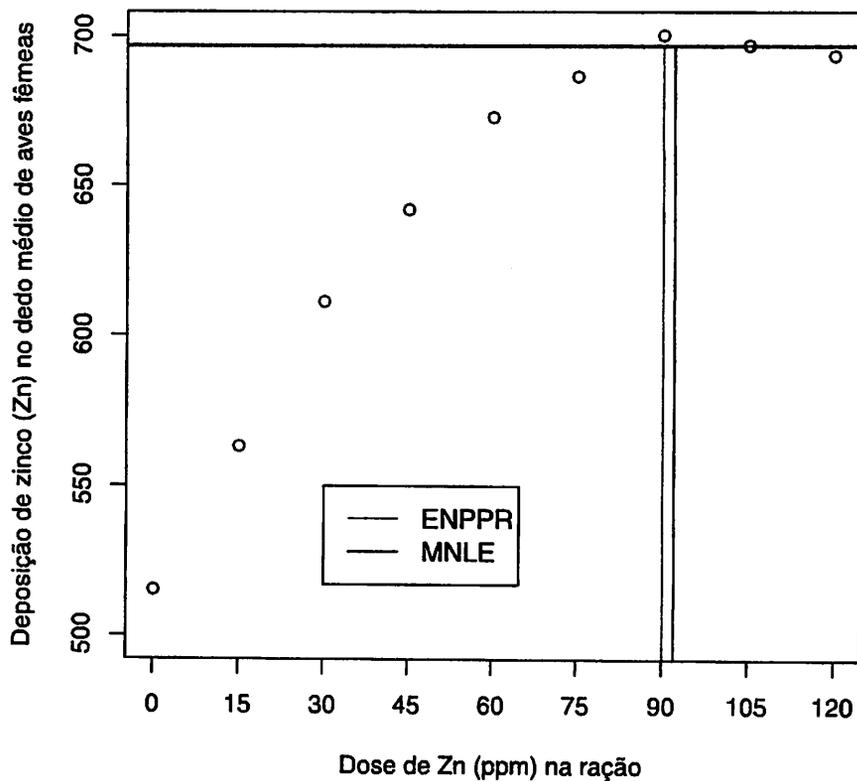


Figura 14 Estimativas do platô de resposta pelo estimador não paramétrico para platô de resposta (ENPPR) e pelo modelo não linear exponencial MNLE

O comportamento do estimador não paramétrico para platô de resposta, sendo um estimador viesado nas doses utilizadas, obteve como estimativas as doses mais próximas obtidas pelos modelos contínuos. Tal fato era de certa forma esperado em razão do número pequeno de doses e do comportamento bastante previsível dos dados, uma vez que esses, por uma análise gráfica, claramente se estabilizam em torno das doses estimadas. Como citado anteriormente, os violadores só ocorreram na parte estabilizada das respostas. Para um estudo mais completo desse estimador, seria interessante sua aplicação a dados que tivessem um comportamento mais complexo, apresentando violadores e outliers tanto na fase crescente quanto na fase de estabilização.

4.3 Aplicação do estimador semi paramétrico para modelos segmentados crescente-linear

Gallant e Fuller (1973) estudaram o problema de encontrar estimativas de mínimos quadrados para os parâmetros de um modelo de regressão que consistia em encaixes de submodelos polinomiais. O método de estimação utilizado foi o de Gauss-Newton Modificado. Os autores aplicaram a técnica a dados antropométricos. Foram obtidos dados de: $y = \text{peso/altura}$ em relação ao tempo (x) em meses, para $x = 0, 1, \dots, 72$, para crianças. Para esses dados foi feito um teste de hipóteses para ajuste dos modelos: quadrático-quadrático-linear versus quadrático-linear, concluindo que o modelo quadrático-linear é suficiente para o ajuste dos dados. A estimativa para o ponto de mudança da fase quadrática para a fase linear foi de 10,3. Os dados foram recuperados do artigo original, utilizando um recurso gráfico do software R (R DEVELOPMENT CORE TEAM, 2010). Nas Figuras 15 e

16 estão apresentadas a situação do artigo original e o estimador semi paramétrico para modelos segmentados crescente-linear, respectivamente.

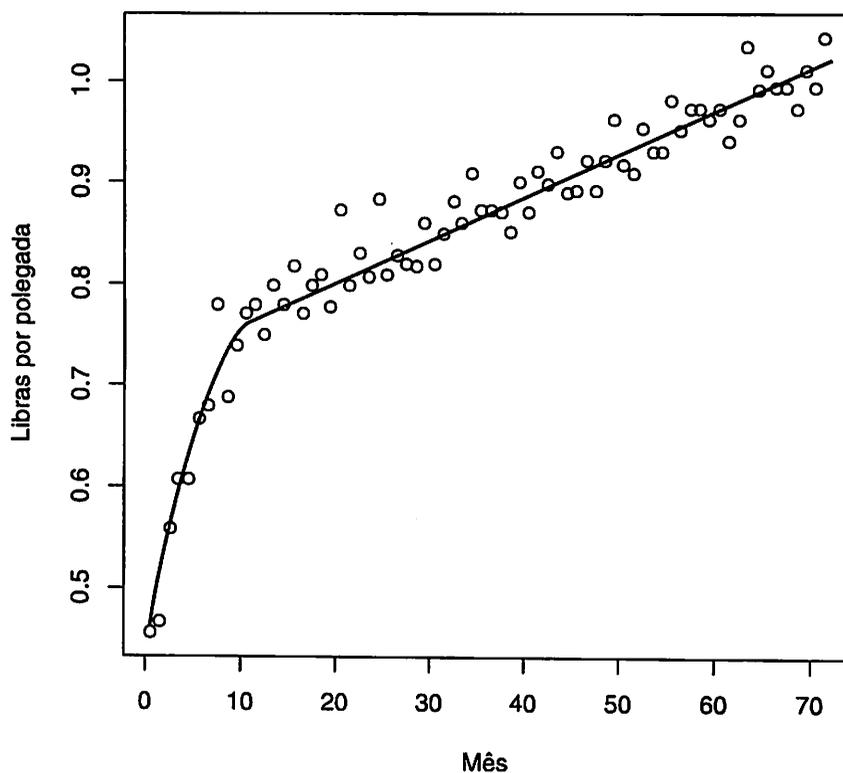


Figura 15 peso/altura em relação ao tempo, em meses, para crianças

Os dados isotonzados e o método do estimador semi paramétrico estão apresentados na Figura 16.

As estimativas obtidas foram de $x_0 = 9,4$ e $p = 0,74$.

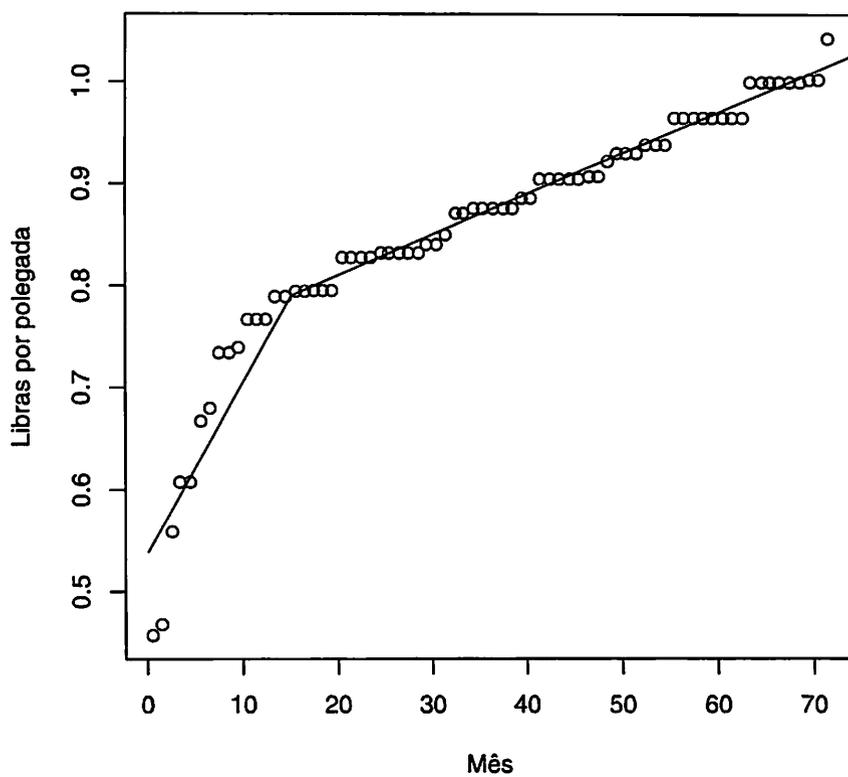


Figura 16 peso/altura isotonzados em relação ao tempo, em meses, para crianças

5 CONCLUSÃO

Para os modelos de platô de resposta, modelo polinomial quadrático e modelo não linear exponencial, a isotonização dos dados antes do ajuste do modelo se revelou um procedimento que melhora a qualidade do ajuste.

O modelo de platô de resposta logarítmico, aplicado a dados reais de deposição de Zn na tibia de machos e dedo médio de aves fêmeas da linhagem Hubbard, se revelou eficiente na obtenção das estimativas do platô de resposta e sua abscissa.

O processo de isotonização dos dados acarreta em um aumento do viés e em menores erros quadráticos médios.

Por simulação foi comprovada a eficiência do estimador não paramétrico para platô de resposta.

O estimador não paramétrico para platô de resposta aplicado a dados reais de deposição de Zn na tibia de machos e dedo médio de aves fêmeas da linhagem Hubbard gerou estimativas compatíveis com as obtidas pelos outros modelos.

O estimador semi paramétrico para modelos segmentados crescente-linear é de fácil implementação e apresenta promissoras possibilidades de aplicações.

REFERÊNCIAS

ARAUJO, L. B.; DIAS, C. T. S. Métodos de correção de autovalores e regressão isotônica nos modelos AMMI. **Revista de Matemática e Estatística**, São Paulo, v. 24, n. 2, p. 71-89, 2006.

AYER, M. et al. An empirical distribution function for sampling with incomplete information. **Annals of Mathematical Statistics**, Ann Arbor, v. 26, p. 641-647, 1955.

BARLOW, R. E. et al. **Statistical inference under order restrictions: the theory and application of isotonic regression**. New York: J. Wiley, 1972. 388 p.

BARROS, J. M. S. et al. Exigência nutricional de sódio para frangos de corte de 1 a 21 dias de idade. **Revista Brasileira de Zootecnia**, Viçosa, MG, v. 30, n. 3, p. 1044-1051, 2001. Suplemento.

BATES, D. M.; WATTS, D. G. **Nonlinear regression analysis and its applications**. New York: Wiley, 1988. 365 p.

BOMFIM, M. A. D. et al. Proteína bruta e energia digestível em dietas para alevinos de curimatá (*prochilodus affinis*). **Revista Brasileira de Zootecnia**, Viçosa, MG, v. 34, n. 6, p. 1795-1806, nov./dez. 2005.

BOYD, D. A. Some recent ideas on fertilizer response curves. In: CONGRESS OF THE INTERNATIONAL POTASH INSTITUTE, 9., 1970, Antibes. **Proceedings...** Antibes: IPI, 1970. p. 461-473.

COELHO, L. S. S. **Exigências nutricionais de proteína e lisina para suínos de 15 a 30 kg de peso vivo**. 1984. 139 f. Tese (Doutorado em Zootecnia) - Universidade Federal de Viçosa, Viçosa, MG, 1984.

COELHO, L. S. S. et al. Modelos para estimar exigências nutricionais em suínos. **Revista da Sociedade Brasileira de Zootecnia**, Viçosa, MG, v. 16, n. 1, p. 102-110, jan./mar. 1987.

DRAPER, N. R.; SMITH, H. **Applied regression analysis**. New York: J. Wiley, 1998. 706 p.

EUCLYDES, R.; ROSTAGNO, H. S. Estimativa dos níveis nutricionais via experimentos de desempenho. In: **WORKSHOP LATINO-AMERICANO AJINOMOTO BIOLATINA**, 1., 2001, Foz do Iguaçu. **Anais...** Foz do Iguaçu: Biolatina, 2001. p. 77-88.

FERREIRA, D. F. **Recursos Computacionais utilizando o R**. Lavras: UFLA, 2009. Disponível em: <<http://www.dex.ufla.br/danielff/RRC0.pdf>>. Acesso em: 19 nov. 2009.

FURUYA, W. M. et al. Fitase na alimentação da tilápia do nilo (*Oreochromis niloticus*): desempenho e digestibilidade. **Revista Brasileira de Zootecnia**, Viçosa, MG, v. 30, n. 3, p. 924-929, 2001. Suplemento.

GALLANT, A. R.; FULLER, W. A. Fitting segmented polynomial regression models whose join points have to be estimated. **Journal of the American Statistical Association**, New York, v. 68, n. 341, p. 144-147, Mar. 1973.

GOMES, P. C. et al. Níveis nutricionais de zinco para frangos de corte machos e fêmeas nas fases de crescimento e terminação. **Revista Brasileira de Zootecnia**, Viçosa, MG, v. 38, n. 9, p. 1719-1725, out. 2009.

GUNN, L. H.; DUNSON, D. B. A transformation approach for incorporating monotone or unimodal constraints. **Biostatistics**, Berkeley, v. 3, n. 6, p. 434-449, 2005.

MCARTHUR, L. C. et al. Investigation of the influence of seagrass on fisheries catch level using isotonic regression. **Environmental Modeling and Assessment**, London, v. 8, n. 4, p. 285-290, Dec. 2003.

MORRIS, T. R. The interpretation of response data from animal feeding trials. In: HARESIGN, W. (Ed.). **Recent advances in animal nutrition**. London: Butterworths, 1983. p. 13-23.

R DEVELOPMENT CORE TEAM. **R: a language and environment for statistical computing**. Vienna: R Foundation for Statistical Computing, 2010. Disponível em: <<http://www.r-project.org>>. Acesso em: 30 abr. 2010.

REZENDE, D. M. L. C. **Ajuste de modelos de platô de resposta aplicados ao estudo de exigência nutricional de frangos de corte**. 2002. 76 p. Dissertação (Mestrado em Estatística e Experimentação Agropecuária) - Universidade Federal de Lavras, Lavras, 2002.

REZENDE, D. M. L. C. et al. Ajuste de modelos de platô de resposta para a exigência de zinco em frangos de corte. **Ciência e Agrotecnologia**, Lavras, v. 31, n. 2, p. 468-478, mar./abr. 2007.

REZENDE, D. M. L. C.; MUNIZ, J. A.; FERREIRA, D. F. Proposição de um modelo não linear com response plateau. In: REUNIÃO ANUAL DA REGIÃO BRASILEIRA DA SOCIEDADE INTERNACIONAL DE BIOMETRIA, 45., 2000, São Carlos. **Anais...** São Carlos: UFSCar, 2000. p. 96-99.

ROBERTSON, T.; WRIGHT, F. T.; DYKSTRA, R. L. **Order Restricted Statistical Inference**. New York: J. Wiley, 1988. 526 p.

RODRIGUES, A. et al. Utilização da regressão isotônica em estudos de curvas de crescimento. **Revista Brasileira de Biometria**, São Paulo, v. 28, n. 4, p. 211-223, out./dez. 2010.

ROSTAGNO, H. S. et al. Avanços metodológicos na avaliação de alimentos e de exigências nutricionais para aves e suínos. **Revista Brasileira de Zootecnia**, Viçosa, MG, v. 36, p. 295-304, 2007. Edição especial.

RUNHO, R. C. et al. Exigências de fósforo disponível para frangos de corte machos e fêmeas de 1 a 21 dias de idade. **Revista Brasileira de Zootecnia**, Viçosa, MG, v. 30, n. 1, p. 187-196, jan./fev. 2001.

SIQUEIRA, J. C. et al. Modelos matemáticos para estimar as exigências de lisina digestível para aves de corte Isa Label. **Revista Brasileira de Zootecnia**, Viçosa, MG, v. 38, n. 9, p. 1732-1737, out. 2009.

UNDERWOOD, E. J.; SUTTLE, N. F. **The mineral nutrition of livestock**. New York: CABI, 1999. 603 p.

VALERIO, S. R. et al. Níveis de lisina digestível em 90 rações, em que se manteve ou não a relação aminoacídica, para frangos de corte de 22 a 42 dias de idade, mantidos em estresse por calor. **Revista Brasileira de Zootecnia**, Viçosa, MG, v. 32, n. 2, p. 372-382, mar./abr. 2003.

VISOTTO, L. et al. Contribution of gut bacteria to digestion and development of the velvetbean caterpillar, *anticrosia gemmatalis*. **Journal of Insect Physiology**, Oxford, v. 55, n. 3, p. 185-191, Mar. 2009.

WALKER, J. L.; BEJARANO, W. **Uso práctico de los modelos discontinuos para interpretación rápida de la respuesta de cultivos a la aplicación de fertilizantes**. Turrialba: CATIE, 1978. 84 p.

ANEXOS

Todas as rotinas implementadas no software R (R Development Core Team, 2010) podem ser solicitadas por meio do email: renatabbg@yahoo.com.br