

XXXVII IBERIAN LATIN AMERICAN CONGRESS
ON COMPUTATIONAL METHODS IN ENGINEERING
BRASÍLIA - DF - BRAZIL

INFLUÊNCIA DA TEORIA DE VIGA NA ANÁLISE GEOMETRICAMENTE NÃO LINEAR DE ESTRUTURAS RETICULADAS

Jéssica L. Silva

Ígor J. M. Lemes

Ricardo A. M. Silveira

Andréa R. D. Silva

jessicalorrany@hotmail.com

igorjml@hotmail.com

ricardo@em.ufop.br

andreadiassilva@yahoo.com.br

Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil (Propec/Deciv/EM), UFOP

Campus Universitário s/n, Morro do Cruzeiro, 35400-000, Ouro Preto, MG, Brasil

Resumo. *A concepção de projetos estruturais utilizando análises que expressam o comportamento real da estrutura pode ser realizado considerando algumas fontes de não linearidade. Para tal propósito deve-se empregar recursos computacionais avançados e utilizar formulações numéricas adequadas para simular o comportamento real de uma estrutura considerando os efeitos não lineares. O estudo realizado aqui irá utilizar uma formulação que considera a não linearidade geométrica, baseado em diferentes teorias de vigas. Vale enfatizar a adoção nessas formulações não lineares de elementos finitos do referencial corrotacional, que é baseado na separação explícita entre os movimentos de corpo rígido e deformacionais. Este trabalho tem como objetivo principal investigar a influência da esbeltez das seções transversais com relação aos resultados obtidos nas análises geometricamente não lineares utilizando diferentes teorias de viga, a de Euler-Bernoulli e também de Timoshenko. O estudo será realizado fazendo a análise de diferentes sistemas estruturais, variando a esbeltez da seção transversal, e assim será obtido as trajetórias de equilíbrio considerando teorias de vigas diferentes.*

Palavras-chave: *Análise Não Linear Geométrica, Referencial Corrotacional, Teoria de Euler-Bernoulli, Teoria de Timoshenko*

1 INTRODUÇÃO

Em geral, os projetos de estruturas são desenvolvidos considerando a estrutura perfeita e utilizando a análise elástica linear. As equações de equilíbrio são formuladas baseando-se na configuração inicial indeformada da estrutura e assume-se que as deformações, deslocamentos e rotações são pequenas. Uma desvantagem da análise elástica linear tem sido sua incapacidade de retratar o comportamento real de estruturas sob condições não usuais de carregamento ou de carregamento limite. No entanto, as estruturas podem apresentar comportamento não linear relevante antes mesmo de atingirem seus limites de resistência. Assim com o emprego de recursos computacionais avançados e a utilização de formulações numéricas adequadas é possível simular o comportamento real de uma estrutura considerando os efeitos não lineares, que podem basicamente ser divididos em: físico e geométrico.

O efeito da não linearidade geométrica torna-se relevante nos membros sujeitos a esforços axiais de compressão e contribui para a diminuição da rigidez estrutural aumentando a deformação do sistema. Nesse contexto, vários pesquisadores têm desenvolvido formulações de segunda ordem em que são usados os referencias Lagrangiano Total (RLT), Atualizado (RLT) e Corrotacional (RCR). Yang e Kuo (1994) propuseram um vetor de forças internas que pode ser calculado através dos deslocamentos naturais (corrotacionais, RCR) incrementais. Já Pacoste e Eriksson (1995; 1997) desenvolveram elementos finitos não lineares no RLT baseados em relações deformação-deslocamento expressas por funções trigonométricas.

As teorias de vigas existentes têm um significado importante nas formulações não lineares. A teoria clássica de Euler-Bernoulli é considerada mais simples, pois os efeitos devidos às deformações cisalhantes na seção transversal da barra são desprezados no cálculo da rigidez da estrutura. Nesse caso, estima-se que a seção transversal plana antes da deformação da viga continuará sendo plana e perpendicular ao eixo neutro da viga.

A outra teoria de viga é a de Timoshenko, onde a deformação cisalhante na seção transversal da barra é levada em consideração no processo de solução do problema. Considera-se, entretanto, que a deformação por cisalhamento é constante ao longo da seção transversal. Segundo Oñate (2013), essa teoria de viga é aplicável em vigas com esbeltez menores ($\lambda = L/h < 10$; em que L é o comprimento da barra e h é a altura da seção transversal), e que ela se torna especialmente importante à medida que a altura da seção transversal aumenta. Considera-se que as seções transversais planas e perpendiculares ao eixo neutro se mantêm planas, mas não perpendiculares ao eixo neutro deformado. A teoria de Timoshenko é considerada mais acurada segundo Timoshenko *et al.* (1974).

O objetivo do presente trabalho é estudar a influência da esbeltez do sistema estrutural nas análises não lineares geométricas quando utiliza-se a teoria de viga clássica ou de Timoshenko. A formulação não linear geométrica para estruturas reticuladas planas utilizada nesse estudo baseia-se na RCR, que faz uma separação explícita entre os movimentos de corpo rígido e deformacionais, dentro do contexto do Método dos Elementos Finitos (MEF). O sistema de equações de equilíbrio não lineares será solucionado com o auxílio de um algoritmo de solução que utiliza-se o método de Newton-Raphson, associado à estratégias de iteração e de incremento de carga. A base computacional utilizada nesse trabalho foi o programa CS-ASA (*Computational System for Advanced Structural Analysis*; Silva, 2009), inicialmente desenvolvido para análise avançada estática e dinâmica de estruturas metálicas. Mais recentemente, Lemes (2015) introduziu a possibilidade da análise avançada estática de estruturas mistas.

Este artigo está organizado em 4 seções. Na Seção 2 é apresentado o Referencial Corrotacional, com as transformações entre o sistema global e local. Mais adiante, na Seção 3, as formulações geometricamente não lineares são detalhadas; três exemplos numéricos para verificação proposta são apresentados na Seção 4. Por fim, alguns aspectos importantes observados nos exemplos estudados são levantados na Seção 5.

2 REFERENCIAL CORROTACIONAL

Formulações numéricas desenvolvidas ao longo dos últimos anos com o objetivo de descrever a não linearidade geométrica, juntamente com as estratégias de solução de problemas não lineares cada vez mais eficientes, impulsionam a procura de respostas que retratam o comportamento mais real das estruturas.

A não linearidade geométrica surge devido a modificações da geometria da estrutura que pode aparecer ao longo do processo de carregamento e deformação do corpo. Segunda Silva (2009), deslocamentos relativamente grandes causam deflexão lateral de membros da estrutura, e como consequência ocorre o aparecimento de momentos fletores adicionais, em virtude da presença de um esforço normal. Esse tipo de comportamento pode ser também chamado de efeitos de segunda ordem, e é responsável por considerar os efeitos P- Δ (global) e P- δ (local, a nível de elemento), que são os efeitos oriundos das deformações da estrutura à medida que é carregada.

Para a consideração dos efeitos geométricos não lineares, o RCR será utilizado para descrever o movimento dos corpos sólidos, que segundo Hsiao *et al.* (1987), Battini (2002) e Santana (2015), pode ser adaptado tanto à formulação RLT quanto à RLA. De acordo com Battini (2002), a aproximação corrotacional é vista como um caminho alternativo para uma análise eficiente de elementos finitos não lineares. A principal ideia, neste contexto, é a decomposição do movimento do elemento em duas parcelas: uma associada ao movimento de corpo rígido do elemento e a outra parte associada a deformação pura. A movimentação do elemento é medida através do uso do sistema de coordenadas locais (X, Y), onde essas coordenadas terão uma contínua rotação e translação em conjunto com o elemento (Fig. 1). A mudança do elemento da configuração indeformada original a uma configuração deformada atual pode então ser dividida em dois passos: o primeiro é o movimento de corpo rígido incluindo rotação e translação do elemento, e o segundo passo consiste na deformação relativa em um sistema de coordenadas locais que produz energia.

O propósito desta seção é apresentar a relação entre o sistema de coordenadas local e global que será utilizado para as devidas atualizações nas análises dos sistemas estruturais. As relações cinemáticas e a notação adotada serão baseadas na Fig. 1, e o vetor de deslocamentos global é definido por:

$$\mathbf{u}_g = [u_i \quad v_i \quad \theta_i \quad u_j \quad v_j \quad \theta_j]^T \quad (1)$$

Já o vetor de deslocamentos naturais nodais no sistema local é dado por:

$$\mathbf{u}_l = [\bar{u} \quad \bar{\theta}_i \quad \bar{\theta}_j]^T \quad (2)$$

As componentes do vetor de deslocamento local podem ser expressas baseadas em termos dos deslocamentos no sistema de referência global, conforme:

$$\bar{u} = l_f - l \quad (3a)$$

$$\bar{\theta}_i = \theta_i - \alpha \quad (3b)$$

$$\bar{\theta}_j = \theta_j - \alpha \quad (3c)$$

sendo l_f o valor do comprimento atualizado e l o valor do comprimento inicial do elemento analisado. Para esses comprimentos l e l_f , escreve-se:

$$l = \left[(x_j - x_i)^2 + (y_j - y_i)^2 \right]^{1/2} \quad (4)$$

$$l_f = \left[(x_j + u_j - x_i - u_i)^2 + (y_j + v_j - y_i - v_i)^2 \right]^{1/2} \quad (5)$$

Em (3b) e (3c), α que representa a rotação do corpo rígido do elemento, que pode ser definida como:

$$\text{sen}(\alpha) = c_o s - s_o c \quad (6a)$$

$$\text{cos}(\alpha) = c_o c - s_o s \quad (6b)$$

com:

$$c_o = \text{cos}(\beta_0) = \frac{1}{l} (x_j - x_i) \quad (7a)$$

$$s_o = \text{sen}(\beta_0) = \frac{1}{l} (y_j - y_i) \quad (7b)$$

$$c = \text{cos}(\beta) = \frac{1}{l_f} (x_j + u_j - x_i - u_i) \quad (7c)$$

$$s = \text{sen}(\beta) = \frac{1}{l_f} (y_j + v_j - y_i - v_i) \quad (7d)$$

em que β representa o valor do ângulo de orientação do elemento (ângulo entre o eixo axial local e o eixo horizontal global), de modo que na configuração inicial o mesmo é dado por β_0 .

A rotação de corpo rígido, α , também pode ser expressa como o incremento de rotação entre a orientação atual e inicial, ou seja:

$$\alpha = \beta - \beta_0 = \arctan \left[\frac{(y_j + v_j - y_i - v_i)}{(x_j + u_j - x_i - u_i)} + \frac{(y_j - y_i)}{(x_j - x_i)} \right] \quad (8)$$

Os deslocamentos virtuais locais são obtidos através da diferenciação parcial das Eqs. (3a), (3b) e (3c). Escreve-se então:

$$\delta \bar{u} = c(\delta u_j - \delta u_i) + s(\delta v_j - \delta v_i) \quad (9)$$

$$\delta \bar{\theta}_i = \delta \theta_i - \delta \alpha = \delta \theta_i - \delta \beta \rightarrow (\alpha = \beta - \beta_0) \quad (10)$$

$$\delta\bar{\theta}_j = \delta\theta_j - \delta\alpha = \delta\theta_j - \delta\beta \quad (11)$$

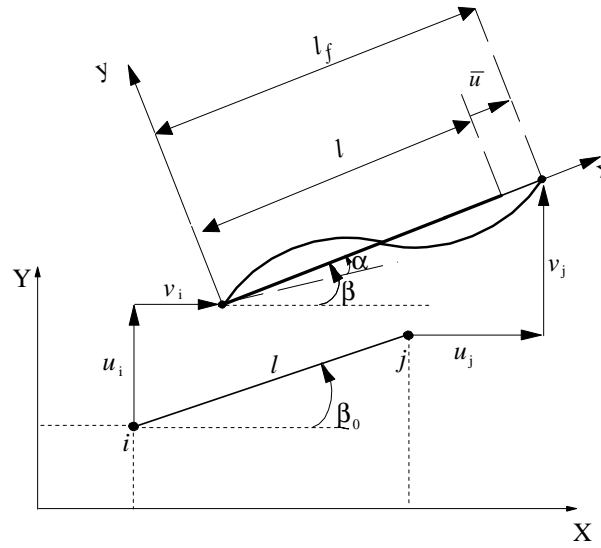


Figura 1. Relação entre sistema local e global

Em seguida, faz-se diferenciação da Eq. (7d), e obtém-se:

$$\delta\beta = \frac{1}{cl_f^2} [(\delta v_j - \delta v_i)l_f - (y_j + v_j - y_i - v_i)\delta l_f] \quad (12)$$

Com o emprego da Eq. (9) na equação anterior:

$$\delta\beta = \frac{1}{cl_f} [(\delta v_j - \delta v_i) - sc(\delta u_j - \delta u_i) - s^2(\delta v_j - \delta v_i)] \quad (13)$$

A expressão (12) pode ainda ser simplificada, da seguinte forma:

$$\delta\beta = \frac{1}{l_f} [s \quad -c \quad 0 \quad -s \quad c \quad 0] \delta \mathbf{u}_g \quad (14)$$

Com o desenvolvimento das Eqs. (9), (10) e (11), chega-se nos deslocamentos virtuais locais em funções dos deslocamentos virtuais globais:

$$\delta \bar{\mathbf{u}} = [-c \quad -s \quad 0 \quad c \quad s \quad 0] \delta \mathbf{u}_g \quad (15)$$

$$\delta \bar{\theta}_i = \delta \theta_i - \frac{1}{l_f} [s \quad -c \quad 0 \quad -s \quad c \quad 0] \delta \mathbf{u}_g \quad (16)$$

$$\delta \bar{\theta}_j = \delta \theta_j - \frac{1}{l_f} [s \quad -c \quad 0 \quad -s \quad c \quad 0] \delta \mathbf{u}_g \quad (17)$$

que podem ser organizados de acordo com:

$$\delta \mathbf{u}_l = \mathbf{B} \delta \mathbf{u}_g \quad (18)$$

sendo:

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} -c & -s & 0 & c & s & 0 \\ -s/l_f & c/l_f & 1 & s/l_f & -c/l_f & 0 \\ -s/l_f & c/l_f & 0 & s/l_f & -c/l_f & 1 \end{bmatrix} \quad (19)$$

A relação entre o vetor de forças internas local, \mathbf{f}_l , e o global, \mathbf{f}_g , é obtida através do Princípio dos Trabalhos Virtuais (PTV), ou seja:

$$\delta V = \delta \mathbf{u}_g^T \mathbf{f}_g = \delta \mathbf{u}_l^T \mathbf{f}_l = \delta \mathbf{u}_g^T \mathbf{B}^T \mathbf{f}_l \quad (20)$$

Com o emprego da equação anterior, tem-se que a relação entre as forças internas no sistema de referência global e o sistema local é dada por:

$$\mathbf{f}_g = \mathbf{B}^T \mathbf{f}_l \quad (21)$$

em que o vetor de forças internas local $\mathbf{f}_l = [N \ M_i \ M_j]$, onde N , M_i e M_j são as forças internas axial e momentos fletores, respectivamente, que dependem da teoria de viga adotada.

A matriz de rigidez tangente global, \mathbf{K}_g , pode ser definida pela diferenciação das forças internas globais em relação aos deslocamentos globais, isto é:

$$\mathbf{K}_g = \frac{\delta \mathbf{f}_g}{\delta \mathbf{u}_g} \quad (22)$$

Assim, fazendo a diferenciação da Eq. (21) em relação aos deslocamentos globais, tem-se:

$$\delta \mathbf{f}_g = \mathbf{B}^T \delta \mathbf{f}_l + N \delta \mathbf{b}_1 + M_i \delta \mathbf{b}_2 + M_j \delta \mathbf{b}_3 \quad (23)$$

em que:

$$\mathbf{b}_1 = [-c \ -s \ 0 \ c \ s \ 0]^T \quad (24a)$$

$$\mathbf{b}_2 = [0 \ 0 \ 1 \ 0 \ 0 \ 0]^T - \frac{\mathbf{z}}{l_f} \quad (24b)$$

$$\mathbf{b}_3 = [0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 1]^T - \frac{\mathbf{z}}{l_f} \quad (24c)$$

São introduzidas as seguintes notações:

$$\mathbf{r} = [-c \ -s \ 0 \ c \ s \ 0]^T \quad (25a)$$

$$\mathbf{z} = [s \ -c \ 0 \ -s \ c \ 0]^T \quad (25b)$$

Fazendo a derivação da Eq. (25a) e (25b), obtém-se:

$$\delta \mathbf{r} = \mathbf{z} \delta \beta \quad (26a)$$

$$\delta \mathbf{z} = -\mathbf{r} \delta \beta \quad (26b)$$

As Equações (9) e (14) podem ser reescritas como:

$$\delta \bar{\mathbf{u}} = \mathbf{r}^T \delta \mathbf{u}_g \quad (27a)$$

$$\delta \beta = \frac{\mathbf{z}^T}{l_n} \delta \mathbf{u}_g \quad (27b)$$

e derivando-se as Eq. (24a), (24b) e (24c), chega-se à:

$$\delta \mathbf{b}_1 = \delta \mathbf{r} = \frac{\mathbf{z}\mathbf{z}^T}{l_f} \delta \mathbf{u}_g \quad (28a)$$

$$\delta \mathbf{b}_2 = \delta \mathbf{b}_3 = -\frac{\delta \mathbf{z}}{l_f} + \frac{\mathbf{z}\delta l_f}{l_f^2} = \frac{1}{l_f^2} [\mathbf{r}\mathbf{z}^T + \mathbf{z}\mathbf{r}^T] \delta \mathbf{u}_g \quad (28b)$$

O primeiro termo da Eq. (23) pode ser computado através da relação de equilíbrio local do elemento, isto é:

$$\delta \mathbf{f}_l = \mathbf{K}_l \delta \mathbf{u}_l = \mathbf{K}_l \mathbf{B} \delta \mathbf{u}_g \quad (29)$$

em que \mathbf{K}_l é a matriz de rigidez no sistema de referência local, que depende da teoria de viga adotada.

Finalmente, com o emprego das Eqs. (19), (20), (26a), (26b) e (27), chega-se na expressão da matriz de rigidez tangente global do elemento:

$$\mathbf{K}_g = \mathbf{B}^T \mathbf{K}_l \mathbf{B} + \frac{\mathbf{z}\mathbf{z}^T}{l_f} N + \frac{1}{l_f^2} [\mathbf{r}\mathbf{z}^T + \mathbf{z}\mathbf{r}^T] (M_i + M_j) \quad (30)$$

As Equações (21) e (30) apresentam a relação entre os valores locais e globais das forças internas e matriz de rigidez tangente, respectivamente. Essas relações são independentes da teoria de viga adotada. O primeiro termo da Eq. (30) representa a matriz de rigidez elástica, já os últimos três termos representam a matriz de rigidez geométrica, onde é levado em conta os efeitos de segunda ordem do sistema estrutural. As forças internas do elemento, a matriz de rigidez e a matriz de transformação, \mathbf{B} , devem ser atualizadas constantemente durante todo o processo de resolução do sistema (Método de Newton-Raphson), tanto no processo incremental, quanto no processo iterativo.

3 FORMULAÇÕES GEOMETRICAMENTE NÃO LINEARES

Um novo elemento de viga-coluna não linear capaz de considerar a deformação cisalhante, e no contexto de deformação consistente, foi proposto por Tang *et al.* (2015). Utilizando funções de interpolações de deslocamento tradicionais, que são de baixa ordem de interpolação, o elemento viga-coluna pode apresentar um aumento de rigidez espúrio. Como consequência, quando o elemento estiver sujeito a grandes deformações, pode acontecer o efeito de travamento de membrana, conhecido como “*membrane locking*”. Adicionalmente, a medida que o elemento se torna mais esbelto, a deformação cisalhante, γ , também pode gerar o efeito conhecido como travamento por cisalhamento (“*shear locking*”). Para eliminar esses efeitos, as equações diferenciais de equilíbrio de forças são usadas para se obter as funções de interpolação.

No MEF tradicional, baseado em deslocamento, as funções de interpolações são obtidas considerando os graus de liberdade nodais do elemento. Esse tipo de procedimento pode

produzir comportamento rígido excessivo do elemento restringindo sua deformação. Diferentes estratégias podem ser usadas para eliminar o efeito de “locking”, como a integração reduzida e o emprego de uma ordem mais elevada das funções de interpolação, porém esses procedimentos apresentam bons resultados quando geralmente é utilizado um número grande de elementos na modelagem do sistema estrutural.

O entendimento do comportamento de um membro (pilar ou viga), a eficiência computacional e a facilidade de modelagem do sistema estrutural requerem que análise seja feita com a adoção de menos elementos por membro possível. Esse requisito torna inadequado, para uma análise estrutural precisa e eficiência, os métodos convencionais para solucionar os efeitos de “locking” supracitados.

Quando se utiliza uma função de interpolação linear do deslocamento axial, que descrevem aproximadamente o comportamento do elemento, o efeito de “*membrane locking*” surge no elemento viga-coluna. Contudo, em uma análise linear, nota-se que a interpolação linear usada na função de deslocamento axial é coerente com a teoria de deformação linear ($\epsilon = du/dx$), pois a deformação axial ϵ , é independente do deslocamento transversal. Porém, em uma análise não linear, há um acoplamento da deformação axial e a deformação devido a flexão, e assim a função de interpolação linear axial constrange o correspondente deslocamento axial devido ao deslocamento transversal. Assim, a hipótese de utilizar interpolação linear não é consistente com a teoria de deformação não linear.

Para eliminar o “*membrane locking*” e estabelecer uma função de interpolação de deslocamento axial consistente, deve-se utilizar a equação de equilíbrio axial para se determinar a função de deslocamento axial baseado na função de interpolação de deslocamento transversal cúbica. Para representar a deformação de membrana constante no elemento:

$$\frac{d\epsilon}{dx} = \left(\frac{d^2u}{dx^2} + \frac{dv}{dx} \frac{d^2v}{dx^2} \right) = 0 \quad (31)$$

Assume-se que o deslocamento axial pode ser dividido em deslocamento u_a e um deslocamento induzido pela flexão, u_b , como:

$$u = u_a + u_b \quad (32)$$

sendo:

$$u_a = \frac{x}{l} \bar{u} \quad (33)$$

e u_b deve satisfazer as seguintes condições de contorno:

$$u_b = 0 \text{ em } x = 0, l \quad (34)$$

Para se definir u_b , baseando-se na Eq. (31), tem-se:

$$\epsilon = \frac{du}{dx} + \frac{1}{2} \left(\frac{dv}{dx} \right)^2 = \frac{du_a}{dx} + \frac{du_b}{dx} + \frac{1}{2} \left(\frac{dv}{dx} \right)^2 = \text{Constante} \quad (35)$$

Faz-se então a integração da equação anterior e utilizando-se a condição de contorno (34), tem-se:

$$u_b(x) = \frac{x}{l} \int_0^l \frac{1}{2} \left(\frac{dv}{dx} \right)^2 dx - \int_0^x \frac{1}{2} \left(\frac{dv}{dx} \right)^2 dx \quad (36)$$

Da expressão anterior pode-se concluir que a função de deslocamento axial induzido pela flexão seria um polinômio de quinto grau quando a função de deslocamento transversal, v , for um polinômio de terceira ordem. Mantendo a deformação axial constante, a ordem da função de deslocamento axial seria $1+(n-1)^2$, em que n é a ordem da função de deslocamento transversal, v . Portanto, se for utilizado uma ordem maior para a função de interpolação de deslocamento axial, o coeficiente dos termos de ordem maior que $1+(n-1)^2$ desaparece.

Portanto, as novas funções de interpolações de deslocamento, considerando a teoria de viga de Euler-Bernoulli, são:

$$v(x) = x\bar{\theta}_i - \frac{x^2(2\bar{\theta}_i + \bar{\theta}_j)}{l} + \frac{x^3(\bar{\theta}_i + \bar{\theta}_j)}{l^2} \quad (37)$$

$$u(x) = \frac{x}{l} \bar{u} + \frac{x}{l} \int_0^l \frac{1}{2} \left(\frac{dv(x)}{dx} \right)^2 dx - \int_0^x \frac{1}{2} \left(\frac{dv(x)}{dx} \right)^2 dx \quad (38)$$

Considerando essas novas aproximações para u e v , escreve-se para a deformação axial:

$$\varepsilon = \frac{\bar{u}}{l} + \frac{2\bar{\theta}_i^2 - \bar{\theta}_i\bar{\theta}_j + 2\bar{\theta}_j^2}{30} \quad (39)$$

Considerando um elemento viga-coluna prismático, elástico e com cargas conservativas aplicadas no nós do elemento, a energia potencial do sistema pode ser expressa com a soma da energia e deformação U e o trabalho externo realizado Ω , como segue:

$$\Pi = U - \Omega = \frac{1}{2} EA \int_0^l \varepsilon^2 dx + \frac{1}{2} EI \int_0^l \kappa^2 dx - \sum \mathbf{f}_l \mathbf{u}_l \quad (40)$$

Pelo princípio da estacionaridade da energia potencial, a primeira variação da função, apresentada na Eq. (40) produz as equações de equilíbrio como:

$$\delta \Pi = \left(\frac{\partial U}{\partial \mathbf{u}_l} - \mathbf{f}_l \right) \delta \mathbf{u}_l = 0 \quad \therefore \quad \frac{\partial U}{\partial \mathbf{u}_l} - \mathbf{f}_l = 0 \quad \therefore \quad \mathbf{f}_i - \mathbf{f}_l = 0 \quad (41)$$

sendo as componentes da matriz de rigidez do elemento dadas por:

$$\mathbf{K}_{ij} = \frac{\partial \mathbf{f}_{li}}{\partial \mathbf{u}_{lj}} \quad \text{onde } i, j = 1, 2, 3 \quad (42)$$

Então, a relação final entre as forças e deslocamentos baseados na função do deslocamento consistente, considerando a teoria de Euler-Bernoulli são obtidas:

$$N = EA \left(\frac{\bar{u}}{l} + 2\bar{\theta}_i^2 - \bar{\theta}_i\bar{\theta}_j + 2\bar{\theta}_j^2 \right) \quad (43)$$

$$M_j = \left(\frac{2EI}{l} - \frac{NI}{30} \right) \bar{\theta}_i + \left(\frac{4EI}{l} + \frac{4NI}{30} \right) \bar{\theta}_j \quad (44)$$

$$M_i = \left(\frac{4EI}{l} + \frac{4NI}{30} \right) \bar{\theta}_i + \left(\frac{2EI}{l} - \frac{NI}{30} \right) \bar{\theta}_j \quad (45)$$

Propõe-se que elemento viga-coluna seja formulado agora de acordo com a teoria de viga de Timoshenko. Primeiramente, considera-se que as funções de aproximação do deslocamento transversal e da rotação, não possam provocar do “*shear locking*”, sendo derivadas através dos graus de liberdade nodais e das equações de equilíbrio do elemento. Assim a função de interpolação do deslocamento axial consistente e a deformação axial constante podem ser obtidas usando a função de aproximação do deslocamento transversal, ou seja, através das Eqs. (32) e (35). Por fim, as expressões das forças internas e a matriz de rigidez podem ser derivadas através do princípio de estacionaridade da energia potencial do sistema.

De acordo com a hipótese de viga de Timoshenko, a deformação cisalhante γ e a curvatura κ são dados por:

$$\gamma = \frac{dv}{dx} - \theta \quad (46)$$

$$\kappa = -\frac{d\theta}{dx} \quad (47)$$

As correspondentes força cisalhante interna e momento fletor são dados como segue:

$$M = EI\kappa \quad (48)$$

$$Q = kGA\gamma \quad (49)$$

As equações diferenciais podem ser obtidas pelo princípio dos deslocamentos virtuais, ou pode ser dada diretamente:

$$\frac{dM}{dx} = Q \quad (50)$$

$$\frac{dQ}{dx} = 0 \quad (51)$$

Com a substituição de (46) a (49) nas equações anteriores, obtém-se as expressões de equilíbrio em termos de deslocamentos e rotações:

$$EI \frac{d^2\theta}{dx^2} + kGA \left(\frac{dv}{dx} - \theta \right) = 0 \quad (52)$$

$$kGA \left(\frac{d^2 v}{dx^2} - \frac{d\theta}{dx} \right) = 0 \quad (53)$$

Se a interpolação cúbica para o deslocamento transversal é adotada, e através da Eq. (53), pode-se obter as funções de deslocamento transversal e rotação, ou seja:

$$v = (L-x)x \frac{(L+6bL-x)\bar{\theta}_1 - (6bL+x)\bar{\theta}_2}{(1+12b)L^2} \quad (54)$$

$$\theta = \frac{(L-x)(L+12bL-3x)\bar{\theta}_1 + x(-2L+12bL+3x)\bar{\theta}_2}{(1+12b)L^2} \quad (55)$$

sendo:

$$b = \frac{EI}{kGA l^2} \quad (56)$$

Considera-se que a deformação cisalhante γ (Eq. (46)), é constante ao longo de toda a seção transversal. Essa hipótese não condiz com a realidade devido às condições de contorno do elemento. Deve-se então multiplicar ao módulo de elasticidade transversal, G , o coeficiente de correção do cisalhamento, k (Eq. (56)). Segundo Cowper (1966), esse coeficiente é adimensional, depende da forma da seção transversal e do coeficiente de Poisson, ν , do material, e que é introduzido considerando o fato que a tensão cisalhante e a deformação cisalhante não são distribuídas uniformemente sobre a seção transversal do elemento. Cowper (1966) propõe equações para o cálculo do coeficiente de correção de cisalhamento, k , para diferentes geometrias de seções transversais, como a seção circular, retangular, semicírculo, perfil I, entre outros.

Conhecidas as aproximações para os deslocamentos e a rotação, chega-se de forma consistente na expressão da deformação axial do elemento de viga-coluna, incluindo o efeito cisalhante, isto é:

$$\varepsilon = \frac{\bar{u}}{l} + \frac{2\beta_1 \bar{\theta}_i^2 - \beta_2 \bar{\theta}_i \bar{\theta}_j + 2\beta_1 \bar{\theta}_j^2}{30} \quad (57)$$

com:

$$\beta_1 = \frac{1+15b+90b^2}{(1+12b)^2} \quad (58)$$

$$\beta_2 = \frac{1+60b+360b^2}{(1+12b)^2} \quad (59)$$

Assim, a energia potencial do sistema por adicionar a energia de deformação cisalhante torna-se:

$$\Pi = U - \Omega = \frac{1}{2} EA \int_0^l \varepsilon^2 dx + \frac{1}{2} EI \int_0^l \kappa^2 dx + \frac{1}{2} kGA \int_0^l \gamma^2 dx - \sum \mathbf{f}_i \mathbf{u}_i \quad (60)$$

Finalmente, considerando a condição de estacionaridade de Π , chegam-se nas componentes das forças internas (Eq. (41)), que são apresentadas a seguir :

$$N = EA \left(\frac{\bar{u}}{l} + 2\beta_1 \bar{\theta}_i^2 - \beta_2 \bar{\theta}_i \bar{\theta}_j + 2\beta_1 \bar{\theta}_j^2 \right) \quad (61)$$

$$M_i = \left(\alpha_1 \frac{4EI}{l} + \beta_1 \frac{4NI}{30} \right) \bar{\theta}_i + \left(\alpha_2 \frac{2EI}{l} - \beta_2 \frac{NI}{30} \right) \bar{\theta}_j \quad (62)$$

$$M_j = \left(\alpha_2 \frac{2EI}{l} + \beta_2 \frac{NI}{30} \right) \bar{\theta}_i + \left(\alpha_1 \frac{4EI}{l} - \beta_1 \frac{4NI}{30} \right) \bar{\theta}_j \quad (63)$$

em que:

$$\alpha_1 = \frac{1+3b}{1+12b} \quad (64a)$$

$$\alpha_2 = \frac{1-6b}{1+12b} \quad (64b)$$

Através da Eq. (42), obtém-se as componentes da matriz de rigidez tangente local do elemento, isto é:

$$K_{l_{11}} = \frac{\partial N}{\partial \bar{u}} = \frac{EA}{l} \quad (65a)$$

$$K_{l_{12}} = K_{l_{21}} = \frac{\partial N}{\partial \bar{\theta}_i} = \frac{\partial M_j}{\partial \bar{u}} = \frac{EA}{30} (4\beta_1 \bar{\theta}_i - \beta_2 \bar{\theta}_j) \quad (65b)$$

$$K_{l_{13}} = K_{l_{31}} = \frac{\partial N}{\partial \bar{\theta}_j} = \frac{\partial M_j}{\partial \bar{u}} = \frac{EA}{30} (-\beta_2 \bar{\theta}_i + 4\beta_1 \bar{\theta}_j) \quad (65c)$$

$$K_{l_{22}} = \frac{\partial M_i}{\partial \bar{\theta}_i} = \alpha_1 \frac{4EI}{l} + \beta_1 \frac{4EA\bar{u}}{30} + \frac{EA}{900} (24\beta_1^2 \bar{\theta}_i^2 - 12\beta_1 \beta_2 \bar{\theta}_i \bar{\theta}_j + (8\beta_1^2 + \beta_2^2) \bar{\theta}_j^2) \quad (65d)$$

$$K_{l_{23}} = K_{l_{32}} = \frac{\partial M_i}{\partial \bar{\theta}_j} = \frac{\partial M_j}{\partial \bar{\theta}_i} = \alpha_2 \frac{2EI}{l} + \beta_2 \frac{EA\bar{u}}{30} + \frac{EA}{450} (-3\beta_1 \beta_2 \bar{\theta}_i^2 + (8\beta_1^2 + \beta_2^2) \bar{\theta}_i \bar{\theta}_j - 12\beta_1 \beta_2 \bar{\theta}_i \bar{\theta}_j - 3\beta_1^2 \bar{\theta}_j^2) \quad (65e)$$

$$K_{l_{33}} = \frac{\partial M_j}{\partial \bar{\theta}_j} = \alpha_1 \frac{4EI}{l} + \beta_1 \frac{4EA\bar{u}}{30} + \frac{EA}{900} ((8\beta_1^2 + \beta_2^2) \bar{\theta}_i^2 - 12\beta_1 \beta_2 \bar{\theta}_i \bar{\theta}_j + 24\beta_1^2 \bar{\theta}_j^2) \quad (65f)$$

Os parâmetros α_i ($i = 1,2$) e β_i ($i = 1,2$) representam os efeitos linear e não linear, respectivamente, devido a deformação cisalhante. Se a deformação cisalhante for negligenciada, o parâmetro b desaparece e os parâmetros correspondentes α_i e β_i serão iguais a 1. Assim, as forças internas (Eq. (61), Eq. (62) e Eq. (63)) e a matriz de rigidez tangente (Eq. (65)) seriam degeneradas para as forças internas e matriz de rigidez obtidas através da hipótese de viga de Euler-Bernoulli.

4 EXEMPLOS NUMÉRICOS

Nesta seção, a estratégia numérica adotada no presente trabalho é utilizada com o propósito de estudar a influência da teoria de viga em relação à esbeltez do sistema analisado. Para tal objetivo, três sistemas estruturais são analisados: uma viga engastada-livre, uma coluna engastada-livre e o pórtico de Williams.

4.1 Viga engastada-livre

Este primeiro exemplo aborda uma viga engastada-livre submetida a uma carga concentrada P , conforme Fig. 2. A estrutura possui comprimento $L = 1\text{ m}$, módulo de elasticidade $E = 10^7\text{ kN/m}^2$, coeficiente de forma $k = 1$ e o módulo de elasticidade transversal, G , é considerado como sendo a metade de E . Para se obter a variação da esbeltez da viga (L/h), o comprimento L é mantido constante e varia-se a altura h da seção (Fig. 2). Neste exemplo, considera-se um modelo numérico com dez elementos finitos. Essa viga é frequentemente usada quando se considera grandes deslocamentos no sistema, pois resultados analíticos são encontrados em Timoshenko e Gere (1982).

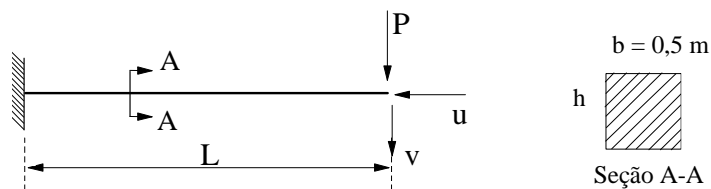


Figura 2 – Viga engastada-livre e detalhe da sua seção transversal

A solução não linear do problema é realizada através do método de Newton-Raphson modificado acoplado à técnica da norma mínima dos deslocamentos residuais, e os incrementos de carga $\Delta\lambda$ são obtidos com a restrição do comprimento de arco cilíndrico (Silva, 2009). O critério de convergência é baseado em forças, com tolerância $\zeta = 10^{-3}$, e o incremento inicial do parâmetro de carga é $\Delta\lambda^0 = 0,1$.

Nas Figuras 3(a)-3(d) são ilustradas as trajetórias de equilíbrio do sistema, em que se controla a variação dos deslocamentos horizontal e vertical na extremidade da viga com a carga P , para diferentes esbeltezas ($\lambda = L/h$). No que diz respeito à teoria de viga, note que quando o sistema apresenta esbeltez mais elevada ($\lambda \geq 6,6$), a diferença no comportamento das curvas carga-deslocamento diminui.

As Figuras 3(e) e 3(f), que fornecem a variação da relação u_T/u_{EB} e v_T/v_{EB} com a esbeltez do sistema, respectivamente, mostram que para $\lambda \geq 6$ os resultados obtidos com as duas teorias são próximos. Para a construção dessa curva, considerou-se os valores de u e v para uma carga $P = 1000\text{ kN}$. Para valores de λ reduzidos, ou seja, para estruturas menos esbeltas, o emprego da teoria de Euler-Bernoulli leva, como observado nas Figs. 3(a) e 3(b), a um modelo estrutural mais rígido. Como esperado, pode-se afirmar que a teoria de Timoshenko deve ser preferencialmente utilizada quando o sistema estrutural apresentar pequena esbeltez. Neste exemplo, quando a esbeltez $\lambda = 4$ (Fig. 3b), as respostas obtidas com as duas teorias de viga apresentam divergências para valores da carga P elevados.

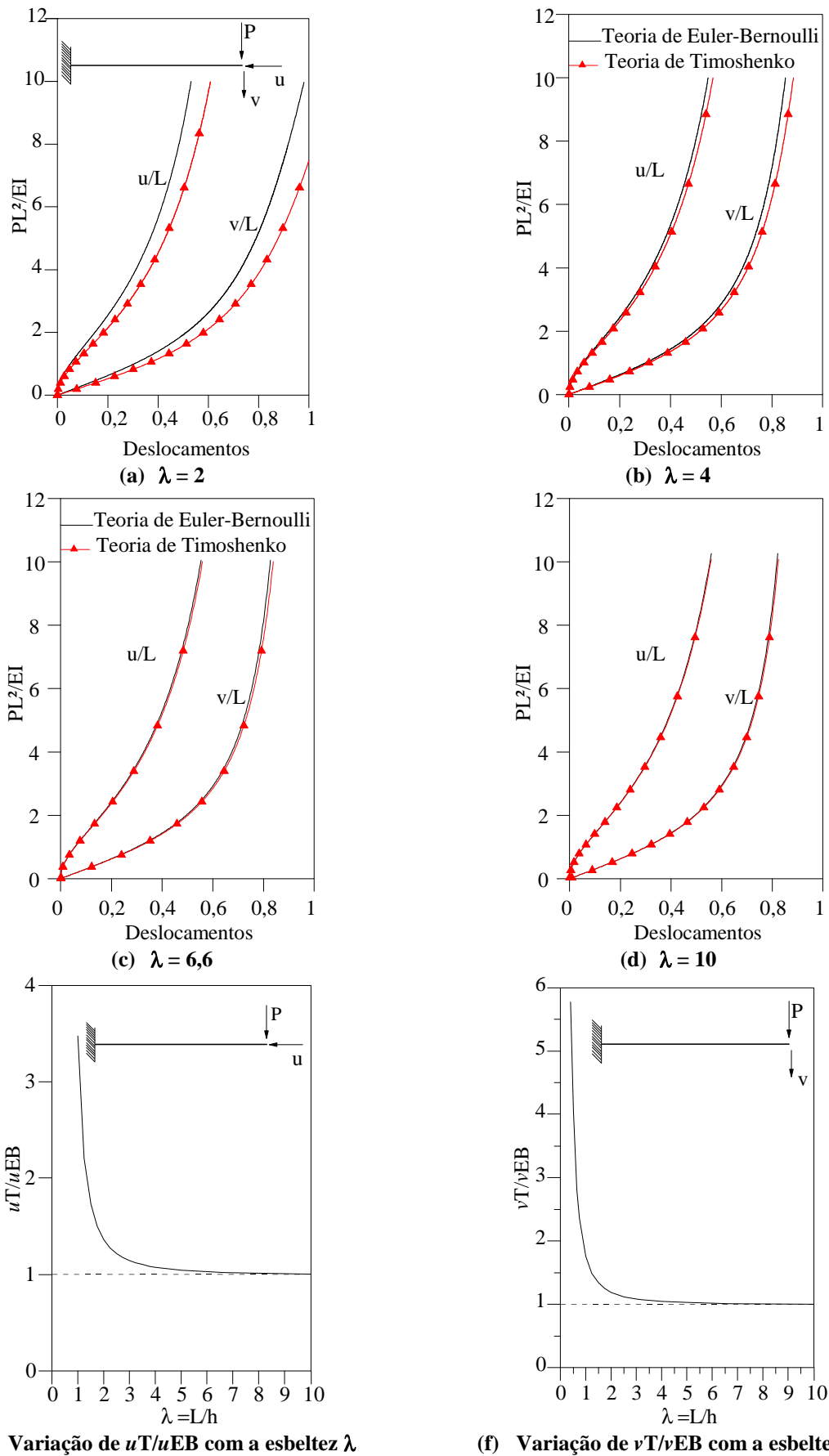


Figura 3 – Trajetórias de equilíbrio da viga engastada-livre e análise de convergência

4.2 Pilar engastado-livre

Esta seção aborda o pilar ilustrado na Fig. 4, onde uma de suas extremidades é engastada e a outra é livre. A estrutura é submetida a uma carga vertical P aplicada no seu topo associada a uma pequena imperfeição ($M = 0.001 PL$), que é introduzida com o objetivo de evitar problema numérico relacionado ao ponto crítico de bifurcação. O pilar tem comprimento $L = 1 \text{ m}$, $E = 10^7 \text{ kN/m}^2$, coeficiente de forma $k = 1$ e o módulo de elasticidade transversal $G = E/2$. A mesma estratégia de solução não linear do problema anterior é adotada, assim como a discretização do sistema (dez elementos finitos).

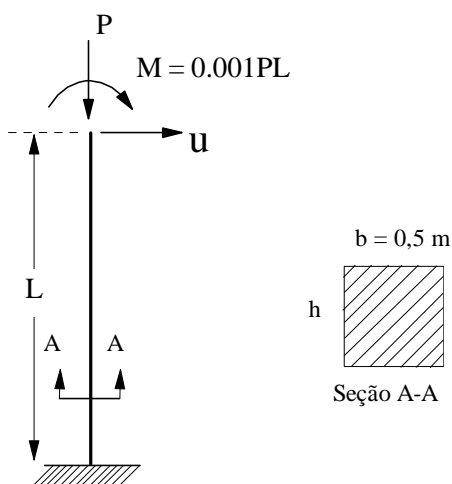


Figura 4 – Pilar engastado-livre e detalhe da sua seção transversal

Nas Figuras 5(a)-5(d) estão as trajetórias de equilíbrio da coluna, onde se observa a variação do deslocamento horizontal, u , na extremidade da estrutura, com a carga P . Essas curvas carga-deslocamento foram obtidas considerando as duas teorias de viga em estudo. Observa-se que a resposta do sistema independe da teoria adotada, ou seja, as curvas se tornam próximas ou coincidentes, à medida que o valor do índice esbeltez ($\lambda = L/h$) aumenta. Como no problema anterior, a inclusão da parcela da energia de deformação cisalhante na análise torna-se relevante à medida que a esbeltez do sistema é reduzida. Por exemplo, para $\lambda = 4$ (Fig. 5(c)), é observada uma carga crítica mais elevada quando se utiliza a teoria de viga clássica; para $\lambda \geq 6$, tanto o valor da carga crítica como o comportamento geral da curva são coincidentes para as duas teorias de viga empregadas.

Para analisar de uma forma geral a influência da esbeltez λ em relação aos valores do deslocamento horizontal obtidos com as duas teorias de vigas, apresenta-se a Fig. 5(e). Nessa figura, a ordenada é o valor de uT/uEB , que varia em função da esbeltez da estrutura, como no exemplo anterior. Na construção da curva, considerou-se o valor de u para uma carga $P = 1000 \text{ kN}$. Tem-se novamente uma curva com tendência ao valor unitário, no eixo das ordenadas, quando a esbeltez aumenta, porém neste exemplo essa tendência começa para uma esbeltez mais elevada do que no problema anterior.

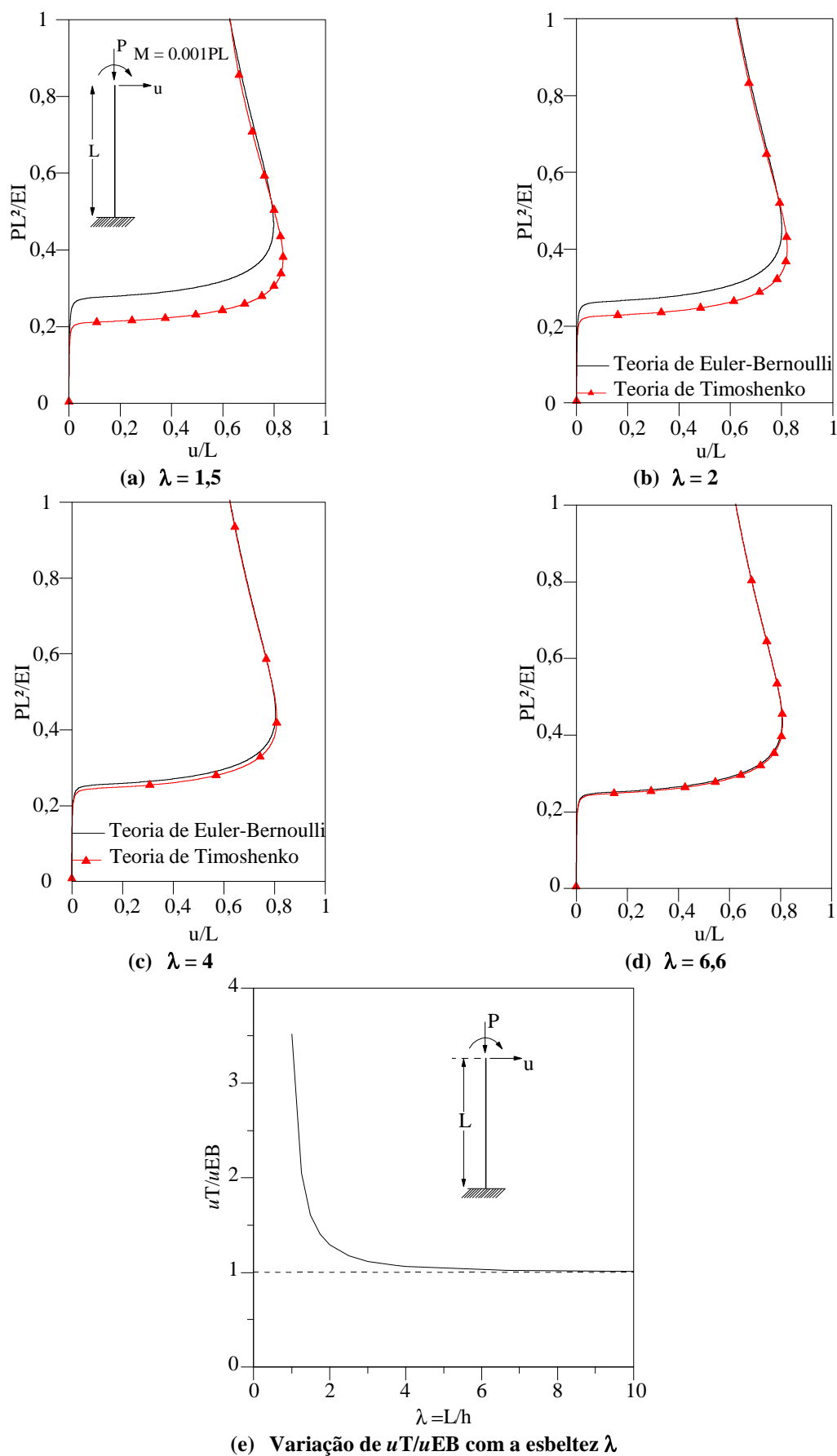


Figura 5 – Trajetórias de equilíbrio do pilar engastado-livre e análise de convergência

4.3 Pórtico de Williams

A Figura 6 traz o pórtico abatido biengastado a ser analisado, que é composto por duas barras e submetido a uma carga concentrada P aplicada no centro da estrutura. As barras do pórtico possuem seção transversal circular vazada. O módulo de elasticidade do material é $E = 2 \times 10^8 \text{ kN/m}^2$ e coeficiente de Poisson $\nu = 0,3$. Este problema possui resultados analíticos e experimentais apresentados por Williams (1964), sendo frequentemente utilizados para validar formulações geometricamente não lineares. Porém, a seção transversal adotada por Williams (1964) é retangular, o que difere da seção usada aqui. Tang *et al.* (2014) também estudou esse pórtico utilizando os mesmos dados apresentados na Fig. 6.

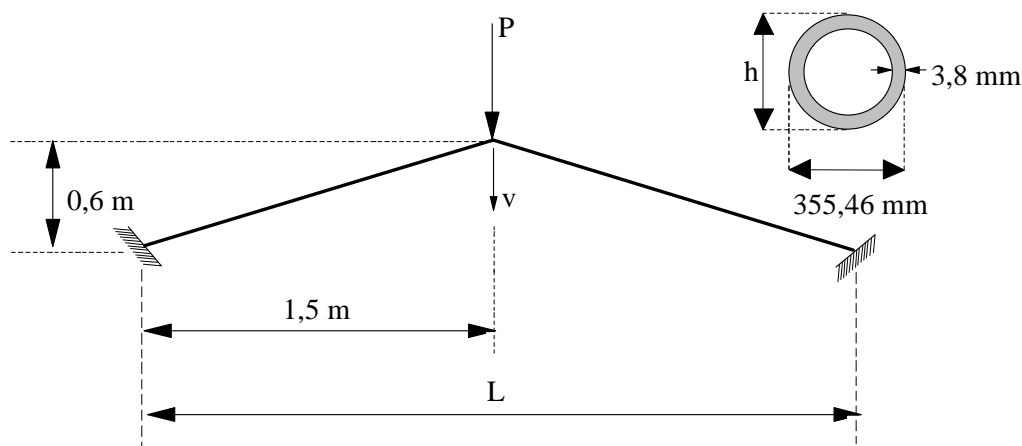


Figura 6 - Pórtico de Williams: geometria e seção transversal

Na solução não linear do problema, adota-se a estratégia do comprimento de arco cilíndrico, com o método Newton-Raphson modificado (Silva, 2009). O incremento automático do comprimento de arco controla, portanto, o incremento do parâmetro de carga $\Delta\lambda$, que foi assumido inicialmente 0,1. O critério de convergência é o baseado em forças, com uma tolerância de 10^{-3} .

Várias análises foram realizadas incluindo a parcela da deformação cisalhante (Timoshenko) e a desprezando (Euler-Bernoulli), para diferentes seções transversais das barras. Para se obter a variação da esbeltez do sistema, $\lambda = L/h$ ($3 \text{ m/D}_{\text{externo}}$), o valor da espessura da seção transversal foi mantido constante e igual a $3,8 \text{ mm}$, e foram alterados seus diâmetros interno e externo. Assim, o valor de k (correção devido ao cisalhamento) manteve-se o mesmo para as diferentes esbeltezes, e igual a 0,53 (Cowper, 1966). Dez elementos finitos (5 por barra) foram usados na discretização do sistema estrutural.

Nas Figuras 7(a)-7(d) estão as trajetórias de equilíbrio do sistema em estudo, onde se observa a variação do deslocamento vertical, no centro do pórtico, com a carga P para diferentes valores de λ . Como nos exemplos anteriores, a diferença nas trajetórias de equilíbrio obtidas com as teorias de vigas diminui à medida que se aumenta a esbeltez do sistema. A concordância entre as curvas, entretanto, só aparece quando a esbeltez se aproxima de 40.

Os resultados apresentados na Fig.7(b) estão em bom acordo com aqueles de Tang *et al.* (2015), obtidos com o software comercial ANSYS usando vinte elementos. Diferentemente do pórtico de Williams clássico, a seção transversal aqui é circular vazada, no sentido de enfatizar o efeito da deformação cisalhante. Note que a estrutura apresenta um caminho de equilíbrio acentuadamente não linear com perda de estabilidade por ponto limite associada.

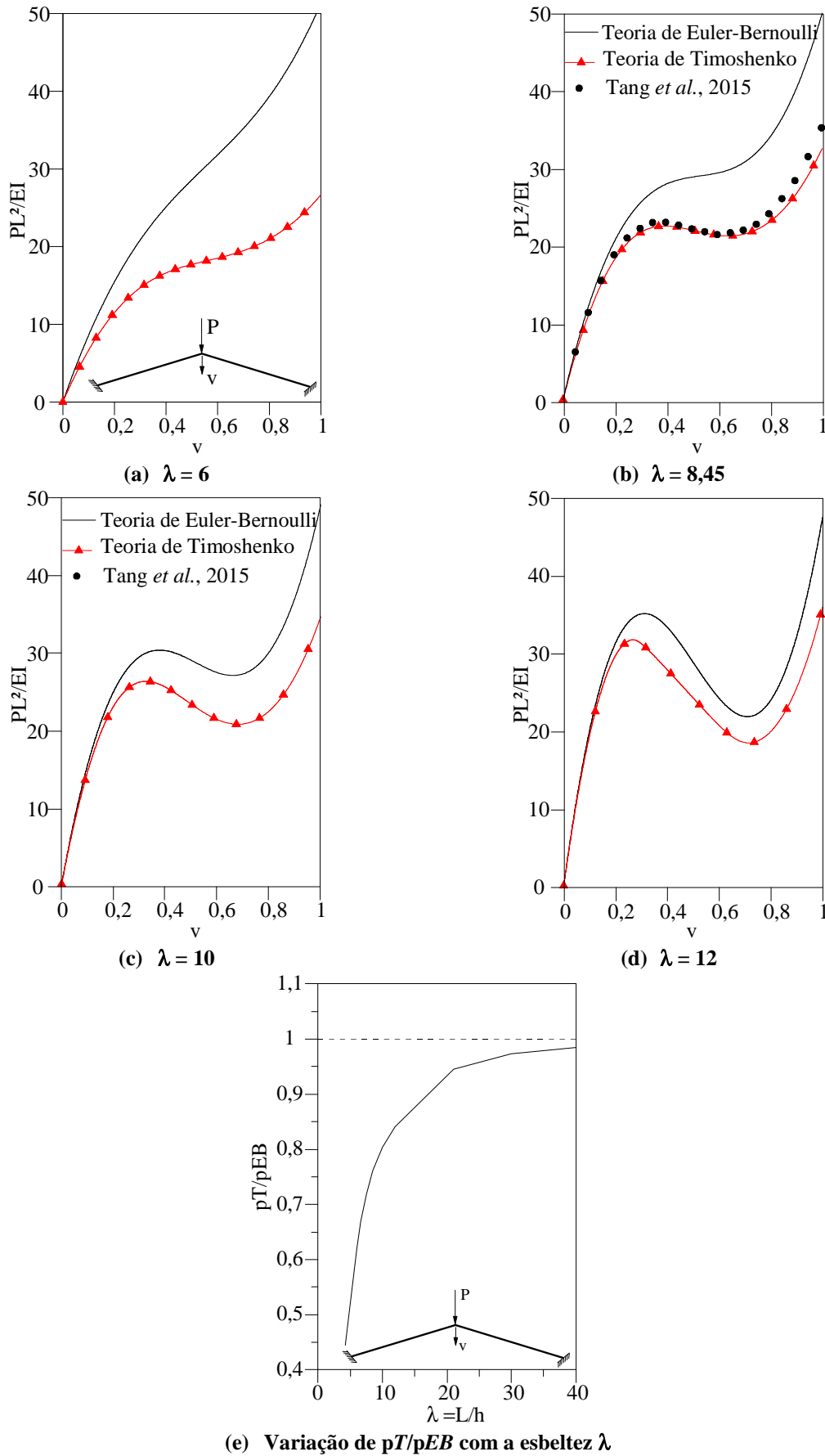


Figura 7 – Trajetórias de equilíbrio do pórtico de Williams e análise de convergência

Ainda em relação à Fig. 7(b), a trajetória de equilíbrio obtida com o emprego da teoria clássica apresenta discrepância com aquela da literatura. A consideração da parcela da deformação cisalhante é fundamental para essa esbeltez $\lambda = 8,45$, portanto, em que o comportamento pós-flambagem com perda de rigidez do sistema só é observado com a introdução dessa componente de energia.

A Figura 7(e) traz o gráfico da relação de pT/pEB com a esbeltez do sistema λ , sendo pT o valor de PL^2/EI obtido utilizando a teoria de Timoshenko e pEB a teoria clássica (o valor de PL^2/EI foi extraído quando $\nu = 0,5 m$). Quando a esbeltez se aproxima de 40, a curva começa a apresentar uma assíntota horizontal com o eixo das ordenadas de valor 1. Isso significa que as trajetórias de equilíbrio obtidas com as diferentes teorias de vigas só se aproximam quando o sistema apresenta esbeltez mais elevada. Essa convergência, diferentemente dos exemplos anteriores, deve-se à adoção da seção circular vazada, onde o efeito da deformação cisalhante é significativo.

5 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Este trabalho apresentou um estudo comparativo envolvendo análises geometricamente não lineares de sistemas estruturais, em que se considerou as teorias de viga de Euler-Bernoulli (clássica) e de Timoshenko. As análises foram realizadas para diferentes esbeltezes λ dos sistemas, quando se variou as características geométricas das seções transversais. Foi possível avaliar o comportamento das estruturas através de suas trajetórias de equilíbrio, para diferentes valores de λ . Verificou-se que os resultados obtidos com essas teorias de vigas apresentam discrepâncias, que, como esperado, dependem da esbeltez λ do sistema estrutural.

Para os exemplos abordados, quando o sistema apresentava λ pequeno, a resposta observada tinha diferença significativa para as diferentes teorias de viga. Para esbeltezes mais elevadas, essa diferença diminuiu, e a concordância dos resultados dependeu do sistema analisado. Conclui-se que para sistemas com menores λ , as análises não lineares realizadas com a teoria de Timoshenko apresentaram resultados mais precisos.

AGRADECIMENTOS

Os autores agradecem à CAPES, ao CNPq, à Fapemig, à FG, ao PROPEC/UFOP e à Propp/UFOP o apoio fornecido para o desenvolvimento desta pesquisa.

REFERÊNCIAS

- Battini, J.M., 2002. Co-rotational beam elements in instability problems. Ph.D Thesis, Royal Institute of Technology – Department of Mechanics, Stockholm / Sweden.
- Cowper, G.R., 1966. The Shear Coefficient in Timoshenko's Beam Theory. *Journal of Applied Mechanics*, vol. 33, pp. 335-340.
- Hsiao, K.M., Horng, H.J., & Chen, Y.R., 1987. A co-rotational procedure that handles large rotations of spatial beam structures. *Computers & Structures*, vol. 27 n° 6, pp. 769-781.
- Lemes, Í.J.M., 2015. *Análise Avançada via MRPR de Estruturas Mistas de Aço e Concreto*. Dissertação de Mestrado, Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil, Deciv/EM/UFOP.

- Oñate, E., 2013. Structural Analysis with the Finite Element Method. vol. 1, International Center for Numerical Methods in Engineering (CIMNE), Spain.
- Pacoste, C., & Eriksson, A., 1995. Element behavior in post-critical plane frame analysis. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, vol. 125, pp 319-343.
- Pacoste, C., & Eriksson, A., 1997. Beam elements in instability problems. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, vol. 144, pp. 163-197.
- Santana, M.V.B., 2015. Desenvolvimento de sistema computacional via MATLAB/GUI para análise geometricamente não linear de estruturas. Dissertação de Mestrado, Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil, Deciv/EM/UFOP, Ouro Preto/MG, Brasil.
- Silva, A.R.D., 2009. *Sistema Computacional para Análise Avançada Estática e Dinâmica de Estruturas Metálicas*. Tese de Doutorado, Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil, PROPEC/EM/UFOP, Ouro Preto/MG, Brasil.
- Tang, Y.Q., Zhou, Z.H. & Chan, S.L., 2015. Nonlinear beam-column element under consistent deformation. *World Scientific Publishing Company*, vol. 15, n° 5, pp. 1450068.
- Timoshenko, S.P. e Gere, J.E., 1982. Mecânica dos Sólidos. Livros Técnicos e Científicos, vol 01.
- Timoshenko, S., Young, D.H. & Weaver, J.W., 1974. Vibration Problems in Engineering. 1. ed. Rio de Janeiro: Guanabara Dois.
- Williams, F.W., 1964. An Approach to the Nolinear Behavior of the Members of a Rigid Jointed Plane Framework with Finite Deflections, *Quart. J. Mech. Appl. Math.*, 17(4), p. 451-469, 1964.
- Yang, Y.B., & Kuo, S.B., 1994. Theory & Analysis of Nonlinear Framed Structures. Prentice Hall.