



**SUPERFÍCIE DE RESPOSTA EM
EXPERIMENTO COM PARCELAS
SUBDIVIDIDAS**

TELDE NATEL CUSTÓDIO

1999

TELDE NATEL CUSTÓDIO

**SUPERFÍCIE DE RESPOSTA EM EXPERIMENTO
COM PARCELAS SUBDIVIDIDAS**

Dissertação apresentada à Universidade Federal de Lavras, como parte das exigências do Curso de Mestrado em Agronomia, área de Concentração em Estatística e Experimentação Agropecuária, para obtenção do título de "Mestre".

Orientador

Prof. Dr. Augusto Ramalho de Moraes

LAVRAS
MINAS GERAIS - BRASIL
1999

**Ficha Catalográfica Preparada pela Divisão de Processos Técnicos da
Biblioteca Central da UFLA**

Custódio, Telde Natel

Superfície de resposta em experimento com parcelas subdivididas/Telde
Natel Custódio. - Lavras: UFLA, 1999.

81 p. : il.

Orientador: Augusto Ramalho de Moraes.

Dissertação (Mestrado) - UFLA.

Bibliografia.

1. Superfície de resposta. 2. Parcela subdividida. 3. Análise de variância.
4. Análise de regressão. I. Universidade Federal de Lavras. II. Título.

CDD-311.2

-630.219

-519.538

TELDE NATEL CUSTÓDIO

SUPERFÍCIE DE RESPOSTA EM EXPERIMENTO COM PARCELAS SUBDIVIDIDAS

Dissertação apresentada à Universidade Federal de Lavras, como parte das exigências do Curso de Mestrado em Agronomia, área de Concentração em Estatística e Experimentação Agropecuária, para obtenção do título de “Mestre”.

APROVADA em 22 de fevereiro de 1999.

Prof. Dr. Joel Augusto Muniz

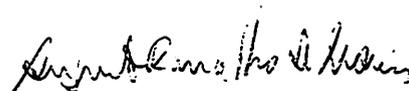
UFLA

Prof. Dr. Lucas Monteiro Chaves

UFLA

Prof. Dr. Ruben Delly Veiga

UFLA


Prof. Dr. Augusto Ramalho de Moraes
UFLA
(Orientador)

LAVRAS
MINAS GERAIS - BRASIL

A uma pessoa muito especial, a quem Deus nos emprestou por apenas sete anos, e que hoje é um anjo que se encontra ao seu lado, e tenho a certeza que esteve comigo em todos os momentos.

A Liliane (in memoriam).

DEDICO

Sonhar, apesar das desilusões.

Caminhar, apesar dos obstáculos.

Lutar, apesar das barreiras.

Acreditar, acima de tudo.

Aos meus pais,

Aos meus irmãos, e

Aos meus Sobrinhos.

OFEREÇO

AGRADECIMENTOS

A Deus, pela vida.

Ao Prof. Dr. Augusto Ramalho de Moraes pelos ensinamentos, valiosa orientação e amizade.

Ao Prof. Dr. Joel Augusto Muniz, pelos ensinamentos, apoio e incentivo constante.

Ao Prof. Dr. Alcione de Oliveira, pelo apoio e amizade.

A Universidade Federal de Lavras e ao Departamento de Ciências Exatas pela oportunidade concedida para a realização do curso.

Ao Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico (CNPq) pela bolsa de estudos concedida.

Aos professores Dr. Lucas Monteiro Chaves e Dr. Ruben Delly Veiga pelos ensinamentos e sugestões.

A Eliane, pela compreensão e incentivo constante.

Ao meu amigo José Martiniano, pelo incentivo na vida.

Aos professores do curso: Agostinho, Daniel, Eduardo, Luiz Henrique e Thelma pelos ensinamentos e agradável convívio.

Aos colegas de curso Cláudio, Dileta, Hugo, Idalmo, Janaína e Marcelo pela amizade e companheirismo.

Aos servidores técnicos-administrativos do Departamento de Ciências Exatas da UFLA pela amizade e agradável convívio.

A todos que de alguma forma auxiliaram para a realização deste trabalho.

SUMÁRIO

| | Página |
|---|---------------|
| RESUMO..... | i |
| ABSTRACT..... | iii |
| 1 INTRODUÇÃO..... | 1 |
| 2 REFERENCIAL TEÓRICO..... | 4 |
| 2.1 Superfície de Resposta..... | 4 |
| 2.1.1 Metodologia empregada para se ajustar uma superfície de resposta..... | 10 |
| 2.1.1.1 Um modelo linear..... | 10 |
| 2.1.1.2 Estimação dos parâmetros..... | 12 |
| 2.1.1.3 Análise da superfície de resposta ajustada..... | 13 |
| 2.2 Experimentos em Parcelas Subdivididas..... | 14 |
| 2.3 Notação $R(.)$ | 23 |
| 2.4 Regressão em Experimentos com Parcelas Subdivididas..... | 26 |
| 3 MATERIAL E MÉTODOS..... | 33 |
| 3.1 Material..... | 33 |
| 3.2 Métodos..... | 34 |
| 3.2.1 Um modelo Linear..... | 35 |
| 3.2.2 Esperança Matemática das Somas de Quadrados..... | 41 |
| 4 RESULTADOS E DISCUSSÃO..... | 44 |
| 4.1 Esperança Matemática das Somas de Quadrados..... | 44 |
| 4.1.1 Esperança matemática de $SQ(\mu)$ | 44 |
| 4.1.2 Esperança matemática de $SQ(b)$ | 46 |
| 4.1.3 Esperança matemática de $SQ(t_1)$ | 49 |
| 4.1.4 Esperança matemática de $SQ(t_2)$ | 52 |
| 4.1.5 Esperança matemática de $SQ(a)$ | 54 |
| 4.1.6 Esperança matemática de $SQ(v_1)$ | 55 |
| 4.1.7 Esperança matemática de $SQ(v_2)$ | 57 |
| 4.1.8 Esperança matemática de $SQ(tv_{11})$ | 59 |

| | |
|---|----|
| 4.1.9 Esperança matemática de $SQ(tv_{12})$ | 61 |
| 4.1.10 Esperança matemática de $SQ(tv_{21})$ | 63 |
| 4.1.11 Esperança matemática de $SQ(tv_{22})$ | 64 |
| 4.2 Análise de variância com decomposição dos efeitos de tratamentos..... | 67 |
| 4.3 Exemplo Ilustrativo..... | 70 |
| | |
| 5 CONCLUSÕES..... | 76 |
| | |
| REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS..... | 77 |

RESUMO

CUSTÓDIO, Telde Natel. **Superfície de resposta em experimento com parcelas subdivididas**. Lavras: UFLA, 1999, 81p. (Dissertação - Mestrado em Estatística e Experimentação Agropecuária)

O objetivo deste trabalho foi apresentar um procedimento adequado para análise de experimentos em parcelas subdivididas, quando os fatores em estudo são quantitativos, através da metodologia de superfície de resposta, no qual procurou-se desenvolver a seqüência de operações para a realização das análises estatísticas e justificar a aplicação de testes apropriados. Para o desenvolvimento da metodologia, adotou-se o seguinte modelo linear:

$$y_{ijk} = \mu + b_j + t_1x_i + t_2x_i^2 + tb_{ij} + v_1z_k + v_2z_k^2 + tv_{11}x_iz_k + tv_{12}x_iz_k^2 + tv_{21}x_i^2z_k + tv_{22}x_i^2z_k^2 + e_{ijk}$$

sendo: y_{ijk} : valor observado no i -ésimo nível do tratamento primário, no k -ésimo nível do tratamento secundário, no j -ésimo bloco; μ : uma constante inerente a todas as observações; b_j : efeito do j -ésimo bloco; x_i : valor quantitativo do i -ésimo nível do tratamento primário; t_1 : efeito linear; t_2 : efeito quadrático; tb_{ij} : erro experimental em nível de parcelas; z_k : valor quantitativo do k -ésimo nível do tratamento secundário; v_1 : efeito linear; v_2 : efeito quadrático; x_iz_k : valor quantitativo da interação do i -ésimo nível do tratamento primário *versus* o k -ésimo nível do tratamento secundário; tv_{11} : efeito da interação linear X linear; tv_{12} : efeito da interação linear X quadrática; tv_{21} : efeito da interação quadrática X linear; tv_{22} : efeito da interação quadrática X quadrática; e_{ijk} : erro experimental associado à observação y_{ijk} , normalmente distribuído. Para maior facilidade nas deduções teóricas, utilizou-se o modelo na forma matricial $y = X\theta + e$, sendo: y um vetor de observações; X a matriz de incidência dos parâmetros (matriz do delineamento); θ um vetor de parâmetros desconhecidos do modelo e e um vetor de erros aleatórios correspondentes às observações. A metodologia desenvolvida teve por finalidade a obtenção da análise de variância de dados, provenientes de um experimento em parcelas subdivididas, com os tratamentos primários e secundários constituídos por fatores quantitativos (níveis e doses), considerando-se o desdobramento dos efeitos de tratamentos sob a forma de superfície de resposta. Utilizou-se o método dos mínimos quadrados, sob as condições anteriores, e determinaram-se: o sistema de equações normais; as somas de quadrados e suas esperanças matemáticas e a análise de variância com os testes de hipóteses. As conclusões obtidas foram: o modelo linear apresentou-se adequado em relação aos objetivos propostos, permitindo testar as hipóteses básicas de nulidade sobre os efeitos dos tratamentos primários, tratamentos

secundários e interação; para testar os efeitos linear e quadrático do tratamento primário, usa-se o QMResíduo(a) como denominador, e para os efeitos linear e quadrático do tratamento secundário e interação, usa-se o QMResíduo(b) como denominador; é possível realizar a análise de experimentos em parcelas subdivididas, quando os fatores em estudo são quantitativos, através da metodologia de superfície de resposta; a metodologia usada pode ser adaptada para experimentos em parcelas subdivididas envolvendo fatores quantitativos com outros números de níveis. Para ilustração da metodologia, usaram-se dados de produção de trigo, provenientes de um experimento em parcelas subdivididas, conduzido com delineamento em blocos casualizados, com duas repetições, sendo os tratamentos primários constituídos por três níveis de irrigação: 50, 100 e 150% aplicados com base na porcentagem de evaporação acumulada do tanque “classe A” e os tratamentos secundários constituídos pela adição de três doses de adubação nitrogenada: 60, 120 e 180 kg/ha.

Comitê Orientador: Augusto Ramalho de Moraes - UFLA (Orientador), Joel Augusto Muniz - UFLA

ABSTRACT

CUSTÓDIO, Telde Natel. **Response surface in split plot experiment..** Lavras: UFLA, 1999, 81 p. (Dissertation - Master Program in major in Statistics and Agricultural Experimentation)

The purpose of this work was to present a procedure suitable for analysis of split plot experiments, when the factors under study are quantitative, by means of response surface methodology, where developing the sequence of operations for the achievement of the statistical analyses and to justify the application of appropriate tests were intended. To the development of the methodology, the following linear model was adopted:

$$y_{ijk} = \mu + b_j + t_1x_i + t_2x_i^2 + tb_{ij} + v_1z_k + v_2z_k^2 + tv_{11}x_iz_k + tv_{12}x_iz_k^2 + tv_{21}x_i^2z_k + tv_{22}x_i^2z_k^2 + e_{ijk}$$
being: y_{ijk} : value observed at the i^{th} level of the primary treatment, at the k^{th} level of the secondary treatment at the j^{th} block; μ : a constant inherent to all observations; b_j : effect of the j^{th} block; x_i : quantitative value of the i^{th} level of the primary treatment; t_1 : the linear effect; t_2 : the quadratic effect; tb_{ij} : the experimental error at the plot level; z_k : the quantitative value of the k^{th} level of the secondary treatment; v_1 : the linear effect; v_2 : the quadratic effect; x_iz_k : the quantitative value of the interaction of the i^{th} level of the primary treatment versus the k^{th} level of secondary treatment; tv_{11} : the effect of the linear X linear interaction; tv_{12} : the effect of the linear X quadratic interaction; tv_{21} : the effect of the quadratic X linear interaction; tv_{22} : the effect of the quadratic X quadratic interaction e_{ijk} : experimental error associated with observation y_{ijk} , normally distributed. For greater ease in theoretical deductions, the model in the matrix form $y = X\theta + e$, being: y a observation vector; X the incidence matrix of the parameters (design matrix); θ an unknown parameter vector of the model; e a vector of random error corresponding to the observations. The methodology developed aimed to obtain the data analysis of variance from a split plot experiment with the primary and secondary treatments made up of quantitative factor (levels and doses), by considering the unfolding of the treatment effects under the form of response surface. The least squares method was utilized, under the previous conditions and the normal equation system; sums of squares and their mathematical expectations and variance analysis with the hypothesis tests were determined. The conclusions obtained were: the linear model proved suitable as regards the proposed objectives, allowing to test the basic null hypotheses upon the effects of the primary treatments, secondary treatments and interaction; to test the linear and quadratic effects of the primary treatment, the QMResidue(a) is

used as a denominator and for the linear and quadratic effects of the secondary treatment and interaction the QMResidue(b) was used as a denominator; it is possible to perform the analysis of split plot experiments, when the factors under study are quantitative, through the response surface methodology; the methodology used may be adapted to split plot experiments involving quantitative factors with other numbers of levels. For illustration of the methodology wheat production data were used from a split plot experiment, conducted with a randomized block design with two replications, the chief treatments consisting of three irrigation levels: 50, 100 and 150% applied on the basis of the percentage of evaporation accumulated in the class A tank and the secondary treatment made up of the addition of three doses of nitrogen fertilization: 60, 120 and 180 kg/ha.

Guidance Committee: Augusto Ramalho de Moraes - UFLA (Adviser), Joel Augusto Muniz - UFLA

1 INTRODUÇÃO

Os pesquisadores das mais diversas áreas de pesquisa, como por exemplo, Biologia, Botânica, Agronomia e outras, freqüentemente se deparam com o problema de relacionar a influência de variáveis quantitativas que afetam uma ou mais variável resposta. Na maioria das vezes, o relacionamento desejado entre resposta e fatores é aquele que determina a combinação dos níveis dos fatores, que dão uma resposta máxima ou mínima; ou ainda, dependendo do objetivo do pesquisador, o relacionamento entre várias respostas com os mesmos fatores e, neste caso, ele pode querer maximizar algumas respostas e minimizar outras.

Atualmente, muitos dos trabalhos científicos em diversas áreas do conhecimento têm dado ênfase ao uso da metodologia de superfície de resposta para estudar esse tipo de relacionamento. A metodologia de superfície de resposta é essencialmente um conjunto de técnicas estatísticas usada em pesquisas com a finalidade de determinar as melhores condições, e também dar maior conhecimento sobre a natureza de certos fenômenos. É composta por planejamento e análise de experimentos, procurando relacionar respostas com os níveis de fatores quantitativos que afetam as respostas. Este relacionamento entre respostas e níveis de fatores procura, entre outros, atingir um dos objetivos - estabelecer uma descrição de como uma resposta é afetada por um número de fatores em alguma região de interesse; estudar e explorar a relação entre várias respostas e extremos obrigatórios; localizar e explorar a vizinhança de resposta máxima ou mínima. Sua aplicação deu-se inicialmente na indústria química. No campo agrônômico, o uso se concentrou no estudo do rendimento de cultivares, como efeito de níveis de fertilizantes aplicados ao solo e; posteriormente, incluíram-se outros fatores como densidade de plantio, controle de doenças.

Outro fator importante que se deve levar em conta ao se planejar um experimento, é a escolha correta do tipo de delineamento que melhor se adapte às condições experimentais específicas do problema em estudo. Na experimentação, quando se têm dois ou mais fatores para serem estudados simultaneamente, uma das opções é a utilização do experimento em parcela subdividida. O experimento em parcela subdividida envolve uma estrutura de tratamentos, com dois ou mais fatores, apresentando dois tamanhos diferentes de unidades experimentais: as unidades experimentais maiores são chamadas de parcelas, e as unidades menores, de subparcelas. Nas parcelas, são casualizados os tratamentos primários e nas subparcelas, os tratamentos secundários.

Este tipo de experimento é largamente utilizado nas pesquisas agrícolas, industriais e biológicas, mas pode ser usado em outras áreas. Os experimentos em parcelas subdivididas são úteis em situações, tais como: quando os níveis de um ou mais fatores exigem maiores quantidades do material experimental; quando informações prévias asseguram que as diferenças entre os níveis de um dos fatores são maiores do que as do outro fator; quando se deseja maior precisão para comparações entre níveis de um dos fatores; quando existe um fator de maior importância e outro de importância secundária, sendo que este é incluído para aumentar a extensão dos resultados; nas situações práticas em que é difícil a instalação do experimento no esquema fatorial.

Em muitos experimentos com dois fatores conduzidos no esquema de parcelas subdivididas, os tratamentos são constituídos por fatores quantitativos, como lâminas de água e doses de nutrientes; nesses casos, a aplicação de superfície de resposta pode ser conveniente. Este é o tema do presente trabalho, que tem como objetivo apresentar um procedimento adequado para análise de experimentos em parcelas subdivididas, através da metodologia de superfície de resposta, quando os

fatores em estudo são quantitativos, procurando-se desenvolver a seqüência de operações para a realização das análises estatísticas e justificar a aplicação de testes apropriados.

2 REFERENCIAL TEÓRICO

Apresentar-se-á inicialmente, uma revisão de trabalhos referentes ao início e emprego da metodologia de superfície de resposta e, em seguida, outra relacionada aos experimentos em parcelas subdivididas, visto que são raras, dentro da literatura disponível, referências sobre experimentos em parcelas subdivididas analisados sob a forma de superfície de resposta.

2.1 Superfície de Resposta

O emprego das superfícies de respostas na análise de experimentos vem sendo cada vez mais utilizado pela comunidade científica. As primeiras idéias de metodologia de superfície de resposta (MSR) apareceram no século passado, através de trabalhos de pesquisas práticas.

Segundo Mead e Pike (1975), essas primeiras idéias sobre superfície de resposta apareceram em estudos que envolviam curvas de crescimento para animais e plantas, na análise de próbites, mas seu maior desenvolvimento ocorreu nas tentativas de relacionamento entre produção de uma determinada cultura e níveis de fertilizantes.

Nesse desenvolvimento primitivo, o planejamento de experimento para pesquisar especificamente curvas de superfície de resposta não foi discutido, mas o desenvolvimento de planejamentos fatoriais complexos foi claramente sugerido por um interesse em superfície de resposta e forneceu a base sobre a qual as últimas pesquisas em planejamento de experimentos para superfície de resposta estão assentadas.

A metodologia de superfície de resposta teve grande difusão e desenvolvimento a partir de Box e Wilson (1951), quando discutiram planejamentos e análise de experimentos com o propósito de determinar condições ótimas no conjunto de variáveis independentes, usando o menor número possível de observações. As performances de alguns planejamentos experimentais foram comparadas e introduziram pela primeira vez o conceito de planejamentos compostos, os quais foram inicialmente usados na indústria, em que o erro experimental é geralmente menor. Atualmente, são usados também na agricultura, pois permitem o estudo de diferentes doses de nutrientes, com o uso de um número relativamente pequeno de parcelas (Pereira, 1995). Também discutiram o uso, em uma primeira fase, do método de máxima inclinação ascendente na procura de uma região quase-estacionária em torno do ótimo e, como uma segunda fase, o estudo da natureza desta região pesquisada reduzindo, a equação ajustada para sua forma canônica.

A suposição dominante do trabalho é que a resposta pode ser aproximada, em uma região de interesse, por um polinômio nos níveis de vários fatores ou variáveis envolvidos. Nesse contexto, os autores estavam interessados, primeiramente, em problemas para estimar condições ótimas em investigações químicas; contudo, eles expressaram a esperança de que os métodos seriam de grande valor em outros campos nos quais a experimentação é seqüencial e o erro razoavelmente pequeno.

Este estudo e vários outros escritos por Box e seus associados, a partir de 1951, constituem a mais poderosa fonte de idéias na investigação de superfície de resposta.

Box e Hunter (1957) propuseram que a seleção do delineamento experimental deve ser feita com base na variância da resposta estimada

($\text{Var}\{\hat{y}(x)\}$), e também exploraram a distribuição da $\text{Var}\{\hat{y}(x)\}$ sobre o espaço das variáveis dependentes e introduziram o conceito de rotacionalidade, o qual torna todas as direções equivalentes, isto é, significa que a $\text{Var}\{\hat{y}(x)\}$ depende somente da distância de x ao centro do delineamento. Esses autores propuseram os seguintes requisitos para um delineamento de superfície de resposta: deve permitir o ajustamento de um polinômio que se considera adequado para representar a função verdadeira, tanto quanto possível, dentro da região de interesse; deve permitir a verificação da adequada representatividade do polinômio; não deve conter um excessivo número de pontos experimentais; deve permitir a disposição em blocos e deve possibilitar a extensão a um polinômio de grau mais elevado.

Box e Lucas (1959), no primeiro artigo importante na escola de Box para afastar-se do modelo polinomial e Box e Draper (1959, 1963), apresentaram as várias razões para se escolher diferentes planejamentos na investigação de uma superfície de resposta.

Heady e Pesek (1954) trabalharam com a aplicação da superfície de resposta em um experimento fatorial de adubação com os nutrientes nitrogênio (N) e fósforo (P) na cultura do milho. Foi estudado o comportamento de cada nutriente na presença das doses de 0, 160 e 320 libras/acre na presença do outro, com a organização de gráficos ilustrativos dos cortes realizados. Verificaram que, quando o N foi fixado na dose zero, houve um decréscimo no rendimento.

Para Jensen e Pesek (1959), a utilidade das funções de produção em agricultura se expressa em dois aspectos: a) a descrição matemática da relação fator-produto permite a informação necessária para ajustar o rendimento a níveis economicamente adequados e b) o uso dos modelos permite avançar no conhecimento dos mecanismos biológicos, particularmente transformador de fatores em produtos.

Gajri, Prihar e Arora (1963) traçaram isoquantas das equações obtidas com a aplicação de superfície de resposta em um experimento com diferentes doses de nitrogênio e lâminas de irrigação na cultura do trigo. Essas isoquantas mostraram que dentro de um determinado limite, a aplicação de N e o suprimento de água podem substituir um ao outro no aumento da produtividade do trigo.

Campos (1967), estudando a aplicação da superfície de resposta a dados de produção de grãos a ensaios fatoriais $3 \times 3 \times 3$, de adubação N, P, K na cultura do milho, determinou as estimativas dos parâmetros da equação e seus respectivos intervalos de confiança, os níveis ótimos de N, P e K, as estimativas e os intervalos de confiança das produções e estudou a natureza do ponto crítico para verificar se era de máximo, mínimo ou ponto de sela. Fêz, ainda, um estudo de cortes da superfície, fixando dois nutrientes nas suas doses padrão, obtendo, em cada um dos cortes, as fórmulas para cálculo da dose ótima, das variâncias e intervalos de confiança, numa forma aproximada dessas doses. Na aplicação aos dados de produção, verificou que as estimativas dos parâmetros do modelo de regressão polinomial, adotados sob a forma de superfície de resposta, apresentaram intervalos de confiança muito amplos, gerando uma certa imprecisão nas estimativas dos rendimentos, o mesmo ocorrendo para as produções estimadas; isso pode ocorrer até obtenção de produções estimadas negativas.

Constatou, ainda, que a aplicação da regressão polinomial aos ensaios fatoriais $3 \times 3 \times 3$ de adubação é recomendada apenas a grupos de experimentos e que tenham boa precisão. Resultados semelhantes foram obtidos por Costa (1977), estudando a aplicação dos modelos polinomial, raiz quadrada e raiz $x^{3/2}$ a dados de produção de arroz, e por Monteiro (1978), que estudando o ajuste dos modelos polinomial e de regressão assintótica (Lei de Mitscherlich) a

dados de produção de amendoin, provenientes de ensaios fatorial $3 \times 3 \times 3$ de adubação N, P e K, verificou que ambos os modelos apresentaram um bom ajuste e que os intervalos de confiança para as produções estimadas, através do modelo polinomial, foram mais estreitos do que quando se usou a regressão assintótica.

O uso da regressão assintótica, conforme sugerido por Vieira (1970), somente deverá ser feito se não existirem interações significativas entre os nutrientes ou se não houver queda de produção devido a doses altas.

Eckert, Chaudhry e Quereshi (1978), empregando a superfície de resposta para avaliar a interação entre doses de adubação nitrogenada e níveis de irrigação na produção de trigo no Paquistão, obtiveram um rendimento máximo de grãos (4.405 kg/ha) com a adição de 150,6 kg de N/ha e usando uma lâmina de irrigação de 557 mm.

Morais (1982), com o objetivo de verificar a relação entre a produção e níveis de adubação, através do uso da metodologia de superfície de resposta, estudou um modelo de regressão polinomial quadrático, tendo a preocupação de considerar algumas variáveis auxiliares adicionais ao modelo, com vistas à obtenção de fórmulas que permitam avaliar o comportamento da produção ante a inclusão destas últimas. Foi aplicada a metodologia em dados provenientes de um experimento de adubação N-P-K em cafeeiro, em que se considerou a produção como variável dependente, e altura da planta, diâmetro da copa e número de internódios, como variáveis auxiliares adicionais. Entre outras conclusões, verificou-se que as variáveis auxiliares que mais contribuíram para a redução da variância residual foram a altura da planta, seguida de diâmetro da copa.

Sanches (1986), estudando superfície de resposta em experimentos de adubação, verificou o problema dos pontos de sela e averiguou-se a possibilidade de se substituir o ponto de máximo não encontrado pelo próprio

ponto de sela ou pelo ponto de máximo fronteira ou pelo ponto de máximo experimental. Fez também uma comparação entre alguns delineamentos de tratamentos. Por simulação de dados e utilizando a porcentagem de reprodução de máximo, chegou às seguintes conclusões: o ponto de máximo fronteira e o ponto de máximo experimental podem ser utilizados como bons substitutos do ponto de máximo não encontrado; o ponto de sela não é um bom substituto para o ponto de máximo não encontrado e o delineamento fatorial 3^3 com níveis igualmente espaçados, foi o que apresentou maior eficiência na obtenção de pontos de máximo.

Estudando o efeito de seis lâminas de irrigação e seis doses de adubação nitrogenada e da interação desses dois fatores, Frizzone (1986) observou que a aplicação de água e nitrogênio aumentou o rendimento de grãos de feijão, seguindo uma relação quadrática. O rendimento máximo estimado de 2.261 kg/ha foi obtido com a aplicação de 570,4 mm de água e 117,4 kg de N/ha. Com a aplicação da superfície de resposta para uma dada relação entre os preços de água, de nitrogênio e do produto, foi encontrada uma receita líquida máxima, com aplicação de uma lâmina de água de 543 mm e uma dose de 90 kg de N/ha.

Teodoro (1991), usando a metodologia de superfície de resposta no estudo do rendimento de matéria seca total da aveia, em função de diferentes lâminas de água e doses de nitrogênio, observou que o rendimento máximo da matéria seca total (6,36 t/ha) foi obtido quando usou-se uma lâmina de irrigação correspondente a 100% da evaporação do tanque "Classe A" e a dose de 160 kg de N/ha.

Pereira (1995) fez uma avaliação de alguns delineamentos compostos pequenos com o número de observações igual ou levemente inferior ao número de parâmetros do modelo a ser estimado, com a finalidade de estudar as

possibilidades de uso desses delineamentos no campo experimental agrônômico. Entre outras conclusões, verificou que para o número de fatores considerados ($k = 4, 5, 6$ e 7), os delineamentos compostos pequenos possuem um tamanho adequado para experimentos no campo agrônômico.

2.1.1 Metodologia empregada para se ajustar uma superfície de resposta

O desenvolvimento da metodologia do modelo de superfície polinomial de resposta, linear nos parâmetros, está baseado principalmente em definições, fórmulas e conceitos extraídos de Box e Draper (1987), Graybill (1961), Myers (1971), Campos (1967), Hoffmann e Vieira (1987), Jorge (1980) e Draper e Smith (1981). A revisão das seções 2.1.1.1, 2.1.1.2 e 2.1.1.3 foram feitas com bases nesses autores, como a seguir:

2.1.1.1 Um modelo linear

A função polinomial quadrática em duas variáveis X_1, X_2 será considerada como uma representação da função de produção verdadeira η , dentro da região experimental de interesse. Considerando-se, então, as produções observadas y_1, y_2, \dots, y_n nos n tratamentos

$$\tilde{X}_i = (X_{1i}, X_{2i})', \quad i = 1, 2, \dots, n$$

escolhidos pelo pesquisador, o modelo linear de regressão para y_i é dado por:

$$y_i = \beta_0 + \beta_1 X_{1i} + \beta_2 X_{2i} + \beta_{11} X_{1i}^2 + \beta_{22} X_{2i}^2 + \beta_{12} X_{1i} X_{2i} + e_i$$

sendo e_i o erro aleatório correspondente à observação y_i , supondo que e_i , com $i = 1, 2, \dots, n$ são não correlacionados e de mesma variância σ^2 .

Uma outra forma de apresentar o modelo que descreve a relação funcional das respostas observadas e as variáveis independentes no experimento, é na forma matricial:

$$\underline{y} = X \underline{\beta} + \underline{e}$$

sendo:

\underline{y} o vetor das observações;

X a matriz de incidência dos parâmetros, obtida de acordo com o delineamento experimental e o modelo usado;

$\underline{\beta}$ o vetor dos parâmetros da equação;

e o vetor dos erros aleatórios correspondentes às observações.

Então, os vetores \underline{y} , $\underline{\beta}$, \underline{e} e a matriz X são dados por:

$$\underline{y} = (y_1, y_2, \dots, y_n)'$$

$$\underline{\beta} = (\beta_0, \beta_1, \beta_2, \beta_{11}, \beta_{22}, \beta_{12})'$$

$$\underline{e} = (e_1, e_2, \dots, e_n)'$$

$$X = \begin{bmatrix} 1 & X_{11} & X_{21} & X_{11}^2 & X_{21}^2 & X_{11}X_{21} \\ 1 & X_{12} & X_{22} & X_{12}^2 & X_{22}^2 & X_{12}X_{22} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 1 & X_{1n} & X_{2n} & X_{1n}^2 & X_{2n}^2 & X_{1n}X_{2n} \end{bmatrix}$$

A submatriz de X formada pelas colunas dois e três é a matriz D de dimensões $n \times 2$, em que a i -ésima linha representa o tratamento $X_{\sim i}' = (X_{1i}, X_{2i})$, $i = 1, 2, \dots, n$. A matriz D é denominada a matriz do delineamento. O delineamento é uma parte importante na investigação da superfície de resposta, e sua escolha correta é crucial para a qualidade e para a confiança da informação obtida de um experimento.

2.1.1.2 Estimação dos parâmetros

Considerando-se o modelo de regressão linear, escrito como:

$$\underline{y} = X \underline{\beta} + \underline{e}$$

e o vetor de médias e a matriz de variâncias e covariâncias dos erros e dados por:

$$E(\underline{e}) = \underline{0} \text{ e } \text{Var}(\underline{e}) = I_{(n)}\sigma^2$$

respectivamente, em que $\underline{0}$ é um vetor nulo, $I_{(n)}$ é a matriz identidade de dimensões $(n \times n)$, σ^2 é um número real positivo e n é o número de observações.

Nessas condições, utilizando-se o método dos mínimos quadrados, obtém-se o sistema de equações normais:

$$X'X \hat{\underline{\beta}} = X' \underline{Y}$$

Dado que a matriz X possui posto coluna completo, então $X'X$ é positiva definida; logo, a única solução do sistema é:

$$\hat{\underline{\beta}} = (X'X)^{-1} X' \underline{Y}$$

em que $(X'X)^{-1}$ é a matriz inversa de $X'X$.

Dentre as propriedades do estimador $\hat{\beta}$, tem-se que:

$$E(\hat{\beta}) = \beta \quad V(\hat{\beta}) = (X'X)^{-1}\sigma^2$$

2.1.1.3 Análise da superfície de resposta ajustada

Considerando-se que um delineamento apropriadamente escolhido foi conduzido em uma região experimental de interesse e que as estimativas de mínimos quadrados tenham sido obtidas. Obtida a equação de regressão, pode-se estimar os valores esperados, a determinação de uma combinação econômica dos níveis dos fatores e dos pontos críticos da função. O ponto crítico pode ser: (a) ponto de máximo; (b) ponto de mínimo; (c) ponto de sela, que é ao mesmo tempo ponto de máximo e ponto de mínimo, e representando uma situação de difícil solução e aplicação prática e (d) uma indeterminação.

Para obter os pontos críticos de uma função $Z = f(x_1, x_2)$, segundo Swokowski (1994), começa-se por resolver o sistema de equações formado pelas derivadas parciais:

$$\begin{cases} \frac{\partial f(x_1, x_2)}{\partial x_1} = 0 \\ \frac{\partial f(x_1, x_2)}{\partial x_2} = 0 \end{cases}$$

Necessita-se, a seguir, descobrir se a solução obtida deste sistema é um ponto de máximo, de mínimo, ponto de sela ou uma indeterminação. Para isto, é preciso estudar a diferencial segunda $\partial^2 Z$, cujas propriedades vão depender da matriz hessiana.

$$H = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} \end{bmatrix}$$

Para se determinar a natureza do ponto crítico, pode-se analisar a matriz H por meio de seus autovalores. Quando todos são positivos, a superfície tem mínimo; quando todos são negativos, tem-se um máximo; quando uns são positivos e outros negativos, então tem-se um ponto de sela e quando contêm zeros tem-se uma indeterminação (Myers, 1971; Pimentel Gomes e Conagin, 1987).

2.2 Experimentos em Parcelas Subdivididas

① Na experimentação agropecuária, quando se têm dois ou mais fatores para serem estudados simultaneamente, uma das opções é o uso do experimento em parcela subdividida.

③ O experimento em parcela subdividida envolve uma estrutura de tratamentos, com dois ou mais fatores, com uma estrutura de delineamento em blocos incompletos, apresentando, pelo menos, dois tamanhos diferentes de unidades experimentais: as unidades experimentais maiores, chamadas de parcelas principais ou parcelas e as unidades experimentais menores, chamadas de subparcelas (Milliken e Johnson, 1984); sendo que, nas parcelas são casualizados os tratamentos primários, e nas subparcelas, os tratamentos secundários.

④ Além de outros esquemas experimentais de instalação de experimentos, os experimentos em parcelas subdivididas têm larga utilização, nas

mais diversas áreas de pesquisa, porque permitem estudar a um só tempo, dois ou mais tipos diferentes de tratamentos. Sua utilização é bem ampla, apesar de uma decomposição do número de graus de liberdade do resíduo, quando comparado ao esquema fatorial, devido à existência de dois resíduos.

② Segundo Leonard e Clark (1939), os ensaios em parcelas subdivididas tiveram seu início com Yates, por volta de 1933, seguido de Le Clerg em 1937 e Goulden em 1939, e vêm tendo uma grande utilidade.

③ Os experimentos em parcelas subdivididas têm sido utilizados principalmente na análise de dados originados de pesquisas agrícolas, industriais e biológicas. O procedimento para análise desses tipos de experimentos está apresentado em Kempthorne (1952), Anderson e Bancroft (1952), Steel e Torrie (1980), Cochran e Cox (1976), dentre outros, como sendo uma variação do experimento fatorial com $T \times T'$ tratamentos, em que os tratamentos das parcelas são dispostos em qualquer tipo de delineamento, sendo os mais usados os “em blocos casualizados”, e os tratamentos T' das subparcelas, dispostos “ao acaso” dentro de cada parcela.

Leal (1979) enfocou o uso dos experimentos em parcelas subdivididas, na análise dos ensaios com medidas repetidas sobre unidades experimentais, como uma alternativa para a análise multivariada, quando se constatou a uniformidade da matriz de variâncias e covariâncias dos erros. Sob esse prisma, concorda com Steel e Torrie (1980), Calzada Benza (1970) e Little e Hills (1972), os quais argumentaram que os experimentos, nos quais observações sucessivas são feitas sobre a mesma unidade experimental durante um certo intervalo de tempo, em muitos aspectos se assemelham a experimentos em parcelas subdivididas, nos quais cada unidade experimental é subdividida em subunidades distintas.

Segundo Steel e Torrie (1980), existem algumas diferenças fundamentais entre as análises desses dois tipos de experimentos. Por exemplo, na análise de ensaios com medidas repetidas, quando o delineamento é o de blocos casualizados, a soma de quadrados da interação blocos X medidas no tempo deve ser sempre separada do erro, dada a sua importância nas conclusões sobre o ensaio.

(C) Federer (1955) e Cochran e Cox (1976) apresentaram várias considerações práticas sobre o experimento em parcelas subdivididas, e mostraram ser vantajoso o seu uso se os efeitos dos tratamentos secundários (T') e da interação ($T \times T'$) são de maior interesse que os efeitos dos tratamentos primários (T) e quando os efeitos dos tratamentos primários (T) são medidos com grandes quantidades de material (exigem uma área grande). Esses autores consideraram como desvantagens as diferentes comparações entre tratamentos que possuem variâncias distintas e que, às vezes, o erro das parcelas é medido com menor precisão do que o erro de subparcelas.

Na análise estatística dos experimentos em parcelas subdivididas, considera-se, também, o fato de que as observações efetuadas em diferentes subparcelas pertencentes a um mesmo tratamento principal, são esperadas que sejam correlacionadas, de acordo com Chakrabarti (1962).

E conforme Leal (1979), supõe-se que entre os erros experimentais em nível de subparcelas, para os erros do tipo e_{ijk} e $e_{ijk'}$ ($k \neq k'$), para quaisquer duas subparcelas distintas (na mesma parcela), exista uma correlação constante ρ , e que os erros entre subparcelas em diferentes parcelas são não correlacionados.

Assim, Cochran e Cox (1957), Chakrabarti (1962), Leal (1979) e Diniz (1980), dentre outros, mostraram que, na suposição de existir uma

correlação, ρ , constante entre erros experimentais do tipo e_{ijk} e $e_{ijk'}$, para quaisquer subparcelas de uma mesma parcela, tem-se que:

$$E(e_{ijk}) = 0, V(e_{ijk}) = V(y_{ijk}) = \sigma^2$$

e

$$\text{Cov}(e_{ijk}, e_{i'j'k'}) = \begin{cases} \rho\sigma^2, & \text{se } i = i', j = j', k \neq k' \\ 0, & \text{em outros casos} \end{cases}$$

Desse modo exemplificam que, para duas subparcelas por parcela, a variância do erro de uma parcela total é:

$$E(e_{ij1}, e_{ij2}) = \sigma^2 + \sigma^2 + 2\rho\sigma^2 = 2(1 + \rho) \sigma^2$$

e a variância para o tratamento (primário) é:

$$[1 + (\beta - 1) \rho] \sigma^2 .$$

em que β é o número de tratamentos secundários.

No que se refere à eficiência dos testes F para tratamentos primários e secundários, Taylor (1950), Kempthorne (1952), Federer (1955), Cochran e Cox (1976) e Pimentel Gomes (1990), dentre outros, são unânimes em afirmar que, em geral, há uma maior precisão no teste F para tratamentos secundários, visto que o QMRes(b) é estimado com um maior número de graus de liberdade do que o QMRes(a)

Para Cochran e Cox (1976), a maior precisão obtida no teste dos tratamentos secundários pode ser justificada pelo coeficiente, ρ , de correlação que, na prática, é quase sempre positivo. Esse fato pode ser mais bem interpretado quando se toma a estimativa não tendenciosa para ρ , citada em Leal (1979)

$$\hat{\rho} = \frac{\text{QMRes(a)}}{\text{QMRes(a)} + \text{QMRes(b)}}$$

Kempthorne (1952) e Federer (1955) consideraram que para um experimento com I tratamentos primários distribuídos em J blocos e K tratamentos secundários, estruturado no esquema de parcelas subdivididas, a eficiência estimada para tratamentos primários, comparativamente aos ensaios em blocos casualizados, é dada por:

$$E_1 = \frac{(I - 1)QMRes(a) + I(K - 1)QMRes(b)}{(IK - 1)QMRes(a)}.$$

enquanto que para tratamentos secundários e a interação, é dada por:

$$E_2 = \frac{(I - 1)QMRes(a) + I(K - 1)QMRes(b)}{(IK - 1)QMRes(b)}.$$

Um estudo dos componentes de variância nos experimentos em parcelas subdivididas foi realizado por Condé (1974), considerando o delineamento em blocos casualizados e o modelo linear:

$$y_{ijk} = \mu + \alpha_i + \beta_j + (\alpha\beta)_{ij} + \gamma_k + (\alpha\gamma)_{ik} + e_{ijk} \quad (1)$$

sendo:

y_{ijk} : valor observado no i-ésimo nível do tratamento α , no k-ésimo nível do tratamento γ , no j-ésimo bloco;

μ : efeito da média geral;

α_i : efeito do i-ésimo nível do tratamento α com $i = 1, 2, 3, \dots, I$;

β_j : efeito de blocos com $j = 1, 2, 3, \dots, J$;

$(\alpha\beta)_{ij}$: erro experimental em nível de parcelas;

γ_k : efeito do k-ésimo nível do tratamento γ com $k = 1, 2, 3, \dots, K$;

$(\alpha\gamma)_{ik}$: efeito da interação de $\alpha\gamma$;

e_{ijk} : erro experimental em nível de subparcelas.

Condé (1974) considerou os erros experimentais de parcelas e subparcelas como de efeito aleatório, obtendo o esquema de análise de variância da Tabela 1.

TABELA 1. Esquema de análise de variância segundo Condé (1974).

| FONTE DE VARIAÇÃO | GL | E[QM] |
|------------------------------|-----------------|--|
| BLOCOS | J - 1 | $\sigma^2 + K\sigma_a^2 + IK\phi_\beta$ |
| TRATAMENTO (α) | I - 1 | $\sigma^2 + K\sigma_a^2 + IK\phi_\alpha$ |
| RESÍDUO (a) | (I - 1)(J - 1) | $\sigma^2 + K\sigma_a^2$ |
| PARCELAS | IJ - 1 | |
| TRATAMENTO (γ) | K - 1 | $\sigma^2 + IJ\phi_\gamma$ |
| INTERAÇÃO ($\alpha\gamma$) | (I - 1)(K - 1) | $\sigma^2 + J\phi_{\alpha\gamma}$ |
| RESÍDUO (b) | I(J - 1)(K - 1) | σ^2 |
| TOTAL | IJK - 1 | |

sendo

$$\phi_\beta = \frac{1}{J-1} \sum_j \beta_j^2;$$

$$\phi_\alpha = \frac{1}{I-1} \sum_i \alpha_i^2;$$

$$\phi_\gamma = \frac{1}{K-1} \sum_k \gamma_k^2;$$

$$\phi_{\alpha\gamma} = \frac{1}{(I-1)(K-1)} \sum_{ik} \alpha\gamma_{ik}^2.$$

Resultado semelhante foi apresentado por Barbin (1993), diferindo apenas nos componentes de blocos, o qual foi considerado como de efeito aleatório.

Nos experimentos em parcelas subdivididas, tem-se que as hipóteses preliminares de interesse, de acordo com Kempthorne (1952), Condé (1974) e Moraes (1992), entre outros, são:

$$H_0^1: \alpha_i = 0, \forall i = 1, 2, \dots, I \text{ tratamentos primários};$$

$$H_0^2: \gamma_k = 0, \forall k = 1, 2, \dots, K \text{ tratamentos secundários e}$$

$$H_0^3: \alpha\gamma_{ik} = 0, \forall i = 1, 2, \dots, I, k = 1, 2, \dots, K.$$

que correspondem às hipóteses de ausência de efeito diferencial de tratamentos primários, tratamentos secundários e de ausência de interação entre tratamentos primários e secundários, respectivamente. Os erros apropriados para testar essas hipóteses são evidentes quando observam-se as esperanças matemáticas de quadrados médios, como na Tabela 1. Para a estruturação da estatística F, sabe-se que as esperanças matemáticas dos quadrados médios do numerador e denominador devem diferir somente na função positiva do efeito fixo que se deseja testar (Searle, 1971). Desse modo, os critérios para os testes com base na Tabela 1, são os apresentados na Tabela 2.

TABELA 2. Graus de liberdade e critérios para obtenção da estatística F para cada hipótese.

| Hipótese | GL Numerador | GL Denominador | F |
|----------|------------------|-------------------|------------------------|
| H_0^1 | $I - 1$ | $(I - 1)(J - 1)$ | $QM T / QMRes(a)$ |
| H_0^2 | $K - 1$ | $I(J - 1)(K - 1)$ | $QM T' / QMRes(b)$ |
| H_0^3 | $(I - 1)(K - 1)$ | $I(J - 1)(K - 1)$ | $QM T_x T' / QMRes(b)$ |

7

Para calcular o valor do teste F para o tratamento T (primário), usa-se o QM Res(a) como denominador, e para o tratamento T' (secundário) e a interação T X T', usa-se o QMRes(b) como denominador. Em algumas situações nas quais os níveis do fator A estão dispostos segundo um delineamento em blocos casualizados, Federer (1955) considerou que o resíduo(a) (composto pela interação blocos X fator A) é o erro apropriado para comparação dos efeitos do fator A, enquanto que o resíduo(b) (composto pelas interações blocos X fator B mais blocos X fator A X fator B), é o erro apropriado para testar os efeitos da interação A X B e para o fator B.

8

Se as hipóteses de nulidade H_0^1 e/ou H_0^2 forem rejeitadas, conclui-se pela significância de pelo menos um, dentre os vários contrastes entre os tratamentos primários e/ou secundários, respectivamente. Neste caso, pode-se ter interesse em selecionar um subconjunto de tratamentos mais importantes; por isso, recomenda-se a utilização dos métodos de comparações múltiplas, como os testes de Tukey, Duncan, Scheffé, Scott & Knott, dentre outros.

Pimentel Gomes (1990), Leal (1979) e Moraes (1992), dentre outros, afirmaram que quando a interação T X T' for significativa, o esquema da análise de variância deverá ser modificado, pois esse fato pode ser um indício de que os tratamentos secundários comportam-se de modo diferente, em relação aos tratamentos primários. Assim, é conveniente, então, desdobrar a interação, estudando-se: (i) níveis do tratamento secundário (T') dentro de cada nível do tratamento primário (T); neste caso, usa-se o resíduo(b) como denominador do teste F; (ii) níveis do tratamento primário (T) dentro de cada nível do tratamento secundário (T') e, nesse caso, usa-se como denominador para o teste F um resíduo composto, dado por:

$$\text{QM RES COMP} = \frac{[\text{QMRES}(a) + (K - 1)\text{QMRES}(b)]}{K} \quad (2)$$

sendo: K o número de subparcelas, cujas hipóteses a serem testadas são:

$$(i): H_0^4 = t_{i(k)} = 0, \forall i = 1, 2, \dots, I$$

$$(ii): H_0^5 = t_{(i)k} = 0, \forall k = 1, 2, \dots, K$$

Este QM RES COMP tem a ele associado η graus de liberdade, que são obtidos através da expressão dada em Satterthwaite (1946):

$$\eta = \frac{[\text{QMRES}(a) + (K - 1)\text{QMRES}(b)]^2}{\frac{[\text{QMRES}(a)]^2}{n_a} + (K - 1)^2 \frac{[\text{QMRES}(b)]^2}{n_b}} \quad (3)$$

em que:

n_a : número de graus de liberdade do resíduo(a)

n_b : número de graus de liberdade do resíduo(b)

Com relação às variâncias de contrastes entre duas médias de tratamentos em experimentos com parcelas subdivididas, Federer (1955), Steel e Torrie (1980), Little e Hills (1978) e Pimentel Gomes (1990), apresentaram quatro casos de comparações múltiplas de médias de tratamentos que podem ser resumidos da seguinte forma:

| Contrastes entre duas médias | Estimador da variância |
|--------------------------------|---|
| $\hat{m}_i - \hat{m}_r$ | $\frac{2}{JK} \text{QMRes}(a)$ |
| $\hat{m}_k - \hat{m}_{k'}$ | $\frac{2}{IJ} \text{QMRes}(b)$ |
| $\hat{m}_{ik} - \hat{m}_{ik'}$ | $\frac{2}{J} \text{QMRes}(b)$ |
| $\hat{m}_{ik} - \hat{m}_{rk}$ | $\frac{2}{JK} [\text{QMRes}(a) + (K - 1)\text{QMRes}(b)]$ |

em que:

I: número de tratamentos primários;

J: número de repetições;

K: número de tratamentos secundários;

i e k referem-se aos tratamentos primários e secundários, respectivamente.

Anderson e Brancroft (1952), Cochran e Cox (1957) e Steel e Torrie (1980), incluíram ,ainda, um outro contraste para comparar duas médias de tratamentos primários em diferentes níveis do tratamento secundário, ou seja, $m_{ik} - m_{r'k}$.

Segundo os autores, no contraste entre duas médias de tratamentos, a variável observada $\hat{m}_{ik} - \hat{m}_{r'k}$ tem distribuição aproximada de “t”, com η graus de liberdade, o qual pode ser obtido através da fórmula dada por Satterthwate (1946), cuja expressão já foi definida anteriormente em (3).

2.3 Notação R(.)

O estudo de modelos mais complexos do que os de classificação simples, que envolvem apenas a média, um fator e o erro experimental, de acordo com Searle (1971), permite comparar a adequação desses modelos para o mesmo conjunto de dados. Dado que na identidade $SQ_{\text{Erro}} = SQ_{\text{Total}} - SQR$, tem-se que SQR é a redução na soma de quadrados total devido ao ajuste de algum modelo em particular; considerou, também, que SQR é uma medida de variação em y explicada por esse modelo. Portanto, a comparação de diferentes modelos que se ajustam a um determinado conjunto de dados pode ser feita comparando-se os diferentes valores das SQR que resultam do ajuste destes modelos.

Para facilidade de discussão e comparações, Searle (1971) considerou SQR como uma redução na soma de quadrados total, que é representada por $R(\cdot)$, com os conteúdos dos parêntesis indicando o modelo ajustado. A notação $R(\cdot)$ (Redução das somas de quadrados) é muito usada, tanto em estruturas de regressão como em delineamentos experimentais, balanceados ou não balanceados. Toda redução $R(\cdot)$ é, por definição, a SQ de algum modelo. Assim, ao se ajustar o modelo $y_{ij} = \mu + \alpha_i + e_{ij}$, a redução na soma de quadrados total, devido aos parâmetros $(\mu \text{ e } \alpha_i)$, é $R(\mu, \alpha)$; indicando, no modelo, que houve um ajuste, considerando os parâmetros μ e α . De modo análogo, $R(\mu, \alpha, \beta)$ é a redução na soma de quadrados total para ajustar os parâmetros do modelo $y_{ij} = \mu + \alpha_i + \beta_j + e_{ijk}$. Tais somas de quadrados são chamadas somas de quadrados tipo I ou seqüenciais. Searle (1987) discute que a seqüência dos fatores do modelo determina a seqüência das somas de quadrados tipo I, correspondendo, precisamente, a seqüência da entrada dos fatores, devendo fatores de efeitos principais preceder as interações. Fatores que tenham outros hierárquicos a eles, devem preceder os fatores hierárquicos. Por exemplo, quando os fatores são linhas, colunas e interação e são identificados na ordem A, B e A*B, as somas de quadrados do tipo I são: $R(\alpha/\mu)$, $R(\beta/\mu, \alpha)$ e $R(\alpha*\beta/\mu, \alpha, \beta)$, respeitando a ordem, como já foi discutido.

A extensão para modelos mais complexos é bastante clara, e todas as vezes a letra R é mencionada para “redução” na soma de quadrados.

Desse modo, de acordo com Mischan e Pinho (1996), um modelo para o experimento em parcelas subdivididas é $y_{ijk} = \mu + \alpha_i + \beta_j + (\alpha\beta)_{ij} + \gamma_k + (\alpha\gamma)_{ik} + e_{ijk}$, sendo que a soma de quadrados de parâmetros para esse modelo pode

ser representada por $R(\mu, \alpha, \beta, \alpha\beta, \gamma, \alpha\gamma)$ e seu valor é determinado (matricialmente) por $\theta^0 X'y$, ou seja, $R(\mu, \alpha, \beta, \alpha\beta, \gamma, \alpha\gamma) = \theta^0 X'y$.

Consideraram, ainda, que para a realização da análise de variância, deve-se obter os termos $R(\mu, \alpha, \beta, \alpha\beta, \gamma, \alpha\gamma)$, $R(\mu, \alpha, \beta, \alpha\beta, \gamma)$, $R(\mu, \alpha, \beta, \alpha\beta)$, $R(\mu, \alpha, \beta)$, $R(\mu, \alpha)$ e $R(\mu)$, que são as somas de quadrados de parâmetros devido ao ajuste de um modelo seqüencial (linear). Desse modo, o esquema de análise de variância obtido a partir das reduções, usando-se a notação $R(\cdot)$, está apresentado na Tabela 3.

TABELA 3. Esquema de análise de variância com as fontes de variação (FV), graus de liberdade (GL) e somas de quadrados (SQ) obtidos usando a notação $R(\cdot)$.

| FV | GL | SQ |
|-------------|-----------------|---|
| BLOCOS | J - 1 | $R(\beta/\mu, \alpha) = R(\mu, \alpha, \beta) - R(\mu, \alpha)$ |
| TRAT. T | | $R(\alpha/\mu) = R(\mu, \alpha) - R(\mu)$ |
| RESÍDUO (a) | (I - 1)(J - 1) | $R(\alpha\beta/\mu, \alpha, \beta) = R(\mu, \alpha, \beta, \alpha\beta) - R(\mu, \alpha, \beta)$ |
| (PARCELAS) | (IJ - 1) | (SOMA) |
| TRAT. T' | K - 1 | $R(\gamma/\mu, \alpha, \beta, \alpha\beta) = R(\mu, \alpha, \beta, \alpha\beta, \gamma) - R(\mu, \alpha, \beta, \alpha\beta)$ |
| T x T' | (I - 1)(K - 1) | $R(\alpha\gamma/\mu, \alpha, \beta, \alpha\beta, \gamma) = R(\mu, \alpha, \beta, \alpha\beta, \gamma, \alpha\gamma) - R(\mu, \alpha, \beta, \alpha\beta, \gamma)$ |
| RESÍDUO (b) | I(J - 1)(K - 1) | (SUBTRAÇÃO) |
| TOTAL | IJK - 1 | $y'y - R(\mu)$ |

Para o modelo de classificação simples $y_{ij} = \mu + \alpha_i + e_{ijk}$, a redução na soma de quadrados total devido aos parâmetros μ e α é $R(\mu, \alpha) =$

$$SQR = \frac{\sum_i (y_i^2)}{n_i} \text{ e, portanto } SQR_m = SQR - SQ_{\text{Correção}} = R(\mu, \alpha) - R(\mu), \text{ em que}$$

SQR_m é a diferença entre a redução na SQ_{Total}, devido ao ajuste de dois modelos diferentes: um contendo μ e o fator α , e o outro contendo apenas μ . Uma interpretação dessa diferença, é que $R(\mu, \alpha) - R(\mu)$ é a redução, devido ao ajuste de α já tendo ajustado μ , ou a ajuste de α após μ . Por esta razão, usa-se o símbolo $R(\alpha/\mu)$ para essa diferença, ou seja, $R(\alpha/\mu) = R(\mu, \alpha) - R(\mu)$, do mesmo modo que $R(\beta/\mu, \alpha) = R(\mu, \alpha, \beta) - R(\mu, \alpha)$ representa a redução na SQ devido ao ajuste de β , após μ e α . Assim, todos os termos $R(.)$ são, por definição, as somas de quadrados de reduções de algum modelo.

2.4 Regressão em Experimentos com Parcelas Subdivididas

São poucos os trabalhos que relatam o uso da superfície de resposta em ensaios em parcelas subdivididas, mesmo que na prática não seja difícil encontrar experimentos nos quais ao menos um dos tratamentos estudados seja constituído por níveis quantitativos.

Mischan e Pinho (1996) descrevem que quando os níveis do fator α (tratamento primário) for quantitativo, o modelo linear (1) pode ser reescrito na forma:

$$y_{ijk} = \mu + t_1 x_i + t_2 x_i^2 + \dots + t_{I-1} x_i^{I-1} + \beta_j + (\alpha\beta)_{ij} + \gamma_k + (\alpha\gamma)_{ik} + e_{ijk} \quad (4)$$

sendo que: x_i representa o valor quantitativo do fator α : t_1 é o efeito linear: t_2 , o efeito quadrático, e assim por diante, até t_{I-1} que é o efeito do $(I - 1)$ -ésimo grau do fator α . É possível, então, determinar os componentes de regressão linear,

quadrático, cúbico, até o (I-1)-ésimo grau. Nesse caso, o esquema da análise de variância é o apresentado na Tabela 4.

TABELA 4. Esquema de análise de variância de experimentos em parcelas subdivididas, considerando-se regressão no fator α .

| FONTE DE VARIAÇÃO | GL | SOMA DE QUADRADOS |
|--------------------|-----------------|--|
| BLOCOS | J - 1 | R(μ , β) - R(μ) |
| REGRESSÃO | | |
| Linear | 1 | R(μ , β , t_1) - R(μ , β) |
| Quadrática | 1 | R(μ , β , t_1 , t_2) - R(μ , β , t_1) |
| Cúbica | 1 | R(μ , β , t_1 , t_2 , t_3) - R(μ , β , t_1 , t_2) |
| ... | ... | ... |
| (I - 1)-ésimo grau | 1 | R(μ , β , t_1 , t_2 , t_3 , ..., t_{I-1}) - R(μ , β , t_1 , t_2 , t_3 , ..., t_{I-2}) |
| RESÍDUO (a) | (I - 1)(J - 1) | R(μ , α , β , $\alpha\beta$) - R(μ , α , β) |
| TRATAMENTO B | K - 1 | R(μ , α , β , $\alpha\beta$, γ) - R(μ , α , β , $\alpha\beta$) |
| INTERAÇÃO AxB | (I - 1)(K - 1) | R(μ , α , β , $\alpha\beta$, γ , $\alpha\gamma$) - R(μ , α , β , $\alpha\beta$, γ) |
| RESÍDUO (b) | I(J - 1)(K - 1) | Sy^2 - R(μ , α , β , $\alpha\beta$, γ , $\alpha\gamma$) |
| TOTAL | IJK - 1 | Sy^2 - R(μ) |

$$\text{em que } Sy^2 = \sum_{i=1}^I \sum_{j=1}^J \sum_{k=1}^K y_{ijk}^2$$

Caso sejam os níveis do fator γ (tratamento secundário) quantitativos, pode-se reescrever o modelo (1) na forma:

$$y_{ijk} = \mu + \alpha_i + \beta_j + (\alpha\beta)_{ij} + v_1 z_k + v_2 z_k^2 + \dots + v_{k-1} z_k^{k-1} + (\alpha\gamma)_{ik} + e_{ijk} \quad (5)$$

sendo que: z_k representa o valor quantitativo do fator γ : v_1 é o efeito linear: v_2 , o efeito quadrático, e assim por diante, até o v_{K-1} que é o efeito do (K - 1)-ésimo grau do polinômio que representa o fator γ . Nesse caso, os componentes de regressão

linear, quadrático, até o (K-1)-ésimo grau, foram determinados de modo semelhante aos do modelo (4), e o esquema da análise de variância, obtido pelos mesmos autores, está apresentado na Tabela 5.

TABELA 5. Esquema da análise de variância de experimentos em parcelas subdivididas, considerando-se regressão no fator γ .

| FONTE DE VARIAÇÃO | GL | SOMA DE QUADRADOS |
|--------------------|-----------------|---|
| BLOCOS | J - 1 | $R(\mu, \beta) - R(\mu)$ |
| TRATAMENTO A | I - 1 | $R(\mu, \alpha, \beta) - R(\mu, \beta)$ |
| RESÍDUO (a) | (I - 1)(J - 1) | $R(\mu, \alpha, \beta, \alpha\beta) - R(\mu, \alpha, \beta)$ |
| REGRESSÃO | | |
| Linear | 1 | $R(\mu, \alpha, \beta, \alpha\beta, v_1) - R(\mu, \alpha, \beta, \alpha\beta)$ |
| Quadrática | 1 | $R(\mu, \alpha, \beta, \alpha\beta, v_1, v_2) - R(\mu, \alpha, \beta, \alpha\beta, v_1)$ |
| Cúbica | 1 | $R(\mu, \alpha, \beta, \alpha\beta, v_1, v_2, v_3) - R(\mu, \alpha, \beta, \alpha\beta, v_1, v_2)$ |
| ... | ... | ... |
| (k - 1)-ésimo grau | 1 | $R(\mu, \alpha, \beta, \alpha\beta, v_1, v_2, \dots, v_{k-1}) - R(\mu, \alpha, \beta, \alpha\beta, v_1, v_2, \dots, v_{k-2})$ |
| INTERAÇÃO AxB | (I - 1)(K - 1) | $R(\mu, \alpha, \beta, \alpha\beta, \gamma, \alpha\gamma) - R(\mu, \alpha, \beta, \alpha\beta, \gamma)$ |
| RESÍDUO (b) | I(J - 1)(K - 1) | $Sy^2 - R(\mu, \alpha, \beta, \alpha\beta, \gamma, \alpha\gamma)$ |
| TOTAL | IJK - 1 | $Sy^2 - R(\mu)$ |

Quando o efeito da interação é significativo e somente o fator γ é quantitativo, para se determinar os componentes de regressão do fator γ dentro de cada nível do fator α , Mischán e Pinho (1996) consideraram o seguinte modelo:

$$y_{ijk} = \mu + \alpha_i + \beta_j + (\alpha\beta)_{ij} + v_{1i}z_k + v_{2i}z_k^2 + \dots + v_{k-1,i}z_k^{k-1} + e_{ijk} \quad (6)$$

Os autores ressaltam que um método bastante simples e direto de se obter a análise de regressão do fator γ , dentro de cada nível do fator α , é

considerar o modelo $y_{ijk} = \mu + \beta_j + v_{1i}z_k + v_{2i}z_k^2 + \dots + v_{k-1,i}z_k^{k-1} + e_{ijk}$, para cada um dos níveis do fator α . A partir desse modelo, obtém-se $R_i(\mu, \beta, v_1, v_2, \dots, v_{k-1})$ e a análise de variância é conduzida de forma semelhante às anteriores. O índice i em R indica o nível do fator α que está sendo considerado. O esquema da análise de variância está apresentado na Tabela 6.

TABELA 6. Esquema de análise de variância de experimentos em parcelas subdivididas, considerando-se regressão no fator γ dentro de cada nível do fator α .

| FONTES DE VARIAÇÃO | GL | SOMA DE QUADRADOS |
|--------------------|-----------------|---|
| BLOCOS | J - 1 | $R(\mu, \beta) - R(\mu)$ |
| TRATAMENTO A | I - 1 | $R(\mu, \alpha, \beta) - R(\mu, \beta)$ |
| RESÍDUO (a) | (I - 1)(J - 1) | $R(\mu, \alpha, \beta, \alpha\beta) - R(\mu, \alpha, \beta)$ |
| REGRESSÃO em A_1 | | |
| Linear | 1 | $R_1(\mu, \beta, v_1) - R_1(\mu, \beta)$ |
| Quadrática | 1 | $R_1(\mu, \beta, v_1, v_2) - R_1(\mu, \beta, v_1)$ |
| Cúbica | 1 | $R_1(\mu, \beta, v_1, v_2, v_3) - R_1(\mu, \beta, v_1, v_2)$ |
| ... | ... | ... |
| (k - 1)-ésimo grau | 1 | $R_1(\mu, \beta, v_1, v_2, \dots, v_{k-1}) - R_1(\mu, \beta, v_1, v_2, \dots, v_{k-2})$ |
| ... | ... | ... |
| REGRESSÃO em A_a | | |
| Linear | 1 | $R_a(\mu, \beta, v_1) - R_a(\mu, \beta)$ |
| Quadrática | 1 | $R_a(\mu, \beta, v_1, v_2) - R_a(\mu, \beta, v_1)$ |
| Cúbica | 1 | $R_a(\mu, \beta, v_1, v_2, v_3) - R_a(\mu, \beta, v_1, v_2)$ |
| ... | ... | ... |
| (k - 1)-ésimo grau | 1 | $R_a(\mu, \beta, v_1, v_2, \dots, v_{k-1}) - R_a(\mu, \beta, v_1, v_2, \dots, v_{k-2})$ |
| RESÍDUO (b) | I(J - 1)(K - 1) | $Sy^2 - R(\mu, \alpha, \beta, \alpha\beta, \gamma, \alpha\gamma)$ |
| TOTAL | IJK - 1 | $Sy^2 - R(\mu)$ |

Se o fator α for quantitativo, pode-se, também, determinar os efeitos de regressão do fator α em cada nível do fator γ . Assim, tem-se o modelo:

$$y_{ijk} = \mu + t_{1k}x_i + t_{2k}x_i^2 + \dots + t_{l-1,k}x_i^{l-1} + \beta_j + (\alpha\beta)_{ij} + \gamma_k + e_{ijk} \quad (7)$$

e a análise de regressão do fator α , dentro de cada nível do fator γ , é obtida considerando-se o modelo $y_{ijk} = \mu + \beta_j + t_1x_i + t_2x_i^2 + \dots + t_{l-1}x_i^{l-1} + e_{ijk}$, para cada um dos níveis do fator γ . A partir desse modelo, obtém-se $R_k(\mu, \beta, t_1, t_2, \dots, t_{l-1})$ e análise de variância é conduzida de forma semelhante às anteriores. O índice k em R indica o nível do fator γ que está sendo considerado. O esquema da análise de variância é o apresentado na Tablea 7.

TABELA 7. Esquema de análise de variância de experimentos em parcelas subdivididas, considerando-se regressão no fator α dentro de cada nível do fator γ .

| FONTE DE VARIAÇÃO | GL | SOMA DE QUADRADOS |
|--------------------|-------------------|---|
| BLOCOS | J - 1 | $R(\mu, \beta) - R(\mu)$ |
| RESÍDUO (a) | $(I - 1)(J - 1)$ | $R(\mu, \alpha, \beta, \alpha\beta) - R(\mu, \alpha, \beta)$ |
| REGRESSÃO em B_1 | | |
| Linear | 1 | $R_1(\mu, \beta, t_1) - R_1(\mu, \beta)$ |
| Quadrática | 1 | $R_1(\mu, \beta, t_1, t_2) - R_1(\mu, \beta, t_1)$ |
| Cúbica | 1 | $R_1(\mu, \beta, t_1, t_2, t_3) - R_1(\mu, \beta, t_1, t_2)$ |
| ... | ... | ... |
| (I - 1)-ésimo grau | 1 | $R_1(\mu, \beta, t_1, t_2, \dots, t_{I-1}) - R_1(\mu, \beta, t_1, t_2, \dots, t_{I-2})$ |
| ... | ... | ... |
| REGRESSÃO em B_b | | |
| Linear | 1 | $R_b(\mu, \beta, t_1) - R_b(\mu, \beta)$ |
| Quadrática | 1 | $R_b(\mu, \beta, t_1, t_2) - R_b(\mu, \beta, t_1)$ |
| Cúbica | 1 | $R_b(\mu, \beta, t_1, t_2, t_3) - R_b(\mu, \beta, t_1, t_2)$ |
| ... | ... | ... |
| (I - 1)-ésimo grau | 1 | $R_b(\mu, \beta, t_1, t_2, \dots, t_{I-1}) - R_b(\mu, \beta, t_1, t_2, \dots, t_{I-2})$ |
| RESÍDUO (b) | $I(J - 1)(K - 1)$ | $Sy^2 - R(\mu, \alpha, \beta, \alpha\beta, \gamma, \alpha\gamma)$ |
| TOTAL | IJK - 1 | $Sy^2 - R(\mu)$ |

Para o esquema da Tabela 7, Mischan e Pinho (1996) consideraram que o Resíduo adequado para testar os efeitos de regressão pode ser calculado pela expressão definida em (2), com número de graus de liberdade determinado, aproximadamente, por Satterthwaite (1946), cuja expressão está definida em (3).

Quando os fatores α e γ forem quantitativos, Mischan e Pinho (1996) consideraram o seguinte modelo:

$$y_{ijk} = \mu + t_1 x_i + t_2 x_i^2 + \dots + t_{i-1} x_i^{i-1} + \beta_j + (\alpha\beta)_{ij} + v_1 z_k + v_2 z_k^2 + \dots + v_{k-1} z_k^{k-1} + (\alpha\gamma)_{ik} + e_{ijk} \quad (8)$$

e o esquema da análise de variância de acordo com o modelo (8) está apresentado na Tabela 8.

TABELA 8 - Esquema de análise de variância de experimentos em parcelas subdivididas, considerando-se regressão no fator α e no fator γ .

| FONTE DE VARIAÇÃO | GL | SOMA DE QUADRADOS |
|--------------------|-----------------|---|
| BLOCOS | J - 1 | R(μ , β) - R(μ) |
| REGRESSÃO de A | | |
| Linear | 1 | R(μ , β , t_1) - R(μ , β) |
| Quadrática | 1 | R(μ , β , t_1 , t_2) - R(μ , β , t_1) |
| Cúbica | 1 | R(μ , β , t_1 , t_2 , t_3) - R(μ , β , t_1 , t_2) |
| ... | ... | ... |
| (I - 1)-ésimo grau | 1 | R(μ , β , t_1 , t_2 , ..., t_{i-1}) - R(μ , β , t_1 , t_2 , ..., t_{i-2}) |
| RESÍDUO (a) | (I - 1)(J - 1) | R(μ , α , β , $\alpha\beta$) - R(μ , α , β) |
| REGRESSÃO de B | | |
| Linear | 1 | R(μ , α , β , $\alpha\beta$, v_1) - R(μ , α , β , $\alpha\beta$) |
| Quadrática | 1 | R(μ , α , β , $\alpha\beta$, v_1 , v_2) - R(μ , α , β , $\alpha\beta$, v_1) |
| Cúbica | 1 | R(μ , α , β , $\alpha\beta$, v_1 , v_2 , v_3) - R(μ , α , β , $\alpha\beta$, v_1 , v_2) |
| ... | ... | ... |
| (k - 1)-ésimo grau | 1 | R(μ , α , β , $\alpha\beta$, v_1 , v_2 , ..., v_{k-1}) - R(μ , α , β , $\alpha\beta$, v_1 , v_2 , ..., v_{k-2}) |
| INTERAÇÃO AxB | (I - 1)(K - 1) | R(μ , α , β , $\alpha\beta$, γ , $\alpha\gamma$) - R(μ , α , β , $\alpha\beta$, γ) |
| RESÍDUO (b) | I(J - 1)(K - 1) | S y^2 - R(μ , α , β , $\alpha\beta$, γ , $\alpha\gamma$) |
| TOTAL | IJK - 1 | S y^2 - R(μ) |

3 MATERIAL E MÉTODOS

3.1 Material

Os dados experimentais usados como exemplo ilustrativo para o desenvolvimento da metodologia, foram adaptados de um experimento conduzido por Scalco^{*}(1999) na Universidade Federal de Lavras, em Lavras, MG, onde estudou-se o manejo de irrigação (0; 50%; 100% e 150% da evaporação do tanque “Classe A”) e adubação nitrogenada (0; 60; 120 e 180 kg/ha de N na forma de uréia) na produção de trigo de inverno. Os dados referem-se à produção de grãos de trigo e estão apresentados na Tabela 9.

O experimento foi instalado utilizando-se o esquema experimental em parcelas subdivididas, com os tratamentos primários dispostos segundo o delineamento em blocos casualizados, com quatro repetições.

Os tratamentos envolveram, em nível de parcelas, três lâminas de irrigação (L_i) aplicadas com base na porcentagem de evaporação (ECA) acumulada do tanque “Classe A”, sendo $L_1=50\%$; $L_2=100\%$ e $L_3=150\%$ da ECA, e em nível de subparcelas, são adicionadas três doses de nitrogênio (N_i), sendo $N_1=60$ Kg/ha; $N_2=120$ Kg/ha e $N_3=180$ Kg/ha. Foi considerado, como variável resposta, a produção de trigo, em kg/ha, e como variáveis independentes, os níveis de lâminas de irrigação (L_i) e nitrogênio (N_i).

^{*}SCALCO, M.S. Comunicação Pessoal. 1999. (Departamento de Agricultura da UFLA)

TABELA 9. Dados de produção de trigo, em kg/ha, em função de três níveis de irrigação, três doses de adubação nitrogenada e duas repetições.

| Níveis de Irrigação | Doses de Nitrogênio | Blocos | | Total | Média |
|---------------------|---------------------|----------|----------|----------|---------|
| | | I | II | | |
| 50 | 60 | 2.133,0 | 2.411,0 | 4.544,0 | 2.272,0 |
| | 120 | 4.101,0 | 3.288,0 | 7.389,0 | 3.694,5 |
| | 180 | 3.538,0 | 3.395,0 | 6.933,0 | 3.466,5 |
| 100 | 60 | 5.503,0 | 5.630,0 | 11.133,0 | 5.566,5 |
| | 120 | 5.687,0 | 5.991,0 | 11.678,0 | 5.839,0 |
| | 180 | 5.418,0 | 5.899,0 | 11.317,0 | 5.658,5 |
| 150 | 60 | 3.809,0 | 4.147,0 | 7.956,0 | 3.978,0 |
| | 120 | 4.182,0 | 4.288,0 | 8.470,0 | 4.235,0 |
| | 180 | 3.830,0 | 4.112,0 | 7.942,0 | 3.971,0 |
| Totais | | 38.201,0 | 39.161,0 | 77.362,0 | 4.297,9 |

Fonte: Dados adaptados de Scalco (1999)

3.2 Métodos

A metodologia a ser desenvolvida tem por finalidade a obtenção da análise de variância de dados provenientes de um experimento em parcelas subdivididas, com os tratamentos primários e secundários constituídos por fatores quantitativos (níveis e doses), considerando-se o desdobramento dos efeitos de tratamentos sob a forma de superfície de resposta. Sem perda de generalidade, o desenvolvimento das operações para obtenção das somas de quadrados e expressões que compõem o teste F, será feito com base num experimento em parcelas subdivididas, conduzido com delineamento em blocos casualizados, com duas repetições, sendo os tratamentos principais constituídos por três níveis de irrigação: 50, 100 e 150% aplicados com base na porcentagem de evaporação acumulada do tanque “classe A”, e os tratamentos secundários constituídos pela

adição de três doses de adubação nitrogenada: 60, 120 e 180 kg/ha de N. Para o desenvolvimento da metodologia, será utilizado o método dos mínimos quadrados.

3.2.1 Um modelo Linear

Para o desenvolvimento da metodologia, adotou-se o seguinte modelo linear:

$$y_{ijk} = \mu + b_j + t_1 x_i + t_2 x_i^2 + tb_{ij} + v_1 z_k + v_2 z_k^2 + tv_{11} x_i z_k + tv_{12} x_i z_k^2 + tv_{21} x_i^2 z_k + tv_{22} x_i^2 z_k^2 + e_{ijk} \quad (9)$$

em que:

y_{ijk} : valor observado no i -ésimo nível do tratamento primário, no k -ésimo nível do tratamento secundário, no j -ésimo bloco;

μ : uma constante inerente a todas as observações;

b_j : efeito do j -ésimo bloco;

x_i : valor quantitativo do i -ésimo nível do tratamento primário;

t_1 : efeito linear;

t_2 : efeito quadrático;

tb_{ij} : erro experimental em nível de parcelas;

z_k : valor quantitativo do k -ésimo nível do tratamento secundário;

v_1 : efeito linear;

v_2 : efeito quadrático;

$x_i z_k$: valor quantitativo da interação do i -ésimo nível do tratamento primário *versus* o k -ésimo nível do tratamento secundário;

tv_{11} : efeito da interação linear X linear;

tv_{12} : efeito da interação linear X quadrática;

tv_{21} : efeito da interação quadrática X linear;

tv_{22} : efeito da interação quadrática X quadrática;

e_{ijk} : erro experimental em nível de subparcelas.

Na forma matricial, o modelo linear é dado por:

$$\underline{y} = \underline{X}\underline{\theta} + \underline{e} \quad (10)$$

sendo:

\underline{y} : vetor das observações;

\underline{X} : matriz de incidência dos parâmetros (matriz do delineamento);

$\underline{\theta}$: vetor de parâmetros desconhecidos do modelo;

\underline{e} : vetor dos erros aleatórios correspondentes às observações.

De acordo com o exemplo, têm-se:

$$y = \begin{bmatrix} y_{111} \\ y_{121} \\ y_{112} \\ y_{122} \\ y_{113} \\ y_{123} \\ y_{211} \\ y_{221} \\ y_{212} \\ y_{222} \\ y_{213} \\ y_{223} \\ y_{311} \\ y_{321} \\ y_{312} \\ y_{322} \\ y_{313} \\ y_{323} \end{bmatrix} \quad \theta = \begin{bmatrix} \mu \\ b_j \\ t_1 \\ t_2 \\ tb_{ij} \\ v_1 \\ v_2 \\ tv_{11} \\ tv_{12} \\ tv_{21} \\ tv_{22} \end{bmatrix} \quad e = \begin{bmatrix} e_{111} \\ e_{121} \\ e_{112} \\ e_{122} \\ e_{113} \\ e_{123} \\ e_{211} \\ e_{221} \\ e_{212} \\ e_{222} \\ e_{213} \\ e_{223} \\ e_{311} \\ e_{321} \\ e_{312} \\ e_{322} \\ e_{313} \\ e_{323} \end{bmatrix}$$

X =

| | | | | | | | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|----------------|-----------------------------|---|---|---|---|---|---|---|----------------|-----------------------------|-------------------------------|--|--|---|
| 1 | 1 | 0 | x ₁ | x ₁ ² | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | z ₁ | z ₁ ² | x ₁ z ₁ | x ₁ z ₁ ² | x ₁ ² z ₁ | x ₁ ² z ₁ ² |
| 1 | 0 | 1 | x ₁ | x ₁ ² | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | z ₁ | z ₁ ² | x ₁ z ₁ | x ₁ z ₁ ² | x ₁ ² z ₁ | x ₁ ² z ₁ ² |
| 1 | 1 | 0 | x ₁ | x ₁ ² | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | z ₂ | z ₂ ² | x ₁ z ₂ | x ₁ z ₂ ² | x ₁ ² z ₂ | x ₁ ² z ₂ ² |
| 1 | 0 | 1 | x ₁ | x ₁ ² | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | z ₂ | z ₂ ² | x ₁ z ₂ | x ₁ z ₂ ² | x ₁ ² z ₂ | x ₁ ² z ₂ ² |
| 1 | 1 | 0 | x ₁ | x ₁ ² | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | z ₃ | z ₃ ² | x ₁ z ₃ | x ₁ z ₃ ² | x ₁ ² z ₃ | x ₁ ² z ₃ ² |
| 1 | 0 | 1 | x ₁ | x ₁ ² | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | z ₁ | z ₁ ² | x ₂ z ₁ | x ₂ z ₁ ² | x ₂ ² z ₁ | x ₂ ² z ₁ ² |
| 1 | 1 | 0 | x ₂ | x ₂ ² | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | z ₂ | z ₂ ² | x ₂ z ₂ | x ₂ z ₂ ² | x ₂ ² z ₂ | x ₂ ² z ₂ ² |
| 1 | 0 | 1 | x ₂ | x ₂ ² | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | z ₂ | z ₂ ² | x ₂ z ₂ | x ₂ z ₂ ² | x ₂ ² z ₂ | x ₂ ² z ₂ ² |
| 1 | 1 | 0 | x ₂ | x ₂ ² | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | z ₃ | z ₃ ² | x ₂ z ₃ | x ₂ z ₃ ² | x ₂ ² z ₃ | x ₂ ² z ₃ ² |
| 1 | 0 | 1 | x ₂ | x ₂ ² | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | z ₃ | z ₃ ² | x ₂ z ₃ | x ₂ z ₃ ² | x ₂ ² z ₃ | x ₂ ² z ₃ ² |
| 1 | 1 | 0 | x ₃ | x ₃ ² | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | z ₁ | z ₁ ² | x ₃ z ₁ | x ₃ z ₁ ² | x ₃ ² z ₁ | x ₃ ² z ₁ ² |
| 1 | 0 | 1 | x ₃ | x ₃ ² | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | z ₂ | z ₂ ² | x ₃ z ₂ | x ₃ z ₂ ² | x ₃ ² z ₂ | x ₃ ² z ₂ ² |
| 1 | 1 | 0 | x ₃ | x ₃ ² | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | z ₃ | z ₃ ² | x ₃ z ₃ | x ₃ z ₃ ² | x ₃ ² z ₃ | x ₃ ² z ₃ ² |
| 1 | 0 | 1 | x ₃ | x ₃ ² | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | z ₃ | z ₃ ² | x ₃ z ₃ | x ₃ z ₃ ² | x ₃ ² z ₃ | x ₃ ² z ₃ ² |

Efetuuou-se, ainda, a partição da matriz X da seguinte maneira:

$$X = \begin{bmatrix} X_1 & X_2 & X_3 & X_4 & X_5 & X_6 & X_7 & X_8 & X_9 & X_{10} & X_{11} \end{bmatrix} \quad (11)$$

sendo:

X_1 : vetor dos coeficientes associados à constante μ ;

X_2 : matriz dos coeficientes associados à constante μ e aos J blocos;

X_3 : matriz dos coeficientes associados à constante μ , aos J blocos e aos efeitos lineares do i-ésimo nível do tratamento primário;

X_4 : matriz dos coeficientes associados à constante μ , aos J blocos, aos efeitos lineares do i-ésimo nível do tratamento primário e aos efeitos quadráticos do i-ésimo nível do tratamento primário;

X_5 : matriz dos coeficientes associados à constante μ , aos J blocos, aos efeitos lineares do i-ésimo nível do tratamento primário, aos efeitos quadráticos do i-ésimo nível do tratamento primário e aos efeitos da interação tratamentos principais X blocos (erros experimentais em nível de parcelas);

X_6 : matriz dos coeficientes associados à constante μ , aos J blocos, aos efeitos lineares do i-ésimo nível do tratamento primário, aos efeitos quadráticos do i-ésimo nível do tratamento primário, aos efeitos da interação tratamentos principais X blocos (erros experimentais em nível de parcelas) e aos efeitos lineares do k-ésimo nível do tratamento secundário;

X_7 : matriz dos coeficientes associados à constante μ , aos J blocos, aos efeitos lineares do i-ésimo nível do tratamento primário, aos efeitos quadráticos do i-ésimo nível do tratamento primário, aos efeitos da interação tratamentos principais X blocos (erros experimentais em nível de parcelas), aos efeitos lineares do k-ésimo

nível do tratamento secundário e aos efeitos quadráticos do k-ésimo nível do tratamento secundário;

X_8 : matriz dos coeficientes associados à constante μ , aos J blocos, aos efeitos lineares do i-ésimo nível do tratamento primário, aos efeitos quadráticos do i-ésimo nível do tratamento primário, aos efeitos da interação tratamentos principais X blocos (erros experimentais em nível de parcelas), aos efeitos lineares do k-ésimo nível do tratamento secundário, aos efeitos quadráticos do k-ésimo nível do tratamento secundário e aos efeitos da interação linear X linear do i-ésimo nível do tratamento primário, com o k-ésimo nível do tratamento secundário ;

X_9 : matriz dos coeficientes associados à constante μ , aos J blocos, aos efeitos lineares do i-ésimo nível do tratamento primário, aos efeitos quadráticos do i-ésimo nível do tratamento primário, aos efeitos da interação tratamentos principais X blocos (erros experimentais em nível de parcelas), aos efeitos lineares do k-ésimo nível do tratamento secundário, aos efeitos quadráticos do k-ésimo nível do tratamento secundário, aos efeitos da interação linear X linear do i-ésimo nível do tratamento primário, com o k-ésimo nível do tratamento secundário e aos efeitos da interação linear X quadrática do i-ésimo nível do tratamento primário, com o k-ésimo nível do tratamento secundário;

X_{10} : matriz dos coeficientes associados à constante μ , aos J blocos, aos efeitos lineares do i-ésimo nível do tratamento primário, aos efeitos quadráticos do i-ésimo nível do tratamento primário, aos efeitos da interação tratamentos principais X blocos (erros experimentais em nível de parcelas), aos efeitos lineares do k-ésimo nível do tratamento secundário, aos efeitos quadráticos do k-ésimo nível do tratamento secundário, aos efeitos da interação linear X linear do i-ésimo nível do tratamento primário, com o k-ésimo nível do tratamento secundário, aos efeitos da interação linear X quadrática do i-ésimo nível do tratamento primário, com o k-

ésimo nível do tratamento secundário e aos efeitos da interação quadrática X linear do i-ésimo nível do tratamento primário, com o k-ésimo nível do tratamento secundário;

X_{11} : matriz dos coeficientes associados à constante μ , aos J blocos, aos efeitos lineares do i-ésimo nível do tratamento primário, aos efeitos quadráticos do i-ésimo nível do tratamento primário, aos efeitos da interação tratamentos principais X blocos (erros experimentais em nível de parcelas), aos efeitos lineares do k-ésimo nível do tratamento secundário, aos efeitos quadráticos do k-ésimo nível do tratamento secundário, aos efeitos da interação linear X linear do i-ésimo nível do tratamento primário, com o k-ésimo nível do tratamento secundário, aos efeitos da interação linear X quadrática do i-ésimo nível do tratamento primário, com o k-ésimo nível do tratamento secundário, aos efeitos da interação quadrática X linear do i-ésimo nível do tratamento primário, com o k-ésimo nível do tratamento secundário e aos efeitos da interação quadrática X quadrática do i-ésimo nível do tratamento primário, com o k-ésimo nível do tratamento secundário.

3.2.2 Esperança Matemática das Somas de Quadrados

Para a obtenção das esperanças matemáticas das somas de quadrados, são consideradas as restrições nos parâmetros usados na obtenção de uma solução das equações normais. O conjunto de restrições é formado pela seguinte função linear não estimável:

$$\sum_{j=1}^J b_j = 0 \quad (12)$$

Para facilidade de cálculos, os valores dos níveis de lâmina (x_1) e doses de nitrogênio (x_2) foram codificados ou transformados através do uso de

polinômios ortogonais; os polinômios ortogonais de primeiro e segundo graus, adaptados aos níveis de cada fator, foram obtidos de acordo com procedimento proposto por Nogueira (1979) e foram designados por x_i e x_i^2 (linear e quadrático, fator lâmina) e por z_k e z_k^2 (linear e quadrático, fator nitrogênio), respectivamente.

Os coeficientes desses polinômio encontram-se tabulados em vários livros-textos, como Pimentel Gomes (1990).

Dado que os polinômios são ortogonais, então a soma de seus coeficientes é nula, assim como os produtos de seus coeficientes, entre os efeitos lineares (x_i , z_k), quadráticos (x_i^2 , z_k^2) e interações ($x_i z_k$, $x_i z_k^2$, $x_i^2 z_k$, $x_i^2 z_k^2$).

Para a determinação das esperanças matemáticas das formas quadráticas, que fornecem as somas de quadrados, usou-se o seguinte teorema, enunciado em Searle (1971):

TEOREMA 1: Seja $y = X\theta + e$, definido como modelo linear de Gauss-Markoff, y um vetor de variáveis aleatórias com vetor de esperanças $X\theta$ e matriz de covariâncias Σ , positiva definida, denotado por $y \sim N(X\theta, \Sigma)$. Se P é uma matriz de constantes, real e simétrica, então a forma quadrática $Q(y) = y'Py$ tem esperança matemática dada por:

$$E[y'Py] = \text{tr}[P\Sigma] + \theta'X'PX\theta \quad (13)$$

sendo:

P : núcleo da forma quadrática;

tr : operador traço de uma matriz;

Σ : matriz de covariâncias, dada por:

$$\text{Cov}(y_{ijk}, y_{i'j'k'}) = \begin{cases} \sigma_a^2 + \sigma^2, & \text{se } i = i', j = j' \text{ e } k = k' \\ \sigma_a^2, & \text{se } i = i', j = j' \text{ e } k \neq k' \\ 0, & \text{em caso contrário} \end{cases} \quad (14)$$

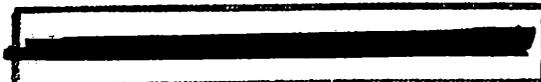
Considerou-se a não-existência de uma correlação entre as subparcelas de uma mesma parcela e a independência entre subparcelas de parcelas distintas.

Do modelo adotado em (9) e das pressuposições associadas aos erros entre subparcelas, consideradas independentes e de uso tradicional nos experimentos planejados em parcelas subdivididas, obtém-se de (14), a seguinte matriz de variâncias e covariâncias (Σ):

$$\Sigma = I_{(3)} \otimes V \quad (15)$$

sendo: $I_{(3)}$ a matriz identidade, e

$$V = \begin{bmatrix} \sigma_a^2 + \sigma^2 & 0 & \sigma_a^2 & 0 & \sigma_a^2 & 0 \\ 0 & \sigma_a^2 + \sigma^2 & 0 & \sigma_a^2 & 0 & \sigma_a^2 \\ \sigma_a^2 & 0 & \sigma_a^2 + \sigma^2 & 0 & \sigma_a^2 & 0 \\ 0 & \sigma_a^2 & 0 & \sigma_a^2 + \sigma^2 & 0 & \sigma_a^2 \\ \sigma_a^2 & 0 & \sigma_a^2 & 0 & \sigma_a^2 + \sigma^2 & 0 \\ 0 & \sigma_a^2 & 0 & \sigma_a^2 & 0 & \sigma_a^2 + \sigma^2 \end{bmatrix}$$



4 RESULTADOS E DISCUSSÃO

4.1 Esperança Matemática das Somas de Quadrados

Para a determinação das esperanças matemáticas das somas de quadrados, efetuou-se uma partição seqüencial da matriz X em $X_1, X_2, X_3, \dots, X_{11}$, conforme já foi descrito anteriormente em (11) respeitando-se a seqüência na qual os fatores são especificados no modelo, sendo também considerado o conjunto de restrições nos parâmetros definidos em (12), bem como o Teorema 1, cuja expressão se encontra em (13). Para realização deste estudo, utilizou-se como suporte computacional o software Mathematica (Wolfram, 1993). Desta forma, têm-se os diferentes modelos reduzidos, utilizando-se a soma de quadrados tipo I.

4.1.1 Esperança matemática de $SQ(\mu)$

Considerando-se a matriz X_1 e o modelo reduzido

$$y_{ijk} = \mu + e_{ijk} \quad (16)$$

sendo y_{ijk} , μ e e_{ijk} definidos de acordo com o modelo (9).

Na forma matricial, este modelo fica:

$$y = X_1 \theta_1 + e$$

sendo y , X_1 e e definidos de acordo com o modelo (10), e θ_1 é o vetor de dimensões (1×1) referente ao parâmetro μ .

O sistema de equações normais é:

$$X_1' X_1 \theta_1^0 = X_1' y$$

Dado que a matriz X_1 possui posto coluna completo, nesse caso, então, como em Searle (1987), a solução do sistema é dada por:

$$\theta_1^0 = (X_1' X_1)^G X_1' y$$

com $(X_1' X_1)^G$ sendo a inversa generalizada de $X_1' X_1$ que, neste caso, é também a inversa clássica.

A soma de quadrados de parâmetros, de acordo com Searle (1987), pode ser obtida por:

$$SQ\theta_1 = SQ(\mu) = R(\mu) = \theta_1^{0'} X_1' y$$

Note-se que, parâmetros, nesse caso, refere-se apenas ao parâmetro μ considerado no modelo.

Substituindo-se a expressão de θ_1^0 na equação da soma de quadrados de parâmetros, obtém-se que a redução na soma de quadrados total, devido ao parâmetro μ é:

$$R(\mu) = y' X_1 \underbrace{(X_1' X_1)^G}_{P_1} X_1' y$$

sendo $P_1 = X_1 (X_1' X_1)^G X_1'$, então

$$SQ(\mu) = y' P_1 y \quad (17)$$

note-se que, aqui, P_1 é uma matriz com status de projetor ortogonal, de dimensões

$(n \times n)$, constituída pelos elementos $\frac{1}{n}$, com $n = I.J.K$, ou seja, $P_1 = \frac{1}{n} E_{(n)}$.

sendo $E_{(n)}$ uma matriz de uns, de dimensões $(n \times n)$.

Aplicando-se o teorema 1, descrito em (13) na expressão (17),
tem-se:

$$E[SQ(\mu)] = E[y'P_1y] = \text{tr}[P_1\Sigma] + \theta_1'X_1'P_1X_1\theta_1$$

Multiplicando-se P_1 por Σ , cuja expressão está definida em (15),
tem-se que

$$P_1\Sigma = (K\sigma_a^2 + \sigma^2)P_1$$

como P_1 é uma matriz simétrica e idempotente, tem-se que

$$\text{tr}[P_1\Sigma] = r[P_1\Sigma] = (K\sigma_a^2 + \sigma^2) r[P_1]$$

em que $r[P_1]$ é o posto da matriz X_1 .

Neste caso, $r[P_1] = r[X_1] = 1$, logo

$$\text{tr}[P_1\Sigma] = (K\sigma_a^2 + \sigma^2)$$

Tomando-se, agora, a expressão $\theta_1'X_1'P_1X_1\theta_1$, efetuando-se as
multiplicações e aplicando-se as restrições de (12), obtém-se:

$$\theta_1'X_1'P_1X_1\theta_1 = \theta_1'X_1'X_1(X_1'X_1)^G X_1'X_1\theta_1 = \theta_1'X_1'X_1\theta = [\mu][n][\mu] = n\mu^2$$

Portanto,

$$E[SQ\mu] = (K\sigma_a^2 + \sigma^2) + n\mu^2 \quad (18)$$

4.1.2 Esperança matemática de SQ(b)

Considerando-se a matriz X_2 e o modelo reduzido

$$y_{ijk} = \mu + b_j + e_{ijk} \quad (19)$$

em que y_{ijk} , μ , b_j e e_{ijk} são definidos como no modelo (9).

Na forma matricial, o modelo fica:

$$y = X_2\theta_2 + e$$

sendo y , X_2 e θ_2 e definidos de acordo com a respectiva partição do modelo (10); θ_2 é o vetor de dimensões $((J+1) \times 1)$ referente aos parâmetros μ e b_j ($j = 1, 2, \dots, J$).

O sistema de equações normais é:

$$X_2'X_2\theta_2^o = X_2'y$$

Dado que a matriz X_2 possui posto coluna incompleto, $r[X_2] = J$, então conforme Searle (1987), uma das soluções do sistema pode ser:

$$\theta_2^o = (X_2'X_2)^G X_2'y$$

em que $(X_2'X_2)^G$ é uma inversa generalizada qualquer de $X_2'X_2$.

A soma de quadrados para o efeito de blocos (SQ(b)), de acordo com Searle (1987), pode ser obtida através da redução:

$$SQ\theta_2 = SQ(b) = R(\mu, b) - R(\mu) = R(b / \mu)$$

$$R(b / \mu) = \theta_2^o' X_2'y - \theta_1^o' X_1'y$$

substituindo-se as expressões de θ_2^o e de θ_1^o , na equação de $R(b / \mu)$, obtém-se

$$R(b / \mu) = y' X_2 \underbrace{(X_2'X_2)^G X_2'}_{P_2} y - y' P_1 y$$

sendo $P_2 = X_2 (X_2'X_2)^G X_2'$, então:

$$R(b / \mu) = y' P_2 y - y' P_1 y$$

ou ainda,

$$SQ(b) = y' (P_2 - P_1) y \tag{20}$$

Aplicando-se (13) em (20), tem-se:

$$E[SQ(b)] = E[y' (P_2 - P_1) y] = E[y' P_2 y] - E[y' P_1 y]$$

$$E[y' P_2 y] - E[y' P_1 y] = \text{tr}[P_2 \Sigma] + \theta_2' X_2' P_2 X_2 \theta_2 - \text{tr}[P_1 \Sigma] - \theta_1' X_1' P_1 X_1 \theta_1$$

$$\text{Mas, } P_2 \Sigma = (K \sigma_a^2 + \sigma^2) P_2$$

como $P_2 = X_2(X_2'X_2)^G X_2' = X_2X_2^+$ é uma matriz simétrica e idempotente, pois X_2^+ é a inversa de Moore-Penrose da matriz X_2 , tem-se que:

$$\text{tr}[P_2\Sigma] = r[P_2\Sigma] = (K\sigma_a^2 + \sigma^2) r[P_2]$$

mas, $r[P_2] = r[X_2] = 2$ para o exemplo, e numa situação geral, em que se tem J blocos, é $r[P_2] = J$.

Logo,

$$\text{tr}[P_2\Sigma] = J(K\sigma_a^2 + \sigma^2)$$

Tomando-se a expressão $\theta_2'X_2'P_2X_2\theta_2$, e efetuando-se as multiplicações e aplicando-se as restrições de (12), obtém-se que:

$$\theta_2'X_2'P_2X_2\theta_2 = \text{IK} \sum_{j=1}^J b_j^2 + n\mu^2$$

pois,

$$\begin{aligned} \theta_2'X_2'P_2X_2\theta_2 &= \theta_2'X_2'X_2\theta_2 = [\mu \ b_1 \ \dots \ b_J] \begin{bmatrix} n & \text{IK} & \dots & \text{IK} \\ \text{IK} & \text{IK} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \text{IK} & 0 & \dots & \text{IK} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mu \\ b_1 \\ \dots \\ b_J \end{bmatrix} = \\ &= n\mu^2 + \text{IK} \sum_{j=1}^J b_j^2 + 2\text{IK}\mu \sum_{j=1}^J b_j = n\mu^2 + \text{IK} \sum_{j=1}^J b_j^2 \end{aligned}$$

Assim:

$$E[y'P_2y] = J(K\sigma_a^2 + \sigma^2) + n\mu^2 + \text{IK} \sum_{j=1}^J b_j^2$$

então, a esperança matemática da soma de quadrados de blocos ou da redução, devido aos parâmetros b 's ajustados para μ , é:

$$E[y'(P_2 - P_1)y] = [J(K\sigma_a^2 + \sigma^2) + n\mu^2 + \text{IK} \sum_{j=1}^J b_j^2] - [(K\sigma_a^2 + \sigma^2) + n\mu^2]$$

Simplificando, obtém-se:

$$E[SQ(b)] = (J-1)(K\sigma_a^2 + \sigma^2) + IK \sum_{j=1}^J b_j^2 \quad (21)$$

4.1.3 Esperança matemática de SQ(t₁)

Considerando-se a matriz X₃ e o modelo reduzido

$$y_{ijk} = \mu + b_j + t_1 x_{i1} + e_{ijk} \quad (22)$$

em que y_{ijk}, μ, b_j, t₁ e e_{ijk} são definidos como no modelo (9).

Na forma matricial, o modelo fica:

$$y = X_3 \theta_3 + e$$

sendo y, X₃ e e definidos de acordo com a respectiva partição do modelo (10), θ₃ é o vetor de dimensões ((J+2)x1), constituído de parâmetros θ₃' = [μ b₁ b₂ ... b_J t₁].

O sistema de equações normais é:

$$X_3' X_3 \theta_3^o = X_3' y$$

Considerando-se que X₃ possui posto coluna incompleto, r[X₃] = J+1, então de acordo com Searle (1987), uma das soluções do sistema é:

$$\theta_3^o = (X_3' X_3)^G X_3' y$$

em que (X₃' X₃)^G é uma inversa generalizada qualquer de X₃' X₃.

A soma de quadrados de parâmetros (μ, b e t₁) ou a redução na soma de quadrados, devido aos parâmetros μ, b e t₁, conforme Searle (1987), é:

$$SQ\theta_3 = SQ(\mu, b, t_1) = R(\mu, b, t_1) = \theta_3^o X_3' y = y' X_3 (X_3' X_3)^G X_3' y$$

fazendo X₃ (X₃' X₃)^G X₃' = X₃ X₃⁺ = P₃,

tem-se que a soma de quadrados para o efeito linear do tratamento primário $SQ(t_1)$ ou a redução devido ao efeito linear do tratamento primário ajustado para μ e b , é:

$$SQ\theta_3 = SQ(t_1) = R(t_1 / \mu, b) = R(\mu, b, t_1) - R(\mu, b)$$

$$R(t_1 / \mu, b) = y' P_3 y - y' P_2 y$$

ou

$$SQ(t_1) = y' (P_3 - P_2) y \quad (23)$$

Aplicando-se (13) em (23), tem-se:

$$E[SQ t_1] = E[y' (P_3 - P_2) y] = E[y' P_3 y] - E[y' P_2 y]$$

$$E[y' P_3 y] - E[y' P_2 y] = \text{tr}[P_3 \Sigma] + \theta_3' X_3' P_3 X_3 \theta_3 - \text{tr}[P_2 \Sigma] - \theta_2' X_2' P_2 X_2 \theta_2$$

$$\text{Mas, } P_3 \Sigma = (K\sigma_a^2 + \sigma^2) P_3$$

como $P_3 = X_3 X_3^+$ é uma matriz simétrica e idempotente, conforme propriedade da matriz de Moore-Penrose (Searle, 1987), tem-se que

$$\text{tr}[P_3 \Sigma] = r[P_3 \Sigma] = (K\sigma_a^2 + \sigma^2) r[P_3]$$

mas, $r[P_3] = r[X_3] = 3$ para o exemplo considerado, e generalizando, tem-se que $r[X_3] = J + 1$. Logo:

$$\text{tr}[P_3 \Sigma] = (J+1)(K\sigma_a^2 + \sigma^2)$$

Considerando-se, agora, a expressão $\theta_3' X_3' P_3 X_3 \theta_3$ e efetuando-se as multiplicações e aplicando-se as restrições de (12), obtém-se:

$$\theta_3' X_3' P_3 X_3 \theta_3 = n\mu^2 + IK \sum_{j=1}^J b_j^2 + JK \left(\sum_{i=1}^I x_i^2 \right) t_1^2$$

$$\text{pois } \theta_3' X_3' P_3 X_3 \theta_3 = [\mu \ b_1 \ \dots \ b_J \ t_1] \begin{bmatrix} n \ IK \ \dots \ IK & 0 \\ IK \ \dots & 0 \\ & IK & 0 \\ (\text{sim}) & & JK \sum_i x_i^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mu \\ b_1 \\ \vdots \\ b_J \\ t_1 \end{bmatrix} =$$

$$= n\mu^2 + 2IK\mu \sum_j b_j + IK \sum_{j=1}^J b_j^2 + JK \left(\sum_{i=1}^I x_i^2 \right) t_1^2$$

em que $\sum_{i=1}^I x_i^2$ é a soma dos quadrados dos coeficientes de efeitos lineares do fator primário. Assim,

$$E[y' P_3 y] = (J+1)(K\sigma_a^2 + \sigma^2) + n\mu^2 + IK \sum_{j=1}^J b_j^2 + JK \left(\sum_{i=1}^I x_i^2 \right) t_1^2,$$

então, a esperança matemática da soma de quadrados de efeito linear (ou regressão linear) de tratamento primário, ou ainda, a redução, devido à regressão linear ajustado para μ e b , é:

$$E[y'(P_3 - P_2)y] = [(J+1)(K\sigma_a^2 + \sigma^2) + n\mu^2 + IK \sum_{j=1}^J b_j^2 + JK \left(\sum_{i=1}^I x_i^2 \right) t_1^2] - \\ - [J(K\sigma_a^2 + \sigma^2) + n\mu^2 + IK \sum_{j=1}^J b_j^2]$$

Portanto,

$$E[SQ_{t_1}] = (K\sigma_a^2 + \sigma^2) + JK \left(\sum_{i=1}^I x_i^2 \right) t_1^2 \quad (24)$$

ou

$$E[R(t_1/\mu, b)] = (K\sigma_a^2 + \sigma^2) + JK \left(\sum_{i=1}^I x_i^2 \right) t_1^2$$

4.1.4 Esperança matemática de SQ(t₂)

As mesmas considerações feitas no itens 4.1.1, 4.1.2 e 4.1.3 e outras semelhantes foram consideradas nos itens seguintes, as quais não serão relatadas, explicitamente, de modo a não tornar o texto muito extenso e repetitivo.

Considerando-se a matriz X₄ e o modelo reduzido

$$y_{ijk} = \mu + b_j + t_1 x_i + t_2 x_i^2 + e_{ijk} \quad (25)$$

Na forma matricial, o modelo fica:

$$y = X_4 \theta_4 + e$$

O sistema de equações normais é:

$$X_4' X_4 \theta_4^o = X_4' y$$

Uma das soluções do sistema pode ser:

$$\theta_4^o = (X_4' X_4)^G X_4' y$$

A soma de quadrados para o efeito quadrático do tratamento primário SQ(t₂) é:

$$SQ\theta_4 = SQ(t_2) = R(t_2 / \mu, b, t_1) = R(\mu, b, t_1, t_2) - R(\mu, b, t_1)$$

$$R(t_2 / \mu, b, t_1) = \theta_4^o X_4' y - \theta_3^o X_3' y$$

$$R(t_2 / \mu, b, t_1) = y' P_4 y - y' P_3 y$$

$$SQ(t_2) = y' (P_4 - P_3) y \quad (26)$$

Aplicando-se (13) em (26), tem-se:

$$E[SQ t_2] = E[y' (P_4 - P_3) y]$$

$$E[y' P_4 y] - E[y' P_3 y] = \text{tr}[P_4 \Sigma] + \theta_4' X_4' P_4 X_4 \theta_4 - \text{tr}[P_3 \Sigma] - \theta_3' X_3' P_3 X_3 \theta_3$$

$$\text{Mas, } P_4 \Sigma = (K \sigma_a^2 + \sigma^2) P_4$$

como P₄ é uma matriz simétrica e idempotente, tem-se que:

$$\text{tr}[P_4 \Sigma] = r[P_4 \Sigma] = (K \sigma_a^2 + \sigma^2) r[P_4]$$

mas, $r[P_4] = r[X_4] = 4 = J+2$, logo $\text{tr}[P_4\Sigma] = 4(K\sigma_a^2 + \sigma^2)$ para o exemplo em questão, e generalizando, tem-se $\text{tr}[P_4\Sigma] = (J+2)(K\sigma_a^2 + \sigma^2)$.

Da expressão $\theta_4' X_4' P_4 X_4 \theta_4$, efetuando-se as multiplicações e aplicando-se as restrições de (12), obtém-se:

$$\theta_4' X_4' P_4 X_4 \theta_4 = n\mu^2 + IK \sum_{j=1}^J b_j^2 + JK \left(\sum_{i=1}^I x_i^2 \right) t_1^2 + JK \left(\sum_{i=1}^I x_i^4 \right) t_2^2$$

em que $\sum_{i=1}^I x_i^4 = \sum_{i=1}^I (x_i^2)^2$ é a soma dos quadrados dos coeficientes de efeito quadrático do fator primário. Assim,

$$E[y' P_4 y] = (J+2)(K\sigma_a^2 + \sigma^2) + n\mu^2 + IK \sum_{j=1}^J b_j^2 + JK \left(\sum_{i=1}^I x_i^2 \right) t_1^2 + JK \left(\sum_{i=1}^I x_i^4 \right) t_2^2$$

então

$$E[y' (P_4 - P_3) y] = [(J+2)(K\sigma_a^2 + \sigma^2) + n\mu^2 + IK \sum_{j=1}^J b_j^2 + JK \left(\sum_{i=1}^I x_i^2 \right) t_1^2 + JK \left(\sum_{i=1}^I x_i^4 \right) t_2^2] - [(J+1)(K\sigma_a^2 + \sigma^2) + n\mu^2 + IK \sum_{j=1}^J b_j^2 + JK \left(\sum_{i=1}^I x_i^2 \right) t_1^2]$$

Portanto, a esperança matemática da redução, devido à regressão quadrática do fator primário, é:

$$E[SQt_2] = (K\sigma_a^2 + \sigma^2) + JK \left(\sum_{i=1}^I x_i^4 \right) t_2^2 \quad (27)$$

Do mesmo modo que apresentado para $SQ(t_1)$ e $SQ(t_2)$, pode-se fazer para qualquer outro grau de polinômio que se desejar, até atingir o grau $I - 1$. Assim, para um polinômio de grau $I - 1$, tem-se que:

$$E[SQ(t_{1..l})] = R(t / \mu, b, t_1, \dots, t_{l-1}) = (K\sigma_a^2 + \sigma^2) + JK \left(\sum_{i=1}^l x_i^{i-1} \right)^2 t_{l-1}^2.$$

4.1.5 Esperança matemática de SQ(a)

Para a determinação da soma de quadrados de resíduo em nível de parcelas, ou simplesmente resíduo(a), representada por SQ(a), considerandou-se a matriz X_5 e o modelo reduzido

$$y_{ijk} = \mu + b_j + t_1 x_i + t_2 x_i^2 + t b_{ij} + e_{ijk} \quad (28)$$

Na forma matricial, o modelo fica:

$$y = X_5 \theta_5 + e$$

O sistema de equações normais é:

$$X_5' X_5 \theta_5^\circ = X_5' y$$

Uma das soluções do sistema pode ser:

$$\theta_5^\circ = (X_5' X_5)^G X_5' y$$

A soma de quadrados para o resíduo(a) é:

$$SQ \theta_5 = SQ(a) = R(tb / \mu, b, t_1, t_2) = R(\mu, b, t_1, t_2, tb) - R(\mu, b, t_1, t_2)$$

$$R(tb / \mu, b, t_1, t_2) = \theta_5^\circ X_5' y - \theta_4^\circ X_4' y$$

$$R(tb / \mu, b, t_1, t_2) = y' P_5 y - y' P_4 y$$

$$SQ(a) = y' (P_5 - P_4) y \quad (29)$$

Aplicando-se (13) em (29), tem-se:

$$E[SQ(a)] = E[y' (P_5 - P_4) y] = E[y' P_5 y] - E[y' P_4 y]$$

$$E[y' P_5 y] - E[y' P_4 y] = \text{tr}[P_5 \Sigma] + \theta_5' X_5' P_5 X_5 \theta_5 - \text{tr}[P_4 \Sigma] - \theta_4' X_4' P_4 X_4 \theta_4$$

$$\text{Mas, } P_5 \Sigma = (K\sigma_a^2 + \sigma^2) P_5$$

como P_5 é uma matriz simétrica e idempotente, tem-se que:

$$\text{tr}[P_5\Sigma] = r[P_5\Sigma] = (K\sigma_a^2 + \sigma^2) r[P_5]$$

mas, $r[P_5] = r[X_5] = IJ$, no caso de um experimento com I tratamentos primários e J repetições e para o exemplo em questão $r[X_5] = 6$, então

$$\text{tr}[P_5\Sigma] = IJ (K\sigma_a^2 + \sigma^2)$$

Efetuada-se as multiplicações e aplicando-se as restrições de (12), obteve-se:

$$\theta_5' X_5' P_5 X_5 \theta_5 = n\mu^2 + IK \sum_{j=1}^J b_j^2 + JK \left(\sum_{i=1}^I x_i^2 \right) t_1^2 + JK \left(\sum_{i=1}^I x_i^4 \right) t_2^2$$

Assim,

$$E[y' P_5 y] = IJ(\sigma_a^2 + \sigma^2) + n\mu^2 + IK \sum_{j=1}^J b_j^2 + JK \left(\sum_{i=1}^I x_i^2 \right) t_1^2 + JK \left(\sum_{i=1}^I x_i^4 \right) t_2^2$$

é a esperança matemática da soma de quadrados de parcelas. Então,

$$E[y'(P_5 - P_4)y] = [IJ(K\sigma_a^2 + \sigma^2) + n\mu^2 + IK \sum_{j=1}^J b_j^2 + JK \left(\sum_{i=1}^I x_i^2 \right) t_1^2 + JK \left(\sum_{i=1}^I x_i^4 \right) t_2^2] -$$

$$[(I+J-1)(K\sigma_a^2 + \sigma^2) + n\mu^2 + IK \sum_{j=1}^J b_j^2 + JK \left(\sum_{i=1}^I x_i^2 \right) t_1^2 + JK \left(\sum_{i=1}^I x_i^4 \right) t_2^2]$$

Portanto, para o exemplo considerado

$$E[SQ(a)] = 2 (K\sigma_a^2 + \sigma^2)$$

E generalizando, tem-se:

$$E[SQ(a)] = (I-1)(J-1) (K\sigma_a^2 + \sigma^2) \quad (30)$$

4.1.6 Esperança matemática de $SQ(v_1)$

Considerando-se a matriz X_6 e o modelo reduzido

$$y_{ijk} = \mu + b_j + t_1 x_i + t_2 x_i^2 + tb_{ij} + v_1 z_k + e_{ijk} \quad (31)$$

Na forma matricial, o modelo fica:

$$y = X_6\theta_6 + e$$

O sistema de equações normais é:

$$X_6'X_6\theta_6^o = X_6'y$$

Uma das soluções do sistema pode ser:

$$\theta_6^o = (X_6'X_6)^G X_6'y$$

A soma de quadrados para o efeito linear do tratamento secundário

$SQ(v_1)$ é:

$$SQ\theta_6 = SQ(v_1) = R(v_1 / \mu, b, t_1, t_2, tb) = R(\mu, b, t_1, t_2, tb, v_1) - R(\mu, b, t_1, t_2, tb)$$

$$R(v_1 / \mu, b, t_1, t_2, tb) = \theta_6^o X_6' y - \theta_5^o X_5' y$$

$$R(v_1 / \mu, b, t_1, t_2) = y' P_6 y - y' P_5 y$$

$$SQ(v_1) = y'(P_6 - P_5)y \quad (32)$$

Aplicando-se (13) em (32), tem-se:

$$E[SQv_1] = E[y'(P_6 - P_5)y] = E[y'P_6y] - E[y'P_5y]$$

$$E[y'P_6y] - E[y'P_5y] = \text{tr}[(P_6 - P_5)\Sigma] + \theta_6' X_6' P_6 X_6 \theta_6 - \theta_5' X_5' P_5 X_5 \theta_5$$

$$\text{Mas, } (P_6 - P_5)\Sigma = \sigma^2(P_6 - P_5)$$

como P_6 é uma matriz simétrica e idempotente, tem-se que:

$$r[P_6] = r[X_6] = 7 \text{ ou } r[P_6] = IJ + 1$$

$$r[P_5] = r[X_5] = 6 \text{ ou } r[P_5] = IJ$$

Efetuada-se as multiplicações e aplicando-se as restrições de (12), obtém-se:

$$\theta_6' X_6' P_6 X_6 \theta_6 = n\mu^2 + IK \sum_{j=1}^J b_j^2 + JK \left(\sum_{i=1}^I x_i^2 \right) t_1^2 + JK \left(\sum_{i=1}^I x_i^4 \right) t_2^2 + IJ \left(\sum_{k=1}^K z_k^2 \right) v_1^2$$

sendo $\sum_{k=1}^K z_k^2$ a soma dos quadrados dos coeficientes de efeito linear do fator secundário. Assim,

$$E[y' P_6 y] = (IJ + 1)\sigma^2 + n\mu^2 + IK \sum_{j=1}^J b_j^2 + JK \left(\sum_{i=1}^I x_i^2 \right) t_1^2 + JK \left(\sum_{i=1}^I x_i^4 \right) t_2^2 + IJ \left(\sum_{k=1}^K z_k^2 \right) v_1^2$$

então:

$$E[y'(P_6 - P_4)y] = [(IJ+1)\sigma^2 + n\mu^2 + IK \sum_{j=1}^J b_j^2 + JK \left(\sum_{i=1}^I x_i^2 \right) t_1^2 + JK \left(\sum_{i=1}^I x_i^4 \right) t_2^2 + IJ \left(\sum_{k=1}^K z_k^2 \right) v_1^2] - [(IJ)\sigma^2 + n\mu^2 + IK \sum_{j=1}^J b_j^2 + JK \left(\sum_{i=1}^I x_i^2 \right) t_1^2 + JK \left(\sum_{i=1}^I x_i^4 \right) t_2^2]$$

Portanto, a esperança matemática da soma de quadrados de efeito linear do fator secundário ou da redução, devido à regressão linear (do fator secundário) ajustado para μ , b , t_1 , t_2 , tb é:

$$E[SQv_1] = \sigma^2 + IJ \left(\sum_{k=1}^K z_k^2 \right) v_1^2 \quad (33)$$

4.1.7 Esperança matemática de SQ(v_2)

Considerando-se a matriz X_7 e o modelo reduzido

$$y_{ijk} = \mu + b_j + t_1 x_i + t_2 x_i^2 + tb_{ij} + v_1 z_k + v_2 z_k^2 + e_{ijk} \quad (34)$$

Na forma matricial, o modelo fica:

$$y = X_7 \theta_7 + e$$

O sistema de equações normais é:

$$X_7' X_7 \theta_7^o = X_7' y$$

Uma das soluções do sistema pode ser:

$$\theta_7^0 = (X_7' X_7)^G X_7' y$$

A soma de quadrados para o efeito quadrático do tratamento secundário ($v_2 z_k^2$) é:

$$SQ\theta_7 = SQ(v_2) = R(v_2 / \mu, b, t_1, t_2, tb, v_1) = R(\mu, b, t_1, t_2, tb, v_1, v_2) - R(\mu, b, t_1, t_2, tb, v_1)$$

$$R(v_2 / \mu, b, t_1, t_2, tb, v_1) = \theta_7^0 X_7' y - \theta_6^0 X_6' y$$

$$R(v_2 / \mu, b, t_1, t_2, tb, v_1) = y' P_7 y - y' P_6 y$$

$$SQ(v_2) = y'(P_7 - P_6)y \quad (35)$$

Aplicando-se (13) em (35), tem-se:

$$E[SQv_2] = E[y'(P_7 - P_6)y] = E[y'P_7y] - E[y'P_6y]$$

$$E[y'P_7y] - E[y'P_6y] = \text{tr}[(P_7 - P_6)\Sigma] + \theta_7' X_7' P_7 X_7 \theta_7 - \theta_6' X_6' P_6 X_6 \theta_6$$

$$\text{Mas, } (P_7 - P_6)\Sigma = \sigma^2(P_7 - P_6) = \sigma^2 P_7 - \sigma^2 P_6$$

como P_7 é uma matriz simétrica e idempotente, tem-se que:

$$\text{tr}[P_7\Sigma] = r[P_7\Sigma] = \sigma^2 r[P_7]$$

mas, $r[P_7] = r[X_7] = IJ+2 = 8$, logo

$$\text{tr}[P_7\Sigma] = (IJ+2)\sigma^2$$

Efetuando-se as multiplicações e aplicando-se as restrições de (12), obtém-se:

$$\theta_7' X_7' P_7 X_7 \theta_7 = n\mu^2 + IK \sum_{j=1}^I b_j^2 + JK \left(\sum_{i=1}^I x_i^2 \right) t_1^2 + JK \left(\sum_{i=1}^I x_i^4 \right) t_2^2 + IJ \left(\sum_{k=1}^K z_k^2 \right) v_1^2 + IJ \left(\sum_{k=1}^K z_k^4 \right) v_2^2$$

em que $\sum_{k=1}^K z_k^4 = \sum_{k=1}^K (z_k^2)^2$ é a soma dos quadrados dos coeficientes do efeito

quadrático do fator secundário. Assim,

$$E[y'P_7y] = (IJ+2)\sigma^2 + n\mu^2 + IK \sum_{j=1}^I b_j^2 + JK \left(\sum_{i=1}^I x_i^2 \right) t_1^2 + JK \left(\sum_{i=1}^I x_i^4 \right) t_2^2 + IJ \left(\sum_{k=1}^K z_k^2 \right) v_1^2 + IJ \left(\sum_{k=1}^K z_k^4 \right) v_2^2 \quad (36)$$

então

$$\begin{aligned}
E[y'(P_7 - P_6)y] = & [(IJ+2)\sigma^2 + n\mu^2 + IK \sum_{j=1}^J b_j^2 + JK(\sum_{i=1}^I x_i^2)t_1^2 + JK(\sum_{i=1}^I x_i^4)t_2^2 + \\
& + IJ(\sum_{k=1}^K z_k^2)v_1^2 + IJ(\sum_{k=1}^K z_k^4)v_2^2] - [(IJ+1)\sigma^2 + n\mu^2 + IK \sum_{j=1}^J b_j^2 + \\
& + JK(\sum_{i=1}^I x_i^2)t_1^2 + JK(\sum_{i=1}^I x_i^4)t_2^2 + IJ(\sum_{k=1}^K z_k^2)v_1^2]
\end{aligned}$$

Portanto, a esperança matemática da soma de quadrados de efeito quadrático (regressão quadrática) do fator secundário é:

$$E[SQv_2] = \sigma^2 + IJ(\sum_{k=1}^K z_k^4)v_2^2 \quad (37)$$

E desse modo, pode-se usar um polinômio de grau até $K - 1$, em que se tem:

$$E[SQv_{K-1}] = \sigma^2 + IJ(\sum_{k=1}^K z_k^{K-1})^2 v_{K-1}^2$$

4.1.8 Esperança matemática de $SQ(tv_{11})$

Considerando-se a matriz X_8 e o modelo reduzido

$$y_{ijk} = \mu + b_j + t_1x_i + t_2x_i^2 + tb_{ij} + v_1z_k + v_2z_k^2 + tv_{11}x_i z_k + e_{ijk} \quad (38)$$

Na forma matricial, o modelo fica:

$$y = X_8\theta_8 + e$$

O sistema de equações normais é:

$$X_8'X_8\theta_8^o = X_8'y$$

Uma das soluções do sistema pode ser:

$$\theta_8^o = (X_8'X_8)^G X_8'y$$

A soma de quadrados para a interação de efeito linear do tratamento primário X efeito linear do tratamento secundário $SQ(tv_{11})$ é:

$$\begin{aligned} SQ\theta_8 &= SQ(tv_{11}) = R(tv_{11} / \mu, b, t_1, t_2, tb, v_1, v_2) = \\ &= R(\mu, b, t_1, t_2, tb, v_1, v_2, tv_{11}) - R(\mu, b, t_1, t_2, tb, v_1, v_2) \\ R(tv_{11} / \mu, b, t_1, t_2, tb, v_1, v_2) &= \theta_8' X_8' y - \theta_7' X_7' y \\ R(tv_{11} / \mu, b, t_1, t_2, tb, v_1, v_2) &= y' P_8 y - y' P_7 y \\ SQ(tv_{11}) &= y' (P_8 - P_7) y \end{aligned} \quad (39)$$

Aplicando-se (13) em (39), tem-se:

$$E[SQ(tv_{11})] = E[y' (P_8 - P_7) y] = E[y' P_8 y] - E[y' P_7 y]$$

$$E[y' P_8 y] - E[y' P_7 y] = \text{tr}[(P_8 - P_7)\Sigma] + \theta_8' X_8' P_8 X_8 \theta_8 - \theta_7' X_7' P_7 X_7 \theta_7$$

$$\text{Mas, } (P_8 - P_7)\Sigma = \sigma^2 (P_8 - P_7) = \sigma^2 P_8 - \sigma^2 P_7$$

como P_8 é uma matriz simétrica e idempotente, tem-se que:

$$\text{tr}[P_8 \Sigma] = r[P_8 \Sigma] = \sigma^2 r[P_8]$$

mas, $r[P_8] = r[X_8] = IJ + K = 9$, logo:

$$\text{tr}[P_8 \Sigma] = (IJ + K)\sigma^2$$

Efetutando-se as multiplicações e aplicando-se as restrições de (12), obtém-se:

$$\begin{aligned} \theta_8' X_8' P_8 X_8 \theta_8 &= n\mu^2 + IK \sum_{j=1}^J b_j^2 + JK \left(\sum_{i=1}^I x_i^2 \right) t_1^2 + JK \left(\sum_{i=1}^I x_i^4 \right) t_2^2 + IJ \left(\sum_{k=1}^K z_k^2 \right) v_1^2 + IJ \left(\sum_{k=1}^K z_k^4 \right) v_2^2 + \\ &+ J \left(\sum_{i=1, k=1}^{I, K} x_i^2 z_k^2 \right) (tv_{11})^2 \end{aligned}$$

em que $\sum_{i=1, k=1}^{I, K} x_i^2 z_k^2$ é a soma dos quadrados dos efeitos da interação linear do fatores

primário e secundário. Assim,

$$E[y'P_8y] = (U+K)\sigma^2 + n\mu^2 + IK\sum_{j=1}^J b_j^2 + JK(\sum_{i=1}^I x_i^2)t_1^2 + JK(\sum_{i=1}^I x_i^4)t_2^2 + IK(\sum_{k=1}^K z_k^2)v_1^2 + IK(\sum_{k=1}^K z_k^4)v_2^2 + J(\sum_{i=1, k=1}^{I,K} x_i^2 z_k^2)(tv)_{11}^2 \quad (40)$$

Subtraindo-se (40) de (36), tem-se que a esperança matemática da soma de quadrados da interação linear dos fatores primários e secundários é:

$$E[SQ(tv_{11})] = \sigma^2 + J(\sum_{i=1, k=1}^{I,K} x_i^2 z_k^2)(tv)_{11}^2 \quad (41)$$

4.1.9 Esperança matemática de $SQ(tv_{12})$

Considerando-se a matriz X_9 e o modelo reduzido

$$y_{ijk} = \mu + b_j + t_1 x_i + t_2 x_i^2 + tb_{ij} + v_1 z_k + v_2 z_k^2 + tv_{11} x_i z_k + tv_{12} x_i z_k^2 + e_{ijk} \quad (42)$$

Na forma matricial, o modelo fica:

$$y = X_9 \theta_9 + e$$

O sistema de equações normais é:

$$X_9' X_9 \theta_9 = X_9' y$$

Uma das soluções do sistema pode ser:

$$\theta_9 = (X_9' X_9)^G X_9' y$$

A soma de quadrados para a interação de efeito linear do tratamento primário X efeito quadrático do tratamento secundário $SQ(tv_{12})$ é:

$$\begin{aligned} SQ\theta_9 = SQ(tv_{12}) &= R(tv_{12} / \mu, b, t_1, t_2, tb, v_1, v_2, tv_{11}) = \\ &= R(\mu, b, t_1, t_2, tb, v_1, v_2, tv_{11}, tv_{12}) - \\ &\quad - R(\mu, b, t_1, t_2, tb, v_1, v_2, tv_{11}) \end{aligned}$$

$$R(tv_{12} / \mu, b, t_1, t_2, tb, v_1, v_2, tv_{11}) = \theta_9' X_9' y - \theta_8' X_8' y$$

$$R(tv_{12} / \mu, b, t_1, t_2, tb, v_1, v_2, tv_{11}) = y' P_9 y - y' P_8 y$$

$$SQ(tv_{12}) = y'(P_9 - P_8)y \quad (43)$$

Aplicando-se (13) em (43), tem-se:

$$E[SQ(tv_{12})] = E[y'(P_9 - P_8)y] = E[y'P_9y] - E[y'P_8y]$$

$$E[y'P_9y] - E[y'P_8y] = \text{tr}[(P_9 - P_8)\Sigma] + \theta_9'X_9'P_9X_9\theta_9 - \theta_8'X_8'P_8X_8\theta_8$$

$$\text{Mas, } (P_9 - P_8)\Sigma = \sigma^2(P_9 - P_8) = \sigma^2P_9 - \sigma^2P_8$$

como P_9 é uma matriz simétrica e idempotente, tem-se que:

$$\text{tr}[P_9\Sigma] = r[P_9]\Sigma = \sigma^2r[P_9]$$

mas, $r[P_9] = r[X_9] = IJ+K+1 = 10$, logo

$$\text{tr}[P_9\Sigma] = (IJ+K+1)\sigma^2 \text{ e}$$

Efetuando-se as multiplicações e aplicando-se as restrições de (12), obtém-se:

$$\begin{aligned} \theta_9'X_9'P_9X_9\theta_9 = & n\mu^2 + IK\sum_{j=1}^J b_j^2 + JK\left(\sum_{i=1}^I x_i^2\right)t_1^2 + JK\left(\sum_{i=1}^I x_i^4\right)t_2^2 + IJ\left(\sum_{k=1}^K z_k^2\right)v_1^2 + IJ\left(\sum_{k=1}^K z_k^4\right)v_2^2 + \\ & + J\left(\sum_{i=1, k=1}^{I, K} x_i^2 z_k^2\right)(tv)_{11}^2 + J\left(\sum_{i=1, k=1}^{I, K} x_i^2 z_k^4\right)(tv)_{12}^2 \end{aligned}$$

em que $\sum_{i=1, k=1}^{I, K} x_i^2 (z_k^2)^2$ é a soma dos quadrados dos coeficientes da interação linear do

fator primário e quadrático do fator secundário. Assim,

$$\begin{aligned} E[y'P_9y] = & (IJ+K+1)\sigma^2 + n\mu^2 + IK\sum_{j=1}^J b_j^2 + JK\left(\sum_{i=1}^I x_i^2\right)t_1^2 + JK\left(\sum_{i=1}^I x_i^4\right)t_2^2 + IJ\left(\sum_{k=1}^K z_k^2\right)v_1^2 + \\ & + IJ\left(\sum_{k=1}^K z_k^4\right)v_2^2 + J\left(\sum_{i=1, k=1}^{I, K} x_i^2 z_k^2\right)(tv)_{11}^2 + J\left(\sum_{i=1, k=1}^{I, K} x_i^2 z_k^4\right)(tv)_{12}^2 \end{aligned} \quad (44)$$

Subtraindo-se (44) de (40), tem-se que:

$$E[SQ(tv_{12})] = \sigma^2 + J\left(\sum_{i=1, k=1}^{I, K} x_i^2 z_k^4\right)(tv)_{12}^2 \quad (45)$$

4.1.10 Esperança matemática de SQ(tv₂₁)

Considerando-se a matriz X₁₀ e o modelo reduzido

$$y_{ijk} = \mu + b_j + t_1 x_i + t_2 x_i^2 + tb_{ij} + v_1 z_k + v_2 z_k^2 + tv_{11} x_i z_k + tv_{12} x_i z_k^2 + tv_{21} x_i^2 z_k + e_{ijk} \quad (46)$$

Na forma matricial, o modelo fica:

$$y = X_{10} \theta_{10} + e$$

O sistema de equações normais é:

$$X'_{10} X_{10} \theta_{10}^o = X'_{10} y$$

Uma das soluções do sistema pode ser:

$$\theta_{10}^o = (X'_{10} X_{10})^G X'_{10} y$$

A soma de quadrados para a interação de efeito quadrático do tratamento primário X efeito linear do tratamento secundário (tv₂₁) é:

$$\begin{aligned} SQ\theta_{10} = SQ(tv_{21}) &= R(tv_{21} / \mu, b, t_1, t_2, tb, v_1, v_2, tv_{11}, tv_{12}) = \\ &= R(\mu, b, t_1, t_2, tb, v_1, v_2, tv_{11}, tv_{12}, tv_{21}) - \\ &\quad - R(\mu, b, t_1, t_2, tb, v_1, v_2, tv_{11}, tv_{12}) \end{aligned}$$

$$R(tv_{21} / \mu, b, t_1, t_2, tb, v_1, v_2, tv_{11}, tv_{12}) = \theta_{10}^o X'_{10} y - \theta_9^o X_9 y$$

$$R(tv_{21} / \mu, b, t_1, t_2, tb, v_1, v_2, tv_{11}, tv_{12}) = y' P_{10} y - y' P_9 y$$

$$SQ(tv_{21}) = y'(P_{10} - P_9)y \quad (47)$$

Aplicando-se (13) em (47), tem-se

$$E[SQtv_{21}] = E[y'(P_{10} - P_9)y] = E[y' P_{10} y] - E[y' P_9 y]$$

$$E[SQtv_{21}] = \text{tr}[(P_{10} - P_9)\Sigma] + \theta_{10}' X'_{10} P_{10} X_{10} \theta_{10} - \theta_9' X_9 P_9 X_9 \theta_9$$

$$\text{Mas, } (P_{10} - P_9)\Sigma = \sigma^2(P_{10} - P_9) = \sigma^2 P_{10} - \sigma^2 P_9$$

como P₁₀ é uma matriz simétrica e idempotente, tem-se que:

$$\text{tr}[P_{10}\Sigma] = r[P_{10}]\Sigma = \sigma^2 r[P_{10}]$$

mas, $r[P_{10}] = r[X_{10}] = IJ+I+K-1 = 11$, logo

$$\text{tr}[P_{10}\Sigma] = (IJ+I+K-1)\sigma^2$$

Efetuando-se as multiplicações e aplicando-se as restrições de (12), obtém-se:

$$\begin{aligned} \theta'_{10} X'_{10} P_{10} X_{10} \theta_{10} = & n\mu^2 + IK \sum_{j=1}^J b_j^2 + JK \left(\sum_{i=1}^I x_i^2 \right) t_1^2 + JK \left(\sum_{i=1}^I x_i^4 \right) t_2^2 + IJ \left(\sum_{k=1}^K z_k^2 \right) v_1^2 + IJ \left(\sum_{k=1}^K z_k^4 \right) v_2^2 + \\ & + J \left(\sum_{i=1, k=1}^{IK} x_i^2 z_k^2 \right) (tv)_{11}^2 + J \left(\sum_{i=1, k=1}^{IK} x_i^2 z_k^4 \right) (tv)_{12}^2 + J \left(\sum_{i=1, k=1}^{IK} x_i^4 z_k^2 \right) (tv)_{21}^2 \end{aligned}$$

em que $\sum_{i=1, k=1}^{IK} (x_i^2)^2 z_k^2$ é a soma dos quadrados dos coeficientes da interação

quadrática do fator primário com linear do fator secundário. Assim,

$$\begin{aligned} E[y' P_{10} y] = & (IJ+I+K-1)\sigma^2 + n\mu^2 + IK \sum_{j=1}^J b_j^2 + JK \left(\sum_{i=1}^I x_i^2 \right) t_1^2 + JK \left(\sum_{i=1}^I x_i^4 \right) t_2^2 + IJ \left(\sum_{k=1}^K z_k^2 \right) v_1^2 + \\ & + IJ \left(\sum_{k=1}^K z_k^4 \right) v_2^2 + J \left(\sum_{i=1, k=1}^{IK} x_i^2 z_k^2 \right) (tv)_{11}^2 + J \left(\sum_{i=1, k=1}^{IK} x_i^2 z_k^4 \right) (tv)_{12}^2 + J \left(\sum_{i=1, k=1}^{IK} x_i^4 z_k^2 \right) (tv)_{21}^2 \end{aligned} \quad (48)$$

Subtraindo-se (48) de (44), tem-se que a esperança matemática da soma de quadrados da interação quadrática do fator primário com linear do fator secundário, é:

$$E[SQ_{tv_{21}}] = \sigma^2 + J \left(\sum_{i=1, k=1}^{IK} x_i^4 z_k^2 \right) (tv)_{21}^2 \quad (49)$$

4.1.11 Esperança matemática de $SQ(tv_{22})$

Considerando-se a matriz X_{11} e o modelo reduzido

$$y_{ijk} = \mu + b_j + t_1 x_i + t_2 x_i^2 + tb_j + v_1 z_k + v_2 z_k^2 + tv_{11} x_i z_k + tv_{12} x_i z_k^2 + tv_{21} x_i^2 z_k + tv_{22} x_i^2 z_k^2 + e_{ijk} \quad (50)$$

Na forma matricial, o modelo fica:

$$y = X_{11}\theta_{11} + e$$

O sistema de equações normais é:

$$X'_{11}X_{11}\theta_{11}^o = X'_{11}y$$

Uma das soluções do sistema pode ser:

$$\theta_{11}^o = (X'_{11}X_{11})^G X'_{11}y$$

A soma de quadrados para a interação de efeito quadrático do tratamento primário X efeito quadrático do tratamento secundário $SQ(tv_{22})$ é:

$$\begin{aligned} SQ\theta_{11} = SQ(tv_{22}) &= R(tv_{22} / \mu, b, t_1, t_2, tb, v_1, v_2, tv_{11}, tv_{12}, tv_{21}) = \\ &= R(\mu, b, t_1, t_2, tb, v_1, v_2, tv_{11}, tv_{12}, tv_{21}, tv_{22}) - \\ &\quad - R(\mu, b, t_1, t_2, tb, v_1, v_2, tv_{11}, tv_{12}, tv_{21}) \\ R(tv_{22} / \mu, b, t_1, t_2, tb, v_1, v_2, tv_{11}, tv_{12}, tv_{21}) &= \theta_{11}^o X'_{11}y - \theta_{10}^o X'_{10}y \\ R(tv_{22} / \mu, b, t_1, t_2, tb, v_1, v_2, tv_{11}, tv_{12}, tv_{21}) &= y'P_{11}y - y'P_{10}y \\ SQ(tv_{22}) &= y'(P_{11} - P_{10})y \end{aligned} \quad (51)$$

Aplicando-se (13) em (51), tem-se:

$$E[SQ(tv_{22})] = E[y'(P_{11} - P_{10})y] = E[y'P_{11}y] - E[y'P_{10}y]$$

$$E[SQ(tv_{22})] = \text{tr}[(P_{11} - P_{10})\Sigma] + \theta_{11}'X'_{11}P_{11}X_{11}\theta_{11} - \theta_{10}'X'_{10}P_{10}X_{10}\theta_{10}$$

$$\text{Mas, } (P_{11} - P_{10})\Sigma = \sigma^2(P_{11} - P_{10}) = \sigma^2P_{11} - \sigma^2P_{10}$$

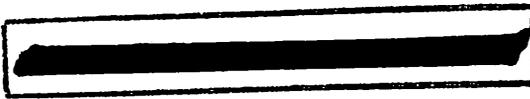
como P_{11} é uma matriz simétrica e idempotente, tem-se que:

$$\text{tr}[P_{11}\Sigma] = r[P_{11}]\Sigma = \sigma^2r[P_{11}]$$

mas, $r[P_{11}] = r[X_{11}] = IJ+I+K = 12$, logo

$$\text{tr}[P_{11}\Sigma] = (IJ+I+K)\sigma^2$$

Efetuando-se as multiplicações e aplicando-se as restrições de (12), obtém-se:



$$\theta'_{11} X'_{11} P_{11} X_{11} \theta_{11} = n\mu^2 + IK \sum_{j=1}^J b_j^2 + JK \left(\sum_{i=1}^I x_i^2 \right) t_1^2 + JK \left(\sum_{i=1}^I x_i^4 \right) t_2^2 + IJ \left(\sum_{k=1}^K z_k^2 \right) v_1^2 + IJ \left(\sum_{k=1}^K z_k^4 \right) v_2^2 +$$

$$+ J \left(\sum_{i=1, k=1}^{IK} x_i^2 z_k^2 \right) (tv)_{11}^2 + J \left(\sum_{i=1, k=1}^{IK} x_i^2 z_k^4 \right) (tv)_{12}^2 + J \left(\sum_{i=1, k=1}^{IK} x_i^4 z_k^2 \right) (tv)_{21}^2 + J \left(\sum_{i=1, k=1}^{IK} x_i^4 z_k^4 \right) (tv)_{22}^2$$

em que $\sum_{i=1, k=1}^{IK} (x_i^2)^2 (z_k^2)^2$ é a soma dos quadrados dos coeficientes da interação quadrática do fator primário com quadrático do fator secundário. Assim,

$$E[y P_{11} y] = (IJ + I + K)\sigma^2 + n\mu^2 + IK \sum_{j=1}^J b_j^2 + JK \left(\sum_{i=1}^I x_i^2 \right) t_1^2 + JK \left(\sum_{i=1}^I x_i^4 \right) t_2^2 + IJ \left(\sum_{k=1}^K z_k^2 \right) v_1^2 +$$

$$+ IJ \left(\sum_{k=1}^K z_k^4 \right) v_2^2 + J \left(\sum_{i=1, k=1}^{IK} x_i^2 z_k^2 \right) (tv)_{11}^2 + J \left(\sum_{i=1, k=1}^{IK} x_i^2 z_k^4 \right) (tv)_{12}^2 + J \left(\sum_{i=1, k=1}^{IK} x_i^4 z_k^2 \right) (tv)_{21}^2 + (52)$$

$$+ J \left(\sum_{i=1, k=1}^{IK} x_i^4 z_k^4 \right) (tv)_{22}^2$$

Subtraindo-se (52) de (48), tem-se que:

$$E[SQ(tv_{22})] = \sigma^2 + J \left(\sum_{i=1, k=1}^{IK} x_i^4 z_k^4 \right) (tv)_{22}^2 \quad (53)$$

De modo análogo, pode-se obter a esperança matemática relativa a qualquer outra fonte de variação que tenha interesse, em uma determinada pesquisa.

4.2 Análise de variância com decomposição dos efeitos de tratamentos

O esquema de análise de variância com decomposição dos efeitos de tratamentos sob a forma de superfície de resposta, as respectivas esperanças matemáticas de quadrados médios e critérios para obtenção da estatística F, estão apresentados na Tabela 10.

TABELA 10. Esquema de análise de variância com as fontes de variação, graus de liberdade, esperanças matemáticas de quadrados médios e critérios para obtenção da estatística F.

| FV | GL | E[QM] | QM | F |
|--------------------------------|-----------------|---|-----------------|----------------------------------|
| Blocos | J - 1 | $(\sigma^2 + K\sigma_a^2) + \frac{IK \sum_j b_j^2}{J-1}$ | V ₁ | V ₁ /V ₅ |
| T Linear(t ₁) | 1 | $(\sigma^2 + K\sigma_a^2) + JK(\sum_i x_i^2)t_i^2$ | V ₂ | V ₂ /V ₅ |
| T Quadrático(t ₂) | 1 | $(\sigma^2 + K\sigma_a^2) + JK(\sum_i x_i^4)t_i^2$ | V ₃ | V ₃ /V ₅ |
| ... | ... | ... | ... | ... |
| T Grau (I-1) | 1 | $(K\sigma_a^2 + \sigma^2) + JK(\sum_{i=1}^I x_i^{i+1})^2 t_{i-1}^2$ | V ₄ | V ₄ /V ₅ |
| Resíduo(a) | (I - 1)(J - 1) | $\sigma^2 + K\sigma_a^2$ | V ₅ | |
| T' Linear(v ₁) | 1 | $\sigma^2 + IJ(\sum_k z_k^2)v_1^2$ | V ₆ | V ₆ /V ₁₄ |
| T' Quadrático(v ₂) | 1 | $\sigma^2 + IJ(\sum_k z_k^4)v_2^2$ | V ₇ | V ₇ /V ₁₄ |
| ... | ... | ... | ... | ... |
| T' Grau (K-1) | 1 | $\sigma^2 + IJ(\sum_{k=1}^K z_k^{K-1})^2 v_{K-1}^2$ | V ₈ | V ₈ /V ₁₄ |
| tv ₁₁ | 1 | $\sigma^2 + J(\sum_{i=1, k=1}^{I, K} x_i^2 z_k^2)(tv)_{11}^2$ | V ₉ | V ₉ /V ₁₄ |
| tv ₁₂ | 1 | $\sigma^2 + J(\sum_{i=1, k=1}^{I, K} x_i^2 z_k^4)(tv)_{12}^2$ | V ₁₀ | V ₁₀ /V ₁₄ |
| tv ₂₁ | 1 | $\sigma^2 + J(\sum_{i=1, k=1}^{I, K} x_i^4 z_k^2)(tv)_{21}^2$ | V ₁₁ | V ₁₁ /V ₁₄ |
| tv ₂₂ | 1 | $\sigma^2 + J(\sum_{i=1, k=1}^{I, K} x_i^4 z_k^4)(tv)_{22}^2$ | V ₁₂ | V ₁₂ /V ₁₄ |
| ... | ... | ... | ... | ... |
| tv _{(I-1)(K-1)} | 1 | $\sigma^2 + J(\sum_{i=1, k=1}^{I, K} (x_i^{I-1})^2 (z_k^{K-1})^2)(tv)_{(I-1)(K-1)}^2$ | V ₁₃ | V ₁₃ /V ₁₄ |
| Resíduo(b) | I(J - 1)(K - 1) | σ^2 | V ₁₄ | |

sendo que:

I: número de tratamentos primários, J: número de repetições e K: número de tratamentos secundários.

Observa-se que os estimadores de $\hat{\sigma}^2$ e $\hat{\sigma}_a^2$, são:

$$\hat{\sigma}^2 = \text{QMResíduo}(b) \text{ e } \hat{\sigma}_a^2 = \frac{\text{QMResíduo}(a) - \text{QMResíduo}(b)}{K} .$$

Assim, das esperanças matemáticas dos quadrados médios (Tabela 10), tem-se que as hipóteses de interesse são:

H_0^1 : $t_1 = 0$, efeito linear do tratamento primário;

H_0^2 : $t_2 = 0$, efeito quadrático do tratamento primário;

H_0^3 : $v_1 = 0$, efeito linear do tratamento secundário;

H_0^4 : $v_2 = 0$, efeito quadrático do tratamento secundário;

H_0^5 : $tv_{11} = 0$, efeito da interação linear X linear entre tratamento primário e tratamento secundário;

H_0^6 : $tv_{12} = 0$, efeito da interação linear X quadrática entre tratamento primário e tratamento secundário;

H_0^7 : $tv_{21} = 0$, efeito da interação quadrática X linear entre tratamento primário e tratamento secundário;

H_0^8 : $tv_{22} = 0$, efeito da interação quadrática X quadrática entre tratamento primário e tratamento secundário.

que correspondem às hipóteses de não-existência de efeito diferencial dos efeitos linear e quadrático para tratamentos primários, efeitos linear e quadrático para tratamentos secundários e de ausência de efeitos das interações linear X linear, linear X quadrática, quadrática X linear e quadrática X quadrática entre tratamentos primários e secundários, respectivamente. Os erros apropriados para se testar essas hipóteses são evidentes quando observam-se as esperanças matemáticas de quadrados médios. Desse modo, os critérios para os testes com base na Tabela 10, são os apresentados na Tabela 11.

TABELA 11. Graus de liberdade do numerador e denominador e critérios para obtenção da estatística F em função das hipóteses de interesse.

| Hipótese | GL Numerador | GL Denominador | Teste F |
|----------|--------------|-------------------|--------------------------------|
| H_0^1 | 1 | $(I - 1)(J - 1)$ | $QM_{t_1}/QM_{Resíduo(a)}$ |
| H_0^2 | 1 | $(I - 1)(J - 1)$ | $QM_{t_2}/QM_{Resíduo(a)}$ |
| H_0^3 | 1 | $I(J - 1)(K - 1)$ | $QM_{v_1}/QM_{Resíduo(b)}$ |
| H_0^4 | 1 | $I(J - 1)(K - 1)$ | $QM_{v_2}/QM_{Resíduo(b)}$ |
| H_0^5 | 1 | $I(J - 1)(K - 1)$ | $QM_{tv_{11}}/QM_{Resíduo(b)}$ |
| H_0^6 | 1 | $I(J - 1)(K - 1)$ | $QM_{tv_{12}}/QM_{Resíduo(b)}$ |
| H_0^7 | 1 | $I(J - 1)(K - 1)$ | $QM_{tv_{21}}/QM_{Resíduo(b)}$ |
| H_0^8 | 1 | $I(J - 1)(K - 1)$ | $QM_{tv_{22}}/QM_{Resíduo(b)}$ |

Observa-se que para calcular o valor do teste F para os efeitos linear (t_1) e quadrático (t_2) do tratamento primário, usa-se o $QM_{Resíduo(a)}$ como denominador, e para os efeitos linear (v_1) e quadrático (v_2) do tratamento secundário e as interações linear X linear (tv_{11}), linear X quadrática (tv_{12}), quadrática X linear (tv_{21}) e quadrática X quadrática (tv_{22}) usa-se o $QM_{Resíduo(b)}$ como denominador.

4.3 Exemplo Ilustrativo

Para ilustrar a aplicação da metodologia proposta, utilizaram-se os dados provenientes da Tabela 9. A análise de variância com decomposição dos efeitos de tratamentos sob a forma de superfície de resposta encontra-se apresentada na Tabela 12.

Observa-se pela Tabela 12, que a variável analisada (produção de trigo em kg/ha), mostrou-se significativamente influenciada pelas fontes de

variação: lâminas de irrigação, doses de nitrogênio e interação lâminas de irrigação X doses de nitrogênio, concluindo-se pela existência de efeitos de lâminas de irrigação, doses de nitrogênio e um comportamento diferenciado da aplicação dos níveis de nitrogênio nas diversas lâminas de irrigação (interação de lâminas de irrigação com doses de nitrogênio). Portanto, visto que os fatores lâmina e doses e respectiva interação foram significativos, aliados ao fato de que os níveis dos fatores são quantitativos, verifica-se que é viável a decomposição dos efeitos de tratamentos sob a forma de superfície de resposta.

TABELA 12. Análise de variância para os dados de produção de trigo (kg/ha) da Tabela 9.

| FV | GL | QM | F | Pr>F |
|--|----|-----------------|---------|--------|
| Blocos | 1 | 51.199,9999 | 0,407 | 0,5890 |
| Lâminas(L) | 2 | 9.957.173,5556 | 79,062 | 0,0125 |
| L Linear(t ₁) | 1 | 2.522.667,0000 | 20,030 | 0,0465 |
| L Quadrática(t ₂) | 1 | 17.391.660,1111 | 138,093 | 0,0072 |
| Resíduo(a) | 2 | 125.942,0000 | | |
| Nitrogênio(N) | 2 | 655.520,0556 | 11,279 | 0,0093 |
| N Linear(v ₁) | 1 | 545.706,7500 | 9,3893 | 0,0221 |
| N Quadrático(v ₂) | 1 | 765.333,3611 | 13,1681 | 0,0110 |
| Interação L x N | 4 | 297.809,1388 | 5,124 | 0,0386 |
| L Linear x N Linear(tv ₁₁) | 1 | 1.021.801,1250 | 17,581 | 0,0057 |
| Desvios | 3 | 56.478,4767 | 0,972 | 0,4654 |
| Resíduo(b) | 6 | 58.120,3333 | | |
| Total | 17 | | | |

- CV(a) = 8,26%

- CV(b) = 5,61%

A equação de regressão estimada utilizando-se o software SAS (SAS INSTITUTE, 1993) e usando as médias dos tratamentos é:

$$\hat{y}_{ik} = -6655,720 + 187,998 L_i + 42,728 N_k - 0,834 L_i^2 - 0,122 N_k^2 - 0,100 L_i N_k \quad (54)$$

através da qual pode-se estimar as produções para qualquer combinação de níveis dos fatores lâminas ($50 \leq L_i \leq 150$) e doses de nitrogênio ($60 \leq N_k \leq 180$).

Para se obter os pontos críticos desta função, tem-se o sistema de equações formado pelas derivadas parciais das produções estimadas \hat{y}_{ik} em função das lâminas (L_i) e das doses de nitrogênio (N_k), respectivamente:

$$\begin{cases} \frac{\partial \hat{y}}{\partial L} = 187,998 - 1,668 L - 0,100 N = 0 \\ \frac{\partial \hat{y}}{\partial N} = 42,728 - 0,100 L - 0,244 N = 0 \end{cases}$$

A solução desse sistema de equações fornece os níveis ótimos de lâmina de irrigação e dose de nitrogênio, que são os seguintes: $L = 104,74\%$ da ECA e $N = 132,67$ kg/ha, que proporcionam uma produção de 6.017,60 kg/ha de trigo.

Necessita-se descobrir se esta solução obtida é um ponto de máximo, de mínimo, ponto de sela ou uma indeterminação. Para isso, é preciso estudar a diferencial segunda $d^2 \hat{y}$, cujas propriedades vão depender da matriz hessiana (H).

$$H = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 \hat{y}}{\partial L^2} & \frac{\partial^2 \hat{y}}{\partial L \partial N} \\ \frac{\partial^2 \hat{y}}{\partial L \partial N} & \frac{\partial^2 \hat{y}}{\partial N^2} \end{bmatrix}$$

Deste modo, a matriz H, fica:

$$H = \begin{bmatrix} -1,668 & -0,100 \\ -0,100 & -0,244 \end{bmatrix}$$

Para se determinar a natureza do ponto crítico, pode-se analisar a matriz H por meio de seus autovalores, cujos valores são: $\lambda_1 = -1,675$ e $\lambda_2 = -0,237$. Como os autovalores são ambos negativos, tem-se, então, um ponto de máximo.

A superfície de resposta ajustada para os dados de produção de trigo, de acordo com a equação de regressão estimada, e sua representação gráfica encontram-se na Figura 1. Observa-se que, de maneira geral, houve influência de lâminas de irrigação e de doses de nitrogênio sobre a produção de trigo em kg/ha, indicando que maiores produtividades foram obtidas com lâminas de irrigação na faixa de 90 a 120% da ECA e doses de nitrogênio na faixa de 100 a 160 kg/ha. Esse fato pode também ser confirmado pela análise da Figura 2, na qual estão plotadas isoquantas obtidas a partir do modelo (54). Nota-se que houve um maior efeito das lâminas de irrigação se comparadas com os efeitos das doses de nitrogênio. Na Figura 1, as curvas com uma tendência quadrática em função de lâminas são bem mais visíveis do que aquelas em função das doses de nitrogênio.

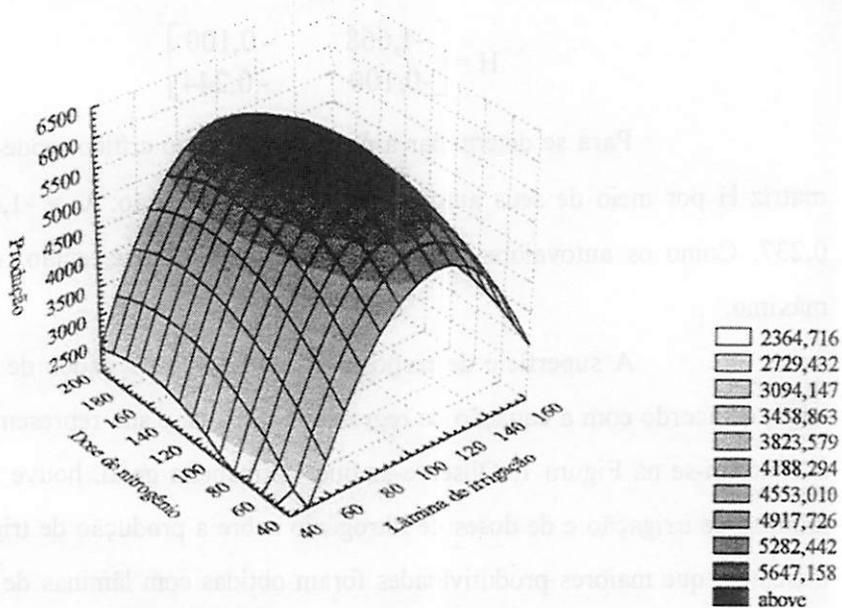


FIGURA 1. Superfície de resposta para a produção de trigo (kg/ha), em função das lâminas de irrigação (L) e de doses de nitrogênio (N). UFLA, Lavras - MG, 1999.

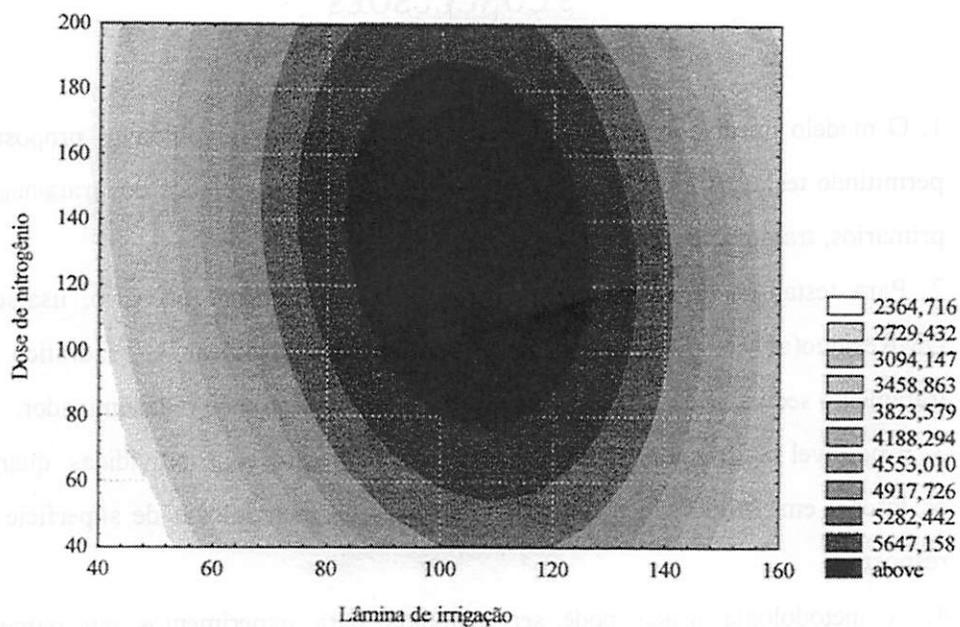


FIGURA 2. Isoquantas da produção de trigo (kg/ha), em função das lâminas de irrigação (L) e de doses de nitrogênio (N). UFLA, Lavras - MG, 1999.

5 CONCLUSÕES

- 1. O modelo linear apresentou-se adequado com relação aos objetivos propostos, permitindo testar as hipóteses básicas de nulidade sobre os efeitos dos tratamentos primários, tratamentos secundários e interação.**
- 2. Para testar os efeitos linear e quadrático do tratamento primário, usa-se o QMResíduo(a) como denominador, e para os efeitos linear e quadrático do tratamento secundário e interação, usa-se o QMResíduo(b) como denominador.**
- 3. É possível realizar a análise de experimentos em parcelas subdivididas, quando os fatores em estudo são quantitativos, através da metodologia de superfície de resposta.**
- 4. A metodologia usada pode ser adaptada para experimentos em parcelas subdivididas envolvendo fatores quantitativos com outros números de níveis.**

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- ANDERSON, R.L.; BANCROFT, T.A. **Statistical Theory in Research**. New York: McGraw-Hill Book Company, 1952. 399 p.
- BARBIM, D. **Componentes de variância**. Piracicaba: DME/ESALQ/USP, 1993. 108p.
- BOX, G.E.P.; DRAPER, N.R. A basis for the selection of response surface design. **Journal of the American Statistical Association**, Washington, v.54, p. 622-654, 1959.
- BOX, G.E.P.; DRAPER, N.R. The choice of a second order rotatable design. **Biometrika**, London, v.50, p. 335-352, 1963.
- BOX, G.E.P.; DRAPER, N.R. **Empirical model buiding and response surfaces**. New York: John Wiley, 1987. 669p.
- BOX, G.E.P.; HUNTER, J.S. Multifactor experimental designs for exploring response surfaces. **The Annals of Mathematical Statistics**, Stanford, v. 28, p. 195-241, 1957.
- BOX, G.E.P.; LUCAS, H.L. Designs of experiments in nonlinear situations. **Biometrika**, London, v.46, p. 77-90, 1959.
- BOX, G.E.P.; WILSON, K.B. On the experimental attainment of optimum conditions (with discussion). **Journal of the Royal Statistical Society, B**, London, v.13, p. 1-45, 1951.
- CALZADA BENZA, J. **Métodos Estadísticos para 1ª Investigación**. 3. ed., Lima, Peru: Editorial Jurídica, 1970. 643p.
- CAMPOS, H. de. **Aspectos da aplicação das superfícies de resposta à ensaios fatoriais 3³ de adubação**. Piracicaba: ESALQ/USP, 1967. 82p. (Tese de Livre-Docência).
- CHAKRABARTI, M.C. **Mathematics of design and analysis of experiments**. Londres: Asia Publishing House, 1962. 120p.

- COCHRAN, W.G.; COX, G.M. **Experimental designs**. 2. ed., New York: John Wiley & Sons, 1957. 611p.
- COCHRAN, W.G.; COX, G.M. **Diseños Experimentales**. 3. ed. Trilla: México, 1976. 661p.
- CONDÉ, A.R. **Estudo dos componentes de variância nos experimentos em parcelas subdivididas**. Piracicaba: ESALQ/USP, 1974. 57p. (Tese - Mestrado em Estatística e Experimentação Agronômica).
- COSTA, R.A. **Funções de produção ajustadas a ensaios fatoriais 3^3 de adubação de arroz**. Piracicaba: ESALQ/USP, 1977. 80p. (Tese - Mestrado).
- DINIZ, U.D. **Análise de Experimentos com Parcelas Medidas Sucessivamente no Tempo**. Piracicaba: ESALQ/USP, 1980. 104p. (Tese - Doutorado em Estatística e Experimentação Agronômica).
- DRAPER, N; SMITH, H. **Applied Regression Analysis**. 2. ed., New York: John Wiley, 1981.
- ECKERT, J.B.; CHAUDHRY, N.M; QUERESHI, S.A. Water and nutriente response of semi-dwarf wheat under improved management in Pakistan: agronomic and economic implications. **Agronomy Journal**, Madison, v. 70, p. 77-80, 1978.
- FEDERER, W.T. **Experimental design**. Nova York: Macmillan, 1955. 544p.
- FRIZZONE, J.A. **Funções de resposta do feijoeiro (*Phaseolus vulgaris L.*) ao uso de nitrogênio e lâmina de irrigação**. Piracicaba: ESALQ/USP, 1986. 133 p. (Tese - Doutorado em Solos e Nutrição de Plantas).
- GAJRI, P.R.; PRIHAR, S.S.; ARORA, V.K. Interdependence of nitrogen and irrigation effects on growth and inputs - use efficiencies in wheat. **Field Crops Research**, v. 31, n. 1-2, p. 71-86, 1963.
- GRAYBILL, F.A. **An introduction to linear statistical models**. New York: McGraw-Hill, 1961, v.1. 463p.

- HEADY, E.O; PESEK, J. A fertilizer production surface with specification of economic optima for corn grown on calcareous and silt loam. **Journal Farm Economics**, Ithaca, v. 36, p. 466-482, 1954.
- HOFFMANN, R.; VIEIRA, S. **Análise de Regressão: uma introdução à econometria**. 2.ed., São Paulo: HUCITEC-EDUSP, 1987. 379p. ✓
- JENSEN, D.; PESEK, J. Generalization of yield of equation in two or more variables. I. Theoretical considerations. **Agronomy Journal**, Madison, v. 51, p. 225-259, 1959.
- JORGE, J. de P.N. **Delineamento guadalupe para três fatores, analisado através de modelo de regressão polinomial quadrática**. Piracicaba: ESALQ/USP, 1980. 56p. (Tese - Mestrado em Estatística e Experimentação Agronômica).
- KEMPTHORNE, O. **The designs and analysis of experiments**. Nova York: Wiley, 1952. 631p.
- LEAL, M.L.S. **Análises de dados Experimentais com medidas repetidas**. Brasília, Universidade Federal de Brasília, 1979. 99p. (Tese - Mestrado).
- LEONARD, W.M.; CLARK, A.G. **Field Plot Technique**. Mineapolis: Burgess, 1939. 288p.
- LITTLE, T.M.; HILLS, F.J. **Statistical Methods in Agricultural Research**. Davis: University of California Press, 1972. 242p.
- LITTLE, T.M.; HILLS, F.J. **Agricultural experimentation; design and analysis**. New York: John Wiley & Sons, 1978. 349p.
- MEAD, R.; PIKE, D.J. A review of response surface methodology from a biometrics viewpoint. **Biometrics**, Raleigh, v. 31, p. 803-851, 1975.
- MILLIKEN, G.A; JOHNSON, D.E. **Analysis of messy data; designed experiments**. New York: Van Nostrand Reinhold. 1984. 485p.
- MISCHAN, M.M.; PINHO, S.Z. de. **Experimentação agronômica: dados não balanceados**. Botucatu: Fundibio, 1996. 456p.

- MONTEIRO, J.R.A. Comportamento de funções de produção em ensaios fatoriais 3^3 de adubação NPK em amendoim (*Arachis hypogaea L.*) no estado do Maranhão.** Piracicaba: ESALQ/USP, 1978. 73p. (Tese - Mestrado).
- MORAIS, A.R. Modelo de superfície de resposta com algumas variáveis auxiliares.** Piracicaba: ESALQ/USP, 1982. 98p. (Tese - Mestrado em Estatística e Experimentação Agronômica).
- MORAIS, A.R. Análise intrablocos de experimentos em parcelas subdivididas com tratamentos principais em blocos incompletos parcialmente balanceados.** Piracicaba: ESALQ/USP, 1992. 117p. (Tese - Doutorado em Estatística e Experimentação Agronômica).
- MYERS, R.H. Response Surface Methodology.** Boston: Allyn and Bacon, 1971. 225p.
- NOGUEIRA, I.R. Método geral para obtenção de tabelas de polinômios ortogonais.** *Revista de Agricultura*, Piracicaba, v.54, n.4, p.269-279, 1979.
- PEREIRA, G.T. Avaliação de alguns delineamentos compostos pequenos para experimentação agronômica.** Piracicaba: ESALQ/USP, 1995. 129p. (Tese - Doutorado em Estatística e Experimentação Agronômica).
- PIMENTEL GOMES, F. Curso de Estatística Experimental.** 13ª ed., Piracicaba: Nobel, 1990. 468p.
- PIMENTEL GOMES, F.; CONAGIN, A. Experimentos de adubação: planejamento e análise estatística.** Londrina: UEL, 1987. 102p.
- SANCHES, A. Superfícies de resposta em experimentos de adubação: o problema dos pontos de sela.** Piracicaba: ESALQ/USP, 1986. 91p. (Tese - Doutorado em Estatística e Experimentação Agronômica).
- SAS INSTITUTE, INC. SAS. Procedures Guide for computers.** 6.ed. SAS Institute, Inc. Cary, N.C., 1993.
- SATTERTHWAITE, F.E. An approximate distribution of estimates of variance components.** *Biometrics*, Raleigh, v.2, p.110-114, 1946.

- SEARLE, S.R. **Linear Models**. New York: John Wiley, 1971. 532p.
- SEARLE, S.R. **Linear Models for Unbalanced Data**. New York: John Wiley, 1987. 536p.
- STEEL, R.G.D.; TORRIE, J.H. **Principles and procedure of statistics**. 2.ed. Nova York: McGraw-Hill, 1980. 633p.
- SWOKOWSKI, E.W. **Cálculo com geometria analítica**. São Paulo: Makron Books, 1994. v.2. 763p.
- TAYLOR, J. The Comparison of Pairs of Treatments in Split-Plot Experiments. **Biometrika**, London, v.37, p. 443-444, 1950.
- TEODORO, R.E.F. **Irrigação e adubação nitrogenada na produção de forragem e grãos de aveia (*Avena sativa L.*)**. Botucatu: UNESP, 1991. 137p. (Tese - Doutorado em Irrigação e Drenagem).
- VIEIRA, S. **Aspectos das funções de produção ajustadas aos ensaios fatoriais 3³ de adubação**. Piracicaba: ESALQ/USP, 1970. 160p. (Tese - Mestrado).
- WOLFRAM, S. **MATHEMATICA: A System for Doing Mathematics by Computer**. 2.ed. Reading: Addison - Wesley, 1993. 961p.