

**DINÂMICA DE POPULAÇÕES EM AMBIENTE
ESTOCÁSTICO**

Elias Dias Coelho Neto

2006

**Ficha Catalográfica Preparada pela Divisão de Processos Técnicos da
Biblioteca Central da UFLA**

Coelho Neto, Elias Dias

Dinâmica de populações em ambiente estocástico / Elias Dias Coelho

Neto. - - Lavras : UFLA, 2006.

75 p. : il.

Orientador: Antônio Tavares da Costa Júnior.

Dissertação (Mestrado) - UFLA.

Bibliografia.

1. Equações Lotka-Volterra. 2. Holling tipo II. 3. Ruído branco. 4. Equações
diferenciais estocásticas. I. Universidade Federal de Lavras. II. Título.

CDD-519.5

ELIAS DIAS COELHO NETO

DINÂMICA DE POPULAÇÕES EM AMBIENTE ESTOCÁSTICO

Dissertação apresentada à Universidade Federal de Lavras como parte das exigências do Curso de Mestrado em Agronomia, área de concentração em Estatística e Experimentação Agropecuária, para a obtenção do título de Mestre.

Orientador

Prof. Dr. Antonio Tavares da Costa Júnior

LAVRAS

MINAS GERAIS-BRASIL

2006

Elias Dias Coelho Neto

DINÂMICA DE POPULAÇÕES EM AMBIENTE ESTOCÁSTICO

Dissertação apresentada à Universidade Federal de Lavras como parte das exigências do Curso de Mestrado em Agronomia, área de concentração em Estatística e Experimentação Agropecuária, para a obtenção do título de Mestre.

APROVADA em 31 de julho de 2006

Prof. Dr. Samuel Maier Kurcbart UFSJ

Prof. Dr. Sérgio Martins de Souza UFLA

Prof. Dr. Iraziet da Cunha Charret UFLA

Prof. Dr. Antonio Tavares da Costa Júnior

UFLA

(Orientador)

LAVRAS

MINAS GERAIS-BRASIL

*Aos meus pais, Elias e Lúcia: exemplos a serem seguidos,
pelo amor, apoio e educação,
por compreenderem a minha ausência na vida familiar.*

A imaginação é mais importante que o conhecimento.

O conhecimento é limitado.

A imaginação envolve o mundo.

(Albert Einstein)

AGRADECIMENTOS

A Deus, por tudo.

À Universidade Federal de Lavras, especialmente ao Departamento de Ciências Exatas, pela oportunidade de concluir o Mestrado em Agronomia/Estatística e Experimentação Agropecuária.

À Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (CAPES), pela bolsa de estudos concedida.

Ao professor e orientador Antônio Tavares da Costa Júnior pela orientação, apoio e ensinamentos.

Aos professores do Departamento de Ciências Exatas, em especial Thelma, Iraziet, Antônio, Lucas, Daniel, Maria do Carmo, Sérgio, Solange, Rubem Delly e Mario, pelo apoio, ensinamentos e amizade.

Aos professores da graduação: Marcelo Tavares e Ednaldo Carvalho Guimarães, pela orientação, conhecimento transmitido e pelo incentivo nos estudos.

A meus pais, pelo amor, apoio, compreensão, educação e dedicação a seus filhos.

A toda a minha família, especialmente a meus avós Ireni e Elias e as minhas tias Tânia e Lúcia, que sempre fizeram o possível para as realizações da minha vida.

Aos meus irmãos Eduardo e Ernane, pela amizade, apoio e companheirismo.

Ao meu primo Rodrigo (*in memoriam*): uma pessoa maravilhosa e amigo fiel, pelos bons momentos juntos.

A minha avó de criação, Edi, pelas orações, amor e palavras de incentivo.

A Mariana: pessoa especial na minha vida, pelos momentos felizes juntos,

apoio, compreensão, amor, amizade e palavras de incentivo.

Aos colegas de turma: Eustáquio, Verônica, Charles, Paulo César, Josiane, Graziela, Claudinei, Lívia, Nádia, Rejane e Vanêssa, pela amizade e pelos momentos felizes ao longo do curso.

A minha segunda família: Eustáquio, Francisca e Dalva, pela amizade, dedicação, apoio, momentos felizes e ensinamentos dados como a um filho.

A minha grande amiga Verônica: mulher 'guerreira', que me ajudou a vencer 'batalhas' importantes, pelos incentivos, amizade, dedicação, apoio e momentos felizes.

À Graziela, Josiane e Eric, pela amizade, momentos felizes e companheirismo.

A Marcelo Cirilo e Devanil, pelos ensinamentos, incentivo, apoio e amizade.

A Mônica e Claudinei, pela colaboração na elaboração da versão final desta dissertação.

Aos funcionários do Departamento de Ciências Exatas: Edila, Maria, Selminha, Maristela, Vânia, João Paulo e Josiane, pela boa vontade no atendimento.

E aos demais que, direta ou indiretamente, contribuíram para a elaboração deste trabalho.

Sumário

RESUMO	i
ABSTRACT	ii
1 Introdução	1
2 Dinâmica de populações em ambiente determinístico	3
2.1 Modelos populacionais de uma única espécie	3
2.2 Estabilidade	6
2.3 Modelo populacional de duas espécies	9
2.4 Modelo de Duas Espécies e Estabilidade	11
2.5 Sistemas quase-lineares	17
2.6 O segundo método de Liapunov	24
3 Dinâmica de populações em ambiente estocástico	27
3.1 Movimento browniano e o processo de Wiener	28
3.2 Passeio aleatório	33
3.3 Equações diferenciais estocásticas	35
3.4 Integral estocástica	37
3.5 Existência e unicidade de solução de equações diferenciais esto- cásticas	40
3.6 Formula de Itô	40
3.7 Métodos numéricos para equações diferenciais determinísticas e estocásticas	44
3.7.1 Métodos numéricos para EDOs	44
3.7.2 Métodos numéricos para EDEs	46

4	Estudo de um modelo presa-predador estocástico	48
4.1	Estudo do nó estável: primeiro caso	53
4.2	Estudo do nó estável: segundo caso	57
4.3	Estudo do foco estável: primeiro caso	61
4.4	Estudo do foco estável: segundo caso	65
4.5	Estudo do ciclo limite	69
5	Conclusões	71
6	Referências Bibliográficas	73

Lista de Tabelas

1	Tipos de regimes assintóticos e suas características de estabilidade	15
2	Valores da probabilidade da posição de uma partícula movendo-se conforme o passeio aleatório após n passos	35
3	Parâmetros utilizados na solução do sistema presa-predador	49

Lista de Figuras

- 1 Acima é a solução da equação de Malthus para $a = 10$ e valor inicial $P(0) = 20$. Abaixo são duas soluções da equação logística para $a = 10$, $P_1(0) = 20$ e $P_2(0) = 180$ 5
- 2 Ciclo limite assintoticamente estável em preto (linha cheia). Em marrom, é trajetória iniciada dentro de ciclo limite cujo valor inicial é $(P_0, Q_0) = (0, 227143, 0, 525164)$. Em preto tracejado, é a trajetória iniciada fora do ciclo limite, cujo valor inicial é $(P_0, Q_0) = (0, 227143, 0, 64)$. Parâmetros $p = 0, 3$, $H = 0, 53$ e $k = 0, 1$ 22
- 3 Acima: série temporal de uma população modelada pela equação de Malthus, considerando que a taxa de natalidade sofre uma perturbação do tipo $a \rightarrow a + \eta\xi(t)$, em que $a = 0, 5$ e $\eta = 0, 005$; abaixo: distribuição de probabilidade da população no instante $t = 30$ unidades de tempo. 43
- 4 Dinâmica de Lotka-Volterra estocástica utilizando o conjunto 1 de parâmetros, $\eta = 6, 3251 \times 10^{-5}$ e valor inicial próximo ao nó estável. (a) Plano de fase: trajetórias determinística (em preto) com valores iniciais $(P_0^1, Q_0^1) = (P^* + \delta, Q^* + \delta)$ e $(P_0^2, Q_0^2) = (P^* - \delta, Q^* - \delta)$ e trajetória estocástica (cinza) com valor inicial $(P_0, Q_0) = (P^* + \delta, Q^* + \delta)$; (b) módulo quadrado da transformada de Fourier da série temporal da população das presas; (c) gráfico da população das presas, solução determinística (marrom) e estocástica (preto); (d) $\xi(t - t')$ é a função de autocorrelação da população das presas. 53

- 5 Evolução temporal (de cima para baixo) da distribuição de probabilidade dos tamanhos populacionais das presas e dos predadores nos tempos 0,08; 5,12; 20,48; 400 e 900 unidades de tempo, utilizando o conjunto 1 de parâmetros, $\eta = 6,3251 \times 10^{-5}$ e valor inicial $(P_0, Q_0) = (P^* + \delta, Q^* + \delta)$. Os círculos representam as freqüências observadas e o ajuste pela curva gaussiana é representado pela curva em preto. 55
- 6 (a) Variância temporal das densidades das presas (em preto) e dos predadores (marrom) utilizando o conjunto 1 de parâmetros, $\eta = 6,3251 \times 10^{-5}$ e valor inicial $(P_0, Q_0) = (P^* + \delta, Q^* + \delta)$; (b) variância das densidades em t' pela intensidade do ruído (taxa de migração) utilizando o conjunto 1 de parâmetros e valor inicial próximo ao nó estável, das presas (em preto) e dos predadores (marrom); (c) variância da densidade das presas pela constante de Michaelis-Menten; (d) variância da densidade dos predadores pela constante de Michaelis-Menten. 56
- 7 Dinâmica de Lotka-Volterra estocástica utilizando-se o conjunto 2 de parâmetros, $\eta = 6,3251 \times 10^{-5}$ e valor inicial próximo ao nó estável. (a) Plano de fase: trajetórias determinística (em preto) com valor inicial $(P_0, Q_0) = (P^* + \delta, Q^* + \delta)$ e trajetória estocástica (cinza) com valor inicial $(P_0, Q_0) = (P^* + \delta, Q^* + \delta)$; (b) módulo quadrado da transformada de Fourier da série temporal da população das presas; (c) gráfico da população das presas, solução determinística (marrom) e estocástica (preto); (d) $\xi(t - t')$ é a função de autocorrelação da população das presas. 57

- 8 Evolução temporal (de cima para baixo) da distribuição de probabilidade dos tamanhos populacionais das presas e dos predadores nos tempos 0,08; 1,28; 5,12; 300 e 900 unidades de tempo, utilizando o conjunto 2 de parâmetros, $\eta = 6,3251 \times 10^{-5}$ e valor inicial $(P_0, Q_0) = (P^* + \delta, Q^* + \delta)$. Os círculos representam as freqüências observadas e o ajuste pela curva gaussiana é representado pela curva em preto. 58
- 9 (a) Variância temporal das densidades das presas (em preto) e dos predadores (marrom) utilizando o conjunto 2 de parâmetros, $\eta = 6.3251 \times 10^{-5}$ e valor inicial $(P_0, Q_0) = (P^* + \delta, Q^* + \delta)$; (b) variância das densidades em t' pela intensidade do ruído (taxa de migração) utilizando o conjunto 2 de parâmetros e valor inicial próximo ao nó estável, das presas (em preto) e dos predadores (marrom); (c) variância da densidade das presas pela constante de Michaelis-Menten; (d) variância da densidade dos predadores pela constante de Michaelis-Menten. 59
- 10 Dinâmica de Lotka-Volterra estocástica utilizando o conjunto 3 de parâmetros, $\eta = 6,3251 \times 10^{-5}$ e valor inicial próximo ao foco estável. (a) Plano de fase: trajetórias determinística (em preto) com valor inicial $(P_0, Q_0) = (P^* + \delta, Q^* + \delta)$ e trajetória estocástica (cinza) com valor inicial $(P_0, Q_0) = (P^* + \delta, Q^* + \delta)$; (b) módulo quadrado da transformada de Fourier da série temporal da população das presas; (c) gráfico da população das presas, solução determinística (marrom) e estocástica (preto); (d) $\xi(t - t')$ é a função de autocorrelação da população das presas. 61

- 11 Evolução temporal (de cima para baixo) da distribuição de probabilidade dos tamanhos populacionais das presas e dos predadores nos tempos 0,08; 0,32; 1,28; 110 e 300 unidades de tempo, utilizando o conjunto 3 de parâmetros, $\eta = 6,3251 \times 10^{-5}$ e valor inicial $(P_0, Q_0) = (P^* + \delta, Q^* + \delta)$. Os círculos representam as freqüências observadas e o ajuste pela curva gaussiana é representado pela curva em preto. 62
- 12 (a) Variância temporal das densidades das presas (em preto) e dos predadores utilizando o conjunto 3 de parâmetros, $\eta = 6,3251 \times 10^{-5}$ e valor inicial $(P_0, Q_0) = (P^* + \delta, Q^* + \delta)$; (b) variância das densidades em t' pela taxa de migração utilizando o mesmo conjunto de parâmetros e o mesmo valor inicial; (c) variância da densidade das presas pela constante de Michaelis-Menten; (d) variância da densidade dos predadores pela constante de Michaelis-Menten. 63
- 13 Dinâmica de Lotka-Volterra estocástica utilizando o conjunto 4 de parâmetros, $\eta = 6,3251 \times 10^{-5}$ e valor inicial próximo ao foco estável. (a) Planos de fase: trajetória determinística (em preto) com valor inicial $(P_0, Q_0) = (P^* + \delta, Q^* + \delta)$ e trajetória estocástica (cinza) com valor inicial $(P_0, Q_0) = (P^* + \delta, Q^* + \delta)$; (b) módulo quadrado da transformada de Fourier da série temporal da população das presas; (c) gráfico da população das presas, solução determinística (marrom) e estocástica (preto); (d) $\xi(t - t')$ é a função de autocorrelação da população das presas. 65

- 14 Evolução temporal (de cima para baixo) da distribuição de probabilidade dos tamanhos populacionais das presas e dos predadores nos tempos 0,08; 0,32; 1,28; 80 e 200 unidades de tempo, utilizando o conjunto 4 de parâmetros, $\eta = 6.3251 \times 10^{-5}$ e valor inicial $(P_0, Q_0) = (P^* + \delta, Q^* + \delta)$. Os círculos representam as freqüências observadas e o ajuste pela curva gaussiana é representado pela curva em preto. 67
- 15 (a) Variância temporal das densidades das presas (em preto) e dos predadores (marrom) utilizando o conjunto 4 de parâmetros, $\eta = 6.3251 \times 10^{-5}$ e valor inicial $(P_0, Q_0) = (P^* + \delta, Q^* + \delta)$; (b) variância das densidades em t' pela taxa de migração utilizando o mesmo conjunto de parâmetros e o mesmo valor inicial; (c) variância da densidade das presas pela constante de Michaelis-Menten; (d) variância da densidade dos predadores pela constante de Michaelis-Menten. 68
- 16 Dinâmica de Lotka-Volterra estocástica utilizando o conjunto 5 de parâmetros, $\eta = 6,3251 \times 10^{-5}$ e valor inicial sobre o ciclo limite. (a) Ciclo limite (em preto) e trajetória estocástica (em cinza); (b) gráfico do tamanho populacional das presas, solução determinística (em preto tracejado) e estocástica (marrom); (c) módulo quadrado da transformada de Fourier da série temporal da população das presas do modelo estocástico; (d) $\xi(t - t')$ é a função de autocorrelação da população das presas. 69

- 17 Evolução temporal (de cima para baixo) da distribuição de probabilidade da população das presas nos instantes 0,01; 0,16; 1,28; 10,24 e 20,48 unidades de tempo, utilizando o conjunto 5 de parâmetros, F_i é a frequência, $\eta = 6,3251 \times 10^{-5}$ e valor inicial sobre o ciclo limite. Os círculos representam as frequências observadas e o ajuste pela curva gaussiana é representado pela curva clara. . . 70

RESUMO

COELHO NETO, Elias Dias. **Dinâmica de populações em ambiente estocástico**. 2006. 89p. Dissertação (Mestrado em Agronomia/Estatística e Experimentação Agropecuária) - Universidade Federal de Lavras, Lavras, MG.*

Estudamos um modelo para dinâmica de duas populações interagentes, uma de presas e outra de predadores, sujeitas a um ruído aditivo, que pode ser interpretado como um termo de migração aleatória. Resolvemos numericamente as equações diferenciais estocásticas do modelo e comparamos os resultados com as soluções do modelo determinístico associado. Identificamos três comportamentos qualitativamente distintos, correspondentes a três tipos diferentes de pontos de equilíbrio do sistema determinístico: nó estável, foco estável e ciclo limite assintoticamente estável. Nossos resultados mostram que as distribuições de probabilidade do tamanho populacional associadas ao nó estável e ao foco estável são gaussianas, enquanto a distribuição associada ao ciclo limite é multimodal com uma forma não trivialmente associada a gaussianas. Exibimos relações numéricas entre a variância das distribuições e os parâmetros do modelo para alguns casos selecionados.

Palavras-chave: equações Lotka-Volterra, Holling tipo II, ruído branco, equações diferenciais estocásticas.

* **Comitê Orientador:** Antônio Tavares da Costa Júnior - UFLA. (Orientador)

ABSTRACT

COELHO NETO, Elias Dias. **Population Dynamics in the Stochastic Environment**. 2006. 89p. Dissertation (Master's Degree in Agronomy/Statistics and Agriculture Experimentation)-Federal University of Lavras, Lavras, MG.*

We have investigated a model for the dynamics of two interacting populations, prey and predators. Both populations are under the influence of additive noise, that may be interpreted as a random migration term. We solved numerically the stochastic differential equations posed by the model and compare the results with the solutions of the associated deterministic model. We identified three qualitatively distinct behaviors, corresponding to three kinds of equilibria of the deterministic model, namely, stable node, stable focus and limit cycle. Our results show that the distributions of population sizes associated with the stable node and stable focus are both gaussian, while the distribution associated with the limit cycle is multimodal, not trivially related to any combination of gaussians. We present numerical relations between the variance of the distributions and the model parameters for a few selected cases.

Key-words: Lotka-Volterra equations, Holling type II, white noise, stochastic differential equation.

***Guidance Committee:** Antônio Tavares da Costa Júnior - UFLA. (Adviser)

1 Introdução

A ecologia estuda as relações entre as entidades biológicas e entre estas e o meio ambiente. O estudo destes dois tipos de relações, no nível populacional de organização da biomassa, é o tema da ecologia populacional. A unidade fundamental de estudo em ecologia populacional é a população. Uma população é definida como um grupo de organismos de uma mesma espécie que podem se reproduzir produzindo descendentes férteis, podendo ser isoladas de outras espécies por limites geográficos ou por algum outro limite escolhido pelo homem. Em consequência desta definição, a população tem um patrimônio genético comum e, ao contrário dos indivíduos que a compõem, a população é potencialmente imortal.

Uma das formas de se estudar ecologia populacional é descrever as interações entre os ecossistemas por meio de modelos populacionais. Um modelo populacional é uma representação abstrata das características de uma população em uma determinada área. Normalmente, tais modelos são muito mais simples que a 'população a ser modelada' e, na maioria dos casos, interagimos com esses modelos com o claro objetivo de melhor compreendermos a população modelada (Murray, 1993).

Dinâmica é um termo muito utilizado em Física, para identificar a variação temporal das propriedades de um sistema, em contraste com a estática, que estuda as propriedades dos estados de equilíbrio dos sistemas físicos. Para descrever os sistemas sob forças internas (interações entre as componentes do sistema) ou externas, são utilizadas funções (definidas no tempo, na posição, e ou alguma outra medida).

A uma determinada área onde as populações interagem entre si, com outras espécies e com o próprio local, seja ele terrestre, aquático ou aéreo, chama-

mos de ambiente, por exemplo: vegetação de cerrado, mata ciliar, caatinga, mata atlântica, floresta amazônica, etc. Caso a variação no número de indivíduos das populações e dos fatores que influenciam essas variações seja não aleatória, a estes ambientes dá-se o nome de determinístico e, na modelagem das populações nestes ambientes, utilizam-se modelos determinísticos. Se as influências forem aleatórias, temos, então, um ambiente estocástico, conseqüentemente, modelos estocásticos são exigidos (Spagnolo et al, 2003). Na construção de modelos populacionais, devemos levar em conta o ambiente em que a população está localizada, para melhor compreendermos a população modelada.

Para a ecologia populacional, o estudo dos ambientes estocásticos é mais importante do que o estudo dos ambientes determinísticos, pois eles são mais comuns nos ecossistemas. Muitas vezes, a dinâmica de populações está sujeita a influências externas, tais como fatores ambientais e ou interação com outros sistemas dinâmicos e é muito comum que estas influências tenham natureza estocástica. Fatores climáticos, por exemplo, resultam da dinâmica caótica da atmosfera, sendo, portanto, um fator estocástico (Spagnolo et al, 2003). Assim, o tamanho das populações nestes ambientes flutua aleatoriamente.

Por outro lado, num ambiente determinístico, as populações podem ser influenciadas por forças externas aleatórias, como por exemplo: a temperatura pode variar abruptamente, forçando as populações a migrarem de uma determinada área para outra. Sendo assim, é importante que sejamos capazes de estudar modelos para a dinâmica de populações num ambiente determinístico quando a estocasticidade surge, para podermos avaliar que conseqüências isto trará para os tamanhos populacionais.

2 Dinâmica de populações em ambiente determinístico

Nos ambientes determinísticos as interações tanto dentro das populações (intraespecífica) quanto fora (biótica) são sempre as mesmas. Se é conhecido o valor inicial de colonização de um determinado local, o tipo de modelo e os parâmetros populacionais, é possível fazer previsões exatas dos tamanhos populacionais num instante de tempo t . Fixado um instante de tempo t qualquer, se este experimento for repetido sob as mesmas condições, os tamanhos populacionais serão sempre os mesmos neste instante, qualquer que seja o número de repetições. Por isso, os modelos populacionais determinísticos são limitados para explicar os tamanhos populacionais, que não se comportam de maneira exata, na maioria dos casos, mas são um primeiro passo para se entender modelos mais sofisticados, como os estocásticos.

2.1 Modelos populacionais de uma única espécie

Modelos com uma única população são usados em situações em que podem desprezar os efeitos das interações da população de interesse com outras populações ou quando a dinâmica das outras populações não é relevante. Neste caso, os efeitos das interações são incluídos no modelo, na forma de parâmetros que, em geral, variam com o tempo. Modelos dinâmicos de uma única população também são muito utilizados em estudos de laboratório; no meio ambiente, abrem caminho para o entendimento da complexidade das interações entre várias espécies (sistemas acoplados).

Considere que $P(t)$ é o número de indivíduos de uma população em um instante de tempo qualquer $t \geq 0$. Então, a taxa de variação da população no

instante t é dada por

$$\frac{dP}{dt} = \text{nascimentos} + \text{imigrações} - \text{mortes} - \text{emigrações},$$

e é chamada de equação de balanço populacional.

Estamos tratando aqui a variável P como sendo contínua, mas, na verdade, ela é sabidamente discreta. Modelos de equações diferenciais são aproximações razoáveis para a taxa de variação populacional, além disso, levam em conta o envolvimento, seja ele qual for, entre sucessivas gerações da população, já que são modelos dinâmicos.

A publicação da equação de Malthus $\dot{P}(t) = nP - mP$ (Malthus, 1798), em que n é a taxa de nascimento e m é a taxa de mortes (ambas constantes e positivas), foi o marco no estudo quantitativo da dinâmica populacional. Apesar da simplicidade, é um primeiro passo para a elaboração de modelos mais completos e realistas. Considerando o valor inicial da população $P(0) = P_0$, a solução da equação de Malthus é

$$P(t) = P_0 e^{(n-m)t},$$

a solução está na Figura 1.

A aplicação deste modelo é restrita porque ignora o fato de que a taxa de crescimento de uma população pode ser fortemente afetada pela própria densidade populacional no instante t . Ele só pode ser aplicado, portanto, a situações em que a densidade populacional é baixa o suficiente para não afetar a taxa de crescimento per capita $n - m$. Um exemplo de crescimento exponencial é a população de bactérias na presença de alimento abundante. O crescimento exponencial também pode ser aplicado a populações que estão num estágio inicial da colonização de uma região anteriormente desabitada.

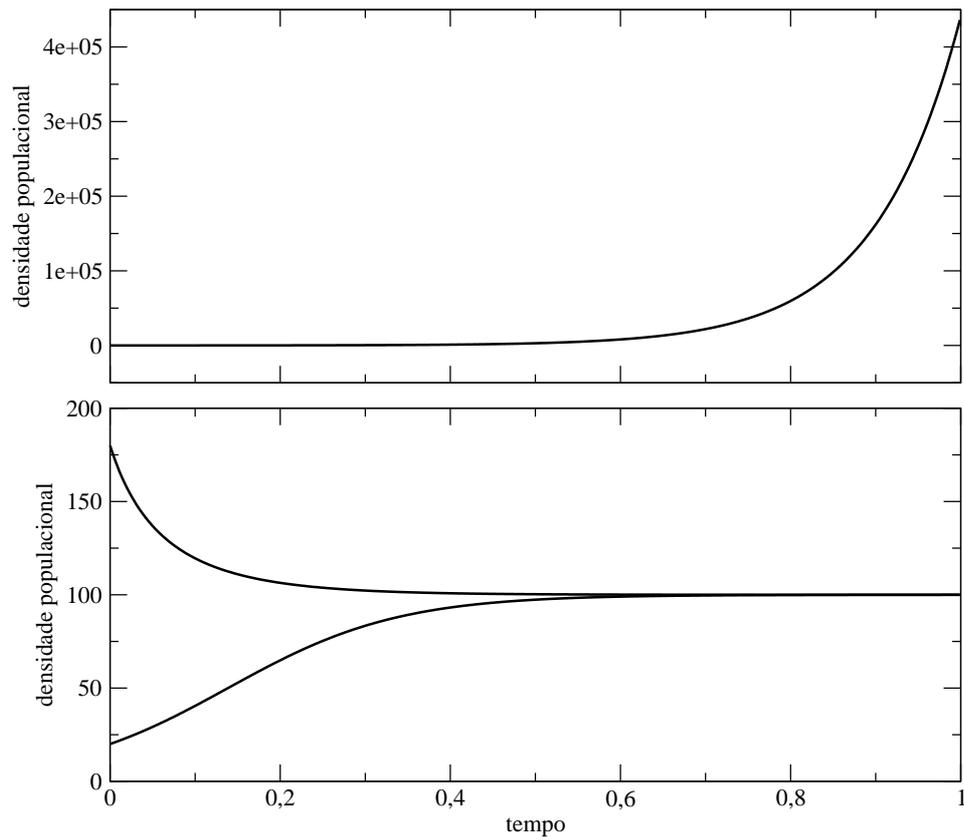


Figura 1: Acima é a solução da equação de Malthus para $a = 10$ e valor inicial $P(0) = 20$. Abaixo são duas soluções da equação logística para $a = 10$, $P_1(0) = 20$ e $P_2(0) = 180$.

Uma forma de modelar a limitação do crescimento populacional na equação de Malthus é somar à taxa de variação da população um termo quadrático, como na equação abaixo:

$$\frac{dP}{dt} = aP \left(1 - \frac{P}{K} \right),$$

em que a é a taxa de nascimento e K é a capacidade suporte do meio ambiente, ambas constantes positivas. Proposta por Verhulst em 1838 esta equação é chamada de *modelo logístico* e modela a seguinte situação: quando a população torna-se grande, maior que a capacidade suporte, os indivíduos da espécie competirão entre si pelos recursos do ambiente, tais como alimento e espaço físico, provocando mortes e ou diminuição na taxa de natalidade (Murray, 1993).

A solução geral, dado o valor inicial $P(0) = P_0$, é

$$P(t) = \frac{P_0 K}{P_0 + (K - P_0)e^{-at}}.$$

Se $P_0 > K$ então $P(t)$ decresce monotonamente para K . Agora se $P_0 < K$ então $P(t)$ cresce monotonamente para K . Os dois tipos de condições estão exemplificados na Figura 1.

2.2 Estabilidade

Para modelos populacionais em ambiente determinístico, um interesse é no equilíbrio do número de indivíduos da população, em que seu valor é independente do tempo (constante), isto é, em que a taxa de variação é zero. Quando a população é perturbada e, ao longo do tempo, retorna ao seu valor de equilíbrio, tal equilíbrio é chamado de estável. Por outro lado, se tal distúrbio faz com que a população se afaste do valor de equilíbrio, então, diz-se que é instável. A estabilidade depende, basicamente, do potencial biótico e da resistência ambiental da população. Potencial biótico é a capacidade que uma população tem de crescer

em condições favoráveis. Ao conjunto de fatores capazes de limitar o crescimento populacional, denominamos resistência ambiental. Entre os fatores determinantes, podem-se citar competição, predação, parasitas, doenças, condições climáticas desfavoráveis, etc. Na teoria de ecossistemas, estabilidade "é a capacidade de um sistema ecológico retornar a um estado de equilíbrio após um distúrbio temporário. Quanto mais rapidamente e com menor flutuação ele retorna, mais estável é"(Holling, 1973). "O conhecimento de como a estabilidade dos ecossistemas pode ser afetada e de quando isso pode ocorrer é fundamental, sobretudo para evitar que ocorram perdas de espécies irreversíveis no ecossistema"(Moreira, 2005).

A análise exata de estabilidade somente pode ser feita se conhecermos a solução das equações de modelo. É possível fazer uma análise de estabilidade aproximada sem resolver o modelo em torno dos seus pontos de equilíbrio; o método para se fazer essa análise chama-se análise linear de estabilidade. Em geral, os modelos populacionais são não lineares e, portanto, é muito difícil obter informações quantitativas detalhada, se não impossível. A análise linear de estabilidade possibilita extrair informações qualitativas detalhadas de um modelo populacional, sem a necessidade de resolver a equação (Boyce & Dippina, 1990).

A análise de estabilidade aproximada, no caso de modelos de uma única população, é feita da seguinte forma: considere uma população governada pela equação diferencial de primeira ordem geral

$$\frac{dP}{dt} = f(P),$$

em que f é tipicamente uma função não linear de P , então, os pontos de equilíbrio P^* , também conhecidos como pontos críticos, são soluções de $f(P) = 0$. Podemos investigar a estabilidade dessa equação na vizinhança dos seus pontos de equilíbrio utilizando uma linearização de $P(t)$ em torno de P^* , que é feita utilizando-se a série de Taylor da seguinte forma:

defina

$$p(t) = P(t) - P^*, \quad |p(t)| \ll 1,$$

essa condição sobre p aplica-se à equação como justificativa para desprezar termos de ordem p^2 ou superior. Então,

$$\frac{dp}{dt} = f(P^* + p) \approx f(P^*) + pf'(P^*) + \dots,$$

logo,

$$\frac{dp}{dt} \approx pf'(P^*) \Rightarrow p(t) \propto e^{f'(P^*)t},$$

então, se $f'(P^*) > 0$ o estado de equilíbrio $P(t) = P^*$ é instável e, se $f'(P^*) < 0$, é estável (Murray, 1993).

A equação de Malthus possui apenas um ponto de equilíbrio $P^* = 0$. A análise de estabilidade, nesse caso, é exata, pois conhecemos a solução. Então, o estado de equilíbrio $P(t) = 0$ é estável, se $n < m$ e instável, caso contrário.

Agora a equação logística possui dois pontos de equilíbrio $P^* = 0$ e $P^* = K$. $P^* = 0$ é instável, pois a linearização pela série de Taylor em torno dele resulta em $\dot{P} \approx aP$ e a população cresce exponencialmente. Já o ponto crítico $P^* = K$ é estável e a linearização em torno dele resulta em $\dot{P} \approx -a(P - K)$, então, $P \rightarrow K$, quando $t \rightarrow \infty$.

A mesma idéia pode ser aplicada a sistemas com um número qualquer de populações. Mais à frente será apresentado o caso para duas populações.

2.3 Modelo populacional de duas espécies

Num ambiente podem coexistir várias populações que, em geral, influenciam os balanços populacionais umas das outras. Estas influências são denominadas interações populacionais. As interações populacionais são bastante complexas. Elas resultam de inúmeros processos que podem envolver desde alguns indivíduos até populações inteiras. Na modelagem tradicional das interações populacionais costuma-se classificá-las em três tipos principais: mutualismo (ambas as espécies se beneficiam da interação), competição (ambas as espécies são prejudicadas pela interação) e presa-predador (apenas os predadores se beneficiam da interação).

O modelo dinâmico mais simples que descreve a interação presa-predador é conhecido por Lotka-Volterra

$$\begin{aligned}\frac{dP}{dt} &= nP - aPQ \\ \frac{dQ}{dt} &= bPQ - mQ,\end{aligned}$$

em que $P(t)$ é a densidade populacional das presas, $Q(t)$ é a densidade populacional dos predadores, n , a , b e m são constantes positivas. Este modelo foi proposto pelo matemático Volterra (1926), na tentativa de explicar as oscilações da população de peixes e o mesmo modelo foi desenvolvido pelo bioquímico Lotka para reações químicas hipotéticas. As hipóteses do modelo são: (a) tanto as presas como os predadores estão distribuídos uniformemente num mesmo hábitat, ou seja, todos os predadores têm a mesma chance de encontrar e comer cada presa; (b) na ausência de predadores, a população de presas cresce exponencialmente, pois os óbitos serão menores que os nascimentos, processo que é descrito pelo termo nP ; (c) o termo $-aPQ$ descreve a predação sofrida pelas presas e representa sua taxa de mortalidade; (d) na ausência de presas, a população de predadores decresce exponencialmente, pois, sem alimento, os óbitos serão maiores que os nascimentos.

Este processo é descrito pelo termo $-mQ$; (e) alimentando-se das presas os predadores ganham energia possibilitando a reprodução, a uma taxa proporcional à taxa de predação, bPQ (Murray, 1993).

Esse modelo representa um tipo específico de balanço populacional no caso de interações tipo presa-predador. Suas hipóteses básicas são bastante restritivas (crescimento exponencial de presas na ausência de predadores, aumento ilimitado da predação com o aumento da população de presas), limitando sua aplicabilidade a sistemas reais. Ele é, entretanto, um excelente ponto de partida para a compreensão qualitativa de vários aspectos da dinâmica de populações interagentes.

Uma forma mais geral de um modelo para dinâmica de presas e predadores seria

$$\begin{aligned}\frac{dP}{dt} &= f(P) - g(P, Q) \\ \frac{dQ}{dt} &= \rho g(P, Q) - mQ,\end{aligned}$$

que flexibiliza a escolha do tipo de resposta mais adequada para o tipo de espécie e a forma com que a predação acontece. Aqui a função contínua $f(P)$ descreve a interação intra-específica das presas, a função contínua $g(P, Q)$ (chamada de resposta funcional) descreve a predação e ρ é a taxa que regula a utilização de comida, isto é, a taxa de quantas presas devem ser comidas para possibilitar o nascimento de um novo predador.

Não há necessidade de se utilizar uma função para representar a interação intra-específica dos predadores, pois a densidade de saturação dos predadores, em geral, é muito menor que a densidade de saturação das presas, não necessitando competir entre si pelos recursos do ambiente. Geralmente, escolhe-se $f(P)$ como função logística para limitar o crescimento das presas na ausência de predadores. Um tipo de resposta funcional $g(P, Q)$, que limita a predação para valores grandes

de P , é descrito pela fórmula de Michaelis-Menten e chamado de Holling tipo II

$$g(P, Q) = \lambda \frac{P}{P + h} Q, \quad (1)$$

em que h e λ são constantes, h é a metade da saturação da densidade das presas. Observe que $g(P, Q)$ é aproximadamente linear em P para $P \ll h$. A saturação para valores grandes de P é reflexo da capacidade limitada do predador, ou perseverança, quando as presas são abundantes.

A resposta funcional Holling tipo II e a equação logística são apenas dois exemplos de termos que podem compor modelos para a dinâmica populacional na presença de interações tipo presa-predador. Mais exemplos são encontrados em Murray (1993) e Petrovskii & Malchow (1999).

2.4 Modelo de Duas Espécies e Estabilidade

Conforme já mencionamos, as características da estabilidade dos pontos de equilíbrio de um sistema de equações diferenciais constituem informação essencial no estudo do comportamento destes sistemas. Um dos atrativos da análise de estabilidade é a possibilidade de extrair informações do sistema de equações diferenciais sem, necessariamente, resolvê-lo. Isto é, em particular, importante no caso de sistemas não-lineares com mais de uma equação, cujas soluções analíticas são de difícil obtenção.

Para entender como a análise de estabilidade é feita em sistemas de equações diferenciais, considere o seguinte sistema autônomo

$$\begin{aligned} \frac{dy_1}{dt} &= F(y_1, y_2) \\ \frac{dy_2}{dt} &= G(y_1, y_2) \end{aligned} \quad ,$$

que pode ser escrito na forma vetorial $\dot{y} = f(y)$ (Boyce & Diprima, 1990). Para se obter a aproximação linear desse sistema na vizinhança de seus pontos de equilíbrio, aplica-se a série de Taylor para funções de duas variáveis, desprezando os

termos de ordem igual ou superior a dois (Anton, 2000), veremos na próxima seção.

Por hora, suponha que o sistema:

$$\dot{y} = \mathbf{A}y, \quad (2)$$

em que

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}.$$

é uma matriz 2×2 de constantes reais, sob a condição $|\mathbf{A}| \neq 0$, seja o sistema linear que aproxima 2 na vizinhança de um ponto de equilíbrio.

Por analogia, com a forma da solução de uma única EDO linear de primeira ordem, vamos supor que $y = \xi e^{rt}$, em que $\xi \in \mathbb{R}^2$ é um vetor e $r \in \mathbb{R}$, é uma solução o sistema linear acima, então, substituindo esta função "tentativa" na equação 2, temos:

$$(\mathbf{A} - r\mathbf{I})\xi = 0. \quad (3)$$

Logo, r tem que ser um autovalor e ξ um autovetor associados à matriz \mathbf{A} (Boldrini, 1980).

Uma inspeção breve do sistema 2 revela que seu único ponto de equilíbrio é $y = (0, 0)$. Precisamos, então, conhecer o comportamento das soluções do sistema nas vizinhanças deste ponto. Os autovalores de A determinam o caráter das soluções do sistema. Vamos analisar somente dois casos, determinados pela natureza dos autovalores. Os demais casos são encontrados em Boyce & Diprima (1990).

Analisando-se o caso em que os autovalores são reais e distintos de mesmo sinal, a solução geral da equação 2 é:

$$y = c_1 \xi^1 e^{r_1 t} + c_2 \xi^2 e^{r_2 t}. \quad (4)$$

Tomando $r_1 < r_2 < 0$ segue que $y \rightarrow 0$ quando $t \rightarrow \infty$, independente dos valores das constantes c_1 e c_2 , ou seja, todas as soluções se aproximam do ponto de equilíbrio na origem quando $t \rightarrow \infty$. Se a solução começa em um ponto inicial na reta contendo a origem na direção de ξ^1 , então, $c_2 = 0$. Em consequência, a solução permanece nessa reta para todo t e tende à origem quando $t \rightarrow \infty$. Agora, se a solução começa em um ponto inicial na reta contendo a origem na direção de ξ^2 , então $c_1 = 0$. Uma característica geométrica importante que pode ser observada é quando escreve-se a solução 4 da seguinte forma

$$y = e^{r_1 t} [c_1 \xi^1 e^{(r_1 - r_2)t} + c_2 \xi^2]. \quad (5)$$

Note que $r_1 - r_2 < 0$. Portanto, enquanto $c_2 \neq 0$, o termo $c_1 \xi^1 e^{(r_1 - r_2)t}$ é desprezível, comparado com $c_2 \xi^2$, para valores grandes de t . Assim, quando $t \rightarrow \infty$, não só as trajetórias se aproximam da origem, mas o fazem tendendo, também, à reta na direção de ξ^2 , exceto as que começam exatamente na reta na direção de ξ^1 . Esse tipo de ponto crítico é chamado de nó, nó atrator ou sorvedouro.

Por outro lado, se $0 < r_1 < r_2$ então, todas as trajetórias têm o mesmo padrão descrito acima e o sentido do movimento é de afastamento do ponto crítico na origem, em vez de se aproximar. O ponto crítico é chamado também de nó ou, muitas vezes de fonte.

Agora, analisando-se o caso em que os autovalores são complexos, suponha que os autovalores são $\lambda = a \pm ib$, em que a e b são reais, $a \neq 0$ e $b > 0$. Podemos proceder como no caso anterior, mas farremos de forma diferente.

Sistemas com autovalores $\lambda = a \pm ib$ são, tipicamente, da forma:

$$y' = \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} y. \quad (6)$$

ou, em forma escalar:

$$\begin{aligned}y_1' &= ay_1 + by_2 \\y_2' &= -by_1 + ay_2.\end{aligned}\tag{7}$$

Introduzindo coordenadas polares r, θ dadas por:

$$\begin{aligned}r^2 &= y_1^2 + y_2^2 \\tg\theta &= \frac{y_2}{y_1}\end{aligned}$$

Diferenciando essas equações, obtemos:

$$\begin{aligned}rr' &= y_1y_1' + y_2y_2' \\(sec^2\theta)\theta' &= \frac{y_1y_2' - y_2y_1'}{y_1^2}.\end{aligned}\tag{8}$$

Substituindo as equações 7 na primeira das equações 8, vemos que:

$$r' = ar,$$

e, portanto,

$$r = ce^{at},\tag{9}$$

em que c é uma constante. Agora, substituindo as equações 7 na segunda das equações 8 e usando o fato de que $sec^2\theta = r^2/y_1^2$, temos:

$$\theta' = -b.$$

Logo:

$$\theta = -bt + \theta_0,\tag{10}$$

em que θ_0 é o valor de θ quando $t = 0$. Portanto, as equações 9 e 10 são as trajetórias do sistema 6 em coordenadas polares. Como $b > 0$, segue que o valor do

ângulo θ diminui quando t aumenta, de modo que o movimento de uma trajetória qualquer é no sentido horário. Quando $t \rightarrow \infty$, vemos que $r \rightarrow 0$ se $a < 0$. Para $a > 0$, vemos que $r \rightarrow \infty$. Então, as trajetórias são espirais que tendem ou se afastam da origem, dependendo do sinal de a . Chamamos os pontos críticos, no caso de autovalores complexos, de pontos espirais.

A análise dos outros casos segue um raciocínio semelhante descrito nesses dois casos (Boyce & DiPrima, 1990). Todos os tipos de pontos críticos possíveis, com seus respectivos tipo de estabilidade são descritos na tabela 1.

Tabela 1: Tipos de regimes assintóticos e suas características de estabilidade

Raízes da equação característica	Tipo de ponto crítico	Estabilidade
$\lambda_1 > \lambda_2 > 0$	Nó impróprio	Instável
$\lambda_1 < \lambda_2 < 0$		Assintoticamente estável
$\lambda_2 < 0 < \lambda_1$	Ponto em sela	Instável
$\lambda_1 = \lambda_2 > 0$	Nó próprio ou impróprio	Instável
$\lambda_1 = \lambda_2 < 0$	Nó próprio ou impróprio	Assintoticamente estável
$\lambda_1, \lambda_2 = a \pm ib$	Ponto espiral	
$a > 0$		Instável
$a < 0$		Assintoticamente estável
$\lambda_1 = ib, \lambda_2 = -ib$	Centro	Estável

Agora que já estamos familiarizados com o conceito de estabilidade, serão apresentadas, em seguida, as definições matemáticas para os conceitos de estabilidade, estabilidade assintótica e instabilidade, pelo menos para sistemas autônomos da forma:

$$\dot{y} = f(y). \tag{11}$$

Definição de estabilidade. Suponha que y^0 seja um ponto de equilíbrio do sistema autônomo acima. Dado qualquer $\epsilon > 0$, existe um $\delta > 0$, tal que toda solução $y = \phi(t)$ do sistema 11, que satisfaz, em $t = 0$:

$$\|\phi(0) - y^0\| < \delta,$$

existe para todo t positivo e satisfaz:

$$\|\phi(t) - y^0\| < \epsilon,$$

para todo $t \geq 0$. Essa proposição diz que todas as soluções que começam "suficientemente próximas"(isto é, a uma distância menor do que δ) de y^0 permanecem "próximas"(isto é, a uma distância menor do que ϵ) de y^0 . Um ponto crítico que não é estável é dito instável.

Definição de estabilidade assintótica: um ponto crítico y^0 é dito assintoticamente estável se é estável e se existe um δ_0 , com $0 < \delta_0 < \delta$, tal que, se uma solução $y = \phi(t)$ satisfaz

$$\|\phi(0) - y^0\| < \delta_0,$$

então

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \phi(t) = y^0,$$

logo, as trajetórias que começam "suficientemente próximas"de y^0 não apenas permanecem "próximas", mas têm que acabar tendendo a y^0 quando $t \rightarrow \infty$. Vale a pena resaltar que essas definições são independentes da ordem do sistema autônomo.

Essas definições podem se tornar mais concretas ao serem interpretadas em termos dos modelos de dinâmica de populações (Boyce & Diprima, 1990).

Quando se modela a dinâmica de populações por um sistema autônomo, os coeficientes resultam, em geral, de observações. Tais medidas estão sujeitas, muitas vezes, a pequenos erros, de modo que é de interesse investigar se pequenas mudanças (perturbações) nos coeficientes pode afetar a estabilidade ou instabilidade de um ponto crítico e ou alterar de maneira significativa o padrão de trajetórias. Isso porque pequenas perturbações implicam em perturbações nos autovalores (Boyce & Dprima, 1990).

A situação mais sensível acontece quando $r_1 = +ib$ e $r_2 = -ib$, ou seja, números complexos imaginários puros. Uma perturbação $r_i \rightarrow r_i + a_i$, em que $a_i \in \mathbb{R}$ para $i = 1, 2$, fará com que os autovalores tenham $Re(r_i) \neq 0$, resultando em um ponto espiral assintoticamente estável se $a_i < 0$ e instável se $a_i > 0$. Um outro caso, ligeiramente menos sensível, acontece se os autovalores r_1 e r_2 são iguais. Pequenas perturbações nos coeficientes, normalmente, fazem com que as raízes iguais se bifurquem.

Em todos os outros casos, pequenas perturbações dos coeficientes não alteram a estabilidade ou a instabilidade do sistema, nem o tipo de ponto crítico.

2.5 Sistemas quase-lineares

A abordagem de sistemas quase-lineares é no sentido de investigar o comportamento das trajetórias do sistema

$$\dot{y} = f(y) \tag{12}$$

em uma vizinhança de um ponto de equilíbrio y^0 , por meio da aproximação do sistema não-linear 12 por um sistema linear apropriado. Nem sempre é possível obter boas aproximações de trajetórias. Uma forma de encontrar o sistema linear apropriado que melhor aproxime o sistema não-linear é da seguinte forma: (i)

escolher o ponto crítico na origem de um novo plano cartesiano por meio de uma translação $u = y - y^0$; (ii) suponha que:

$$\dot{y} = f(y) = \mathbf{A}y + g(y), \quad (13)$$

em que $y = 0$ é um ponto de equilíbrio isolado, isto é, existe uma constante $\epsilon > 0$ tal que a região $R = \{\|x - y\| \leq \epsilon \mid x \in \mathbb{R}^2\}$ não possua outros pontos de equilíbrio diferente da origem. Além disso, vamos supor que $|\mathbf{A}| \neq 0$.

Se g têm derivadas parciais de primeira ordem contínuas e se g satisfaz à condição:

$$\frac{\|g(y)\|}{\|y\|} \rightarrow 0$$

quando $y \rightarrow 0$, então o sistema 13 é quase-linear na vizinhança do ponto crítico $y = 0$.

Uma forma de verificar se o sistema autônomo $\dot{y} = f(y)$ na forma escalar

$$\begin{aligned} \frac{dy_1}{dt} &= F(y_1, y_2) \\ \frac{dy_2}{dt} &= G(y_1, y_2). \end{aligned} \quad (14)$$

é quase-linear em uma vizinhança de um ponto de equilíbrio (y_1^0, y_2^0) , é verificar se F e G têm derivadas parciais contínuas até segunda ordem. Para se demonstrar utiliza-se a série de Taylor em torno de um ponto (y_1^0, y_2^0) para escrever

$$\begin{aligned} F(y_1, y_2) &= F(y_1^0, y_2^0) + F_{y_1}(y_1^0, y_2^0)(y_1 - y_1^0) \\ &\quad + F_{y_2}(y_1^0, y_2^0)(y_2 - y_2^0) + \eta_1(y_1, y_2) \\ G(y_1, y_2) &= G(y_1^0, y_2^0) + G_{y_1}(y_1^0, y_2^0)(y_1 - y_1^0) \\ &\quad + G_{y_2}(y_1^0, y_2^0)(y_2 - y_2^0) + \eta_2(y_1, y_2), \end{aligned}$$

em que $\eta_1(y_1, y_2)/[(y_1 - y_1^0)^2 + (y_2 - y_2^0)^2]^{1/2} \rightarrow 0$ quando $(y_1, y_2) \rightarrow (y_1^0, y_2^0)$, analogamente para η_2 . Então, o sistema 14 se reduz a:

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} y_1 - y_1^0 \\ y_2 - y_2^0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F_{y_1}(y_1^0, y_2^0) & F_{y_2}(y_1^0, y_2^0) \\ G_{y_1}(y_1^0, y_2^0) & G_{y_2}(y_1^0, y_2^0) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 - y_1^0 \\ y_2 - y_2^0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \eta_1(y_1, y_2) \\ \eta_2(y_1, y_2) \end{pmatrix}.$$

Esse resultado tem duas conseqüências: a primeira é que, se as funções F e G forem duas vezes diferenciáveis, então, o sistema 14 é quase-linear; a segunda é que o sistema linear que aproxima o sistema não-linear 14 próximo ao ponto de equilíbrio é dado pela parte linear do sistema 2.5, a saber:

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F_{y_1}(y_1^0, y_2^0) & F_{y_2}(y_1^0, y_2^0) \\ G_{y_1}(y_1^0, y_2^0) & G_{y_2}(y_1^0, y_2^0) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}.$$

A matriz:

$$\begin{pmatrix} F_{y_1}(y_1^0, y_2^0) & F_{y_2}(y_1^0, y_2^0) \\ G_{y_1}(y_1^0, y_2^0) & G_{y_2}(y_1^0, y_2^0) \end{pmatrix},$$

é conhecida como matriz Jacobiana (Boldrini, 1980). A maior dificuldade da análise de sistemas quase-lineares está na obtenção das raízes da equação polinomial (autovalores) resultante do determinante $|\mathbf{A} - r\mathbf{I}|$, em que \mathbf{A} é a matriz Jacobiana, que pode ser, muitas vezes, bastante complicado.

É garantido que, para y (ou $y - y^0$) pequeno, os termos não-lineares também são pequenos e não afetam a estabilidade e o tipo de ponto de equilíbrio determinados pelo sistema linear, exceto em dois casos sensíveis: quando r_1 e r_2 forem imaginários puros e quando r_1 e r_2 forem reais e iguais. Assim, exceto nos dois casos sensíveis, o tipo e a estabilidade do ponto de equilíbrio do sistema não-linear $\dot{y} = \mathbf{A}y + g(y)$ podem ser determinados por um estudo do sistema linear

muito mais simples $\dot{y} = \mathbf{A}y$. Dessa forma, conclui-se que a teoria de sistemas quase-lineares é uma teoria local (Boyce & Dprima, 1990).

Para exemplificar a análise de sistemas quase-lineares, será utilizado o seguinte sistema presa-predador:

$$\begin{aligned}\frac{dP}{dt} &= nP\left(1 - \frac{P}{K}\right) - \lambda\frac{P}{P+h}Q \\ \frac{dQ}{dt} &= \rho\lambda\frac{P}{P+h}Q - mQ.\end{aligned}\quad (15)$$

Os pontos de equilíbrio desse sistema são: $(0, 0)$, $(K, 0)$ e (P^*, Q^*) , em que

$$P^* = \frac{mh}{\rho\lambda - m}, \quad Q^* = \frac{n}{\lambda}(P^* + h)\left(1 - \frac{P^*}{K}\right). \quad (16)$$

Então, a matriz Jacobiana para o ponto de equilíbrio de coordenadas P^* e Q^* é como segue

$$\begin{pmatrix} n\left(1 - \frac{2P^*}{K}\right) - \frac{\lambda h Q^*}{(P^* + h)^2} & \frac{\lambda P^*}{P^* + h} \\ \frac{\rho\lambda h Q^*}{(P^* + h)^2} & \frac{\rho\lambda P^*}{P^* + h} - m \end{pmatrix}. \quad (17)$$

Note que o número excessivo de parâmetros irá dificultar bastante os cálculos dos autovalores, conseqüentemente, a identificação do tipo do ponto de equilíbrio, bem como sua estabilidade. Esse problema pode ser contornado utilizando uma reparametrização do sistema 16. Reparametrização é uma técnica matemática que consiste em reduzir o número de parâmetros de sistemas sem alterar suas características. Petrovskii & Malchow (1999) sugere a seguinte reparametrização para o sistema 16: $\tilde{t} = tn$, $\tilde{P} = P/K$ e $\tilde{Q} = Q\lambda/(Kn)$, logo:

$$\begin{aligned}\frac{dP}{dt} &= P(1 - P) - \frac{P}{P+H}Q \\ \frac{dQ}{dt} &= k\frac{P}{P+H}Q - \mu Q,\end{aligned}\quad (18)$$

em que $k = \rho\lambda/n$, $\mu = m/n$ e $H = h/K$. Para todo valor de k , μ e H : $(0, 0)$,

$(1, 0)$ e (P^*, Q^*) são os pontos críticos do sistema 18, em que:

$$P^* = \frac{uH}{1-u}, Q^* = (1-P^*)(H+P^*), \quad (19)$$

por conveniência $u = \mu/k$.

Da análise do sistema linear associado ao sistema 18 sobre $(0, 0)$ encontra-se que os autovalores são reais, um positivo e o outro negativo, implicando que $(0, 0)$ é um ponto de sela. O ponto $(1, 0)$ também é um ponto de sela se $H < (1-u)/u$, ou um nó estável, caso contrário. Já o ponto (P^*, Q^*) pode ser de qualquer tipo (Petrovskii & Malchow, 1999).

A situação em que (P^*, Q^*) é ponto espiral instável está ilustrada na Figura 2. Logo, espera-se que $\| (P, Q) \| \rightarrow \infty$ quando $t \rightarrow \infty$, mas não é o que acontece. Quando toma-se o valor inicial distante do ponto de equilíbrio (P^*, Q^*) , temos que $\| (P(t), Q(t)) \| \rightarrow (P^*, Q^*)$ quando $t \rightarrow \infty$, mas, na verdade, as trajetórias atingem uma curva limite fechada, chamada de ciclo limite. A existência de ciclo limite é comum em sistemas presa-predador que apresentam soluções periódicas na região $P \geq 0, Q \geq 0$ (Boyce & Diprima, 1990 e Murray, 1993). Quando as trajetórias que se iniciam tanto próximas ao ponto de equilíbrio (P^*, Q^*) espiral instável, quanto as que se iniciam distante, atingem o ciclo limite, dá-se o nome de ciclo limite assintoticamente estável. Agora, se as trajetórias de um lado tendem à trajetória fechada, enquanto as do outro lado se afastam quando $t \rightarrow \infty$, então, o ciclo limite é dito semi-estável. Se as trajetórias de ambos os lados da trajetória fechada se afastam quando $t \rightarrow \infty$, então, a trajetória fechada é instável.

É possível determinar uma expressão para o ciclo limite (trajetória fechada) resolvendo o sistema de equações diferenciais explicitamente. Infelizmente, isso não é possível, em geral. Serão apresentados teoremas gerais, sem exibir suas demonstrações, relativos à existência ou não-existência de ciclos limites para sistemas autônomos não lineares.

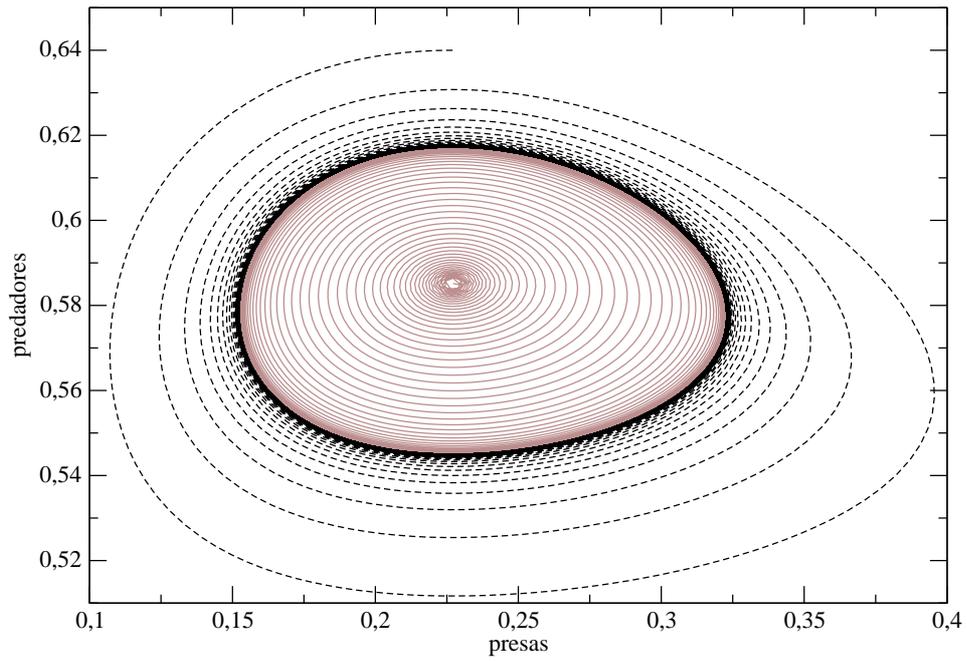


Figura 2: Ciclo limite assintoticamente estável em preto (linha cheia). Em marrom, é trajetória iniciada dentro de ciclo limite cujo valor inicial é $(P_0, Q_0) = (0, 227143, 0, 525164)$. Em preto tracejado, é a trajetória iniciada fora do ciclo limite, cujo valor inicial é $(P_0, Q_0) = (0, 227143, 0, 64)$. Parâmetros $p = 0, 3$, $H = 0, 53$ e $k = 0, 1$.

Teorema 1: Considere o sistema autônomo 14. Suponha que as funções F e G têm derivadas parciais de primeira ordem contínuas em um domínio D do plano y_1y_2 . Uma trajetória fechada do sistema 14 tem, necessariamente, que conter, em seu interior, pelo menos um ponto de equilíbrio. Se contém apenas um ponto crítico, esse ponto não pode ser de sela.

Esse teorema também é útil de maneira negativa, ou seja, se uma dada região não contém pontos críticos, não podem existir trajetórias fechadas inteiramente contidas na região. O mesmo se conclui se a região contém um único ponto crítico que é de sela. Portanto, esse sistema não tem trajetórias fechadas contidas no primeiro quadrante.

O próximo teorema também é um resultado sobre a não-existência de trajetórias fechadas.

Teorema 2: Suponha que as funções F e G têm derivadas parciais de primeira ordem contínuas em um domínio simplesmente conexo D do plano y_1y_2 . Se $F_{y_1} + G_{y_2}$ tem o mesmo sinal em todos os pontos de D , então, não existe trajetória fechada do sistema 14 inteiramente contida em D .

Um domínio simplesmente conexo em duas dimensões é uma região que não tem buracos, ou seja, para qualquer dois pontos dessa região, a semi-reta com extremidades nesses pontos está inteiramente contida na região. O próximo teorema oferece condições que garantem a existência de uma trajetória fechada.

Teorema de Poincaré-Bendixson. Sejam F e G funções com derivadas parciais de primeira ordem contínuas em um domínio D no plano y_1y_2 . Seja D_1 um subdomínio limitado de D e seja R a região que consiste na união de D_1 a sua fronteira (todos os pontos de R pertencem a D). Suponha que R não contém pontos críticos do sistema 14. Se existe uma constante t_0 , tal que $y_1 = \phi(t)$, $y_2 = \psi(t)$ é uma solução do sistema 14 que existe e permanece em R para todo

$t \geq t_0$, então, ou $y_1 = \phi(t)$, $y_2 = \psi(t)$ é uma solução periódica (trajetória fechada) ou $y_1 = \phi(t)$, $y_2 = \psi(t)$ tende a uma trajetória fechada quando $t \rightarrow \infty$. Em qualquer dos casos, o sistema 14 tem uma solução periódica em R .

Para um ciclo limite assintoticamente estável ou para um ponto de equilíbrio assintoticamente estável, pode ser importante, também, investigar a bacia de atração, isto é, o conjunto de todos os pontos iniciais a partir dos quais a trajetória se aproxima de um ciclo limite estável ou do ponto crítico assintoticamente estável. O segundo método de Liapunov, que será apresentado na próxima secção, possibilita o cálculo de uma estimativa da bacia de atração, bem como conclusões sobre o tipo de estabilidade do ponto de equilíbrio por meio de uma função auxiliar apropriada chamada de função de Liapunov.

2.6 O segundo método de Liapunov

Alexandr M. Liapunov (1857 – 1918) era matemático e o segundo método foi publicado no seu trabalho mais influente, *General Problem of Stability of Motion*, publicado em 1892. O segundo método de Liapunov é um método direto, ou seja, não há necessidade de se conhecer algo sobre a solução do sistema de equações diferenciais (Boyce & DiPrima, 1990).

Para desenvolver o método, considere o sistema autônomo 14. Uma função de Liapunov é uma função $V(y_1, y_2)$ das duas funções incógnitas y_1 e y_2 definida em alguma região D contendo um ponto de equilíbrio $(0, 0)$ (vimos que se o ponto de equilíbrio for diferente de $(0, 0)$, podemos defini-lo na origem de um novo eixo coordenado, utilizando uma translação). A função V é positiva definida em D se $V(0, 0) = 0$ e $V(y_1, y_2) > 0$ em todos os outros pontos de D . Analogamente, V é negativa definida em D se $V(0, 0) = 0$ e $V(y_1, y_2) < 0$ para todos os outros pontos de D . A função V é positiva semidefinida se $V(y_1, y_2) \geq 0$ e

negativa semidefinida se $V(y_1, y_2) \leq 0$.

Não existe uma forma geral de se construir uma função de Liapunov, supondo que exista uma, mas é possível determinar sua taxa de variação da seguinte forma: suponha que $y_1 = \phi(t)$, $y_2 = \psi(t)$ seja uma solução do sistema 14, então pela regra da cadeia para funções de duas variáveis temos:

$$\begin{aligned}\frac{dV[\phi(t), \psi(t)]}{dt} &= V_{y_1}[\phi(t), \psi(t)]\frac{d\phi(t)}{dt} + V_{y_2}[\phi(t), \psi(t)]\frac{d\psi(t)}{dt} \\ &= V_{y_1}(y_1, y_2)F(y_1, y_2) + V_{y_2}(y_1, y_2)G(y_1, y_2) \\ &= \dot{V}(y_1, y_2).\end{aligned}$$

A construção de uma função de Liapunov depende do tipo de problema que está sendo tratado, por exemplo, em mecânica, uma função de Liapunov pode ser a energia total de um corpo em movimento, que é a soma da energia cinética com a energia potencial. A partir de agora, serão enunciados dois teoremas de Liapunov, que não serão demonstrados, o primeiro sobre estabilidade e o segundo sobre instabilidade.

Teorema 3: Suponha que o sistema autônomo 14 tenha um ponto de equilíbrio isolado na origem. Se existir uma função V , contínua com derivadas parciais contínuas, que seja positiva definida e para a qual \dot{V} é negativa definida em algum domínio D no plano $y_1 y_2$ contendo a origem, então, a origem é um ponto de equilíbrio assintoticamente estável. Se \dot{V} for negativa semidefinida, então, a origem é um ponto de equilíbrio estável (Boyce & Diprima, 1990).

Teorema 4: Suponha que a origem é um ponto crítico isolado do sistema autônomo 14. Seja V uma função contínua com derivadas parciais contínuas. Suponha que $V(0, 0) = 0$ e que, em toda vizinhança da origem, existe pelo menos um ponto onde V é positiva (negativa). Se existir um domínio D contendo a origem tal que \dot{V} seja positiva definida (negativa definida) em D , então a origem é um ponto crítico instável (Boyce & Diprima, 1990).

Na prática, o interesse é na bacia de atração. O próximo teorema fornece alguma informação de como determiná-la.

Teorema 5: Suponha que a origem é um ponto de equilíbrio isolado do sistema autônomo 14. Seja V uma função contínua com derivadas parciais de primeira ordem contínuas. Se existe um domínio limitado D_K , contendo a origem, em que $V(y_1, y_2) < K$, V é positiva definida e \dot{V} é negativa definida, então, toda solução das equações 14 que começa em um ponto em D_K tende à origem quando $t \rightarrow \infty$ (Boyce & Diprima, 1990).

Pela dificuldade, a demonstração será omitida. Em outras palavras, D_K é uma região de estabilidade assintótica, uma estimativa da bacia de atração.

Na próxima seção, será apresentada uma introdução ao estudo das equações diferenciais estocásticas (EDEs). O estudo das EDEs são muito importantes no estudo de modelos de dinâmica de populações, pois descrevem a dinâmica populacional, considerando as incertezas no meio ambiente.

3 Dinâmica de populações em ambiente estocástico

As influências externas de caráter estocástico (designadas genericamente por ruído) podem ser introduzidas nos modelos de dinâmica de populações na forma de uma força externa, caso em que é denominado aditivo, ou como variação de um ou mais parâmetros do sistema, sendo, então, designado paramétrico (ou multiplicativo) (Burrage, 1999). É muito importante estudar o efeito do ruído em um sistema dinâmico, pois afeta sua estabilidade. Isto será mostrado mais tarde.

Um caminho para se estudar a dinâmica de populações, considerando sob a dinâmica influências externas de natureza estocástica é a modelagem por meio das equações diferenciais estocásticas (EDEs). As EDEs surgem quando se incorpora a uma equação diferencial um "ruído". Os efeitos do ruído estão sempre presentes na dinâmica de populações reais e surgem de diferentes origens, tais como a intrínseca estocasticidade associada com as variabilidades aleatórias do meio ambiente (Spagnolo et al, 2003).

A presença de ruído em sistemas de equações diferenciais ordinárias pode alterar o comportamento da solução de uma infinidade de maneiras. Por exemplo, a equação logística $\dot{x}(t) = x(t)[a + bx(t)]$ para $a > 0$ e $b > 0$ possui solução que explode em um tempo finito:

$$T = -\frac{1}{a} \log \left(\frac{bx_0}{a + bx_0} \right). \quad (20)$$

Perturbando-se o parâmetro b , $b \rightarrow b + \eta\xi(t)$, em que $\xi(t)$ é o ruído branco, com probabilidade um a solução não explode para um tempo finito, ou seja, perturbando-se a capacidade suporte do meio ambiente, implicará na supressão da explosão populacional (Mao et al, 2001).

O problema fundamental, quando se estudam sistemas de equações diferenciais estocásticas, é encontrar a distribuição de probabilidade da função incóg-

nita como função dos parâmetros e do tempo, que é a mesma coisa que encontrar a solução do sistema (Schuss, 1980). É, em geral, muito difícil encontrar soluções analíticas exatas para EDEs. Assim, é necessário utilizar métodos analíticos aproximados ou métodos numéricos.

3.1 Movimento browniano e o processo de Wiener

No ano 1826, o botânico R. Brown observou que o movimento de uma partícula de pólen submersa em um fluido é aleatório. Ele observou também que o movimento de duas partículas de pólen são independentes. A partícula observada, chamada de partícula Browniana, é bem maior e mais pesada que as moléculas do meio que está submersa, logo, a colisão sofrida pela partícula Browniana com uma única molécula do meio tem um efeito desprezível, mas a superposição de várias colisões produz um efeito observável. As colisões moleculares de uma partícula Browniana ocorrem em sucessões muito rápidas e seu número é enorme. Por exemplo, uma partícula de ouro de raio $50\mu m$ sofre, aproximadamente, 10^{21} colisões por segundo se imersa em líquido sob condições normais. Assim, a trajetória exata da partícula browniana não pode ser acompanhada detalhadamente, mas tem que ser descrita estatisticamente. A influência externa na trajetória da partícula browniana pode ser descrita pela combinação de duas forças (Schuss, 1980):

- a fricção hidrodinâmica, determinada pela lei de Stokes: a força de tração sobre a partícula é dada por $-\beta v$, em que β é uma constante e v é a velocidade da partícula browniana;
- a força das colisões com as partícula do fluido $\xi(t)$, que produz variações aleatórias instantâneas na aceleração da partícula, ambos em magnitude e direção.

A força $\xi(t)$ do ítem dois chamamos de "ruído" e possui as seguintes propriedades (Schuss, 1980):

- (i) a velocidade da partícula é estatisticamente independente de $\xi(t)$;
- (ii) as variações de $\xi(t)$ são muito mais freqüentes que as da velocidade;
- (iii) a média de $\xi(t)$ é zero;
- (iv) $\xi(t)$ é não correlacionado no tempo, ou seja, $E(\xi(t)\xi(t')) = \Gamma_0\delta(t-t')$, em que Γ_0 é uma constante (Mood, 1974; Kreider 1966).

Da segunda lei de Newton, temos que:

$$\frac{dv}{dt} = -\beta v + \xi(t), \quad (21)$$

é a equação de Langevin (Tomé & Oliveira, 2001). Essa equação é particularmente importante, pois motivou a formalização matemática das equações diferenciais estocásticas.

A solução formal de 21 é dada por:

$$v(t) = v_0 e^{-\beta t} + \int_0^t e^{-\beta(t-s)} \xi(s) ds, \quad (22)$$

então:

$$v(t) - v_0 e^{-\beta t} = \int_0^t e^{-\beta(t-s)} \xi(s) ds.$$

Para valores de $t \rightarrow \infty$, temos que $v(t) - v_0 e^{-\beta t} \approx v(t)$. Escrevendo a integral como soma de Riemann finita:

$$\int_0^t e^{-\beta(t-s)} \xi(s) ds \approx \sum_{i=1}^n e^{\beta(i\Delta t - t)} \Delta b_i,$$

em que $\Delta b_i = \xi(i\Delta t)\Delta t$ (Anton, 2000). Portanto, para $t \rightarrow \infty$

$$v(t) \approx \sum_{i=1}^n e^{\beta(i\Delta t - t)} \Delta b_i. \quad (23)$$

As variáveis aleatórias Δb_i expressam as acelerações aleatórias sofridas pela partícula browniana no intervalo de tempo $(i\Delta t, (i+1)\Delta t)$. Assim, podemos assumir que as variáveis Δb_i são estatisticamente independentes uma das outras, já que as sucessivas colisões são completamente caóticas. Desta forma, podemos assumir que todas as variáveis Δb_i tem as mesmas propriedades estatísticas. Portanto, se escolhermos Δb_i como sendo variáveis gaussianas com média zero, então $v(t)$ será gaussiana (Mood et al, 1974). O valor da variância de Δb_i é calculado pelo seguinte caminho: definir $Var(\Delta b_i) = 2q\Delta t$. Usando 23, obtemos:

$$E(v^2) = \sum_{i=1}^n 2q\Delta t e^{2\beta(i\Delta t-t)} \Delta t \rightarrow 2q \int_0^t e^{2\beta(s-t)} ds = \frac{q}{\beta}(1 - e^{-2\beta t}),$$

quando $\Delta t \rightarrow 0$.

Para determinar o valor de q , é necessário retornarmos à solução da equação de Langevin, cuja solução determina a densidade de probabilidade de transição $p(v, t, v_0)$ da velocidade $v(t)$, isto é, a função $p(v, t, v_0)$ tal que:

$$P(v(t) \in B | v(0) = v_0) = \int_B p(v, t, v_0) dv.$$

em que $B \in \mathcal{B}$. \mathcal{B} é a σ -álgebra que contém todos os subconjuntos abertos de \mathbb{R} e é chamada de σ -álgebra de Borel unidimensional.

Assumimos que a velocidade inicial v_0 é dada, então:

$$p(v, t, v_0) \rightarrow \delta(v - v_0),$$

quando $t \rightarrow 0$.

É conhecido, da física estatística, que a densidade de probabilidade de transição $p(v, t, v_0)$ é, aproximadamente, a densidade maxwelliana para a temperatura T , independentemente da velocidade inicial v_0 , quando $t \rightarrow 0$. Portanto:

$$p(v, t, v_0) \rightarrow \left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{3/2} \exp\left(\frac{-mv^2}{2kT}\right),$$

quando $t \rightarrow \infty$.

Assim:

$$q = \frac{\beta k T}{m},$$

quando $t \rightarrow \infty$.

Agora, seja $x(t)$ a posição da partícula browniana, sabemos que

$$\frac{dx}{dt} = v,$$

então:

$$x(t) = x_0 + \int_0^t v(s) ds. \quad (24)$$

Substituindo 22 em 24, obtemos:

$$x(t) = x_0 + \int_0^t \left[v_0 e^{-\beta s} + e^{-\beta s} \int_0^s e^{\beta u} \xi(u) du \right] ds.$$

Mudando a ordem de integração (Anton, 2000), obtemos:

$$\begin{aligned} x(t) - x_0 - v_0 \frac{1 - e^{-\beta t}}{\beta} &= -e^{-\beta t} \int_0^t \frac{e^{\beta s} \xi(s)}{\beta} ds + \int_0^t \frac{\xi(s)}{\beta} ds \\ &= \int_0^t \frac{1 - e^{\beta(s-t)}}{\beta} \xi(s) ds \equiv \int_0^t g(s) \xi(s) ds. \end{aligned}$$

Escrevendo a integral como soma de Riemann finita:

$$\int_0^t g(s) \xi(s) ds \approx \sum_{i=1}^n g(i\Delta t) \Delta b_i,$$

observamos que:

$$x(t) - x_0 - v_0 \frac{1 - e^{-\beta t}}{\beta}$$

é gaussiana com média zero e variância:

$$\sigma^2 = 2q \int_0^t g^2(s) ds = \frac{q}{\beta^3} (2\beta t - 3 + 4e^{-\beta t} - e^{-2\beta t}).$$

Portanto, a densidade de probabilidade de transição de $x(t)$ é dada por:

$$p(x, t, x_0, v_0) = \left(\frac{m\beta^2}{2kT[2\beta t - 3 + 4e^{-\beta t} - e^{-2\beta t}]} \right)^{3/2} \\ \times \exp \left(-\frac{m\beta^2(x - x_0(1 - e^{-\beta t})/\beta)^2}{2kT[2\beta t - 3 + 4e^{-\beta t} - e^{-2\beta t}]} \right).$$

Para t grande, temos:

$$p(x, t, x_0, v_0) \approx \frac{1}{(4\pi Dt)^{3/2}} \exp \left(-\frac{(x - x_0)^2}{4Dt} \right),$$

em que

$$D = \frac{kT}{m\beta} = \frac{kT}{6\pi a\eta},$$

em que k é a constante de Boltzmann, a é o número de Avogadro e η é o coeficiente de fricção.

Observe que p é a solução da equação de difusão (Evans):

$$\frac{\partial p}{\partial t} = D \frac{\partial^2 p}{\partial x^2},$$

para t grande.

Conhecidas a expressão da posição da partícula Browniana e a sua densidade de probabilidade de transição, podemos definir, agora, o movimento browniano $x(t)$ por meio das seguintes propriedades:

- (i) $P(x(t) \in B | x(0) = x_0) = (4\pi Dt)^{-3/2} \int_B e^{-(x-x_0)^2/4Dt} dx$;
- (ii) para $0 < t_0 < t_1 < \dots < t_n$, os incrementos $x(t_1) - x(t_0), \dots, x(t_n) - x(t_{n-1})$ são independentes;
- (iii) para t arbitrário e $h > 0$, $x(t+h) - x(t)$ tem distribuição gaussiana, com média zero e variância h ;

(iv) $x(t)$ é contínua por parte.

O processo de Wiener unidimensional é um caso particular de movimento browniano, em que $D = \frac{1}{2}$, $x(0) = 0$ com probabilidade um. Geralmente, utiliza-se a letra W para representar o processo de Wiener em vez de x .

Uma consequência direta da definição do processo de Wiener é (Evans):

$$E(W(t)W(s)) = \min\{s, t\},$$

para $t \geq 0, s \geq 0$.

Assuma, sem perda de generalidade, $t \geq s \geq 0$. Então:

$$\begin{aligned} E(W(t)W(s)) &= E((W(s) - W(t) - W(s))W(s)) \\ &= E(W^2(s)) + E((W(t) - W(s))W(s)) \\ &= s + \underbrace{E(W(t) - W(s))}_{=0} \underbrace{E(W(s))}_{=0} \\ &= s = \min\{s, t\} = s \wedge t, \end{aligned}$$

já que $W(s)$ é gaussiana com média zero e variância s e $W(t) - W(s)$ é independente de $W(s)$. A última igualdade acima é uma notação simplificada para o mínimo.

É importante entender o princípio da modelagem de um processo dinâmico e aleatório, tal como o movimento browniano. O protótipo do movimento browniano é o passeio aleatório que será visto na próxima seção.

3.2 Passeio aleatório

O modelo matemático mais simples do movimento browniano é o passeio aleatório unidimensional, em que uma partícula se desloca de uma posição para outra em uma série de passos de mesmo tamanho. Cada passo pode ser dado na

direção para frente ou para trás, com probabilidade igual a $\frac{1}{2}$ em intervalos de tempo iguais. Uma descrição matemática para o passeio aleatório unidimensional é dado pelo seguinte modelo do lançamento de uma moeda não viciada: (i) suponha que a partícula inicie seu movimento em $x_0 = a (= 0, \pm 1, \dots)$; (ii) para o lançamento da moeda não viciada, defina:

$$e_n = \begin{cases} 1, & \text{se a face voltada para cima for cara no } n\text{-ésimo lançamento} \\ -1, & \text{se a face voltada para cima for coroa no } n\text{-ésimo lançamento} \end{cases}$$

isto é, a partícula se move no eixo Ox um passo para a direita, se o resultado for cara e um passo para a esquerda, se o resultado for coroa. Então, a posição desta partícula no tempo n é dado por:

$$X_n = a + e_1 + e_2 + \dots + e_n.$$

As variáveis e_n são independentes e $P(e_n = 1) = P(e_n = -1) = \frac{1}{2}$.

Considere que a partícula inicia-se seu movimento na posição $x_0 = 0$, então, a probabilidade $P(X_n = k | x_0 = 0)$, em que k é a posição da partícula após n passos é dada pela Tabela 2.

Nesta tabela, os valores nas linhas subsequentes de uma dada linha são determinadas pela adição da metade de cada valor na célula das diagonais anteriores a eles. Fato, isso determina o Triângulo de Pascal com zeros situados entre os valores e com cada linha multiplicada por um fator adicional $\frac{1}{2}$. Portanto, os coeficientes neste triângulo são dados por:

$$P(X_n = k | x_0 = 0) = P_0(X_n = k) = \frac{1}{2^n} \binom{n}{\frac{k+n}{2}}$$

Tabela 2: Valores da probabilidade da posição de uma partícula movendo-se conforme o passeio aleatório após n passos

Posição da partícula											
Passos	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5
0						1					
1					$\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$				
2				$\frac{1}{4}$	0	$\frac{2}{4}$	0	$\frac{1}{4}$			
3			$\frac{1}{8}$	0	$\frac{3}{8}$	0	$\frac{3}{8}$	0	$\frac{1}{8}$		
4		$\frac{1}{16}$	0	$\frac{4}{16}$	0	$\frac{6}{16}$	0	$\frac{4}{16}$	0	$\frac{1}{16}$	
5	$\frac{1}{32}$	0	$\frac{5}{32}$	0	$\frac{10}{32}$	0	$\frac{10}{32}$	0	$\frac{5}{32}$	0	$\frac{1}{32}$

3.3 Equações diferenciais estocásticas

A forma geral de uma equação diferencial estocástica (EDE) é:

$$\begin{cases} \frac{dY}{dt} = f(t, Y) + g(t, Y)\xi(t) & (t > 0) \\ Y(0) = Y_0 \end{cases} \quad (25)$$

em que $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ é uma função suave, chamada de componente de variação lenta (ou coeficiente de tendência), $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ é chamado de componente de variação rápida (ou coeficiente de difusão) e $\xi(t)$ é o ruído. Se $g(t, Y)$ depende de Y , então, o ruído é chamado de multiplicativo; se $g(t, Y)$ é constante, o ruído é chamado de aditivo. Neste estudo considerá-se-a o ruído como sendo ruído branco gaussiano, ou seja, com média zero e função de autocorrelação $E(\xi(t)\xi(s)) = \delta_0(s - t)$ (Kreider, 1966).

A forma diferencial da EDE 25 é:

$$\begin{cases} dY = f(t, Y)dt + g(t, Y)dW \\ Y(0) = Y_0 \end{cases} \quad (26)$$

em que $W(t)$ é o processo de Wiener (ou movimento browniano) e $\xi(t)dt = dW$. A igualdade $\xi(t)dt = dW$ não existe no sentido do cálculo diferencial usual, pois $W(t)$ não é diferenciável para nenhum tempo $t \geq 0$. A expressão $\xi(t)dt = dW$ precisa ser definida e esta definição é o ponto de partida para o cálculo estocástico.

Chamamos $\dot{W} = \xi(t)$ de ruído branco por causa do seguinte raciocínio: seja $X(\cdot)$ um processo estocástico qualquer com $E(X^2(t)) < \infty$, para todo $t \geq 0$, defina:

$$r(t, s) := E(X(t)X(s)) \quad (t, s \geq 0),$$

a função de autocorrelação de $X(\cdot)$. Se $r(t, s) = c(t - s)$, para qualquer distribuição $c : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ e se $E(X(t)) = E(X(s))$ para todo $t, s \geq 0$, $X(\cdot)$ é chamado de estacionário no senso amplo. Um ruído branco $\xi(\cdot)$ é, por definição, gaussiano, estacionário no senso amplo e com distribuição $c(\cdot) = \delta$. Definindo a transformada de Fourier da autocorrelação (Kreider, 1966)

$$f(\lambda) := \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\lambda t} c(t) dt \quad (\lambda \in \mathbb{R})$$

como sendo a densidade espectral de um processo $X(\cdot)$. Para o ruído branco, temos:

$$f(\lambda) := \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\lambda t} \delta(t) dt = \frac{1}{2\pi} \quad \text{para todo } \lambda,$$

ou seja, não há correlação temporal. Portanto, a densidade espectral de $\xi(\cdot)$ é constante, isto é, todas as frequências contribuem igualmente na função de correlação - por analogia - todas as cores contribuem igualmente para a formação da luz branca (Evans).

3.4 Integral estocástica

A equação 26 pode ser escrita na sua forma integral:

$$Y(t) = Y_0 + \int_0^t f(s, Y) ds + \int_0^t g(s, Y) dW.$$

A primeira integral é Riemman integrável. Já a segunda integral não pode ser entendida como uma integral ordinária, pois $W(t)$ possui variação infinita. Note também que $g(s, Y)$ e $W(t)$ não são funções, são processos estocásticos. Este tipo de integral é conhecido como integral estocástica. Toda uma nova teoria já foi desenvolvida para tratar as integrais estocásticas (Schuss, 1980; Burrage, 1999; Evans).

Para motivar o estudo de integrais estocásticas, será solucionada a seguinte integral estocástica, cujo integrando é o processo de Wiener:

$$\int_a^b W dW. \quad (27)$$

Um procedimento intuitivamente razoável é construir a aproximação da soma de Riemann, então, passar o limite, se for possível. Para este cálculo, é necessário apresentar algumas definições e lemas (Evans).

Definição 1. (i) Se $[a, b]$ é um intervalo em $[0, \infty)$, uma partição P de $[a, b]$ é uma coleção finita de pontos de $[a, b]$:

$$P = \{a = t_0 < t_1 < \dots < t_m = b\}.$$

(ii) $\|P\| = \max_{0 \leq k \leq m-1} |t_{k+1} - t_k|$ é a norma de P .

(iii) Para $0 \leq \lambda \leq 1$ e P uma partição dada de $[a, b]$, tome

$$\tau_k = (1 - \lambda)t_k + \lambda t_{k+1} \quad (k = 0, \dots, m - 1).$$

Nós definimos:

$$R = R(P, \lambda) = \sum_{k=0}^{m-1} W(\tau_k)(W(t_{k+1}) - W(t_k)).$$

Essa é a aproximação da soma de Riemann correspondente de $\int_a^b W dW$.

A questão chave é: se $\|P\| \rightarrow 0$ e com λ fixo, qual o valor desta integral?

Definição 2. O espaço $L^2(\Omega)$ é o espaço de todos processos estocásticos que são quadrado integrável no espaço de probabilidade Ω .

Lema (Variância Quadrática). Seja $[a, b]$ um intervalo em $[0, \infty)$, e suponha:

$$P^n := \{a = t_0^n < t_1^n < \dots < t_{m_n}^n = b\}.$$

são partições de $[a, b]$, com $\|P^n\| \rightarrow 0$ quando $n \rightarrow \infty$. Então:

$$\sum_{k=0}^{m_n-1} (W(t_{k+1}^n) - W(t_k^n))^2 \rightarrow b - a$$

em $L^2(\Omega)$ quando $n \rightarrow \infty$ (Evans).

Lema. Seja $[a, b]$ um intervalo em $[0, \infty)$, P^n uma partição deste intervalo e $0 \leq \lambda \leq 1$ fixo, defina:

$$R_n := \sum_{k=0}^{m_n-1} W(\tau_k^n)(W(t_{k+1}^n) - W(t_k^n)).$$

Então:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} R_n = \frac{W^2(b) - W^2(a)}{2} + (\lambda - \frac{1}{2})(b - a),$$

o limite sobre $L^2(\Omega)$. Isto é:

$$E \left(\left(R_n - \frac{W^2(b) - W^2(a)}{2} - (\lambda - \frac{1}{2})(b - a) \right)^2 \right) \rightarrow 0,$$

quando $n \rightarrow \infty$ (Evans).

Em particular, o limite da aproximação da soma de Riemann depende da escolha de pontos intermediários $t_k^n \leq \tau_k^n \leq t_{k+1}^n$, em que $\tau_k^n = (1 - \lambda)t_k^n + \lambda t_{k+1}^n$.

Portanto, para todos $b \geq a \geq 0$:

$$\int_a^b W dW = \frac{W^2(b) - W^2(a)}{2} - \left(\lambda - \frac{1}{2}\right)(b - a). \quad (28)$$

A escolha de diferentes valores de λ implica em diferentes valores de 28. Em particular, se $\lambda = 0$ (que equivale à escolha de $\tau_k^n = t_k^n$, que é o valor inicial do intervalo), a integral é conhecida como a integral de Itô. Se $\lambda = 1/2$, ($\tau_k^n = \frac{1}{2}(t_k^n + t_{k+1}^n)$), então, o resultado da integral é a integral de Stratonovich. Os cálculos de Stratonovich seguem as mesmas regras do cálculo de integrais de Riemann ou Stieltjes (Schuss, 1980).

Iremos definir, a seguir, a integral estocástica de Itô $\int_0^t g(s, Y) dW$. Para isso, é necessário que $g(s, Y)$ e W estejam definidos no mesmo espaço de probabilidade. É necessário, também, que $g(s, Y)$ seja não-antecipável.

Definição 3. Denotamos por $\mathbb{L}^2(a, b)$ o espaço de todos processos estocásticos $G(\cdot)$ tal que:

$$E \left(\int_a^b G^2 dt \right) < \infty.$$

Definição 4. Um processo estocástico $G \in \mathbb{L}^2(a, b)$ é chamado de um *processo passo* se existe uma partição $P = \{a = t_0 < t_1 < \dots < t_n = b\}$ tal que:

$$G(t) \equiv G_k,$$

para $t_k \leq t < t_{k+1}$ ($k = 0, \dots, n - 1$).

Definição 5. Um processo estocástico $G \in \mathbb{L}^2(a, b)$ é não-antecipável se é um processo passo e se é independente dos incrementos $W(t + s) - W(t)$, para todo $s > 0$.

Definição da integral estocástica de Itô. Seja $G \in \mathbb{L}^2(a, b)$ um processo

estocástico não-antecipável. Então:

$$\int_a^b G dW = \sum_{k=0}^{n-1} G_k (W(t_{k+1}) - W(t_k))$$

é a integral estocástica de Itô de G sobre o intervalo (a, b) .

3.5 Existência e unicidade de solução de equações diferenciais estocásticas

As EDEs também possuem solução única que é garantida pelo seguinte teorema.

Teorema 6: Suponha que $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ e $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ são contínuas e satisfazem às condições:

- (a) $|f(t, Y) - f(t, X)| \leq L|Y - X|$ e $|g(t, Y) - g(t, X)| \leq L|Y - X|$ para todo $0 \leq t \leq T, Y, X \in \mathbb{R}$;
- (b) $|f(t, Y)| \leq L(1 + |Y|)$ e $|g(t, Y)| \leq L(1 + |Y|)$ para todo $0 \leq t \leq T, Y \in \mathbb{R}$.

Para alguma constante L . Seja $Y_0 \in \mathbb{R}$ uma variável aleatória, independente do processo de Wiener $W(\cdot)$. Então, existe uma única solução Y da equação diferencial 29. A demonstração será omitida aqui e pode ser encontrada no livro de Schuss (1980) *Theory and applications of stochastic differential equations*.

3.6 Formula de Itô

Equações diferenciais estocásticas podem ser solucionadas analiticamente. Para a construção da expressão da solução de uma EDE, dado um valor inicial, é preciso utilizar a formula de Itô, que será apresentada, como segue.

Teorema 7 (Formula de Itô). Considere a EDE:

$$\begin{cases} dY = f(t, Y)dt + g(t, Y)dW \\ Y(0) = Y_0 \end{cases} \quad (29)$$

Defina uma função contínua $u(t, Y) : [0, T] \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $\frac{\partial u}{\partial t}$, $\frac{\partial u}{\partial y}$, $\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$ existam e são contínuas. Então, u tem a diferencial estocástica:

$$\begin{aligned} du &= \frac{\partial u}{\partial t}dt + \frac{\partial u}{\partial y}dY + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}G^2dt \\ &= \left(\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial x}F + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}G^2 \right) dt + \frac{\partial u}{\partial x}GdW. \end{aligned} \quad (30)$$

a última expressão é conhecida como a fórmula de Itô ou regra da cadeia de Itô.

Definição 6. Denotamos por $\mathbb{L}^1(a, b)$ o espaço de todos os processos estocásticos G , tal que:

$$E \left(\int_a^b |G|dt \right) < \infty;$$

Teorema 8 (regra do produto de Itô). Sejam Y_1 e Y_2 processos estocásticos, suponha:

$$\begin{cases} dY_1 = F_1dt + G_1dW \\ dY_2 = F_2dt + G_2dW \end{cases}$$

para $F_1, F_2 \in L^1(a, b)$, isto é, suas integrais de a até b existem e são finitas e processos passo $G_1, G_2 \in L^2(a, b)$, tal que $[a, b] \subset [0, \infty)$. Então:

$$d(Y_1Y_2) = Y_2dY_1 + Y_1dY_2 + G_1G_2dt.$$

A versão integral da regra do produto é a formula da integral por partes de Itô:

$$\int_a^b Y_2dY_1 = Y_1(b)Y_2(b) - Y_1(a)Y_2(a) - \int_a^b Y_1dY_2 - \int_a^r G_1G_2dt.$$

O termo G_1G_2dt aqui é conhecido como termo de correção de Itô (Evans).

Exemplo da aplicação da fórmula de Itô para solucionar uma EDE analiticamente: suponha que a taxa de natalidade a de uma espécie no modelo de Malthus $\dot{y} = ay$ sofre uma perturbação da forma $a \rightarrow a + \eta\xi(t)$, em que $\xi(t)$ é o ruído branco, logo:

$$\begin{cases} \frac{dY}{dt} = aY + \eta Y \xi(t) \\ Y(0) = Y_0 \end{cases} \quad (31)$$

observe que é uma equação de variável separável, então:

$$d(\ln Y) = adt + \eta dW,$$

agora, aplicamos a formula de Itô sobre a função $u(Y) = \ln Y$ e obtemos:

$$du = \left(a - \frac{\eta^2}{2}\right)dt + \eta dW$$

Portanto:

$$Y(t) = Y_0 e^{(a - \frac{\eta^2}{2})t + \eta W(t)}.$$

Observe que u tem distribuição normal com:

$$\begin{cases} E(u(t)) = \left(a - \frac{\eta^2}{2}\right)t \\ VAR(u(t)) = \eta^2 t. \end{cases}$$

Então, $Y(t)$ tem distribuição lognormal (Mood, 1974) com:

$$\begin{cases} E(Y(t)) = e^{(a - \frac{\eta^2}{2})t + \frac{1}{2}\eta^2 t} \\ VAR(Y(t)) = e^{2(a - \frac{\eta^2}{2})t + 2\eta^2 t} - e^{2(a - \frac{\eta^2}{2})t + \eta^2 t}, \end{cases}$$

a solução aproximada da equação de Malthus, juntamente com sua distribuição de probabilidade no instante $t = 30$ unidades de tempo, esta mostrada na Figura 3.

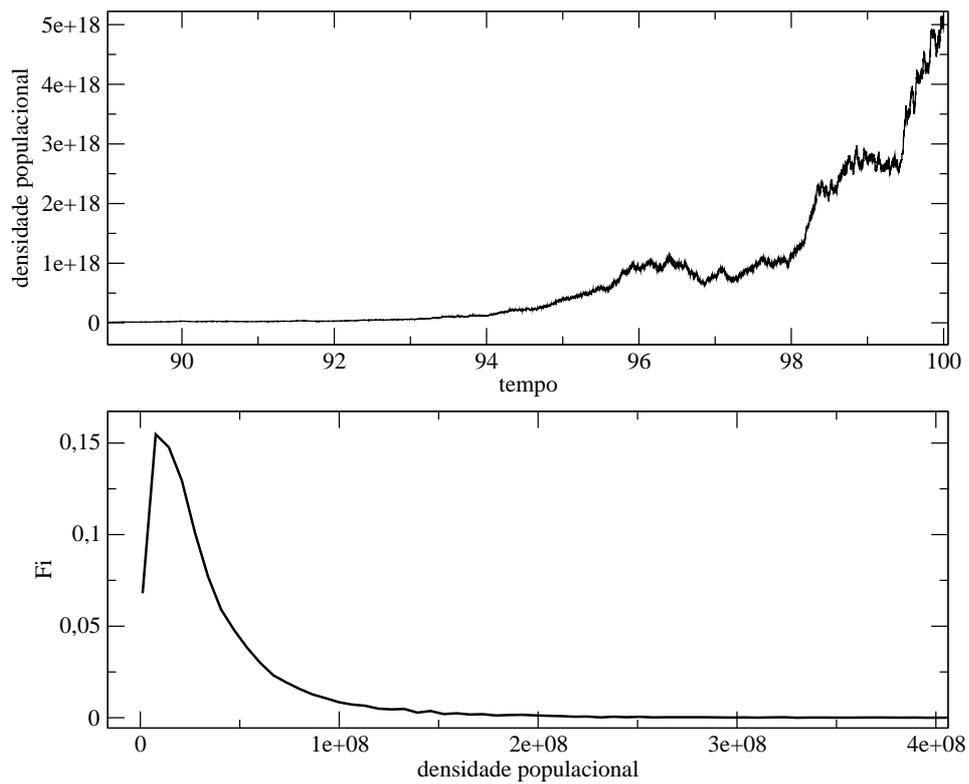


Figura 3: Acima: série temporal de uma população modelada pela equação de Malthus, considerando que a taxa de natalidade sofre uma perturbação do tipo $a \rightarrow a + \eta\xi(t)$, em que $a = 0,5$ e $\eta = 0,005$; abaixo: distribuição de probabilidade da população no instante $t = 30$ unidades de tempo.

3.7 Métodos numéricos para equações diferenciais determinísticas e estocásticas

A maioria das equações diferenciais ordinárias (EDOs) e as EDEs não possui solução analítica, então, para analisar as características de sistemas compostos por EDOs ou EDEs, utiliza-se análise de estabilidade ou métodos numéricos para se encontrar a solução aproximada. Na seção 2 foi apresentada a análise de estabilidade para sistemas EDEs. Burrage (1999) apresenta um pouco sobre análise de estabilidade de sistemas de EDEs. Nas próximas subseções serão apresentados métodos numéricos para EDOs e EDEs.

3.7.1 Métodos numéricos para EDOs

Considere a EDO

$$\begin{cases} dy = f(y)dt \\ y(0) = y_0 \end{cases} \quad (32)$$

A aproximação numérica mais simples para esta EDO é dada pelo método de Euler:

$$y_{n+1} = y_n + h_n f(y_n),$$

em que $h_n = t_{n+1} - t_n$, é o tamanho do passo. Este método possui ordem de convergência igual a 1, isto é, o erro de discretização local entre a solução numérica e a verdadeira solução é Ch^2 para alguma constante C (Burrage, 1999). Assim, se a precisão desejada é de 10^{-p} , por exemplo, então, o tamanho do passo h deverá ser de 10^{-p} , que se torna computacionalmente extensivo para valores moderados de p , por exemplo $p = 6$. Métodos com ordem alta de precisão podem ser implementados com tamanhos de passo maiores e, portanto, são mais precisos, como por

exemplo, o método de Runge-Kutta de quarta ordem, para a EDO acima (Burden & Faires, 2003).

O método numérico da série de Taylor consiste na expansão de $f(y + h)$ para $h > 0$ pequeno ($h \rightarrow 0$) como segue:

$$f(y + h) = f(y) + hf'(y) + h^2 \frac{f''(y)}{2!} + \dots + h^n \frac{f^n(y)}{n!} + \text{erro},$$

seguido da substituição de $y + h$ por y_{n+1} e de y por y_n . Este método é mais preciso que o de Euler, mas, para tamanhos do passo moderados, podemos ter um erro relativamente grande, tornando a aplicação do método insatisfatória (Roque, 2000).

O método de Runge-Kutta de quarta ordem é como segue:

$$\begin{aligned} k_1 &= hf(y_n), \\ k_2 &= hf(y_n + \frac{1}{2}k_1), \\ k_3 &= hf(y_n + \frac{1}{2}k_2), \\ k_4 &= hf(y_n + k_3), \\ y_{n+1} &= y_n + \frac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4), \end{aligned} \quad (33)$$

que garante solução aproximada para tamanhos bem maiores que o método de Euler e o da série de Taylor (Burrage 1999).

Como qualquer método numérico baseado sobre um tempo discreto para se obter a aproximação da solução para tempos discretos, para se obter uma 'solução para tempos contínuos', uma técnica usual é aproximar a solução pela interpolação linear (Burden & Faires, 2003), isso, tanto para o caso determinístico quanto para o estocástico. Entretanto, alguns autores têm construído métodos de interpolação de ordem alta no caso determinístico.

3.7.2 Métodos numéricos para EDEs

Considere a equação diferencial estocástica de Itô:

$$\begin{cases} dY = f(Y)dt + g(Y)dW \\ Y(0) = Y_0 \end{cases} \quad (34)$$

O método semelhante ao método de Euler, chamado de Euler-Maruyama, que é o mais simples dos métodos para se determinar uma solução aproximada para EDEs, é como segue:

$$Y_{n+1} = Y_n + h_n f(Y_n) + g(Y_n)(W(t_{n+1}) - W(t_n)),$$

em que $h_n = t_{n+1} - t_n$ e $W(t_{n+1}) - W(t_n) \sim N(0, h_n)$.

A dedução desse método é feita pelo seguinte caminho: considere a EDE 34, então, $dY \approx Y(t+h) - Y(t)$, $dt \approx h$, $dW \approx W(t+h) - W(t)$ quando $h \rightarrow 0$, é a aproximação contínua dessa EDE. A forma discreta, portanto, $dY \approx Y_{n+1} - Y_n$, $dt \approx h_n$, $dW \approx W(t_{n+1}) - W(t_n)$, quando h_n é pequeno, substituindo-se essas aproximações na EDE acima, obtém-se o método de Euler-Maruyama. Esse método garante uma boa precisão para sistemas de EDEs com ruído aditivo, quando o tamanho do passo h é pequeno (Burrage, 1999).

Para a determinação dos valores Y_n , é necessário simular a aproximação de dW , um procedimento simples é como segue: (i) gerar n números aleatórios X , $n > 1$, com distribuição uniforme sobre o intervalo $[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$; (ii) somar os n valores, o resultado, então, possui distribuição normal com média zero e variância an , em que a é uma constante positiva. Dessa forma, obtemos Y_n .

Segundo Burrage (1999), o método de Euler-Maruyama tem ordem forte de convergência $\frac{1}{2}$ (e ordem fraca de convergência 1) e converge para a solução da EDE de Itô. Este método tem ordem forte de convergência 1 para sistemas

com ruído aditivo. Notem que a ordem do método é pequena e, para tamanhos de passos pequenos, este método não é preciso.

Para equações diferenciais estocásticas pode ser utilizada a versão estocástica da série de Taylor. Nesse estudo será mostrada a expansão da série de Taylor estocástica de Itô. Para desenvolvê-la, considere a forma integral da EDE 34:

$$Y(t) = Y(t_0) + \int_a^b f(Y(s))ds + \int_a^b g(Y(s))dW, \quad (35)$$

da fórmula de Itô, temos que:

$$u(Y(t)) - u(Y(t_0)) = \int_a^b \left(\frac{\partial u}{\partial y} f + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} g^2 \right) ds + \int_a^b \frac{\partial u}{\partial y} g dW. \quad (36)$$

Defina os operadores:

$$L^0 a(y) = \frac{\partial a}{\partial y} f + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 a}{\partial y^2} g^2, L^1 a(y) = \frac{\partial a}{\partial y} g.$$

Assim, podemos reescrever 36 como:

$$u(Y(t)) - u(Y(t_0)) = \int_a^b L^0 u(Y(s))ds + \int_a^b L^1 F(Y(s))dW. \quad (37)$$

Aplicando uma vez a fórmula de Itô (como representada em 37) para f e g em 35, então:

$$\begin{aligned} Y(t) &= Y(t_0) \\ &+ \int_a^b \left(f(Y(t_0)) + \int_a^b L^0 f(Y(z))dz + \int_a^b L^1 f(Y(z))dW \right) ds \\ &+ \int_a^b \left(g(Y(t_0)) + \int_a^b L^0 g(Y(z))dz + \int_a^b L^1 g(Y(z))dW \right) dW. \end{aligned}$$

Conseqüentemente, aplicando-se a formula de Itô (como representada em 37) em $L^0 f$, $L^1 f$, $L^0 g$, $L^1 g$, a expansão da série de Taylor estocástica de Itô é determinada.

Um método muito utilizado para solucionar equações diferenciais ordinárias é o Runge-Kutta, que garante uma precisão ótima e a versão estocástica deste método já foi desenvolvida, podendo ser encontrada na tese de Burrage (1999).

4 Estudo de um modelo presa-predador estocástico

Para ilustrar as características de um modelo de dinâmica de populações em ambiente estocástico, será estudado um modelo presa-predador, considerando que, no ambiente determinístico ocorra estocasticidade na forma de força externa, forçando as populações a migrarem aleatoriamente de uma determinada área para outra. Para isso, serão consideradas resposta do tipo Lotka-Volterra para a interação biótica, resposta funcional logística para interação intraespecífica das presas, resposta funcional Holling tipo II para a predação e a estocasticidade será introduzida no sistema em forma de ruído aditivo.

As equações de Itô para a dinâmica são:

$$\begin{aligned}dP &= \left(P(1 - P) - \frac{P}{P + H}Q \right) dt + \eta_P dW_P \\dQ &= \left(k \frac{P}{P + H}Q - mQ \right) dt + \eta_Q dW_Q\end{aligned}\quad (38)$$

em que H é a constante de Michaelis-Menten, k é a taxa de conversão de alimento em novos indivíduos, m é a taxa de mortalidade dos predadores, η_P e η_Q são as taxas de migração (intensidade do ruído). Por simplicidade, adota-se $\eta_P = \eta_Q = \eta$.

Neste trabalho serão feitos os seguintes estudos: análise da introdução de ruído aditivo no modelo determinístico para verificar se há alteração da estabilidade do sistema; análise das transformadas de Fourier e dos comportamentos das funções de autocorrelação dos tamanhos populacionais; determinação das distribuições de probabilidades dos tamanhos populacionais no tempo; análise qualitativa para melhor compreender o tipo de relação funcional entre a variância com a intensidade do ruído η e da variância com a constante de Michaelis-Menten H . A escolha da constante de Michaelis-Menten ocorreu por ser ela o único parâmetro

da equação das presas do modelo determinístico que afeta esta população diretamente e, também, é o único parâmetro que está nas duas equações do modelo determinístico.

Estes estudos serão feitos em dois casos em que as populações são constantes para $t > t_0$ e em um caso em que as populações flutuam com amplitude constante para $t > t_0$, ou seja, matematicamente, os três casos são descritos dessa forma: (i) tomando o valor inicial numa vizinhança do ponto de equilíbrio (P^*, Q^*) quando é um nó estável; (ii) tomando o valor inicial na vizinhança deste ponto de equilíbrio quando é um foco estável; (iii) tomando o valor inicial sobre um ciclo limite assintoticamente estável, ou seja, (P^*, Q^*) é um foco instável. Nos casos (i) e (ii) o valor inicial: $(P_0, Q_0) \in R = \{\|(P(t), Q(t)) - (P^*, Q^*)\| \leq \delta : t > 0\}$, em que $\delta = 10^{-4}$.

Os valores atribuídos ao ponto de equilíbrio (P^*, Q^*) estão relacionados aos parâmetros do modelo determinístico, cujas expressões para seus cálculos foram apresentadas na subseção 2.41. Logo, foram escolhidos os conjuntos apresentados na Tabela 3 para os estudos propostos acima. Para o caso (i), serão utilizados os conjuntos 1 e 2; para o caso (ii), os conjuntos 3 e 4 e no caso (iii), apenas o conjunto 5. A escolha destes valores para os parâmetros teve como referência o mapa paramétrico do artigo de Petrovskii & Malchow (1999).

Tabela 3: Parâmetros utilizados na solução do sistema presa-predador

Conjunto de Parâmetros					
	1	2	3	4	5
p	0,49	0,49	0,3	0,3	0,3
H	1,025	1,025	0,8	0,8	0,53
k	0,1	2	0,1	2	0,1

Notem a não linearidade do modelo proposto. Assim, não será possível obter solução analítica exata. Dessa forma, para que o estudo proposto acima seja realizado, será utilizado um método numérico para determinar a solução discreta aproximada dos verdadeiros valores da solução contínua do modelo $(P(t), Q(t))$. O método escolhido foi o de Euler-Maruyama. A escolha deste método foi motivada pela dificuldade de se implementar métodos mais precisos para equações diferenciais estocásticas.

Na obtenção de todos os dados destes estudos foram implementadas rotinas na linguagem de programação C. Para a análise dos dados e a construção de todos os gráficos, foi utilizado o software MGRACE, pelo qual serão calculadas as transformadas de Fourier e as funções de autocorrelação dos tamanhos populacionais.

Aplicando-se o método de Euler-Maruyama no sistema 38 obtém-se:

$$\begin{aligned} P_{n+1} &= P_n + \left(P_n(1 - P_n) - \frac{P_n}{P_n + H} Q_n \right) h + \eta X \\ Q_{n+1} &= Q_n + \left(k \frac{P_n}{P_n + H} Q_n - m Q_n \right) h + \eta Y, \end{aligned} \quad (39)$$

logo, P_{n+1} e Q_{n+1} são as aproximações discretas dos tamanhos populacionais no tempo nh , X e Y são variáveis aleatórias com distribuição normal com média zero e variância h . Por simplicidade, adota-se h constante. Nos casos (i) e (ii) foi adotado $h = 10^{-3}$, pois, como os valores iniciais estão muito próximos a um atrator, espera-se que a solução seja precisa; no caso (iii) $h = 10^{-6}$, que garante uma precisão ótima.

Para determinar os valores de X e Y no modelo 39, foi utilizado o método apresentado na subseção 3.4.2. Nos casos (i) e (ii) será utilizado $n = 10$, que garante X e Y com distribuição normal com média zero e variância h ; no caso (iii), será utilizado $n = 100$.

Para obterem-se os resultados referentes às distribuições de probabilidades, foram calculados 20 mil valores de 39 sob a intensidade do ruído $\eta = 6,3251 \times 10^{-5}$ nos três casos e em alguns instantes de tempos nh pequenos e grandes, construindo-se os gráficos das frequências observadas pelos tamanhos populacionais (histogramas).

Na determinação das variâncias dos tamanhos populacionais como função da intensidade do ruído e como função da constante de Michaelis-Menten, os valores foram obtidos por meio de 20 mil repetições do modelo 39 e em apenas num único tempo t' e somente nos casos (i) e (ii). O valor deste tempo foi escolhido observando-se o gráfico das populações pelo tempo, de forma que as populações sejam, sem sombra de dúvida, constantes, pois, como os valores iniciais pertencem a uma vizinhança do ponto de equilíbrio, é necessário um certo tempo (pequeno) para sejam realmente constantes. Assim, espera-se que as relações funcionais não tenham variações significativas para tempos $t \gg t'$.

Na obtenção das variâncias como função da intensidade do ruído nos casos (i) e (ii), foram calculados 400 valores, em que $\eta \in [7,9063 \times 10^{-6}, 3,1625 \times 10^{-3}]$ ao passo de $\eta_{n+1} - \eta_n = 7,9063 \times 10^{-6}$. Não foi possível estender este intervalo, porque ocorre extinção das populações para valores da intensidade do ruído pouco maiores que $3,1625 \times 10^{-3}$.

Para obterem-se as variâncias como função da constante de Michaelis-Menten, em que os valores foram tomados utilizando-se o mapa paramétrico do artigo de Petrovskii & Malchow (1999), será considerado $\eta = 6,3251 \times 10^{-5}$. O procedimento será o seguinte: no caso (i), serão calculados 80 valores utilizando-se o conjunto 1 de parâmetros, em que $H \in [0,805, 1, 2]$ e 40 valores utilizando-se o conjunto 2, em que $H \in [1,005, 1, 2]$. No caso (ii), serão calculados 40 valores utilizando-se os conjuntos 3 e 4 de parâmetros, em que $H \in [0,81, 1, 2]$. Este

intervalos foram medidos no mapa paramétrico com régua e compasso. Note que houve uma redução no intervalo de variação de H , devido à sensibilidade do mapa paramétrico à variação da constante k , implicando numa maior proximidade das curvas que separam as regiões.

Os resultados serão discutidos nas próximas seções. A primeira é intitulada de estudo do nó estável e refere-se aos resultados do caso (i), estudo do foco estável refere-se aos resultados do caso (ii) e estudo do ciclo limite aos resultados do caso (iii).

4.1 Estudo do nó estável: primeiro caso

Utilizando-se os parâmetros do conjunto 1 apresentado na tabela 3 da seção anterior, introduzindo-se o ruído aditivo, as populações deixam de ser constantes e passam a flutuar, como mostram o plano de fase e o gráfico do tamanho populacional das presas (Figura 4).

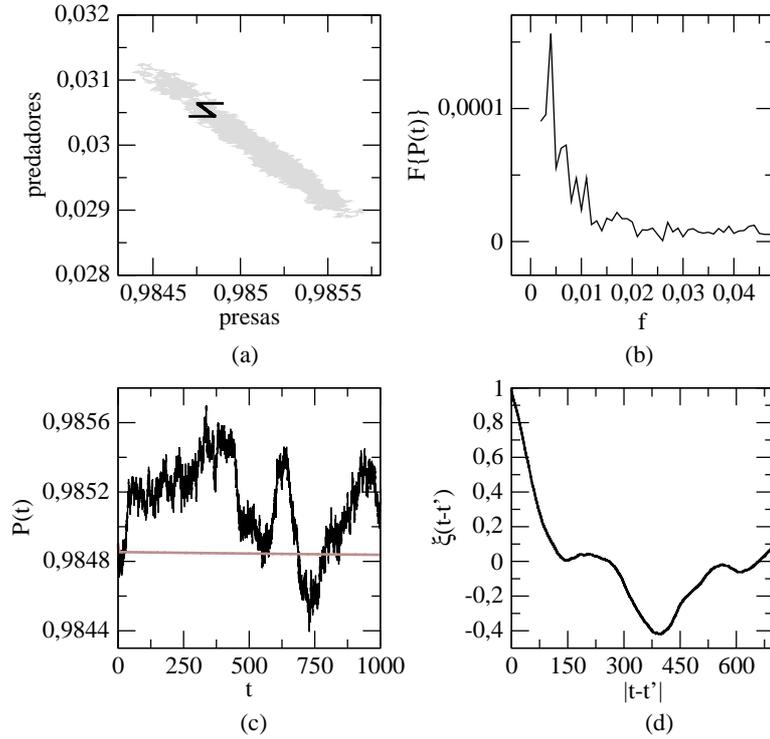


Figura 4: Dinâmica de Lotka-Volterra estocástica utilizando o conjunto 1 de parâmetros, $\eta = 6,3251 \times 10^{-5}$ e valor inicial próximo ao nó estável. (a) Plano de fase: trajetórias determinística (em preto) com valores iniciais $(P_0^1, Q_0^1) = (P^* + \delta, Q^* + \delta)$ e $(P_0^2, Q_0^2) = (P^* - \delta, Q^* - \delta)$ e trajetória estocástica (cinza) com valor inicial $(P_0, Q_0) = (P^* + \delta, Q^* + \delta)$; (b) módulo quadrado da transformada de Fourier da série temporal da população das presas; (c) gráfico da população das presas, solução determinística (marrom) e estocástica (preto); (d) $\xi(t - t')$ é a função de autocorrelação da população das presas.

A trajetória estocástica fica próxima do nó estável flutuando em torno dele, não mais converge para o ponto de equilíbrio assintoticamente estável. Ocorre também o surgimento de um período significativo dos tamanhos populacionais para frequências pequenas, como mostra o espectro de frequência, a densidade dos predadores responde de forma semelhante. Os tamanhos populacionais são fortemente correlacionados para intervalos de tempos pequenos. Como mostra a função de autocorrelação (Figura 4), ela decresce rapidamente de um até zero, à medida que os intervalos de tempo crescem até 150. A partir de 150, os tamanhos populacionais são não correlacionados para intervalos de tempos que não pertençam ao intervalo que vai de 300 até 525, em que os tamanhos populacionais têm correlação negativa.

Através dos histogramas (Figura 5), nota-se que a distribuição de probabilidade das presas e dos predadores é ajustada por uma curva gaussiana em todos os tempos. Portanto, as distribuições de probabilidades dos tamanhos populacionais, cujos valores iniciais pertencem a uma vizinhança do nó estável são gaussianas para todo $t > 0$.

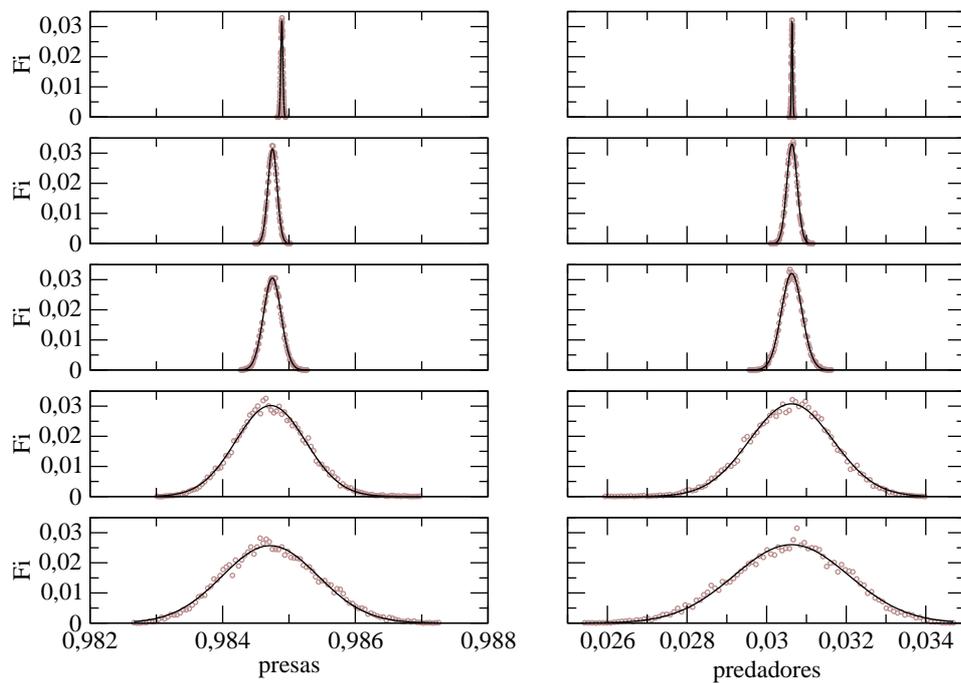


Figura 5: Evolução temporal (de cima para baixo) da distribuição de probabilidade dos tamanhos populacionais das presas e dos predadores nos tempos 0,08; 5,12; 20,48; 400 e 900 unidades de tempo, utilizando o conjunto 1 de parâmetros, $\eta = 6,3251 \times 10^{-5}$ e valor inicial $(P_0, Q_0) = (P^* + \delta, Q^* + \delta)$. Os círculos representam as freqüências observadas e o ajuste pela curva gaussiana é representado pela curva em preto.

As variâncias assumem valores muito pequenos em relação aos tamanhos populacionais em todos os instantes, crescendo lentamente de forma não linear, a da densidade dos predadores cresce mais rápido (Figura 6). Há uma sugestão de que as variâncias irão atingir um valor assintótico quando $t \rightarrow \infty$. Na análise qualitativa das variâncias dos tamanhos populacionais em t' como função da constante de Michaelis-Menten H , foi mostrado que os valores são pequenos se comparados aos tamanhos populacionais e seus gráficos são significativamente diferentes, sendo a variância das presas lentamente decrescente e a variância dos

predadores lentamente crescente (Figura 6). Isso provavelmente, ocorre devido ao fato da não linearidade na equação da taxa de variação das presas ser mais forte do que na dos predadores no modelo 38. As variâncias dos tamanhos populacionais em t' como função da intensidade do ruído também são pequenas, se comparadas aos tamanhos populacionais. Elas crescem lentamente e não linearmente e a dos predadores cresce mais rápido.

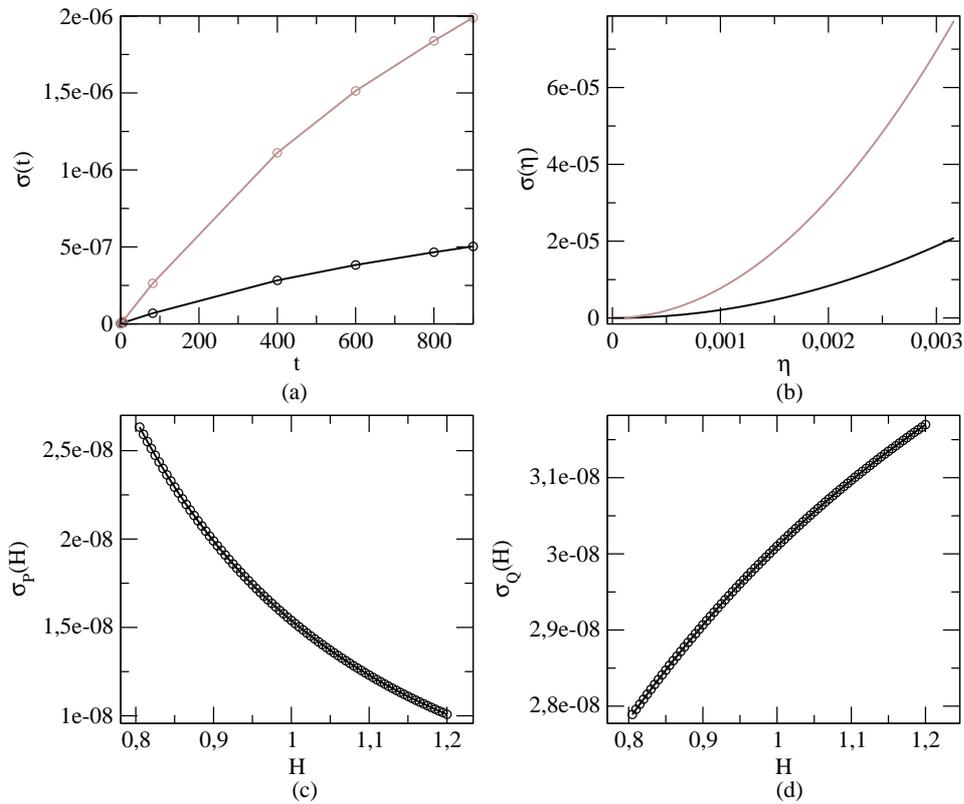


Figura 6: (a) Variância temporal das densidades das presas (em preto) e dos predadores (marrom) utilizando o conjunto 1 de parâmetros, $\eta = 6,3251 \times 10^{-5}$ e valor inicial $(P_0, Q_0) = (P^* + \delta, Q^* + \delta)$; (b) variância das densidades em t' pela intensidade do ruído (taxa de migração) utilizando o conjunto 1 de parâmetros e valor inicial próximo ao nó estável, das presas (em preto) e dos predadores (marrom); (c) variância da densidade das presas pela constante de Michaelis-Menten; (d) variância da densidade dos predadores pela constante de Michaelis-Menten.

4.2 Estudo do nó estável: segundo caso

Quando utilizamos o conjunto 2 de parâmetros apresentado na tabela 3 da seção anterior, percebe-se que os resultados são semelhantes aos obtidos utilizando-se o conjunto 1 de parâmetros. Ocorre diferença na trajetória estocástica se comparada à obtida utilizando o conjunto 1 de parâmetros, que está mais concentrada em torno do nó estável do que quando se utiliza o conjunto 1 de parâmetros (Figura 7).

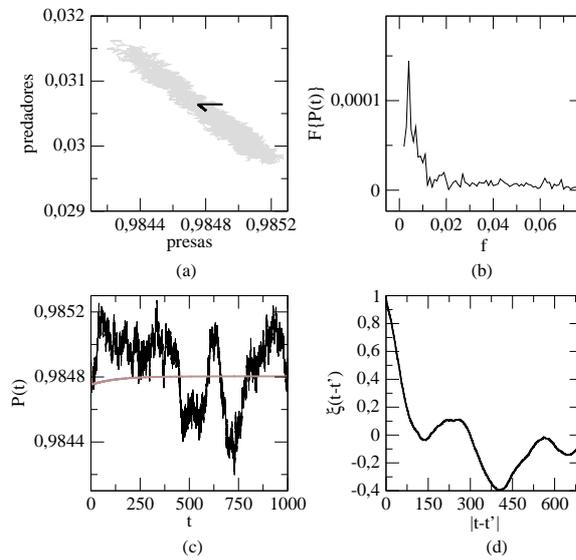


Figura 7: Dinâmica de Lotka-Volterra estocástica utilizando-se o conjunto 2 de parâmetros, $\eta = 6,3251 \times 10^{-5}$ e valor inicial próximo ao nó estável. (a) Plano de fase: trajetórias determinística (em preto) com valor inicial $(P_0, Q_0) = (P^* + \delta, Q^* + \delta)$ e trajetória estocástica (cinza) com valor inicial $(P_0, Q_0) = (P^* + \delta, Q^* + \delta)$; (b) módulo quadrado da transformada de Fourier da série temporal da população das presas; (c) gráfico da população das presas, solução determinística (marrom) e estocástica (preto); (d) $\xi(t - t')$ é a função de autocorrelação da população das presas.

As distribuições de probabilidades dos tamanhos populacionais com valores iniciais na vizinhança do nó estável são gaussianas para todo $t > 0$, semelhante às obtidas utilizando-se o conjunto 1 de parâmetros (Figura 8).

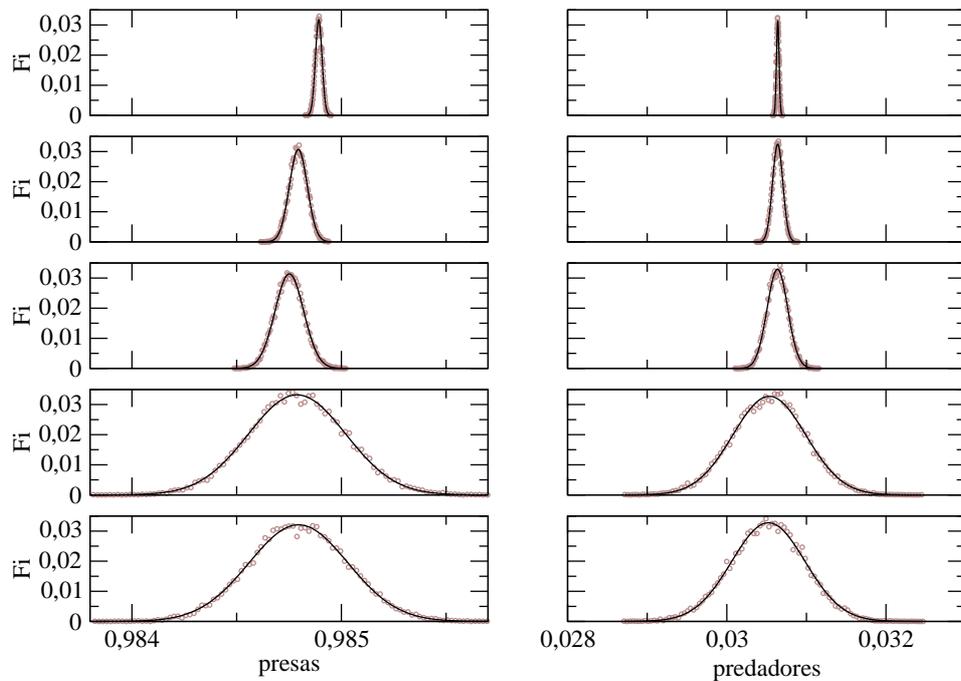


Figura 8: Evolução temporal (de cima para baixo) da distribuição de probabilidade dos tamanhos populacionais das presas e dos predadores nos tempos 0,08; 1,28; 5,12; 300 e 900 unidades de tempo, utilizando o conjunto 2 de parâmetros, $\eta = 6,3251 \times 10^{-5}$ e valor inicial $(P_0, Q_0) = (P^* + \delta, Q^* + \delta)$. Os círculos representam as frequências observadas e o ajuste pela curva gaussiana é representado pela curva em preto.

Nota-se que o gráfico das variâncias dos tamanhos populacionais em função do tempo varia de formato se comparado às obtidas utilizando-se o conjunto 1 de parâmetros (Figura 9).

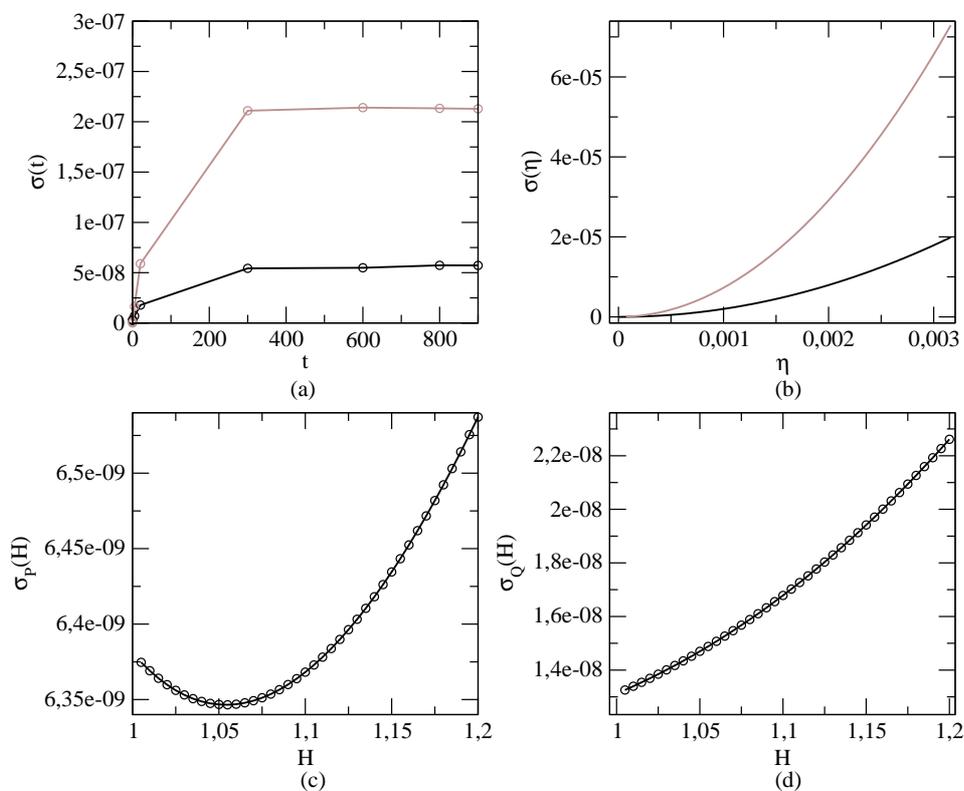


Figura 9: (a) Variância temporal das densidades das presas (em preto) e dos predadores (marrom) utilizando o conjunto 2 de parâmetros, $\eta = 6.3251 \times 10^{-5}$ e valor inicial $(P_0, Q_0) = (P^* + \delta, Q^* + \delta)$; (b) variância das densidades em t' pela intensidade do ruído (taxa de migração) utilizando o conjunto 2 de parâmetros e valor inicial próximo ao nó estável, das presas (em preto) e dos predadores (marrom); (c) variância da densidade das presas pela constante de Michaelis-Menten; (d) variância da densidade dos predadores pela constante de Michaelis-Menten.

Agora, passam a atingir um valor de máximo para todo $t \geq 300$ unidades de tempo (em outras palavras, as variâncias atingiram uma assíntota), ou seja, quando a taxa de conversão de alimento em novos indivíduos k é aumentada de 0, 1 para 2, as variâncias crescem mais rápido, atingindo valor de máximo em tempos intermediários e grandes. Portanto, as variâncias como função do tempo são sensíveis à variação de k . As variâncias dos tamanhos populacionais em t' como

função da intensidade do ruído são iguais às obtidas utilizando-se o conjunto 1 de parâmetros. Agora, as variâncias dos tamanhos populacionais em t' como função da constante de Michaelis-Menten são significativamente diferentes das obtidas utilizando-se o conjunto 1 de parâmetros; ainda são muito pequenas se comparadas aos tamanhos populacionais; a das presas é não linear, decrescente até 1,05 e crescente a partir daí; a dos predadores é crescente e também não linear. Isso, provavelmente, ocorre por causa da não linearidade ser mais forte na equação da taxa de variação das presas do que na equação da taxa de variação dos predadores no sistema 38. Conclui-se que as variâncias como função da constante de Michaelis-Menten são sensíveis à variação da constante k .

4.3 Estudo do foco estável: primeiro caso

Considerando o conjunto 3 de parâmetros encontrados na tabela 3, com a introdução do ruído aditivo no modelo, as populações não são mais constantes. Elas flutuam com vários períodos significativos para frequências pequenas (Figura 10), ou seja, o tipo de estabilidade do ponto de equilíbrio foi alterada, deixando de ser assintoticamente estável.

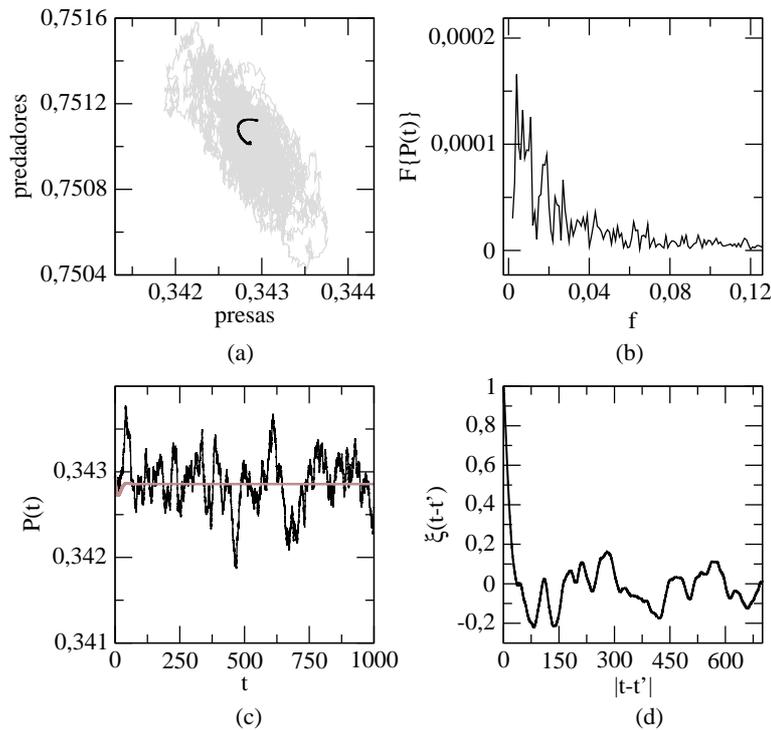


Figura 10: Dinâmica de Lotka-Volterra estocástica utilizando o conjunto 3 de parâmetros, $\eta = 6,3251 \times 10^{-5}$ e valor inicial próximo ao foco estável. (a) Plano de fase: trajetória determinística (em preto) com valor inicial $(P_0, Q_0) = (P^* + \delta, Q^* + \delta)$ e trajetória estocástica (cinza) com valor inicial $(P_0, Q_0) = (P^* + \delta, Q^* + \delta)$; (b) módulo quadrado da transformada de Fourier da série temporal da população das presas; (c) gráfico da população das presas, solução determinística (marrom) e estocástica (preto); (d) $\xi(t - t')$ é a função de autocorrelação da população das presas.

A densidade dos predadores é semelhante. A função de autocorrelação decresce rapidamente de 1 até $-0,2$ e, a partir daí, flutua entre $-0,2$ e $0,2$ (Figura 10), da densidade dos predadores é semelhante. Ou seja, as densidades populacionais têm correlação significativa para intervalos de tempo muito pequenos; para intervalos de tempo intermediários e grandes, a correlação é desprezível. As distribuições de probabilidade das densidades populacionais para valores iniciais próximos ao foco estável são gaussianas para todos os instantes de tempo $t > 0$. Observa-se que os histogramas são bem ajustados por uma curva gaussiana (Figura 11).

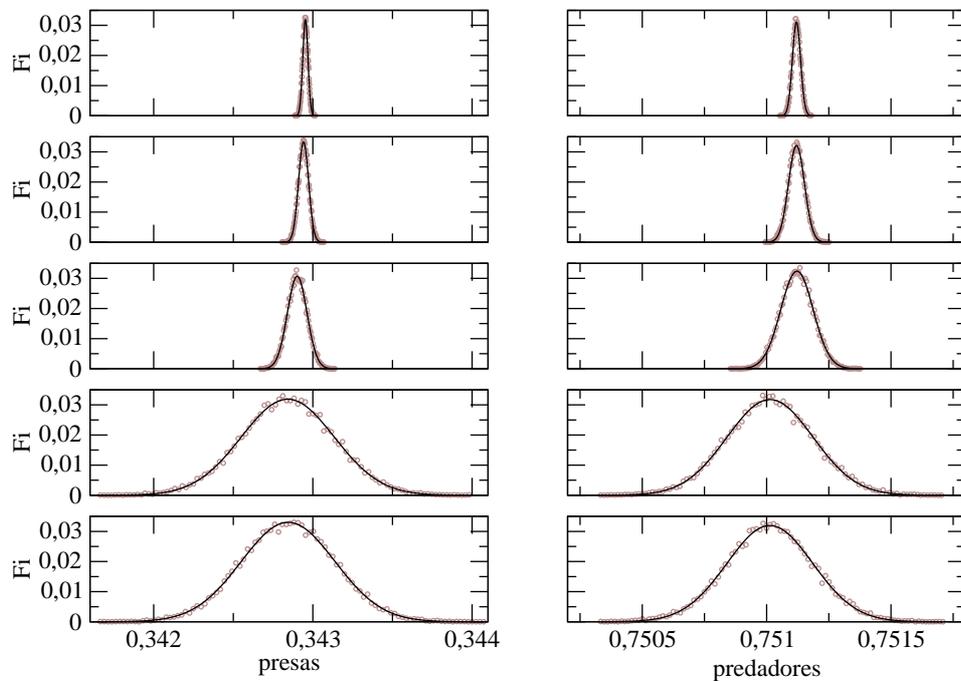


Figura 11: Evolução temporal (de cima para baixo) da distribuição de probabilidade dos tamanhos populacionais das presas e dos predadores nos tempos 0,08; 0,32; 1,28; 110 e 300 unidades de tempo, utilizando o conjunto 3 de parâmetros, $\eta = 6,3251 \times 10^{-5}$ e valor inicial $(P_0, Q_0) = (P^* + \delta, Q^* + \delta)$. Os círculos representam as freqüências observadas e o ajuste pela curva gaussiana é representado pela curva em preto.

Quanto às variâncias temporais (Figura 12), a partir do instante 110 unidades de tempo, as variâncias atingem valores de máximo (em outras palavras, as variâncias atingem uma assíntota). A variância da densidade das presas cresce mais rápido que a dos predadores, sendo muito pequenas se comparadas com os tamanhos populacionais.

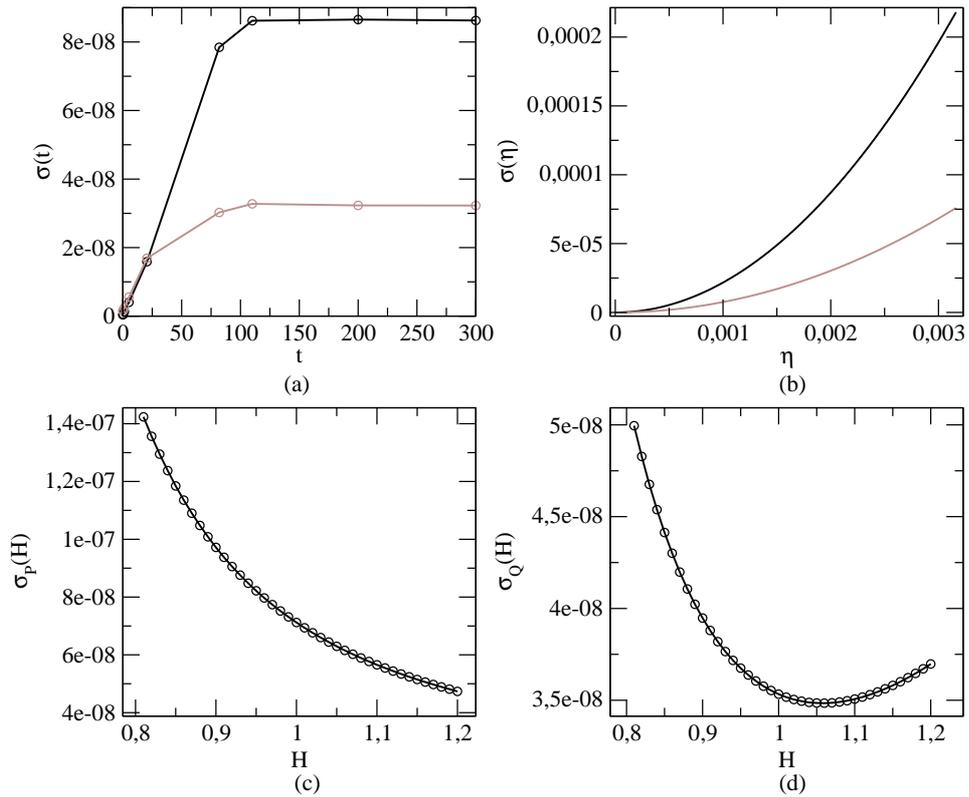


Figura 12: (a) Variância temporal das densidades das presas (em preto) e dos predadores utilizando o conjunto 3 de parâmetros, $\eta = 6, 3251 \times 10^{-5}$ e valor inicial $(P_0, Q_0) = (P^* + \delta, Q^* + \delta)$; (b) variância das densidades em t' pela taxa de migração utilizando o mesmo conjunto de parâmetros e o mesmo valor inicial; (c) variância da densidade das presas pela constante de Michaelis-Menten; (d) variância da densidade dos predadores pela constante de Michaelis-Menten.

Se comparadas às variâncias obtidas utilizando o conjunto 2 de parâme-

tros, estas atingiram o valor de máximo mais rápido. Na análise qualitativa da relação das variâncias das densidades com a constante de Michaelis-Menten H (Figura 12), as variâncias em t' são muito pequenas, se comparadas aos tamanhos populacionais e não lineares. São significativamente diferentes das variâncias obtidas utilizando-se os conjuntos 1 e 2 de parâmetros. A variância das presas somente decresce e a dos predadores decresce até 1,05 e cresce a partir daí. Isso, provavelmente, ocorre por causa da não linearidade na equação da taxa de variação das presas ser mais forte do que na dos predadores no modelo 38. As variâncias como função da intensidade do ruído são semelhantes às obtidas utilizando-se os conjuntos 1 e 2 de parâmetros, crescendo lentamente e de forma não linear. Agora, a variância das presas cresce mais rápido do que a dos predadores.

4.4 Estudo do foco estável: segundo caso

Utilizando-se o conjunto 4 de parâmetros encontrados na tabela 3, observa-se, no plano de fase, que, com o ruído, as populações não são constantes, elas flutuam, ou seja, o tipo de estabilidade do ponto de equilíbrio é alterada, a trajetória estocástica flutua em torno do foco estável, como é evidenciado pela Figura 13.

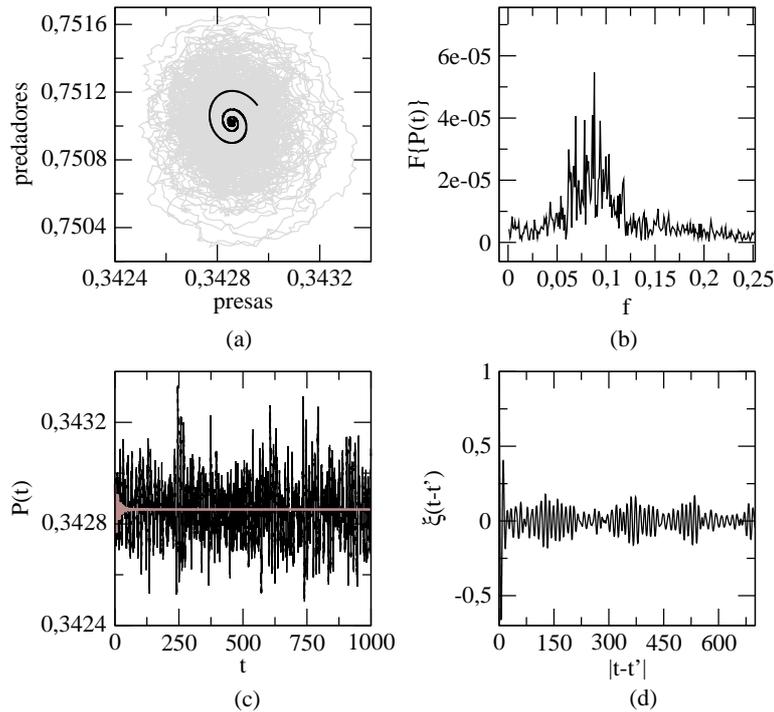


Figura 13: Dinâmica de Lotka-Volterra estocástica utilizando o conjunto 4 de parâmetros, $\eta = 6,3251 \times 10^{-5}$ e valor inicial próximo ao foco estável. (a) Planos de fase: trajetória determinística (em preto) com valor inicial $(P_0, Q_0) = (P^* + \delta, Q^* + \delta)$ e trajetória estocástica (cinza) com valor inicial $(P_0, Q_0) = (P^* + \delta, Q^* + \delta)$; (b) módulo quadrado da transformada de Fourier da série temporal da população das presas; (c) gráfico da população das presas, solução determinística (marrom) e estocástica (preto); (d) $\xi(t - t')$ é a função de autocorrelação da população das presas.

Portanto, a introdução de ruído no modelo fez com que o ponto de equi-

líbrio deixasse de ser assintoticamente estável. A introdução de ruído, neste caso, provocou o surgimento de vários períodos significativos na densidade das presas para frequências pequenas, bem mais do que quando se utilizou o conjunto 3 de parâmetros. A densidade dos predadores responde de forma semelhante.

A função de autocorrelação da densidade das presas para intervalos de tempo muito pequenos assume valores significativos positivos e negativos, oscilando em torno do zero (Figura 13). Para intervalos de tempo pequenos, intermediários e grandes, a função de autocorrelação flutua entre $-0,2$ e $0,2$, sendo não significativa. A da densidade dos predadores é semelhante. Esse comportamento da função de autocorrelação é mais um indicativo de periodicidade nas densidades populacionais. Observa-se que a solução do sistema é sensível à variação da taxa de conversão de alimento em novos indivíduos k , se comparado ao conjunto 3 de parâmetros, implicando no surgimento de vários outros períodos significativos na função de autocorrelação da densidade populacional das presas.

As distribuições são gaussianas considerando valores iniciais próximos ao foco estável para todo tempo $t > 0$, quando utilizam-se os parâmetros do conjunto 4, como é evidenciado pelos ajustes apresentados na Figura 14, semelhantes aos histogramas do conjunto 3 de parâmetros.

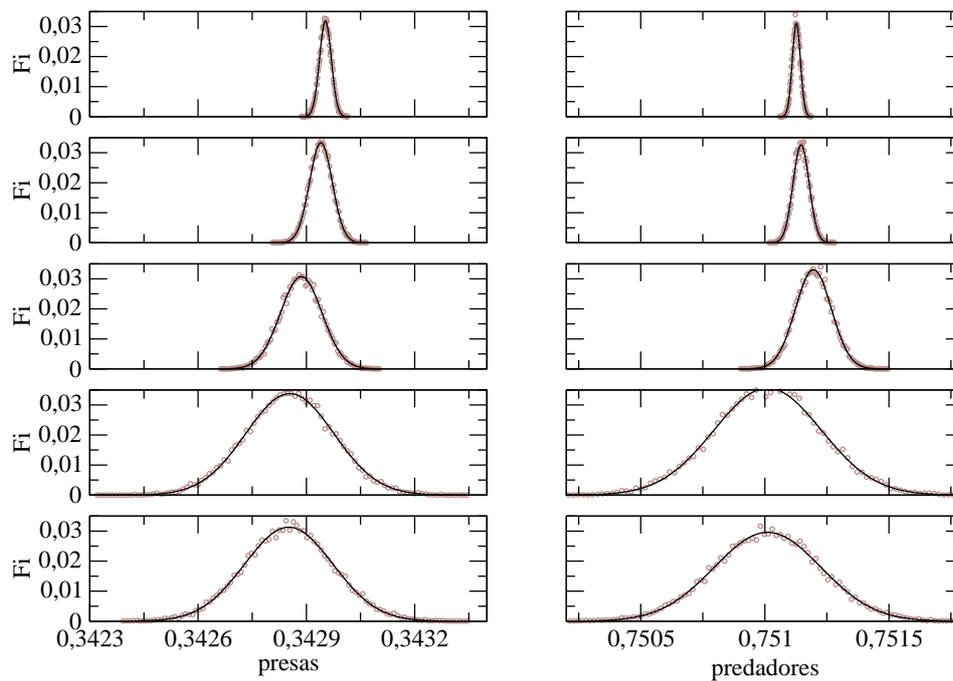


Figura 14: Evolução temporal (de cima para baixo) da distribuição de probabilidade dos tamanhos populacionais das presas e dos predadores nos tempos 0,08; 0,32; 1,28; 80 e 200 unidades de tempo, utilizando o conjunto 4 de parâmetros, $\eta = 6.3251 \times 10^{-5}$ e valor inicial $(P_0, Q_0) = (P^* + \delta, Q^* + \delta)$. Os círculos representam as freqüências observadas e o ajuste pela curva gaussiana é representado pela curva em preto.

As variâncias das densidades crescem até o instante 20, 48 e atingem o máximo para todos os tempos. A partir daí (figura 15), a dos predadores cresce mais rápido. Comparando com as variâncias obtidas utilizando o conjunto 3 de parâmetros, estas atingem o máximo mais rápido. Conclui-se que as dispersões das densidades populacionais são assintóticas. As variâncias como função da constante de Michaelis-Menten são semelhantes às obtidas utilizando-se o conjunto 3 de parâmetros, mas, agora, há apenas decréscimo. Nota-se também que o formato do gráfico das variâncias das presas e a dos predadores são praticamente

iguais, ambas assumindo valores muito pequenos se comparados aos tamanhos populacionais. Estas variâncias respondem sensivelmente à variação da constante k (Figura 15). Não houve crescimento momento algum. As variâncias como função da intensidade do ruído são idênticas às exibidas na seção anterior. Elas crescem lentamente e não linearmente. A dos predadores cresce mais rápido, diferente das obtidas utilizando-se o conjunto 3 de parâmetros. As variâncias, neste caso, respondem sensivelmente à variação das constante k .

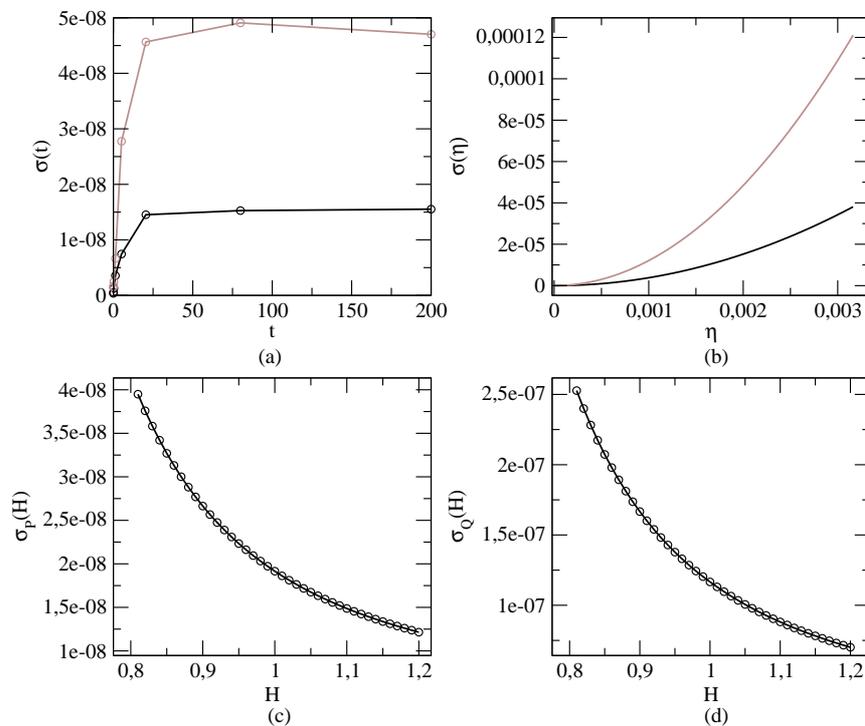


Figura 15: (a) Variância temporal das densidades das presas (em preto) e dos predadores (marrom) utilizando o conjunto 4 de parâmetros, $\eta = 6.3251 \times 10^{-5}$ e valor inicial $(P_0, Q_0) = (P^* + \delta, Q^* + \delta)$; (b) variância das densidades em t' pela taxa de migração utilizando o mesmo conjunto de parâmetros e o mesmo valor inicial; (c) variância da densidade das presas pela constante de Michaelis-Menten; (d) variância da densidade dos predadores pela constante de Michaelis-Menten.

4.5 Estudo do ciclo limite

Utilizando-se o conjunto 5 de parâmetros encontrados na tabela 3, após ter sido introduzido ruído aditivo ao modelo, a trajetória estocástica flutua em torno do ciclo limite (Figura 16).

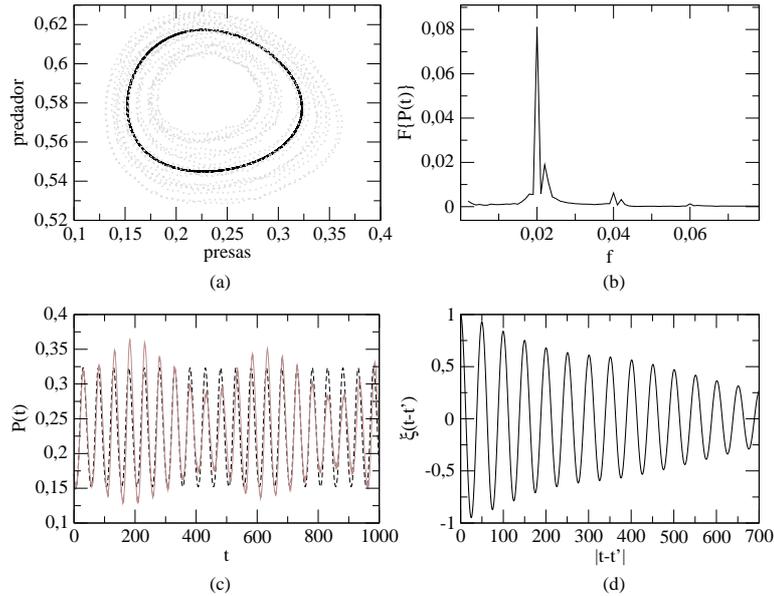


Figura 16: Dinâmica de Lotka-Volterra estocástica utilizando o conjunto 5 de parâmetros, $\eta = 6,3251 \times 10^{-5}$ e valor inicial sobre o ciclo limite. (a) Ciclo limite (em preto) e trajetória estocástica (em cinza); (b) gráfico do tamanho populacional das presas, solução determinística (em preto tracejado) e estocástica (marrom); (c) módulo quadrado da transformada de Fourier da série temporal da população das presas do modelo estocástico; (d) $\xi(t - t')$ é a função de autocorrelação da população das presas.

O tipo de estabilidade do ciclo limite não se altera. No gráfico da densidade das presas, vemos uma pequena variação na amplitude da solução do sistema estocástico. A introdução do termo estocástico induz um novo período significativo nas densidades populacionais, como evidenciado pelo espectro de frequências (Figura 16). A densidade dos predadores responde de forma semelhante. A fun-

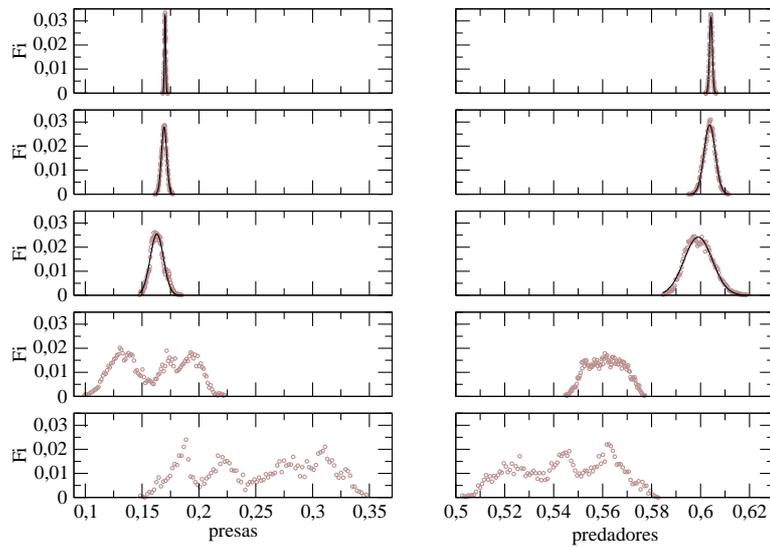


Figura 17: Evolução temporal (de cima para baixo) da distribuição de probabilidade da população das presas nos instantes 0,01; 0,16; 1,28; 10,24 e 20,48 unidades de tempo, utilizando o conjunto 5 de parâmetros, F_i é a frequência, $\eta = 6,3251 \times 10^{-5}$ e valor inicial sobre o ciclo limite. Os círculos representam as frequências observadas e o ajuste pela curva gaussiana é representado pela curva clara.

ção de autocorrelação da densidade das presas flutua com amplitude decrescente à medida que os intervalos de tempo crescem, como evidenciado pela Figura 16. Para intervalos de tempo pequenos e intermediários, a correlação é significativa. Somente para intervalos grandes é que não. A da densidade dos predadores é semelhante. Para instantes de tempo muito pequenos, as distribuições de probabilidade das densidade são gaussianas, como evidenciados nos histogramas da Figura 17. O tipo das distribuições das densidades para instantes de tempo pequenos é assimétrico; para instantes de tempo intermediários as distribuições apresentam características de uma distribuição multimodal. Portanto, o tipo de distribuição de probabilidade depende fortemente do instante de tempo que está sendo calculado, transitando de uma gaussiana para uma multimodal, conforme o tempo cresce.

5 Conclusões

Nesse estudo concluímos que as características qualitativas da dinâmica de Lotka-Volterra estocástica podem variar em função da escolha do tipo de modelo determinístico ou estocástico das densidades populacionais com condições iniciais numa vizinhança de um ponto de equilíbrio.

O tipo de estabilidade das densidades populacionais muda de um estado assintoticamente estável para um estável (flutuando em torno do ponto de equilíbrio estocasticamente) quando se introduz termo estocástico ao modelo, nos casos em que o ponto de equilíbrio é um nó estável e no caso em que é um foco estável. O tipo da estabilidade do ciclo limite manteve-se com a introdução de ruído aditivo.

A introdução de ruído no modelo provoca o surgimento de período significativo nas densidades populacionais no caso do ponto de equilíbrio ser um nó estável, vários períodos no caso de ser um foco estável e um segundo período significativo no caso de ser o centro de um ciclo limite assintoticamente estável.

As distribuições de probabilidade das densidades populacionais no tempo podem ser do tipo gaussiana para todo $t > 0$, quando as populações são constantes num dado ambiente, ou seja, com condições iniciais numa vizinhança do ponto de equilíbrio; as distribuições das densidades populacionais que flutuam com amplitude constante no tempo dependem fortemente do tempo, transitando de gaussiana para tempos muito pequenos, podendo chegar à forma de uma multimodal para tempos intermediários.

As características do modelo mudam quando variam o tempo e os parâmetros. No caso do estudo do nó estável as variâncias temporais mudaram de comportamento, assumindo regime assintótico no segundo caso (conjunto 2 de parâ-

metros). No caso estudo do foco estável, as variâncias assumem regime assintótico quando $t \rightarrow \infty$. As variâncias como função da constante de Michaelis-Menten, nos casos do nó estável e foco estável, assumem valores pequenos se comparados com os tamanhos populacionais, sendo constantes para todos os valores desta constante num intervalo escolhido dentro de uma região do mapa parâmetro do artigo de Petrovskii & Malchow (1999) (região onde não há mudança na estabilidade das densidades populacionais).

Espera-se que as breves indicações que apresentamos aqui, da riqueza deste modelo, estimulem investigações mais sistemáticas do seu comportamento e de sua relevância para a ecologia de populações. Há muitas questões a serem respondidas, tais como: como são as distribuições de probabilidades das densidades populacionais para tempos maiores e para $t \rightarrow \infty$, no caso de comportamento periódico das densidades; mostrar qual a forma de distribuição de probabilidades das densidades com condições iniciais próximas à vizinhança do ponto de equilíbrio quando se introduzem outros tipos de ruídos como o multiplicativo, consequência de perturbações nos parâmetros do modelo.

Será interessante investigar outros casos em que as populações tornam-se constantes, se ocorrerá alteração no tipo de estabilidade do sistema quando introduzido termo estocástico aditivo no modelo determinístico nos casos de o ponto de equilíbrio ser nó impróprio com autovalores iguais e com autovetores independentes e nó impróprio com autovalores iguais e com um autovetor dependente.

Por fim, será interessante investigar as características das densidades populacionais de outras interações bióticas, como competição e mutualismo, modelados por sistemas de equações diferenciais estocásticas.

6 Referências Bibliográficas

ANTON, H. **Cálculo um novo horizonte**, 6.ed. Porto Alegre: Bookman, 2000a. v.1. 578p.

ANTON, H. **Cálculo um novo horizonte**, 6.ed. Porto Alegre: Bookman, 2000b. v.2. 552p.

BOLDRINI, J.L. et al. **Álgebra linear**, 3.ed. São Paulo: Harbra, 1980. 411p.

BOYCE, W.E.; DIPRIMA, R.C. **Equações diferenciais**. 3.ed. Rio de Janeiro: Guanabara, 1990. 416p.

BURDEN, R.L.; FAIRES, J.D. **Análise numérica**. São Paulo: Thomson, 2003. 736p.

BURRAGE, P.M. **Runge-Kutta methods for stochastic differential equation**. 1999. 259p. Thesis(Doctor of Philosophy) - The University of Queensland, Queensland, Australia.

EVANS, L.C. **An introduction to stochastic differential equation**. Disponível em:<<http://math.berkeley.edu/evans/SDE.course.pdf>>. Acesso em: 24 jul. 2006.

HOLLING, G.S. Resilience and stability of ecological system. **In: Annual Review of Ecological Systems**, v.4. p.1-23. 1973.

KREIDER, D.L., **An introduction to linear analysis**. Berkeley: Addison-Wesley, 1966. 696p.

MAO, X.; Marion, G.; Renshaw, E. Environmental Brownian noise suppresses explosions in population dynamics. **Stochastic Processes and their Applications**, Glasgow, v.97, p. 95-110, July 2001.

MOOD A.M.; Graybill F. A.; Boes D. C. **Introduction to the theory of statistics**. 3.ed. Singapore: McGraw-Hill, 1974. 564p.

MOREIRA, M.F. **Formação de padrões e co-evolução num modelo estocástico para populações interagentes**. 2005. 79p. Dissertação (Mestrado em Agronomia. Estatística e Experimentação Agropecuária)-Universidade Federal de Lavras, Lavras, MG.

MURRAY, J.D. **Mathematical Biology**, 2.ed., New York: Springer, 1993. 745p.

PETROVSKII, S.V.; MALCHOW, H.A Minimal Model of Pattern Formation in a Prey-Predator System, **Mathematical and Computer Modelling**. v.29, n.49. 1999.

ROQUE, W.L. **Introdução ao cálculo numérico**. São Paulo: Atlas, 2000. 256p.

SCHUSS, Z. **Theory and applications of stochastic differential equations**. New York: J. Wiley, 1980. 321p.

SPAGNOLO, B.; Fiasconaro, A.; Valenti, D. Noise induced phenomena in Lotka-Volterra systems. **Fluctuation and Noise Letters**, v.3, n.2. 2003.

SPAGNOLO, B.; La Barbera, A. Role of the noise on the transient dynamics of an ecosystem of interacting species. **Physica A**, v.315. 114-124. 2002

TOMÉ, T.; Oliveira, M.J. **Dinâmica estocástica e irreversibilidade**. São Paulo: Universidade de São Paulo, 2001. 248p.

VERHULST, P.F. Notice sur la loi que la population suit dans son accroissement, **Correspondances Mathematiques et Physiques**, v.10. 113-121. 1838.

VOLTERRA, V. Flutuactions in the abundance of a species considered mathematically, **Nature**, v.118. p.558-560. 1926.