

**ANÁLISE BAYESIANA DA CURVA DE
LACTAÇÃO DE CABRAS SAANEN**

FABYANO FONSECA E SILVA

2003

56965
048659

FABYANO FONSECA E SILVA

**ANÁLISE BAYESIANA DA CURVA DE LACTAÇÃO DE CABRAS
SAANEN**

Dissertação apresentada à Universidade Federal de Lavras como parte das exigências do Programa de Pós-graduação em Agronomia, área de concentração em Estatística e Experimentação Agropecuária, para a obtenção do título de "Mestre".

Orientador

Prof. Dr. Joel Augusto Muniz

LAVRAS
MINAS GERAIS - BRASIL

**Ficha Catalográfica Preparada pela Divisão de Processos Técnicos da
Biblioteca Central da UFLA**

Silva, Fabyano Fonseca

**Análise Bayesiana da curva de lactação de cabras Saanen / Fabyano
Fonseca e Silva. -- Lavras : UFLA, 2003.**

64 p. : il.

Orientador: Joel Augusto Muniz.

Dissertação (Mestrado) – UFLA.

Bibliografia.

**1. Cabra. 2. Leite. 3. Produção. 4. Experimentação agrícola. 5. Metodologia
Bayesiana. I. Universidade Federal de Lavras. II. Título.**

CDD-636.39

FABYANO FONSECA E SILVA

**ANÁLISE BAYESIANA DA CURVA DE
LACTAÇÃO DE CABRAS SAANEN**

Dissertação apresentada à Universidade Federal de Lavras como parte das exigências do Programa de Pós-graduação em Agronomia, área de concentração em Estatística e Experimentação Agropecuária, para a obtenção do título de "Mestre".

Aprovada em sexta-feira, 03 de outubro de 2003.

Prof. Dr. Daniel Furtado Ferreira

UFLA

Prof. Dr. Idalmo Garcia Pereira

Fafeod

Prof. Dr. Tarcísio de Moraes Gonçalves

UFLA


Prof. Dr. Joel Augusto Muniz

Dex – UFLA

(Orientador)

**LAVRAS
MINAS GERAIS – BRASIL
2003**

OFEREÇO

Aos meus pais, Gonçalves e Vera

À minha esposa Taciana

À minha filha Lara

**" Vá e grite ao mundo que você está certo,
pois aprendeu tudo enquanto estava mudo.**

Vá, faça isso, pois é tudo da lei "

Raul Seixas

AGRADECIMENTOS

A Deus, por ter me dado saúde, força e coragem para a realização deste trabalho.

À Universidade Federal de Lavras e ao Departamento de Ciências Exatas pela oportunidade e confiança no meu trabalho.

À CAPES pela concessão da bolsa de estudos.

Ao Prof. Dr. Joel Augusto Muniz pela dedicação, orientação e ao grande incentivo na minha formação profissional.

Ao Prof. Luiz Henrique de Aquino por todos os ensinamentos, apoio, dedicação, confiança e principalmente pela grande amizade.

Ao Prof. Dr. Daniel Furtado Ferreira por sua grande ajuda durante todo o trabalho.

Aos demais professores do Departamento de Ciências Exatas da UFLA, em especial á professora Thelma Sáfadi, por todos os conhecimentos transmitidos.

Aos colegas de curso Denis, Janser, José Waldemar, Sr. Leite, Renata, Néia, Eliana, Rafaela e Vânia pelo incentivo e amizade.

Aos colegas de graduação Natan, Humberto (Geléia), Fernandinho e Carlos Alberto (Black) pelos grandes momentos de descontração.

SUMÁRIO

Lista de Tabelas.....	i
Lista de Figuras.....	iii
Resumo.....	vi
Abstract.....	vii
1 – Introdução.....	01
2 – Referencial Teórico.....	04
2.1 – Curvas de lactação.....	04
2.1.1 – Funções de produção em curvas de lactação.....	06
2.2 – Metodologia Bayesiana.....	07
2.3 – Análise Bayesiana de curvas de lactação.....	10
2.4 – Propriedades estatísticas do modelo de Wood.....	12
2.5 – Análise Bayesiana do modelo de Wood.....	14
2.6 – Algoritmo Gibbs Sampler.....	16
2.7 – Critério de convergência de Gelman e Rubin.....	18
2.8 – “Burn-in” e frequência.....	19
3 – Material e Métodos.....	21
3.1 – Distribuições condicionais completas <i>a posteriori</i>	21
3.2 – Implementação do Gibbs Sampler.....	22
3.3 – Dados utilizados.....	23
3.3.1 – Dados experimentais.....	23
3.3.2 – Dados simulados.....	23
4 – Resultados e Discussão.....	27
4.1 – Estatísticas descritivas dos dados longitudinais.....	27
4.2 – Ajuste do modelo de Wood aos dados de cabras Saanen.....	28

4.3 – Diagnóstico de convergência do algoritmo Gibbs Sampler.....	43
4.4 – Análise dos dados simulados.....	45
5 – Conclusões.....	49
6 – Referências Bibliográficas.....	50
Anexos A.....	56
Anexos B.....	61

LISTA DE TABELAS

TABELA 1 – Modelos estatísticos comumente utilizados para descrever curvas de lactação.....	06
TABELA 2 – Distribuições Normal Multivariada, Gama Inversa e Wishart com suas respectivas densidades, média e variância.	16
TABELA 3 – Médias e desvios padrão para os dados da população de cabra de primeira lactação.....	27
TABELA 4 – Médias e desvios padrão para os dados da população de cabra de segunda lactação.....	27
TABELA 5 – Estimativas, desvios padrão e intervalo de credibilidade de 95% para os parâmetros das duas populações	30
TABELA 6 – Estimativas e desvio padrão para variância do erro (σ^2) e componentes da matriz de co-variância ($\sigma_a, \sigma_b, \sigma_c, \sigma_{ab}, \sigma_{ac}, \sigma_{bc}$) das duas populações.....	38
TABELA 7 – Estimativas das diferenças entre os parâmetros das duas populações, com os respectivos desvios padrão e intervalo de credibilidade de 95%.....	39
TABELA 8 – Estimativas do coeficiente de convergência (R) de Gelman e Rubin para os parâmetros das duas populações.....	43
TABELA 9 – Estimativas pontuais e intervalo de credibilidade de 95% para o parâmetro α nos dez experimentos simulados.....	45
TABELA 10 – Estimativas pontuais e intervalo de credibilidade de 95% para o parâmetro β nos dez experimentos simulados.....	45
TABELA 11 – Estimativas pontuais e intervalo de credibilidade de 95% para o parâmetro γ nos dez experimentos simulados.....	46

TABELA 12 – Raiz quadrada do erro quadrático médio (EQM) para as estimativas dos parâmetros α , β e γ considerando a matriz de covariância AR(1), com diferentes coeficientes de correlação (ρ).....47

TABELA 13 – Raiz quadrada do erro quadrático médio (EQM) para as estimativas dos parâmetros α , β e γ considerando a matriz de covariância ARH(1), com diferentes coeficientes de correlação (ρ).....47

LISTA DE FIGURAS

FIGURA 1- Resíduos do ajuste para a população de cabras de primeiro parto.....	28
FIGURA 2- Resíduos do ajuste para a população de cabras de segundo parto.....	29
FIGURA 3- Curvas de lactação estimadas para as duas populações.....	31
FIGURA 4- Representação gráfica do Gibbs Sampler e distribuição <i>a posteriori</i> para o parâmetro α da população de cabras de primeira lactação.....	32
FIGURA 5- Representação gráfica do Gibbs Sampler e distribuição <i>a posteriori</i> para o parâmetro β da população de cabras de primeira lactação.....	32
FIGURA 6- Representação gráfica do Gibbs Sampler e distribuição <i>a posteriori</i> para o parâmetro γ da população de cabras de primeira lactação.....	32
FIGURA 7- Representação gráfica do Gibbs Sampler e distribuição <i>a posteriori</i> para a variância (σ^2) da população de cabras de primeira lactação.....	33
FIGURA 8- Representação gráfica do Gibbs Sampler e distribuição <i>a posteriori</i> para o parâmetro η da população de cabras de primeira lactação.....	33
FIGURA 9- Representação gráfica do Gibbs Sampler e distribuição <i>a posteriori</i> para o parâmetro τ da população de cabras de primeira lactação.....	33
FIGURA 10- Representação gráfica do Gibbs Sampler e distribuição <i>a posteriori</i> para o parâmetro ϕ da população de cabras de primeira lactação.....	34
FIGURA 11- Representação gráfica do Gibbs Sampler e distribuição <i>a posteriori</i> para o parâmetro φ da população de cabras de primeira lactação.....	34
FIGURA 12- Representação gráfica do Gibbs Sampler e distribuição <i>a posteriori</i> para o parâmetro α da população de cabras de segunda lactação.....	34
FIGURA 13- Representação gráfica do Gibbs Sampler e distribuição <i>a posteriori</i> para o parâmetro β da população de cabras de segunda lactação.....	35

FIGURA 14- Representação gráfica do Gibbs Sampler e distribuição <i>a posteriori</i> para o parâmetro γ da população de cabras de segunda lactação.....	35
FIGURA 15- Representação gráfica do Gibbs Sampler e distribuição <i>a posteriori</i> para a variância (σ^2) da população de cabras de segunda lactação.....	35
FIGURA 16- Representação gráfica do Gibbs Sampler e distribuição <i>a posteriori</i> para o parâmetro η da população de cabras de segunda lactação.....	36
FIGURA 17- Representação gráfica do Gibbs Sampler e distribuição <i>a posteriori</i> para o parâmetro τ da população de cabras de segunda lactação.....	36
FIGURA 18- Representação gráfica do Gibbs Sampler e distribuição <i>a posteriori</i> para o parâmetro ϕ da população de cabras de segunda lactação.....	36
FIGURA 19- Representação gráfica do Gibbs Sampler e distribuição <i>a posteriori</i> para o parâmetro φ da população de cabras de segunda lactação.....	37
FIGURA 20- Distribuição <i>a posteriori</i> para diferença $\alpha_1 - \alpha_2$	40
FIGURA 21- Distribuição <i>a posteriori</i> para diferença $\beta_1 - \beta_2$	40
FIGURA 22- Distribuição <i>a posteriori</i> para diferença $\gamma_1 - \gamma_2$	41
FIGURA 23- Distribuição <i>a posteriori</i> para diferença $\eta_1 - \eta_2$	41
FIGURA 24- Distribuição <i>a posteriori</i> para diferença $\tau_1 - \tau_2$	41
FIGURA 25- Distribuição <i>a posteriori</i> para diferença $\phi_1 - \phi_2$	42
FIGURA 26- Distribuição <i>a posteriori</i> para diferença $\varphi_1 - \varphi_2$	42
FIGURA 1 A- Representação gráfica da convergência de α nas populações de cabras de primeira e segunda lactação, respectivamente.....	57
FIGURA 2 A- Representação gráfica da convergência de β nas populações de cabras de primeira e segunda lactação, respectivamente.	57
FIGURA 3 A- Representação gráfica da convergência de γ nas populações de cabras de primeira e segunda lactação, respectivamente.	58
FIGURA 4 A- Representação gráfica da convergência de η nas populações de cabras de primeira e segunda lactação, respectivamente.....	58

FIGURA 5 A- Representação gráfica da convergência de τ nas populações de cabras de primeira e segunda lactação, respectivamente.....	59
FIGURA 6 A- Representação gráfica da convergência de ϕ nas populações de cabras de primeira e segunda lactação, respectivamente.	59
FIGURA 7 A- Representação gráfica da convergência de φ nas populações de cabras de primeira e segunda lactação, respectivamente.	60
FIGURA 8 A- Representação gráfica da convergência de σ^2 nas populações de cabras de primeira e segunda lactação, respectivamente.	60
FIGURA 1 B- Autocorrelograma para os valores da distribuição marginal <i>a posteriori</i> de α para as populações 1 e 2, respectivamente.....	62
FIGURA 2 B- Autocorrelograma para os valores da distribuição marginal <i>a posteriori</i> de β para as populações 1 e 2, respectivamente.....	62
FIGURA 3 B- Autocorrelograma para os valores da distribuição marginal <i>a posteriori</i> de γ para as populações 1 e 2, respectivamente.....	62
FIGURA 4 B- Autocorrelograma para os valores da distribuição marginal <i>a posteriori</i> de η para as populações 1 e 2, respectivamente.	63
FIGURA 5 B- Autocorrelograma para os valores da distribuição marginal <i>a posteriori</i> de τ para as populações 1 e 2, respectivamente.....	63
FIGURA 6 B- Autocorrelograma para os valores da distribuição marginal <i>a posteriori</i> de ϕ para as populações 1 e 2, respectivamente.	63
FIGURA 7 B- Autocorrelograma para os valores da distribuição marginal <i>a posteriori</i> de φ para as populações 1 e 2, respectivamente.	64
FIGURA 8 B- Autocorrelograma para os valores da distribuição marginal <i>a posteriori</i> de σ^2 para as populações 1 e 2, respectivamente.	64

RESUMO

SILVA, Fabyano Fonseca e. **Análise Bayesiana da curva de lactação de cabras Saanen**. 2003. 64p. (Dissertação – Mestrado em Agronomia / Estatística e Experimentação Agropecuária) – Universidade Federal de Lavras, Lavras-MG.

Utilizou-se a metodologia Bayesiana para ajustar o modelo de Wood (Wood, 1967) a dados de produção de leite de cabras da raça Saanen. Considerou-se dois grupos de animais, primeira (ordem de parto 1) e segunda (ordem de parto 2) lactação. As distribuições marginais *a posteriori* para os parâmetros do modelo de Wood e para funções de produção derivadas desses parâmetros (pico de produção, tempo do pico de produção, persistência e produção total de leite) foram obtidas através do algoritmo Gibbs Sampler. As inferências foram feitas para cada população, e os resultados mostraram diferenças significativas ($P < 0,05$) entre o parâmetro γ (taxa de decréscimo da produção após o pico) e a persistência. As outras características estudadas não apresentaram diferenças significativas ($P > 0,05$). Realizou-se um estudo de simulação de dados para avaliar a metodologia e para testa-lá sob diferentes estruturas de matrizes de covariâncias dos parâmetros. Os resultados da simulação indicaram que a metodologia Bayesiana mostrou-se eficiente para estudar curvas de lactação quando a matriz de covariância apresenta estrutura autorregressiva de primeira ordem, AR(1), e autorregressiva de primeira ordem heterocedástica, ARH(1).

* Comitê Orientador: Joel Augusto Muniz (Orientador), Luiz Henrique de Aquino (Co-Orientador), Thelma Sáfyadi (Co-Orientadora).

ABSTRACT

SILVA, Fabyano Fonseca e. Bayesian analysis of lactation curve of Saanen goats. 2003. 64p. (Dissertation – Master Program in Agronomy / Major in Statistics and Agricultural Experimentation) – Federal University of Lavras*

The Bayesian methodology was used to fitted the Wood model (Wood, 1967) for milk production of Saanen goats. Two groups were used in the analysis: first and second lactation. The posterior marginal distributions for each parameter and production functions (peak milk yield, time of peak yield, persistency and total milk production) were obtained via Gibbs Sampler algorithm. The inference was done for each population. The results were significant ($P < 0,05$) for γ parameter (slope of the curve after the peak) and persistency. The others characteristics do not showed significant results ($P > 0,05$). The data was simulated for testing Bayesian methodology under several covariance matrices structure. The results indicated the efficiency of this methodology for lactation curves studies when the covariance matrices showed first-order autoregressive, AR(1), and heteroscedastic first-order autoregressive, ARH(1), structures.

* Guidance Committe: Joel Augusto Muniz (Orientador), Luiz Henrique de Aquino (Co-Orientador), Thelma Sáfadi (Co-Orientadora).

1 INTRODUÇÃO

Atualmente, na moderna exploração leiteira, um rígido controle da produção é fator determinante para o sucesso da atividade. Uma forma prática e consistente de se obter este controle é através do estudo da curva de lactação dos animais. Esta pode ser definida como a representação da produção de leite de um animal no decorrer de sua lactação (Cobuci et al., 2001).

Dentre as principais aplicações para o conhecimento e utilização das curvas de lactação de um rebanho pode-se citar aquela relacionada com a forma da curva, isto é, os seus parâmetros, que podem ser utilizados em programas de Melhoramento buscando o aumento da eficiência econômica e biológica do rebanho. Outra aplicação está na predição total de leite, através de produções parciais medidas em fases iniciais, contribuindo para uma identificação precoce dos animais mais produtivos, antes de se completar toda a lactação.

Em relação ao pecuarista, o conhecimento das curvas de lactação de seu rebanho poderia auxiliá-lo na adequação de técnicas de alimentação e manejo, e no descarte e seleção de animais de acordo com um padrão desejável, pré-estabelecido de acordo com sua capacidade de produção. Dessa maneira a comparação da forma da curva entre grupos distintos de animais, com diferentes composições raciais, idades ao parto, rebanhos e outros tratamentos de interesse, seriam de grande importância, pois, através dessas comparações, poder-se-ia obter informações sobre a eficiência desses diferentes grupos, e assim exercer um melhor controle de produção, visando a maximização do lucro da atividade.

Modelos estatísticos não-lineares normalmente são utilizadas para descrever curvas de lactação quando ajustados a dados decorrentes de produção de leite em intervalos consecutivos de tempo. Estes modelos geralmente apresentam parâmetros relacionados com a taxa crescente de produção anterior a

um máximo, denominado de pico, e uma taxa decrescente de produção menos acentuada após este máximo, as quais lhe conferem a não linearidade paramétrica. Através de funções desses parâmetros, outras importantes características da curva de lactação podem ser obtidas, como a produção de leite no pico, o tempo de permanência no pico, a produção total de leite e a persistência da lactação.

O método clássico de ajustar as funções matemáticas a dados de produção de leite é baseado em processos iterativos, devido à não linearidade dos parâmetros, através da minimização da soma de quadrados dos resíduos, ou utilizam-se meios para linearizar o modelo através de uma transformação logarítmica. Porém, em muitos casos, devido a irregularidades nos dados longitudinais e a correlações existentes entre os parâmetros do modelo (Souza, 1998), estes métodos produzem valores negativos para os parâmetros, levando à confecção de curvas de lactação atípicas, isto é, estimativas não condizentes com a realidade.

Em recentes estudos envolvendo curvas de lactação (Rekaya et al., 2000; Chang et al., 2001; Jamrozik, Gianola e Schaeffer, 2001 e Groenewald e Viljoen, 2003) a metodologia Bayesiana foi utilizada com sucesso, pois sua característica de considerar todos os parâmetros como variáveis aleatórias, segundo esses autores, reduz substancialmente o número de curvas atípicas, ou seja, valores irreais para os parâmetros do modelo. Além disso, a metodologia Bayesiana requer um número menor de dados de produção por animal, pois os conceitos probabilísticos envolvidos diminuem a dependência do ajuste do modelo em relação ao número de dados utilizados.

Em relação à análise Bayesiana, também é importante ressaltar que a obtenção de intervalos de credibilidade é imediata, levando em conta a incerteza existente sobre todos os parâmetros simultaneamente, sendo portanto a estimação por intervalo mais precisa em relação àquela apresentada pela

metodologia frequentista, que em geral utiliza variâncias assintóticas e aproximadas. Outro aspecto interessante é que os resultados da análise Bayesiana tomam-se mais informativos quando se trata de comparações de curvas provenientes de tratamentos diferentes, pois na maioria das vezes a distribuição dos parâmetros de modelos não lineares, e principalmente de funções obtidas a partir desses parâmetros, não seguem uma distribuição normal, o que torna complexo o processo de formulação de testes estatísticos por meio da metodologia frequentista.

Nos últimos anos a metodologia Bayesiana vem sendo muito utilizada em várias áreas da Estatística, mas seus conceitos foram fundamentados muito antes de se estabelecerem àqueles referentes à análise frequentista usual. Esta metodologia ficou esquecida durante um grande período por necessitar da resolução de integrais complexas para se chegar às distribuições marginais de interesse, na maioria das vezes inviáveis de serem realizadas algebricamente. Este problema só foi resolvido com o advento de poderosos recursos computacionais, os quais subsidiaram a utilização de algoritmos que fazem uso da técnica MCMC (Markov Chain-Monte Carlo), sendo o Gibbs Sampler o mais utilizado entre eles.

O principal objetivo desse trabalho é ilustrar o procedimento Bayesiano para estudar a curva de lactação de cabras da raça Saanen. Pretende-se, também, comparar as estimativas dos parâmetros do modelo de Wood e de outras características de interesse econômico da curva, tais como, pico de lactação, tempo de pico, produção total de leite e persistência da lactação, entre populações de cabras de diferentes ordens de parto.

2 REFERENCIAL TEÓRICO

2.1 Curvas de Lactação

A curva de lactação é a representação gráfica da produção de leite do animal no decorrer do tempo. Um gráfico de produção diária pode ser dividido em três segmentos: o aumento da produção do parto até que se atinja o pico da lactação, o pico de lactação e o declínio contínuo do pico até a fase final da lactação, quando então o animal cessa a produção (Ali e Schaeffer, 1987).

A maioria dos trabalhos publicados com estudos de curvas de lactação utiliza dados de produção de leite de bovinos, mas as mesmas técnicas de análise e modelos ajustados podem ser aplicados com sucesso no estudo de lactações de ovelhas (Groenewald et al., 1996; Chang et al., 2001) e cabras (Souza Neto et al., 1998; Groenewald e Viljoen, 2003).

Em se tratando de raças nacionais, Cancio et al. (1992) estudaram aspectos da lactação de cabras Saanen, Marota e mestiços criadas no estado do Ceará, mas não se envolveram com o ajuste de modelos para descrever as curvas de lactação, sendo os resultados apresentados com base em produções médias por lactação. Gonçalves (1996) estudou lactações de cabras das raças Parda Alpina, Saanen e Toggenburg por meio do ajuste da função multifásica (Grossman e Koops, 1988) e obteve estimativas de herdabilidade e de efeitos ambientais (raça, ano e estação de parto, fazenda e idade da cabra) que influenciaram as características da curva de lactação. Souza Neto et al. (1998) estudaram curvas de lactação de cabras mestiças Saanen e Anglo-nubiana e relataram que efeitos ambientais, como ordem de parto e estação de parição, influenciaram a forma da curva obtida pelo ajuste da função de Wood a dados semanais de produção de leite até os sete meses de lactação.

Dentre muitos modelos propostos, o de Wood (Wood, 1967) tem sido o preferido por vários autores, entre eles Groenewald et al. (1996), Varona et al. (1998), Rekaya et al. (2000), Chang et al. (2001) e Groenewald e Viljoen (2003), por apresentar poucos parâmetros e esses serem interpretáveis biologicamente, além de mostrar boa precisão e confiabilidade, permitindo extrapolações confiáveis. Este modelo é fundamentado originalmente na função Gama Incompleta, sendo sua expressão matemática dada por:

$$E[y_t] = at^b \exp(-ct), \quad (1)$$

em que:

y_t representa a produção de leite do animal no tempo de lactação t ;

a corresponde à produção inicial de leite ;

b representa a taxa crescente de produção até o pico;

c representa a taxa de declínio da produção após o pico.

A produção esperada de leite em kg/dia no tempo t , a qual caracteriza-se por ser uma forma alternativa da expressão 1, é dada por:

$$E[y_t] = t^b \exp(a + ct). \quad (2)$$

Autores como Groenewald et al. (1996) e Groenewald e Viljoen (2003) optaram pela equação 2 no estudo de curvas de lactação através da função de Wood por estarem interessados principalmente em inferências sobre as curvas médias das populações estudadas. Para este modelo, as restrições consideradas no espaço paramétrico são as seguintes: $a > 0$, $0 < b < 1$ e $-1 < c < 0$.

Na literatura existem relatos de modelos mais complexos para descrever curvas de lactação, dentre eles o de Morant e Gnanasakthy (1989), com quatro parâmetros, e o modelo com estrutura difásica considerando seis parâmetros, proposto por Grossman e Koops (1988). Estes e outros modelos utilizados para representar curvas de lactação são apresentados na Tabela 1.

TABELA 1 - Modelos estatísticos comumente utilizados para descrever curvas de lactação.

Modelos	Equações
Cobby and LeDu (1978)	$E[Y] = a - bt - ae^{-ct}$
Bianchini Sobrinho (1984)	$E[Y] = a + bt + ct^2 + d \ln t$
Grossman e Koops (1988)	$E[Y] = \sum_{i=1}^2 \{a_i b_i [1 - \tanh^2(b_i(t-c_i))]\}$
Morant e Gnanasakthy (1989)	$E[Y] = a e^{[bt + dt^2 + (c/t)]}$
Cobuci et al. (2001)	$E[Y] = a - ct + \ln t$

Segundo Shanks et al. (1981), bem como Ferris et al. (1985), as curvas de lactações individuais estimadas pela função de Wood apresentam uma importante limitação relacionada com a presença de lactações atípicas quando métodos de estimação não-lineares (processos iterativos) ou log-lineares (linearização) são utilizados. Segundo Shimizu e Umrod (1976) e Congleton e Everett (1980), estas lactações atípicas são comumente atribuídas à obtenção de estimativas negativas para o parâmetro b , decorrente da falta de registros anteriores ao pico de produção.

2.1.1 Funções de produção dos parâmetros da curva de lactação

Através de funções dos parâmetros do modelo de Wood, outras importantes características econômicas da curva de lactação (Groenewald et al., 1996) podem ser obtidas. A produção de leite no pico, dada por:

$$\eta = (-b/c)^b \exp(a-b); \quad (3)$$

a qual é interpretada como a maior produção do animal durante toda a sua lactação, corresponde, portanto, ao máximo da expressão 2. O tempo no qual esta produção máxima ocorre é definido pela seguinte expressão:

$$\tau = \left(-\frac{b}{c} \right). \quad (4)$$

A produção total de leite, a qual representa toda a produção do animal em uma única lactação, ou seja, corresponde à área sob a curva, é apresentada pela seguinte expressão:

$$\phi = \sum_{t=1}^L (t/w)^b \exp(a + ct/w); \quad (5)$$

sendo L a duração, em dias, da lactação considerada e w o intervalo de tempo entre os controlos leiteiros. A persistência da lactação, que é definida segundo Lopes (1994) como a extensão pela qual o pico de produção é mantido, é dada por:

$$\varphi = -(b+1)\ln(-c). \quad (6)$$

2.2 Metodologia Bayesiana

Por volta de meados do século XX, mais precisamente na década de 60, a análise Bayesiana ressurgiu após um longo tempo de domínio dos métodos estatísticos frequentistas, com base em alguns estudos teóricos como o de Jeffreyes (1961). Mas somente em 1990 com o trabalho de Gelfand et al. (1990), que exploraram um recurso de simulação dinâmica, o algoritmo Gibbs Sampler, elaborado por Geman e Geman (1984), o qual faz uso da teoria das Cadeias de Markov, é que o problema de integração da distribuição *a posteriori* para obtenção das

distribuições marginais foi solucionado de uma maneira alternativa. Seus resultados foram excelentes, atraindo, assim, outros pesquisadores, e devido ao sucesso de suas aplicações este algoritmo se consolidou como uma das ferramentas mais utilizadas em análise Bayesiana.

A metodologia Bayesiana consiste de uma informação *a priori* dos dados amostrais e do cálculo da densidade *a posteriori* dos parâmetros. A informação *a priori* é dada pela densidade de probabilidade $P(\theta)$, a qual expressa o conhecimento prévio do pesquisador sobre os parâmetros a serem estimados. Quando em determinado estudo o pesquisador tem pouca ou nenhuma informação para incorporar à distribuição *a priori*, considera-se a *priori* não-informativa, a qual é representada principalmente pela *priori* de Jeffreys (Jeffreys, 1961). Os dados y_1, \dots, y_n , representados por uma amostra aleatória de uma população com densidade f , são utilizados na análise Bayesiana através da função de verossimilhança $L(y_1, \dots, y_n / \theta)$, que é a densidade conjunta destes dados.

Portanto, a partir do momento que se opta por uma distribuição *a priori*, $P(\theta)$, seja ela informativa ou não, e obtém-se a função de verossimilhança, $L(S_n | \theta)$, torna-se possível, através do Teorema de Bayes, obter a distribuição densidade *a posteriori* de θ , $P(\theta | S_n)$, de forma que qualquer conclusão é feita a partir desta distribuição (Box e Tiao, 1973). A expressão matemática do teorema está na equação 7:

$$P(\theta | S_n) = \frac{L(S_n | \theta)P(\theta)}{\int L(S_n | \theta)P(\theta)d\theta}, \quad (7)$$

sendo $S_n = \{y_1, y_2, \dots, y_n\}$. Como o denominador não depende de θ , tem-se:

$$P(\theta | Y) \propto L(\theta | Y)P(\theta), \quad (8)$$

ou seja, a expressão 8 pode ser entendida como:

Posteriori \propto Verossimilhança x Priori, em que \propto representa proporcionalidade.

Segundo Broemeling (1985), pode-se pensar no Teorema de Bayes como um mecanismo de atualização da opinião do estatístico sobre θ . O teorema é, portanto, um elemento essencial para a análise Bayesiana, pois toda inferência é feita a partir da distribuição *a posteriori*.

Em relação à teoria da metodologia Bayesiana, Gelman et al. (1997) relatam que a característica essencial dos métodos Bayesianos é o uso explícito de probabilidades para quantificar as incertezas. Portanto, a inferência Bayesiana é baseada no conceito de probabilidade subjetiva, que mede o grau de confiança que alguém deposita no acontecimento de um determinado evento do espaço amostral.

Segundo Rosa (1998), para se inferir com relação a qualquer elemento de θ , a distribuição *a posteriori* conjunta dos parâmetros, $p(\theta | y)$, deve ser integrada em relação a todos os outros elementos que a constituem. Assim, se o interesse do pesquisador se concentra em determinado conjunto de θ , por exemplo, θ_1 , tem-se a necessidade da obtenção da distribuição $p(\theta_1 | y)$, dada por:

$$p(\theta_1 | y) = \int_{\theta \neq \theta_1} p(\theta | y) d\theta_{\theta \neq \theta_1}.$$

Essa operação, para a obtenção da distribuição *a posteriori* marginal do parâmetro de interesse, é em geral impossível de ser efetuada analiticamente quando se assume modelos mais complexos. Dessa forma, as estimativas, ou resultados, na metodologia Bayesiana, são obtidos pelos estimadores (média, moda e mediana) das distribuições *a posteriori* marginais dos parâmetros (Rosa, 2001).

Rosa (1998) relata que quando se tem interesse na distribuição marginal de determinada função dos parâmetros, $\phi = g(\theta) = g(\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_r)$, após

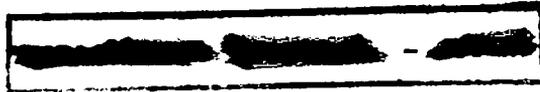
obtida a convergência do Gibbs Sampler, a avaliação de $g(\cdot)$ para cada valor de θ simulado fornece amostras de ϕ , as quais podem ser utilizadas para a obtenção das marginais.

De acordo com Sorensen (1996) e Gamerman (1996), a integração da distribuição *a posteriori* para a obtenção das marginais geralmente não é analítica, e necessita de algoritmos iterativos especializados, como o Gibbs Sampler (Amostrador de Gibbs), que faz uso da simulação de Monte Carlo e da teoria das Cadeias de Markov (MCMC). Este algoritmo tem se mostrado bastante útil e eficiente em vários problemas multidimensionais (Gelfand et al., 1990). Através da teoria das Cadeias de Markov é possível realizar um “passeio aleatório” pelas distribuições condicionais de cada parâmetro, cujos valores são gerados pela simulação Monte Carlo; dessa maneira, os resultados armazenados constituem as distribuições *a posteriori* marginais de interesse.

Segundo Geman e Geman (1984), após um grande número de iterações, a seqüência de valores gerados pelo Gibbs Sampler converge para uma distribuição estacionária igual a $p(\theta|y)$, ou seja, cada valor de θ obtido por esse algoritmo, após ter se efetuado a convergência, é um valor simulado da distribuição conjunta de seus elementos.

2.3 Análise Bayesiana de curvas de lactação

O estudo de curvas de lactação utilizando a metodologia Bayesiana começou a ser feito por Goodall e Sprevak (1985). Estes autores observaram um grande aumento na taxa de convergência quando se tratava de ajustes individuais e também concluíram que, através da análise Bayesiana são necessárias dez observações semanais de produção de leite para que se obtenham boas estimativas para os parâmetros do modelo de Wood, enquanto o método clássico dos Quadrados Mínimos requer quinze ou mais observações semanais.



Wakefield et al. (1994) apresentaram uma estratégia computacional Bayesiana bastante eficiente para estudar modelos biométricos lineares e não-lineares de crescimento através do algoritmo Gibbs Sampler, sendo o estudo desenvolvido através da matriz de variância e covariância residual entre os parâmetros da curva. Groenewald et al. (1996) adaptaram esta estratégia para trabalhar com o modelo de Wood em sua forma linearizada e estimaram com sucesso os parâmetros desse modelo e funções de produções inerentes a eles.

Groenewald et al. (1996) optaram pela metodologia Bayesiana para comparar as estimativas dos parâmetros do modelo de Wood e funções obtidas a partir desses parâmetros (produção de leite no pico, o tempo de permanência no pico, a produção total de leite e a persistência da lactação) de ovelhas da raça Merino submetidas a dois diferentes tratamentos. Estes autores observaram que os resultados obtidos são mais informativos que aqueles proporcionados pela metodologia clássica, pois é possível chegar a uma distribuição *a posteriori* para a diferença entre os tratamentos confrontados e assim obter diretamente, dessa distribuição, as probabilidades de interesse.

Varona et al. (1998) e Rekaya et al. (2000) estudaram curvas de lactação de vacas Spanish e Holstein-Friesian, respectivamente, através do ajuste da função de Wood seguindo a metodologia Bayesiana, e estimaram com sucesso os parâmetros dessa função, observando também uma redução no número de curvas atípicas. Nestes mesmos trabalhos os autores também estimaram a herdabilidade e correlações genéticas para os parâmetros da função de Wood e concluíram que a análise Bayesiana apresentou resultados bastante satisfatórios, principalmente em relação à estimação por intervalo, cuja amplitude intervalar foi bem menor que aquela obtida pela metodologia frequentista.

Racine-Poon (1985) analisou modelos aleatórios não-lineares sob o ponto de vista Bayesiano, usando a estrutura hierárquica proposta por Lindley e Smith (1972), e relatou que o método, quando aplicado a 40% das observações,

mostrou resultados semelhantes àqueles obtidos em uma amostra completa. Em relação a este aspecto, Chang et al. (2001) optaram pela análise Bayesiana no estudo de curvas de lactação de ovelhas, pois relatam que o número de medidas de produção de leite por animal é bem menor que em gado bovino; portanto, é necessário utilizar uma metodologia robusta para este problema.

Uma forma prática de comprovar a eficiência da metodologia Bayesiana é através do estudo de simulação de dados, pois permite comparar as estimativas obtidas com valores paramétricos definidos no processo de simulação. Em relação ao número de experimentos simulados, Varona et al. (1999) comentam que em estudos envolvendo análise Bayesiana este não necessita ser demasiadamente grande, pois em cada caso simulado já está envolvido um grande número de iterações relacionadas a algoritmos como o Gibbs Sampler e Metropolis-Hasting, o que poderia gerar problemas de suporte computacional. Neste trabalho os autores simularam dez experimentos para avaliar dois diferentes métodos de análise em melhoramento genético animal. Milani (2000) e Rekaya et al. (2000) simularam apenas um experimento para avaliar métodos Bayesianos aplicados em estudos de séries temporais e de curvas de lactação, respectivamente.

2.4 Propriedades estatísticas do modelo de Wood

Ao utilizar a função de Wood apresentada na equação 2 para descrever a produção esperada de leite em cada período de tempo observado, é necessário definir algumas propriedades relacionadas com a análise estatística envolvida.

A primeira delas diz respeito à suposição de erros multiplicativos para esse modelo, os quais foram avaliados preliminarmente por Groenewald et al. (1995). Estes autores estimaram os resíduos e concluíram que eles apresentavam um comportamento crescente característico de um termo de erro aleatório

multiplicativo, como visto em análises de séries temporais. Dessa forma, o modelo em questão torna-se linear com erros aditivos quando se utiliza a transformação logarítmica (Groenewald et al., 1996). Este modelo pode ser reescrito para cada animal da seguinte maneira:

$$Z_{ij} = \ln(Y_{ij}) = a_i + b_i \ln(t) + c_i t + \varepsilon_{ij}, \quad (9)$$

em que $i=1, \dots, k$, sendo k o número de animais, $j=1, \dots, n$, sendo n o número de observações no animal e ε o erro experimental.

Outra importante suposição é aquela relacionada com a independência residual, que é avaliada pelo teste de autocorrelação serial de Durbin e Watson (1951), como apresentado em Goodall e Sprevak (1984). Estes autores relatam que em estudos de curvas de lactação pode existir autocorrelação positiva entre os resíduos, ou seja, o parâmetro de autocorrelação (ρ) ser maior que zero, o que aumenta o viés quando se omite um ajuste com estrutura autorregressiva. Groenewald et al. (1996) não realizaram esse teste, apenas assumiram a independência dos resíduos provenientes do ajuste do modelo de Wood através da metodologia Bayesiana.

Considerando os resíduos de cada observação longitudinal como e_1, e_2, \dots, e_n , o teste pode ser apresentado pela seguinte estatística:

$$d = \frac{\sum_{u=2}^n (e_u - e_{u-1})^2}{\sum_{u=1}^n e_u^2}.$$

Os valores de d são comparados com valores tabelados para limites inferior (d_l) e superior (d_u), os quais determinam o estabelecimento das hipóteses a serem testadas da seguinte maneira: $H_0: \rho = 0$, $H_1: \rho > 0$. Se $d < d_l$, conclui-se que o teste é significativo, ou seja, rejeita-se H_0 com um nível α de probabilidade. Se $d > d_u$, conclui-se que o teste é não significativo; e se $d_l < d < d_u$, o teste é inconclusivo.

2.5 Análise Bayesiana do modelo Wood

Os dados de produção de leite de cada indivíduo (Z_i), os quais definem o primeiro estágio da modelagem hierárquica Bayesiana, considerando o modelo apresentado pela expressão 9 e usando a notação matricial, se distribuem segundo uma distribuição normal com média Xm_i e variância $\sigma^2 I_n$, ou seja:

$$Z_i \sim N(Xm_i, \sigma^2 I_n), \quad (10)$$

em que:

Z_i é o vetor das produções de cada animal i ;

X é a matriz ($n \times 3$) de delineamento com colunas ($1 \ln(t_j) t_j$), sendo t os períodos de coletas de dados ($j=1, 2, \dots, n$);

m_i é o vetor (3×1) de parâmetros a_i , b_i e c_i para animal i ;

σ^2 é a variância residual;

I_n é a matriz identidade de ordem n .

Através desta distribuição obtém-se a seguinte função de verossimilhança:

$$f(Z | a, b, c, \sigma^2) \propto \prod_{i=1}^k \prod_{j=1}^n \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp \left\{ - \frac{[Z_{ij} - (a_i + b_i \ln(t_{ij}) + c_i t_{ij})]^2}{2\sigma^2} \right\}. \quad (11)$$

O segundo estágio da hierarquia descreve a variação dos parâmetros entre os animais, sendo, portanto, necessário definir uma distribuição para m_i , pois se trata de um vetor de parâmetros a ser estimado. Esta distribuição é modelada por uma normal multivariada dada por:

$$m_i \sim NMV(\mu, \Sigma), \quad (12)$$

em que:

$\mu = (\alpha \ \beta \ \gamma)'$, sendo este o vetor da média populacional dos parâmetros a , b e c ;

Σ é a matriz de covariância (3 x 3).

O terceiro estágio da hierarquia consiste na descrição da incerteza *a priori* sobre todos os parâmetros (σ^2 , μ e Σ) envolvidos nos estágios anteriores. Nesta fase especificam-se distribuições *a priori* para σ^2 , μ e Σ^{-1} e considera-se, como procedimento padrão, a independência entre eles. Dessa forma, segundo Groenewald et al.(1996), tem-se:

$$f(\mu, \Sigma^{-1}, \sigma^2) = f(\mu, \sigma^2) f(\Sigma^{-1}), \quad (13)$$

em que

$$f(\mu, \sigma^2) \propto \frac{1}{\sigma^2}$$

é a “*priori*” não-informativa de Jeffreys (Jeffreys, 1961) e $f(\Sigma^{-1})$ corresponde à inversa da matriz de covariância, a qual segue uma distribuição tri-dimensional de Wishart com os seguintes parâmetros:

$$\Sigma^{-1} \sim W((\rho R)^{-1}, \rho)$$

em que:

R^{-1} é a média da distribuição e ρ é os graus de liberdade.

Groenewald et al. (1996) consideram R e ρ como hiperparâmetros, e relatam que os valores assumidos para eles não influenciam diretamente nos resultados, sendo utilizados apenas para manter as estimativas dentro de uma determinada região paramétrica, o que otimiza o uso do algoritmo Gibbs Sampler, mantendo o processo iterativo bem comportado. Estes autores assumiram os seguintes valores para R e ρ :

$$R = \begin{bmatrix} 0,02 & 0 & 0 \\ 0 & 0,03 & 0 \\ 0 & 0 & 0,007 \end{bmatrix}, \quad \rho = 2.$$

Diante das definições das distribuições *a priori* e da função de verossimilhança, é possível chegar às distribuições condicionais completas *a*

posteriori, as quais são necessárias para a implementação do algoritmo Gibbs Sampler. Conforme já apresentado, este algoritmo gera as distribuições marginais de cada parâmetro, sendo então as estimativas para os parâmetros de interesse obtidas através da média, da moda ou da mediana destas distribuições marginais. Estes mesmos autores obtiveram como distribuições condicionais completas, para os parâmetros de interesse, as distribuições Normal multivariada, Wishart e Gama Inversa, cujas funções densidade de probabilidade, média e a variância são apresentadas na Tabela 2, como descrito por Gelman et al. (1997).

TABELA 2- Distribuições Normal Multivariada, Gama Inversa e Wishart, com suas respectivas densidades, média e variância.

Distribuição	Função densidade	Média	Variância
Normal Multivariada	$p(\theta) = (2\pi)^{-d/2} \Sigma ^{-1/2} \times \exp[-\frac{1}{2}(\theta - \mu)' \Sigma^{-1}(\theta - \mu)]$	μ	Σ
Gama Inversa	$p(\theta) = \frac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)} \theta^{\alpha-1} e^{-\beta\theta}$	$\frac{\beta}{\alpha-1}$ $\alpha > 1$	$\frac{\beta^2}{(\alpha-1)^2(\alpha-2)}$ $\alpha > 2$
Wishart	$p(W) = [2^{vk/2} \pi^{k(k-1)/4} \prod_{i=1}^k \Gamma(\frac{v+1-i}{2})]^{-1} \times S ^{-v/2} W ^{-(v-k-1)/2} \times \exp[-\frac{1}{2}tr(S^{-1}W)]$	vS	---

2.6 Algoritmo Gibbs Sampler

O algoritmo Gibbs Sampler é essencialmente um esquema iterativo de amostragem de uma cadeia de Markov cujo núcleo de transição é formado pelas distribuições condicionais completas. É uma técnica para gerar variáveis

aleatórias de uma distribuição (marginal) sem que se conheça a sua densidade. A idéia do método de Monte Carlo via Cadeia de Markov é simular um passeio aleatório no espaço do parâmetro θ , o qual converge para uma distribuição estacionária, que é a distribuição *a posteriori* $P(\theta|Z_v)$ em que Z_v é o vetor de observações. Esta distribuição é dita estacionária porque não sofre alterações caracterizadas por picos ou por tendências direcionais, constituindo, assim, uma base estável, ou confiável, para o processo de estimação.

O Amostrador de Gibbs tem sido extremamente útil na resolução de problemas multidimensionais e é definido em termos de subvetores de θ . Seja o vetor de parâmetros θ dividido em v subvetores, $(\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_v)$, e suponha-se que as distribuições condicionais de cada parâmetro θ , dados todos os outros, sejam conhecidas. Essas distribuições são denotadas por $f(\theta_1|\theta_2, \dots, \theta_v, Z_v)$, $f(\theta_2|\theta_1, \theta_3, \dots, \theta_v, Z_v), \dots, f(\theta_v|\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_{v-1}, Z_v)$, em que Z_v representa o vetor de v observações consecutivas observadas em igual espaço de intervalo de tempo; estas distribuições são denominadas distribuições condicionais completas.

Segundo Gamerman (1996), o Amostrador de Gibbs pode ser descrito de maneira prática e objetiva da seguinte forma:

1. dados os valores iniciais $\theta^{(0)} = \theta_1^{(0)}, \theta_2^{(0)}, \dots, \theta_v^{(0)}$ para os parâmetros;
2. gerando $M+N$, sendo M o número de observações descartadas e N o número de observações mantidas, grupos de números aleatórios são retirados iterativamente

$$\theta_1^{(1)} \text{ de } f_1(\theta_1|\theta_2^{(0)}, \theta_3^{(0)}, \dots, \theta_v^{(0)}, Z_v),$$

$$\theta_2^{(1)} \text{ de } f_2(\theta_2|\theta_1^{(1)}, \theta_3^{(0)}, \dots, \theta_v^{(0)}, Z_v),$$

↓

$$\theta_v^{(1)} \text{ de } f_v(\theta_v|\theta_1^{(1)}, \theta_2^{(1)}, \dots, \theta_{v-1}^{(1)}, Z_v).$$

- obtendo-se, na primeira iteração, $\theta^{(1)} = (\theta_1^{(1)}, \theta_2^{(1)}, \dots, \theta_v^{(1)})'$;
3. descartando as primeiras M realizações no passo 2, as N restantes realizações são utilizadas para formar uma amostra aleatória $\{(\theta_1^{(i)}, \theta_2^{(i)}, \dots, \theta_v^{(i)})^{M+N}_{i=M+1}\}$ e estima-se a distribuição *a posteriori* usando esta amostra aleatória.

À medida que o número de iterações aumenta, a cadeia se aproxima de sua condição de equilíbrio, ou seja, ela atinge a característica de estacionária com um comportamento assintótico quando $N \rightarrow \infty$. Assim assume-se que a convergência é atingida em uma iteração cuja distribuição esteja arbitrariamente próxima da distribuição de equilíbrio, ou seja a marginal desejada, e não no sentido formal do número de iterações tender para o infinito.

2.7 Critério de convergência de Gelman e Rubin

Este critério considera m cadeias de valores geradas pelo Gibbs Sampler em paralelo e uma função real dos parâmetros, $t(\theta)$; têm-se m trajetórias de extensão $M+N$, de modo que:

$t_i^{(1)}, t_i^{(2)}, \dots, t_i^{(j)}, \dots, t_i^{(M+N)}$, sendo $i=1, \dots, m$. Dessa maneira, obtém-se a

variância entre as cadeias, E , e a variância dentro das cadeias, D , cujas fórmulas são dadas, respectivamente, pelas expressões 14 e 15:

$$E = \frac{M+N}{m-1} \sum_{i=1}^m (\bar{t}_i - \bar{t})^2 \quad (14)$$

$$D = \frac{1}{m[(M+N)-1]} \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^{M+N} (t_i^{(j)} - \bar{t}_i)^2, \quad (15)$$

sendo \bar{t}_i a média das observações da cadeia i e \bar{t} a média dessas médias, $i = 1, \dots, m$ e $j = 1, \dots, M+N$. Sob condição de convergência, todos os valores

serão gerados da *posteriori* e a variância de t pode ser estimada de forma não viesada por:

$$\hat{V}[t(\theta)] = \left(1 - \frac{1}{M+N}\right)D + \left(\frac{1}{M+N}\right)E. \quad (16)$$

Se as cadeias ainda não estiverem convergido então essa estimativa é maior que $V[t(\theta)]$, pois os valores iniciais ainda estão sendo influenciados pelos valores dos outros parâmetros da cadeia, de forma que a distribuição de equilíbrio ainda não foi atingida, indicando que eles foram escolhidos com dispersão maior que a da distribuição de equilíbrio. Por outro lado, D fornece estimativas menores que $V[t(\theta)]$, pois a cadeia não terá coberto toda a variabilidade de $t(\theta)$. O indicador de convergência é dado pela chamada redução potencial estimada da escala, representada por:

$$\hat{R} = \sqrt{\hat{V}[t(\theta)]/D}. \quad (17)$$

À medida que $M+N$ cresce, ambos os estimadores acabarão convergindo para $V[t(\theta)]$ e \hat{R} convergirá para 1. Assim, \hat{R} pode ser usado como indicador de convergência pela avaliação de sua proximidade ao valor unitário.

2.8 “Burn-in” e frequência

Um conceito relacionado ao algoritmo Gibbs Sampler que merece destaque é o de “burn-in”, ou seja, considerando N iterações, despreza-se as M iterações iniciais, em geral 40 a 50% (Gelman, 1996). Este é um procedimento válido, uma vez que elimina o efeito dos valores iniciais, necessários à inicialização do processo iterativo envolvido neste algoritmo.

Outro importante aspecto relacionado a utilização do Gibbs Sampler é aquele referente a independência entre as observações subseqüentes geradas pelo algoritmo. Dessa forma é necessário utilizar observações espaçadas por um

determinado número de iterações. Na prática, o que se faz é considerar saltos de s em s iterações. Seguindo esta estrutura, é possível confeccionar autocorrelogramas e verificar se as observações, coletadas de acordo com a frequência s , são mesmo independentes.

3 MATERIAL E MÉTODOS

3.1 Distribuições condicionais completas *a posteriori*

As distribuições condicionais completas *a posteriori*, necessárias à implementação do Gibbs Sampler, foram obtidas de Groenewald et al. (1996), as quais são apresentadas como segue:

$$m_i | Z, \mu, \Sigma^{-1}, \sigma^2 \sim N(D^{-1}(X'Z_i / \sigma^2 + \Sigma^{-1} \mu), D^{-1}); \quad (18)$$

$$\mu | Z, M, \Sigma^{-1}, \sigma^2 \sim N(\bar{m}, \frac{1}{k} \Sigma); \quad (19)$$

$$\Sigma^{-1} | Z, M, \mu, \sigma^2 \sim W((S + \rho R)^{-1}, k + \rho); \quad (20)$$

$$\sigma^2 | Z, M, \mu \sim IG(\frac{nk}{2}, \frac{1}{2} (\sum_i^k (Z_i - X m_i)' (Z_i - X m_i))); \quad (21)$$

sendo n o número de observações de produção de leite.

Para um melhor entendimento das condicionais completas (equações 18 a 21), é necessário apresentar as seguintes definições:

$$Z = (Z_1, Z_2, \dots, Z_k)';$$

$$M = (m_1, m_2, \dots, m_k)';$$

$$D = X'X / \sigma^2 + \Sigma^{-1};$$

$$\bar{m} = \frac{1}{k} \sum_i^k m_i;$$

$$S = \sum_i^k (m_i - \mu)(m_i - \mu)';$$

em que N , W e IG representam, respectivamente, as distribuições Normal Multivariada, Wishart e Gama Inversa.

3.2 Implementação do Gibbs Sampler

O algoritmo Gibbs Sampler é usado nas equações 18 a 21, substituindo-se os valores de μ , Σ^{-1} e σ^2 pelas suas respectivas estimativas de quadrados mínimos, tomadas como valores iniciais. Estes permitem gerar observações m_i , $i = 1, 2, \dots, k$ a partir da equação 18. Estes valores de m_i são substituídos nas expressões 19 a 21 para fornecer o segundo conjunto de observações na seqüência, que são mais uma vez substituídos em 18. Este processo é repetido s vezes ($s=20$) e o último conjunto de valores paramétricos representa uma amostra independente da distribuição marginal. Dessa maneira, o processo é então repetido por $M+N$ vezes ($M+N=10.000$).

As distribuições marginais *a posteriori* para as funções (pico de lactação, tempo de pico, produção total de leite e persistência da lactação) dos parâmetros do modelo de Wood foram obtidas pela substituição de a , b e c pelas suas respectivas estimativas (α , β e γ) a cada iteração do Gibbs Sampler, obtendo-se assim, ao final do processo, um conjunto de valores representativos dessas distribuições.

Intuitivamente, o modelo assumido neste estudo implica que cada animal possui seu conjunto de parâmetros, que defini sua curva de lactação; portanto, considera-se que estes parâmetros são amostras de uma população comum, da qual se originaram os animais amostrados. Os parâmetros que definem esta população também são desconhecidos, mas com a utilização de *prioris* não informativas é possível fazer suposições mínimas sobre eles e, assim, estimá-los através da ótica Bayesiana.

Neste trabalho, o algoritmo Gibbs Sampler foi implementado utilizando-se o procedimento IML (Interactive Matrix Language), disponível no software estatístico SAS® (1990).

Na literatura existem vários métodos de verificar a convergência do algoritmo Gibbs Sampler. Neste trabalho, optou-se pelo Critério de Gelman e Rubin (1992), pois trata-se do mais utilizado em trabalhos de análise Bayesiana aplicada.

O critério de Gelman e Rubin (1992) foi aplicado através do pacote computacional BOA (Bayesian Output Analysis), disponível no software R, utilizando os resultados obtidos do programa em linguagem SAS[®]. Considerou-se para o Gibbs Sampler, em todas as análises efetuadas, um número de fixo de 10.000 iterações, com frequência de 20 observações e “burn-in” que desprezou as 4.000 (*M*) primeiras iterações; portanto, as inferências foram feitas considerando as 6.000 (*N*) iterações restantes.

3.3. Dados utilizados

3.3.1 Dados experimentais

Os dados reais utilizados neste trabalho foram estudados inicialmente por Giné et al. (1999), os quais os obtiveram junto à Fazenda Nevada, no município de Carmópolis-MG. Estes constam de sete controles leiteiros mensais de dezesseis cabras da raça Saanen de primeira lactação e quinze na segunda lactação, nascidas entre setembro e dezembro de 2001.

3.3.2 Dados simulados

Devido à necessidade de verificar a eficiência da metodologia Bayesiana utilizada, estruturou-se um sistema de simulação de dados visando primeiramente avaliar os recursos computacionais empregados, ou seja, testar o programa em linguagem SAS[®], e também abordar alguns aspectos desta

metodologia em relação à diferentes estruturas de matrizes de covariâncias assumidas.

Para testar o algoritmo elaborado em linguagem SAS[®] utilizou-se como valores para os parâmetros do modelo de Wood e para a matriz de covariância as estimativas médias de quadrados mínimos de dados reais oriundos de produções semanais de leite de 32 ovelhas da raça Merino. Os dados foram simulados através da opção RANNOR do SAS[®] considerando 10 experimentos, com 32 animais por experimento e cada animal com 10 controles leiteiros. Os resultados foram avaliados de forma a verificar se os valores atribuídos aos parâmetros α , β e γ encontravam-se dentro da amplitude do intervalo de credibilidade de 95% em cada experimento individualmente. Para este processo de análise o Gibbs Sampler foi implementado com 5000 iterações e uma frequência de 20 iterações.

O outro aspecto relacionado com a simulação de dados diz respeito à comparação das estimativas obtidas considerando diferentes estruturas de covariância, buscando com isso avaliar a robustez da metodologia quanto à precisão das estimativas pontuais nestas diferentes situações. Para este estudo foram simulados 10 experimentos com 10 animais contendo 10 observações de produção de leite para cada estrutura de covariância assumida. Para este caso o Gibbs Sampler também foi implementado com 5.000 iterações e uma frequência de 20 iterações. Considerou-se as seguintes matrizes: autorregressiva de primeira ordem, AR(1), e autorregressiva heterocedástica de primeira ordem, ARH(1), cujas formas são mostradas respectivamente pelas expressões 22 e 23.

$$\Sigma_1 = \begin{bmatrix} \sigma^2 & \rho\sigma^2 & \dots & \rho^{p-1}\sigma^2 \\ \rho\sigma^2 & \sigma^2 & \dots & \rho^{p-2}\sigma^2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \rho^{p-1}\sigma^2 & \rho^{p-2}\sigma^2 & \dots & \sigma^2 \end{bmatrix} \quad (22)$$

$$\Sigma_2 = \begin{bmatrix} \sigma_1^2 & \rho\sigma_1\sigma_2 & \cdots & \rho^{p-1}\sigma_1\sigma_p \\ \rho\sigma_1\sigma_2 & \sigma_2^2 & \cdots & \rho^{p-2}\sigma_2\sigma_p \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \rho^{p-1}\sigma_1\sigma_p & \rho^{p-2}\sigma_2\sigma_p & \cdots & \sigma_p^2 \end{bmatrix}. \quad (23)$$

Para a matriz AR(1) assumiram-se as seguintes situações, envolvendo os parâmetros do modelo de Wood:

- i) considerando baixa correlação ($\rho = 0,2$) e $\sigma^2 = 0,05$;
- ii) considerando média correlação ($\rho = 0,5$) e $\sigma^2 = 0,05$;
- iii) considerando alta correlação ($\rho = 0,9$) e $\sigma^2 = 0,05$.

Para a matriz ARH(1) assumiram-se as seguintes situações, envolvendo os parâmetros do modelo de Wood:

- i) considerando baixa correlação ($\rho = 0,2$) e $\sigma_1^2 = 0,05$,
 $\sigma_2^2 = 0,03$ e $\sigma_3^2 = 0,01$.
- ii) considerando média correlação ($\rho = 0,5$) e $\sigma_1^2 = 0,05$,
 $\sigma_2^2 = 0,03$ e $\sigma_3^2 = 0,01$.
- iii) considerando alta correlação ($\rho = 0,9$) e $\sigma_1^2 = 0,05$,
 $\sigma_2^2 = 0,03$ e $\sigma_3^2 = 0,01$.

Em ambos os casos, estruturas AR(1) e ARH(1), os valores paramétricos assumidos para α , β e γ foram, respectivamente, 0,5, 0,5 e -0,15. As estimativas obtidas para estes parâmetros foram comparadas com os valores paramétricos inicialmente indicados através do erro quadrático médio (EQM).

Segundo Casela e Berger (1990), o EQM é uma função que mede a diferença ao quadrado média do estimador $\hat{\theta}$ e o parâmetro θ ; em alguns casos, para solucionar problemas de escala envolvidos com este avaliador, torna-se mais plausível trabalhar com sua raiz quadrada. O EQM então é definido da seguinte forma:

$$\text{EQM} = \frac{1}{Q} \left[\sum_{i=1}^Q (\hat{\theta}_i - \theta_i)^2 \right], \quad (24)$$

sendo Q , no presente trabalho, o número de experimentos simulados.

4 RESULTADOS E DISCUSSÃO

4.1 Estatísticas descritivas dos dados longitudinais

Nas Tabelas 3 e 4 são mostradas as estatísticas descritivas, representadas pelas médias e os desvios padrão dos intervalos de tempos e das produções de leite.

TABELA 3. Médias e desvios padrão para os dados da população de cabras de primeira lactação.

Controle	Períodos de tempo, em dias		Produção de leite, em kg	
	Média	Desvio Padrão	Média	Desvio Padrão
1	9,2000	6,0851	3,7667	2,3143
2	23,0000	6,3920	3,3300	2,0584
3	67,8667	4,7188	3,6667	1,8524
4	106,0000	13,5804	3,4333	1,7658
5	146,7333	27,9399	1,8900	1,8524
6	180,0667	22,3270	3,0667	1,8584
7	215,5333	11,9575	1,7700	1,7972

TABELA 4. Médias e desvios padrão para os dados da população de cabras de segunda lactação.

Controle	Períodos de tempo, em dias		Produção de leite, em kg	
	Média	Desvio Padrão	Média	Desvio Padrão
1	9,2000	6,0851	3,7666	1,3075
2	23,0000	6,3920	4,2666	1,1629
3	67,8667	4,7188	3,5900	1,0465
4	106,0000	13,5804	3,4333	0,9976
5	146,7333	27,9399	2,8600	1,0465
6	180,0667	22,3270	3,0666	1,0499
7	215,5333	11,9575	2,2300	1,0154

De forma geral nota-se, através das Tabelas 3 e 4, que os desvios padrão para a produção de leite foram maiores para a população representativa de cabras na primeira lactação. Este fato pode proporcionar uma maior dificuldade de ajuste, o que pode refletir em estimativas menos precisas para este grupo, se comparado com aquele de animais em segunda lactação.

4.2 Ajuste do modelo de Wood aos dados de cabras Saanen

Os valores obtidos para estatística de Durbin-Watson (d) para as populações de cabras de primeiro e segundo parto foram, respectivamente, 2,9911 e 3,1750, os quais indicam a ausência de autocorrelação serial positiva ($\rho > 0$), pois estes valores são maiores que o valor tabelado d_u (1,36) ao nível de 5%.

As Figuras 1 e 2 mostram, respectivamente, para as populações de cabras de primeira e segunda lactação, o comportamento dos resíduos decorrente do ajuste da função de Wood aos dados de produção de leite em cada período de tempo observado.

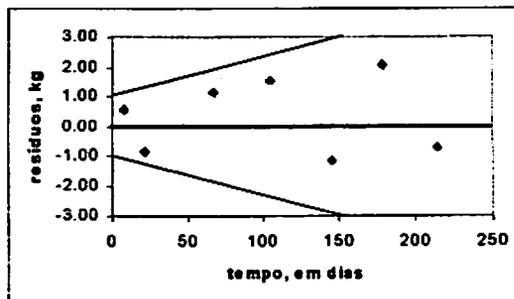


FIGURA 1. Resíduos do ajuste para a população de cabras de primeiro parto.

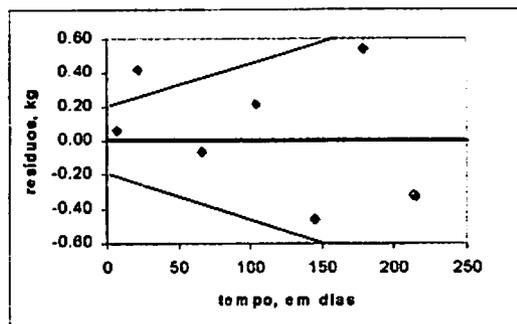


FIGURA 2. Resíduos do ajuste para a população de cabras de segundo parto.

Nota-se, através das Figuras 1 e 2, que os resíduos obtidos pelo ajuste do modelo de Wood apresentam um comportamento crescente ao redor do valor zero no decorrer do tempo. Este fato é descrito por Groenewald et al. (1995) como um comportamento característico de resíduos multiplicativos no tempo, justificando, assim, a transformação logarítmica utilizada.

As estimativas, representadas pela média da distribuição marginal *a posteriori*, para os parâmetros α , β e γ e para as funções de produções oriundas desses parâmetros (produção de leite no pico, η , tempo de ocorrência do pico, τ , produção total de leite, ϕ , e persistência, φ), das duas populações em estudo (cabras de primeira e segunda ordem de parto), são mostradas na Tabela 5.

TABELA 5 – Estimativas, desvios padrão e intervalo de credibilidade de 95% para os parâmetros das duas populações*.

Parâmetro	Média	Desvio Padrão	Limite Inferior	Limite Superior
α_1	0,9117	0,2320	0,5328	1,2931
α_2	1,1255	0,1721	0,7885	1,4644
β_1	0,1631	0,0911	0,0184	0,3410
β_2	0,1006	0,0590	0,0159	0,2167
γ_1	-0,0095	0,0018	-0,0132	-0,0058
γ_2	-0,0040	0,0008	-0,0057	-0,0023
η_1	3,4229	0,3377	2,8164	4,1276
η_2	3,8810	0,1581	3,5837	4,2062
τ_1	15,9289	7,8044	2,9668	27,7688
τ_2	22,6457	13,5657	6,2491	39,6057
ϕ_1	645,8510	63,0183	532,2980	777,5220
ϕ_2	741,4900	40,1957	667,9700	824,1850
φ_1	5,4173	0,24417	4,9371	5,89459
φ_2	6,0716	0,14372	5,7919	6,35973

* Subscrito 1 indica primeira ordem de parto e subscrito 2 indica segunda ordem de parto.

Os resultados apresentados na Tabela 5 mostram, em geral, uma maior produtividade para as cabras de segunda lactação, pois estas apresentam numericamente maior produção inicial de leite (α), menor taxa de decréscimo de produção (β), maior produção no pico (η), persistência (φ) e produção total de leite (ϕ). Resultados semelhantes foram obtidos por Chawla e Bhatnagar (1984), que estudaram a lactação de quatro grupos raciais de cabras nativas da Índia, e por Mourad (1992), que analisaram 550 lactações de 110 cabras Alpinas Francesas. A maior produtividade para a população de cabras de segunda lactação pode ser explicada pelo fato de esta classe possuir animais mais próximos da maturidade fisiológica, na qual, segundo Devendra e McLeroy (1983), a atividade funcional do tecido secretor da glândula mamária é máxima.

Através dos resultados apresentados na Tabela 5 também é possível notar que, em geral, exceto para o tempo de ocorrência do pico (ϕ), os desvios padrão das estimativas obtidas para a população de cabras de segunda ordem de parto foram menores, indicando uma menor variação da produção de leite durante esta lactação. Contudo, as estimativas para a população de animais de primeira lactação foram todas significativas e condizentes com a realidade, não apresentando, portanto, os problemas de variações individuais nos dados como relatado por Shanks et al. (1981) e Ferris et al. (1985).

As curvas de lactação estimadas para as duas populações são mostradas na Figura 3. Estas não são as curvas de lactação médias, mas meramente as curvas geradas pelas médias *a posteriori* das distribuições marginais dos parâmetros em ambas as populações; portanto, estas representam as formas relativas do comportamento da produção de leite em função do tempo para a população de cabras de primeira e segunda ordens de parto.

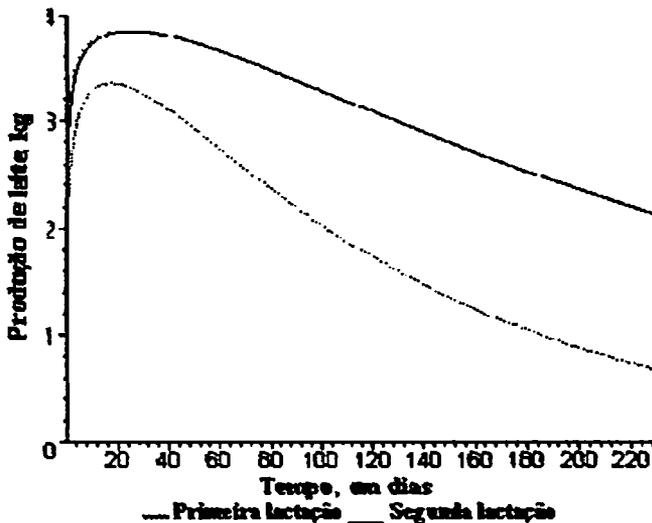


FIGURA 3. Curvas de lactação estimadas para as duas populações.

Os gráficos representativos do processo iterativo envolvido no algoritmo Gibbs Sampler, bem como as distribuições marginais originadas, das quais se obtiveram as estimativas apresentadas na Tabela 5, são mostrados nas Figuras 4 a 19.

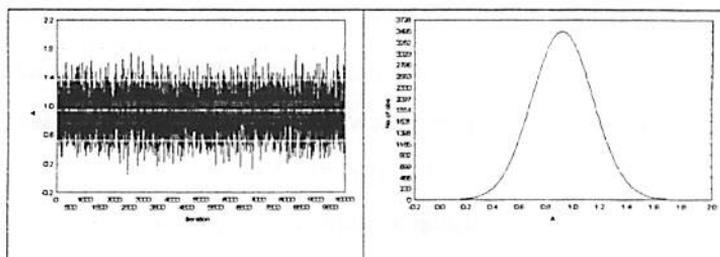


FIGURA 4. Representação gráfica do Gibbs Sampler e distribuição *a posteriori* para o parâmetro α da população de cabras de primeira lactação

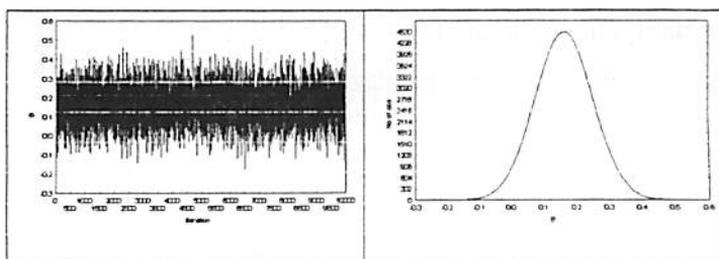


FIGURA 5. Representação gráfica do Gibbs Sampler e distribuição *a posteriori* para o parâmetro β da população de cabras de primeira lactação.

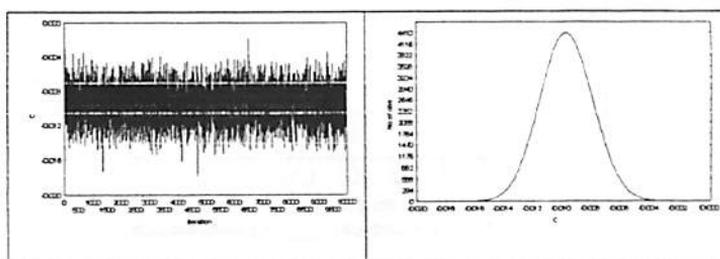


FIGURA 6. Representação gráfica do Gibbs Sampler e distribuição *a posteriori* para o parâmetro γ da população de cabras de primeira lactação.

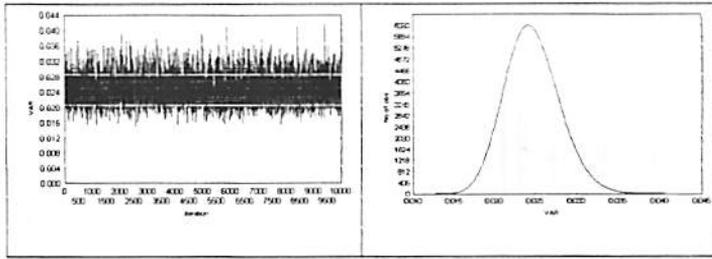


FIGURA 7. Representação gráfica do Gibbs Sampler e distribuição *a posteriori* para a variância (σ^2) da população de cabras de primeira lactação

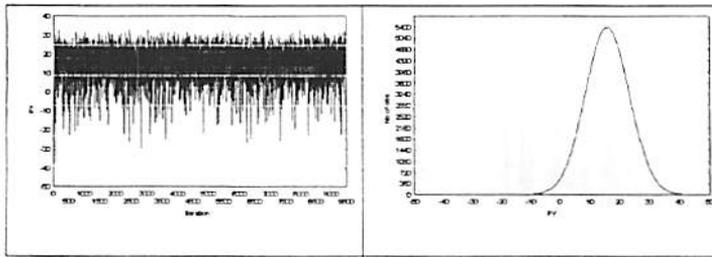


FIGURA 8. Representação gráfica do Gibbs Sampler e distribuição *a posteriori* para o parâmetro η da população de cabras de primeira lactação.

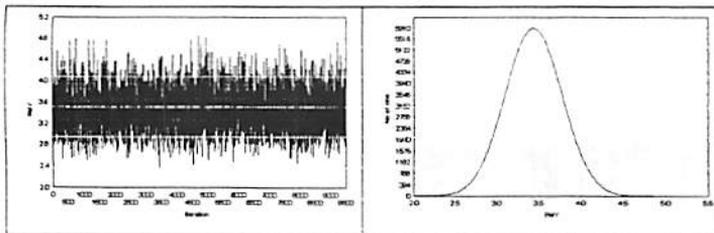


FIGURA 9. Representação gráfica do Gibbs Sampler e distribuição *a posteriori* para o parâmetro τ da população de cabras de primeira lactação.

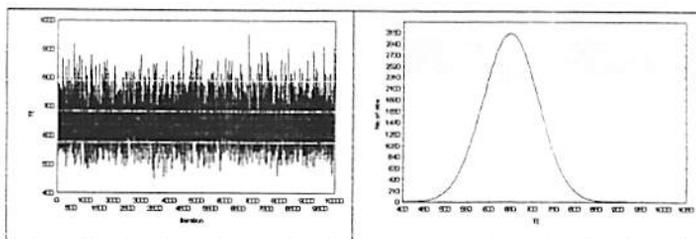


FIGURA 10. Representação gráfica do Gibbs Sampler e distribuição *a posteriori* para o parâmetro ϕ da população de cabras de primeira lactação.

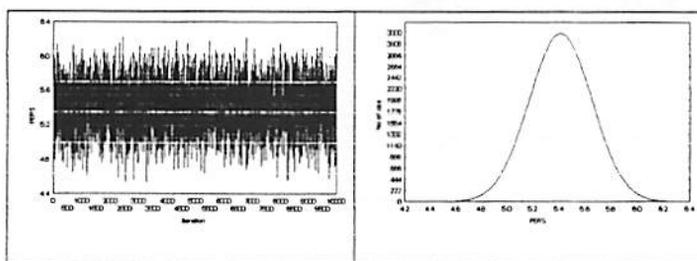


FIGURA 11. Representação gráfica do Gibbs Sampler e distribuição *a posteriori* para o parâmetro ϕ da população de cabras de primeira lactação.

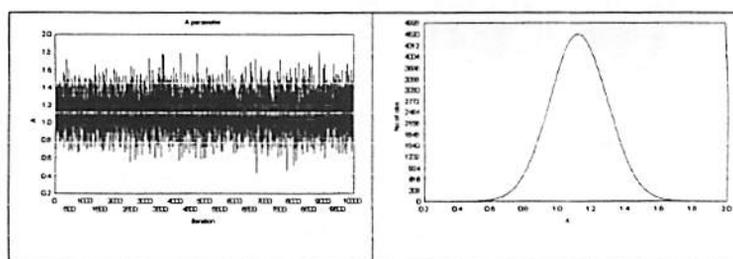


FIGURA 12. Representação gráfica do Gibbs Sampler e distribuição *a posteriori* para o parâmetro α da população de cabras de segunda lactação.

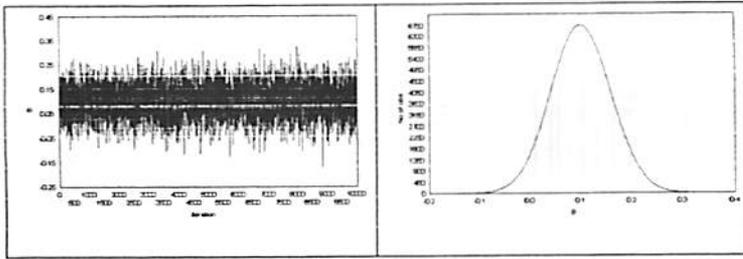


FIGURA 13. Representação gráfica do Gibbs Sampler e distribuição *a posteriori* para o parâmetro β da população de cabras de segunda lactação.

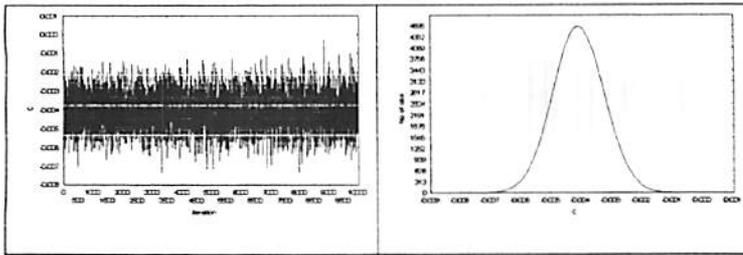


FIGURA 14. Representação gráfica do Gibbs Sampler e distribuição *a posteriori* para o parâmetro γ da população de cabras de segunda lactação.

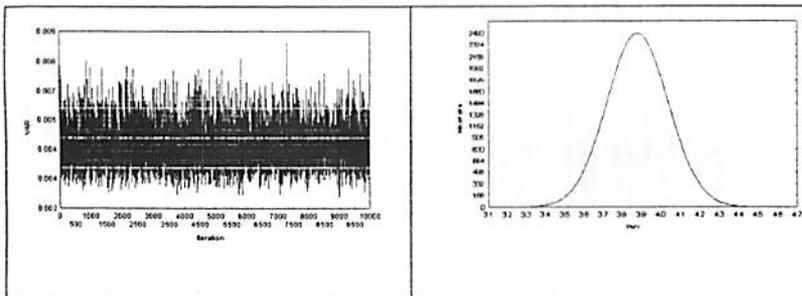


FIGURA 15. Representação gráfica do Gibbs Sampler e distribuição *a posteriori* para a variância (σ^2) da população de cabras de segunda lactação.

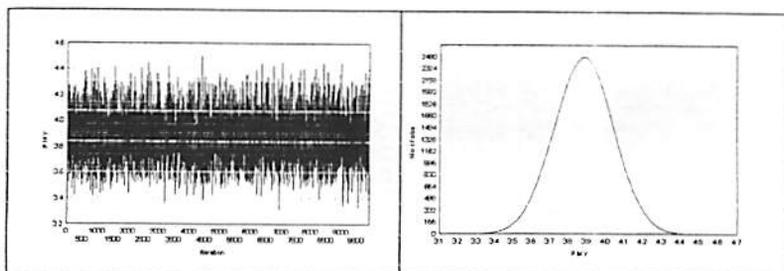


FIGURA 16. Representação gráfica do Gibbs Sampler e distribuição *a posteriori* para o parâmetro η da população de cabras de segunda lactação.

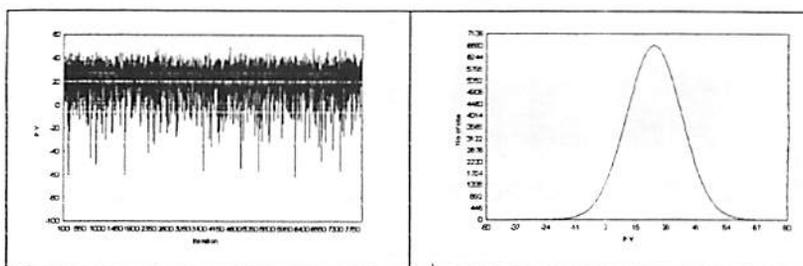


FIGURA 17. Representação gráfica do Gibbs Sampler e distribuição *a posteriori* para o parâmetro τ da população de cabras de segunda lactação.

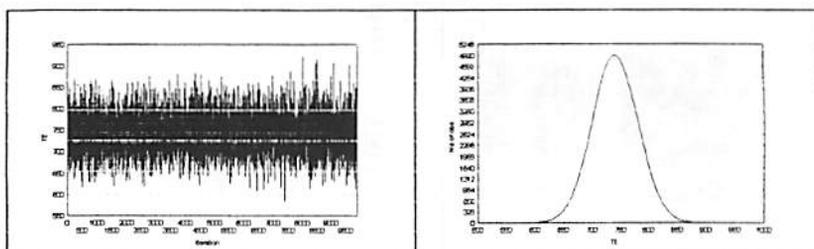


FIGURA 18. Representação gráfica do Gibbs Sampler e distribuição *a posteriori* para o parâmetro ϕ da população de cabras de segunda lactação.

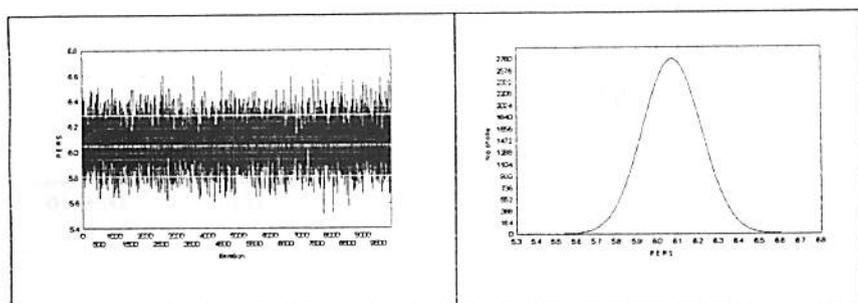


FIGURA 19. Representação gráfica do Gibbs Sampler e distribuição *a posteriori* para o parâmetro ϕ da população de cabras de segunda lactação.

Através das Figuras 4 a 19 é possível observar um bom comportamento do algoritmo Gibbs Sampler na obtenção da marginal de todos os parâmetros estimados para ambas as populações em estudo. Este fato é caracterizado pela ausência de picos, ou seja, “outliers” (observações discrepantes), e também pela ausência de possíveis tendências de estabilização, acima ou abaixo do patamar estabelecido pelo processo iterativo.

As estimativas, representadas pela média da distribuição marginal *a posteriori*, obtidas para a variância residual (σ^2) e para os elementos da matriz de covariância (σ^2_a , σ^2_b , σ^2_c , σ_{ab} , σ_{ac} , σ_{bc}) relacionada aos parâmetros do modelo de Wood, são apresentadas na Tabela 6.

TABELA 6 – Estimativas e desvio padrão para variância do erro (σ^2) e componentes da matriz de covariância (σ^2_a , σ^2_b , σ^2_c , σ_{ab} , σ_{ac} , σ_{bc}) das duas populações*.

Parâmetro	Média	Desvio Padrão	Parâmetro	Média	Desvio Padrão
σ^2_1	0,0246	0,0033	σ^2_{c2}	0,0015	0,0006
σ^2_2	0,0045	0,0006	σ_{a1b1}	-0,8202	0,3282
σ^2_{a1}	2,3720	0,9387	σ_{a2b2}	0,0239	0,0830
σ^2_{a2}	0,5805	0,2317	σ_{a1c1}	0,0037	0,0154
σ^2_{b1}	0,2992	0,1181	σ_{a2c2}	-0,0012	0,0083
σ^2_{b2}	0,1551	0,0639	σ_{b1c1}	-0,0014	0,0055
σ^2_{c1}	0,0014	0,0005	σ_{b2c2}	-0,0026	0,0043

* Subscrito 1 indica primeira ordem de parto e subscrito 2 indica segunda ordem de parto.

Nota-se, através da Tabela 6, que em termos médios o parâmetro α apresenta uma relação antagônica com o parâmetro β na população de cabras de primeira ordem de parto; em animais de segunda ordem, este fenômeno não se verifica. Dessa forma, é possível inferir que animais de primeira lactação, por ainda não terem atingido a maturidade fisiológica, sofrem um maior desgaste em relação à produção inicial de leite, não conseguindo, assim, manter uma taxa de produção crescente tão alta como animais de segunda ou mais lactações. Em relação à covariância negativa existente entre os parâmetros β e γ em ambas as populações, é sabido que, segundo Alves Neto et al. (1965), quanto mais leite o animal produzir antes do pico, menor será sua produção pós-pico.

As estimativas das diferenças entre os parâmetros das duas populações, as quais foram obtidas a partir da média das distribuições *a posteriori*, estão apresentadas na Tabela 7.

TABELA 7 – Estimativas das diferenças entre os parâmetros das duas populações*, com os respectivos desvios padrão e intervalo de credibilidade de 95%.

Diferença	Média	Desvio Padrão	Limite Inferior	Limite Superior
$\alpha_1 - \alpha_2$	-0,2025	0,2852	-0,3457	0,7612
$\beta_1 - \beta_2$	0,0604	0,1065	-0,1489	0,2720
$\gamma_1 - \gamma_2$	-0,0054	0,0020	-0,0094	-0,0015
$\eta_1 - \eta_2$	-0,4418	0,3718	-1,1360	0,3101
$\tau_1 - \tau_2$	-7,4282	71,5749	-31,1545	24,4529
$\phi_1 - \phi_2$	-91,7070	74,6205	-232,7780	58,9990
$\varphi_1 - \varphi_2$	-0,6644	0,2805	-1,2134	-0,1256

* Subscrito 1 indica primeira ordem de parto e subscrito 2 indica segunda ordem de parto.

De acordo com os resultados apresentados na Tabela 7, nota-se que apenas as diferenças referentes ao parâmetro γ (taxa de decréscimo da produção pós-pico) e à persistência (φ) foram significativas ($P < 0,05$), por não apresentarem o valor zero incluído entre os limites inferior e superior do intervalo de credibilidade. Souza Neto et al. (1998) aplicaram testes de médias após a análise de variância para as estimativas dos parâmetros do modelo de Wood ajustado a dados de cabras Saanen e Anglo-nubiana e obtiveram diferenças significativas para todos eles quando compararam cabras de primeira e segunda lactação. Por outro lado, Gipson e Grossman (1989) não encontraram efeito significativo de ordem de parto sobre nenhum dos parâmetros do modelo difásico ajustado a lactações cabras leiteiras.

No tocante ao estudo da variação da curva de lactação de cabras com a ordem de parto é importante realçar que no Brasil, devido ao pouco número de pesquisas realizadas, os resultados devem ser interpretados com cautela, pois é preciso um número maior de informações, como a inclusão de outros fatores

ambientais, como rebanho, ano e época de parição, para que se possa realmente fazer inferências confiáveis em relação a estes estudos.

As densidades das distribuições *a posteriori* que originaram as estimativas apresentadas na Tabela 7 são mostradas pelas Figuras 20 a 26.

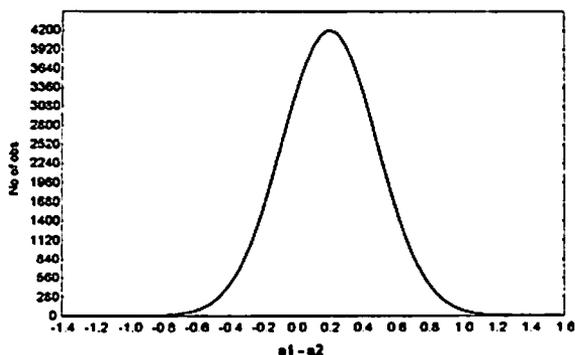


FIGURA 20. Distribuição *a posteriori* para diferença $\alpha_1 - \alpha_2$.

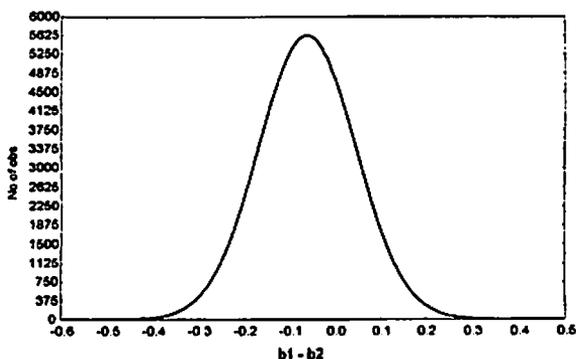


FIGURA 21. Distribuição *a posteriori* para diferença $\beta_1 - \beta_2$.

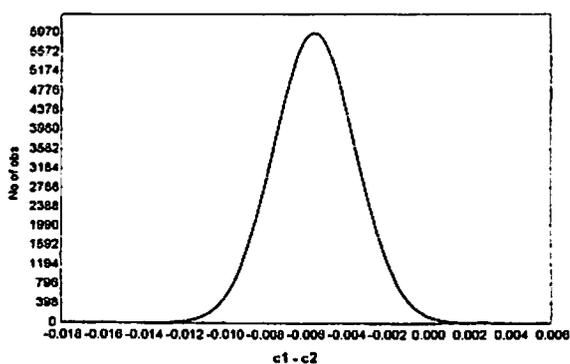


FIGURA 22. Distribuição *a posteriori* para diferença $\gamma_1 - \gamma_2$.

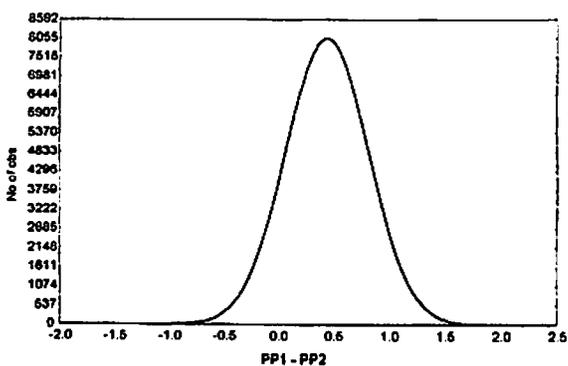


FIGURA 23. Distribuição *a posteriori* para diferença $\eta_1 - \eta_2$.

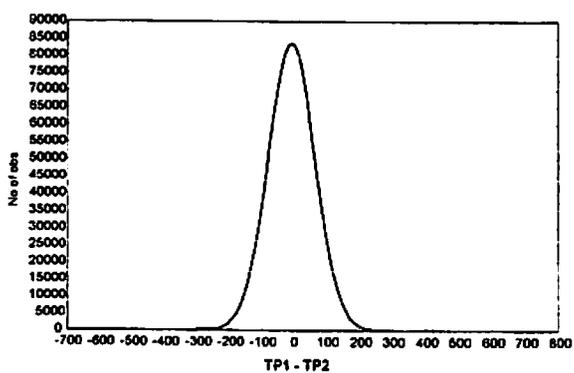


FIGURA 24. Distribuição *a posteriori* para diferença $\tau_1 - \tau_2$.

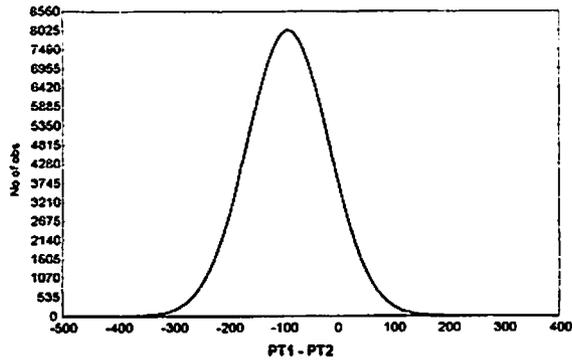


FIGURA 25. Distribuição *a posteriori* para diferença $\phi_1 - \phi_2$.

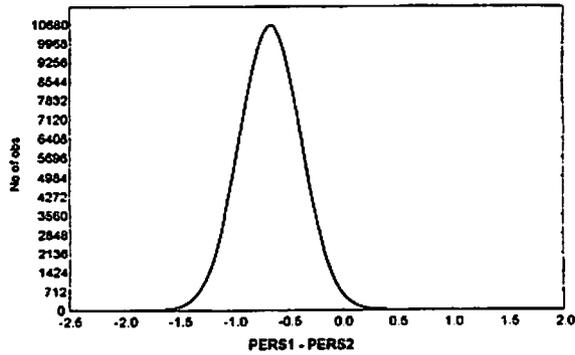


FIGURA 26. Distribuição *a posteriori* para diferença $\phi_1 - \phi_2$.

Nota-se nas Figuras 22 e 26, as quais ilustram, respectivamente, a distribuição da diferença do parâmetro γ e da persistência (ϕ) entre as populações de cabras de primeira e segunda ordem de parto, que o valor zero encontra-se em uma região, na cauda da distribuição, acima do quantil 97,5, o que indica a significância ($P < 0,05$) para estas diferenças.

4.3 Diagnóstico de convergência do algoritmo Gibbs Sampler

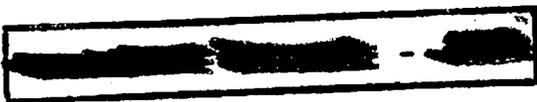
Os valores para o coeficiente de convergência (R) de Gelman e Rubin (1992) para todos os parâmetros estimados em ambas as populações são apresentados na Tabela 8.

TABELA 8 – Estimativas do coeficiente de convergência (R) de Gelman e Rubin para os parâmetros das duas populações*.

Parâmetros	\hat{R}	Parâmetros	\hat{R}
α_1	1,0000470	τ_1	1,0026689
α_2	1,0000120	τ_2	0,9999110
β_1	1,0003553	ϕ_1	1,0005890
β_2	1,0002435	ϕ_2	0,9999702
γ_1	1,0003925	φ_1	1,0004589
γ_2	1,0020534	φ_2	1,0000308
η_1	1,0005197	σ_1^2	0,9999115
η_2	1,0002463	σ_2^2	1,0001096

* Subscrito 1 indica primeira ordem de parto e subscrito 2 indica segunda ordem de parto;

A avaliação da convergência indicou que o algoritmo Gibbs Sampler convergiu para todos os parâmetros, em ambas as populações. É possível verificar, pela Tabela 8, que os valores do coeficiente de convergência (R) estão muito próximos ao valor unitário, havendo diferença apenas de algumas casas decimais, situação que exprime, segundo Gelman e Rubin (1992), a convergência do processo iterativo envolvido na análise. Dessa maneira, pode-se ter plena confiança de que as estimativas dos parâmetros são verdadeiramente as



médias das distribuições marginais, pois estas distribuições encontram-se em uma situação estável, ou seja, sob a condição de estacionaridade.

Os gráficos indicativos da convergência do algoritmo Gibbs Sampler através do critério de Gelman e Rubin (1992) são mostrados, para os parâmetros das duas populações, nas Figuras 1A a 8A (Anexos A). Através dessas figuras, nota-se que o processo iterativo se estabilizou em torno de 3.000 a 8.000 iterações, portanto, o “burn-in” utilizado de 4.000 foi suficiente para este estudo. Segundo Gelman et al. (1997), o “burn-in” e o número de iterações utilizados em processos de geração aleatória que utilizam a técnica MCMC devem ser definidos de forma que não haja dúvidas quanto a estabilização do processo, pois da escolha destes depende todos os resultados obtidos na análise.

A avaliação gráfica da ocorrência de autocorrelação entre observações subseqüentes no algoritmo Gibbs Sampler é visualizada pelos autocorrelogramas apresentados para as populações 1 e 2, respectivamente pelas Figuras 1B a 8B (Anexos B). Estas mostram que as observações geradas subseqüentemente pelo algoritmo Gibbs Sampler são independentes, pois em todos os casos menos de 5% dos “lags”(passos) estão situados dentro do intervalo de autocorrelação, como relatado por Milani (2001). Portanto, a frequência de 20 iterações assumida neste trabalho foi suficiente para evitar a influência de autocorrelação serial sobre a obtenção das distribuições marginais. Rosa (1998) relata que o algoritmo Gibbs Sampler, por se tratar de um processo de Markov, gera amostras sucessivas dependentes entre si, o que conduz a estimativas viciadas; logo, torna-se fundamental a apresentação de testes que descartam a ocorrência deste fenômeno.

4.4 Análise dos dados simulados

Nas Tabelas 9, 10 e 11 são apresentadas as estimativas pontuais (média e desvio padrão da distribuição marginal *a posteriori*) e os intervalos de credibilidade de 95% obtidos para cada experimento simulado.

TABELA 9. Estimativas pontuais e intervalo de credibilidade de 95% para o parâmetro α nos dez experimentos simulados.

Experimento	Média	Desvio Padrão	Límite Inferior	Límite Superior
1	0,4594	0,1453	0,1752	0,7459
2	0,4551	0,1371	0,1868	0,7241
3	0,4745	0,1414	0,1926	0,7504
4	0,5267	0,1519	0,2605	0,8779
5	0,5289	0,1278	0,2796	0,7858
6	0,5671	0,1578	0,2652	0,8864
7	0,5295	0,1332	0,2777	0,7926
8	0,4876	0,1382	0,2257	0,7599
9	0,4608	0,1589	0,1540	0,7740
10	0,5252	0,1471	0,2452	0,8212

TABELA 10. Estimativas pontuais e intervalo de credibilidade de 95% para o parâmetro β nos dez experimentos simulados.

Experimento	Média	Desvio Padrão	Límite Inferior	Límite Superior
1	0,5146	0,1781	0,1707	0,8711
2	0,5475	0,1909	0,1635	0,9213
3	0,5478	0,1672	0,2152	0,8776
4	0,4653	0,1935	0,0645	0,8244
5	0,4823	0,1442	0,1931	0,7611
6	0,3950	0,1818	0,0329	0,7488
7	0,4443	0,1790	0,0941	0,7965
8	0,5455	0,1940	0,1604	0,9060
9	0,5391	0,2488	0,0563	1,0239
10	0,4719	0,1516	0,1762	0,7650

TABELA 11. Estimativas pontuais e intervalo de credibilidade de 95% para o parâmetro γ nos dez experimentos simulados.

Experimento	Média	Desvio Padrão	Limite Inferior	Limite Superior
1	-0,1511	0,0345	-0,2241	-0,0881
2	-0,1562	0,0336	-0,2231	-0,0907
3	-0,1549	0,0288	-0,2106	-0,0968
4	-0,1440	0,0357	-0,2144	-0,0746
5	-0,1479	0,0282	-0,2054	-0,0937
6	-0,1382	0,0339	-0,2023	-0,0698
7	-0,1434	0,0341	-0,2108	-0,0786
8	-0,1601	0,0431	-0,2367	-0,0677
9	-0,1594	0,0418	-0,2401	-0,0788
10	-0,1427	0,0285	-0,1974	-0,0872

Através das Tabelas 9, 10 e 11 é possível observar que a metodologia Bayesiana mostrou-se eficiente para estimar os parâmetros α , β e γ , pois os valores paramétricos utilizados na simulação ($\alpha=0,5$, $\beta=0,5$ e $\gamma=-0,15$) encontram-se, em todos os experimentos simulados, dentro do intervalo de credibilidade de 95%. Resultados semelhantes foram obtidos por Mendoza (1990), que também utilizou este sistema de simulação de dados para avaliar resultados de análises Bayesianas e recomendou sua utilização na avaliação de ensaios de caráter biológico. Rekaya et al. (2000) simularam apenas um experimento, e através dos resultados obtidos concluíram que a metodologia Bayesiana e o software utilizado mostraram-se eficientes para estudos de melhoramento genético animal. Silva et al. (2003) realizaram um estudo de simulação envolvendo dez experimentos para a avaliar as estimativas de um modelo de regressão linear obtidas por meio do algoritmo Gibbs Sampler e concluíram que em todos os casos as estimativas encontravam-se dentro da amplitude do intervalo de credibilidade de 95%.

Nas Tabelas 12 e 13 são mostrados os valores obtidos para a raiz do erro quadrático médio (EQM) considerando as diferentes estruturas de matrizes de covariância estudadas.

TABELA 12. Raiz quadrada do erro quadrático médio (EQM) para as estimativas dos parâmetros α , β e γ considerando a matriz de covariância AR(1), com diferentes coeficientes de correlação (ρ).

Parâmetros	Coeficiente de correlação (ρ)		
	$\rho = 0,2$	$\rho = 0,5$	$\rho = 0,9$
α	0,1160	0,0645	0,0494
β	0,0918	0,0638	0,0093
γ	0,2617	0,1691	0,0618

TABELA 13. Raiz quadrada do erro quadrático médio (EQM) para as estimativas dos parâmetros α , β e γ considerando a matriz de covariância ARH(1), com diferentes coeficientes de correlação (ρ).

Parâmetros	Coeficiente de correlação (ρ)		
	$\rho = 0,2$	$\rho = 0,5$	$\rho = 0,9$
α	0,0777	0,0535	0,0845
β	0,0844	0,0862	0,0991
γ	0,0373	0,0207	0,0431

É possível observar, pelos resultados apresentados na Tabela 12, que à medida que se aumenta o coeficiente de correlação há uma diminuição no valor da raiz quadrada do EQM para todos os parâmetros estimados. Este fato pode estar relacionado com uma menor variabilidade dos estimadores Bayesianos (média da distribuição marginal *a posteriori*) quando os parâmetros são altamente relacionados. Portanto, estes estimadores podem ser uma alternativa para estudos de modelos de regressão em que os parâmetros são altamente correlacionados, como, por exemplo, em curvas de crescimento, em que a taxa

de crescimento e o peso adulto são altamente e negativamente correlacionados, o que reflete em problemas de convergência quando se utiliza o método dos quadrados mínimos (Souza, 1998).

Na Tabela 13 nota-se que não houve grandes diferenças nos valores da raiz quadrada do EQM quando se assume uma matriz de covariância autorregressiva heterocedástica de primeira ordem. Neste caso, as diferentes variâncias e coeficientes de correlação assumidos para os parâmetros não influenciaram diretamente o comportamento do estimador Bayesiano, mostrando-se este robusto para estas determinadas situações de heterogeneidade.

5 CONCLUSÕES

Nas condições do presente estudo, e de acordo com os resultados obtidos, pode-se concluir que:

- a) A metodologia Bayesiana mostrou-se eficiente para estudar curvas de lactação de cabras da raça Saanen através do ajuste do modelo de Wood, pois produziu estimativas condizentes com a realidade e subsidiou um sistema de comparação adequado entre curvas de duas diferentes populações.
- b) A população de cabras de segunda lactação apresentou menor taxa de decréscimo da produção após o pico ($P < 0,05$) e maior persistência de lactação ($P < 0,05$) se comparada com aquela de primeira lactação.
- c) O estudo de simulação de dados indicou que a metodologia Bayesiana foi eficiente para estudar curvas de lactação quando a matriz de covariância entre os parâmetros do modelo de Wood apresenta estrutura autorregressiva de primeira ordem, AR(1), e autorregressiva de primeira ordem heterocedástica, ARH(1).

6 REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

ALI, T. E.; SCHAEFFER, L. R. Accounting for covariances among test days milk yield in dairy cows. *Canadian Journal of Animal Science*, Ottawa, v. 67, n. 3, p. 637-644, Sept. 1987.

ALVES NETO, F.; NASCIMENTO, J.; ARAÚJO, O.; JORDÃO, E.; FANG, I. Comportamento do rebanho da raça Jersey no serviço de controle leiteiro da Associação Paulista de Criadores de Bovinos. *Boletim de Industria Animal*, Nova Odessa, v. 23, p. 301-29, 1965.

BIANCHINI SOBRINHO, E. B. Estudo da curva de lactação de vacas da raça Gir. 1984. 87 p. Tese (Doutorado em Zootecnia) – Universidade de São Paulo, Ribeirão Preto-SP.

BRICKET Jr., R. *Melhoramento genético animal*. São Paulo: Editora da Universidade de São Paulo, 1967. 269 p.

BOX, G. E. P.; TIAO, G. C. *Bayesian inference in statistical analysis*. New York: John Wiley, 1973.

BROEMELING, L. D. *Bayesian analysis of linear models*. New York: M. Dekker, 1985. 454 p.

CANCIO, C. R. B.; CASTRO, S. R.; COELHO, L. A.; RANGEL, J. H. A.; OLIVEIRA, J. C. Idade ao primeiro parto, intervalo entre partos e produção leiteira de cabras Saanen, Marota e mestiças em Alagoas. *Pesquisa Agropecuária Brasileira*, Brasília, v. 27, n. 1, p. 53-59, jan. 1992.

CASELA, G.; BERGER, R. L. *Statistical inference*. Belmont: Wadsworth, 1990. 650 p.

CHANG, Y. M.; REKAYA, R.; GIANOLA, D.; THOMAS, D. L. Genetic variation of lactation curves in dairy sheep: a Bayesian analysis of Wood's function. *Livestock Production Science*, Amsterdam, v. 71, n. 2/3, p. 241-251, Oct. 2001.

CHAWLA, D. S.; BHATNAGAR, D. S. First 150 day lactation yield in different crossbred goats. *Indian Journal of Animal Science*, New Delhi, v. 54, n. 8, p. 822-824, Aug. 1984.

- CONGLETON, W. R.; EVERETT, R. W. Application of incomplete Gamma function to predict cumulative milk production. *Journal of Dairy Science*, Champaign, v. 63, n. 1, p. 109-119, Jan. 1980.
- COBUCCI, J. A.; EUCLYDES, R. F.; TEODORO, R. L.; VERNEQUE, R. S.; LOPES, P. S.; SILVA, M. A. Aspectos genéticos e ambientais da curva de lactação de vacas da raça Guzerá. *Revista da Sociedade Brasileira de Zootecnia*, Viçosa, v. 30, n. 4, p. 1204-1211, 2001.
- COOBY, J. M.; LE DU, Y. L. P. An fitting curves to lactation data. *Animal Production*, Edinburgh, v. 26, n. 2, p. 127-133, jul./ago. 1978.
- DEVENDRA, C.; McCLEROY, G. B. *Goat and Production in the Tropics*. Londres: Longman, 1983. 271 p.
- DURBIN, J.; WATSON, G. S. Testing for serial correlation in least square regression. *Biometrika*, London, v. 38, n. 1/2, p. 159-178, 1951.
- FERRIS, T. A.; MAO, I. L.; ANDERSON, C. R. Selecting for lactation curve and milk yield in dairy cattle. *Journal of Dairy Science*, Champaign, v. 68, n. 11, p. 1438-1448, Nov. 1985.
- GAMERMAN, D. Simulação estocástica via cadeias de Markov. In: SIMPÓSIO NACIONAL DE PROBABILIDADE E ESTATÍSTICA - SINAPE, 12., 1996, Caxambu, MG. Anais... Caxambu-MG: ABE, 1996. 196 p.
- GELFAND, A. E.; HILLS, S. E.; RACINE-POON, A.; SMITH, A. E. M. Illustration of Bayesian inference in normal data models using Gibbs sampling. *Journal of the American Statistical Association*, Alexandria, v. 85, n. 410, p. 972-985, June 1990.
- GELMAN, A.; CARLIN, J. B.; STERN, H. S.; RUBIN, D. B. *Bayesian data analysis*. London: Chapman Hall, 1997. 526 p.
- GELMAN, A.; RUBIN, D. B. Inference from iterative simulation using multiple sequence. *Statistical Science*, Hayward, v. 7, n. 4, p. 457-511, Nov. 1992.
- GEMAN, S.; GEMAN, D. Stochastic relaxation, Gibbs distributions and the Bayesian restoration of images. *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, Washington, v. 6, n. 6, p. 721-741.

GINÉ, G. A. F.; GONÇALVES, T. M.; OLIVEIRA, A. I. G. de; FREITAS, R. T. F. de. Estudo da curva de lactação de cabras Saanen. In: CONGRESSO DE INICIAÇÃO CIENTÍFICA DA UFLA - CICESAL, 12.; SEMINÁRIO DE AVALIAÇÃO DO PIBIC/CNPq, 7.; SEMINÁRIO DE AVALIAÇÃO DO PBIICT/ FAPEMIG, 2., 1999, Lavras. Resumos... Lavras-MG, 1999. p. 159.

GIPSON, G. S.; GROSSMAN, M. Diphasic analysis os lactation curves in dairy goats. *Journal of Dairy Science*, Champaign, v. 72, n. 11, p. 1035-1044, Nov. 1989.

GONÇALVES, H. C. **Fatores genéticos e de meio em algumas características produtivas e reprodutivas de caprinos.** 1996. 141 p. Tese (Doutorado em Zootecnia) – Universidade Federal de Viçosa, Viçosa, MG.

GOODALL, A. E.; SPREVAK, D. A Bayesian estimation of lactation curve of dairy cow. *Animal Production*, Edinburgh, v. 40, n. 2, p. 189-193, Apr. 1985.

GOODALL, A. E.; SPREVAK, D. A note on a stochastic model to describe the milk yield of a dairy cow. *Animal Production*, Edinburgh, v. 38, n. 1, p. 133-136, Feb. 1984.

GROENEWALD, P. C. N.; FERREIRA, A. V.; van der MERWE, H. J.; SLIPPERS, S. C. Application of Bayesian inference in the comparison of lactation curves of Merino ewes. *Animal Science*, London, v. 62, n. 1, p. 63-69, Feb. 1996.

GROENEWALD, P. C. N.; FERREIRA, A. V.; van der MERWE, H. J.; SLIPPERS, S. C. A mathematical model for describing and predicting the lactation curve of Merino ewes. *Animal Science*, London, v. 61, n. 1, p. 95-101, Aug. 1995.

GROENEWALD, P. C. N.; VILJOEN, C. S. A Bayesian model for analysis of lactation curves of dairy goats. *Journal of Agricultural, Biological and Environmental Statistics*, Washiungton, v. 8, n. 1, p. 75-83, Mar. 2003.

GROSSMAN, M.; KOOPS, W. Multiphasic analysis of lactation curves in dairy cattle. *Journal of Dairy Science*, Champaign, v. 71, n. 6, p. 1598-1608, June 1988.

JAMROZIK, J.; GIANOLA, D.; SCHAEFFER, L. R. Bayesian estimation of genetic parameters for test day records in dairy cattle using linear hierarchical

models. *Livestock Production Science*, Amsterdam, v. 71, n. 2/3, p. 223-240, Oct. 2001.

JEFFREYS, H. *Theory of probability*. Oxford: Clarendon Press, 1961. 325 p.

LINDLEY, D.; SMITH, A. F. M. Bayesian estimates of linear model, *Journal of the Royal Statistical Society - Series B*, London, v. 34, n. 1, p. 1-42, 1972.

LOPES, M. A. Estudo da curva de lactação de um rebanho Holandês variedade preto e branco mantido em um sistema intensivo de produção. 1994. 87 p. Dissertação (Mestrado em Zootecnia) – Universidade Federal de Lavras, Lavras, MG.

MENDOZA, M. A Bayesian analysis of the slope ratio bioassay. *Biometrics*, Alexandria, v. 46, n. 4, p. 1059-1069, Dec. 1990.

MILANI, L. L. *Análise Bayesiana do modelo de intervenção com erro ARMA*. 2000. 72 p. Dissertação (Mestrado em Estatística e Experimentação Agropecuária) – Universidade Federal de Lavras, Lavras, MG.

MORANT, S. V.; GNANASAKTHY, A. A new approach to the mathematical formulation of lactation curves. *Animal Production*, Edinburgh, v. 49, n. 2, p. 151-162, Oct. 1989.

MOURAD, M. Effects of month of kidding, parity and litter size on milk yield of Alpine goats in Egypt. *Small Ruminant Research*, Edinburgh, v. 8, n. 1/2, p. 41-46, July 1992.

O'HAGAN, A. *Kendall's advanced theory of statistics: bayesian inference*. Edward Arnold, 1994. v. 2b

RACINE-POON, A. 1985. A Bayesian approach to nonlinear random effects models. *Biometrics*, Alexandria, v. 41, n. 4, p. 1015-1023, Dec. 1985.

REKAYA, R.; CARABÃO, M. J.; TORO, M. A. Bayesian analysis of lactation curves of Holstein-Friesian cattle using a nonlinear model. *Journal of Dairy Science*, Champaign, v. 83, n. 11, p. 2691-2701, Nov. 2000.

ROSA, G. J. M. *Análise Bayesiana de modelos lineares mistos robustos via Amostrador de Gibbs*. 1998. 57 p. Tese (Doutorado em Estatística e Experimentação Agrônômica) – Universidade de São Paulo, Piracicaba, SP.

ROSA, G. J. M. Introdução à inferência Bayesiana: aplicação em genética e melhoramento. In: CONGRESSO DA PÓS-GRADUAÇÃO DA UFLA, 10., 2001, Lavras, MG. *Anais...* Lavras: UFLA, 2001. 90 p.

SAS INSTITUTE SAS / STAT. SAS/IML software: usage and reference, version 6. Cary, 1990. 501 p.

SHANKS, R. D.; BERGER, P. J.; FREEMAN, A. E.; DICKSON, F. N. Genetics aspects of lactation curve. *Journal of Dairy Science*, Champaign, v. 64, n. 9, p. 1852-1860, Sept. 1981.

SHIMIZU, H.; UMROD, S. An application of weight regression procedure for constructing the lactation curve in dairy cattle. *Japanese Journal of Zootechnical Science*, Tokyo, v. 47, p. 733, 1976.

SILVA, N. M. A.; AQUINO, L. H. de; MUNIZ, J. A.; SÁFADI, T.; SILVA, F. F. e. Análise Bayesiana de um modelo de crescimento linear em novilhas Holandesas. In: SIMPOSIO DE ESTATISTICA APLICADA A EXPERIMENTAÇÃO AGRONÔMICA - SEAGRO, 10.; REUNIAO ANUA DA REGIAO BRASILEIRA DA SOCIEDADE INTERNACIONAL DE BIOMETRIA - RBRAS, 48., 2003, Lavras. 2003.

SORENSEN, D. *Gibbs Sampling in quantitative genetic*. Copenhagen: Foulun, 1996. 186 p.

SOUZA, G. da S. e. *Introdução aos modelos de regressão linear e não linear*. Brasília: EMBRAPA-SEA, 1998. 505 p.

SOUZA NETO, J. de; COX, M.; SOUZA, F. B. de; ARRUDA, F. A. V. Modelo de Wood aplicado à curva de lactação de caprinos no estado do Ceará. In: REUNIÃO DA SOCIEDADE BRASILEIRA DE ZOOTECNIA, 35., 1998, Botucatu – SP. *Anais...* Botucatu: SBZ, 1998.

VARONA, L.; MORENO, C.; CORTÉS GARCIA, L. A.; ALTARRIBA, J. Bayesian analysis of Wood's lactation curve for Spanish dairy cows. *Journal of Dairy Science*, Champaign, v. 60, n. 5, p. 1469-1478, May 1998.

VARONA, L.; MORENO, C.; CORTÉS GARCIA, G.; YAGUE, L. A.; ALTARRIBA, J. Two-step versus joint analysis of Von Bertalanffy function. *Journal of Animal Breeding Genetics*, Berlin, v. 116, n. 5, p. 331-338, Oct. 1999.

WAKEFIELD, J. C.; SMITH, A. F. M.; RACINE-POON, A.; GELFAND, A. E. Bayesian analysis of linear and non-linear population models by using the Gibbs Sampler. **Journal of Applied Royal Statistics, Serie C, Abingdon, v. 43, n. 1, p. 201-221, 1994.**

WOOD, P. D. P. Algebraic model of the lactation curve in cattle. **Nature, London, v. 216, n. 5111, p. 164-165, Oct. 1967.**

ANEXOS A

- FIGURA 1 A** -Representação gráfica da convergência de α nas populações de cabras de primeira e segunda lactação, respectivamente.....57
- FIGURA 2 A** -Representação gráfica da convergência de β nas populações de cabras de primeira e segunda lactação, respectivamente.57
- FIGURA 3 A** -Representação gráfica da convergência de γ nas populações de cabras de primeira e segunda lactação, respectivamente.58
- FIGURA 4 A** -Representação gráfica da convergência de η nas populações de cabras de primeira e segunda lactação, respectivamente.....58
- FIGURA 5 A** -Representação gráfica da convergência de τ nas populações de cabras de primeira e segunda lactação, respectivamente.....59
- FIGURA 6 A** -Representação gráfica da convergência de ϕ nas populações de cabras de primeira e segunda lactação, respectivamente.....59
- FIGURA 7 A** -Representação gráfica da convergência de φ nas populações de cabras de primeira e segunda lactação, respectivamente..... 60
- FIGURA 8 A** -Representação gráfica da convergência de σ^2 nas populações de cabras de primeira e segunda lactação, respectivamente.....60

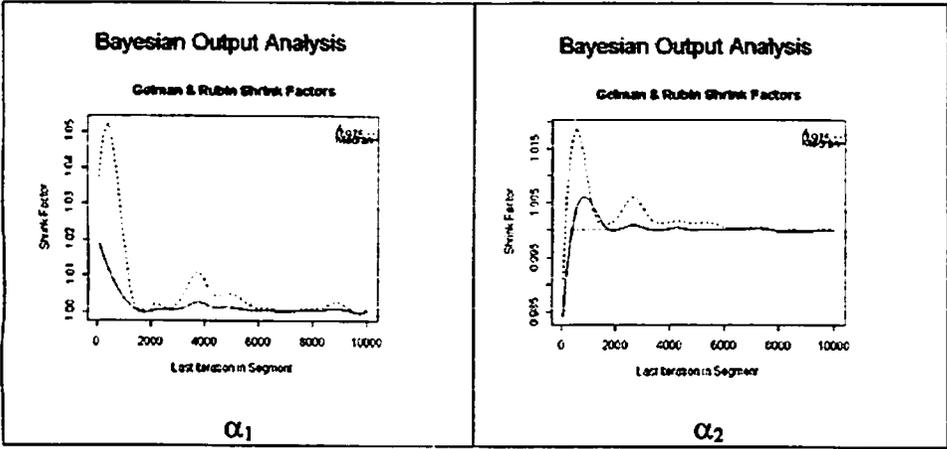


FIGURA 1 A. Representação gráfica da convergência de α nas populações de cabras de primeira e segunda lactação, respectivamente.

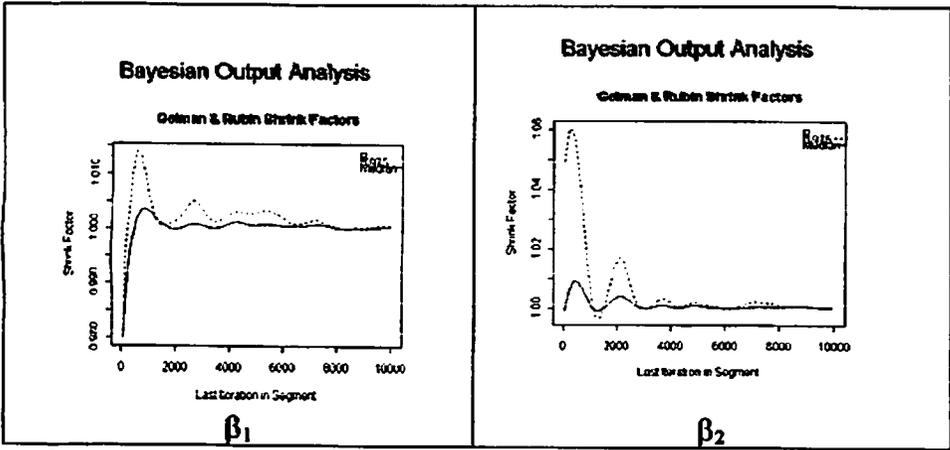


FIGURA 2 A. Representação gráfica da convergência de β nas populações de cabras de primeira e segunda lactação, respectivamente.

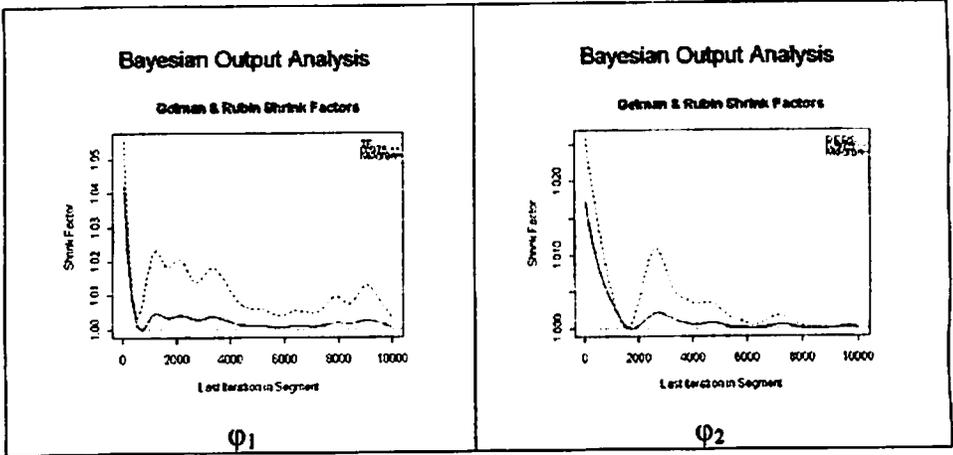


FIGURA 7 A. Representação gráfica da convergência de ϕ nas populações de cabras de primeira e segunda lactação, respectivamente.

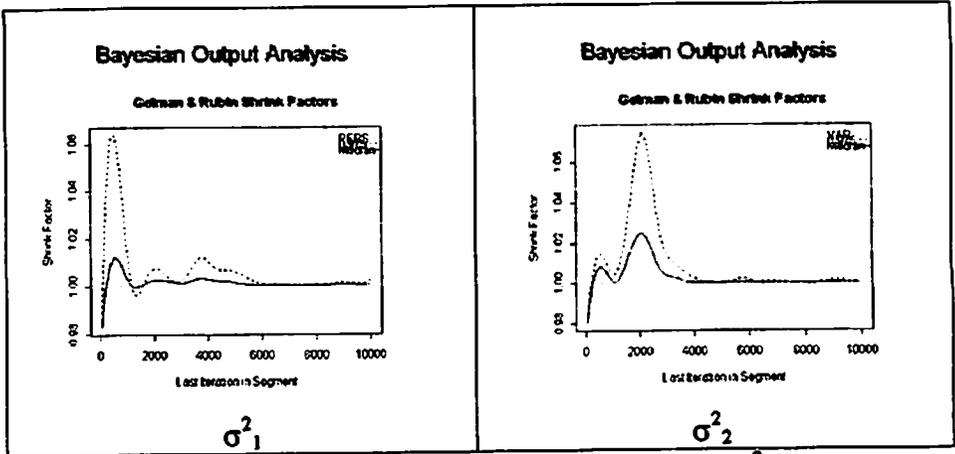


FIGURA 8 A. Representação gráfica da convergência de σ^2 nas populações de cabras de primeira e segunda lactação, respectivamente.

ANEXOS B

- FIGURA 1 B** - Autocorrelograma para os valores da distribuição marginal a *posteriori* de α para as populações 1 e 2, respectivamente....62
- FIGURA 2 B** - Autocorrelograma para os valores da distribuição marginal a *posteriori* de β para as populações 1 e 2, respectivamente....62
- FIGURA 3 B** - Autocorrelograma para os valores da distribuição marginal a *posteriori* de γ para as populações 1 e 2, respectivamente.....62
- FIGURA 4 B** - Autocorrelograma para os valores da distribuição marginal a *posteriori* de η para as populações 1 e 2, respectivamente....63
- FIGURA 5 B** - Autocorrelograma para os valores da distribuição marginal a *posteriori* de τ para as populações 1 e 2, respectivamente.....63
- FIGURA 6 B** - Autocorrelograma para os valores da distribuição marginal a *posteriori* de ϕ para as populações 1 e 2, respectivamente....63
- FIGURA 7 B** - Autocorrelograma para os valores da distribuição marginal a *posteriori* de φ para as populações 1 e 2, respectivamente.....64
- FIGURA 8 B** - Autocorrelograma para os valores da distribuição marginal a *posteriori* de σ^2 para as populações 1 e 2, respectivamente....64

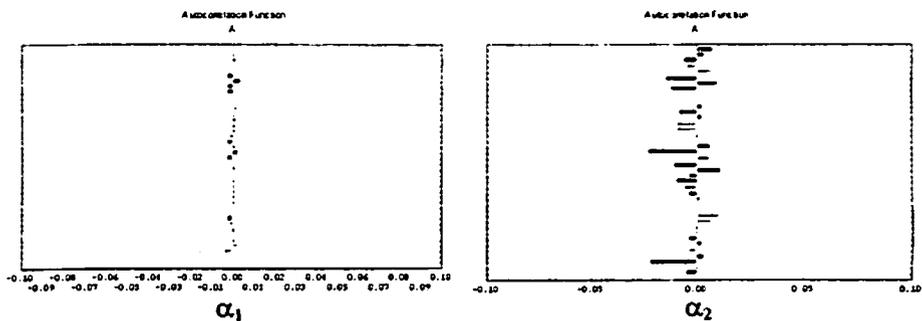


FIGURA 1 B. Autocorrelograma para os valores da distribuição marginal α *posteriori* de α para as populações 1 e 2, respectivamente.

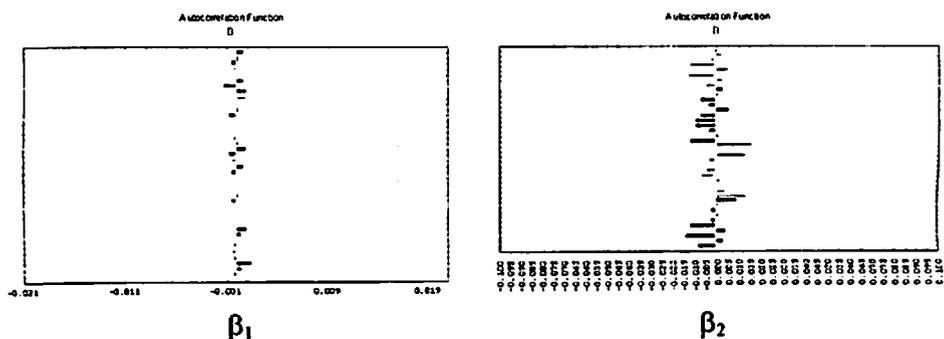


FIGURA 2 B. Autocorrelograma para os valores da distribuição marginal α *posteriori* de β para as populações 1 e 2, respectivamente.

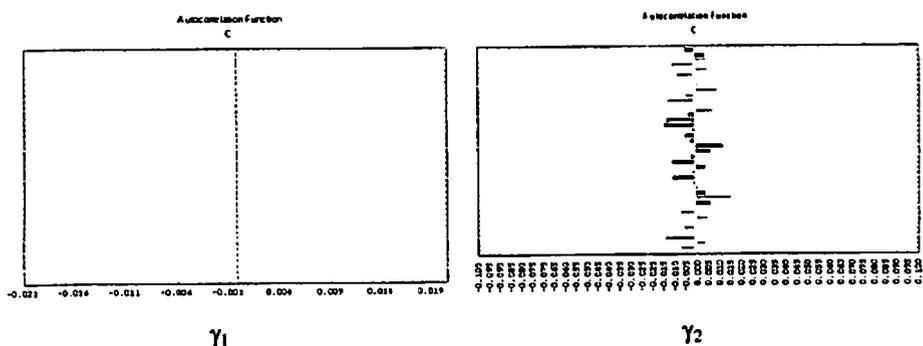


FIGURA 3 B. Autocorrelograma para os valores da distribuição marginal α *posteriori* de γ para as populações 1 e 2, respectivamente.

FIGURA 6 B. Autocorrelograma para os valores da distribuição marginal α *posteriori* de ϕ para as populações 1 e 2, respectivamente.

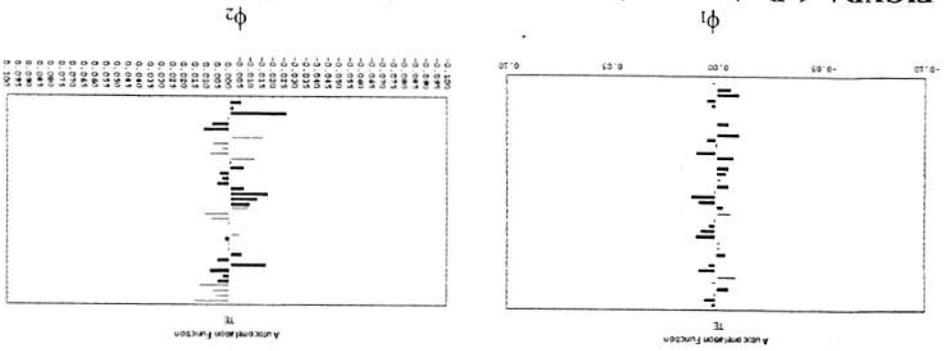


FIGURA 5 B. Autocorrelograma para os valores da distribuição marginal α *posteriori* de τ para as populações 1 e 2, respectivamente.

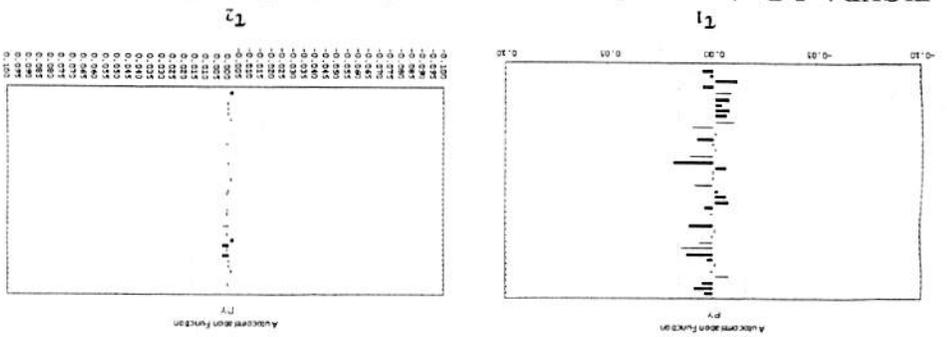
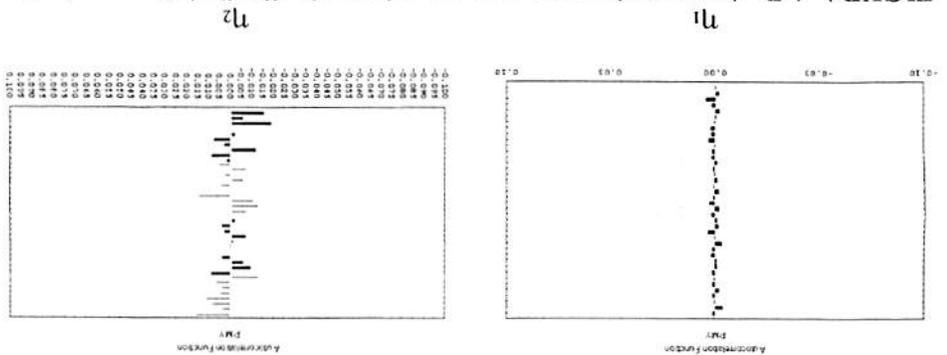
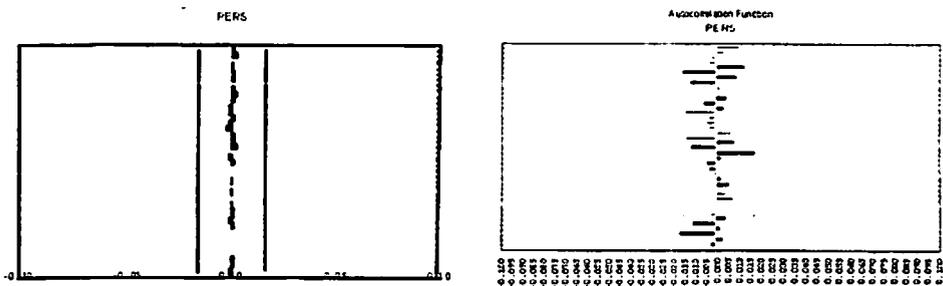


FIGURA 4 B. Autocorrelograma para os valores da distribuição marginal α *posteriori* de η para as populações 1 e 2, respectivamente.

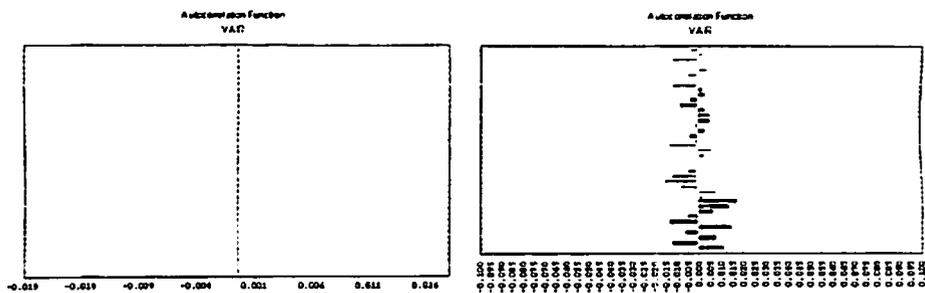




ϕ_1

ϕ_2

FIGURA 7 B. Autocorrelograma para os valores da distribuição marginal *a posteriori* de ϕ para as populações 1 e 2, respectivamente.



σ^2_1

σ^2_2

FIGURA 8 B. Autocorrelograma para os valores da distribuição marginal *a posteriori* de σ^2 para as populações 1 e 2, respectivamente.

