



ANA PAULA COELHO MADEIRA SILVA

**PROPRIEDADES DAS DISTRIBUIÇÕES
BIVARIADAS DE CROVELLI, GUMBEL
TIPO I E GAMA BETA TIPO II, COM UMA
APLICAÇÃO A DADOS DE PRECIPITAÇÃO
PLUVIOMÉTRICA**

LAVRAS-MG

2011

ANA PAULA COELHO MADEIRA SILVA

**PROPRIEDADES DAS DISTRIBUIÇÕES BIVARIADAS DE CROVELLI,
GUMBEL TIPO I E GAMA BETA TIPO II, COM UMA APLICAÇÃO A
DADOS DE PRECIPITAÇÃO PLUVIOMÉTRICA**

Tese apresentada à Universidade Federal de Lavras,
como parte das exigências do Programa de Pós-
Graduação em Estatística e Experimentação Agro-
pecuária, área de concentração em Estatística e Ex-
perimentação Agropecuária, para a obtenção do tí-
tulo de Doutor.

Orientador
Dr. Lucas Monteiro Chaves

**LAVRAS-MG
2011**

**Ficha Catalográfica Preparada pela Divisão de Processos Técnicos da
Biblioteca da UFLA**

Silva, Ana Paula Coelho Madeira.

Propriedades das distribuições bivariadas de Crovelli, Gumbel tipo I e gama beta tipo II, com uma aplicação a dados de precipitação pluviométrica / Ana Paula Coelho Madeira Silva. – Lavras : UFLA, 2011.

114 p. : il.

Tese (doutorado) – Universidade Federal de Lavras, 2011.

Orientador: Lucas Monteiro Chaves.

Bibliografia.

1. Gama bivariada de Crovelli. 2. Exponencial bivariada Gumbel tipo I. 3. Distribuição bivariada Gama beta II. 4. Combinação de variáveis aleatórias. I. Universidade Federal de Lavras. II. Título.

CDD – 519.24

ANA PAULA COELHO MADEIRA SILVA

**PROPRIEDADES DAS DISTRIBUIÇÕES BIVARIADAS DE CROVELLI,
GUMBEL TIPO I E GAMA BETA TIPO II, COM UMA APLICAÇÃO A
DADOS DE PRECIPITAÇÃO PLUVIOMÉTRICA**

Tese apresentada à Universidade Federal de Lavras,
como parte das exigências do Programa de Pós-
Graduação em Estatística e Experimentação Agro-
pecuária, área de concentração em Estatística e Ex-
perimentação Agropecuária, para a obtenção do tí-
tulo de Doutor.

APROVADA em 31 de Agosto de 2011.

Dr. Denismar Alves Nogueira	UNIFAL
Dr. Fabyano Fonseca e Silva	UFV
Dr. João Domingos Scalon	UFLA
Dr. Renato Ribeiro de Lima	UFLA

Dr. Lucas Monteiro Chaves
Orientador

LAVRAS-MG

2011

A Deus, luz da minha vida,
Aos meus amados pais, Sebastião (*in memoriam*) e Marlene,
Aos meus queridos irmãos, Luiz Gustavo, Luiza e Antônio César,
Ao meu esposo, Valdevino Júnior e minha amada filha Ana Luiza,
Dedico.

AGRADECIMENTOS

A Deus, razão de tudo o que somos e fazemos.

À Universidade Federal de Lavras (UFLA), em especial ao Departamento de Ciências exatas (DEX), berço de grandes profissionais que contribuíram imensamente em minha formação.

À Fundação de Amparo à Pesquisa do Estado de Minas Gerais (FAPEMIG) e à Coordenação e Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (CAPES), pelo apoio financeiro.

Ao meu orientador, Dr. Lucas Monteiro Chaves, pela oportunidade, valiosos ensinamentos e convivência amiga.

Aos professores, Devanil e Fredy pelo apoio, incentivo e contribuições.

A todos os funcionários do DEX, pelos serviços prestados, em especial à Josi, Selminha e Edila.

Ao membros da banca examinadora, pelas críticas e sugestões que tanto contribuíram para o engrandecimento deste trabalho.

Ao meu pai que embora não esteja mais presente, sinto sempre a sua presença e felicidade na realização deste sonho. À minha mãe pelo exemplo de vida, força, incentivo e dedicação.

Aos meus queridos irmãos, Luiz Gustavo, Luiza e Antônio César pela amizade, carinho e incentivo.

Ao meu amado esposo, pelo amor, incentivo, apoio incondicional, companheirismo e suporte emocional, além dos sacrifícios e concessões.

À minha linda filha, Ana Luiza, sentido de minha vida, motivo de minhas alegrias, obrigada por seu amor.

Aos amigos, Ana Lúcia, Augusto, Edcarlos, Leandro, Moysés, Paulo, Tania, Fernanda, Adriana, Luzia, Danielle, pelo companheirismo, amizade e momentos de alegria.

Ao amigo Jailson, pelas longas horas de estudo e amizade.

Enfim, a todos que contribuíram, direta ou indiretamente, meus eternos agradecimentos.

Ana Paula Coelho Madeira Silva

RESUMO

Diferentes distribuições bivariadas de probabilidade têm sido propostas para estudar o comportamento conjunto de duas grandezas aleatórias de interesse, bem como combinações dessas, como soma, produto e quociente. Em particular tal abordagem têm sido amplamente utilizada em hidrologia, em que as grandezas de interesse são X período de chuva e Y período contíguos sem ocorrência de chuva. Neste trabalho, são deduzidas e apresentadas algumas propriedades dos modelos gama bivariado de Crovelli e exponencial bivariado Gumbel tipo I bem como as propriedades da soma produto e quociente, ainda não descritas na literatura especializada. Também é apresentada uma nova distribuição bivariada denominada gama beta tipo II. Como aplicação, são realizados ajustes dessas distribuições a dados de precipitação pluviométrica. Os resultados obtidos indicam a viabilidade dos modelos gama bivariado de Crovelli e gama beta tipo II.

Palavras-chave: Gama bivariada de Crovelli, Exponencial bivariada Gumbel tipo I, Distribuição bivariada Gama beta II, combinação de variáveis aleatórias, precipitação pluviométrica

ABSTRACT

One can find a lot of bivariate probability distributions when studying the pooled behavior of two random variables, as well as their sum, product or difference. In particular, such approach had been extensively used in hydrology, where the target variables are the run period and the inter consecutive runs period. In this work we deduce properties for the Crovelli bivariate gamma model and the Gumbel Type *I* bivariate exponential model, as well as their sum, product and difference. Those properties are not described in specialized literature. We also introduce a new bivariate distribution, which we called gamma beta *II*. As an application, we fitted these three distributions to rain precipitation data. The results show acceptable behavior of those models.

Keywords: Crovelli's bivariate gamma; Gumbel's type I bivariate exponential; Gama beta II bivariate distribution; random variables combination; rain precipitation

LISTA DE FIGURAS

Figura 1	Seca na Amazônia, 2010 - A pior dos últimos cem anos	17
Figura 2	Enchente em Itajaí - Santa Catarina 2010	17
Figura 3	Distribuição beta tipo II	28
Figura 4	Representação da propriedade (i)	45
Figura 5	Representação da propriedade (ii)	45
Figura 6	Precipitação mensal de julho a dezembro de 2009	49
Figura 7	Precipitação mensal do ano 2010	49
Figura 8	Precipitação mensal janeiro a julho de 2011	50
Figura 9	Região de integração.	55
Figura 10	Superfície Crovelli, $\alpha = 2, 5; \beta = 1, 3$	61
Figura 11	Gráfico da fdp de $U = X + Y$	69
Figura 12	Gráfico da fdp de $P = XY$	70
Figura 13	Gráfico da fdp de $Q = X/(X + Y)$	72
Figura 14	Superfície Gumbel tipo I, $\theta = 0, 9$	79
Figura 15	Gráfico da distribuição de $U = X + Y$	82
Figura 16	Gráfico da distribuição de $P = XY$	83
Figura 17	Gráfico da distribuição de $Q = X/(X + Y)$	85
Figura 18	Superfície gama beta II	91
Figura 19	Distribuição ajustada para X e Y , modelo Gumbel	100
Figura 20	Gráfico de probabilidade observada <i>versus</i> probabilidade esperada para X e Y , modelo Gumbel	101
Figura 21	Distribuição ajustada para X considerando os modelos Crovelli (a) e Gama beta tipo II (b)	102
Figura 22	Gráfico de probabilidade observada <i>versus</i> probabilidade esperada para X considerando os modelos Crovelli (a) e Gama beta tipo II (b)	103
Figura 23	Distribuição ajustada para Y considerando os modelos Crovelli (a) e Gama beta tipo II (b)	104
Figura 24	Gráfico de probabilidade observada <i>versus</i> probabilidade esperada para Y considerando os modelos Crovelli (a) e Gama beta tipo II (b)	104
Figura 25	Distribuição ajustada para U considerando os modelos Crovelli (a) e Gama beta tipo II (b)	105
Figura 26	Gráfico de probabilidade observada <i>versus</i> probabilidade esperada para U considerando os modelos Crovelli (a) e Gama beta tipo II (b)	106

LISTA DE TABELAS

Tabela 1	Categorias do Índice de Severidade de Seca de Palmer.	19
Tabela 2	Categorias do Índice Padronizado de Precipitação.	20
Tabela 3	Estatísticas descritivas	51
Tabela 4	Estimativas dos parâmetros dos modelos	100
Tabela 5	Distribuição do número de dias com precipitação	102
Tabela 6	Distribuição do número de dias sem precipitação	103
Tabela 7	Distribuição do período climático	105
Tabela 8	Dados diários de precipitação pluviométrica - Passo Fundo RS .	113

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	14
2	REFERENCIAL TEÓRICO	16
2.1	Dias secos e dias chuvosos	16
2.1.1	Índices para a quantificação hídrica	18
2.2	Funções especiais	21
2.3	Distribuição beta do tipo II	26
2.4	Modelos de probabilidade univariados	28
2.5	Modelos de probabilidade bivariados no estudo de processos hidrológicos	30
2.5.1	Distribuição gama bivariada de Mckay	31
2.5.2	Distribuição gama bivariada de Kibble	33
2.5.3	Distribuição gama bivariada de Izawa	33
2.5.4	Distribuição gama bivariada de Moran	33
2.5.5	Distribuição gama bivariada de Cherian	34
2.5.6	Distribuição gama bivariada de Smith, Aldelfang e Tubbs	34
2.5.7	Distribuição gama bivariada de Loáiciga e Leipnik	35
2.5.8	Distribuição gama bivariada de Crovelli	36
2.5.9	Distribuição exponencial bivariada Gumbel tipo I	37
2.6	Construindo distribuições bivariadas	37
2.6.1	Transformação de variáveis	37
2.6.2	Método da transformação marginal	40
2.6.3	Variáveis em comum e técnicas de redução trivariada	41
2.6.4	Mistura de distribuições	43
2.6.5	Cópulas	44
3	METODOLOGIA	48
3.1	Modelos	48
3.2	Implementação computacional	48
3.3	Dados reais	49
3.4	Estimação	51
3.5	Ajuste	53
4	RESULTADOS E DISCUSSÃO	55
4.1	Distribuição Gama Bivariada de Crovelli	55
4.1.1	Distribuições condicionais, covariância e correlação	61
4.1.2	Funções Densidades de Probabilidade	66
4.1.3	Funções de Distribuição Acumulada	72

4.1.4	Quantis	75
4.1.5	Momentos	75
4.2	Distribuição Bivariada Gumbel tipo I	79
4.2.1	Funções Densidades de Probabilidade	80
4.2.2	Momentos	85
4.3	Distribuição Bivariada Gama Beta II	91
4.3.1	Funções Densidade de Probabilidade	95
4.3.2	Momentos	97
4.3.3	Estimação	98
4.4	Aplicação	100
5	Conclusão	107
	REFERÊNCIAS	108
	ANEXOS	112

APRESENTAÇÃO

Esta tese faz parte da Linha de Pesquisa Teoria de Métodos Estatísticos , do Grupo de Pesquisa em Planejamento e Análise de Experimentos, do Departamento de Ciências Exatas (DEX), da Universidade Federal de Lavras (UFLA), cadastrado e certificado na base de grupos de pesquisa do CNPq. Está inserida no projeto Seguro Agrícola: Modelagem Estatística e Precificação, do Programa Nacional de Cooperação Acadêmica (PROCAD/CAPES), que envolve as seguintes instituições federais de ensino superior: ESALQ/USP, IME/USP, UFLA e UFMG.

1 INTRODUÇÃO

Alguns dos principais desafios que o mundo, em particular o Brasil, deverá enfrentar nas próximas décadas estão relacionados com o aproveitamento e controle dos recursos hídricos. A importância dos recursos hídricos em qualquer processo de desenvolvimento sócio-econômico é inquestionável pois a água, além de cumprir o seu papel natural de abastecimento para a satisfação das necessidades humanas, animais, vegetais e produtivas, serve indevidamente como veículo para os despejos de efluentes urbanos, industriais, agrícolas e extractivos.

Em se tratando de recursos hídricos, a precipitação é de fundamental interesse. A precipitação pluviométrica é um dos elementos do clima que apresenta alta variabilidade temporal e espacial, e sua ocorrência em excessos, ou em déficit, geralmente causam prejuízos à produção agrícola bem como transtornos à população em geral.

A insuficiência de precipitação pluviométrica ocasiona o fenômeno climático conhecido como seca. A seca afeta grandes regiões durante meses ou anos, tendo um impacto sobre a produção de alimentos, reduzindo a expectativa de vida e o desempenho econômico de grandes regiões. Ela se manifesta com intensidades diferentes, dependendo do índice de precipitações pluviométricas.

O déficit ou o excesso de chuva numa determinada região compromete a atividade agrícola, pois as plantações são susceptíveis a fenômenos climáticos adversos, como tromba d'água, ventos fortes, granizo, geada, chuvas excessivas, seca e inundação. Desse modo, essa atividade torna-se de alto risco e o seguro agrícola surge como um mecanismo para reduzir o risco de produção no agronegócio. Para quantificar o risco associado à atividade agrícola é necessário entender e prever adequadamente a ocorrência de fenômenos climáticos adversos, em particular a seca. Portanto é necessário o uso de metodologias matemáticas, estatísticas e computacionais para modelar esse fenômeno.

Existem em todas as partes do mundo, um esforço institucional e pessoal muito grande no sentido de quantificar, bem como prever a ocorrência de chuvas, ou ocorrência de secas, nos mais variados locais.

Diferentes índices de quantificação hídrica são encontrados na literatura. Esses

índices são baseados na equação do balanço hídrico e têm por objetivo detectar o início e o fim de um período chuvoso e/ou o início e o fim de um período de seca. Com base nas informações geradas por esses índices, vários modelos probabilísticos univariados têm sido utilizados para descrever o comportamento das variáveis X : período de chuva (ou seca) e Y : período sem ocorrência de chuva (ou seca). Dentre os modelos mais utilizados destaca-se a distribuição gama. Muitos estudos apontam que essa distribuição modela com sucesso as variáveis X e Y .

Os modelos univariados explicam o comportamento marginal das variáveis X e Y , não levando em conta a correlação, que de fato existe, entre essas variáveis. Neste contexto, é necessário o uso de modelos bivariados que contemplem essa correlação. Os trabalhos desenvolvidos por Izawa (1965) impulsionaram o uso da distribuição gama bivariada na análise de processos hidrológicos.

Considerando que X e Y se distribuem segundo um modelo bivariado, funções dessas variáveis aleatórias, expressas por $U = X + Y$, $P = XY$ e $Q = X/(X + Y)$, têm um significado físico importante de modo que diferentes autores têm trabalhado no sentido de caracterizar essas distribuições e aplicá-las em diferentes áreas do conhecimento, em particular em hidrologia (NADARAJAH, 2008; NADARAJAH; KOTZ, 2006).

Diante do exposto, o presente trabalho tem como objetivo apresentar algumas propriedades dos modelos bivariados gama de Crovelli e exponencial Gumbel tipo I bem como deduzir a distribuição exata das variáveis $U = X + Y$, $P = XY$ e $Q = \frac{X}{X + Y}$ sob esses modelos. Além disso, propõe-se um novo modelo, ainda não estudado na literatura especializada, denominado modelo bivariado gama beta tipo II. Este modelo corresponde a uma variação da distribuição gama bivariada de Arnould, (BALAKRISHNAN; LAI, 2009). Uma aplicação desses modelos é apresentada, utilizando-se dados de precipitação pluviométrica do município de Passo Fundo, RS.

2 REFERENCIAL TEÓRICO

2.1 Dias secos e dias chuvosos

A precipitação pluviométrica (ou chuva) é um dos elementos meteorológicos que exerce mais influência sobre as condições ambientais. Além do seu efeito direto sobre o balanço hídrico, ela influencia indiretamente outras variáveis, como a temperatura do ar e do solo, a umidade do ar e a radiação solar, que são fatores básicos para o crescimento e desenvolvimento dos seres vivos. O balanço hídrico de Thornthwaite e Mather (1955) é um instrumento agrometeorológico útil e prático para caracterizar o fator umidade do clima, que considera duas curvas, uma associada à marcha da precipitação mensal e outra relacionada à evapotranspiração potencial, equivalendo à precipitação ideal no período, num cenário em que não há sobra nem falta de água no solo para uso das plantas.

Uma das preocupações quanto às chuvas é a intensidade e a frequência de suas ocorrências, como também sua ocorrência em excessos ou em déficit. O excesso de precipitação pluviométrica em uma determinada região gera transtornos à população em geral, deixando as pessoas desalojadas, desabrigadas e enfermas, causando prejuízo à produção agrícola e em outros setores da economia.

As chuvas de alta intensidade e elevada frequência que atingiram determinados estados no Brasil neste ano deixaram muitos municípios em situação crítica. Em particular as chuvas ocorridas na região serrana do Rio de Janeiro em janeiro de 2011, trouxeram enchentes, deslizamentos de terra ocasionando muitas mortes e grandes prejuízos para a população.

O déficit de precipitação pluviométrica ocasiona o fenômeno seca . A seca é causada pela insuficiência de precipitação pluviométrica numa determinada região por um período prolongado de tempo, geralmente por uma temporada ou mais. É um complexo processo físico e social de amplo impacto. Ela afeta vastas regiões durante meses ou anos, tendo um impacto sobre a produção de alimentos, reduzindo a expectativa de vida e o desempenho econômico de grandes regiões ou de países inteiros.

No Brasil, a seca atinge principalmente a região Nordeste, entre outras regiões,

gerando dificuldades sociais para as pessoas que habitam a região. As consequências mais evidentes das grandes secas são a fome, a desnutrição, a miséria e a migração para os centros urbanos (êxodo rural).

As Figuras 1 e 2 ilustram cenários antagônicos causados pelo déficit e pelo excesso de precipitação pluviométrica.



Figura 1 Seca na Amazônia, 2010 - A pior dos últimos cem anos



Figura 2 Enchente em Itajaí - Santa Catarina 2010

Embora seja tema de muitos estudos, não existe, segundo Mckee, Doesken e Kleist (1993) uma definição de seca válida para qualquer região, em qualquer época e ainda adequada a todas as ramificações das sociedades humanas. No entanto, todos os estudos relacionam as secas com situações de escassez de água, resultado de precipitação insuficiente, evapotranspiração elevada e exploração irregular dos recursos hídricos.

Segundo Wilhite e Glantz(1987, citados por BLAIN, 2005), pesquisadores, políticos, agricultores, ou cidadãos comuns, têm percepções diferentes do fenômeno

seca. Até mesmo dentro de cada um desses grupos, há diferenças significativas no entendimento dessa anomalia climática. Um meteorologista, ou um sociólogo, por exemplo, vêem a seca como problemas distintos. O primeiro está preocupado com a previsão ou explicação das causas dessa anomalia ou ainda em descrever a magnitude do déficit de precipitação ocorrido, ao passo que o segundo está mais interessado nos efeitos dessa deficiência nas pessoas ou nas instituições.

Segundo Heim Júnior (2002) o grande número de setores afetados pela seca, sua diversidade geográfica, sua distribuição temporal e a demanda provocada pela ação humana tornam difícil o desenvolvimento de uma definição universal desse evento. Tal confusão na definição desse fenômeno natural, pode resultar em uma falta de entendimento das reais implicações sociais de uma seca, tornando ineficazes as medidas de combate a essa anomalia climática.

Palmer (1965) considera seca como o intervalo de tempo, geralmente da ordem de meses ou até mesmo de anos, durante o qual a precipitação diminui consideravelmente em relação ao valor climatologicamente esperado ou apropriado. Tal fenômeno pode ocorrer tanto em áreas úmidas ou áridas.

As definições de seca atualmente mais aceitas pelas comunidades meteorológicas internacionais são: um déficit prolongado de precipitação, um déficit de precipitação que resulta em uma baixa disponibilidade hídrica para a atividade que a requer, ou ainda um período anormal seco, suficientemente longo para que a falta de precipitação cause um desequilíbrio hidrológico

2.1.1 Índices para a quantificação hídrica

Um fenômeno de difícil modelagem estatística é o estudo do tempo de períodos de chuva e períodos de seca em uma determinada região. Devido à complexidade desse fenômeno natural, nenhum índice em particular, tem sido capaz de representar de forma perfeita a intensidade, a severidade e os impactos da seca nos diferentes segmentos da atividade humana.

Uma situação de seca pode ser quantificada por diferentes índices meteorológicos, os quais permitem determinar a intensidade, a duração e a frequência com que essa anomalia ocorre. Os índices de quantificação hídrica assimilam vários anos

de variáveis meteorológicas como: precipitação, temperatura do ar, evapotranspiração, escoamento superficial (runoff), umidade do solo, entre outras variáveis, buscando combiná-las a fim de determinar o início de um período de seca (FERNANDES, 2009).

Dentre os diferentes índices existentes na literatura destacam-se o Índice de Severidade de Seca de Palmer (*Palmer Drought Severity Index - PDSI*) e o Índice Padronizado de Precipitação (*Standardized Precipitation Index - SPI*). Ambos quantificam as condições hídricas de uma área, em relação a uma condição hídrica esperada em uma determinada região.

O Índice de Severidade de Seca de Palmer, foi desenvolvido por Palmer (1965), o qual considera que o total de precipitação pluviométrica requerido para manter uma área sob condições de economia estável é dependente da média dos elementos meteorológicos e das condições hídricas dos meses precedentes e do atual para a área em questão em um determinado período. O PDSI tem como base de sua metodologia parâmetros do Balanço Hídrico climático de Thorntwaite e Mather (1955). O índice acusa uma seca quando a precipitação pluviométrica de uma região diminui consideravelmente em relação ao que seria climatologicamente esperado.

Palmer considerou 11 categorias de classificação de eventos, como é demonstrado na Tabela 1:

Tabela 1 Categorias do Índice de Severidade de Seca de Palmer.

PSDI	Categoria
$\geq 4,00$	Extremamente úmido
3,0 a 3,99	Muito úmido
2,0 a 2,99	Moderadamente úmido
1,0 a 1,99	Ligeiramente úmido
0,5 a 0,99	Úmido incipiente
-0,49 a 0,49	Próximo do normal
-0,99 a -0,5	Seca incipiente
-1,99 a -1,0	Ligeiramente seco
-2,99 a -2,0	Moderadamente seco
-3,99 a -3,0	Muito seco
$\leq -4,00$	Extremamente seco

Fonte: Palmer (1965, p. 28)

O PDSI tem sido amplamente utilizado pelo Departamento de Agricultura dos EUA para determinar medidas de assistência à seca. Uma restrição desse índice é que ele fornece melhores resultados quando se trabalha com áreas de topografia uniforme.

Outro índice de quantificação hídrica é o Índice Padronizado de Precipitação, desenvolvido por McKee, Doesken e Kleist (1993). O SPI quantifica o déficit ou o excesso de precipitação em diferentes escalas de tempo. Essa característica torna o SPI uma valiosa ferramenta para todos os estudos de disponibilidade hídrica, sejam eles de curta ou longa duração. O cálculo do SPI para qualquer local é baseado em séries longas da precipitação.

Com base nesse índice, o evento seca começa quando o SPI torna-se negativo e atinge o valor de -1 e termina quando este volta a apresentar valores positivos. Dentro de sua escala, magnitudes menores ou iguais a -2 indicam seca extrema, e maiores ou iguais a 2 , umidade extrema, como pode ser visualizado na Tabela 2.

Tabela 2 Categorias do Índice Padronizado de Precipitação.

SPI	Categoria
$\geq 2,00$	Extremamente úmido
1,5 a 1,99	Severamente úmido
1,0 a 1,49	Moderadamente úmido
0,1 a 0,99	Umidade incipiente
-0,99 a 0,0	Seca incipiente
-1,49 a -1,0	Moderadamente seco
-1,99 a -1,50	Severamente seco
$\leq -2,00$	Extremamente seco

Fonte: Blain (2005)

No Brasil, existe na literatura algumas adaptações dos índices PSDI e SPI a determinados estados. Em particular, Blain (2005) estuda uma adaptação dos índices PSDI e SPI ao estado de São Paulo concluindo que os mesmos devem ser utilizados em decisões governamentais de planos de combate aos efeitos do fenômeno natural seca.

2.2 Funções especiais

Uma função especial é uma função matemática particular, que por sua importância no campo da análise matemática, análise funcional, Física, Engenharia, Estatística e em outras áreas do conhecimento, possui nomes e designações mais ou menos estabelecidas. Elas são funções tabeladas, da mesma forma que o seno trigonométrico, por exemplo, e muitos softwares já apresentam rotinas para seu cálculo.

No desenvolvimento do texto serão utilizadas diferentes funções especiais que são listadas na sequência .

a) Função Gama

A função gama (completa), denotada por $\Gamma(\cdot)$, é definida como:

$$\Gamma(\alpha) = \int_0^{\infty} t^{\alpha-1} e^{-t} dt, \quad \alpha > 0. \quad (2.1)$$

Usando integração por partes em (2.1), tem-se a seguinte relação de recorrência:

$$\Gamma(\alpha + 1) = \alpha\Gamma(\alpha). \quad (2.2)$$

Se α é um inteiro positivo, $n = 1, 2, 3 \dots$, então

$$\begin{aligned} \Gamma(n) &= (n-1)\Gamma(n-1) \\ &= (n-1)(n-2)\Gamma(n-2) \\ &= (n-1)(n-2)\dots 1 \\ &= (n-1)! \end{aligned} \quad (2.3)$$

a função gama reduz à função fatorial. Utilizando a relação de recorrência (2.2), obtém-se

$$(\alpha)_n = \frac{\Gamma(\alpha+n)}{\Gamma(\alpha)}, \quad n = 1, 2, 3 \dots$$

em que $(\alpha)_n = \alpha(\alpha + 1) \dots (\alpha + n - 1)$ denota o fatorial ascendente.

A derivada do logaritmo da função gama é denominada função digama ou função psi, e é definida como segue

$$\psi(\alpha) = \frac{d}{d\alpha} [\ln \Gamma(\alpha)]. \quad (2.4)$$

A função gama (completa) é um caso particular da função gama incompleta, $\gamma(\alpha, x)$, e da função gama incompleta complementar, $\Gamma(\alpha, x)$, definidas por:

$$\gamma(\alpha, x) = \int_0^x t^{\alpha-1} e^{-t} dt, \quad (2.5)$$

$$\Gamma(\alpha, x) = \int_x^{\infty} t^{\alpha-1} e^{-t} dt. \quad (2.6)$$

Assim,

$$\Gamma(\alpha) = \gamma(\alpha, \infty) \quad \text{e} \quad \Gamma(\alpha) = \Gamma(\alpha, 0)$$

Segue de (2.5) e (2.6), que

$$\Gamma(\alpha) = \gamma(\alpha, x) + \Gamma(\alpha, x).$$

b) Função Beta

A função beta, denotada por $B(\cdot, \cdot)$, é definida por

$$B(\alpha, \beta) = \int_0^1 t^{\alpha-1} (1-t)^{\beta-1} dt, \quad \alpha > 0, \beta > 0. \quad (2.7)$$

Tomando $z = 1 - t$ como a variável de integração, obtém-se

$$B(\alpha, \beta) = \int_1^0 (1-z)^{\alpha-1} z^{\beta-1} (-dz)$$

$$B(\alpha, \beta) = \int_0^1 z^{\beta-1} (1-z)^{\alpha-1} dz = B(\beta, \alpha)$$

isto é, a função beta é simétrica, $B(\alpha, \beta) = B(\beta, \alpha)$.

Considere $u = \frac{t}{1-t}$, $du = \frac{1}{(1-t)^2} dt$. Quando $t \rightarrow 0$, $u \rightarrow 0$ e quando $t \rightarrow 1$, $u \rightarrow +\infty$. Desse modo, a função beta pode ser escrita da forma:

$$\begin{aligned} B(\alpha, \beta) &= \int_0^1 t^{\alpha-1} (1-t)^{\beta-1} dt = \int_0^{\infty} \left(\frac{u}{1+u}\right)^{\alpha-1} \left(\frac{1}{1+u}\right)^{\beta+1} du \\ &= \int_0^{\infty} u^{\alpha-1} \left(\frac{1}{1+u}\right)^{\alpha+\beta} du. \end{aligned} \quad (2.8)$$

Outra forma de representar a função beta é expressá-la em termos da função gama,

$$B(\alpha, \beta) = \frac{\Gamma(\alpha) \Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha + \beta)} \quad \alpha > 0, \beta > 0. \quad (2.9)$$

Qualquer uma das três expressões dadas em (2.7), (2.8) ou (2.9), pode ser usada para definir ou avaliar a função beta.

Uma generalização da função beta é dada pela função beta incompleta, denotada por $B_x(\alpha, \beta)$, e definida como

$$B_x(\alpha, \beta) = \int_0^x t^{\alpha-1} (1-t)^{\beta-1} dt. \quad (2.10)$$

Note que a função beta incompleta se reduz à função beta quando $x = 1$.

c) Função de Bessel

As funções de Bessel são definidas como soluções da equação diferencial

$$x^2 \frac{d^2 y}{dx^2} + x \frac{dy}{dx} + (x^2 - n^2) y = 0.$$

A função de Bessel modificada do tipo I de ordem v e argumento x , denotada por $I_v(x)$, é definida como

$$I_v(x) = \frac{x^v}{2^v \Gamma(v+1)} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(v+1)_k k!} \left(\frac{x^2}{4}\right)^k, \quad (2.11)$$

onde $(e)_k = e(e+1) \dots (e+k-1)$ denota o fatorial ascendente.

A função de Bessel modificada do tipo III é a função $K_v(x)$ definida por:

$$k_v(x) = \frac{\sqrt{\pi} x^v}{2^v \Gamma(v + \frac{1}{2})} \int_1^{\infty} (t^2 - 1)^{v-1/2} \exp(-xt) dt. \quad (2.12)$$

A função de Bessel modificada do tipo III é também referida como função de Bessel do tipo II ou função Macdonald.

d) Função hipergeométrica confluyente

A função hipergeométrica confluyente do tipo I, com argumento x e parâmetros a e b , denotada por ${}_1F_1(a; b; x)$, é um caso especial da classe das funções hipergeométricas, ${}_pF_q$. A função têm a seguinte representação em série de potências:

$${}_1F_1(a; b; x) = 1 + \frac{a}{b}x + \frac{a(a+1)}{b(b+1)} \frac{x^2}{2!} + \dots = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(a)_k}{(b)_k} \frac{x^k}{k!} \quad (2.13)$$

A representação em integral definida é dada por:

$${}_1F_1(a; b; x) = \frac{\Gamma(b)}{\Gamma(b-a)\Gamma(a)} \int_0^1 t^{a-1} (1-t)^{b-a-1} \exp(-xt) dt, \quad (2.14)$$

com $0 < a < b$ e $b \neq 0, -1, -2, \dots$

A função hipergeométrica confluyente é também conhecida como função de Kummer tipo I. Assim, é comum encontrar outras notações para essa função, a saber: ${}_1F_1(a; b; x) = \Phi(a, b; x) = M(a, b; x)$.

Outra função pertencente à classe das funções hipergeométricas é a função de Kummer do tipo II, ou função tricomí, definida por:

$$\Psi(a, b; x) = \frac{1}{\Gamma(a)} \int_0^{\infty} t^{a-1} (t+1)^{b-a-1} \exp(-xt) dt, \quad (2.15)$$

em que $a > 0$ e $x > 0$. É comum encontrar na literatura a notação $U(a, b; x)$ para referenciar a função (2.15).

Casos especiais incluem:

- (i) Quando os dois parâmetros são iguais a função de Kummer se reduz a uma função exponencial, $M(a, a; x) = \exp(x)$;
- (ii) Se o parâmetro do numerador é igual a 0, a função de Kummer é igual a 1, $M(0, b; x) = 1$;
- (iii) A função gama incompleta é um caso particular da função de Kummer, $\gamma(a, x) = \frac{x^a}{a} M(a, a+1; -x)$;
- (iv) $\Gamma(a, x) = x^a \exp(-x) \Psi(1, a+1; x)$.

e) Função cilíndrica parabólica

A função cilíndrica parabólica de argumento x e ordem $\nu < 0$, denotada por $D_\nu(x)$, é a função definida por:

$$D_\nu(x) = \frac{2^{\nu/2} \exp(-x^2/4)}{\Gamma(-\nu/2)} \int_0^{\infty} t^{-(1+\nu/2)} (1+t)^{\nu/2-1/2} \exp\left(\frac{-x^2 t}{2}\right) dt. \quad (2.16)$$

As propriedades dessas funções especiais podem ser vistas em Beals e Wong (2010), Oldham, Myland e Spanier (2009) e Prudnikov e Marichev (1998).

Serão ainda utilizados os importantes lemas:

Lema 2.1 (Equação 2.3.6.1, PRUDNIKOV; MARICHEV, 1998, volume 1).

Se $a > 0$,

$$\int_0^a x^{\alpha-1} (a-x)^{\beta-1} \exp(-px) dx = B(\alpha, \beta) a^{\alpha+\beta-1} {}_1F_1(\alpha; \alpha + \beta; -ap).$$

Lema 2.2 (Equação 2.3.15.1, PRUDNIKOV; MARICHEV, 1998, volume 1). Se

$\alpha > 0$ e $\beta > 0$,

$$\int_0^{\infty} x^{\alpha-1} \exp(-rx^2 - qx) dx = \Gamma(\alpha)(2r)^{-\alpha/2} \exp\left(\frac{q^2}{8r}\right) D_{-\alpha}\left(\frac{q}{\sqrt{2r}}\right).$$

Lema 2.3 (Equação 2.3.16.1, PRUDNIKOV; MARICHEV, 1998, volume 1). Se

$q > 0$,

$$\int_0^{\infty} x^{\alpha-1} \exp\left(-rx - \frac{q}{x}\right) dx = 2\left(\frac{q}{r}\right)^{\alpha/2} K_{\alpha}(2\sqrt{rq}).$$

2.3 Distribuição beta do tipo II

A partir da expressão (2.8) defini-se a função densidade de probabilidade, fdp, beta do tipo II da seguinte forma:

Definição 2.1 Uma variável aleatória X tem distribuição beta tipo II, denotada por $BII(p, q, \lambda)$, se tem função densidade de probabilidade da forma:

$$f_X(x) = \frac{\lambda^q}{B(p, q)} x^{p-1} (\lambda + x)^{-(p+q)} \quad (2.17)$$

em que $x > 0$ e $p, q, \lambda > 0$ (BALAKRISHNAN; LAI, 2009).

O n -ésimo momento de X é dado por:

$$\begin{aligned}
E[X^n] &= \int_0^{\infty} x^n f_X(x) dx \\
&= \int_0^{\infty} x^n \frac{\lambda^q}{\text{B}(p, q)} x^{p-1} (\lambda + x)^{-(p+q)} dx
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
E[X^n] &= \frac{\lambda^q}{\text{B}(p, q)} \int_0^{\infty} x^{(p+n)-1} (\lambda + x)^{-(p+q)} dx \\
&= \frac{\lambda^q \text{B}(p+n, q-n)}{\lambda^{q-n} \text{B}(p, q)} \int_0^{\infty} \frac{\lambda^{q-n}}{\text{B}(p+n, q-n)} x^{(p+n)-1} (\lambda + x)^{-(p+q)} dx \\
&= \lambda^n \frac{\text{B}(p+n, q-n)}{\text{B}(p, q)}. \tag{2.18}
\end{aligned}$$

Em particular, a média e a variância são:

$$\begin{aligned}
E[X] &= \lambda \frac{\text{B}(p+1, q-1)}{\text{B}(p, q)} \\
&= \frac{\lambda \Gamma(p+1) \Gamma(q-1)}{\Gamma(p+q)} \cdot \frac{\Gamma(p+q)}{\Gamma(p) \Gamma(q)} \\
&= \frac{\lambda p \Gamma(p) \Gamma(q-1)}{\Gamma(p) (q-1) \Gamma(q-1)} \\
&= \frac{\lambda p}{(q-1)}; \tag{2.19}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\text{Var}[X] &= E[X^2] - \{E[X]\}^2 \\
&= \lambda^2 \frac{\text{B}(p+2, q-2)}{\text{B}(p, q)} - \left[\frac{\lambda p}{(q-1)} \right]^2 \\
&= \frac{\lambda^2 \Gamma(p+2) \Gamma(q-2)}{\Gamma(p+q)} \cdot \frac{\Gamma(p+q)}{\Gamma(p) \Gamma(q)} - \left[\frac{\lambda p}{(q-1)} \right]^2
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} Var [X] &= \frac{\lambda^2 p (p + 1)}{(q - 1)(q - 2)} - \left[\frac{\lambda p}{(q - 1)} \right]^2 \\ &= \frac{\lambda^2 p (p + q - 1)}{(q - 1)^2 (q - 2)}. \end{aligned} \quad (2.20)$$

A Figura 3 ilustra a forma da fdp beta do tipo II, para $\lambda = 5,5$, $p = 3$ e $q = 0,9$.

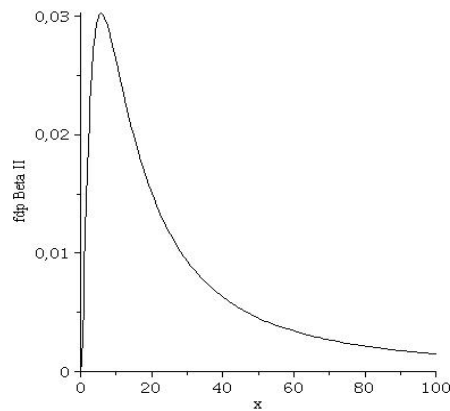


Figura 3 Distribuição beta tipo II

2.4 Modelos de probabilidade univariados

Os dados de chuva tanto do ponto de vista de sua ocorrência quanto da sua quantidade podem ser analisados pela obtenção das freqüências observadas dos seus registros históricos ou através da elaboração de um modelo teórico (ASSIS; VILLA-NOVA, 1994). A precipitação pluviométrica em um determinado local pode ser prevista em termos probabilísticos, mediante modelos teóricos de distribuição, ajustados a uma série de dados. Os modelos gerados, após a comprovação da aderência dos dados à distribuição teórica, podem fornecer informações úteis para o planejamento de muitas atividades.

Vários estudos de modelagem envolvendo dados de chuva estão disponíveis na literatura. Nestes trabalhos consideram - se os eventos: sequências de dias sem chuvas, sequências de dias com chuvas. Diferentes modelos univariados, discretos e contínuos, têm sido utilizados para descrever o comportamento desses dados e grande parte desses estudos apontam a distribuição gama, como o meio probabilístico mais confiável na determinação de totais mensais de precipitação.

Assis e Villa Nova (1994) utilizaram as distribuições binomial negativa truncada e gama para a modelagem das probabilidades de sequências de dias sem chuva ou com chuva, na cidade de Piracicaba, SP. Os autores concluíram que a ocorrência de dias com chuva e sem chuva podem ser modelados pela distribuição binomial negativa truncada e quantidade de chuva nos dias com chuva foi ajustada adequadamente pela distribuição gama.

Morais et al. (2001) consideraram que a distribuição gama é indicada para o dimensionamento de sistemas de irrigação suplementar, em Lavras-MG, realçando a boa aderência dos dados de precipitação à distribuição gama incompleta.

Catalunha et al. (2001) analisaram o ajuste das distribuições de probabilidade exponencial, gama, log-normal (com dois e três parâmetros), normal e Weibull para os dados de precipitação diária e total no estado de Minas Gerais.

Beijo, Muniz e Castro Neto (2005) estudaram o tempo de retorno das precipitações máximas em Lavras - MG considerando a distribuição de valores extremos tipo I.

Sampaio et al. (2006) apresentam um estudo da estimativa e da distribuição da precipitação mensal provável para o Estado do Paraná. As séries foram ajustadas através das distribuições gama e log-normal. Os resultados obtidos mostraram que a distribuição gama ajustou-se mais adequadamente às condições pluviométricas do Estado, para o período e estações consideradas.

Utilizando a distribuição gama, Weibull, normal, exponencial e log-normal, Silva et al. (2007) verificaram que as distribuições gama e Weibull foram as que melhor descreveram a variação da probabilidade de ocorrência de precipitação diária, durante os meses do ano, em Santa Maria, RS.

Embora sejam obtidos bons resultados com o uso de modelos univariados, esses modelos baseiam-se na pressuposição de que os eventos sejam independentes,

fato que não ocorre na prática. Se X representa o período de chuva e Y representa o período sem ocorrência de chuva, claramente X e Y estão correlacionados. Portanto é necessário o uso de um modelo bivariado para explicar o comportamento de X e Y que contemple a possível correlação existente entre esses dois eventos.

2.5 Modelos de probabilidade bivariados no estudo de processos hidrológicos

Motivados pelo crescente uso na análise de dados não normais, vários tipos de distribuições bivariadas têm sido propostas na literatura: exponencial bivariado, gama bivariado, pareto bivariado, entre outros (BALAKRISHNAN; LAI, 2009). No entanto, muitos desses modelos têm permanecido principalmente na forma de desenvolvimento teórico e raramente têm sido empregadas na análise de frequência hidrológica.

Trabalhos pioneiros como o de Izawa (1965), fizeram com que as distribuições gama bivariadas fossem aplicadas no estudos de processos hidrológicos. Atualmente, esse modelo é um dos mais utilizados nessa área (YUE, 2001).

Considerando que X e Y se distribuem segundo um modelo bivariado $f(\cdot, \cdot)$, funções dessas variáveis aleatórias, expressas por $U = X + Y$, $P = XY$ e $Q = X/(X + Y)$ são importantes no estudo de determinados fenômenos hidrológicos (NADARAJAH, 2005; NADARAJAH; GUPTA, 2006c). Em particular,

- Se X representa a duração da seca e Y a duração do período sem ocorrência de seca, $U = X + Y$ denota o período climático, ou seja o tempo entre a ocorrência do próximo evento seca, e $Q = X/(X + Y)$ a proporção do período de seca;
- Se X representa a duração da seca e Y representa a intensidade da seca, a variável aleatória $P = XY$ denotará a magnitude da seca;
- Se X denota a intensidade da chuva e Y denota a duração de chuva então $P = XY$ fornece a distribuição da quantidade de precipitação, ou seja, o volume de chuva nesse período.

Shiau, Feng e Nadarajah (2007), apresentam um modelo gama bivariado construído a partir de cópulas para estudar a correlação entre as variáveis duração e intensidade da seca. Os resultados obtidos foram aplicados a dados de secas ocorridas em Yellow River no Norte da China.

Nas subseções que se seguem são apresentados alguns modelos bivariados que têm sido aplicados em estudos de processos hidrológicos.

2.5.1 Distribuição gama bivariada de Mckay

Uma variável aleatória (X, Y) tem distribuição gama bivariada de Mckay se sua fdp conjunta é da forma:

$$f(x, y) = \frac{a^{p+q}}{\Gamma(p)\Gamma(q)} x^{p-1} (y-x)^{q-1} \exp(-ay), \quad (2.21)$$

com $a, p, q > 0$ e $0 < x < y$.

Sob esse modelo, as distribuições marginais de X e Y são dadas por:

$$\begin{aligned} f(x) &= \int_x^{+\infty} f(x, y) dy = \int_x^{+\infty} \frac{a^{p+q}}{\Gamma(p)\Gamma(q)} x^{p-1} (y-x)^{q-1} \exp(-ay) dy \\ &= \frac{a^{p+q}}{\Gamma(p)\Gamma(q)} x^{p-1} \int_x^{+\infty} (y-x)^{q-1} \exp(-ay) dy \\ &= \frac{a^{p+q}}{\Gamma(p)\Gamma(q)} x^{p-1} \int_0^{+\infty} t^{q-1} \exp(-at - ax) dt \\ &= \frac{a^{p+q}}{\Gamma(p)\Gamma(q)} x^{p-1} \exp(-ax) \int_0^{+\infty} t^{q-1} \exp(-at) dt \\ &= \frac{a^{p+q}}{\Gamma(p)\Gamma(q)} x^{p-1} \exp(-ax) \frac{\Gamma(q)}{a^q} \\ &= \frac{a^p}{\Gamma(p)} x^{p-1} \exp(-ax). \end{aligned}$$

A marginal de Y é da forma:

$$\begin{aligned} f(y) &= \int_0^y f(x, y) dx = \int_0^y \frac{a^{p+q}}{\Gamma(p)\Gamma(q)} x^{p-1} (y-x)^{q-1} \exp(-ay) dx \\ &= \frac{a^{p+q} \exp(-ay)}{\Gamma(p)\Gamma(q)} \int_0^y x^{p-1} (y-x)^{q-1} dx. \end{aligned}$$

Usando o lema (2.1) segue que:

$$\int_0^y x^{p-1} (y-x)^{q-1} dx = B(p, q) y^{p+q-1} {}_1F_1(p; p+q; 0).$$

Assim,

$$\begin{aligned} f(y) &= \frac{a^{p+q} \exp(-ay)}{\Gamma(p)\Gamma(q)} B(p, q) y^{p+q-1} \\ &= \frac{a^{p+q}}{\Gamma(p)\Gamma(q)} \frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)} y^{p+q-1} \exp(-ay) \\ &= \frac{a^{p+q}}{\Gamma(p+q)} y^{p+q-1} \exp(-ay). \end{aligned}$$

Portanto, a distribuição gama bivariada de Mckay possui marginais gama com parâmetros de forma p e $p+q$ e mesmo parâmetro de escala a .

Embora a distribuição tenha sido construída sob a hipótese de $0 < x < y$, Clarke (1980), utiliza esse modelo em estudos de fenômenos hidrológicos, supondo que vazões, X , e precipitação, Y , têm distribuição gama bivariada, incorporando restrições físicas nas duas variáveis.

Gupta e Nadarajah (2006) deduzem as distribuições exatas das variáveis $U = X + Y$, $P = XY$ e $Q = X/(X + Y)$, quando é assumido que X e Y têm distribuição conjunta gama bivariada de Mckay.

2.5.2 Distribuição gama bivariada de Kibble

A distribuição gama bivariada de Kibble apresenta fdp conjunta dada por:

$$f(x, y) = f_\alpha(x) f_\alpha(y) \frac{\Gamma(\alpha)}{1-\rho} \exp\left\{-\frac{\rho(x+y)}{1-\rho}\right\} (xy\rho)^{(\alpha-1)/2} I_{\alpha-1}\left(\frac{2\sqrt{xy\rho}}{1-\rho}\right) \quad (2.22)$$

com $x, y \geq 0$, $0 \leq \rho < 1$, $f_\alpha(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} t^{\alpha-1} \exp(-t)$ e $I_\alpha(\cdot)$ denota a função de Bessel de primeiro tipo e ordem ν . O parâmetro ρ é o coeficiente de correlação de Pearson. As distribuições marginais são gama com o mesmo parâmetro de forma α .

2.5.3 Distribuição gama bivariada de Izawa

O modelo gama bivariado de Izawa é construído a partir de marginais gama com diferentes parâmetros de escala e forma. A fdp conjunta é definida como:

$$f(x, y) = \frac{(xy)^{(\alpha_1-1)/2} x^{(\alpha_1-\alpha_2)} \exp\left(-\frac{x+y}{1-\eta}\right)}{\Gamma(\alpha_1) \Gamma(\alpha_1 - \alpha_2) (1-\eta) \eta^{(\alpha_1-1)/2}} \times \int_0^1 (1-t)^{(\alpha_1-1)/2} t^{(\alpha_1-\alpha_2-1)} \exp\left(-\frac{\eta xt}{1-\eta}\right) I_{\alpha_1}\left(\frac{2\sqrt{\eta xy(1-t)}}{1-\eta}\right) dt \quad (2.23)$$

em que $\alpha_1 \geq \alpha_2$, $\eta = \rho\sqrt{\alpha_1/\alpha_2}$, $0 \leq \rho < 1$ e $0 \leq \eta < 1$.

Quando $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha$ a distribuição se reduz à distribuição de Kibble.

2.5.4 Distribuição gama bivariada de Moran

Uma variável aleatória (X, Y) tem distribuição conjunta gama bivariada de Moran se sua fdp conjunta é dada por

$$f(x, y) = \frac{1}{\sqrt{(1 - \rho^2)}} f(x) g(y) \exp \left\{ -\frac{(\rho x')^2 - 2\rho x' y' + (\rho y')^2}{2(1 - \rho^2)} \right\} \quad (2.24)$$

com $x, y \geq 0$, $x' = \Phi^{-1}(F(x))$, $y' = \Phi^{-1}(G(y))$ e Φ é a função de distribuição da normal padrão. F é a distribuição marginal gama com parâmetro de forma α_1 e escala λ_1 e G é a outra marginal com distribuição gama com parâmetro de forma α_2 e parâmetro de escala λ_2 .

2.5.5 Distribuição gama bivariada de Cherian

Uma variável aleatória (X, Y) tem distribuição gama bivariada de Cherian se sua fdp conjunta é dada por:

$$f(x, y) = \frac{\exp[-(x+y)]}{\Gamma(\theta_1)\Gamma(\theta_2)\Gamma(\theta_3)} \int_0^{\min(x,y)} (x-z)^{\theta_1-1} (y-z)^{\theta_2-1} z^{\theta_3-1} \exp(z) dz, \quad (2.25)$$

em que $x, y > 0$, $\theta_1, \theta_2, \theta_3 > 0$.

As distribuições marginais de X e Y são gama com parâmetros de forma $\alpha_1 = \theta_1 + \theta_3$ e $\alpha_2 = \theta_2 + \theta_3$, respectivamente.

Nadarajah e Gupta (2006a) estudam o comportamento de dados de seca do Estado de Nebraska considerando a distribuição gama bivariada de Cherian.

2.5.6 Distribuição gama bivariada de Smith, Aldelfang e Tubbs

A distribuição gama bivariada de Smith apresenta fdp conjunta da forma:

$$f(x, y) = \frac{x^{\gamma_1-1} y^{\gamma_2-1} \exp[(x+y)/(1-\eta)]}{(1-\eta)^{\gamma_1} \Gamma(\gamma_1) \Gamma(\gamma_2 - \gamma_1)} \sum_{k=0}^{\infty} a_k I_{\gamma_2+k-1} \left(\frac{2\sqrt{2\eta xy}}{1-\eta} \right), \quad (2.26)$$

onde

$$a_k = \frac{(\nu y)^k \Gamma(\gamma_2 - \gamma_1 + k) (1 - \eta)^{\gamma_2 - 1}}{k! (\nu xy)^{(\gamma_2 + k - 1)/2}},$$

η é o parâmetro de dependência satisfazendo $0 < \eta < 1$, $\eta = \rho \sqrt{\gamma_2/\gamma_1}$ e ρ é o coeficiente de correlação linear entre X e Y .

Yue (2001) estuda a aplicabilidade desta distribuição na análise de frequência das variáveis hidrológicas duração e volume.

Yue, Ouarda e Bobee (2001), apresentam uma revisão dos modelos (2.23), (2.24) e (2.26) apontando as vantagens e desvantagens de cada modelo no estudo de precipitação. Os parâmetros dos modelos são estimados a partir das distribuições marginais pelo método dos momentos. Usando dados reais de inundação os autores concluem que os modelos estudados são adequados para descrever características de inundação positivamente correlacionadas, como pico de cheias e inundações ou volume e duração da inundação.

2.5.7 Distribuição gama bivariada de Loáiciga e Leipnik

Outra generalização da distribuição gama bivariada de Kibble com diferentes parâmetros de forma e escala foi introduzido por Loáiciga e Leipnik (2005). A fdp conjunta é da forma

$$f(x, y) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^n \sum_{j=0}^n A_{nkj} x^{\lambda'_1 + k - n} y^{\lambda'_2 + j - n} \exp\left(-\frac{x}{b_1} - \frac{y}{b_2}\right), \quad (2.27)$$

com $x, y > 0$, $\lambda'_i = \lambda_i - 1$, $\lambda_i = \alpha_i (n + \gamma)$ e

$$A_{nkj} = \frac{(-1)^{n+k+j} \beta^n (n!)^2}{b_1^{k+\lambda'_1+1} b_2^{j+\lambda'_2+1} \Gamma(\lambda_1) \Gamma(\lambda_2)} \binom{-\gamma}{n} \binom{\lambda'_1}{n-k} \binom{\lambda'_2}{n-j},$$

$\gamma\alpha_j$ e b_j , $j = 1, 2$, são os parâmetros de forma e escala, respectivamente, das distribuições marginais de X e Y , com $\alpha_1, \alpha_2 \geq 0$; γ é um parâmetro de forma, positivo, da distribuição conjunta.

O modelo (2.27) foi proposto com o objetivo de analisar a qualidade da água,

através da correlação entre coliformes e estreptococos fecais. Considerando que X e Y se distribuem segundo esse modelo, os autores obtêm um bom ajuste para a distribuição de probabilidade de X/Y para os dados de qualidade da água coletados de Las Palmas Creek, Santa Barbara, Califórnia.

Nadarajah e Kotz (2007) deduzem as distribuições da soma e do produto quando X e Y têm distribuição conjunta expressa pelo modelo de Loaiciga e Leipnik.

Outros modelos bivariados, como exponencial e Pareto, também têm sido aplicados a estudos de hidrologia. Em particular,

- (a) Nadarajah e Gupta (2006b) utilizam a distribuição exponencial bivariada de Friday e Patil para descrever a duração de períodos de seca e o período sem secas ocorridas no estado de Nebraska, USA;
- (b) Nadarajah e Kotz (2006), deduzem a distribuição exata das variáveis $U = X + Y$, $P = XY$ e $Q = X/(X + Y)$ quando (X, Y) seguem o modelo exponencial bivariado de Downton;
- (c) Nadarajah (2008) deduz a distribuição da soma, produto e quociente sob a pressuposição que (X, Y) são distribuídos segundo o modelo Pareto bivariado. Os resultados obtidos são aplicados a dados de seca do estado de Nebraska, USA.

2.5.8 Distribuição gama bivariada de Crovelli

Dentre os diferentes modelos gama bivariados existentes na literatura, um modelo simples e flexível é o modelo de Crovelli, (ver BALAKRISHNAN; LAI, 2009) cuja função densidade de probabilidade conjunta é dada a seguir:

$$f(x, y) = \begin{cases} \alpha\beta \exp(-\beta y) [1 - \exp(-\alpha x)] & \text{se } 0 \leq \alpha x \leq \beta y \\ \alpha\beta \exp(-\alpha x) [1 - \exp(-\beta y)] & \text{se } 0 \leq \beta y \leq \alpha x \end{cases} \quad (2.28)$$

sendo que $x > 0$, $y > 0$, $\alpha > 0$ e $\beta > 0$. Apesar de ter sido apresentado na década de 70, o modelo não tem sido estudado, suas propriedades não têm

sido trabalhadas e, na literatura especializada, encontra-se apenas referência à sua existência.

Neste trabalho são apresentadas algumas propriedades desse modelo e deduzidas distribuições das variáveis $U = X + Y$, $P = XY$ e $Q = X/(X + Y)$ e seus respectivos momentos, quando (X, Y) se distribuem segundo o modelo gama bivariado de Crovelli.

2.5.9 Distribuição exponencial bivariada Gumbel tipo I

Outro modelo bivariado que apresenta alguns estudos em aberto é o modelo exponencial bivariado Gumbel tipo I cuja função densidade de probabilidade conjunta é dada a seguir:

$$f(x, y) = [(1 + \theta x)(1 + \theta y) - \theta] \exp[-(x + y + \theta xy)], \quad (2.29)$$

em que $x \geq 0$, $y \geq 0$ e $0 \leq \theta \leq 1$. As densidades marginais de X e de Y têm distribuição exponencial. Balakrishnan e Lai (2009) apresentam algumas propriedades e aplicações desse modelo. Neste trabalho são deduzidas importantes propriedades da distribuição exponencial bivariada Gumbel tipo I.

2.6 Construindo distribuições bivariadas

Diferentes métodos de obtenção de distribuições bivariadas são encontrados na literatura. Nas seções a seguir são apresentados alguns desses métodos.

2.6.1 Transformação de variáveis

Seja (X, Y) um vetor aleatório com função densidade de probabilidade conjunta $f(x, y)$. Seja G uma função $G : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ injetiva com dois componentes $G(x, y) = (u, v)$, Mood, Graybill e Boes (1974). Cada um desses componentes é

função das variáveis aleatórias (X, Y) , tal que:

$$\begin{aligned} U &= g_1(X, Y) \text{ e} \\ V &= g_2(X, Y) \end{aligned}$$

e g_1 e g_2 devem possuir derivadas parciais em relação a x e a y .

O objetivo é determinar a função densidade de probabilidade conjunta de (U, V) a partir da densidade conjunta de (X, Y) .

Como G tem inversa, pode-se escrever:

$$\begin{aligned} x &= g_1^{-1}(u, v), \\ y &= g_2^{-1}(u, v). \end{aligned}$$

Desse modo, a densidade conjunta de (U, V) é dada por:

$$f(u, v) = |J| \times f_{X,Y} [g_1^{-1}(u, v), g_2^{-1}(u, v)], \quad (2.30)$$

em que $|J|$ representa o valor absoluto do determinante Jacobiano dado por:

$$J = \begin{vmatrix} \frac{\partial g_1^{-1}(u, v)}{\partial u} & \frac{\partial g_1^{-1}(u, v)}{\partial v} \\ \frac{\partial g_2^{-1}(u, v)}{\partial u} & \frac{\partial g_2^{-1}(u, v)}{\partial v} \end{vmatrix}.$$

Esse método será muito utilizado nas seções posteriores para o cálculo das densidades de $U = X + Y$, $P = XY$ e $Q = X/(X + Y)$ quando (X, Y) têm distribuição conjunta $f(\cdot, \cdot)$.

Um exemplo de uma distribuição obtida por esse método é a distribuição gama bivariada de Mckay. Para isso, suponha X e Y as variáveis aleatórias independentes, com distribuição beta de parâmetros a e b e distribuição gama com parâmetro de forma $a + b$ e parâmetro de escala α , respectivamente. Assim,

$$X \sim Beta(a, b) \Rightarrow f_X(x) = \frac{1}{B(a, b)} x^{a-1} (1-x)^{b-1}, \quad (2.31)$$

$$Y \sim \text{Gama}(a+b, \alpha) \Rightarrow f_Y(y) = \frac{\alpha^{a+b}}{\Gamma(a+b)} y^{a+b-1} \exp(-\alpha y), \quad (2.32)$$

em que, $0 < x < 1$, $y > 0$, $a > 0$, $b > 0$ e $\alpha > 0$.

Da independência de X e Y segue que a distribuição conjunta $f(x, y)$ é dada por:

$$\begin{aligned} f(x, y) &= f(x) \times f(y) \\ &= \frac{1}{B(a, b)} x^{a-1} (1-x)^{b-1} \times \frac{\alpha^{a+b}}{\Gamma(a+b)} y^{a+b-1} \exp(-\alpha y) \\ &= \frac{\Gamma(a+b)}{\Gamma(a)\Gamma(b)} x^{a-1} (1-x)^{b-1} \frac{\alpha^{a+b}}{\Gamma(a+b)} y^{a+b-1} \exp(-\alpha y) \\ &= \frac{\alpha^{a+b}}{\Gamma(a)\Gamma(b)} x^{a-1} (1-x)^{b-1} y^{a+b-1} \exp(-\alpha y). \end{aligned} \quad (2.33)$$

Considere as variáveis aleatórias definidas por: $U = XY$ e $V = Y$. Temos assim,

$$y = v \quad e \quad x = \frac{u}{v}.$$

O Jacobiano da transformação é dado por:

$$J = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{1}{v} & -\frac{u}{v^2} \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = \frac{1}{v}.$$

Desse modo, a fdp conjunta de (U, V) é dada por:

$$\begin{aligned} f(u, v) &= \frac{1}{v} \times \frac{\alpha^{a+b}}{\Gamma(a)\Gamma(b)} \left(\frac{u}{v}\right)^{a-1} \left(1 - \frac{u}{v}\right)^{b-1} v^{a+b-1} \exp(-\alpha v) \\ &= \frac{1}{v} \times \frac{\alpha^{a+b}}{\Gamma(a)\Gamma(b)} u^{a-1} v^{1-a} (v-u)^{b-1} v^{1-b} v^{a+b-1} \exp(-\alpha v) \\ &= \frac{\alpha^{a+b}}{\Gamma(a)\Gamma(b)} u^{a-1} (v-u)^{b-1} \exp(-\alpha v), \end{aligned} \quad (2.34)$$

para $u \leq v$ e $v > 0$. A fdp (2.34) corresponde à distribuição gama bivariada de

Mckay, modelo (2.21).

2.6.2 Método da transformação marginal

O método da transformação é uma técnica de mudança de variáveis onde a transformação é feita nas distribuições marginais. Ou seja, partindo de uma função de distribuição bivariada $F(x, y)$, com densidade $f(x, y)$, aplicamos transformações monótonas nas densidades marginais $X \rightarrow X^*$ e $Y \rightarrow Y^*$, de modo que a nova distribuição $F^*(x^*, y^*)$ tenha a mesma estrutura bivariada que a distribuição original e com marginais diferentes, Balakrishnan e Lai (2009).

Considere a seguinte transformação: $(x, y) \rightarrow (f(x), g(y))$, f e g são funções monótonas crescentes. Tem-se que:

$$\begin{aligned} z_1 &= f(x) \Rightarrow x = f^{-1}(z_1), \\ z_2 &= g(y) \Rightarrow y = g^{-1}(z_2). \end{aligned}$$

O Jacobiano da transformação é dado por:

$$J = \begin{vmatrix} \frac{\partial f^{-1}(z_1)}{\partial z_1} & \frac{\partial f^{-1}(z_1)}{\partial z_2} \\ \frac{\partial g^{-1}(z_2)}{\partial z_1} & \frac{\partial g^{-1}(z_2)}{\partial z_2} \end{vmatrix}. \quad (2.35)$$

Desse modo, a distribuição conjunta de (Z_1, Z_2) é da forma:

$$\begin{aligned} f(z_1, z_2) &= |J| \times f_{X,Y}(f^{-1}(z_1), g^{-1}(z_2)) \\ &= (f^{-1})'(z_1) \cdot (g^{-1})'(z_2) f_{X,Y}(f^{-1}(z_1), g^{-1}(z_2)). \end{aligned} \quad (2.36)$$

As densidades marginais de Z_1 e Z_2 são obtidas por integração de (2.36). Assim:

$$f(z_1) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_{Z_1, Z_2}(z_1, z_2) dz_2$$

$$f(z_1) = \int_{-\infty}^{+\infty} (f^{-1})'(z_1) \cdot (g^{-1})'(z_2) f_{X,Y}(f^{-1}(z_1), g^{-1}(z_2)) dz_2.$$

Considere $w = g^{-1}(z_2)$, então, $dw = (g^{-1})'(z_2)$. Portanto,

$$\begin{aligned} f(z_1) &= (f^{-1})'(z_1) \int_{-\infty}^{+\infty} f_{X,Y}(f^{-1}(z_1), w) dw \\ &= (f^{-1})'(z_1) f_X(f^{-1}(z_1)), \end{aligned}$$

que é a densidade da variável $f(x)$.

No caso univariado, um exemplo familiar é a transformação da distribuição normal na distribuição lognormal. Se $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ e $Y = \exp(X)$, então $Y \sim LN(\mu, \sigma^2)$.

2.6.3 Variáveis em comum e técnicas de redução trivariada

Os termos "redução trivariada" ou "variáveis em comum" são utilizados para técnicas de construção de pares de variáveis aleatórias a partir da combinação de três ou mais variáveis. A idéia é criar um par de variáveis dependentes de três ou mais variáveis aleatórias. Em muitos casos, essas variáveis iniciais são independentes, mas ocasionalmente podem ser dependentes (BALAKRISHNAN; LAI, 2009).

Sejam X_i ($i = 1, \dots, 3$) variáveis aleatórias independentes com função de distribuição $F_i(x_i; \lambda_i)$. As funções de distribuição são frequentemente assumidas ser da mesma família, porém isso não é uma condição necessária para aplicação do método, os parâmetros λ_i podem ser diferentes.

Suponha que exista uma função T , $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$, tal que:

$$\begin{cases} X = T_1(X_1, X_2, X_3) \\ Y = T_2(X_1, X_2, X_3) \end{cases}$$

Então diz-se que X e Y têm distribuição bivariada gerada por uma redução trivariada.

Uma definição restrita, porém muito utilizada, é:

$$\begin{cases} X = X_1 + X_3 \\ Y = X_2 + X_3 \end{cases} \quad (2.37)$$

em que X_1 , X_2 e X_3 são independentes e identicamente distribuídos (*i.i.d.*).

A distribuição normal bivariada pode ser obtida a partir do modelo aditivo, em (2.37), considerando os X_i com distribuição normal.

Outro modelo bivariado que pode ser obtido por esse método é a distribuição gama bivariada de Cherian. Sejam Z_1 , Z_2 e Z_3 variáveis aleatórias *i.i.d* com distribuição gama cuja função densidade de probabilidade é dada por:

$$f(z_i) = \frac{1}{\Gamma(\theta_i)} z_i^{\theta_i-1} \exp(-z_i), \quad z_i > 0, \theta_i > 0 (i = 1, 2, 3).$$

Como os Z_i são independentes, por hipótese, a função densidade de probabilidade conjunta de (Z_1, Z_2, Z_3) é dada pelo produto das distribuições marginais, ou seja,

$$\begin{aligned} f(z_1, z_2, z_3) &= f(z_1) \times f(z_2) \times f(z_3) \\ &= \frac{\exp[-(z_1 + z_2 + z_3)]}{\Gamma(\theta_1) \Gamma(\theta_2) \Gamma(\theta_3)} z_1^{\theta_1-1} z_2^{\theta_2-1} z_3^{\theta_3-1}. \end{aligned} \quad (2.38)$$

Considere as variáveis X e Y definidas por:

$$\begin{cases} X = Z_1 + Z_3 \Rightarrow Z_1 = X - Z_3 \\ Y = Z_2 + Z_3 \Rightarrow Z_2 = Y - Z_3 \end{cases}$$

De (2.38), tem-se que a fdp conjunta de (X, Y, Z_3) é:

$$f(x, y, z_3) = \frac{\exp[-(x - z_3 + y - z_3 + z_3)]}{\Gamma(\theta_1) \Gamma(\theta_2) \Gamma(\theta_3)} (x - z_3)^{\theta_1-1} (y - z_3)^{\theta_2-1} z_3^{\theta_3-1}$$

$$f(x, y, z_3) = \frac{\exp(z_3 - x - y)}{\Gamma(\theta_1) \Gamma(\theta_2) \Gamma(\theta_3)} (x - z_3)^{\theta_1 - 1} (y - z_3)^{\theta_2 - 1} z_3^{\theta_3 - 1},$$

com $0 \leq z_3 \leq x$ e $0 \leq z_3 \leq y$.

A distribuição conjunta de (X, Y) é obtida pela integração de $f(x, y, z_3)$ em relação à variável Z_3 . Se δ é o mínimo entre x e y , $\delta = \min(x, y)$, então $\delta \leq x$ e $\delta \leq y$. Deste modo,

$$\begin{aligned} f(x, y) &= \int_0^{\delta} f(x, y, z_3) dz_3 \\ &= \frac{\exp[-(x + y)]}{\Gamma(\theta_1) \Gamma(\theta_2) \Gamma(\theta_3)} \int_0^{\delta} (x - z_3)^{\theta_1 - 1} (y - z_3)^{\theta_2 - 1} z_3^{\theta_3 - 1} \exp(z_3) dz_3. \end{aligned}$$

$f(x, y)$ corresponde à fdp conjunta de (X, Y) com distribuição gama bivariada de Cherian, modelo (2.25).

2.6.4 Mistura de distribuições

Um método simples de gerar distribuições bivariadas é usar a mistura de duas distribuições. Especificamente, se H_1 e H_2 são duas funções de distribuição bivariadas, então

$$H(x, y) = \alpha H_1(x, y) + (1 - \alpha) H_2(x, y), \quad 0 \leq \alpha \leq 1, \quad (2.39)$$

é uma nova distribuição bivariada.

Nadarajah e Kotz (2007) demonstram, usando uma generalização do conceito de mistura para um número infinito de termos, que a distribuição gama bivariada de Loaiciga e Leipinik, modelo (2.27), pode ser escrita da forma

$$f(x, y) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^n \sum_{j=0}^n B_{nkj} f_Y(x) f_Z(y), \quad (2.40)$$

em que

$$f_Y(x) = \frac{x^{\lambda'_1+k-n}}{\Gamma(\lambda'_1+k-n+1) b_1^{\lambda'_1+k-n+1}} \exp\left(-\frac{x}{b_1}\right), \quad (2.41)$$

$$f_Z(y) = \frac{y^{\lambda'_2+j-n}}{\Gamma(\lambda'_2+j-n+1) b_2^{\lambda'_2+j-n+1}} \exp\left(-\frac{y}{b_2}\right) \quad (2.42)$$

e

$$B_{nkj} = A_{nkj} \Gamma(\lambda'_1+k-n+1) \Gamma(\lambda'_2+j-n+1) b_1^{\lambda'_1+k-n+1} b_2^{\lambda'_2+j-n+1}.$$

Portanto (2.40) corresponde à mistura das variáveis aleatórias Y e Z com distribuição gama de parâmetros $(\lambda'_1+k-n+1, b_1)$ e $(\lambda'_2+j-n+1, b_2)$, respectivamente.

2.6.5 Cópulas

Uma outra transformação importante é aquela dada pela aplicação do teorema da transformação integral: se X é uma variável aleatória com função de distribuição $F_X(x)$ então a variável aleatória $W = F_X(X)$ tem distribuição uniforme no intervalo $[0, 1]$. Como $F_X(x)$ é uma função crescente, é trivial que a transformação $W = F_X(X)$ preserve ordem.

Definição 2.2 *Sejam $I = [0, 1]$ e $(u, v) \in I^2$. Define-se uma cópula bi-dimensional $C(u, v)$ como uma função $C : I^2 \rightarrow I$ com as propriedades:*

- (i) $C(0, v) = C(u, 0) = 0$, $C(u, 1) = u$ e $C(1, v) = v$.
- (ii) $C(b, d) - C(a, d) - C(b, c) + C(a, c) \geq 0$ em que $a < b$ e $c < d$.

O teorema de Sklar estabelece o papel desempenhado pelas cópulas na relação distribuições bivariadas e suas marginais univariadas.

Teorema 2.1 *Se (X, Y) tem função de distribuição conjunta $F(x, y)$ e marginais*

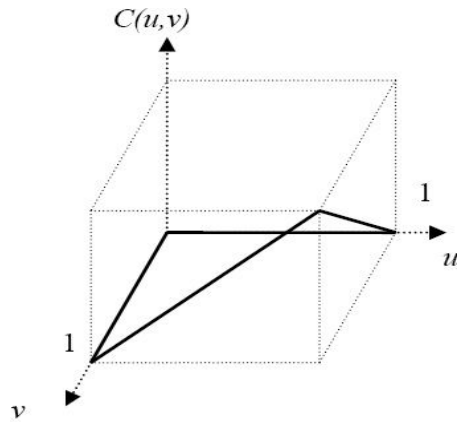


Figura 4 Representação da propriedade (i)

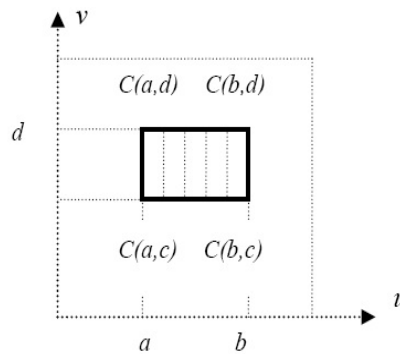


Figura 5 Representação da propriedade (ii)

$F(x)$ e $F(y)$, então existe uma cópula C tal que, para todo $x, y \in (-\infty, +\infty)$,

$$F(x, y) = C(F(x), F(y)).$$

Para quaisquer marginais $F_X(x)$ e $F_Y(y)$ e qualquer cópula $C(u, v)$, qualquer função $H(F_X^{-1}(u), F_Y^{-1}(v)) = C(u, v)$ é admissível como uma distribuição conjunta de (X, Y) . Além disso, se $F(x)$ e $F(y)$ são contínuas, a cópula C é única.

Para mais informações, ver Nelsen (1999).

Como exemplo, considere a obtenção da distribuição exponencial bivariada Gumbel tipo I via cópulas. Seja a cópula

$$C_{\theta}(u, v) = u + v - 1 + (1 - u)(1 - v) \exp[-\theta \ln(1 - u) \ln(1 - v)]$$

e as marginais acumuladas $u = H(x) = 1 - \exp(-x)$ e $v = G(y) = 1 - \exp(-y)$. A função de distribuição conjunta que preserva essas marginais e mantém a estrutura de dependência dada por $C_{\theta}(u, v)$ pode ser construída como:

$$\begin{aligned} F(x, y) &= C_{\theta}(H(x), G(y)) \\ &= 1 - \exp(-x) + 1 - \exp(-y) - 1 + \exp(-x) \exp(-y) \times \\ &\quad \times \exp\{-\theta \ln[\exp(-x)] \ln[\exp(-y)]\} \\ &= 1 - \exp(-x) - \exp(-y) + \exp(-x) \exp(-y) \exp(-\theta xy) \\ &= 1 - \exp(-x) - \exp(-y) + \exp[-(x + y + \theta xy)]. \end{aligned} \quad (2.43)$$

As marginais acumuladas de X e Y são,

$$F(x) = \lim_{y \rightarrow \infty} F(x, y) = 1 - \exp(-x) \quad \text{e} \quad (2.44)$$

$$F(y) = \lim_{x \rightarrow \infty} F(x, y) = 1 - \exp(-y). \quad (2.45)$$

A densidade conjunta da distribuição bivariada Gumbel tipo I é obtida por diferenciação de (2.43):

$$\begin{aligned} f(x, y) &= \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} [1 - \exp(-x) - \exp(-y) + \exp[-(x + y + \theta xy)]] \\ &= \frac{\partial}{\partial x} [\exp(-y) - \exp[-(x + y + \theta xy)] (1 + \theta x)] \\ &= -\theta \exp[-(x + y + \theta xy)] + (1 + \theta x) \exp[-(x + y + \theta xy)] (1 + \theta y) \\ &= \exp[-(x + y + \theta xy)] [(1 + \theta x)(1 + \theta y) - \theta] \end{aligned} \quad (2.46)$$

e as densidades marginais de X e Y são obtidas por diferenciação de (2.44) e (2.45), respectivamente. Assim,

$$f(x) = \frac{d}{dx} [F(x)] = \exp(-x) \text{ e}$$
$$f(y) = \frac{d}{dy} [F(y)] = \exp(-y).$$

Portanto, obtém-se que a distribuição exponencial bivariada Gumbel tipo I têm marginais de X e Y com distribuição exponencial de parâmetro 1.

3 METODOLOGIA

3.1 Modelos

A distribuição gama bivariada de Crovelli, embora tenha sido proposta na década de 70, apresenta alguns estudos em aberto. No presente trabalho foram deduzidas as distribuições marginais, acumuladas e condicionais; momento produto (X, Y) ; covariância e coeficiente de correlação; distribuição exata das variáveis $U = X + Y$, $P = XY$ e $Q = \frac{X}{X+Y}$ e seus respectivos momentos. Para demonstrar essas propriedades é utilizado basicamente o método de transformações de variáveis descrito na seção (2.6.1) e técnicas básicas de integração, aliado à importantes ferramentas matemáticas que são as funções especiais. As passagens matemáticas foram desenvolvidas em detalhes, permitindo assim uma melhor compreensão do texto.

Para a distribuição exponencial bivariada Gumbel tipo I foram deduzidas as distribuições e os momentos das variáveis U , P e Q . As demais propriedades dessa distribuição já encontram-se na literatura (BALAKRISHNAN; LAI, 2009).

Um modelo novo é apresentado e denominado distribuição bivariada gama beta tipo II. Esse modelo é um caso particular do modelo gama bivariado de Arnould e, com esta parametrização, ainda não foi estudado na literatura especializada. Para a distribuição gama beta II também foram deduzidas importantes propriedades, tais como: densidades de U , P e Q e momentos; covariância e coeficiente de correlação; sistema de equações para o cálculo dos estimadores de máxima verossimilhança dos parâmetros do modelo. Nadarajah (2007) apresenta a distribuição bivariada gama exponencial que surge como um caso particular da distribuição de Arnould.

3.2 Implementação computacional

As distribuições de U , P e Q deduzidas a partir dos modelos Crovelli, Gumbel tipo I e gama beta tipo II, apresentam densidades que, na sua maioria, dependem se funções especiais ou expansões em série. Desse modo, foram feitas rotinas no

software Maple versão 13, para obtenção das densidades estudadas e ajuste das mesmas. Foram utilizadas funções como: $\text{GAMMA}(\cdot)$, $\text{GAMMA}(\cdot, \cdot)$, $\text{Beta}(x, y)$, $\text{BesselK}(\cdot, \cdot)$, $\text{CylinderD}(a, x)$, $\text{hypergeom}([n1, n2, \dots], [d1, d2, \dots], z)$, $\text{Psi}(x)$, entre outras. Em paralelo, também foi utilizado o software R (R DEVELOPMENT CORE TEAM, 2010).

3.3 Dados reais

Para o ajuste dos modelos estudados foram utilizados os dados de medições diárias de precipitação pluviométrica (mm) no período de Julho de 2009 a Julho de 2011, totalizando 730 observações. Os dados foram coletados pelo Laboratório de Meteorologia Aplicada à Agricultura da Embrapa Trigo, localizada no município de Passo Fundo, Estado do Rio Grande do Sul (latitude: $28^{\circ}15'46''$ S; longitude: $52^{\circ}24'24''$ W; altitude: 684m) e encontram-se disponíveis livremente para download no endereço eletrônico <http://www.cnpt.embrapa.br/pesquisa/agromet>, motivo que levou à escolha e utilização desses dados no trabalho. O clima local é subtropical úmido, com chuvas em todos os meses do ano, sendo a média total anual de 1.788 mm.

As figuras 6, 7 e 8 apresentam os totais de precipitação mensal para os anos de 2009 a 2011.

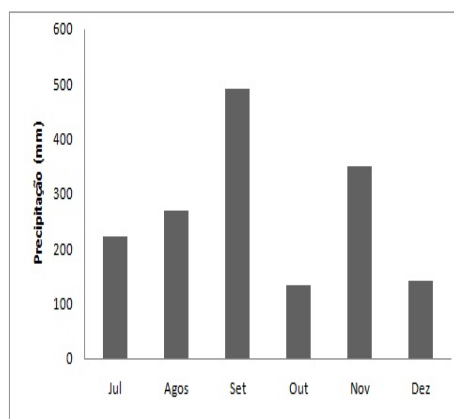


Figura 6 Precipitação mensal de julho a dezembro de 2009

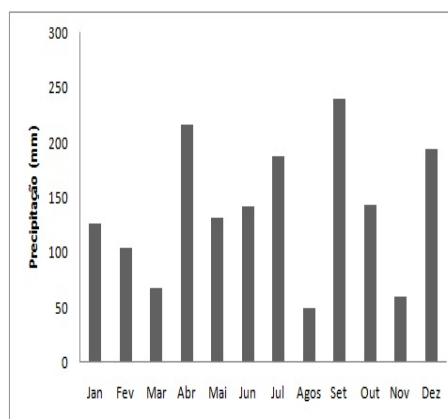


Figura 7 Precipitação mensal do ano 2010

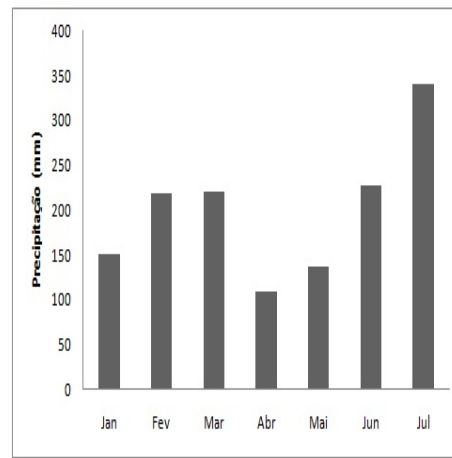


Figura 8 Precipitação mensal janeiro a julho de 2011

Utilizando as medições do índice pluviométrico, obtém-se os dados sobre período de dias com ocorrência de precipitações (X) e período contíguo de dias sem ocorrência de precipitação (Y). O objetivo é determinar as distribuições das variáveis:

1. Período climático (U) = período de dias com precipitação (X) + período contíguo de dias sem precipitação (Y);
2. Proporção de dias com precipitação (Q) = período de dias com precipitação (X) / (período de dias com precipitação (X) + período contíguo de dias sem precipitação (Y)).

Os valores diários da série de precipitação, 730 observações, foram agrupados considerando-se a ocorrência dos eventos X e Y , totalizando 118 pares da forma (X, Y) . A contagem para X é feita considerando-se do primeiro dia chuvoso até o primeiro dia sem ocorrência de chuva na sequência. Para Y considera-se do primeiro dia sem chuva até o primeiro dia chuvoso. Os valores observados para X e Y , nessa ordem, correspondem ao par ordenado (X, Y) que representa o número de dias chuvosos e o número de dias sem ocorrência de chuva consecutivos. Na

Tabela 3 são apresentadas estatísticas descritivas das variáveis X , Y , $U = X + Y$ e $Q = \frac{X}{X + Y}$.

Tabela 3 Estatísticas descritivas

	X	Y	U	Q
Mínimo	1,00	1,00	2	0,10
Máximo	9,00	20,0	24	0,88
Média	2,63	3,57	6,20	0.47

Na Tabela 8, anexo A, são apresentados os valores de X , Y e a precipitação total em cada período chuvoso.

3.4 Estimação

Os parâmetros do modelo gama bivariado de Crovelli foram estimados a partir de suas distribuições marginais via Método da Máxima Verossimilhança, devido à complexidade das equações. Esse procedimento foi utilizado com sucesso por Yue (2001) para estimar os parâmetros da distribuição gama bivariada de Smith, modelo (2.26).

Se $(x_1, y_1), \dots, (x_n, y_n)$ é uma amostra aleatória de (4.1), os estimadores de máxima verossimilhança dos parâmetros de α e β são, respectivamente:

$$\hat{\alpha} = \frac{2n}{\sum_{i=1}^n x_i} \quad \text{e} \quad \hat{\beta} = \frac{2n}{\sum_{i=1}^n y_i}, \quad (3.1)$$

em que $X \sim \text{Gama}(2, \alpha)$ e $Y \sim \text{Gama}(2, \beta)$.

Considere $K = X_1 + X_2 + \dots + X_n$. A variável aleatória K corresponde a uma soma de n variáveis gama com parâmetro de forma 2. Logo, $K \sim \text{Gama}(2n, \alpha)$ e $\frac{1}{K} \sim \text{GI}(2n, \alpha)$, (FELLER, 1991). Deste modo, a variância associada ao estimador $\hat{\alpha}$ é dada por:

$$\begin{aligned} \text{Var}(\hat{\alpha}) &= \text{Var}\left(\frac{2n}{\sum_{i=1}^n x_i}\right) \\ &= (4n^2) \text{Var}\left(\frac{1}{K}\right) \end{aligned}$$

De modo que,

$$\text{Var}(\hat{\alpha}) = \frac{4n^2 \hat{\alpha}^2}{(2n-1)^2 (2n-2)}. \quad (3.2)$$

Analogamente obtém-se que a variância associada ao estimador $\hat{\beta}$ é:

$$\text{Var}(\hat{\beta}) = \frac{n^2 \hat{\beta}^2}{(n-1)^2 (n-2)}. \quad (3.3)$$

Os parâmetros do modelo exponencial bivariado Gumbel tipo I foram obtidos pelo método da máxima verossimilhança. Seja $(x_1, y_1), \dots, (x_n, y_n)$ uma amostra aleatória de uma população com fdp expressa em (4.27). A função de verossimilhança é dada por:

$$\begin{aligned} L(\theta) &= \prod_{i=1}^n f(x_i, y_i) = \prod_{i=1}^n \exp[-(x_i + y_i + \theta x_i y_i)] [(1 + \theta x_i)(1 + \theta y_i) - \theta] \\ &= \exp\left[-\sum_{i=1}^n x_i + \sum_{i=1}^n y_i + \theta \sum_{i=1}^n x_i y_i\right] \prod_{i=1}^n [(1 + \theta x_i)(1 + \theta y_i) - \theta]. \end{aligned}$$

A função log-verossimilhança é dada por

$$\ln[L(\theta)] = -\sum_{i=1}^n x_i + \sum_{i=1}^n y_i + \theta \sum_{i=1}^n x_i y_i + \sum_{i=1}^n \ln[(1 + \theta x_i)(1 + \theta y_i) - \theta]. \quad (3.4)$$

Assim,

$$\frac{d \ln [L(\theta)]}{d\theta} = - \sum_{i=1}^n x_i y_i + \sum_{i=1}^n \frac{x_i + y_i + 2\theta x_i y_i - 1}{(1 + \theta x_i)(1 + \theta y_i) - \theta}.$$

O estimador de máxima verossimilhança do parâmetro θ é o valor $\hat{\theta}$ que é solução da equação abaixo

$$\sum_{i=1}^n \frac{x_i + y_i + 2\theta x_i y_i - 1}{(1 + \hat{\theta} x_i)(1 + \hat{\theta} y_i) - \hat{\theta}} - \sum_{i=1}^n x_i y_i = 0. \quad (3.5)$$

A equação (3.5) pode ser resolvida utilizando-se um software de computação algébrica.

Os parâmetros da distribuição bivariada gama beta tipo II são estimados pelo método da máxima verossimilhança. O modelo contém quatro parâmetros, a , c , α e β , sendo os estimadores soluções de um sistema de equações, o qual é resolvido numericamente no software Maple, versão 13.

3.5 Ajuste

Para verificar a qualidade do ajuste das distribuições de X , Y e U descritas pelos três modelos, será utilizado o gráfico de probabilidade observada versus a probabilidade esperada. Para os valores de X é plotado $F_X(x_{(i)})$ versus $(i - 0.375)/(n + 0.25)$, em que $F_X(\cdot)$ denota a função de distribuição acumulada de X e $x_{(i)}$ correspondem aos valores amostrados em ordem crescente. O mesmo procedimento é usado para as distribuições de Y e U .

Para contornar a subjetividade apresentada pelo teste gráfico é utilizado um teste de aderência que tem por objetivo testar a adequabilidade de um modelo probabilístico a um conjunto de dados observados. A estatística do teste é dada por:

$$\chi_c^2 = \sum_{i=1}^k \frac{(F_{O_i} - F_{E_i})^2}{F_{E_i}} \quad (3.6)$$

em que,

- F_{e_i} : Frequência esperada de elementos na classe i ;
- F_{o_i} : Frequência observada de elementos na classe i ;
- k : Número de classes.

A distribuição da estatística χ_c^2 é aproximada por uma distribuição qui-quadrado com $(k - 1)$ graus de liberdade. Quando o modelo a ser testado envolve a estimação de parâmetros desconhecidos a partir da mesma amostra com a qual será feito o teste de aderência, χ_c^2 tem distribuição aproximada de qui-quadrado com $(k - t - 1)$ graus de liberdade, em que t é o número de parâmetros estimados no modelo pelo método da máxima verossimilhança.

Observada a amostra, têm-se as seguintes hipóteses:

$$H_0 : f = f_0$$

$$H_1 : f \neq f_0$$

isto é, a amostra observada é proveniente de uma distribuição de probabilidades especificada, $f(\cdot)$ ou não. O critério para testar essas hipóteses com nível de significância α consiste em rejeitar H_0 se $\chi_c^2 > \chi_\alpha^2$.

O teste de qui-quadrado é sensível à presença de classes com pequenos valores das frequências esperadas. Assim é recomendado usar classes com frequências superiores a 5. Uma alternativa é agrupar as classes cujas frequências sejam inferiores a esse valor (FERREIRA, 2005). Deste modo, para a aplicação do teste, as classes são agrupadas conforme essa metodologia.

4 RESULTADOS E DISCUSSÃO

4.1 Distribuição Gama Bivariada de Crovelli

Sejam X e Y variáveis aleatórias com distribuição gama bivariada de Crovelli, cuja fdp conjunta é dada por:

$$f(x, y) = \begin{cases} \alpha\beta \exp(-\beta y) [1 - \exp(-\alpha x)] = f_1(x, y), & \text{se } 0 \leq \alpha x \leq \beta y \\ \alpha\beta \exp(-\alpha x) [1 - \exp(-\beta y)] = f_2(x, y), & \text{se } 0 \leq \beta y \leq \alpha x \end{cases}, \quad (4.1)$$

em que $x > 0$, $y > 0$, $\alpha > 0$ e $\beta > 0$.

Em palavras, como pode ser visto na Figura 9, a distribuição está localizada no primeiro quadrante e tem duas leis: acima da reta $y = \alpha x / \beta$, $f_1(x, y)$ e, abaixo da mesma reta, $f_2(x, y)$.

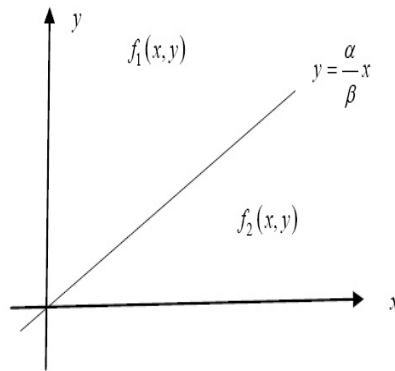


Figura 9 Região de integração.

Sob esse modelo tem-se que as densidades, $f(x)$ e $f(y)$, das distribuições marginais de X e Y são respectivamente:

$$f(x) = \int_0^{\alpha x/\beta} f_2(x, y) dy + \int_{\alpha x/\beta}^{\infty} f_1(x, y) dy.$$

Mas,

$$\begin{aligned} \int_0^{\alpha x/\beta} f_2(x, y) dy &= \int_0^{\alpha x/\beta} \alpha\beta \exp(-\alpha x) [1 - \exp(-\beta y)] dy \\ &= \alpha\beta \exp(-\alpha x) \int_0^{\alpha x/\beta} [1 - \exp(-\beta y)] dy \\ &= \alpha\beta \exp(-\alpha x) \left[y + \frac{1}{\beta} \exp(-\beta y) \right] \Big|_0^{\alpha x/\beta} \\ &= \alpha \exp(-\alpha x) [\alpha x + \exp(-\alpha x) - 1] \end{aligned} \quad (4.2)$$

e

$$\begin{aligned} \int_{\alpha x/\beta}^{\infty} f_1(x, y) dy &= \int_{\alpha x/\beta}^{\infty} \alpha\beta \exp(-\beta y) [1 - \exp(-\alpha x)] dy \\ &= \alpha\beta [1 - \exp(-\alpha x)] \int_{\alpha x/\beta}^{\infty} \exp(-\beta y) dy \\ &= \alpha\beta [1 - \exp(-\alpha x)] \left[-\frac{1}{\beta} \exp(-\beta y) \right] \Big|_{\alpha x/\beta}^{\infty} \\ &= \alpha \exp(-\alpha x) [1 - \exp(-\alpha x)]. \end{aligned} \quad (4.3)$$

Segue de (4.2) e (4.3) que

$$\begin{aligned} f(x) &= \alpha \exp(-\alpha x) [\alpha x + \exp(-\alpha x) - 1] + \alpha \exp(-\alpha x) [1 - \exp(-\alpha x)] \\ &= \alpha^2 x \exp(-\alpha x). \end{aligned} \quad (4.4)$$

Portanto, tem-se que $X \sim \text{Gama}(2, \alpha)$.

A marginal de Y é dada por:

$$f(y) = \int_0^{\beta y/\alpha} f_1(x, y) dx + \int_{\beta y/\alpha}^{+\infty} f_2(x, y) dx.$$

Mas,

$$\begin{aligned} \int_0^{\beta y/\alpha} f_1(x, y) dx &= \int_0^{\beta y/\alpha} \alpha\beta \exp(-\beta y) [1 - \exp(-\alpha x)] dx \\ &= \alpha\beta \exp(-\beta y) \int_0^{\beta y/\alpha} [1 - \exp(-\alpha x)] dx \\ &= \alpha\beta \exp(-\beta y) \left[x + \frac{\exp(-\alpha x)}{\alpha} \right] \Big|_0^{\beta y/\alpha} \\ &= \beta \exp(-\beta y) [\beta y + \exp(-\beta y) - 1] \end{aligned} \quad (4.5)$$

e

$$\begin{aligned} \int_{\beta y/\alpha}^{+\infty} f_2(x, y) dx &= \int_{\beta y/\alpha}^{+\infty} \alpha\beta \exp(-\alpha x) [1 - \exp(-\beta y)] dx \\ &= \alpha\beta \exp(-\alpha x) \int_{\beta y/\alpha}^{+\infty} [1 - \exp(-\beta y)] dx \\ &= \alpha\beta [1 - \exp(-\beta y)] \left[-\frac{\exp(-\alpha x)}{\alpha} \right] \Big|_{\beta y/\alpha}^{+\infty} \\ &= \beta \exp(-\beta y) [1 - \exp(-\beta y)]. \end{aligned} \quad (4.6)$$

Segue de (4.5) e (4.6) que

$$f(y) = \beta \exp(-\beta y) [\beta y + \exp(-\beta y) - 1] + \beta \exp(-\beta y) [1 - \exp(-\beta y)]$$

$$\begin{aligned}
f(y) &= \beta^2 y \exp(-\beta y) + \beta \exp(-2\beta y) - \beta \exp(-\beta y) + \beta \exp(-\beta y) - \\
&\quad - \beta \exp(-2\beta y) \\
&= \beta^2 y \exp(-\beta y).
\end{aligned} \tag{4.7}$$

Portanto, tem-se que $Y \sim \text{Gama}(2, \beta)$.

A distribuição acumulada de (x, y) é,

$$F(x, y) = \int_{-\infty}^x \int_{-\infty}^y f(u, v) \, dv \, du.$$

(i) Se $y > \frac{\alpha}{\beta}x$

$$\begin{aligned}
F(x, y) &= F_1(x, y) = \int_0^x \int_0^{\alpha u/\beta} f_2(u, v) \, dv \, du + \int_0^x \int_{\alpha u/\beta}^y f_1(u, v) \, dv \, du \\
&= \int_0^x \int_0^{\alpha u/\beta} \alpha \beta \exp(-\alpha u) [1 - \exp(-\beta v)] \, dv \, du + \\
&\quad + \int_0^x \int_{\alpha u/\beta}^y \alpha \beta \exp(-\beta v) [1 - \exp(-\alpha u)] \, dv \, du \\
&= \int_0^x \alpha \exp(-\alpha u) \left[\int_0^{\alpha u/\beta} \beta [1 - \exp(-\beta v)] \, dv \right] \, du + \\
&\quad + \int_0^x \alpha [1 - \exp(-\alpha u)] \left[\int_{\alpha u/\beta}^y \beta \exp(-\beta v) \, dv \right] \, du
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
F(x, y) &= \int_0^x \alpha \exp(-\alpha u) [\alpha u + \exp(-\alpha u) - 1] du + \\
&\quad + \int_0^x \alpha [1 - \exp(-\alpha u)] [\exp(-\alpha u) - \exp(-\beta y)] du \\
&= \int_0^x \alpha^2 u \exp(-\alpha u) du - \exp(-\beta y) \int_0^x \alpha [1 - \exp(-\alpha u)] du \\
&= -\alpha x \exp(-\alpha x) - \exp(-\alpha x) + 1 - \exp(-\beta y) [\alpha x + \exp(-\alpha x) - 1] \\
&= 1 - \exp(-\alpha x) (\alpha x + 1) - \exp(-\beta y) [\alpha x + \exp(-\alpha x) - 1].
\end{aligned}$$

(ii) Se $y < \frac{\alpha}{\beta} x$

$$\begin{aligned}
F(x, y) &= F_2(x, y) = \int_0^y \int_0^{\beta v/\alpha} f_1(u, v) du dv + \int_0^y \int_{\beta v/\alpha}^x f_2(u, v) du dv \\
&= \int_0^y \int_0^{\beta v/\alpha} \alpha \beta \exp(-\beta v) [1 - \exp(-\alpha u)] du dv + \\
&\quad + \int_0^y \int_{\beta v/\alpha}^x \alpha \beta \exp(-\alpha u) [1 - \exp(-\beta v)] du dv \\
&= \int_0^y \beta \exp(-\beta v) \left[\int_0^{\beta v/\alpha} \alpha [1 - \exp(-\alpha u)] du \right] dv + \\
&\quad + \int_0^y \beta [1 - \exp(-\beta v)] \left[\int_{\beta v/\alpha}^x \alpha \exp(-\alpha u) du \right] dv
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
F(x, y) &= \int_0^y \beta \exp(-\beta v) [\beta v + \exp(-\beta v) - 1] dv + \\
&\quad + \int_0^y \beta [1 - \exp(-\beta v)] [\exp(-\beta v) - \exp(-\alpha x)] dv \\
&= \int_0^y \beta^2 v \exp(-\beta v) dv - \exp(-\alpha x) \int_0^y \beta [1 - \exp(-\beta v)] dv \\
&= 1 - \exp(-\beta y) (\beta y + 1) - \exp(-\alpha x) [\beta y + \exp(-\beta y) - 1].
\end{aligned}$$

Assim, as distribuições marginais acumuladas são dadas por:

$$F(x) = F(x, \infty) = F_1(x, \infty) = 1 - \exp(-\alpha x) (\alpha x + 1) \quad \text{e} \quad (4.8)$$

$$F(y) = F(\infty, y) = F_2(\infty, y) = 1 - \exp(-\beta y) (\beta y + 1) \quad (4.9)$$

As densidades marginais de X e Y também podem ser obtidas pela derivação de (4.8) e (4.9), respectivamente.

$$f(x) = \frac{d}{dx} [F(x)] = \alpha^2 x \exp(-\alpha x) \quad \text{e} \quad (4.10)$$

$$f(y) = \frac{d}{dy} [F(y)] = \beta^2 y \exp(-\beta y). \quad (4.11)$$

Os resultados obtidos conferem com os apresentados em (4.4) e (4.7).

Na Figura 10 é apresentada a superfície gama bivariada de Crovelli para $\alpha = 2, 5$ e $\beta = 1, 3$.

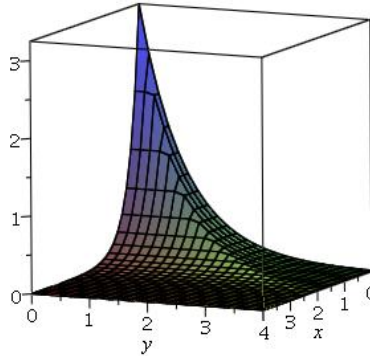


Figura 10 Superfície Crovelli, $\alpha = 2, 5; \beta = 1, 3$

4.1.1 Distribuições condicionais, covariância e correlação

O uso de distribuições condicionais nos permite definir probabilidades condicionais de eventos associados com uma variável aleatória quando é dado o valor de uma segunda variável aleatória.

Se X e Y são conjuntamente distribuídas de acordo com o modelo (4.1), então a fdp condicional de X dado que $Y = y$ é dada por:

$$\begin{aligned} f(X|Y = y) &= \frac{f_1(x, y)}{f(y)} = \frac{\alpha\beta \exp(-\beta y) [1 - \exp(-\alpha x)]}{\beta^2 y \exp(-\beta y)} \\ &= \frac{\alpha}{\beta y} [1 - \exp(-\alpha x)], \text{ para } 0 \leq \alpha x \leq \beta y \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} f(X|Y = y) &= \frac{f_2(x, y)}{f(y)} = \frac{\alpha\beta \exp(-\alpha x) [1 - \exp(-\beta y)]}{\beta^2 y \exp(-\beta y)} \\ &= \frac{\alpha \exp(-\alpha x + \beta y) - \alpha \exp(-\alpha x)}{\beta y} \\ &= \frac{\alpha}{\beta y} \exp(-\alpha x) [\exp(\beta y) - 1], \text{ para } 0 \leq \beta y \leq \alpha x. \end{aligned}$$

Portanto,

$$f(X|Y=y) = \begin{cases} \alpha(\beta y)^{-1} [1 - \exp(-\alpha x)], & \text{se } 0 \leq \alpha x \leq \beta y \\ \alpha(\beta y)^{-1} \exp(-\alpha x) [\exp(\beta y) - 1], & \text{se } 0 \leq \beta y \leq \alpha x. \end{cases}$$

Analogamente, a fdp condicional de Y dado que $X = x$ é:

$$\begin{aligned} f(Y|X=x) &= \frac{f_1(x,y)}{f(x)} = \frac{\alpha\beta \exp(-\beta y) [1 - \exp(-\alpha x)]}{\alpha^2 x \exp(-\alpha x)} \\ &= \frac{\beta \exp(-\beta y + \alpha x) - \beta \exp(-\beta y)}{\alpha x} \\ &= \frac{\beta}{\alpha x} \exp(-\beta y) [\exp(\alpha x) - 1], \text{ para } 0 \leq \alpha x \leq \beta y \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} f(Y|X=x) &= \frac{f_2(x,y)}{f(x)} = \frac{\alpha\beta \exp(-\alpha x) [1 - \exp(-\beta y)]}{\alpha^2 x \exp(-\alpha x)} \\ &= \frac{\beta}{\alpha x} [1 - \exp(-\beta y)], \text{ para } 0 \leq \beta y \leq \alpha x. \end{aligned}$$

Portanto,

$$f(Y|X=x) = \begin{cases} \beta(\alpha x)^{-1} \exp(-\beta y) [\exp(\alpha x) - 1], & \text{se } 0 \leq \alpha x \leq \beta y \\ \beta(\alpha x)^{-1} [1 - \exp(-\beta y)], & \text{se } 0 \leq \beta y \leq \alpha x. \end{cases}$$

A covariância e o coeficiente de correlação são medidas de associação linear entre duas variáveis aleatórias (MOOD; GRAYBILL; BOES, 1974). O coeficiente de correlação mede em que grau e sentido ocorre a relação linear entre duas variáveis. Quando ρ é igual a +1 ou -1 significa que temos uma correlação perfeita entre as variáveis. Se a correlação for positiva, indica que se X cresce então Y têm tendência a crescer; se negativa indica que X tende a decrescer sempre que Y cresce (vice versa). Se $\rho = 0$, as duas variáveis não dependem "linearmente" uma da outra.

Para o cálculo da covariância e do coeficiente de correlação é necessário co-

hecer as distribuições de X e Y e o momento do produto, ou seja, $E[XY]$.

Lema 4.1 *Se X e Y têm distribuição conjunta dada pelo modelo (4.1), então:*

$$E[X^n Y^m] = \frac{m!}{\alpha^n \beta^m 2^{n+1}} \sum_{k=0}^m \frac{(n+k)! (2^{n+k+1} - 1)}{k! 2^k} + \\ + \frac{n!}{\alpha^n \beta^m 2^{m+1}} \sum_{k=0}^n \frac{(m+k)! (2^{m+k+1} - 1)}{k! 2^k}$$

para os inteiros $n \geq 1$ e $m \geq 1$.

Demonstração: De (4.1) podemos afirmar que:

$$E[X^n Y^m] = \alpha\beta \int_0^{\infty} \int_{\frac{\alpha x}{\beta}}^{\infty} x^n y^m \exp(-\beta y) [1 - \exp(-\alpha x)] dy dx + \\ + \alpha\beta \int_0^{\infty} \int_{\frac{\beta y}{\alpha}}^{\infty} x^n y^m \exp(-\alpha x) [1 - \exp(-\beta y)] dx dy \\ = \alpha\beta \int_0^{\infty} x^n [1 - \exp(-\alpha x)] \left[\int_{\alpha x/\beta}^{\infty} y^m \exp(-\beta y) dy \right] dx + \\ + \alpha\beta \int_0^{\infty} y^m [1 - \exp(-\beta y)] \left[\int_{\beta y/\alpha}^{\infty} x^n \exp(-\alpha x) dx \right] dy.$$

Fazendo a mudança das variáveis $t = \beta y$ e $v = \alpha x$, temos:

$$E[X^n Y^m] = \alpha\beta \int_0^{\infty} x^n [1 - \exp(-\alpha x)] \beta^{-(m+1)} \left[\int_{\alpha x}^{\infty} t^m \exp(-t) dt \right] dx + \\ + \alpha\beta \int_0^{\infty} y^m [1 - \exp(-\beta y)] \alpha^{-(n+1)} \left[\int_{\beta y}^{\infty} v^n \exp(-v) dv \right] dy.$$

Aplicando a definição da função gama incompleta complementar, (2.6), obtém-se:

$$E[X^n Y^m] = \alpha \beta^{-m} \int_0^{\infty} x^n \Gamma(m+1, \alpha x) [1 - \exp(-\alpha x)] dx + \\ + \beta \alpha^{-n} \int_0^{\infty} y^m \Gamma(n+1, \beta y) [1 - \exp(-\beta y)] dy.$$

Utilizando a identidade, $\Gamma(n+1, x) = n! \exp(-x) \sum_{k=0}^n \frac{x^k}{k!}$, (OLDHAM; MYLAND; SPANIER, 2009), segue que:

$$E[X^n Y^m] = \alpha \beta^{-m} \int_0^{\infty} x^n \left[m! \exp(-\alpha x) \sum_{k=0}^m \frac{(\alpha x)^k}{k!} \right] [1 - \exp(-\alpha x)] dx + \\ + \beta \alpha^{-n} \int_0^{\infty} y^m \left[n! \exp(-\beta y) \sum_{k=0}^n \frac{(\beta y)^k}{k!} \right] [1 - \exp(-\beta y)] dy \\ = \alpha \beta^{-m} m! \sum_{k=0}^m \frac{\alpha^k}{k!} \int_0^{\infty} x^{n+k} \exp(-\alpha x) [1 - \exp(-\alpha x)] dx + \\ + \beta \alpha^{-n} n! \sum_{k=0}^n \frac{\beta^k}{k!} \int_0^{\infty} y^{m+k} \exp(-\beta y) [1 - \exp(-\beta y)] dy \\ = \alpha \beta^{-m} m! \sum_{k=0}^m \frac{\alpha^k}{k!} \left[\frac{\Gamma(n+k+1)}{\alpha^{n+k+1}} - \frac{\Gamma(n+k+1)}{(2\alpha)^{n+k+1}} \right] + \\ + \beta \alpha^{-n} n! \sum_{k=0}^n \frac{\beta^k}{k!} \left[\frac{\Gamma(m+k+1)}{\beta^{m+k+1}} - \frac{\Gamma(m+k+1)}{(2\beta)^{m+k+1}} \right].$$

Portanto,

$$E[X^n Y^m] = \alpha \beta^{-m} m! \sum_{k=0}^m \frac{\alpha^k (n+k)! (2^{n+k+1})}{k! (2\alpha)^{n+k+1}} + \\ + \beta \alpha^{-n} n! \sum_{k=0}^n \frac{\beta^k (m+k)! (2^{m+k+1})}{k! (2\beta)^{m+k+1}}$$

$$E[X^n Y^m] = \frac{m!}{\alpha^n \beta^m 2^{n+1}} \sum_{k=0}^m \frac{(n+k)! (2^{n+k+1} - 1)}{k! 2^k} + \frac{n!}{\alpha^n \beta^m 2^{m+1}} \sum_{k=0}^n \frac{(m+k)! (2^{m+k+1} - 1)}{k! 2^k}.$$

Em particular, se $n = m = 1$ tem-se que:

$$\begin{aligned} E[XY] &= \frac{1}{\alpha\beta 2^2} \sum_{k=0}^1 \frac{(k+1)! (2^{k+2} - 1)}{k! 2^k} + \\ &+ \frac{1}{\alpha\beta 2^2} \sum_{k=0}^1 \frac{(k+1)! (2^{k+2} - 1)}{k! 2^k} \\ &= \frac{5}{\alpha\beta}. \end{aligned}$$

Partindo das distribuições marginais de X e Y e utilizando o lema (4.1), obtém-se a covariância e o coeficiente de correlação dessas variáveis.

Tem-se que $X \sim \text{Gama}(2, \alpha)$ e $Y \sim \text{Gama}(2, \beta)$, de modo que

$$E[X] = \frac{2}{\alpha}, \quad \text{Var}[X] = \frac{2}{\alpha^2} \text{ e}$$

$$E[Y] = \frac{2}{\beta}, \quad \text{Var}[Y] = \frac{2}{\beta^2}.$$

Assim, a covariância das variáveis aleatórias X e Y é dada por

$$\begin{aligned} \text{Cov}[X, Y] &= E[XY] - E[X]E[Y] \\ &= \frac{5}{\alpha\beta} - \frac{2}{\alpha} \times \frac{2}{\beta} \\ &= \frac{1}{\alpha\beta} \end{aligned} \tag{4.12}$$

e o coeficiente de correlação $\rho_{X,Y}$, $|\rho_{X,Y}| \leq 1$, é

$$\begin{aligned}
\rho_{X,Y} &= \frac{Cov[X, Y]}{\sqrt{Var[X]}\sqrt{Var[Y]}} \\
&= \frac{1/\alpha\beta}{\sqrt{2/\alpha^2}\sqrt{2/\beta^2}} \\
&= \frac{1}{2}.
\end{aligned} \tag{4.13}$$

Note que a distribuição gama bivariada de Crovelli apresenta uma certa rigidez, isto é o coeficiente de correlação não depende dos parâmetros do modelo, apresentando sempre um valor fixo igual a $1/2$. Essa característica da família pode ser de interesse em determinados estudos onde sabe-se a priori que duas variáveis em estudo apresentam essa correlação.

4.1.2 Funções Densidades de Probabilidade

Considere X e Y variáveis aleatórias com distribuição conjunta gama bivariada de Crovelli. Sejam U , P e Q combinações dessas variáveis, definidas por: $U = X + Y$, $P = XY$ e $Q = X/(X + Y)$. Tem-se então a seguinte transformação:

$$(x, y) \rightarrow \left(x + y, \frac{x}{x + y} \right)$$

$$\begin{aligned}
u &= x + y \Rightarrow y = u - x \text{ e} \\
q &= \frac{x}{x + y} = \frac{x}{u} \Rightarrow x = uq \Rightarrow y = u(1 - q).
\end{aligned}$$

O Jacobiano é dado por:

$$J = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial q} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial q} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} q & u \\ 1 - q & -u \end{vmatrix} = -u.$$

A fdp conjunta das variáveis U e Q é obtida por:

$$f(u, q) = |J| \times f(uq, u(1 - q))$$

e portanto,

$$f(u, q) = \begin{cases} \alpha\beta u \exp[-\beta u(1 - q)] [1 - \exp(-\alpha uq)], & \text{se } 0 \leq q \leq \lambda \\ \alpha\beta u \exp(-\alpha uq) [1 - \exp(-\beta u + \beta uq)], & \text{se } \lambda \leq q \leq 1 \end{cases}$$

com $u > 0$, $0 < q < 1$ e $\lambda = \frac{\beta}{\alpha + \beta}$.

Além disso, tem-se a transformação $P = XY$ tal que $(x, y) \rightarrow (x, xy)$, cujo Jacobiano é dado por:

$$J = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -p/x^2 & 1/x \end{vmatrix} = \frac{1}{x}.$$

Assim, a fdp conjunta das variáveis X e P é dada por:

$$f(x, p) = \begin{cases} \alpha\beta x^{-1} \exp(-\beta px^{-1}) [1 - \exp(-\alpha x)], & \text{se } 0 < x \leq \delta \\ \alpha\beta x^{-1} \exp(-\alpha x) [1 - \exp(-\beta px^{-1})], & \text{se } \delta < x \end{cases}$$

em que $\delta = \sqrt{\frac{\beta p}{\alpha}}$.

Nos teoremas 4.1, 4.2 e 4.3 são deduzidas as fdps de U , P e Q quando X e Y seguem o modelo (4.1).

Teorema 4.1 *Se X e Y têm distribuição conjunta dada pelo modelo (4.1), então:*

$$f(u) = (\alpha + \beta) \exp(-\alpha \lambda u) + \frac{\alpha^2 \exp(-\beta u) - \beta^2 \exp(-\alpha u)}{\beta - \alpha}, \quad (4.14)$$

com $u > 0$ e $\lambda = \frac{\beta}{\alpha + \beta}$.

Demonstração: De (4.14) tem-se que fdp de U pode ser escrita como:

$$\begin{aligned}
f(u) &= \int_0^\lambda f(u, q) dq + \int_\lambda^1 f(u, q) dq \\
&= \int_0^\lambda \alpha\beta u \exp[-\beta u(1-q)] [1 - \exp(-\alpha uq)] dq + \\
&\quad + \int_\lambda^1 \alpha\beta u \exp(-\alpha uq) [1 - \exp(-\beta u + \beta uq)] dq \\
&= \alpha\beta u \exp(-\beta u) \left\{ \int_0^\lambda \exp(\beta uq) dq - \int_0^\lambda \exp[uq(\beta - \alpha)] dq \right\} + \\
&\quad + \alpha\beta u \left\{ \int_\lambda^1 \exp(-\alpha uq) dq - \exp(-\beta u) \int_\lambda^1 \exp[uq(\beta - \alpha)] dq \right\} \\
&= \alpha\beta u \exp(-\beta u) \left\{ \frac{\exp(\beta u\lambda) - 1}{\beta u} - \frac{\exp[u\lambda(\beta - \alpha)] - 1}{u(\beta - \alpha)} \right\} - \\
&\quad - \alpha\beta u \exp(-\beta u) \left\{ \frac{\exp[u(\beta - \alpha)] - \exp[u\lambda(\beta - \alpha)]}{u(\beta - \alpha)} \right\} + \\
&\quad + \alpha\beta u \left[\frac{\exp(-\alpha u\lambda) - \exp(-\alpha u)}{\alpha u} \right]. \tag{4.15}
\end{aligned}$$

O resultado do teorema segue da simplificação da expressão (4.15).

A Figura 11 ilustra a forma da fdp de U para certos valores de α e β .

Teorema 4.2 *Se X e Y têm distribuição conjunta dada pelo modelo (4.1), então:*

$$f_P(p) = 2\alpha\beta \left[\Gamma(0, \sqrt{\alpha\beta p}) - K_0(2\sqrt{\alpha\beta p}) \right] \tag{4.16}$$

para $0 < p < \infty$.

Demonstração: Sob o modelo (4.14) a fdp de P pode ser expressa por:

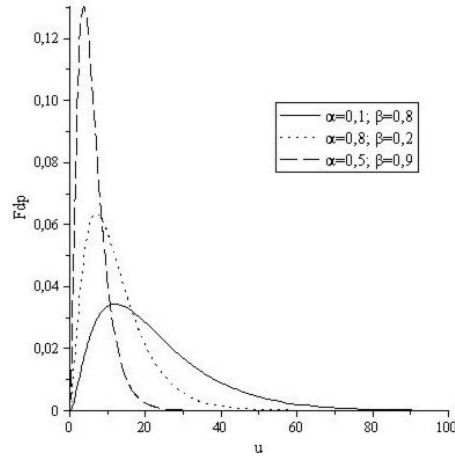


Figura 11 Gráfico da fdp de $U = X + Y$.

$$\begin{aligned}
 f(p) &= \int_0^{\delta} f(x, p) dx + \int_{\delta}^{+\infty} f(x, p) dx \\
 &= \alpha\beta \int_0^{\delta} x^{-1} \exp(-\beta px^{-1}) [1 - \exp(-\alpha x)] dx + \\
 &\quad + \alpha\beta \int_{\delta}^{+\infty} x^{-1} \exp(-\alpha x) [1 - \exp(-\beta px^{-1})] dx \\
 &= \alpha\beta \left\{ \int_0^{\delta} x^{-1} \exp(-\beta px^{-1}) dx - \int_0^{\delta} x^{-1} \exp\left(-\alpha x - \frac{\beta p}{x}\right) dx \right\} + \\
 &\quad + \alpha\beta \left\{ \int_{\delta}^{+\infty} x^{-1} \exp(-\alpha x) dx - \int_{\delta}^{+\infty} x^{-1} \exp\left(-\alpha x - \frac{\beta p}{x}\right) dx \right\} \\
 &= \alpha\beta \left\{ \int_0^{\delta} x^{-1} \exp(-\beta px^{-1}) dx - \int_0^{\infty} x^{-1} \exp\left(-\alpha x - \frac{\beta p}{x}\right) dx \right\} + \\
 &\quad + \alpha\beta \int_{\delta}^{\infty} x^{-1} \exp(-\alpha x) dx.
 \end{aligned}$$

Fazendo a mudança das variáveis $t = \beta p/x$ e $k = \alpha x$ tem-se:

$$f(p) = \alpha\beta \int_{\sqrt{\alpha\beta p}}^{+\infty} t^{-1} \exp(-t) dt - \alpha\beta \int_0^{\infty} x^{-1} \exp\left(-\alpha x - \frac{\beta p}{x}\right) dx + \\ + \alpha\beta \int_{\sqrt{\alpha\beta p}}^{+\infty} k^{-1} \exp(-k) dk.$$

Aplicando a definição da função gama incompleta complementar, equação (2.6), e do lema (2.3) às parcelas, tem-se

$$f(p) = \alpha\beta\Gamma\left(0, \sqrt{\alpha\beta p}\right) - 2\alpha\beta K_0\left(2\sqrt{\alpha\beta p}\right) + \alpha\beta\Gamma\left(0, \sqrt{\alpha\beta p}\right) \\ = 2\alpha\beta \left[\Gamma(0, \sqrt{\alpha\beta p}) - K_0(2\sqrt{\alpha\beta p}) \right].$$

A Figura 12 ilustra a forma da fdp de P para certos valores de α e β .

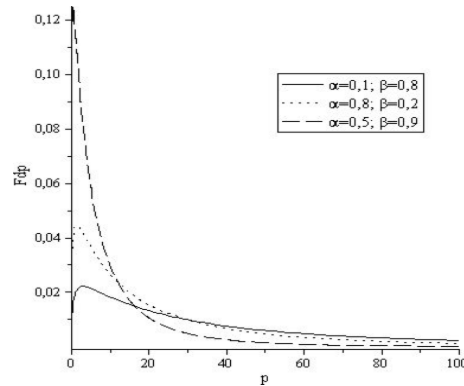


Figura 12 Gráfico da fdp de $P = XY$.

Teorema 4.3 Se X e Y têm distribuição conjunta dada pelo modelo (4.1), então:

$$f(q) = \begin{cases} \frac{\alpha}{\beta(1-q)^2} - \frac{\alpha\beta}{[\beta(1-q) + \alpha q]^2}, & \text{se } q \leq \lambda \\ \frac{\beta}{\alpha q^2} - \frac{\alpha\beta}{[\beta(1-q) + \alpha q]^2}, & \text{se } \lambda < q \end{cases} \quad (4.17)$$

com $0 < q < 1$ e $\lambda = \frac{\beta}{\alpha + \beta}$.

Demonstração: Sob o modelo (4.14), a fdp de Q pode ser escrita como:

$$f(q) = \begin{cases} \alpha\beta \int_0^{\infty} u \exp[-\beta u(1-q)] [1 - \exp(-\alpha uq)] du, & \text{se } 0 \leq q \leq \lambda \\ \alpha\beta \int_0^{\infty} u \exp(-\alpha uq) [1 - \exp(-\beta u + \beta uq)] du, & \text{se } \lambda \leq q \leq 1. \end{cases}$$

(i) Se $q \leq \lambda$

$$\begin{aligned} f(q) &= \alpha\beta \int_0^{\infty} u \exp[-\beta(1-q)u] [1 - \exp(-\alpha uq)] du \\ &= \alpha\beta \int_0^{\infty} u \exp[-\beta(1-q)u] du - \alpha\beta \int_0^{\infty} u \exp[-(\beta(1-q) + \alpha q)u] du \\ &= \frac{\alpha\beta\Gamma(2)}{(\beta - \beta q)^2} \int_0^{\infty} \frac{(\beta - \beta q)^2}{\Gamma(2)} u \exp[-\beta(1-q)u] du - \frac{\alpha\beta\Gamma(2)}{[\beta(1-q) + \alpha q]^2} \\ &\quad \times \int_0^{\infty} \frac{[\beta(1-q) + \alpha q]^2}{\Gamma(2)} u \exp[-(\beta(1-q) + \alpha q)u] du \\ &= \frac{\alpha\beta\Gamma(2)}{(\beta - \beta q)^2} - \frac{\alpha\beta\Gamma(2)}{[\beta(1-q) + \alpha q]^2} \\ &= \frac{\alpha}{\beta(1-q)^2} - \frac{\alpha\beta}{[\beta(1-q) + \alpha q]^2}; \end{aligned}$$

(ii) Se $q > \lambda$

$$\begin{aligned} f(q) &= \alpha\beta \int_0^{\infty} u \exp(-\alpha uq) [1 - \exp(-\beta u + \beta uq)] du \\ &= \alpha\beta \int_0^{\infty} u \exp(-\alpha uq) du - \alpha\beta \int_0^{\infty} u \exp[-u(\beta(1-q) + \alpha q)] du \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
f(q) &= \frac{\alpha\beta\Gamma(2)}{(\alpha q)^2} \int_0^\infty \frac{(\alpha q)^2}{\Gamma(2)} u \exp(-\alpha u q) du - \frac{\alpha\beta\Gamma(2)}{[\beta(1-q) + \alpha q]^2} \times \\
&\quad \times \int_0^\infty \frac{[\beta(1-q) + \alpha q]^2}{\Gamma(2)} u \exp[-u(\beta(1-q) + \alpha q)] du \\
&= \frac{\alpha\beta\Gamma(2)}{(\alpha q)^2} - \frac{\alpha\beta\Gamma(2)}{[\beta(1-q) + \alpha q]^2} \\
&= \frac{\beta}{\alpha q^2} - \frac{\alpha\beta}{[\beta(1-q) + \alpha q]^2}.
\end{aligned}$$

A Figura 13 ilustra a forma da fdp de Q para diferentes valores de α e β .

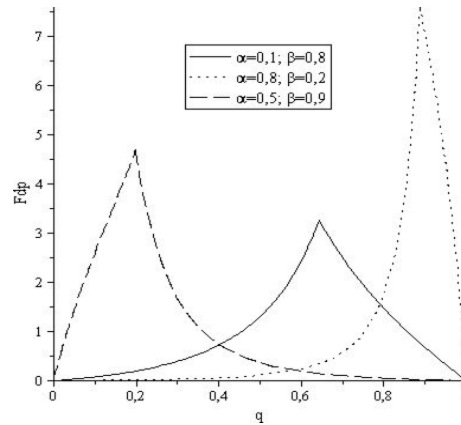


Figura 13 Gráfico da fdp de $Q = X/(X + Y)$.

4.1.3 Funções de Distribuição Acumulada

Nos teoremas 4.4 e 4.5 são deduzidas as fdas de $U = X+Y$ e $Q = X/(X+Y)$ quando X e Y seguem o modelo (4.1).

Teorema 4.4 *Se X e Y têm distribuição conjunta dada pelo modelo (4.1), então:*

$$F(u) = \frac{\beta^3 \exp(-\alpha u) - \alpha^3 \exp(-\beta u)}{\alpha\beta(\beta - \alpha)} - \frac{(\alpha + \beta) \exp(-\lambda\alpha u)}{\alpha\lambda} + 1 \quad (4.18)$$

se $u > 0$ e $F_U(u) = 0$ caso contrário.

Demonstração: De (4.14) tem-se que a fda de $U = X + Y$ é:

$$\begin{aligned} F(u) &= \int_0^u \left[(\alpha + \beta) \exp(-\alpha\lambda t) + \frac{\alpha^2 \exp(-\beta t) - \beta^2 \exp(-\alpha t)}{\beta - \alpha} \right] dt \\ &= (\alpha + \beta) \int_0^u \exp(-\alpha\lambda t) dt + \frac{\alpha^2}{(\beta - \alpha)} \int_0^u \exp(-\beta t) dt - \\ &\quad - \frac{\beta^2}{(\beta - \alpha)} \int_0^u \exp(-\alpha t) dt \\ &= \frac{-(\alpha + \beta) \exp(-\alpha\lambda t)}{\alpha\lambda} \Big|_0^u - \frac{\alpha^2 \exp(-\beta t)}{(\beta - \alpha)} \Big|_0^u + \frac{\beta^2 \exp(-\alpha t)}{(\beta - \alpha)} \Big|_0^u \\ &= \frac{(\alpha + \beta) [1 - \exp(-\alpha\lambda u)]}{\alpha\lambda} + \frac{\alpha^2 [1 - \exp(-\beta u)]}{\beta(\beta - \alpha)} + \\ &\quad + \frac{\beta^2 [\exp(-\alpha u) - 1]}{\alpha(\beta - \alpha)}. \end{aligned} \quad (4.19)$$

A conclusão do teorema decorre da simplificação da expressão (4.19).

Teorema 4.5 *Se X e Y têm distribuição conjunta dada pelo modelo (4.1), então:*

$$F(q) = \begin{cases} 0, & \text{se } q \leq 0 \\ \frac{\alpha\beta}{(\alpha - \beta)[\beta(1 - q) + \alpha q]} + \frac{\alpha}{\beta} \left[\frac{\alpha q - \beta}{(\alpha - \beta)(1 - q)} \right], & \text{se } 0 < q \leq \lambda \\ \frac{\alpha\beta}{(\alpha - \beta)[\beta(1 - q) + \alpha q]} - \frac{\beta}{\alpha q} - \frac{\beta^2}{\alpha(\alpha - \beta)} + 1, & \text{se } \lambda < q < 1 \\ 1, & \text{se } 1 \leq q \end{cases}$$

para $0 < q < 1$.

Demonstração: De (4.17) tem-se que a fda de $Q = X/(X + Y)$ é:

(i) para $0 < q \leq \lambda$

$$\begin{aligned} F_Q(q) &= \int_0^q \left\{ \frac{\alpha}{\beta(1-t)^2} - \frac{\alpha\beta}{[\beta(1-t) + \alpha t]^2} \right\} dt \\ &= \frac{\alpha}{\beta} \int_0^q \frac{1}{(1-t)^2} dt - \alpha\beta \int_0^q \frac{1}{[\beta(1-t) + \alpha t]^2} dt. \end{aligned}$$

Fazendo a mudança das variáveis $k = 1 - t$ e $v = \beta(1 - t) + \alpha t$, tem-se:

$$\begin{aligned} F(q) &= -\frac{\alpha}{\beta} \int_1^{1-q} \frac{1}{k^2} dk - \frac{\alpha\beta}{\alpha - \beta} \int_{\beta}^{\beta(1-q) + \alpha q} \frac{1}{v^2} dv \\ &= \frac{\alpha}{\beta(1-q)} - \frac{\alpha}{\beta} + \frac{\alpha\beta}{(\alpha - \beta)[\beta(1-q) + \alpha q]} - \frac{\alpha\beta}{\beta(\alpha - \beta)} \\ &= \frac{\alpha\beta}{(\alpha - \beta)[\beta(1-q) + \alpha q]} + \frac{\alpha}{\beta} \left[\frac{\alpha q - \beta}{(1-q)(\alpha - \beta)} \right]; \end{aligned}$$

(ii) para $\lambda < q < 1$:

$$\begin{aligned} F(q) &= \int_0^{\lambda} \left\{ \frac{\alpha}{\beta(1-t)^2} - \frac{\alpha\beta}{[\beta(1-t) + \alpha t]^2} \right\} dt + \\ &\quad + \int_{\lambda}^q \left\{ \frac{\beta}{\alpha t^2} - \frac{\alpha\beta}{[\beta(1-t) + \alpha t]^2} \right\} dt \\ &= \frac{\alpha}{\beta} \int_0^{\lambda} \frac{1}{(1-t)^2} dt - \alpha\beta \int_0^{\lambda} \frac{1}{[\beta(1-t) + \alpha t]^2} dt + \frac{\beta}{\alpha} \int_{\lambda}^q \frac{1}{t^2} dt - \\ &\quad - \alpha\beta \int_{\lambda}^q \frac{1}{[\beta(1-t) + \alpha t]^2} dt \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
F(q) &= \frac{\alpha}{\beta(1-\lambda)} - \frac{\alpha}{\beta} + \frac{\alpha\beta}{(\alpha-\beta)[\beta(1-\lambda)+\alpha\lambda]} - \frac{\alpha\beta}{\beta(\alpha-\beta)} - \frac{\beta}{\alpha q} \\
&\quad + \frac{\beta}{\alpha\lambda} + \frac{\alpha\beta}{(\alpha-\beta)[\beta(1-q)+\alpha q]} - \frac{\alpha\beta}{(\alpha-\beta)[\beta(1-\lambda)+\alpha\lambda]} \\
&= \frac{\alpha\beta}{(\alpha-\beta)[\beta(1-q)+\alpha q]} - \frac{\beta}{\alpha q} - \frac{\beta^2}{\alpha(\alpha-\beta)} + 1.
\end{aligned}$$

4.1.4 Quantis

Nesta seção é apresentado uma rotina para a geração de quantis da distribuição de P . Os quantis das distribuições de U e Q não são considerados por serem apresentadas suas respectivas distribuições acumuladas, (4.4) e (4.5).

Os quantis são computados numericamente através da equação:

$$\int_0^{q_\gamma} f_P(t) dt = \gamma. \quad (4.20)$$

A rotina utiliza as funções $\text{GAMMA}(\cdot, \cdot)$ e $\text{BesselK}(\cdot, \cdot)$ do software de manipulação algébrica MAPLE versão 13. O programa abaixo calcula o quantil q_γ , para valores de γ , α e β .

```
# Programa para gerar o quantil da distribuicao de P=XY
f1:=2 * alpha * beta * GAMMA(0, sqrt(alpha * beta * p))
f2:=2 * alpha * beta * BesselK(0, 2 * sqrt(alpha * beta * p))
fP:=f1 - f2
FP:=int(fP, p=0..q_gamma)
qc:=fsolve(FP=gamma, q_gamma) # qc:quantil calculado
```

4.1.5 Momentos

Nesta seção são deduzidos os momentos das variáveis $U = X + Y$, $P = XY$ e $Q = X/(X + Y)$ quando X e Y seguem o modelo (4.1).

Teorema 4.6 *Se X e Y têm distribuição conjunta dada pelo modelo (4.1), então:*

$$E[U^n] = \sum_{j=0}^n \binom{n}{j} \frac{(n-j)!}{\alpha^j \beta^{n-j} 2^{j+1}} \left[\sum_{k=0}^{n-j} \frac{(j+k)! (2^{j+k+1} - 1)}{k! 2^k} \right] + \\ + \sum_{j=0}^n \binom{n}{j} \frac{j!}{\alpha^j \beta^{n-j} 2^{n-j+1}} \left[\sum_{k=0}^j \frac{(n-j+k)! (2^{n-j+k+1} - 1)}{k! 2^k} \right]$$

para todo inteiro $n \geq 1$.

Demonstração: Seja $U = X + Y$, então:

$$E[U^n] = E[(X + Y)^n] = \sum_{j=0}^n \binom{n}{j} E[X^j Y^{n-j}].$$

Aplicando o lema (4.1), para $n = j$ e $m = n - j$, tem-se:

$$E[U^n] = \sum_{j=0}^n \binom{n}{j} \frac{(n-j)!}{\alpha^j \beta^{n-j} 2^{j+1}} \left[\sum_{k=0}^{n-j} \frac{(j+k)! (2^{j+k+1} - 1)}{k! 2^k} \right] + \\ + \sum_{j=0}^n \binom{n}{j} \frac{j!}{\alpha^j \beta^{n-j} 2^{n-j+1}} \left[\sum_{k=0}^j \frac{(n-j+k)! (2^{n-j+k+1} - 1)}{k! 2^k} \right].$$

Teorema 4.7 *Se X e Y têm distribuição conjunta dada pelo modelo (4.1), então:*

$$E[P^n] = \frac{n!}{(2\alpha\beta)^n} \sum_{k=0}^n \frac{(n+k)! (2^{n+k+1} - 1)}{k! 2^k} \quad (4.21)$$

para todo inteiro $n \geq 1$.

Demonstração: Seja $P = XY$, então $E[P^n] = E[(XY)^n] = E[X^n Y^n]$. Aplicando o lema 4.1 para $m = n$ obtém-se:

$$E[P^n] = \frac{n!}{(\alpha\beta)^n 2^{n+1}} \sum_{k=0}^n \frac{(n+k)! (2^{n+k+1} - 1)}{k! 2^k} + \frac{n!}{(\alpha\beta)^n 2^{n+1}} \times \\ \sum_{k=0}^n \frac{(n+k)! (2^{n+k+1} - 1)}{k! 2^k}$$

de onde o resultado segue.

Teorema 4.8 *Se X e Y têm distribuição conjunta dada pelo modelo (4.1), então:*

$$E[Q^n] = \frac{\alpha}{\beta} B_\lambda(n+1, -1) + \frac{\beta}{\alpha} H(n) - \frac{\alpha}{(\alpha - \beta)^{n+1}} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (-\beta)^{n-k+1} J(k)$$

para todo inteiro positivo $n \geq 1$,

$$H(n) = \begin{cases} \frac{1 - \lambda^{n-1}}{n-1}, & \text{se } n \neq 1 \\ -\ln \lambda, & \text{se } n = 1 \end{cases} \quad \text{e} \quad J(k) = \begin{cases} \frac{\alpha^{k-1} - \beta^{k-1}}{k-1}, & \text{se } k \neq 1 \\ \ln \alpha - \ln \beta, & \text{se } k = 1. \end{cases}$$

Demonstração: Utilizando a equação (4.17), pode-se escrever:

$$\begin{aligned} E[Q^n] &= \int_0^\lambda \left\{ \frac{\alpha}{\beta(1-q)^2} - \frac{\alpha\beta}{[\alpha q + \beta(1-q)]^2} \right\} q^n dq + \\ &\quad + \int_\lambda^1 \left\{ \frac{\beta}{\alpha q^2} - \frac{\alpha\beta}{[\alpha q + \beta(1-q)]^2} \right\} q^n dq \\ &= \frac{\alpha}{\beta} \int_0^\lambda \frac{q^n}{(1-q)^2} dq + \frac{\beta}{\alpha} \int_\lambda^1 q^{n-2} dq - \alpha\beta \int_0^1 \frac{q^n}{[\alpha q + \beta(1-q)]^2} dq. \end{aligned} \quad (4.22)$$

A primeira integral da expressão (4.22) é resolvida utilizando-se a definição da função beta incompleta (2.10) de modo que:

$$I = \frac{\alpha}{\beta} \int_0^\lambda \frac{q^n}{(1-q)^2} dq = \frac{\alpha}{\beta} \int_0^\lambda q^n (1-q)^{-2} dq = \frac{\alpha}{\beta} B_\lambda(n+1, -1). \quad (4.23)$$

A segunda integral resulta em:

$$\begin{aligned} \text{II} &= \frac{\beta}{\alpha} \int_{\lambda}^1 q^{n-2} dq = \frac{\beta}{\alpha} \left(\frac{q^{n-1}}{n-1} \right) \Big|_{\lambda}^1 = \frac{\beta}{\alpha} \left(\frac{1 - \lambda^{n-1}}{n-1} \right) \quad \text{se } n \neq 1 \\ &\frac{\beta}{\alpha} \int_{\lambda}^1 q^{n-2} dq = \frac{\beta}{\alpha} \ln q \Big|_{\lambda}^1 = -\frac{\beta}{\alpha} \ln \lambda \quad \text{se } n = 1. \end{aligned} \quad (4.24)$$

Na última integral, efetua-se a transformação de variável $t = \alpha q + \beta(1 - q)$ de modo que,

$$\begin{aligned} \text{III} &= \alpha\beta \int_0^1 \frac{q^n}{[\alpha q + \beta(1 - q)]^2} dq = \frac{\alpha\beta}{(\alpha - \beta)^{n+1}} \int_{\beta}^{\alpha} (t - \beta)^n t^{-2} dt \\ &= \frac{\alpha\beta}{(\alpha - \beta)^{n+1}} \int_{\beta}^{\alpha} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} t^k (-\beta)^{n-k} t^{-2} \\ &= \frac{\alpha\beta}{(\alpha - \beta)^{n+1}} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (-\beta)^{n-k} \int_{\beta}^{\alpha} t^{k-2} dt \\ &= \frac{\alpha\beta}{(\alpha - \beta)^{n+1}} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (-\beta)^{n-k} \left(\frac{t^{k-1}}{k-1} \right) \Big|_{\beta}^{\alpha} \\ &= \frac{\alpha\beta}{(\alpha - \beta)^{n+1}} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (-\beta)^{n-k} \frac{\alpha^{k-1} - \beta^{k-1}}{k-1}, \quad \text{se } k \neq 1; \end{aligned} \quad (4.25)$$

Para $k = 1$ tem-se:

$$\begin{aligned} \text{III} &= \frac{\alpha\beta}{(\alpha - \beta)^{n+1}} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (-\beta)^{n-k} \int_{\beta}^{\alpha} \frac{1}{t} dt \\ &= \frac{\alpha\beta}{(\alpha - \beta)^{n+1}} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (-\beta)^{n-k} \ln \alpha - \ln \beta, \quad \text{se } k = 1. \end{aligned} \quad (4.26)$$

O teorema resulta de (4.23), (4.24), (4.25) e (4.26).

4.2 Distribuição Bivariada Gumbel tipo I

Sejam X e Y variáveis aleatórias com distribuição Gumbel tipo I cuja fdp conjunta é dada por

$$f(x, y) = [(1 + \theta x)(1 + \theta y) - \theta] \exp[-(x + y + \theta xy)], \quad (4.27)$$

em que $x \geq 0$, $y \geq 0$ e $0 \leq \theta \leq 1$.

Sob o modelo (4.27) a distribuição marginal de X é:

$$\begin{aligned} f(x) &= \int_0^{\infty} \exp[-(x + y + \theta xy)] [(1 + \theta x)(1 + \theta y) - \theta] dy \\ &= \exp(-x)(1 + \theta x) \int_0^{\infty} \exp[-(1 + \theta x)y] (1 + \theta y) dy - \theta \exp(-x) \times \\ &\quad \times \int_0^{\infty} \exp[-(1 + \theta x)y] dy = \exp(-x). \end{aligned} \quad (4.28)$$

Portanto, $X \sim Exp(1)$. Analogamente, obtém-se que $Y \sim Exp(1)$.

Na Figura 14 é apresentada a superfície Gumbel tipo I para $\theta = 0,9$.

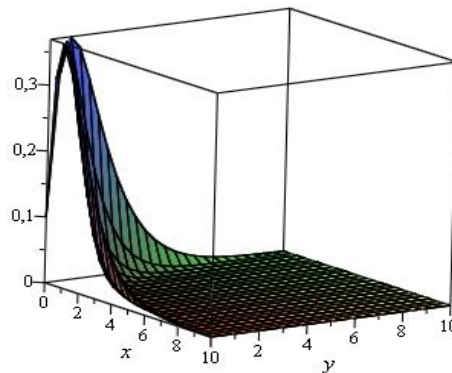


Figura 14 Superfície Gumbel tipo I, $\theta = 0,9$.

4.2.1 Funções Densidades de Probabilidade

Nos teoremas 5, 6 e 7 são deduzidas as fdps das variáveis $U = X + Y$, $P = XY$ e $Q = X/(X + Y)$ quando X e Y seguem o modelo Gumbel tipo I.

Teorema 4.9 *Se X e Y são distribuídas conjuntamente de acordo com o (4.27), então:*

$$f(u) = [u(1 - \theta) + \theta u^2] \exp(-u) \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(\theta u^2)^{-(j+1)}}{j!} \gamma(2j + 1, \theta u^2) + \theta^2 u^3 \exp(-u) \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(\theta u^2)^{-(j+2)}}{j!} \left[\gamma(2j + 2, \theta u^2) - \frac{\gamma(2j + 3, \theta u^2)}{\theta u^2} \right],$$

em que $u > 0$ e $0 \leq \theta \leq 1$.

Demonstração: Considere $U = X + Y$ e $Q = \frac{X}{X + Y}$. Tem-se a seguinte transformação:

$$(x, y) \rightarrow \left(x + y, \frac{x}{x + y} \right).$$

De modo que

$$x = uq \quad \text{e} \quad y = u(1 - q).$$

O Jacobiano da transformação é dado por: $J = \begin{vmatrix} q & u \\ 1 - q & -u \end{vmatrix} = -u$. Assim a distribuição conjunta de U e Q é da forma

$$\begin{aligned} f(u, q) &= |J| \times f(uq, u(1 - q)) \\ &= [u(1 - \theta) + \theta u^2 + \theta^2 u^3 q(1 - q)] \exp[\theta(uq)^2 - \theta u^2 q - u]. \end{aligned} \quad (4.29)$$

Desse modo, a fdp de U pode ser expressa por:

$$f(u) = \int_0^1 f(u, q) dq$$

$$\begin{aligned}
f(u) &= \int_0^1 [u(1-\theta) + \theta u^2 + \theta^2 u^3 q(1-q)] \exp[\theta(uq)^2 - \theta u^2 q - u] dq \\
&= \int_0^1 [u - u\theta + \theta u^2 + \theta^2 u^3 q(1-q)] \exp(-\theta u^2 q - u) \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(\theta q^2 u^2)^j}{j!} dq \\
&= u(1-\theta + \theta u) \exp(-u) \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(\theta u^2)^j}{j!} \int_0^1 q^{2j} [\theta^2 u^3 q(1-q)] \exp(-\theta u^2 q) dq.
\end{aligned}$$

Fazendo $t = \theta u^2 q$, $dt = \theta u^2 dq$, quando $q \rightarrow 0$ tem-se que $t \rightarrow 0$ e quando $q \rightarrow 1$, $t \rightarrow \theta u^2$. Assim,

$$\begin{aligned}
f(u) &= u(1-\theta + \theta u) \exp(-u) \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(\theta u^2)^j}{j!} \left[\frac{1}{(\theta u^2)^{2j+1}} \int_0^{\theta u^2} t^{2j} \exp(-t) dt \right] + \\
&\quad + \theta^2 u^3 \exp(-u) \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(\theta u^2)^j}{j!} \left[\frac{1}{(\theta u^2)^{2(j+1)}} \int_0^{\theta u^2} t^{2j+1} \exp(-t) dt \right] - \\
&\quad - \theta^2 u^3 \exp(-u) \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(\theta u^2)^j}{j!} \left[\frac{1}{(\theta u^2)^{2j+3}} \int_0^{\theta u^2} t^{2(j+1)} \exp(-t) dt \right].
\end{aligned}$$

Aplicando a definição da função gama incompleta, equação (2.5), a cada uma das parcelas, obtém-se

$$\begin{aligned}
f(u) &= u(1-\theta + \theta u) \exp(-u) \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(\theta u^2)^j}{j!} \frac{\gamma(2j+1, \theta u^2)}{(\theta u^2)^{2j+1}} + \\
&\quad + \theta^2 u^3 \exp(-u) \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(\theta u^2)^j}{j!} \left[\frac{\gamma(2j+2, \theta u^2)}{(\theta u^2)^{2(j+1)}} - \frac{\gamma(2j+3, \theta u^2)}{(\theta u^2)^{2j+3}} \right]
\end{aligned}$$

$$f(u) = [u(1 - \theta) + \theta u^2] \exp(-u) \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(\theta u^2)^{-(j+1)}}{j!} \gamma(2j + 1, \theta u^2) + \\ + \theta^2 u^3 \exp(-u) \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(\theta u^2)^{-(j+2)}}{j!} \left[\gamma(2j + 2, \theta u^2) - \frac{\gamma(2j + 3, \theta u^2)}{\theta u^2} \right].$$

A Figura 15 ilustra a forma da fdp de U para diferentes valores do parâmetro θ .

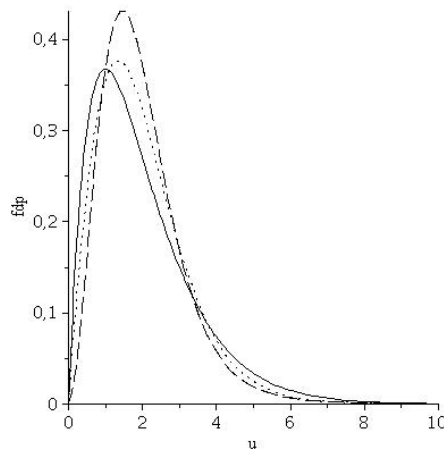


Figura 15 Gráfico da distribuição de $U = X + Y$

Teorema 4.10 Se X e Y são distribuídas conjuntamente de acordo com (4.27), então:

$$f(p) = 2 [(1 + \theta^2 p - \theta) K_0(2\sqrt{p}) + 2\theta\sqrt{p} K_1(2\sqrt{p})] \exp(-\theta p)$$

em que $p > 0$ e $0 \leq \theta \leq 1$.

Demonstração: De (4.27) temos que a fdp conjunta de X e $P = XY$ é:

$$f(x, p) = \left[\left(\frac{1}{x} + \theta \right) \left(1 + \frac{\theta p}{x} \right) + \frac{\theta}{x} \right] \exp \left[- \left(x + \frac{p}{x} + \theta p \right) \right]. \quad (4.30)$$

Assim, a fdp da variável P é dada por:

$$\begin{aligned}
f(p) &= \int_0^{\infty} f(x, p) dx \\
&= \int_0^{\infty} \left[\left(\frac{1}{x} + \theta \right) \left(1 + \frac{\theta p}{x} \right) - \frac{\theta}{x} \right] \exp \left[- \left(x + \frac{p}{x} + \theta p \right) \right] dx \\
&= \theta \exp(-\theta p) \left[\int_0^{\infty} \exp \left(-x - \frac{p}{x} \right) dx + p \int_0^{\infty} x^{-2} \exp \left(-x - \frac{p}{x} \right) dx \right] + \\
&\quad + (1 + \theta^2 p - \theta) \exp(-\theta p) \int_0^{\infty} x^{-1} \exp \left(-x - \frac{p}{x} \right) dx.
\end{aligned}$$

Aplicando o lema (2.3) a cada uma das parcelas, obtém-se:

$$f(p) = 2 \exp(-\theta p) \left[(1 + \theta^2 p - \theta) K_0(2\sqrt{p}) + \theta \sqrt{p} K_1(2\sqrt{p}) + \theta \sqrt{p} K_{-1}(2\sqrt{p}) \right],$$

em que $K_\nu(\cdot)$ denota a função de Bessel modificada de ordem ν . O resultado segue da aplicação da propriedade de reflexão da ordem das funções de Bessel modificadas, ver Oldham, Myland e Spanier (2009).

A Figura 16 ilustra a fdp de P para diferentes valores do parâmetro θ .

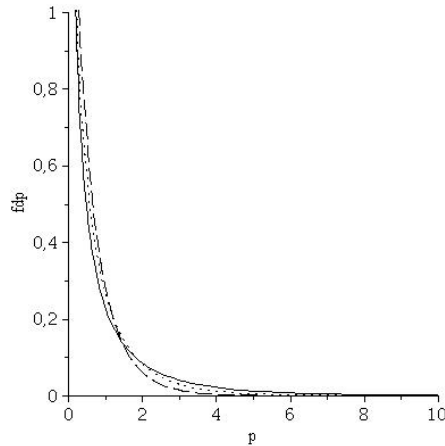


Figura 16 Gráfico da distribuição de $P = XY$

Teorema 4.11 *Se X e Y são distribuídas conjuntamente de acordo com (4.27), então*

$$\begin{aligned} f(q) &= \frac{1-\theta}{2\theta q(1-q)} \exp\left(\frac{1}{8\theta q(1-q)}\right) D_{-2}\left(\frac{1}{\sqrt{2\theta q(1-q)}}\right) + \\ &+ \frac{2\theta}{[2\theta q(1-q)]^{3/2}} \exp\left(\frac{1}{8\theta q(1-q)}\right) D_{-3}\left(\frac{1}{\sqrt{2\theta q(1-q)}}\right) + \\ &+ \frac{6\theta^2 q(1-q)}{[\theta q(1-q)]^2} \exp\left(\frac{1}{8\theta q(1-q)}\right) D_{-4}\left(\frac{1}{\sqrt{2\theta q(1-q)}}\right) \end{aligned}$$

sendo que $0 < q < 1$ e $0 \leq \theta \leq 1$.

Demonstração: Usando (4.29), tem-se:

$$\begin{aligned} f(q) &= \int_0^{\infty} [u - u\theta + \theta u^2 + \theta^2 u^3 q(1-q)] \exp[\theta(uq)^2 - \theta u^2 q - u] du \\ f(q) &= \underbrace{(1-\theta) \int_0^{\infty} u \exp[-\theta q(1-q)u^2 - u] du}_I + \underbrace{\theta \int_0^{\infty} u^2 \exp[-\theta q(1-q)u^2 - u] du}_{II} + \\ &+ \underbrace{\theta^2 q(1-q) \int_0^{\infty} u^3 \exp[-\theta q(1-q)u^2 - u] du}_{III}. \end{aligned}$$

O resultado segue da aplicação do lema (2.2) a cada uma das integrais,

$$\begin{aligned} I &= \Gamma(2) [2\theta q(1-q)]^{-1} \exp\left(\frac{1}{8\theta q(1-q)}\right) D_{-2}\left(\frac{1}{\sqrt{2\theta q(1-q)}}\right); \\ II &= \Gamma(3) [2\theta q(1-q)]^{-\frac{3}{2}} \exp\left(\frac{1}{8\theta q(1-q)}\right) D_{-3}\left(\frac{1}{\sqrt{2\theta q(1-q)}}\right); \\ III &= \Gamma(4) [2\theta q(1-q)]^{-2} \exp\left(\frac{1}{8\theta q(1-q)}\right) D_{-4}\left(\frac{1}{\sqrt{2\theta q(1-q)}}\right). \end{aligned}$$

A Figura 17 ilustra a fdp de Q para diferentes valores do parâmetro θ .

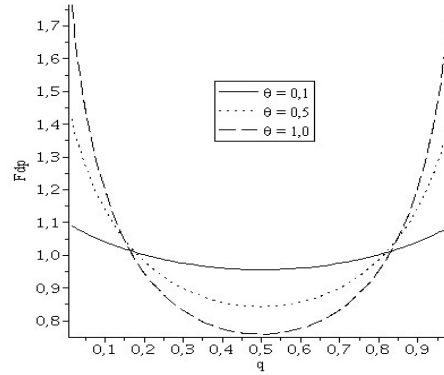


Figura 17 Gráfico da distribuição de $Q = X/(X + Y)$

4.2.2 Momentos

Nesta seção são deduzidos os momentos das variáveis $U = X + Y$ e $P = XY$ quando X e Y seguem o modelo Gumbel tipo I.

Lema 4.2 Se X e Y são distribuídas conjuntamente de acordo com (4.27), então:

$$E[X^n Y^m] = \frac{m! n!}{\theta^{n+1}} \left[\Psi\left(n+1, n-m+2, \frac{1}{\theta}\right) + m \theta \Psi\left(n+1, n-m+1, \frac{1}{\theta}\right) \right]$$

para todos inteiros $n \geq 1$, $m \geq 1$ e $0 \leq \theta \leq 1$.

Demonstração: Partindo de (4.27), pode-se afirmar que:

$$\begin{aligned} E[X^n Y^m] &= \int_0^\infty \int_0^\infty x^n y^m [(1 + \theta x)(1 + \theta y) - \theta] \exp[-(x + y + \theta xy)] dy dx \\ &= \int_0^\infty x^n \exp(-x) (1 + \theta x) \int_0^\infty (y^m + \theta y^{m+1}) \exp[-y(1 + \theta x)] dy dx - \\ &\quad - \int_0^\infty x^n \exp(-x) \int_0^\infty \theta y^m \exp[-y(1 + \theta x)] dy dx \end{aligned}$$

$$E[X^n Y^m] = \int_0^{\infty} x^n \exp(-x) \left[\frac{\Gamma(m+1)}{(1+\theta x)^m} + \frac{\theta \Gamma(m+2)}{(1+\theta x)^{m+1}} - \frac{\theta \Gamma(m+1)}{(1+\theta x)^{m+1}} \right] dx.$$

Considere $t = \theta x$. Quando $x \rightarrow 0$, $t \rightarrow 0$ e quando $x \rightarrow +\infty$, $t \rightarrow +\infty$.
Desse modo,

$$E[X^m Y^n] = \frac{\Gamma(m+1)}{\theta^{n+1}} \int_0^{\infty} t^n (1+t)^{-m} e^{-t/\theta} dt + \left[\frac{\Gamma(m+2)}{\theta^n} - \frac{\Gamma(m+1)}{\theta^n} \right] \int_0^{\infty} t^n (1+t)^{-m-1} e^{-t/\theta} dt.$$

Aplicando a definição da função de Kummer, equação (2.15), obtém-se:

$$\begin{aligned} E[X^m Y^n] &= \frac{\Gamma(m+1)\Gamma(n+1)}{\theta^{n+1}} \Psi\left(n+1, n-m+2; \frac{1}{\theta}\right) + \Gamma(n+1) \times \\ &\quad \Psi\left(n+1, n-m+1; \frac{1}{\theta}\right) \left[\frac{\Gamma(m+2)}{\theta^n} - \frac{\Gamma(m+1)}{\theta^n} \right] \\ &= \frac{m!n!}{\theta^{n+1}} \Psi\left(n+1, n-m+2; \frac{1}{\theta}\right) + \frac{mm!n!}{\theta^n} \Psi\left(n+1, n-m+1; \frac{1}{\theta}\right). \end{aligned}$$

Teorema 4.12 *Se X e Y são distribuídas conjuntamente de acordo com (4.27) então:*

$$E[U^n] = \sum_{j=0}^n \frac{n!}{\theta^{j+1}} \left[\Psi\left(j+1, 2j+2-n, \frac{1}{\theta}\right) + (n-j)\theta \times \Psi\left(j+1, 2j+1-n, \frac{1}{\theta}\right) \right]$$

para todo inteiro $n \geq 1$ e $0 \leq \theta \leq 1$.

Demonstração: Tem-se que:

$$E[U^n] = E[(X+Y)^n] = E\left[\sum_{j=0}^n \binom{n}{j} (X^j Y^{n-j})\right]$$

De modo que,

$$E[U^n] = \sum_{j=0}^n \binom{n}{j} E[X^j Y^{n-j}].$$

Aplicando o lema (4.2) para $n = j$ e $m = n - j$, obtém-se:

$$\begin{aligned} E[U^n] &= \sum_{j=0}^n \binom{n}{j} \frac{(n-j)! j!}{\theta^{j+1}} \Psi\left(j+1, 2j+2-n, \frac{1}{\theta}\right) + \\ &\quad \sum_{j=0}^n \binom{n}{j} \frac{(n-j)! j!}{\theta^{j+1}} (n-j) \theta \Psi\left(j+1, 2j+1-n, \frac{1}{\theta}\right) \\ &= \sum_{j=0}^n \frac{n!}{\theta^{j+1}} \Psi\left(j+1, 2j+2-n, \frac{1}{\theta}\right) + \sum_{j=0}^n \frac{n!}{\theta^{j+1}} (n-j) \theta \times \\ &\quad \Psi\left(j+1, 2j+1-n, \frac{1}{\theta}\right). \end{aligned}$$

Em particular,

$$\begin{aligned} E[U] &= \frac{1}{\theta} \left[\Psi\left(1, 1, \frac{1}{\theta}\right) + \theta \Psi\left(1, 0, \frac{1}{\theta}\right) \right] + \frac{1}{\theta^2} \Psi\left(2, 3, \frac{1}{\theta}\right) \\ &= \frac{1}{\theta} \exp\left(\frac{1}{\theta}\right) \left[\Gamma\left(0, \frac{1}{\theta}\right) + \Gamma\left(-1, \frac{1}{\theta}\right) \right] + 1 \\ &= \frac{1}{\theta} \exp\left(\frac{1}{\theta}\right) \left[Ei\left(-\frac{1}{\theta}\right) - Ei\left(-\frac{1}{\theta}\right) + \theta \exp\left(-\frac{1}{\theta}\right) \right] + 1 \\ &= 2. \end{aligned} \tag{4.31}$$

$$\begin{aligned} E[U^2] &= \frac{2}{\theta} \left[\Psi\left(1, 0, \frac{1}{\theta}\right) + \Psi\left(2, 1, \frac{1}{\theta}\right) + \frac{1}{\theta} \Psi\left(2, 2, \frac{1}{\theta}\right) + 2\theta \Psi\left(1, -1, \frac{1}{\theta}\right) \right] \\ &\quad + \frac{2}{\theta^3} \Psi\left(3, 4, \frac{1}{\theta}\right) \\ &= \frac{4}{\theta^2} \exp\left(\frac{2}{\theta}\right) \left[\Gamma\left(-1, \frac{1}{\theta}\right) + \Gamma\left(-2, \frac{1}{\theta}\right) \right] + \frac{2}{\theta} \Psi\left(2, 1, \frac{1}{\theta}\right) + 2 \\ &= \frac{2}{\theta} \left[\frac{1}{\theta} \exp\left(\frac{1}{\theta}\right) Ei\left(-\frac{1}{\theta}\right) + \Psi\left(2, 1, \frac{1}{\theta}\right) + 2\theta^2 + 1 \right]. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
E[U^3] &= \frac{6}{\theta^4} \left\{ \Psi\left(4, 5, \frac{1}{\theta}\right) + \theta \Psi\left(3, 3, \frac{1}{\theta}\right) + \theta^2 \left[\Psi\left(2, 1, \frac{1}{\theta}\right) + \Psi\left(3, 2, \frac{1}{\theta}\right) \right] \right\} \\
&\quad + \frac{6}{\theta} \left[\Psi\left(1, -1, \frac{1}{\theta}\right) + 2\Psi\left(2, 0, \frac{1}{\theta}\right) + 3\theta \Psi\left(1, -2, \frac{1}{\theta}\right) \right] \\
&= \frac{6}{\theta^3} \left\{ \exp\left(\frac{1}{\theta}\right) \left[2\Gamma\left(-2, \frac{1}{\theta}\right) + 3\Gamma\left(-3, \frac{1}{\theta}\right) \right] + \theta \left[\Psi\left(2, 1, \frac{1}{\theta}\right) + \theta^2 \right] \right\} \\
&\quad + \frac{18}{\theta^3} \Psi\left(3, 2, \frac{1}{\theta}\right) \\
&= \frac{3}{\theta^2} \left[2\Psi\left(2, 1, \frac{1}{\theta}\right) + 6\Psi\left(3, 2, \frac{1}{\theta}\right) + 4\theta^2 + \theta - 1 \right] - \frac{3}{\theta^3} \exp\left(\frac{1}{\theta}\right) \times \\
&\quad \times Ei\left(-\frac{1}{\theta}\right). \tag{4.32}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
E[U^4] &= \frac{24}{\theta^2} \left\{ \Psi\left(2, 0, \frac{1}{\theta}\right) + \theta \left[\Psi\left(1, -2, \frac{1}{\theta}\right) + 3\Psi\left(2, -1, \frac{1}{\theta}\right) \right] \right\} + \\
&\quad + 96\Psi\left(1, -3, \frac{1}{\theta}\right) + \frac{24}{\theta^4} \left\{ \Psi\left(4, 4, \frac{1}{\theta}\right) + \theta \left[\Psi\left(3, 2, \frac{1}{\theta}\right) + \Psi\left(4, 3, \frac{1}{\theta}\right) \right] \right\} \\
&\quad + \frac{48}{\theta^3} \theta \Psi\left(3, 1, \frac{1}{\theta}\right) + \frac{24}{\theta^5} \Psi\left(5, 6, \frac{1}{\theta}\right) \\
&= \frac{48}{\theta^3} \left[\Psi\left(3, 2, \frac{1}{\theta}\right) + \theta \Psi\left(3, 1, \frac{1}{\theta}\right) + 2\Psi\left(4, 3, \frac{1}{\theta}\right) + \frac{\theta^3}{2} \right] \\
&\quad + \frac{24}{\theta^4} \exp\left(\frac{1}{\theta}\right) \left[2\Gamma\left(-3, \frac{1}{\theta}\right) + 4\Gamma\left(-4, \frac{1}{\theta}\right) \right] \\
&= \frac{4}{\theta^4} \left\{ \exp\left(\frac{1}{\theta}\right) Ei\left(-\frac{1}{\theta}\right) + \theta \left[12\Psi\left(3, 2, \frac{1}{\theta}\right) + 24\Psi\left(4, 3, \frac{1}{\theta}\right) \right] \right\} \\
&\quad + \frac{8}{\theta^3} \left[6\theta \Psi\left(3, 1, \frac{1}{\theta}\right) + 6\theta^3 + \theta^2 - \theta + 1 \right]. \tag{4.33}
\end{aligned}$$

A variância (σ^2), o coeficiente de assimetria (α^3) e o coeficiente de curtose (α^4) de U podem ser calculados usando as relações:

$$\sigma^2 = E[U^2] - E^2[U]; \tag{4.34}$$

$$\alpha^3 = \frac{E[U^3] - 3E[U]E[U^2] + 2E^3[U]}{(\sigma^2)^{3/2}}; \quad (4.35)$$

$$\alpha^4 = \frac{E[U^4] - 4E[U]E[U^3] + 6E[U^2]E^2[U] - 3E^4[U]}{(\sigma^2)^2}. \quad (4.36)$$

Teorema 4.13 *Se X e Y são distribuídas conjuntamente de acordo com (4.27), então:*

$$E[P^n] = \frac{(n!)^2}{\theta^{n+1}} \left[\Psi \left(n+1, 2, \frac{1}{\theta} \right) + n\theta \Psi \left(n+1, 1, \frac{1}{\theta} \right) \right]$$

para todo inteiro $n \geq 1$ e $0 \leq \theta \leq 1$.

Demonstração: O resultado segue da aplicação do lema (4.2), para $n = m$.

$$E[X^n Y^n] = \frac{n! n!}{\theta^{n+1}} \left[\Psi \left(n+1, 2, \frac{1}{\theta} \right) + n \theta \Psi \left(n+1, 1, \frac{1}{\theta} \right) \right].$$

Em particular,

$$\begin{aligned} E[P] &= \frac{1}{\theta^2} \left[\Psi \left(2, 2, \frac{1}{\theta} \right) + \theta \Psi \left(2, 1, \frac{1}{\theta} \right) \right] \\ &= \frac{1}{\theta^2} \left[\exp \left(\frac{1}{\theta} \right) \Gamma \left(-1, \frac{1}{\theta} \right) + \theta \Psi \left(2, 1, \frac{1}{\theta} \right) \right] \\ &= \frac{1}{\theta^2} \exp \left(\frac{1}{\theta} \right) Ei \left(-\frac{1}{\theta} \right) + \frac{1}{\theta} \left[\Psi \left(2, 1, \frac{1}{\theta} \right) + 1 \right]. \end{aligned}$$

$$E[P^2] = \frac{4}{\theta^3} \left[\Psi \left(3, 2, \frac{1}{\theta} \right) + 2\theta \Psi \left(3, 1, \frac{1}{\theta} \right) \right].$$

$$E[P^3] = \frac{36}{\theta^4} \left[\Psi \left(4, 2, \frac{1}{\theta} \right) + 3\theta \Psi \left(4, 1, \frac{1}{\theta} \right) \right].$$

$$E[P^4] = \frac{576}{\theta^5} \left[\Psi \left(5, 2, \frac{1}{\theta} \right) + 4\theta \Psi \left(5, 1, \frac{1}{\theta} \right) \right].$$

A variância, o coeficiente de assimetria e o coeficiente de curtose de P podem ser calculados utilizando fórmulas análogas às expressões (4.34), (4.35) e (4.36), respectivamente.

4.3 Distribuição Bivariada Gama Beta II

Uma variável aleatória (X, Y) têm distribuição bivariada gama beta tipo II se sua fdp conjunta é da forma:

$$f(x, y) = Kx^{\alpha-1}y^{\beta-1} \exp[-(ax + cxy)] \quad (4.37)$$

com $x, y > 0$, $a, c > 0$, $0 < \beta < \alpha$ e K é a constante de normalização definida por

$$K = \frac{c^\beta a^{\alpha-\beta}}{\Gamma(\beta) \Gamma(\alpha - \beta)}.$$

Esse modelo pertence à família gama bivariada de Arnould (BALAKRISHNAN; LAI, 2009) e com essa parametrização ainda não foi abordado na literatura especializada. Um resultado semelhante é obtido por Nadarajah (2007). Neste trabalho o autor obtém uma distribuição bivariada denominada distribuição bivariada gama exponencial a partir da bivariada de Arnould.

Na Figura 18 é apresentada a superfície gama beta tipo II.

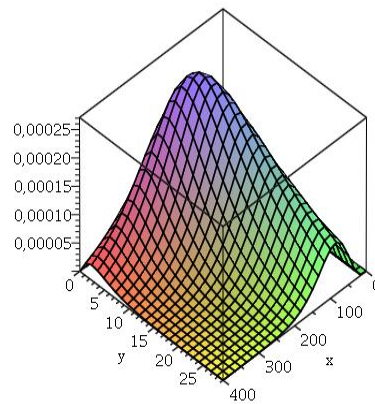


Figura 18 Superfície gama beta II

Para verificar que (4.37) corresponde a uma legítima fdp é preciso mostrar que

$$\int_0^{\infty} \int_0^{\infty} f(x, y) dx dy = 1$$

De fato,

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} f(x, y) dx dy &= K \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} x^{\alpha-1} y^{\beta-1} \exp[-(ax + cxy)] dy dx \\ &= K \int_0^{\infty} x^{\alpha-1} \exp(-ax) \left[\int_0^{\infty} y^{\beta-1} \exp(-cxy) dy \right] dx \\ &= K \int_0^{\infty} x^{\alpha-1} \exp(-ax) \left[\frac{\Gamma(\beta)}{c^{\beta}} \int_0^{\infty} \frac{c^{\beta}}{\Gamma(\beta)} y^{\beta-1} \exp(-cxy) dy \right] dx \\ &= K \frac{\Gamma(\beta)}{c^{\beta}} \int_0^{\infty} x^{\alpha-\beta-1} \exp(-ax) dx \\ &= K \frac{\Gamma(\beta)}{c^{\beta}} \cdot \frac{\Gamma(\alpha-\beta)}{a^{\alpha-\beta}} \int_0^{\infty} \frac{a^{\alpha-\beta}}{\Gamma(\alpha-\beta)} x^{\alpha-\beta-1} \exp(-ax) dx \\ &= K \frac{\Gamma(\beta)}{c^{\beta}} \frac{\Gamma(\alpha-\beta)}{a^{\alpha-\beta}} \\ &= \frac{c^{\beta} a^{\alpha-\beta}}{\Gamma(\beta) \Gamma(\alpha-\beta)} \frac{\Gamma(\beta) \Gamma(\alpha-\beta)}{c^{\beta} a^{\alpha-\beta}} \\ &= 1. \end{aligned}$$

Sob esse modelo, a distribuição marginal de X é dada por:

$$\begin{aligned} f(x) &= \int_0^{\infty} f(x, y) dy = \int_0^{\infty} K x^{\alpha-1} y^{\beta-1} \exp[-(ax + cxy)] dy \\ &= K x^{\alpha-1} \exp(-ax) \int_0^{\infty} y^{\beta-1} \exp(-cxy) dy \\ &= K x^{\alpha-1} \exp(-ax) \frac{\Gamma(\beta)}{(cx)^{\beta}} \end{aligned}$$

$$f(x) = \frac{a^{\alpha-\beta}}{\Gamma(\alpha-\beta)} x^{\alpha-\beta-1} \exp(-ax) \quad (4.38)$$

A distribuição de Y é da forma:

$$\begin{aligned} f(y) &= \int_0^{\infty} f(x, y) dx = \int_0^{\infty} K x^{\alpha-1} y^{\beta-1} \exp[-(ax + cxy)] dx \\ &= K y^{\beta-1} \int_0^{\infty} x^{\alpha-1} \exp[-x(a + cy)] dx \\ &= \frac{c^{\beta} a^{\alpha-\beta} \Gamma(\alpha)}{\Gamma(\beta) \Gamma(\alpha-\beta)} y^{\beta-1} \left[c \left(\frac{a}{c} + y \right) \right]^{-\alpha} \\ &= \frac{(a/c)^{\alpha-\beta}}{B(\beta, \alpha-\beta)} y^{\beta-1} \left(\frac{a}{c} + y \right)^{-\alpha}. \end{aligned} \quad (4.39)$$

Portanto, $X \sim \text{Gama}(\alpha - \beta, a)$ e $Y \sim \text{BetaII}(\beta, \alpha - \beta, a/c)$.

Lema 4.3 Se X e Y têm distribuição conjunta dada pelo modelo (4.37), então:

$$E[X^n Y^m] = \frac{a^{m-n} \Gamma(\beta + m) \Gamma(\alpha + n - \beta - m)}{c^m \Gamma(\beta) \Gamma(\alpha - \beta)}$$

para os inteiros $n \geq 1$ e $1 \leq m \leq n$.

Demonstração: Sob o modelo (4.37), tem-se que:

$$\begin{aligned} E[X^n Y^m] &= \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} x^n y^m f(x, y) dy dx \\ &= \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} K x^{\alpha+n-1} y^{\beta+m-1} \exp[-(ax + cxy)] dy dx \\ &= K \int_0^{\infty} x^{\alpha+n-1} \exp(-ax) \left[\int_0^{\infty} y^{\beta+m-1} \exp(-cxy) dy \right] dx \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
E[X^n Y^m] &= K \int_0^{\infty} x^{\alpha+n-1} \exp(-ax) \frac{\Gamma(\beta+m)}{(cx)^{\beta+m}} dx \\
&= \frac{K\Gamma(\beta+m)}{c^{\beta+m}} \int_0^{\infty} x^{\alpha+n-\beta-m-1} \exp(-ax) dx \\
&= \frac{K\Gamma(\beta+m)}{c^{\beta+m}} \cdot \frac{\Gamma(\alpha+n-\beta-m)}{a^{\alpha+n-\beta-m}} \quad \text{com } m \leq n.
\end{aligned}$$

Mas, $K = \frac{c^\beta a^{\alpha-\beta}}{\Gamma(\beta)\Gamma(\alpha-\beta)}$. Portanto:

$$\begin{aligned}
E[X^n Y^m] &= \frac{c^\beta a^{\alpha-\beta}}{\Gamma(\beta)\Gamma(\alpha-\beta)} \frac{\Gamma(\beta+m)}{c^{\beta+m}} \cdot \frac{\Gamma(\alpha+n-\beta-m)}{a^{\alpha+n-\beta-m}} \\
&= \frac{a^{m-n} \Gamma(\beta+m) \Gamma(\alpha+n-\beta-m)}{c^m \Gamma(\beta) \Gamma(\alpha-\beta)}.
\end{aligned}$$

Em particular, para $n = m = 1$ obtém-se:

$$\begin{aligned}
E[XY] &= \frac{\Gamma(\beta+1)\Gamma(\alpha-\beta)}{c\Gamma(\beta)\Gamma(\alpha-\beta)} \\
&= \frac{\beta\Gamma(\beta)}{c\Gamma(\beta)} \\
&= \frac{\beta}{c}.
\end{aligned}$$

Tem-se que $X \sim \text{Gama}(\alpha-\beta, a)$ e $Y \sim \text{BetaII}(\beta, \alpha-\beta, a/c)$. Assim,

$$\begin{aligned}
E[X] &= \frac{\alpha-\beta}{a}, & \text{Var}[X] &= \frac{\alpha-\beta}{a^2} \text{ e} \\
E[Y] &= \frac{a\beta}{c(\alpha-\beta-1)}, & \text{Var}[Y] &= \frac{a^2\beta(\alpha-1)}{c^2(\alpha-\beta-1)^2(\alpha-\beta-2)}.
\end{aligned}$$

Deste modo, a covariância de X e Y é dada por:

$$\begin{aligned}
 Cov[X, Y] &= E[XY] - E[X]E[Y] \\
 &= \frac{\beta}{c} - \frac{\alpha - \beta}{a} \cdot \frac{a\beta}{c(\alpha - \beta - 1)} \\
 &= -\frac{\beta}{c(\alpha - \beta - 1)}
 \end{aligned} \tag{4.40}$$

e o coeficiente de correlação $\rho_{X,Y}$, $|\rho_{X,Y}| \leq 1$, é

$$\begin{aligned}
 \rho_{X,Y} &= \frac{Cov[X, Y]}{\sqrt{Var[X]}\sqrt{Var[Y]}} \\
 &= \frac{-\frac{\beta}{c(\alpha - \beta - 1)}}{\sqrt{\frac{a\beta}{c(\alpha - \beta - 1)}}\sqrt{\frac{a^2\beta(\alpha - 1)}{c^2(\alpha - \beta - 1)^2(\alpha - \beta - 2)}}}
 \end{aligned} \tag{4.41}$$

4.3.1 Funções Densidade de Probabilidade

Nos teoremas 4.14, 4.15 e 4.16 são deduzidas as fdps das variáveis $U = X + Y$, $P = XY$ e $Q = X/(X + Y)$ quando X e Y seguem o modelo (4.37).

Teorema 4.14 *Se X e Y são distribuídas conjuntamente de acordo com o (4.37), então:*

$$\begin{aligned}
 f(u) &= K u^{\alpha + \beta - 1} \sum_{k=0}^{\infty} \left[\frac{(cu^2)^k}{k!} {}_1F_1(\alpha + 2k; \alpha + \beta + 2k; -(au + cu^2)) \right. \\
 &\quad \left. \times B(\alpha + 2k, \beta) \right],
 \end{aligned}$$

em que $u > 0$.

Demonstração: De (4.37) obtém-se que a distribuição conjunta de $U = X + Y$ e $Q = X/(X + Y)$ é dada por:

$$f(u, q) = K (uq)^{\alpha - 1} [u(1 - q)]^{\beta - 1} \exp \left\{ - [auq + cu^2q(1 - q)] \right\} \times |u|$$

$$f(u, q) = K u^{\alpha+\beta-1} q^{\alpha-1} (1-q)^{\beta-1} \exp\{-[auq + cu^2q(1-q)]\}. \quad (4.42)$$

Desse modo, a fdp de U é dada por:

$$\begin{aligned} f(u) &= \int_0^1 f(u, q) dq \\ &= K \int_0^1 u^{\alpha+\beta-1} q^{\alpha-1} (1-q)^{\beta-1} \exp\{-[auq + cu^2q(1-q)]\} dq \\ &= K u^{\alpha+\beta-1} \int_0^1 q^{\alpha-1} (1-q)^{\beta-1} \exp[-(au + cu^2)q] \exp(cu^2q^2) dq \\ &= K u^{\alpha+\beta-1} \int_0^1 q^{\alpha-1} (1-q)^{\beta-1} \exp[-(au + cu^2)q] \left\{ \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(cu^2q^2)^k}{k!} \right\} dq \\ &= K u^{\alpha+\beta-1} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(cu^2)^k}{k!} \int_0^1 q^{\alpha+2k-1} (1-q)^{\beta-1} \exp[-(au + cu^2)q] dq. \end{aligned}$$

Aplicando o lema (2.1) à integral acima, obtém-se:

$$\begin{aligned} f(u) &= \\ &= K u^{\alpha+\beta-1} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(cu^2)^k}{k!} B(\alpha + 2k, \beta) {}_1F_1(\alpha + 2k; \alpha + \beta + 2k; -(au + cu^2)). \end{aligned}$$

Teorema 4.15 *Se X e Y são distribuídas conjuntamente de acordo com (4.37), então:*

$$\begin{aligned} f(q) &= K q^{\alpha-1} (1-q)^{\beta-1} \Gamma(\alpha + \beta) [2cq(1-q)]^{-\frac{\alpha+\beta}{2}} \exp\left[\frac{(aq)^2}{8cq(1-q)}\right] \times \\ &D_{-(\alpha+\beta)}\left(\frac{aq}{\sqrt{2cq(1-q)}}\right), \end{aligned}$$

em que $0 < q < 1$.

Demonstração: De (4.42) tem-se que a distribuição de Q é dada por:

$$\begin{aligned}
f(q) &= \int_0^{\infty} f(u, q) du \\
&= Kq^{\alpha-1} (1-q)^{\beta-1} \int_0^{\infty} u^{\alpha+\beta-1} \exp\{-[auq + cq(1-q)u^2]\} du.
\end{aligned}$$

O resultado segue da aplicação do lema (2.2) à integral.

Teorema 4.16 *Se X e Y são distribuídas conjuntamente de acordo com o (4.37), então:*

$$f(p) = \frac{c^{\beta}}{\Gamma(\beta)} p^{\beta-1} \exp(-cp)$$

em que $p > 0$.

Demonstração: De (4.37) tem-se que a distribuição conjunta de X e P é dada por:

$$f(x, p) = Kx^{\alpha-\beta-1} p^{\beta-1} \exp[-(ax + cp)].$$

Deste modo, a fdp de P é

$$\begin{aligned}
f(p) &= \int_0^{\infty} Kx^{\alpha-\beta-1} p^{\beta-1} \exp[-(ax + cp)] dx \\
&= Kp^{\beta-1} \exp(-cp) \int_0^{\infty} x^{\alpha-\beta-1} \exp(-ax) dx \\
&= \frac{c^{\beta}}{\Gamma(\beta)} p^{\beta-1} \exp(-cp).
\end{aligned}$$

4.3.2 Momentos

Nesta seção são deduzidos os momentos das variáveis $U = X + Y$ e $P = XY$ quando X e Y seguem o modelo gama beta II.

Teorema 4.17 *Se X e Y são distribuídas conjuntamente de acordo com (4.37) então:*

$$E[U^n] = \sum_{j=0}^n \binom{n}{j} \frac{a^n \Gamma(\beta + n - j) \Gamma(\alpha + 2j - \beta)}{c^{n-j} \Gamma(\beta) \Gamma(\alpha - \beta)}$$

para todo inteiro $n \geq 1$.

Demonstração: Tem-se que:

$$E[U^n] = E[(X + Y)^n] = \sum_{j=0}^n \binom{n}{j} E[X^j Y^{n-j}]. \quad (4.43)$$

O resultado segue da aplicação do lema (4.3).

Teorema 4.18 *Se X e Y são distribuídas conjuntamente de acordo com (4.37) então:*

$$E[P^n] = \frac{\Gamma(\beta + n)}{c^n \Gamma(\beta)}$$

para todo inteiro $n \geq 1$.

Demonstração: É dado que: $E[P^n] = E[(XY)^n] = E[X^n Y^n]$. O resultado segue da aplicação do lema (4.3) para $m = n$.

4.3.3 Estimação

Seja $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \dots, (x_n, y_n)$ uma amostra aleatória da variável aleatória (X, Y) com distribuição conjunta expressa por (4.37). A função de verossimilhança é dada por:

$$\begin{aligned} L &= \prod_{i=1}^n f(x_i, y_i) = \prod_{i=1}^n K x_i^{\alpha-1} y_i^{\beta-1} \exp[-(ax_i + cx_i y_i)] \\ &= K^n \prod_{i=1}^n (x_i^{\alpha-1} y_i^{\beta-1}) \exp\left[-\left(a \sum_{i=1}^n x_i + c \sum_{i=1}^n x_i y_i\right)\right]. \quad (4.44) \end{aligned}$$

Tomando o logaritmo da função de verossimilhança obtém-se:

$$\ln(L) = n \ln(K) + (\alpha - 1) \sum_{i=1}^n \ln(x_i) + (\beta - 1) \sum_{i=1}^n \ln(y_i) - a \sum_{i=1}^n x_i - c \sum_{i=1}^n x_i y_i.$$

Assim,

$$\frac{\partial \ln(L)}{\partial a} = \frac{n(\alpha - \beta)}{a} - \sum_{i=1}^n x_i;$$

$$\frac{\partial \ln(L)}{\partial c} = \frac{n\beta}{c} - \sum_{i=1}^n x_i y_i;$$

$$\frac{\partial \ln(L)}{\partial \alpha} = n \ln(a) - n\psi(\alpha - \beta) + \sum_{i=1}^n \ln(x_i);$$

$$\frac{\partial \ln(L)}{\partial \beta} = n \ln(c) - n \ln(a) - n\psi(\beta) + n\psi(\alpha - \beta) + \sum_{i=1}^n \ln(y_i),$$

em que $\psi(\cdot)$ denota a função psi definida em (2.4).

Os estimadores de máxima verossimilhança dos parâmetros a , c , α e β , são as soluções das seguintes equações:

$$\frac{n(\hat{\alpha} - \hat{\beta})}{\hat{a}} - \sum_{i=1}^n x_i = 0; \quad (4.45)$$

$$\frac{n\hat{\beta}}{\hat{c}} - \sum_{i=1}^n x_i y_i = 0; \quad (4.46)$$

$$n \ln(\hat{a}) - n\psi(\hat{\alpha} - \hat{\beta}) + \sum_{i=1}^n \ln(x_i) = 0; \quad (4.47)$$

$$n \ln(\hat{c}) - n \ln(\hat{a}) - n\psi(\hat{\beta}) + n\psi(\hat{\alpha} - \hat{\beta}) + \sum_{i=1}^n \ln(y_i) = 0. \quad (4.48)$$

4.4 Aplicação

Considere os dados descritos na Tabela 2, correspondentes ao período de dias com ocorrência de precipitações (X) e o período contíguo de dias sem ocorrência de precipitação (Y). A partir da amostra $(6, 6), (3, 3), (3, 1), \dots, (1, 3)$, e das equações de verossimilhança, obtém-se as estimativas dos parâmetros dos modelos Gumbel, Crovelli e gama beta tipo II, apresentadas na Tabela 4. Para o modelo Crovelli a tabela fornece ainda o erro padrão associado às estimativas.

Tabela 4 Estimativas dos parâmetros dos modelos

Modelo	$\hat{\theta}$	$\hat{\alpha}$	$\hat{\beta}$	\hat{a}	\hat{c}
Gumbel	0,9906
Crovelli	0,761 (0.002)	0,561 (0.001)
Gama beta	3,391	1,284	0,865	0,190

Na Figura 19 e 20 são apresentadas as fdps ajustadas de X e Y e o gráfico de probabilidade observada versus probabilidade esperada, respectivamente, considerando o modelo Gumbel tipo I.

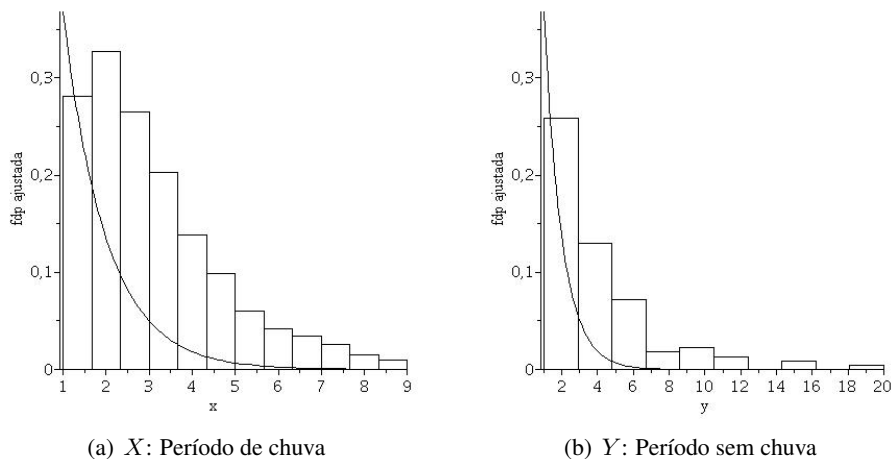


Figura 19 Distribuição ajustada para X e Y , modelo Gumbel

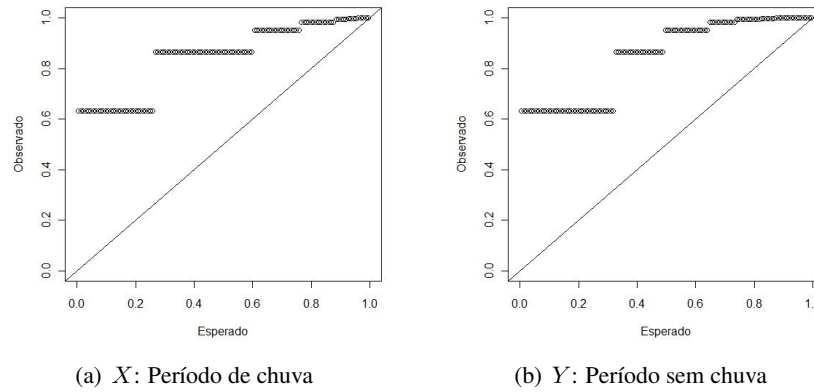


Figura 20 Gráfico de probabilidade observada *versus* probabilidade esperada para X e Y , modelo Gumbel

O modelo Gumbel tipo I não apresentou um bom ajuste para os dados de período de chuva e período sem ocorrência de chuva, como pode ser verificado pelas Figuras 19 e 20. Tal fato era de se esperar pois as marginais da Gumbel tem distribuição exponencial, e as distribuições exponenciais possuem a propriedade de falta de memória (MOOD; GRAYBILL; BOES, 1974), propriedade esta claramente incompatível com o fenômeno período de chuva.

As Tabelas 5, 6 e 7 apresentam os valores observados para as variáveis aleatórias X , Y e U respectivamente, juntamente com os valores esperados pelos modelos gama bivariada de Crovelli e gama beta tipo II. O valor da estatística χ_c^2 foi calculado e um teste de ajuste é apresentado, considerando um nível de significância $\alpha = 0,05$. As fdps ajustadas de X , Y e U e os respectivos gráficos de probabilidades observadas versus probabilidades esperadas sob esses dois modelos, são apresentadas nas figuras seguintes.

Tabela 5 Distribuição do número de dias com precipitação

Dias com chuva	Freq. observada	Freq. esperada	Freq. esperada
X	Fo_i	Fe_i - Crovelli	Fe_i - Gama beta tipo II
1	31	32,77	34,86
2	40	30,13	31,62
3	19	20,77	20,85
4	14	12,73	12,07
5	5	7,31	6,51
6	4	4,03	3,35
7	4	2,16	1,67
9	1	0,59	0,39
χ_c^2	—	5,06	5,83
$P(\chi^2 > \chi_c^2)$	—	0,28	0,06
g.l.	—	4	2

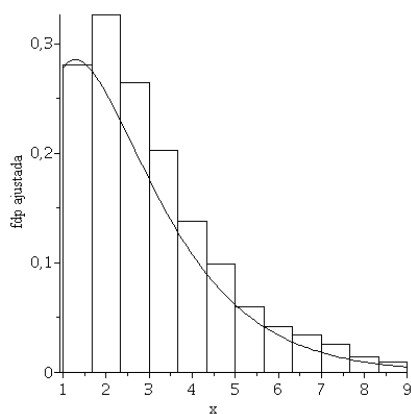
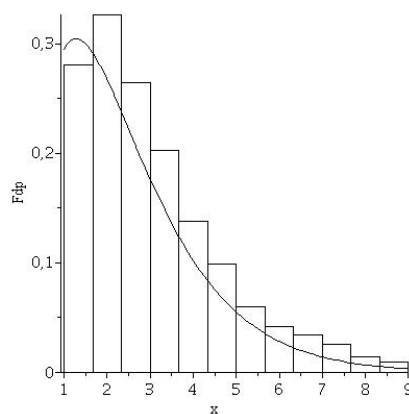
(a) X : Período de chuva(b) X : Período de chuva

Figura 21 Distribuição ajustada para X considerando os modelos Crovelli (a) e Gama beta tipo II (b)

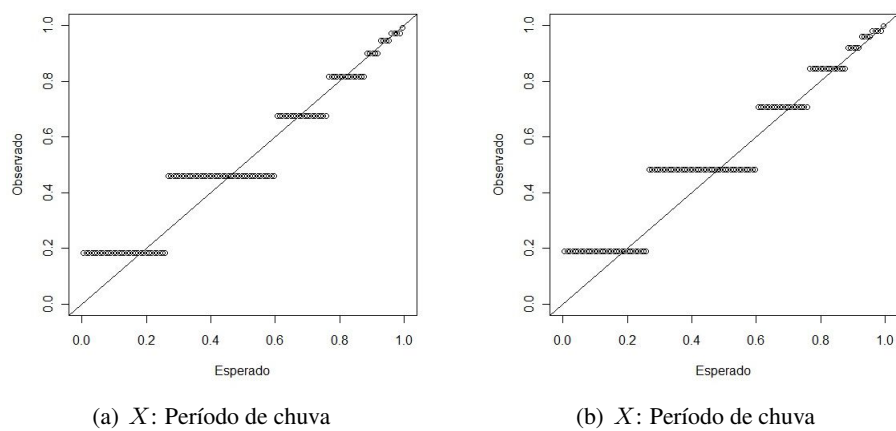
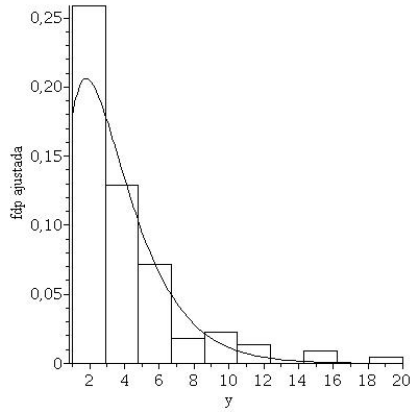


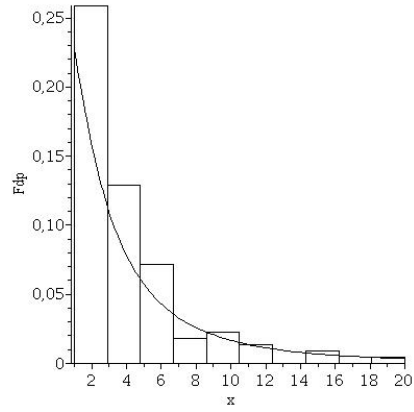
Figura 22 Gráfico de probabilidade observada *versus* probabilidade esperada para X considerando os modelos Crovelli (a) e Gama beta tipo II (b)

Tabela 6 Distribuição do número de dias sem precipitação

Dias sem chuva	Freq. observada	Freq. esperada	Freq. esperada
Y	Fo_i	Fe_i - Crovelli	Fe_i - Gama beta tipo II
1	38	34,17	36,84
2	20	21,17	18,65
3	18	20,70	12,93
4	11	15,75	9,20
5	10	11,24	6,74
6	6	7,70	5,07
7	3	5,13	3,89
8	1	3,35	3,05
9	5	2,15	2,43
11	2	0,86	1,62
12	1	0,53	1,34
15	1	0,12	0,81
16	1	0,76	0,70
20	1	0,10	0,41
χ_c^2	—	14,31	8,43
$P(\chi^2 > \chi_c^2)$	—	0,05	0,08
g.l.	—	7	4

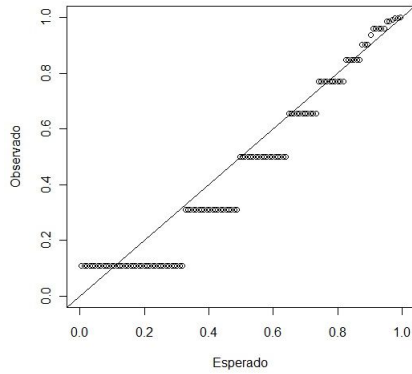


(a) Y : Período sem chuva

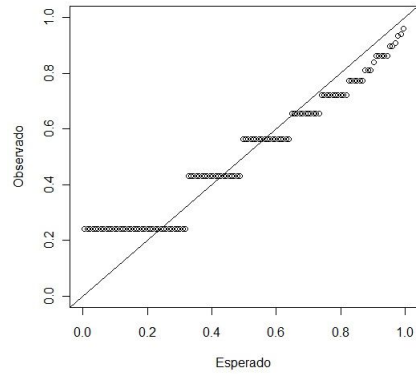


(b) Y : Período sem chuva

Figura 23 Distribuição ajustada para Y considerando os modelos Crovelli (a) e Gama beta tipo II (b)



(a) Y : Período sem chuva

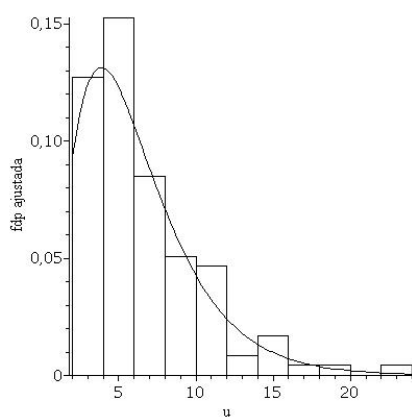
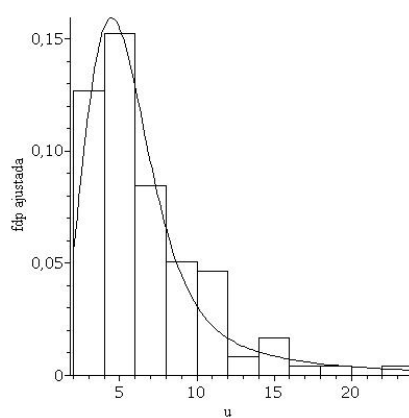


(b) Y : Período sem chuva

Figura 24 Gráfico de probabilidade observada *versus* probabilidade esperada para Y considerando os modelos Crovelli (a) e Gama beta tipo II (b)

Tabela 7 Distribuição do período climático

Dias sem chuva U	Freq. observada F_{o_i}	Freq. esperada F_{e_i} - Crovelli	Freq. esperada F_{e_i} - Gama beta tipo II
2	8	11,24	6,60
3	22	14,83	13,98
4	17	15,60	18,36
5	19	14,54	18,26
6	9	12,59	15,17
7	11	10,39	11,21
8	6	8,29	7,76
9	6	6,46	5,26
10	8	4,94	3,64
11	3	3,73	2,61
12	2	2,79	1,96
14	3	1,53	1,24
15	1	1,12	1,02
17	1	0,60	0,72
18	1	0,44	0,62
24	1	0,63	0,28
χ_c^2	—	11,53	15,85
$P(\chi^2 > \chi_c^2)$	—	0,18	0,02
g.l.	—	8	6

(a) U : Período climático(b) U : Período climáticoFigura 25 Distribuição ajustada para U considerando os modelos Crovelli (a) e Gama beta tipo II (b)

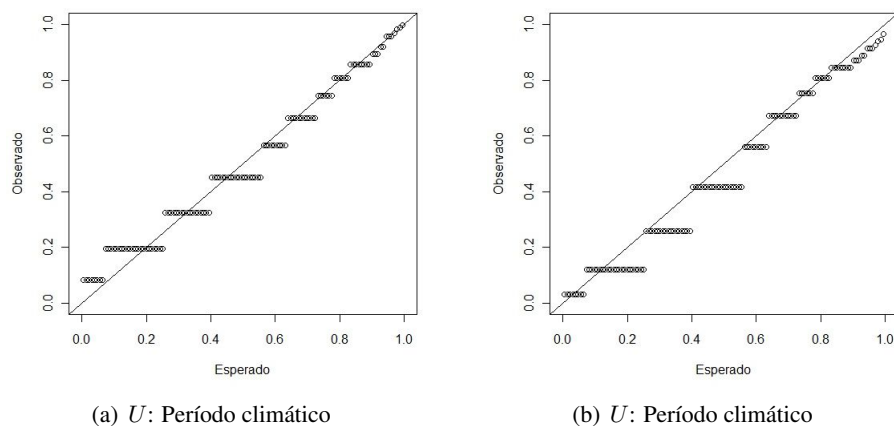


Figura 26 Gráfico de probabilidade observada *versus* probabilidade esperada para U considerando os modelos Crovelli (a) e Gama beta tipo II (b)

Os gráficos das distribuições ajustadas e de probabilidade, figuras de 21 a 26, sugerem um bom ajuste para as variáveis período de chuva (X), período sem ocorrência de chuva (Y) e período climático (U), pelos modelos Crovelli e gama beta tipo II. O teste de qui-quadrado apresentado na tabela 5 confirma que a variável X pode ser descrita pelos dois modelos, $\chi_c^2 < \chi_{tab}^2$. Porém, o valor de $P = P(\chi^2 > \chi_c^2)$, $\alpha = 0,05$, obtido pelo modelo Crovelli é superior ao obtido pelo modelo Gama beta tipo II, indicando assim um melhor ajuste por esse modelo.

Para a variável Y , a estatística do teste de qui-quadrado apresentada na tabela 6 mostra que o período sem ocorrência de chuva pode ser descrito satisfatoriamente pelos dois modelos. Embora haja superioridade do modelo gama beta tipo II, este apresenta um número maior de parâmetros, ficando assim a cargo pesquisador a escolha do melhor modelo. Para a variável U , o modelo que apresentou um melhor ajuste aos dados foi o modelo Crovelli, como pode ser verificado na tabela 7.

Pelos resultados obtidos, pode-se inferir que os modelos gama bivariado de Crovelli e Gama beta tipo II apresentam-se como uma alternativa na análise de dados de precipitação.

5 Conclusão

As distribuições gama bivariada de Crovelli, Gumbel tipo I e Gama beta tipo II, juntamente com a distribuição da soma produto e quociente de suas marginais e respectivos momentos, são algebricamente tratáveis.

O modelo gama beta tipo II tem boas propriedades apresentando promissoras possibilidades de aplicações. O sistema de equações de máxima verossimilhança apresenta uma implementação computacional relativamente simples.

Os modelos gama bivariado de Crovelli e gama beta tipo II apresentaram um bom ajuste aos dados diários de precipitação pluviométrica, sendo portanto alternativas viáveis para explicar o comportamento do período de dias com precipitação e do período contíguo de dias sem precipitação.

REFERÊNCIAS

ASSIS, F. N.; NOVA, N. A. V. Modelagem da ocorrência e da quantidade de chuva em Piracicaba. **Scientia Agricola**, Piracicaba, v. 51, n. 3, p. 172-182, 1994.

BALAKRISHNAN, N.; LAI, C. D. **Continuous bivariate distributions**. Ottawa: Springer Verlag, 2009. 684 p.

BEALS, R.; WONG, R. **Special functions**. New York: Cambridge University, 2010. 450 p.

BEIJO, L. A.; MUNIZ, J. A.; CASTRO NETO, P. Tempo de retorno das precipitações máximas em Lavras (MG) pela distribuição de valores extremos do tipo I. **Ciência e Agrotecnologia**, Lavras, v. 29, n. 3, p. 657-667, maio/jun. 2005.

BLAIN, G. C. **Avaliação e adaptação do índice de severidade de seca de Palmer (PDSI) e do índice padronizado de precipitação (SPI) às condições climáticas do estado de São Paulo**. 2005. 120 p. Dissertação (Mestrado em Gestão de Recursos Agroambientais) - Instituto Agronômico de Campinas, Campinas, 2005.

CATALUNHA, M. J. et al. Aplicação de cinco funções densidade de probabilidade a séries de precipitação pluvial no estado de minas gerais. **Revista Brasileira de Agrometeorologia**, Santa Maria, v. 10, n. 1, p. 153-162, 2001.

CLARKE, R. T. Bivariate gamma distribution for extending annual streamflow records from precipitation: some large-sample results. **Water Resource Research**, Washington, v. 16, n. 5, p. 863-870, 1980.

FELLER, W. **An introduction to probability theory and its applications**. New York: J. Wiley, 1991. 669 p.

FERNANDES, D. S. **Índices para quantificação da seca**. Santo Antônio de Goiás: EMBRAPA Arroz e Feijão, 2009. 48 p. (Documentos, 244).

FERREIRA, D. F. **Estatística básica**. Lavras: UFLA, 2005. 664 p.

GUPTA, A. K.; NADARAJAH, S. Sums, products and ratios for Mckay's bivariate gamma distribution. **Mathematical and Computer Modelling**, Oxford, v. 1, n. 1/2, p. 185-193, 2006.

HEIM, J. R. R. A review of twentieth: century drought indices used in the United States. **Bulletin of the American Meteorological Society**, Boston, v. 83, n. 8, p. 1149-1163, Aug. 2002.

IZAWA, T. Two or multi-dimensional gamma-type distribution and its application to rainnfall data. **Meteorological Research Institute**, Boston, v. 15, p. 167-200, 1965.

LOAICIGA, H. A.; LEIPNIK, R. B. Correlated gamma variables in the analysis of microbial densities in water. **Water Resources**, New York, v. 28, n. 4, p. 329-335, Apr. 2005.

CKEE, T.; DOESKEN, N.; KLEIST, J. The relationship of drought frequency and duration to times scale. In: CONFERENCE ON APPIED CLIMATOLOGY, 8., 1993, Boston. **Proceedings**. . . Boston: American Meteorological Society, 1993. 1 CD-ROM.

MOOD, A. M.; GRAYBILL, F. A.; BOES, D. C. **Introduction to the theory of statistics**. New York: McGraw-Hill, 1974. 577 p.

MORAIS, A. et al. Estimativa da precipitação provável em Lavras (MG) através da distribuição gama. **Revista Brasileira de Agrometeorologia**, Santa Maria, v. 9, n. 2, p. 305-310, 2001.

NADARAJAH, S. Bivariate gamma exponential distribution with application to drought data. **Journal Applied Mathematical and Computer Modelling**, Oxford, v. 24, n. 1/2, p. 221-130, 2007.

———. Bivariate pareto model for drought. **Stochastic Environmental Research and Risk Assessment**, New York, v. 23, n. 6, p. 811-822, Sept. 2008.

———. Products and ratios for a bivariate gamma distribution. **Journal of the American Statistical Association Applied Mathematics and Computing**, Chicago, v. 24, n. 1, p. 581-595, Dec. 2005.

NADARAJAH, S.; GUPTA, A. K. Cherian's bivariate gamma distributions as a model for drought data. **Agrociencia**, Montevideo, v. 40, n. 4, p. 483-490, 2006a.

———. Friday and Patil's bivariate exponential distribution with application to drought data. **Water Resource Management**, Ann Arbor, v. 20, n. 5, p. 749-759, 2006b.

———. Intensity-duration models based on bivariate gamma distributions. **Hiroshima Mathematical Journal**, Hiroshima, v. 36, n. 3, p. 387-395, Dec. 2006c.

NADARAJAH, S.; KOTZ, S. Sums, products and ratios for downtown's bivariate exponential distribution. **Stochastic Environmental Research and Risk Assessment**, New York, v. 20, n. 3, p. 164-170, May 2006.

———. A note on the correlated gamma distribution of Loaiciga and Leipnik. **Advances in Water Resources**, Southampton, v. 30, n. 4, p. 1053-1055, Apr. 2007.

NELSEN, R. **An introduction to copulas**. New York: Springer-Verlag, 1999. 270 p.

OLDHAM, K.; MYLAND, J.; SPANIER, J. **An atlas of functions**: with equator, the atlas function calculator. Ottawa: Springer Verlag, 2009. 750 p.

PALMER, W. **Meteorological drought**. USWeather Bureau Research, Washington, v. 45, p. 1-58, 1965.

PRUDNIKOV, A. P.; MARICHEV, O. I. **Integrals and series**. Amsterdam: Gordon and Breach, 1998. 808 p.

R DEVELOPMENT CORE TEAM. **R**: a language and environment for statistical computing. Vienna, 2010. Disponível em: < [http : //www.r – project.org](http://www.r-project.org) >. Acesso em: 20 jul. 2011.

SAMPAIO, S. C. et al. Estimativa e distribuição da precipitação mensal provável no Estado do Paraná. **Acta Scientiarum Human and Social Sciences**, Maringá, v. 28, n. 2, p. 267-272, 2006.

SHIAU, J. T.; FENG, S.; NADARAJAH, S. Assessment of hydrological droughts for the Yellow River, China, using copulas. **Hydrological Processes**, Chichester, v. 21, n. 16, p. 2157-2163, June 2007.

ILVA, J. C. et al. Análise de distribuição de chuva para Santa Maria, RS. **Revista Brasileira de Engenharia Agrícola e Ambiental**, Campina Grande, v. 11, n. 1, p. 67-72, 2007.

THORNTHWAITE, C. W.; MATHER, J. R. **The water balance**. New Jersey: Drexel Institute of Technology, 1955. 104 p.

WILHITE, D. A.; GLANTZ, M.H. Understanding the drought phenomenon: The role definitions. In: Planning for drought toward a reduction of societal vulnerability. **Proceedings**. . . WESTVIEW, p. 11-14, 1987.

YUE, S. A bivariate gamma distribution for use in multivariate flood frequency analysis. **Journal of Hydrology**, Amsterdam, v. 15, n. 6, p. 1033-1045, Apr. 2001.

YUE, S.; OUARDA, T. B. M. J.; BOBEE, B. A review of bivariate gamma distributions for hydrological application. **Journal of Hydrology**, Amsterdam, v. 246, n. 1/4, p. 1-18, June 2001.

ANEXOS

ANEXO A: Dados diários de precipitação pluviométrica, Passo Fundo RS. . . . 113

ANEXO A

A tabela abaixo apresenta valores de X : período de chuva , Y : período sem ocorrência de chuva e a precipitação total em cada período chuvoso.

Tabela 8 Dados diários de precipitação pluviométrica - Passo Fundo RS

X	Prec (mm)	Y	X	Prec (mm)	Y	X	Prec (mm)	Y
6	107,1	6	1	9,2	9	3	26,6	4
3	90,7	3	1	13,4	2	1	2,6	1
1	22,2	3	4	71,1	1	2	21,7	3
2	2,3	5	1	7,6	4	3	43,0	2
4	30,2	2	2	2,3	1	2	20,8	1
6	156,2	1	2	4,3	16	4	80,6	2
5	82,4	5	6	40,0	4	2	20,5	5
3	98,3	11	1	17,6	2	1	1,7	1
7	169,3	3	1	6,1	1	2	27,8	1
3	82,3	2	4	109,4	20	4	58,9	6
2	24,4	3	3	107,0	1	1	11,6	1
3	115,4	2	2	9,8	6	3	4,7	1
2	8,2	1	2	12,0	1	2	25,3	1
2	39,9	3	4	3,1	2	2	11,6	3
2	40,8	4	2	84,2	3	1	10,0	2
1	23,2	1	2	4,7	5	3	10,0	1
1	0,2	1	2	17,1	3	6	36,3	1
1	1,0	1	2	15,2	3	2	35,5	2
1	8,4	1	4	126,3	11	7	101,2	1
1	12,2	2	2	0,2	7	7	64,7	5
1	0,1	9	3	13,8	8	2	9,0	12
3	13,5	1	2	53,7	1	1	3,8	6
2	53,7	1	4	76,1	3	9	209,4	5
4	89,7	1	2	31,7	1	1	3,6	2
5	124,3	2	2	11,8	1	1	1,4	3
2	3,2	1	1	26,5	5	1	0,8	3
4	68,7	1	1	1,6	3	2	46,2	1
1	23,0	1	2	19,6	7	3	20,7	2

Continuação da tabela 8

X	Prec (mm)	Y	X	Prec (mm)	Y	X	Prec (mm)	Y
3	42,3	4	2	1,5	15	2	33,5	1
2	22,0	1	4	19,7	1	3	8,8	6
1	12,8	3	5	29,2	5	3	73,8	5
1	4,3	4	5	191,1	4	1	45,0	3
4	28,0	1	2	2,0	9	2	9,5	7
1	5,4	2	3	52,0	1	2	6,2	9
4	51,0	4	4	43,1	4	2	46,4	2
1	1,4	3	2	4,8	4	1	31,8	9
2	14,5	1	2	41,8	6	7	136,2	2
5	46,4	2	1	2,9	5	3	40,1	1
3	1,1	2	1	5,4	3			
3	12,1	1	2	0,8	4			